Mathtrace – príručka

VII. Aplikácie: veda, ekonómia a optimalizácia

Obsah

VII. Aplikácie: veda, ekonómia a optimalizácia

47. Chémia

48. Elektrotechnika

49. Biológia a medicína

50. Ekonómia, financie a poisťovníctvo

51. Lineárne programovanie, doprava, priradenie a maticové hry

52. Grafy, siete a logistika

53. Psychometria

47. Chémia

Chemické výpočty nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Chémia: vyčíslenie chemickej rovnice, pH roztoku kyseliny, zásady, soli alebo viacsýtnej kyseliny, tlmivý roztok, titrácia s titračnou krivkou, Arrheniova rovnica a Lambertov–Beerov zákon. Vo formulári vyberiete úlohu a hľadanú veličinu a vyplníte hodnoty s jednotkami; ikonka „?“ vysvetlí, odkiaľ vzorec pochádza. Malé konštanty sa dajú písať ako 1.8e-5 alebo 1,8·10^-5, namerané hodnoty (tabuľka teplôt, kalibrácia) ako čísla oddelené medzerou.

Chemickú rovnicu stačí napísať do ručného zadania, napríklad Fe + O2 -> Fe2O3 (šípka -> alebo =, rovnováha <=>), aj s iónmi MnO4^- a Fe^3+, zátvorkami Ca(OH)2, hydrátmi CuSO4·5H2O a skupenstvom (aq). Koeficienty sú jadro matice bilancie prvkov (a náboja): postup napíše bilančné rovnice, maticu, jej redukovaný tvar Gaussovou eliminációu, voľný koeficient ako parameter a najmenšie celé čísla, nakoniec skúšku. Spozná aj rovnicu, ktorú vyčísliť nemožno (prvok len na jednej strane, látka na nesprávnej strane) alebo ktorej vyčíslenie nie je jednoznačné.

pH počíta presne (pri slabej kyseline kvadratickou rovnicou) a k tomu ukáže školské zjednodušenie a stupeň disociácie; pri viacsýtnej kyseline rieši bilanciu náboja numericky a graf ukáže zastúpenie foriem kyseliny podľa pH. Pri tlmivom roztoku po pridaní silnej kyseliny alebo zásady vypočíta novú rovnováhu a zmenu pH. Titrácia určí pH podľa oblasti krivky (začiatok, tlmivá oblasť, bod ekvivalencie, prebytok činidla) a v grafe ukáže celú titračnú krivku. Arrheniova rovnica z dvoch meraní alebo z tabuľky regresiou ln k proti 1/T; Lambertov–Beerov zákon zo známeho ε, zo štandardu alebo z kalibračnej priamky.

Ukážky

Vyčíslenie oxidácie kyseliny chlorovodíkovej manganistanom.

Zadanie: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Výsledok

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

Postup

- Neznáme koeficienty označíme písmenami
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Atómy pri reakcii nevznikajú ani nezanikajú – každého prvku je vľavo rovnako atómov ako vpravo

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}: &\quad a = c \\
\mathrm{Mn}: &\quad a = d \\
\mathrm{O}: &\quad 4a = f \\
\mathrm{H}: &\quad b = 2f \\
\mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g
\end{aligned}$$

- Homogénna sústava v maticovom tvare – stĺpec pre každú látku, produkty so znamienkom mínus

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2
\end{pmatrix}$$

- Gaussovou elimináciou prevedieme maticu na redukovaný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5}
\end{pmatrix}$$

- Jeden koeficient zostane voľný, $g = t$; ostatné z neho vyjadríme

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Zvolíme $t = 5$, aby boli všetky koeficienty najmenšie celé čísla:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Skúška – počty atómov vľavo a vpravo

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\
\mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\
\mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\
\mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\
\mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16
\end{aligned}$$

Iónová redoxná rovnica s bilanciou náboja.

Zadanie: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Výsledok

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5$$

Postup

- Neznáme koeficienty označíme písmenami
  $a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$
- Atómy pri reakcii nevznikajú ani nezanikajú a náboj sa zachováva (riadok q) – pre každý prvok aj pre náboj platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$

- Homogénna sústava v maticovom tvare – stĺpec pre každú látku, produkty so znamienkom mínus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gaussovou eliminációu prevedieme maticu na redukovaný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

- Jeden koeficient zostane voľný, $g = t$; ostatné z neho vyjadríme

$$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$

- Zvolíme $t = 4$, aby boli všetky koeficienty najmenšie celé čísla:
  $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$
- Skúška – počty atómov a náboj vľavo a vpravo

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH 0,1M kyseliny octovej (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Zadanie: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Výsledok

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Postup

- Hľadáme pH; zadané: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- pH je záporný dekadický logaritmus koncentrácie vodíkových (oxóniových) iónov: pH = −log[H⁺]. Silná kyselina (HCl) disociuje úplne, takže [H⁺] = c; silná zásada dáva [OH⁻] = c a pH = 14 − pOH. Slabá kyselina HA ⇌ H⁺ + A⁻ disociuje len čiastočne podľa disociačnej konštanty Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; z nej vyplýva kvadratická rovnica x² + Ka·x − Ka·c = 0. Soľ slabej kyseliny a silnej zásady (octan sodný) reaguje s vodou zásadito s Kb = Kw/Ka, soľ slabej zásady (NH_4Cl) kyslo. Pri viacsýtnej kyseline (H_2SO_4, H_3PO_4) vyriešime bilanciu náboja numericky. Počíta sa pri 25 °C, Kw = 10⁻¹⁴. Rovnica modelu

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Vyjadríme hľadanú veličinu

$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$

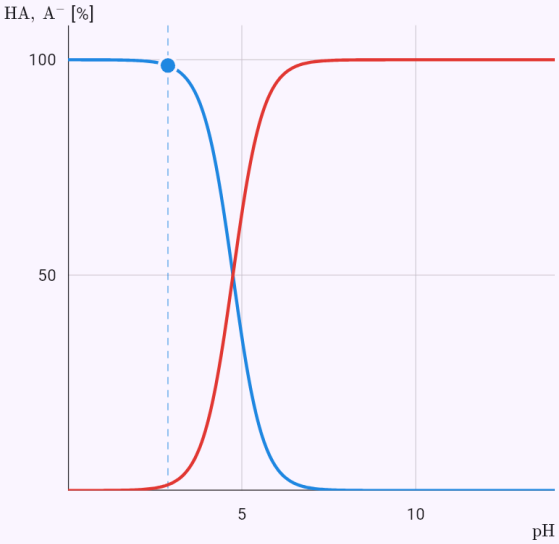
- Dosadíme

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Stupeň disociácie: $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Stupeň disociácie je pod 5 %, takže by stačilo aj zjednodušenie c − x ≈ c:
  $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- pH je záporný logaritmus koncentrácie H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

pH 0,1M kyseliny fosforečnej a zastúpenie jej foriem.

Zadanie: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

Výsledok

$$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

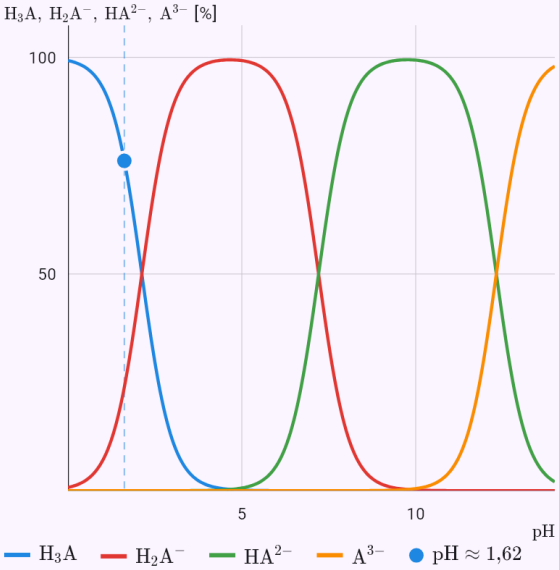
Postup

- Hľadáme pH; zadané
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- pH je záporný dekadický logaritmus koncentrácie vodíkových (oxóniových) iónov: pH = −log[H⁺]. Silná kyselina (HCl) disociuje úplne, takže [H⁺] = c; silná zásada dáva [OH⁻] = c a pH = 14 − pOH. Slabá kyselina HA ⇌ H⁺ + A⁻ disociuje len čiastočne podľa disociačnej konštanty Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; z nej vyplýva kvadratická rovnica x² + Ka·x − Ka·c = 0. Soľ slabej kyseliny a silnej zásady (octan sodný) reaguje s vodou zásadito s Kb = Kw/Ka, soľ slabej zásady (NH_4Cl) kyslo. Pri viacsýtnej kyseline (H_2SO_4, H_3PO_4) vyriešime bilanciu náboja numericky. Počíta sa pri 25 °C, Kw = 10^{-14}. Rovnica modelu
  $\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+ + H_2A^-} \rightleftharpoons \mathrm{2\,H^+ + HA^{2-}} \rightleftharpoons \mathrm{3\,H^+ + A^{3-}}$
- Roztok je elektricky neutrálny − bilancia náboja
  $[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$
- Koncentrácie jednotlivých foriem kyseliny z disociačných konštánt
  $[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1}\cdots K_{ai}\,h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$
- Rovnicu vyriešime numericky (polením intervalu):
  $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › Postup metódy: bisekcia, 14 iterácií
- pH je záporný logaritmus koncentrácie H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- Druhá konštanta je oveľa menšia ako prvá, takže pH určuje hlavne prvý stupeň − ako pri slabej jednosýtnej kyseline

$$x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

- Zastúpenie foriem kyseliny pri tomto pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Octanový tlmivý roztok po pridaní 1 mmol silnej kyseliny.

Zadanie: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];`

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Výsledok

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Postup

- Hľadáme pH; zadané $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Prevedieme jednotky $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Konštanta z pK: $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Tlmivý roztok je zmes slabej kyseliny a jej soli (CH_3COOH + CH_3COONa) alebo slabej zásady a jej soli (NH_3 + NH_4Cl). Z disociačnej konštanty vyplýva Hendersonova–Hasselbalchova rovnica pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Pridaná silná kyselina zreaguje so zásaditou zložkou na kyslú (A^- + H^+ → HA), zásada naopak – pomer zložiek sa zmení len málo, a preto sa pH takmer nemení. Tlmivý roztok funguje najlepšie pre pomer zložiek 0,1 až 10, teda pH = pKa ± 1. Rovnica modelu $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$

- Látkové množstvá zložiek tlmivého roztoku $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- Pridaná látka zreaguje s jednou zložkou tlmivého roztoku $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,\mathrm{m}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Dosadíme: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log \dfrac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH pred pridaním a jeho zmena: $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Titrácia kyseliny octovej hydroxidom sodným – bod ekvivalencie.

Zadanie: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

`5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)`

Výsledok

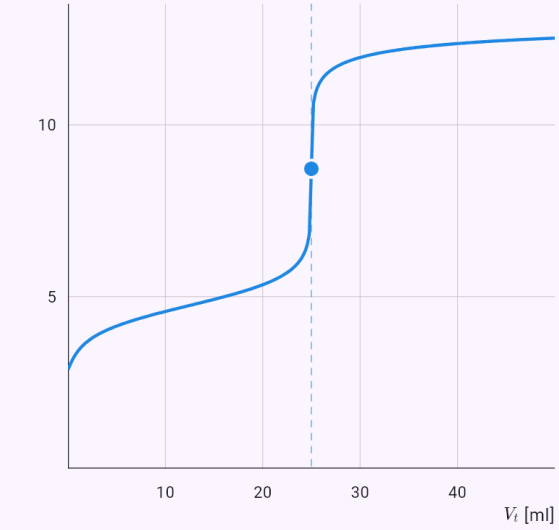
$$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$$

Postup

- Hľadáme pH; zadané $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- Pri titrácii pridávame z byrety titračné činidlo so známou koncentráciou, kým nezreaguje všetka titrovaná látka. Bod ekvivalencie nastane, keď látkové množstvo činidla $c_t \cdot V_t$ zodpovedá látkovému množstvu titrovanej látky: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Pred ním určuje pH nezreagovaná látka (so slabou kyselinou vzniká tlmivý roztok), v bode ekvivalencie reakcia vzniknutej soli s vodou, za ním prebytok činidla. Titračná krivka v grafe je vypočítaná presne z bilancie náboja. Rovnica modelu: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Bod ekvivalencie – činidla je rovnaké látkové množstvo ako titrovanej látky $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Pridané činidlo a celkový objem: $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Bod ekvivalencie – všetka titrovaná látka zreagovala.
- V bode ekvivalencie je v roztoku len vzniknutá soľ – jej reakcia s vodou $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH a pH (pH + pOH = 14)

$$\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Aktivačná energia z tabuľky rýchlostných konštánt.

Zadanie: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

Výsledok

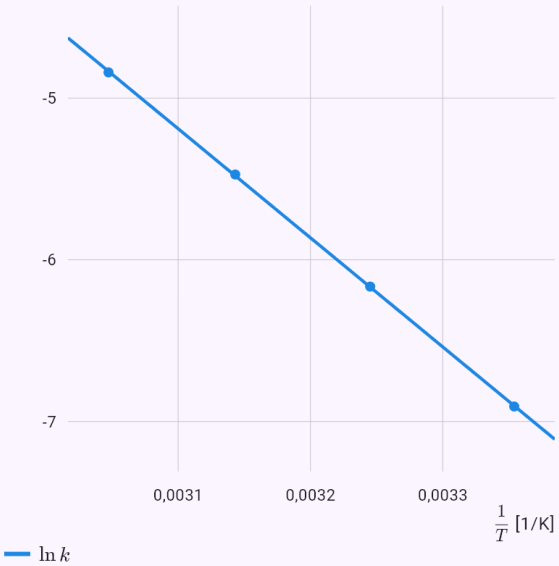
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Postup

- Hľadáme E_a; zadané
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Prevedieme jednotky:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- Rýchlostná konštanta reakcie rastie s teplotou podľa Arrheniovej rovnice k = A·e^(−Ea/RT), kde Ea je aktivačná energia – energetická bariéra, ktorú musia zrážajúce sa molekuly prekonať – a A predexponenciálny faktor. Z dvoch meraní vyplýva ln(k₂/k₁) = (Ea/R)(1/T₁ − 1/T₂). Z viacerých meraní sa Ea určí regresnou priamkou: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) je priamka v premennej 1/T (Arrheniov graf) so smernicou −Ea/R. Rovnica modelu:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Zlogaritmovaním dostaneme priamku
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Hodnoty pre regresnú priamku
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Regresná priamka metódou najmenších štvorcov
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $E_a = -bR$
- Dosadíme:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Predexponenciálny faktor: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Koncentrácia vzorky z kalibračnej priamky.

Zadanie: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299`

`0.452 0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

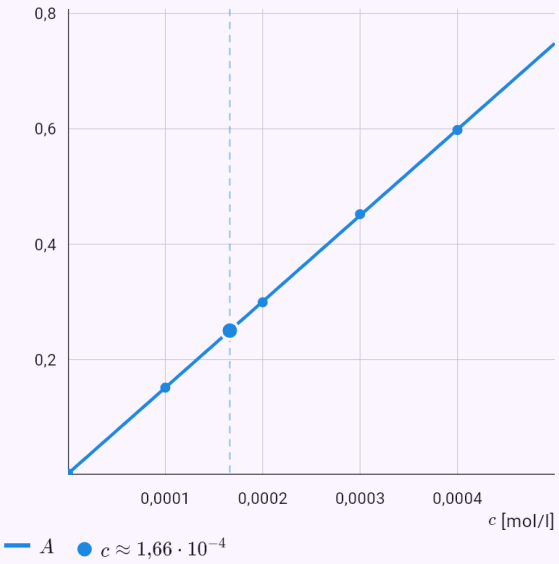
Výsledok

$$c \approx 0{,}166\,\mathrm{mmol/l}$$

Postup

- Hľadáme c; zadané
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\,\mathrm{mmol/l}, \quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Prevedieme jednotky
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot10^{-4};\ 3\cdot10^{-4};\ 4\cdot10^{-4}\right)\,\mathrm{mol/l}$
- Roztok pohlcuje svetlo úmerne koncentrácii absorbujúcej látky a hrúbke vrstvy: absorbancia A = ε·l·c (Lambertov–Beerov zákon), kde ε je molárny absorpčný koeficient a l dĺžka kyvety. Spektrofotometer meria transmitanciu T – podiel prejdeného svetla – a A = −log T. Neznámu koncentráciu určíme zo známeho ε, porovnaním so štandardom so známou koncentráciou alebo z kalibračnej priamky nameranej na niekoľkých štandardoch (metóda najmenších štvorcov). Zákon platí pre zriedené roztoky. Rovnica modelu: $A = \varepsilon\, l\, c$
- Kalibračná priamka metódou najmenších štvorcov
  $A = a + b\,c: \quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\mathrm{l/m}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $c = \dfrac{A - a}{b}$
- Dosadíme: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l}$
- Prevedieme jednotky:
  $c \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l} = 0{,}1662\,\mathrm{mmol/l}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Cementácia ocele – čas, za ktorý má hĺbka 0,5 mm 0,8 % uhlíka.

Zadanie: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

`cx=0.8[pct]; x=0.5[mm]; process=carburizing)`

Výsledok

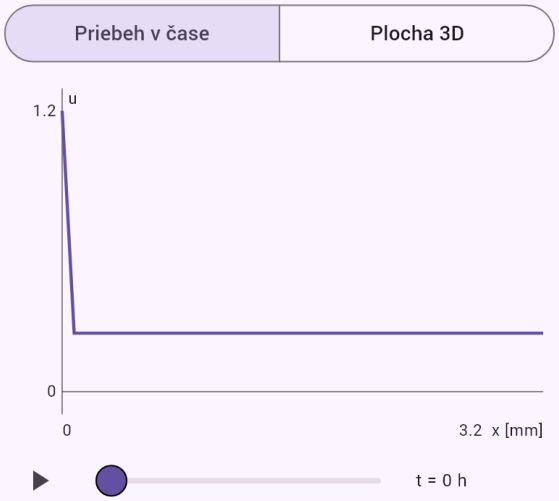
$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

Postup

- Hľadáme t; zadané
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- Prevedieme jednotky
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Látka difunduje z povrchu, na ktorom je stála koncentrácia c_s, do telesa so začiatočnou koncentráciou c_0 – napríklad uhlík do ocele pri cementácii. Platí difúzna rovnica c_t = D·c_xx; pre teleso, ktoré je vzhľadom na hĺbku prieniku nekonečne hrubé, ju vyrieši Laplaceova transformácia v čase: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) s doplnkovou chybovou funkciou. Z nej sa vypočíta koncentrácia v danej hĺbke, hĺbka požadovanej koncentrácie alebo potrebný čas. Rovnica modelu
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Riešenie Laplaceovou transformáciou (polonekonečné teleso): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Inverzná doplnková chybová funkcia
  $\operatorname{erfc} z = \frac{c - c_0}{c_s - c_0} = \frac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $t = \frac{x^2}{4Dz^2}$
- Dosadíme
  $t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$

- Typická hĺbka prieniku je √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dvojnásobná hĺbka potrebuje štvornásobný čas.
- Prevedieme jednotky: $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

Graf



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Koncentrácia uhlíka v hĺbke 0,5 mm po 7 hodinách.

Zadanie: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

```
x=0.5[mm]; t=7[h]; process=carburizing)
```

Výsledok

$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

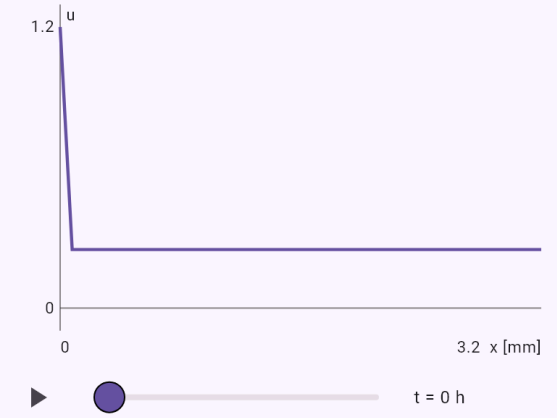
Postup

- Hľadáme c; zadané
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Prevedieme jednotky
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Látka difunduje z povrchu, na ktorom je stála koncentrácia c_s, do telesa so začiatočnou koncentráciou c_0 – napríklad uhlík do ocele pri cementácii. Platí difúzna rovnica c_t = D·c_xx; pre teleso, ktoré je vzhľadom na hĺbku prieniku nekonečne hrubé, ju vyrieši Laplaceova transformácia v čase: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) s doplnkovou chybovou funkciou. Z nej sa vypočíta koncentrácia v danej hĺbke, hĺbka požadovanej koncentrácie alebo potrebný čas. Rovnica modelu
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Riešenie Laplaceovou transformáciou (polonekonečné teleso): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argument chybovej funkcie
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \operatorname{erfc}$
- Dosadíme:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$

- Typická hĺbka prieniku je √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dvojnásobná hĺbka potrebuje štvornásobný čas.
- Prevedieme jednotky: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Známe obmedzenia

- Výpočty pH a titrácie predpokladajú 25 °C (Kw = 10^{-14}) a zriedené roztoky – aktivitné koeficienty sa nepočítajú.
- Titrácia len jednosýtnej kyseliny alebo zásady silným činidlom; viacsýtne kyseliny zatiaľ len ako pH roztoku.
- Chemická rovnica z fotky sa zatiaľ nerozpoznáva – napíšte ju do ručného zadania alebo do formulára.

48. Elektrotechnika

Elektrotechnické výpočty nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Elektrotechnika: sériový a paralelný obvod RLC so striedavým prúdom, filtre RC a RL, rezonančný obvod, delič napätia, Wheatstonov mostík a kompenzácia účinníka. Vo formulári vyberiete zapojenie a hľadanú veličinu a vyplníte hodnoty s jednotkami; ikonka „?“ vysvetlí, odkiaľ vzorce pochádzajú. Napätia a prúdy sú efektívne hodnoty, komplexné čísla sa píšu s j ako v elektrotechnike.

Pri každom obvode nakreslí aplikácia jeho schému s hodnotami súčiastok a pri striedavom prúde frekvenčnú charakteristiku v logaritmickej osi – impedanciu a fázu, pri filtroch prenos v decibeloch (Bodeho diagram). Postup ukáže reaktancie, impedanciu v algebraickom aj goniometrickom tvare (50∠53,13° Ω), fázový posun, prúdy, napätia na súčiastkach a výkon; vysvetlí aj to, prečo sa napätia na súčiastkach sčítavajú ako fázory.

Sériovo-paralelný obvod môžete zadať výrazom, napríklad R1 + (L1 || (R2 + C1)) s hodnotami R1=100 L1=10m C1=1u (predpony m, u, n, k, M). Postup zjednodušuje obvod skupinu po skupine a potom dopočíta napätie a prúd každej súčiastky. Všeobecný obvod (aj s mostíkmi a viacerými zdrojmi) zadáte netlistom ako v programe SPICE – na riadok jedna súčiastka a jej uzly, uzol 0 je zem; postup zostaví rovnice prvého Kirchhoffovho zákona v uzloch, maticu sústavy a vyrieši ju Gaussovou eliminációu. Bez frekvencie sa počíta jednosmerný prúd.

Ukážky

Sériový obvod RLC: výkon, jalový výkon a účinník.

Zadanie: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF];`

```
f=50[Hz]; parts=rlc)
```

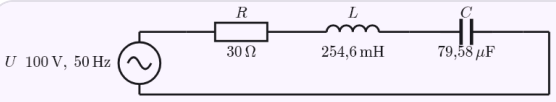
Výsledok

$$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$$
$$Q \approx 160\,\mathrm{var}$$
$$S \approx 200\,\mathrm{VA}$$
$$\cos\varphi \approx 0{,}6$$

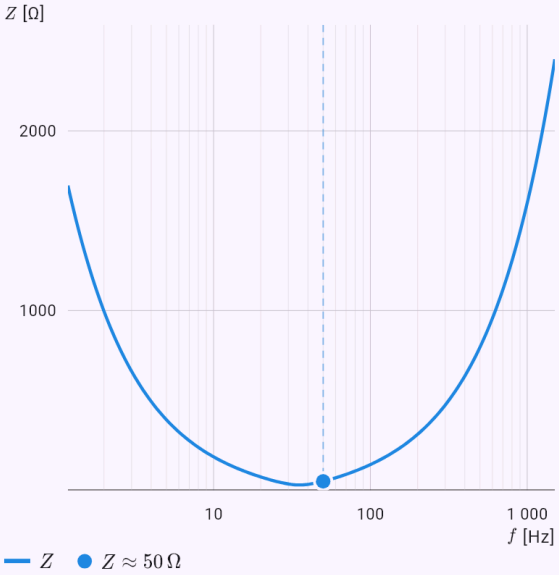
Postup

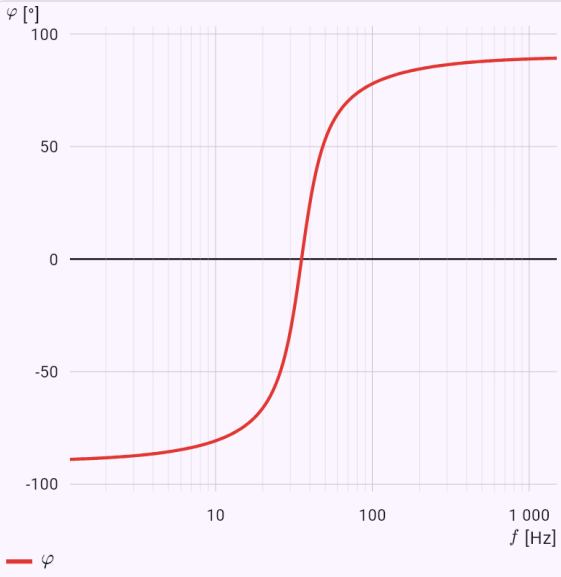
- Hľadáme P; zadané
  $U = 100\,\mathrm{V}, \quad R = 30\,\Omega, \quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH}, \quad C = 79{,}5$
- Prevedieme jednotky
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H}, \quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- V obvode so striedavým prúdom kladú cievka a kondenzátor prúdu odpor závislý od frekvencie – reaktanciu: induktívna X_L = ωL rastie s frekvenciou, kapacitná X_C = 1/(ωC) klesá (ω = 2πf). Napätie na cievke predbieha prúd o 90°, na kondenzátore sa o 90° oneskoruje, preto sa nesčítajú aritmeticky, ale ako fázory – komplexné čísla s imaginárnou jednotkou j: impedancia Z = R + j(X_L − X_C), jej veľkosť Z = √(R² + (X_L − X_C)²) a fázový posun φ = arctan((X_L − X_C)/R). Prúd I = U/Z, činný výkon P = UI·cos φ. Napätia a prúdy sú efektívne hodnoty. Rovnica modelu:
  $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Uhlová frekvencia: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Induktívna reaktancia cievky:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- Kapacitná reaktancia kondenzátora
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Veľkosť impedancie – reaktancia a odpor sú na seba kolmé fázory
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- Impedancia ako komplexné číslo (algebraický a goniometrický tvar)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Fázový posun prúdu za napätím:
  $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Obvod má induktívny charakter – prúd sa za napätím oneskoruje.
- Rezonančná frekvencia: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- Prúd z Ohmovho zákona: $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Činný, jalový a zdanlivý výkon
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Účinník: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Schéma obvodu



Frekvenčná charakteristika





Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok frekvencie. Bodky sú zadaná frekvencia a význačné body.

Paralelný obvod RLC: prúdy vetvami a celkový prúd.

Zadanie: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

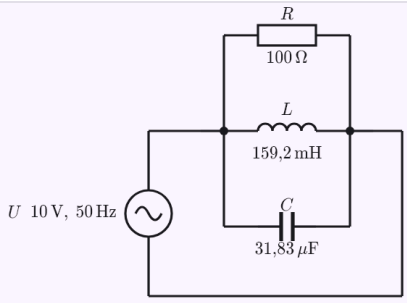
Výsledok

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

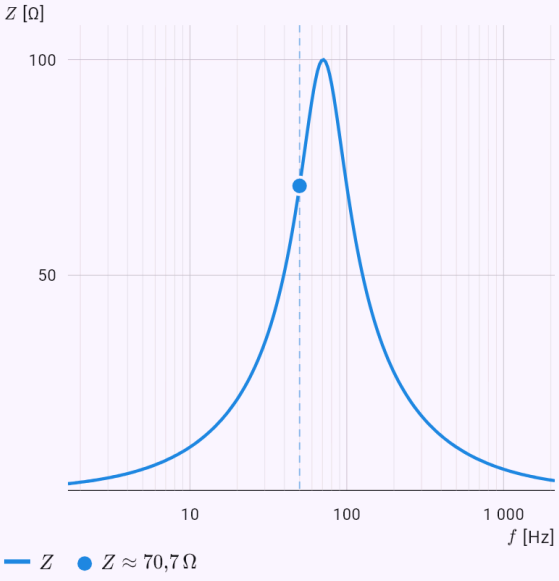
Postup

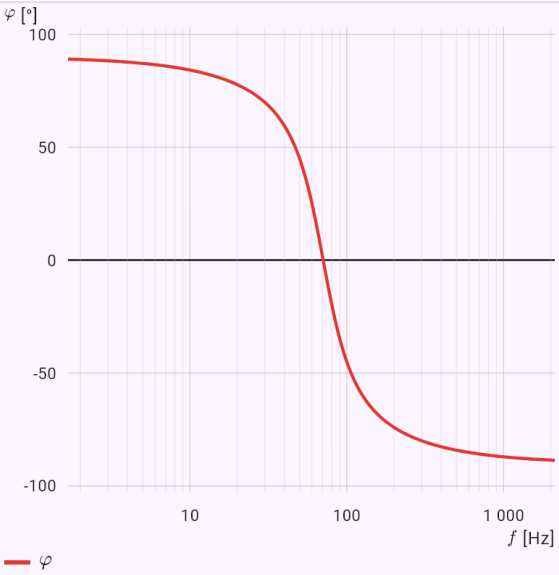
- Hľadáme I; zadané
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Prevedieme jednotky
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- V paralelnom obvode je na všetkých vetvách rovnaké napätie a prúdy vetiev sa sčítajú ako fázory. Preto sa namiesto impedancií sčítajú ich prevrátené hodnoty – admitancie: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). Prúd rezistorom je vo fáze s napätím, prúd cievkou sa oneskoruje o 90°, prúd kondenzátorom o 90° predbieha. Celkový prúd I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) môže byť menší ako prúdy jednotlivými vetvami – pri rezonancii sa prúdy cievkou a kondenzátorom vyrušia. Rovnica modelu
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Uhlová frekvencia: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Induktívna reaktancia cievky:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Kapacitná reaktancia kondenzátora
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admitancia – prevrátené hodnoty impedancií vetiev sa sčítajú ako fázory
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impedancia obvodu: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- Impedancia ako komplexné číslo (algebraický a goniometrický tvar)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Fázový posun prúdu za napätím
  $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Obvod má induktívny charakter – prúd sa za napätím oneskoruje.
- Rezonančná frekvencia: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Prúdy vetvami – na všetkých je rovnaké napätie
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- Celkový prúd – fázorový súčet prúdov vetiev:
  $$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$$
- Prúdy vetvami sa sčítajú ako fázory, nie aritmeticky – prúd cievkou a kondenzátorom sú v protifáze.

Schéma obvodu



Frekvenčná charakteristika





Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok frekvencie. Bodky sú zadaná frekvencia a význačné body.

Dolný priepust RC: prenos v decibeloch a Bodeho diagram.

Zadanie: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

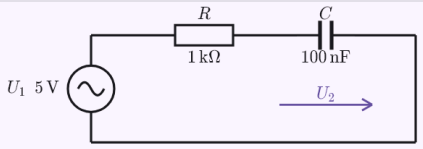
Výsledok

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

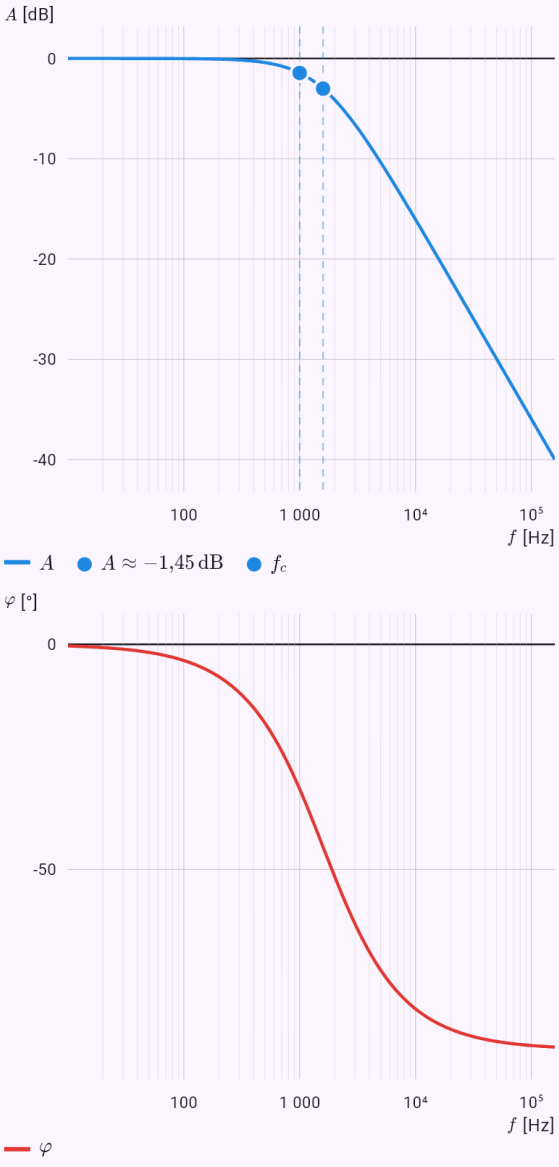
Postup

- Zadané
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad f = 1\,\mathrm{kHz}, \quad U_1 = 5\,\mathrm{V}$
- Prevedieme jednotky
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad f = 1$
- Filter prvého rádu je delič napätia z rezistora a kondenzátora (alebo cievky). Dolný priepust (RC s výstupom na kondenzátore) prepúšťa nízke frekvencie a potláča vysoké, horný priepust naopak. Medzná frekvencia f_c = 1/(2πRC), pri RL f_c = R/(2πL): na nej klesne výstupné napätie na 1/√2 ≈ 70,7 % (o 3 dB) a fázový posun je 45°. Prenos H = U₂/U₁ je komplexné číslo; jeho veľkosť v decibeloch A = 20·log|H| a fáza tvoria Bodeho diagram – nad medznou frekvenciou klesá prenos dolného priepustu o 20 dB na dekádu. Rovnica modelu
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Dolný priepust: nízke frekvencie prejdú, vysoké sú potlačené.
- Medzná frekvencia:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$
- Na medznej frekvencii je prenos 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) a fázový posun 45°.
- Pomer frekvencie k medznej: $\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$
- Veľkosť prenosu: $|\hat{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$
- Prenos v decibeloch: $A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$
- Fázový posun výstupu proti vstupu:
  $$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Výstupné napätie: $U_2 = |\hat{H}|\,U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$

Schéma obvodu



Frekvenčná charakteristika



Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok frekvencie. Bodky sú zadaná frekvencia a význačné body.

Sériový rezonančný obvod: činiteľ akosti a šírka pásma.

Zadanie: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

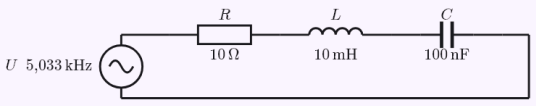
Výsledok

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\mathrm{Hz}$$

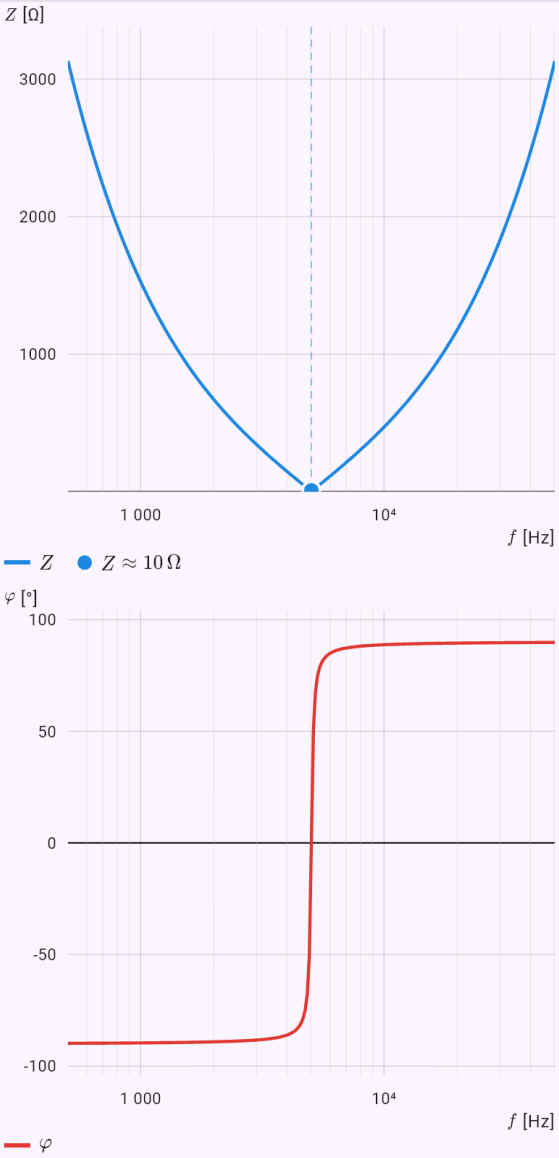
Postup

- Zadané: $L = 10\,\mathrm{mH}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Prevedieme jednotky:
  $L = 10\,\mathrm{mH} = 0{,}01\,\mathrm{H}, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}$
- Pri rezonančnej frekvencii $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ sú reaktancie cievky a kondenzátora rovnaké a navzájom sa vyrušia. Sériový obvod má potom najmenšiu impedanciu (len R) a najväčší prúd, paralelný naopak najväčšiu impedanciu. Ostrosť rezonancie udáva činiteľ akosti Q – pri sériovom obvode $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ – a šírka pásma $B = f_0/Q$ medzi frekvenciami, kde prúd klesne na $1/\sqrt{2}$ maxima. Ladenie: kapacita pre danú frekvenciu $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Rovnica modelu: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- Dosadíme: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\mathrm{Hz}$
- Pri rezonancii sa reaktancie cievky a kondenzátora vyrušia – sériový obvod má najmenšiu impedanciu a najväčší prúd.
- Činiteľ akosti
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Šírka pásma: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$
- Medzné frekvencie pásma (pokles na $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Schéma obvodu



Frekvenčná charakteristika



Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok frekvencie. Bodky sú zadaná frekvencia a význačné body.

Delič napätia so záťažou.

Zadanie: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

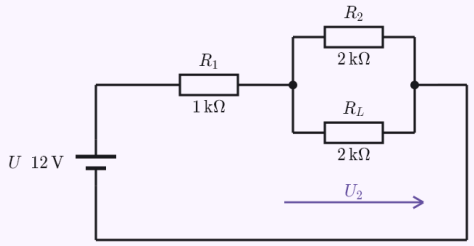
Výsledok

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

Postup

- Hľadáme U_2; zadané
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Prevedieme jednotky
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Dva sériovo zapojené rezistory delia napätie v pomere svojich odporov: obomi tečie rovnaký prúd I = U/(R₁ + R₂), takže U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Pripojená záťaž R_L je paralelne k R₂ a zmenší odpor dolnej časti na R₂R_L/(R₂ + R_L) – výstupné napätie zaťaženého deliča je preto menšie ako naprázdno. Rovnica modelu:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- Záťaž je paralelne k R_2
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Dosadíme: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- Naprázdno by bolo $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – záťaž výstupné napätie zníži.

Schéma obvodu



Vyváženie Wheatstonovho mostíka.

Zadanie: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

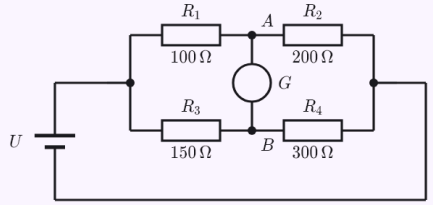
Výsledok

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

Postup

- Hľadáme R_4; zadané:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Wheatstonov mostík tvoria dva deliče napätia zapojené paralelne; medzi ich stredmi (bodmi A a B) je meradlo. Mostík je vyvážený – meradlom netečie prúd – keď oba deliče delia napätie v rovnakom pomere: R₁/R₂ = R₃/R₄. Tak sa presne meria neznámy odpor. Nevyvážený mostík dáva napätie U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – tak pracujú napríklad tenzometre. Rovnica modelu:
  $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Mostík je vyvážený – body A a B majú rovnaké napätie a meradlom netečie prúd.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Dosadíme: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Schéma obvodu



Kondenzátor na kompenzáciu účinníka z 0,7 na 0,95.

Zadanie: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

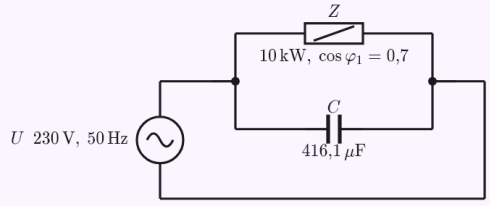
Výsledok

$$C \approx 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$$

Postup

- Hľadáme C; zadané
  $P = 10\,\mathrm{kW}, \quad U = 230\,\mathrm{V}, \quad f = 50\,\mathrm{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Prevedieme jednotky: $P = 10\,\mathrm{kW} = 10\,000\,\mathrm{W}$
- Spotrebiče s cievkami (motory, transformátory) odoberajú okrem činného výkonu P aj jalový výkon Q = P·tan φ, ktorý zbytočne zaťažuje vedenie väčším prúdom. Kondenzátor zapojený paralelne dodá jalový výkon opačného znamienka Q_C = Q₁ − Q₂ a zvýši účinník z cos φ₁ na cos φ₂. Potrebná kapacita C = Q_C/(ωU²), kde ω = 2πf. Činný výkon sa nemení, prúd zo siete klesne.
  Rovnica modelu
  $$Q_C = P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2), \quad C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$
- Fázové posuny pred kompenzáciou a po nej
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Jalové výkony – kondenzátor dodá rozdiel
  $Q_1 = P\operatorname{tg}\varphi_1 \approx 10\,200\,\mathrm{var}$
  $Q_2 = P\operatorname{tg}\varphi_2 \approx 3287\,\mathrm{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\mathrm{var}$
- Uhlová frekvencia: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Dosadíme: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$
- Prúd zo siete pred kompenzáciou a po nej
  $$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\mathrm{A}$$
- Prevedieme jednotky: $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} = 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$

Schéma obvodu



Obvod zadaný výrazom – zjednodušenie a prúdy všetkými súčiastkami.

Zadanie: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Výsledok

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\ \Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\ \mathrm{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\ \mathrm{W}$$

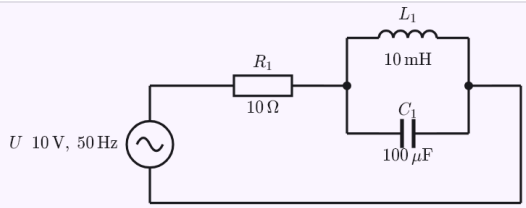
Postup

- Zapojenie (+ sériovo, ∥ paralelne): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; zadané hodnoty
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\mathrm{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}, \quad U = 10\,\mathrm{V}$
- Uhlová frekvencia: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Impedancie cievok a kondenzátorov ako komplexné čísla (j je imaginárna jednotka)
  $\hat{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \mathrm{j}\,3{,}142\,\Omega$
  $\hat{Z}_{C_1} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\mathrm{j}\,31{,}83\,\Omega$
- Paralelná skupina – sčítajú sa prevrátené hodnoty impedancií
  $\hat{Z}_a = \dfrac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega$
- Sériová skupina – impedancie sa sčítajú: $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Celková impedancia obvodu:
  $\hat{Z} = 10 + \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\ \Omega$
- Prúd zo zdroja podľa Ohmovho zákona (napätie zdroja má fázu 0°)
  $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \dfrac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\ \mathrm{A}$
- Všetkými časťami skupiny $\hat{Z}$ tečie rovnaký prúd – napätia na nich
  $\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\ \mathrm{V}$
  $\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\ \mathrm{V}$
- Na všetkých vetvách skupiny $\hat{Z}_a$ je rovnaké napätie – prúdy vetvami
  $\hat{I}_{L_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\ \mathrm{A}$
  $\hat{I}_{C_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\ \mathrm{A}$
- Prehľad súčiastok – impedancia, napätie a prúd (veľkosť ∠ fáza)

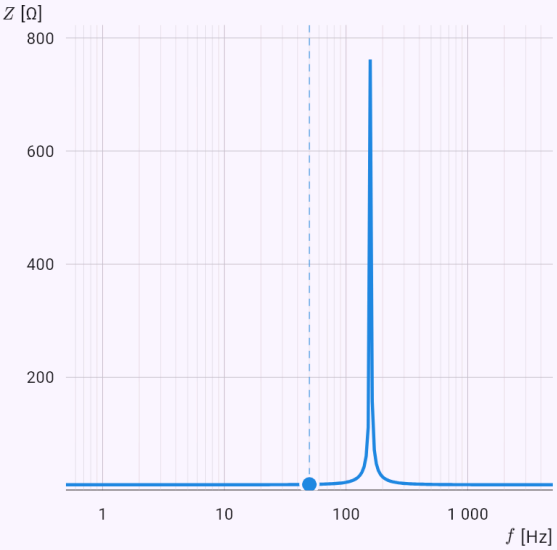
	$\hat{Z}\ [\Omega]$	$\hat{U}\ [\mathrm{V}]$	$\hat{I}\ [\mathrm{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\mathrm{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\mathrm{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

- Výkon dodaný zdrojom
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \mathrm{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

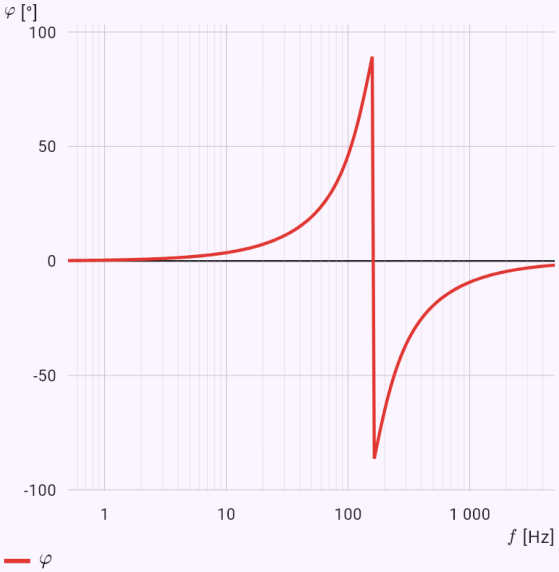
Schéma obvodu



Frekvenčná charakteristika



Z $Z \approx 10{,}6\,\Omega$



φ

Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok frekvencie. Bodky sú zadaná frekvencia a význačné body.

Nevyvážený mostík ako netlist – uzlová analýza.

Zadanie: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Výsledok

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

Postup

- Súčiastky, uzly, medzi ktoré sú zapojené, a ich hodnoty

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Neznáme sú napätia uzlov proti zemi a prúdy zdrojmi napätia: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- Prvý Kirchhoffov zákon – súčet prúdov vytekajúcich z každého uzla je nulový

$$1\text{:}\ I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{:}\ \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{:}\ \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Zdroje napätia určujú rozdiel napätí svojich uzlov: $U_1 = 12$
- Sústava lineárnych rovníc v maticovom tvare pre neznáme $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- Gaussovou eliminációu vyjdú napätia uzlov

  $U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
  $U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
  $U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

- Napätie a prúd každej súčiastky (od uzla + k uzlu −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Známe obmedzenia

- Obvody sú lineárne a v ustálenom stave – prechodové deje RC, RL a RLC počítajú aplikácie vo fyzike; diódy, tranzistory a operačné zosilňovače zatiaľ nie sú.
- Schéma sa kreslí pri formulároch a pri obvode zadanom výrazom; pri netliste len tabuľka súčiastok a uzlov. Obvod z fotky schémy sa nerozpoznáva.
- Netlist v jednom výpočte buď jednosmerný, alebo striedavý na jednej frekvencii – zdroje rôznych frekvencií a superpozícia zatiaľ nie sú.

49. Biológia a medicína

Výpočty z biológie, laboratória a medicíny nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbory Biológia a Medicína: enzýmová kinetika podľa Michaelisa a Mentenovej (aj s inhibítorom), Hardyho–Weinbergova rovnováha, riedenie roztokov a počítanie kolónií, membránový potenciál podľa Nernsta a Goldmana a dávkovanie liekov. Formulár vyplníte ako pri ostatných aplikáciách; ikonka „?“ vysvetlí, odkiaľ vzorce pochádzajú.

Z nameraných rýchlostí enzýmovej reakcie určí K_m a V_max dvakrát: školským postupom z priamky Lineweavera a Burka a presnejšie nelineárnou regresiou; graf ukáže body aj obe krivky. Pri Hardyho–Weinbergovej rovnováhe vypočíta z počtov genotypov frekvencie alel, očakávané počty a test χ^2, pri recesívnej chorobe z jej výskytu podiel prenášačov.

Riedenie: objem zásobného roztoku podľa $c_1V_1 = c_2V_2$, sériové riedenie a CFU/ml z počtu kolónií. Dávkovanie: dávka podľa hmotnosti alebo povrchu tela (Mosteller, Du Bois), rýchlosť infúzie v ml/h a kvapkách za minútu a klírens kreatinínu podľa Cockcrofta a Gaulta. Výpočty dávok sú orientačné a nenahrádzajú lekársky úsudok.

Ukážky

K_m a V_max z nameraných rýchlostí – Lineweaver–Burk a nelineárna regresia.

Zadanie: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

`81[umol_l_min]; input=table)`

Výsledok

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

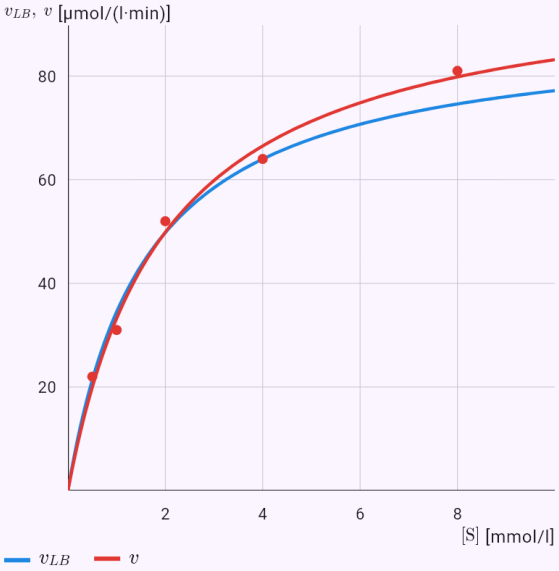
Postup

- Zadané
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Enzým E viaže substrát S a premieňa ho na produkt. Rýchlosť reakcie v rastie s koncentráciou substrátu, ale nasycuje sa – najviac dosiahne limitnú rýchlosť V_max, keď sú všetky molekuly enzýmu obsadené. Michaelisova konštanta K_m je koncentrácia substrátu, pri ktorej je rýchlosť polovičná: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Z nameraných rýchlostí sa konštanty určia z priamky Lineweavera a Burka (1/v proti 1/[S], úsek 1/V_max, smernica K_m/V_max) alebo presnejšie nelineárnou regresiou. Inhibítor: kompetitívny zväčší zdanlivé K_m, nekompetitívny zmenší V_max, akompetitívny zmenší oboje – všetko faktorom α = 1 + [I]/K_i. Rovnica modelu:
  $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Prevrátené hodnoty pre Lineweaverov–Burkov graf
  $\dfrac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \dfrac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Regresná priamka 1/v proti 1/[S]
  $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_{max}} + \dfrac{K_m}{V_{max}} \cdot \dfrac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Konštanty z priamky (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \dfrac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \dfrac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Nelineárna regresia – najmenšie štvorce priamo na krivke

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i} \right)^2 : \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$$

- Lineweaverov–Burkov graf zveličuje chyby merania pri malých koncentráciách (veľké 1/v) – výsledok je preto z nelineárnej regresie, priamka slúži ako školský postup a počiatočný odhad.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Rýchlosť reakcie s kompetitívnym inhibítorom.

Zadanie: `model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];`

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

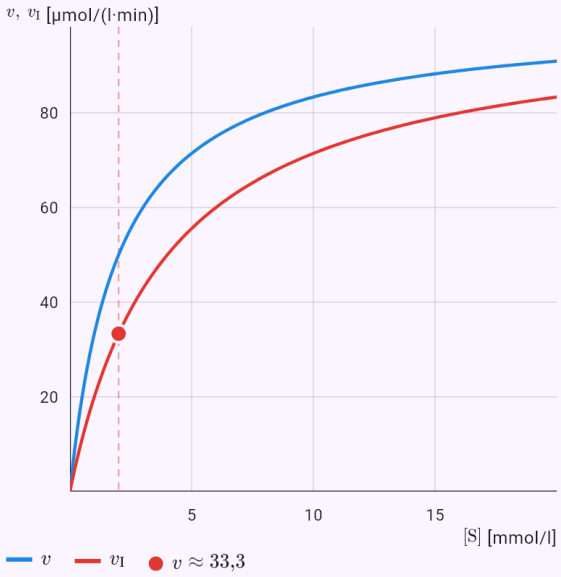
Výsledok

$$v \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$$

Postup

- Hľadáme v; zadané $V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}), \quad K_m = 2\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{S}] =$
- Enzým E viaže substrát S a premieňa ho na produkt. Rýchlosť reakcie v rastie s koncentráciou substrátu, ale nasycuje sa – najviac dosiahne limitnú rýchlosť V_max, keď sú všetky molekuly enzýmu obsadené. Michaelisova konštanta K_m je koncentrácia substrátu, pri ktorej je rýchlosť polovičná: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Z nameraných rýchlostí sa konštanty určia z priamky Lineweavera a Burka (1/v proti 1/[S], úsek 1/V_max, smernica K_m/V_max) alebo presnejšie nelineárnou regresiou. Inhibítor: kompetitívny zväčší zdanlivé K_m, nekompetitívny zmenší V_max, akompetitívny zmenší oboje – všetko faktorom α = 1 + [I]/K_i. Rovnica modelu: $v = \dfrac{V_{max}[\mathrm{S}]}{K_m + [\mathrm{S}]}$
- Faktor inhibície: $\alpha = 1 + \dfrac{[\mathrm{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Zdanlivé konštanty s inhibítorom $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\mathrm{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/$
- Kompetitívny inhibítor súťaží so substrátom o aktívne miesto – zvýši zdanlivé K_m, V_max sa nezmení (pri veľkej koncentrácii substrátu inhibítor „prebije“).
- Dosadíme $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$
- Nasýtenie enzýmu: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Krvné skupiny MN – frekvencie alel a test rovnováhy χ².

Zadanie: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one];`

`aa=1303[one]; input=counts)`

Výsledok

$p \approx 0{,}5395$

$q \approx 0{,}4605$

$\chi^2 \approx 0{,}02698$

$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Postup

- Zadané: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- V populácii, kde sa jedince pária náhodne a nepôsobí výber, mutácie ani migrácia, zostávajú frekvencie alel stále a genotypy sú v pomere p² : 2pq : q², kde p a q (p + q = 1) sú frekvencie alel A a a. Z počtov genotypov vypočítame p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) a očakávané počty; test χ² (1 stupeň voľnosti) ukáže, či sa populácia od rovnováhy odchyľuje. Pri recesívnej vlastnosti poznáme len podiel homozygotov q², odtiaľ q = √q² a podiel prenášačov 2pq. Rovnica modelu:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frekvencie alel – každý jedinec nesie dve

$p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$

- Očakávané počty pri rovnováhe
  $E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n($
- Test dobrej zhody χ²
  $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05 – odchýlka od Hardyho–Weinbergovej rovnováhy nie je preukazná.

Podiel prenášačov recesívnej choroby s výskytom 1 : 2500.

Zadanie: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Výsledok

$p \approx 0{,}98$

$q \approx 0{,}02$

$2pq \approx 0{,}0392$

Postup

- Zadané: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Prevedieme jednotky: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- V populácii, kde sa jedince pária náhodne a nepôsobí výber, mutácie ani migrácia, zostávajú frekvencie alel stále a genotypy sú v pomere p² : 2pq : q², kde p a q (p + q = 1) sú frekvencie alel A a a. Z počtov genotypov vypočítame p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) a očakávané počty; test χ² (1 stupeň voľnosti) ukáže, či sa populácia od rovnováhy odchyľuje. Pri recesívnej vlastnosti poznáme len podiel homozygotov q², odtiaľ q = √q² a podiel prenášačov 2pq. Rovnica modelu:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frekvencia recesívnej alely z podielu homozygotov
  $q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Frekvencie genotypov:
  $p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Prenášačov (heterozygotov) je $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Koľko zásobného roztoku na 50 ml desaťkrát zriedeného.

Zadanie: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Výsledok

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Postup

- Hľadáme V_1; zadané:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Pri riedení sa látkové množstvo (hmotnosť) rozpustenej látky nemení: $c_1V_1 = c_2V_2$. Z toho vyplýva objem zásobného roztoku $V_1 = c_2V_2/c_1$, ktorý doplníme rozpúšťadlom na V_2. Pri sériovom riedení sa v každom kroku riedi rovnakým faktorom d (napríklad 1 : 10), po n krokoch je koncentrácia c_0/d^n. V mikrobiológii sa z počtu kolónií N na miske, na ktorú sa nanieslo V_p ml riedenia D, vypočíta počet živých buniek v pôvodnej vzorke CFU/ml = N·D/V_p (spoľahlivo pre 30 až 300 kolónií). Rovnica modelu: $c_1V_1 = c_2V_2$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- Dosadíme: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Objem rozpúšťadla a riedenie:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Počet buniek vo vzorke z kolónií na miske.

Zadanie: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Výsledok

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Postup

- Hľadáme CFU; zadané:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Pri riedení sa látkové množstvo (hmotnosť) rozpustenej látky nemení: $c_1V_1 = c_2V_2$. Z toho vyplýva objem zásobného roztoku $V_1 = c_2V_2/c_1$, ktorý doplníme rozpúšťadlom na V_2. Pri sériovom riedení sa v každom kroku riedi rovnakým faktorom d (napríklad 1 : 10), po n krokoch je koncentrácia c_0/d^n. V mikrobiológii sa z počtu kolónií N na miske, na ktorú sa nanieslo V_p ml riedenia D, vypočíta počet živých buniek v pôvodnej vzorke CFU/ml = N·D/V_p (spoľahlivo pre 30 až 300 kolónií). Rovnica modelu: $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Dosadíme
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Pokojový membránový potenciál neurónu (Goldman).

Zadanie: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Výsledok

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Postup

- Hľadáme V_m; zadané $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Prevedieme jednotky: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Ión, pre ktorý je membrána priepustná, sa rozdelí tak, že elektrická sila vyrovná difúziu po koncentračnom spáde. Rovnovážne napätie udáva Nernstova rovnica E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), kde c_o a c_i sú koncentrácie mimo bunky a vnútri bunky, z náboj iónu, R plynová a F Faradayova konštanta (pri 37 °C je RT/F ≈ 26,7 mV). Pokojový membránový potenciál, na ktorom sa podieľa viac iónov, opisuje Goldmanova rovnica – koncentrácie sa v nej vážia relatívnymi priepustnosťami P_K, P_Na, P_Cl (pre anión Cl^- sú vnútorná a vonkajšia vymenené). Rovnica modelu

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$$

- Konštanta RT/F pri danej teplote: $\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Vážené koncentrácie mimo (o) a vnútri (i) $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Dosadíme: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln \frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Pokojový potenciál je blízko rovnovážneho potenciálu iónu s najväčšou priepustnosťou – v pokoji draslíka.

Dávka cytostatika podľa povrchu tela.

Zadanie: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Výsledok

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Postup

- Hľadáme D; zadané:
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Orientačný výpočet – nenahrádza lekársky úsudok, príbalový leták ani štandardy pracoviska.
- Dávka podľa hmotnosti D = d·m (mg/kg × kg); zo známej koncentrácie roztoku vyplýva objem V = D/c. Pri cytostatikách a pri deťoch sa dávka počíta na povrch tela: Mostellerov vzorec S = √(výška·hmotnosť/3600) (cm, kg, m²), na porovnanie aj Du Boisov. Rýchlosť infúzie v ml/h je objem delený časom, v kvapkách za minútu ešte krát kvapkový faktor súpravy (zvyčajne 20 kvapiek/ml). Klírens kreatinínu podľa Cockcrofta a Gaulta odhaduje funkciu obličiek: Cl = (140 − vek)·hmotnosť/(72·S_cr) s kreatinínom v mg/dl (µmol/l delené 88,4), pri ženách krát 0,85. Výpočty sú orientačné – nenahrádzajú lekársky úsudok ani príbalový leták.
  Rovnica modelu: $S = \sqrt{\dfrac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Povrch tela (Mosteller): $S = \sqrt{\dfrac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Na porovnanie Du Bois:
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Dosadíme: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Klírens kreatinínu u ženy (Cockcroft–Gault).

Zadanie: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Výsledok

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Postup

- Hľadáme Cl_{cr}; zadané
  $a = 60\,\mathrm{rokov}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Orientačný výpočet – nenahrádza lekársky úsudok, príbalový leták ani štandardy pracoviska.
- Dávka podľa hmotnosti D = d·m (mg/kg × kg); zo známej koncentrácie roztoku vyplýva objem V = D/c. Pri cytostatikách a pri deťoch sa dávka počíta na povrch tela: Mostellerov vzorec S = √(výška·hmotnosť/3600) (cm, kg, m²), na porovnanie aj Du Boisov. Rýchlosť infúzie v ml/h je objem delený časom, v kvapkách za minútu ešte krát kvapkový faktor súpravy (zvyčajne 20 kvapiek/ml). Klírens kreatinínu podľa Cockcrofta a Gaulta odhaduje funkciu obličiek: Cl = (140 − vek)·hmotnosť/(72·S_cr) s kreatinínom v mg/dl (µmol/l delené 88,4), pri ženách krát 0,85. Výpočty sú orientačné – nenahrádzajú lekársky úsudok ani príbalový leták.
  Rovnica modelu: $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Kreatinín v mg/dl (µmol/l delené 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Dosadíme
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Známe obmedzenia

- Enzýmová kinetika len pre jeden substrát v ustálenom stave (Michaelis–Menten); alosterické enzýmy (Hillova rovnica) zatiaľ nie sú.
- Hardy–Weinberg pre jeden gén s dvoma alelami; viac alel a gény viazané na X zatiaľ nie sú.
- Dávkovanie je orientačné – nezohľadňuje liekové interakcie, vekové skupiny ani úpravy podľa funkcie orgánov okrem klírensu kreatinínu.

50. Ekonómia, financie a poisťovníctvo

Finančné a ekonomické výpočty nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Ekonómia: úročenie vkladu (jednoduché, zložené, spojité, zmiešané, s daňou a infláciou), úročenie na dni (30E/360, ACT/360, ACT/365), zmenka a jej diskont, pravidelné sporenie (aj s počiatočným vkladom a ročným pripisovaním úrokov), renta z nasporenej sumy (dočasná, odložená, večná), úver splácaný anuitou alebo konštantnou splátkou istiny s umorovacím plánom a RPMN, dlhopis, investícia (NPV, IRR, doba návratnosti), prevod mien, bod zvratu, maximalizácia zisku, trhová rovnováha, Leontiefov model a Markovove reťazce, k tomu poistná matematika – úmrtnostné tabuľky, životné poistenie, renty, rezervy a neživotné poistenie s bonus-malusom.

Investícia do úverov P2P počíta hodnotu portfólia (hotovosť na účte a nesplatená istina) po mesiacoch: vklad sa investuje po celých sumách na úver, úvery sa splácajú anuitne, platforma berie poplatok zo zjednania a podiel z úrokov, straty sú ročnou mierou nesplácania; na porovnanie uzavretý vzorec so spojitou reinvestíciou. Opačne nájde mesačný vklad alebo dobu pre cieľovú sumu.

Sumy môžete počítať v ľubovoľnej mene – vyberiete ju vo formulári (predvolená je podľa krajiny telefónu); výpočet od meny nezávisí. Prevod mien berie denný kurzový lístok Českej národnej banky (v češtine alebo na telefóne z Česka) alebo referenčné kurzy Európskej centrálnej banky (v ostatných jazykoch) a ľubovoľný pár mien prevedie cez spoločnú menu; ukáže zdroj a dátum kurzu.

Sumy v menách sú zapísané podľa zvyklostí jazyka aplikácie a regiónu z nastavení telefónu (2 431,50 €; v angličtine 2,431.50; v nemčine 2.431,50, vo Švajčiarsku 2’431.50), rovnako dátum kurzového lístka.

Postup ukazuje vzorce, dosadenie a medzivýsledky: efektívnu a reálnu sadzbu, umorovací plán, súčasnú hodnotu tokov, hraničnú tržbu a náklady ako derivácie, prebytky ako integrály, Leontiefovu inverziu a stacionárne rozdelenie riešením sústavy. Poistná matematika počíta z komutačných čísel; rezervu ukáže prospektívne aj retrospektívne.

Ukážky

Vklad s mesačným pripisovaním, daňou z úrokov a infláciou.

Zadanie: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledok

$$K_n \approx 152\,844{,}24\ \text{CZK}$$

Postup

- Zadané:
  $K_0 = 100\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Pri jednoduchom úročení sa úrok počíta stále z pôvodného vkladu: K_n = K₀(1 + pn). Pri zloženom sa úroky pripisujú a ďalej úročia: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), kde m je počet pripísaní za rok (ročné, polročné, štvrťročné, mesačné). Spojité úročenie je limita pre m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Daň z úrokov d (na Slovensku 19 %, v ČR 15 %) znižuje sadzbu na p(1 − d). Efektívna ročná sadzba porovná rôzne frekvencie. Diskontovanie je opačný výpočet – koľko vložiť dnes. S infláciou π je reálna hodnota K_n/(1 + π)^n. Zmiešané úročenie (ako banky pripisujú úroky raz ročne) úročí celé roky zložene a zvyšok posledného roka jednoducho: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Rovnica modelu: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Pripísanie úrokov za rok: $m = 12$
- Sadzba po zdanení úrokov:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Efektívna ročná sadzba:
  $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Dosadíme
  $K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152\,844{,}24\ \text{CZK}$
- Úroky spolu: $K_n - K_0 \approx 52\,844{,}24\ \text{CZK}$
- Reálna hodnota (v dnešných cenách):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113\,730{,}47\ \text{CZK}$
- Reálna úroková sadzba: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Úroková sadzba je vyššia ako inflácia – reálna hodnota peňazí rastie.

Pravidelné mesačné sporenie na 15 rokov.

Zadanie: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledok

$$S \approx 438\,907{,}24\ \text{CZK}$$

Postup

- Zadané: $a = 2\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Pri pravidelnom sporení vkladáme každé obdobie (mesiac, rok) sumu a. Každý vklad sa úročí inak dlho, preto je nasporená suma súčet geometrického radu: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pre vklady na začiatku obdobia (predlehotne), bez prvého q pre vklady na konci (polehotne); q = 1 + p/m a N = mn je počet vkladov. Z rovnice možno vyjadriť potrebný vklad alebo dobu sporenia. Voliteľný začiatočný vklad K₀ sa úročí celý čas – pripočíta sa K₀·q^N. Pri ročnom pripisovaní úrokov (bežné v bankách, v škole „krátkodobé a dlhodobé sporenie“) sa mesačné vklady počas roka úročia jednoducho – za rok dajú A = a(12 + p·13/2) pri vkladoch na začiatku mesiaca, a(12 + p·11/2) na konci – a až ročné sumy sa úročia zložene. Rovnica modelu:
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Sadzba po zdanení úrokov:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Úročiteľ za obdobie: $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Dosadíme
  $S = 2\,000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438\,907{,}24\ \text{C}$
- Vložené spolu a úroky
  $N \cdot a = 180 \cdot 2\,000 = 360\,000\ \text{CZK}, \quad S - Na \approx 78\,90$

Hypotéka 3 mil. Kč na 25 rokov – splátka, umorovací plán a RPMN.

Zadanie: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledok

$$a \approx 17\,537{,}70\,\mathrm{CZK}$$

$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Postup

- Zadané:
  $D = 3\,000\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15\,000$
- Prevedieme jednotky: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Anuitný úver sa spláca rovnakými splátkami a. Každá splátka najprv zaplatí úrok z dlžnej sumy a zvyšok zníži dlh (úmor), preto podiel úroku postupne klesá. Súčasná hodnota všetkých splátok sa rovná výške úveru, z toho a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Umorovací plán ukazuje pre každú splátku úrok, úmor a zostávajúci dlh. RPMN zahŕňa aj poplatky – je to sadzba, pri ktorej sa súčasná hodnota splátok rovná skutočne vyplatenej sume. Pri splácaní konštantným úmorom sa dlh každé obdobie zníži o rovnakú sumu M = D/N a splátka a_k = M + U_k s klesajúcim úrokom postupne klesá – úrokov sa zaplatí menej ako pri anuite, prvé splátky sú však vyššie. Umorovací plán ukáže prvý rok a poslednú splátku, alebo celý. Rovnica modelu:
  $a = D\,\dfrac{q^N(q-1)}{q^N - 1}, \quad q = 1 + \dfrac{p}{m}, \quad N = mn$
- Úrok za obdobie:
  $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$
- Dosadíme
  $a = 3\,000\,000 \cdot \dfrac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17\,537{,}70$
- Umorovací plán (U úrok, M úmor, D zostávajúci dlh)

k	a	U_k	M_k	D_k
1	17 537,70	12 500	5 037,70	2 994 962,30
2	17 537,70	12 479,01	5 058,69	2 989 903,61
3	17 537,70	12 457,93	5 079,77	2 984 823,84
4	17 537,70	12 436,77	5 100,94	2 979 722,90
5	17 537,70	12 415,51	5 122,19	2 974 600,71
6	17 537,70	12 394,17	5 143,53	2 969 457,18
7	17 537,70	12 372,74	5 164,96	2 964 292,22
8	17 537,70	12 351,22	5 186,48	2 959 105,73
9	17 537,70	12 329,61	5 208,09	2 953 897,64
10	17 537,70	12 307,91	5 229,79	2 948 667,85
11	17 537,70	12 286,12	5 251,59	2 943 416,26
12	17 537,70	12 264,23	5 273,47	2 938 142,79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	17 537,70	72,77	17 464,93	0

- Zaplatené spolu a z toho úroky
  $\sum a \approx 5\,261\,310{,}37\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2\,261\,310{,}37\,\mathrm{CZ}$
- RPMN – ročná percentuálna miera nákladov s poplatkami
  $D - F = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a}{(1 + \mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$
- › Postup metódy: bisekcia, 14 iterácií

Sporenie po 1 000 Kč mesačne s počiatočným vkladom a ročným pripisovaním úrokov (ako sa učí v škole).

Zadanie: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Výsledok

$$S \approx 85\,206{,}62\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $a = 1\,000, \quad K_0 = 20\,000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Prevedieme jednotky: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Pri pravidelnom sporení vkladáme každé obdobie (mesiac, rok) sumu a. Každý vklad sa úročí inak dlho, preto je nasporená suma súčet geometrického radu: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pre vklady na začiatku obdobia (predlehotne), bez prvého q pre vklady na konci (polehotne); q = 1 + p/m a N = mn je počet vkladov. Z rovnice možno vyjadriť potrebný vklad alebo dobu sporenia. Voliteľný začiatočný vklad K_0 sa úročí celý čas – pripočíta sa $K_0 \cdot q^N$. Pri ročnom pripisovaní úrokov (bežné v bankách, v škole „krátkodobé a dlhodobé sporenie“) sa mesačné vklady počas roka úročia jednoducho – za rok dajú A = a(12 + p·13/2) pri vkladoch na začiatku mesiaca, a(12 + p·11/2) na konci – a až ročné sumy sa úročia zložene. Rovnica modelu

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- Vklady za rok aj s úrokmi počas roka:
  $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Úročiteľ za obdobie: $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Dosadíme
  $S = 1\,000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20\,000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85\,206,$
- Vložené spolu a úroky
  $K_0 + N \cdot a = 20\,000 + 60 \cdot 1\,000 = 80\,000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$

Investícia do úverov (P2P): 2 000 Kč mesačne na 10 rokov, po 200 Kč na úver, s poplatkom a stratami.

Zadanie: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct];`

`L=200[one]; M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)`

Výsledok

$$V \approx 318\,974{,}12\ \mathrm{CZK}$$

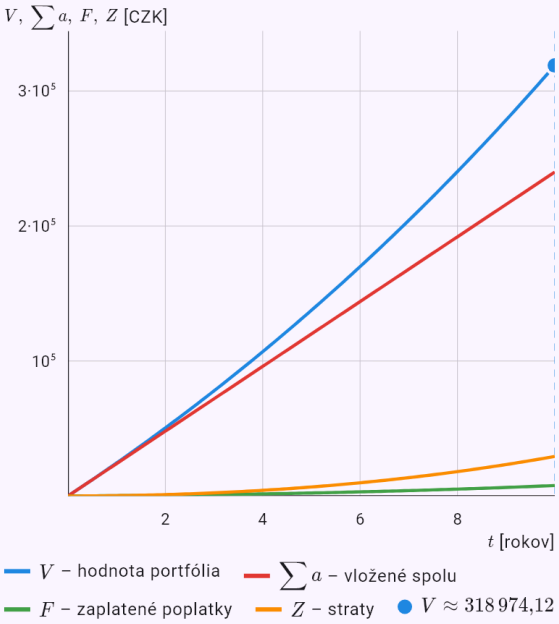
Postup

- Zadané
  $a = 2\,000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$
- Prevedieme jednotky:
  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$
- Na platforme P2P pôžičiek investor každý mesiac vloží na účet sumu a. Hotovosť sa investuje po celých násobkoch sumy L na jeden úver (napr. 10 €), zvyšok čaká na účte. Z každej investície si platforma strhne poplatok za sprostredkovanie f, do úveru ide L(1 − f). Úvery sa splácajú anuitne rovnakými mesačnými splátkami s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) počas M mesiacov, i = p/12; platforma si z úrokov ponechá podiel g. Miera nesplácania λ (ročne) odpíše každý mesiac časť istiny λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Splátky sa vracajú na účet a znova investujú. Hodnota portfólia V = H + P je hotovosť na účte H plus nesplatená istina v úveroch P. Výpočet simuluje mesiac po mesiaci a na porovnanie uvádza uzavretý vzorec so spojitou reinvestíciou: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Opačná úloha nájde potrebný mesačný vklad alebo dobu pre cieľovú hodnotu. Ide o odhad s pevnou výkonnosťou – skutočný výsledok určujú hlavne straty. Výkonnosť uvádzaná platformou býva už po poplatkoch a stratách, tie potom nezadávajte znova. Nejde o investičné odporúčanie. Rovnica modelu
  $V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$
- Mesačný úrok, mesačné straty a anuitná splátka
  $i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$
- Dosadíme
  $V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10\,735{,}19 + 308\,238{,}93 \approx 318\,97$
- Simulácia po mesiacoch – stav na konci rokov (k v mesiacoch): vložené, istina v úveroch P, hotovosť H, poplatky F, straty Z, hodnota V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24 000	23 784,39	726,58	266	26
24	48 000	49 198,83	1 248,72	606	1 03
36	72 000	75 757,04	2 129,17	1 032	2 33
48	96 000	103 744,84	3 148,57	1 568	4 21
60	120 000	133 102,33	4 439,70	2 240	6 69
72	144 000	164 382,06	5 541,37	3 054	9 80
84	168 000	197 551,52	6 600,52	4 002	13 58
96	192 000	232 369,52	7 962,71	5 094	18 07
108	216 000	269 327,69	9 238,91	6 346	23 30
120	240 000	308 238,93	10 735,19	7 764	29 33

- Vložené, poplatky F, straty Z, čisté úroky U a zisk
  $\sum a = 240\,000\ \mathrm{CZK}, \quad F = 7\,764\ \mathrm{CZK}, \quad Z = 29\,337$
- Na porovnanie: uzavretý vzorec so spojitou reinvestíciou
  $r = p(1 - g)(1 - f) - \lambda - f\,\frac{24}{M + 1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$
- Ide o odhad s pevnou výkonnosťou a stálou mierou strát – skutočnosť určujú hlavne straty. Výkonnosť uvádzaná platformou býva už po poplatkoch a stratách. Nejde o investičné odporúčanie.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Úver splácaný konštantnou splátkou istiny – klesajúce splátky a porovnanie s anuitou.

Zadanie: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Výsledok

$$a_1 \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10\,041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $D = 1\,200\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Prevedieme jednotky: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Anuitný úver sa spláca rovnakými splátkami a. Každá splátka najprv zaplatí úrok z dlžnej sumy a zvyšok zníži dlh (úmor), preto podiel úroku postupne klesá. Súčasná hodnota všetkých splátok sa rovná výške úveru, z toho a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Umorovací plán ukazuje pre každú splátku úrok, úmor a zostávajúci dlh. RPMN zahŕňa aj poplatky – je to sadzba, pri ktorej sa súčasná hodnota splátok rovná skutočne vyplatenej sume. Pri splácaní konštantným úmorom sa dlh každé obdobie zníži o rovnakú sumu M = D/N a splátka a_k = M + U_k s klesajúcim úrokom postupne klesá – úrokov sa zaplatí menej ako pri anuite, prvé splátky sú však vyššie. Umorovací plán ukáže prvý rok a poslednú splátku, alebo celý. Rovnica modelu

$$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\, i, \quad i = \frac{p}{m},$$

- Úrok za obdobie: $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Dosadíme: $M = \dfrac{1\,200\,000}{120} \approx 10\,000\,\mathrm{CZK}$
- Prvá a posledná splátka

$$a_1 = M + D\, i \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1+i) \approx 10\,0$$

- Umorovací plán (U úrok, M úmor, D zostávajúci dlh)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15 000	5 000	10 000	1 190 000
2	14 958,33	4 958,33	10 000	1 180 000
3	14 916,67	4 916,67	10 000	1 170 000
4	14 875	4 875	10 000	1 160 000
5	14 833,33	4 833,33	10 000	1 150 000
6	14 791,67	4 791,67	10 000	1 140 000
7	14 750	4 750	10 000	1 130 000
8	14 708,33	4 708,33	10 000	1 120 000
9	14 666,67	4 666,67	10 000	1 110 000
10	14 625	4 625	10 000	1 100 000
11	14 583,33	4 583,33	10 000	1 090 000
12	14 541,67	4 541,67	10 000	1 080 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10 041,67	41,67	10 000	0

- Zaplatené spolu a z toho úroky:
  $\sum a_k \approx 1\,502\,500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302\,500\,\mathrm{CZK}$
- Na porovnanie anuitou – splátka a úroky spolu:
  $a \approx 12\,727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327\,343{,}42\,\mathrm{CZK}$
- Splácanie konštantným úmorom ušetrí na úrokoch $24\,843{,}42\,\mathrm{CZK}$, prvé splátky sú však vyššie.

Úrok za dni podľa štandardu 30E/360 s daňou 15 %.

Zadanie: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-`

`09-20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Výsledok

$$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$$
$$K_n \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $K_0 = 50\,000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Krátkodobé vklady sa úročia jednoducho za počet dní t: u = K₀·p·t/B. Počet dní a dĺžku roka B určuje štandard počítania dní: 30E/360 (banky a školy v ČR, SR a Nemecku) počíta každý mesiac za 30 dní (31. deň ako 30.) a rok za 360 dní, ACT/360 (Francúzsko, Španielsko, peňažný trh) skutočné dni a rok 360 dní, ACT/365 (Veľká Británia) skutočné dni a rok 365 dní. Dni sa vypočítajú z dátumu vloženia a výberu, alebo ich zadajte priamo. Daň z úrokov sa odpočíta z úroku. Opačný výpočet – koľko vložiť dnes, aby vznikla daná suma – je diskontovanie.
  Rovnica modelu: $u = K_0 \cdot p \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$

- Štandard počítania dní a dĺžka roka:
  $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Počet dní (30E/360: mesiac 30 dní, 31. ako 30.)
  $15.\ 3.\ 2026 \to 20.\ 9.\ 2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026)$ -
- Dosadíme: $u = 50\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \dfrac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- Daň z úroku a úrok po zdanení
  $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Úroky spolu: $K_n = K_0 + u' \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Diskont zmenky – koľko banka vyplatí 90 dní pred splatnosťou.

Zadanie: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Výsledok

$$K \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$$
$$D \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $N = 100\,000, \quad d = 6\,\%$
- Prevedieme jednotky: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Zmenka je záväzok zaplatiť v deň splatnosti zmenkovú sumu N. Banka ju môže kúpiť skôr (eskontovať) a vyplatí ju zníženú o diskont D = N·d·t/B, kde d je diskontná sadzba a t počet dní do splatnosti: K = N(1 − d·t/B). Diskont sa počíta z konečnej sumy, nie z vyplatenej, preto je skutočná výnosnosť banky i = d/(1 − d·t/B) vyššia ako diskontná sadzba. Obvyklý je štandard ACT/360. Rovnica modelu:
  $D = N \cdot d \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\dfrac{t}{B}\right)$
- Štandard počítania dní a dĺžka roka:
  $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$

- Počet dní podľa kalendára:
  $10.\ 1.\ 2026 \to 10.\ 4.\ 2026: \quad t = 90$
- Dosadíme: $D = 100\,000 \cdot 0{,}06 \cdot \dfrac{90}{360} \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$
- Vyplatená suma: $K = N - D \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$
- Skutočná výnosnosť banky: $i = \dfrac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- Diskont sa počíta z konečnej sumy – banka preto v skutočnosti zarobí viac, ako je diskontná sadzba.

Mesačná renta z 2 mil. Kč na 20 rokov, odložená o 5 rokov.

Zadanie: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Výsledok

$$a \approx 12\,884{,}60\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $K = 2\,000\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Prevedieme jednotky: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Dôchodok (renta) je pravidelná výplata a z nasporenej sumy K, ktorá sa medzitým ďalej úročí. Súčasná hodnota N výplat je K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m – rovnaký vzorec ako pri splácaní úveru. Výplaty na začiatku obdobia (predlehotné) násobia vzorec q. Odložený dôchodok začne vyplácať až po k rokoch, suma medzitým narastie na K·q^(mk). Večný dôchodok vypláca len úroky a istina zostáva: K = a/(q − 1). Vyjde výška výplaty, potrebná suma alebo ako dlho výplaty vydržia. Rovnica modelu:
  $$K = a\,\frac{1-q^{-N}}{q-1}\cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Úročiteľ za obdobie: $q = 1 + \dfrac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Diskontovanie o dobu odkladu:
  $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1-q^{-N}}$
- Dosadíme: $a \approx 12\,884{,}60\,\mathrm{CZK}$
- Nasporená suma na začiatku výplat:
  $K\,q^{mk} \approx 2\,323\,233{,}56\,\mathrm{CZK}$

- Priebeh výplat (U úrok, K zostatok)

k	a	U_k	K_k
1	12 884,60	5 808,08	2 316 157,05
2	12 884,60	5 790,39	2 309 062,84
3	12 884,60	5 772,66	2 301 950,90
4	12 884,60	5 754,88	2 294 821,18
5	12 884,60	5 737,05	2 287 673,64
6	12 884,60	5 719,18	2 280 508,23
7	12 884,60	5 701,27	2 273 324,90
8	12 884,60	5 683,31	2 266 123,61
9	12 884,60	5 665,31	2 258 904,33
10	12 884,60	5 647,26	2 251 666,99
11	12 884,60	5 629,17	2 244 411,56
12	12 884,60	5 611,03	2 237 137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12 884,60	32,13	0

- Vyplatené spolu a z toho úroky
  $$\sum a \approx 3\,092\,303{,}41\,\mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1\,092\,303{,}41$$

Cena dlhopisu a jeho durácia.

Zadanie: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct]; freq=annual; cur=EUR)`

Výsledok

$$P \approx 1\,044{,}52\,\mathbb{I}$$

Postup

- Zadané: $N = 1\,000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Dlhopis vypláca každé obdobie kupón C = c·N/m a na konci menovitú hodnotu N. Jeho cena je súčasná hodnota týchto platieb diskontovaných trhovým výnosom y. Keď je trhový výnos nižší ako kupón, predáva sa dlhopis nad nominálom (s prémiou), inak pod ním. Výnos do splatnosti je sadzba, pri ktorej sa súčasná hodnota platieb rovná cene – rieši sa numericky. Durácia je vážená priemerná doba platieb a udáva citlivosť ceny na zmenu úrokových sadzieb. Rovnica modelu
  $$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^k} + \frac{N_{nom}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^N}$$

- Kupón za obdobie: $C = \dfrac{c\cdot N_{nom}}{m} = 50\,\mathbb{I}, \quad N = 5$
- Dosadíme
  $$P = 50\cdot\frac{1-0{,}961538^5}{0{,}04} + \frac{1\,000}{1{,}04^5} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$$
- Trhový výnos je nižší ako kupón – dlhopis sa predáva nad menovitou hodnotou.
- Durácia (Macaulayho a modifikovaná)
  $$D = \frac{1}{P}\sum_k t_k\,PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \approx 4{,}382$$

Vnútorné výnosové percento investície.

Zadanie: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

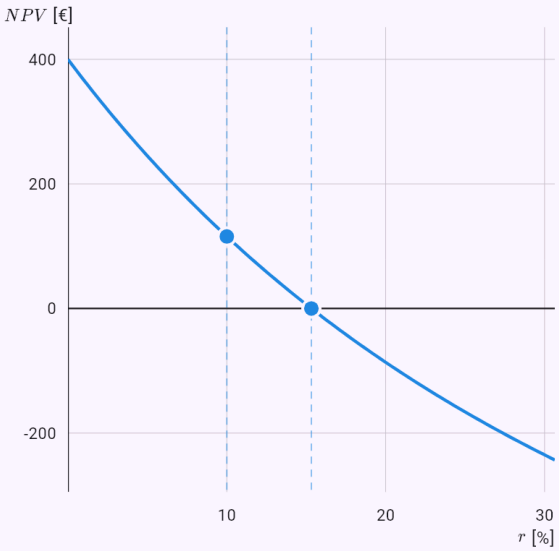
Výsledok

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Postup

- Zadané:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Prevedieme jednotky: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Čistá súčasná hodnota NPV sčíta peňažné toky projektu CF_0, CF_1, … diskontované požadovanou výnosnosťou r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt s NPV > 0 zarobí viac, ako je požadovaný výnos. Vnútorné výnosové percento IRR je sadzba, pri ktorej NPV = 0 – koreň polynomickej rovnice, hľadá sa numericky. Doba návratnosti udáva, kedy súčet tokov (prostý alebo diskontovaný) prestane byť záporný.
  Rovnica modelu: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Čistá súčasná hodnota
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt vynesie aspoň požadovaný výnos.
- Rovnicu vyriešime numericky (polením intervalu):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Postup metódy: bisekcia, 14 iterácií

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prevod eur na koruny podľa dnešného kurzu ČNB.

Zadanie: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Výsledok

$$2\,443{,}50\ \mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\ \mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané: $A = 100$
- Kurz udáva cenu jednotky cudzej meny. Česká národná banka vyhlasuje každý pracovný deň kurz koruny k ostatným menám, Európska centrálna banka referenčný kurz eura (na Slovensku platný kurz). Sumu prevedieme cez spoločnú menu: $A_2 = A_1 \cdot k_1 / k_2$, kde k_1 a k_2 sú hodnoty oboch mien v korune (ČNB) alebo v eure (ECB) – tzv. krížový kurz. Banky a zmenárne používajú vlastné nákupné a predajné kurzy s prirážkou; výpočet je orientačný. Rovnica modelu: $A_2 = A_1 \cdot \dfrac{k_1}{k_2}$
- Kurzový lístok: $\mathrm{ČNB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Kurzy: $1\,€ = 24{,}435\ \mathrm{CZK}$
- Dosadíme: $A_2 = 100 \cdot \dfrac{24{,}435}{1} \approx 2\,443{,}50\ \mathrm{CZK}$
- Banky a zmenárne používajú vlastné kurzy s prirážkou – výpočet je orientačný.

Maximálny zisk z hraničnej tržby a hraničných nákladov.

Zadanie: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

`e=0.5[one]; cur=CZK)`

Výsledok

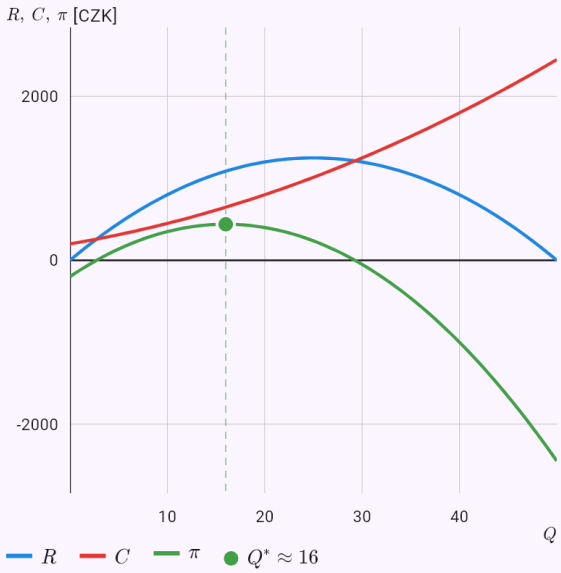
$$Q^* \approx 16$$
$$p^* \approx 68\,\mathrm{CZK}$$
$$\pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$$

Postup

- Zadané:
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Firma s lineárnym dopytom p = a − bQ má tržby R = pQ a náklady C(Q) = F + cQ + eQ². Zisk π = R − C je najväčší, kde je jeho derivácia nulová, teda hraničná tržba sa rovná hraničným nákladom: MR = R'(Q) = MC = C'(Q). Druhá derivácia overí, že ide o maximum. Cenová pružnosť dopytu ε = (dQ/dp)·(p/Q) hovorí, o koľko percent sa zmení dopytované množstvo pri zmene ceny o 1 %; |ε| > 1 je pružný dopyt. Rovnica modelu:
  $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Tržby a náklady:
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Hraničná tržba a hraničné náklady (derivácie):
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Dosadíme:
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- Druhá derivácia zisku je záporná – maximum:
  $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Cena a zisk v optime:
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\mathrm{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$

- Cenová pružnosť dopytu: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Trhová rovnováha, prebytky a dopad dane.

Zadanie: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

`t=5[one]; cur=CZK)`

Výsledok

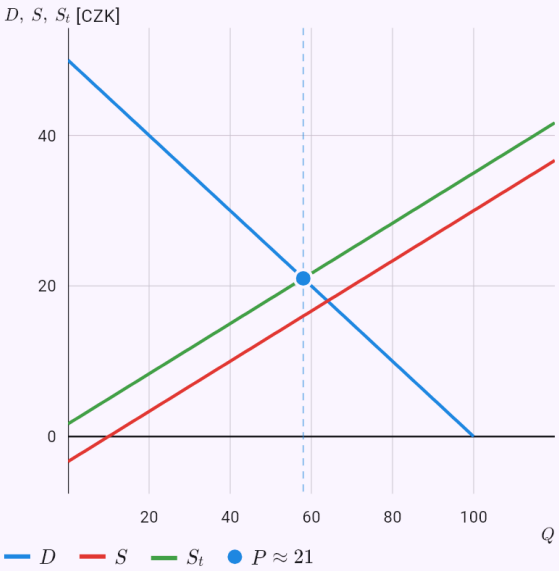
$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Postup

- Zadané: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- Dopyt Q_D = a − bP klesá s cenou, ponuka Q_S = c + dP rastie. Trh je v rovnováhe, kde sa pretnú: P* = (a − c)/(b + d). Prebytok spotrebiteľa je plocha medzi dopytovou krivkou a cenou (čo by kupujúci boli ochotní zaplatiť navyše), prebytok výrobcu plocha medzi cenou a ponukovou krivkou – oboje integrál. Daň t za kus posunie ponuku o t nahor: kupujúci platia viac, predávajúci dostanú menej, obchoduje sa menej a vzniká strata mŕtvej váhy. Rovnica modelu:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Dosadíme:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- S daňou: cena pre kupujúcich a pre predávajúcich
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Výnos dane a strata mŕtvej váhy
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Prebytok spotrebiteľa:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Prebytok výrobcu:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$

- Pružnosť dopytu a ponuky v rovnováhe
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Leontiefov model troch odvetví.

Zadanie: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200`

`150[one])`

Výsledok

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Postup

- Zadané
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Leontiefov model opisuje ekonomiku z n odvetví, ktoré si navzájom dodávajú produkciu. Prvok a_ij matice technických koeficientov A hovorí, koľko produkcie odvetvia i spotrebuje odvetvie j na jednotku svojej produkcie. Celková produkcia x musí pokryť medzispotrebu Ax aj konečný dopyt y: x = Ax + y, odtiaľ x = (I − A)⁻¹y. Leontiefova inverzia (I − A)⁻¹ ukazuje, koľko musí každé odvetvie vyrobiť na jednotku konečného dopytu. Rovnica modelu:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Matica technických koeficientov a konečný dopyt
  $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$$
- Matica I − A
  $$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
- Leontiefova inverzia
  $$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$$
- Dosadíme: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Medziodvetvové toky
  $$x_{ij} = a_{ij}x_j: \quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$$

Dlhodobé podiely zákazníkov troch značiek.

Zadanie: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15`

```
0.8[one])
```

Výsledok

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Postup

- Zadané:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Markovov reťazec prechádza medzi stavmi s pravdepodobnosťami p_ij, ktoré závisia len od súčasného stavu (nie od histórie). Riadky matice prechodu P majú súčet 1. Rozdelenie po jednom kroku je $\pi_1 = \pi_0 P$, po n krokoch $\pi_n = \pi_0 P^n$. Stacionárne rozdelenie spĺňa $\pi P = \pi$ a ukazuje dlhodobé podiely stavov – podiely zákazníkov značiek, tried bonus-malus, stavov stroja. Rovnica modelu: $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Matica prechodu
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Sústava pre stacionárne rozdelenie
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3 \end{aligned}$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- Po dlhom čase sa rozdelenie ustáli na stacionárnom bez ohľadu na začiatočný stav (pri regulárnom reťazci).

Stredná dĺžka života 65-ročnej ženy.

Zadanie: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Výsledok

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

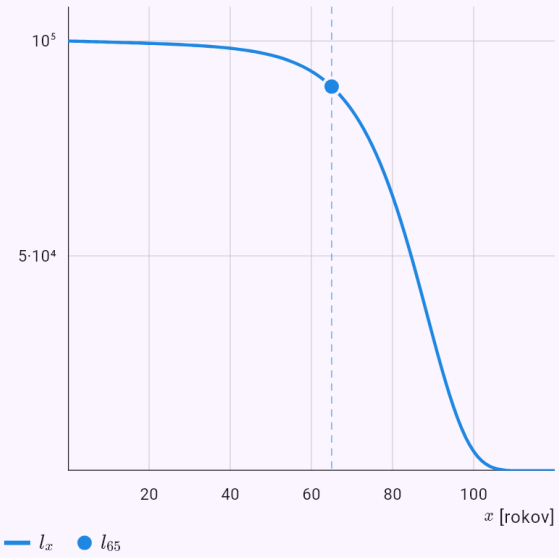
Postup

- Zadané: $x = 65$
- Modelová tabuľka (Gompertz–Makeham) približne podľa obyvateľov ČR – na presné výpočty zadajte q_x z tabuliek štatistického úradu alebo poisťovne.
- Úmrtnostná tabuľka udáva, koľko z východiskových 100 000 narodených (l_x) sa dožije veku x. Pravdepodobnosť, že x-ročný sa dožije ďalších n rokov, je ${}_np_x$ = l_{x+n}/l_x, pravdepodobnosť úmrtia ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$. Stredná dĺžka života e_x je priemerný počet rokov, ktoré x-ročný ešte prežije. Modelová tabuľka podľa Gompertzovho–Makehamovho zákona μ(x) = A + B·c^x je nastavená približne podľa obyvateľov ČR; presné výpočty používajú tabuľky štatistického úradu – zadajte vlastné q_x. Rovnica modelu

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Počet dožívajúcich z tabuľky: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Dosadíme: $e_{65} \approx 20{,}57$
- Priemerne sa dožije veku $85{,}57$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Ročné poistné zmiešaného poistenia.

Zadanie: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct];`

`S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Výsledok

$$P \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$$

Postup

- Zadané:
  $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1\,000\,000$
- Prevedieme jednotky: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Modelová tabuľka (Gompertz–Makeham) približne podľa obyvateľov ČR – na presné výpočty zadajte q_x z tabuliek štatistického úradu alebo poisťovne.
- Netto poistné sa počíta z princípu ekvivalencie: súčasná hodnota poistného sa rovná súčasnej hodnote budúcich plnení. Pomocou komutačných čísel D_x = v^x l_x, N_x, C_x a M_x (v = 1/(1 + i), i je technická úroková miera) je jednorazové poistné pre poistenie pre prípad smrti na n rokov (M_x − M_{x+n})/D_x, pre dožitie D_{x+n}/D_x, zmiešané ich súčet; dôchodok ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. Bežné ročné poistné vznikne delením anuitou ä. Rezerva v roku t je súčasná hodnota budúcich plnení mínus budúceho poistného (prospektívne) – a vyjde rovnako ako nasporené poistné mínus vyplatené plnenia (retrospektívne). Rovnica modelu
  $D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k \geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k \geq}$
- Komutačné čísla
  $D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$
- Jednorazové netto poistné
  $A_{x:\overline{20}|} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20}|} \approx 622\,543{,}08\ \text{CZK}$
- Bežné ročné poistné
  $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} \approx 15{,}4757, \quad P = \dfrac{S \cdot A_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$

Systém bonus-malus a priemerná úroveň poistného.

Zadanie: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Výsledok

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Postup

- Zadané: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Prevedieme jednotky: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- Pri neživotnom poistení (autá, majetok) je očakávaná ročná škoda poisteného E[S] = λ·m, kde λ je stredný počet škôd za rok a m priemerná výška škody. Rizikové poistné sa zvyšuje o prirážku θ na náklady a bezpečnosť. Systém bonus-malus mení poistné podľa škodového priebehu: rok bez škody posunie do lepšej triedy, škoda späť. Triedy tvoria Markovov reťazec; jeho stacionárne rozdelenie dá dlhodobé podiely tried a priemernú úroveň poistného. Rovnica modelu: $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Rok bez škody posunie o triedu nižšie (zľava), škoda vráti do prvej triedy.
- Matica prechodu
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$
- Sústava pre stacionárne rozdelenie
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$
  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$
- Dlhodobé podiely tried:
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Dosadíme: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Známe obmedzenia

- Úmrtnostné tabuľky sú modelové (Gompertz–Makeham, približne podľa ČR); pre presné výpočty zadajte vlastné q_x z tabuliek štatistického úradu alebo poisťovne.
- Kurzy sú referenčné – banky a zmenárne počítajú s vlastnými kurzami a poplatkami.
- Mikroekonómia s lineárnym dopytom a kvadratickými nákladmi; všeobecné funkcie zadané vzorcom zatiaľ nie sú.
- Deň splatnosti a sviatky štandardy neriešia – úrok sa počíta za dni medzi zadanými dátumami; pri úvere sa neuvažujú mimoriadne splátky ani zmena sadzby.
- Investícia do úverov P2P je odhad s pevnou výkonnosťou a stálou mierou strát; nezohľadňuje vymáhanie dlžných súm, predčasné splatenie, sekundárny trh ani dane. Nejde o investičné odporúčanie.

51. Lineárne programovanie, doprava, priradenie a maticové hry

Optimalizačné úlohy nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Logistika a siete (lineárne programovanie aj v odbore Ekonómia): lineárne a celočíselné programovanie, dopravný problém a priraďovací problém. Úlohu lineárneho programovania môžete aj napísať alebo odfotiť, napríklad max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – ohraničenia na samostatných riadkoch alebo za bodkočiarkou, namiesto max možno písať min a slovo integer urobí úlohu celočíselnou.

Postup ukazuje štandardný tvar s doplnkovými a pomocnými premennými a simplexové tabuľky v presných zlomkoch s vyznačeným pivotom. Ohraničenia ≥ a = rieši predvolená dvojfázová metóda, čipom možno zvoliť metódu veľkého M. K optimu pridá duálnu úlohu, tieňové ceny ohraničení a citlivostnú analýzu (rozpätie koeficientov účelovej funkcie a pravých strán). Pri dvoch premenných nakreslí prípustnú oblasť, vrcholy s hodnotami účelovej funkcie a vrstevnicu prechádzajúcu optimom. Celočíselnú úlohu rieši metódou vetiev a hraníc a strom vetvenia prejdete šípkami ako graf.

Dopravný problém sa zadáva maticou jednotkových nákladov, ponukou dodávateľov a dopytom odberateľov; nevyrovnanú úlohu doplní fiktívnym dodávateľom alebo odberateľom. Východiskové riešenie dá metóda severozápadného rohu, minimálneho prvku alebo Vogelova aproximačná metóda, optimum metóda MODI s potenciálmi a uzavretými okruhmi; plán prepravy sa ukáže aj ako graf. Priraďovací problém rieši maďarská metóda – redukcia riadkov a stĺpcov, pokrytie núl čiarami a výber nezávislých núl; vie aj maximalizáciu a obdĺžnikovú maticu.

Maticové hry dvoch hráčov (odbor Logistika a siete, alebo zápis game(3 -1 2; -2 4 1) – riadky sú stratégie hráča A, stĺpce hráča B): hra s nulovým súčtom najprv hľadá sedlový bod (maximin = minimax), potom vyškrtá dominované stratégie a zmiešané stratégie vypočíta vzorcom pri hre 2 × 2, graficky pri hre 2 × n a m × 2 (dolná a horná obálka priamok) a pri väčšej hre lineárnym programovaním so simplexovými tabuľkami – duálna úloha dá stratégiu druhého hráča. Výsledkom sú optimálne stratégie oboch hráčov a cena hry v presných zlomkoch. Bimaticová hra (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), výplaty A | výplaty B) ukáže najlepšie odpovede a Nashove rovnováhy v čistých stratégiách, pri hre 2 × 2 aj zmiešanú rovnováhu.

Ukážky

Výrobný plán simplexovou metódou s tieňovými cenami a citlivosťou.

Zadanie: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Výsledok

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Postup

- Úloha lineárneho programovania

  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \le 4$
  $2x_2 \le 12$
  $3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $x_1, x_2 \ge 0$

- Podmienky nezápornosti nie sú zadané – predpokladáme $x_1, x_2 \ge 0$
- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a

  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- 1. simplexová tabuľka: vstupuje x_2 (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	**2**	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	−3	−5	0	0	0	0	

- 2. simplexová tabuľka: vstupuje x_1 (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_3 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	**3**	0	0	−1	1	6	2
z	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- 3. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové):
  $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\quad z_{max} = 36$
- Duálna úloha – každému obmedzeniu zodpovedá jedna duálna premenná, každej premennej jedno obmedzenie

  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \ge 3$
  $2y_2 + 2y_3 \ge 5$
  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Tieňové ceny (optimálne duálne premenné) z poslednej tabuľky: o koľko sa zmení optimum, keď pravú stranu obmedzenia zväčšíme o 1. Nevyčerpané obmedzenie (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má tieňovú cenu 0.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- Optimum duálnej úlohy sa rovná optimu pôvodnej:
  $w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$
- Citlivostná analýza – v akom rozmedzí sa môžu meniť koeficienty účelovej funkcie, aby zostalo optimálne rovnaké riešenie

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2}\rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

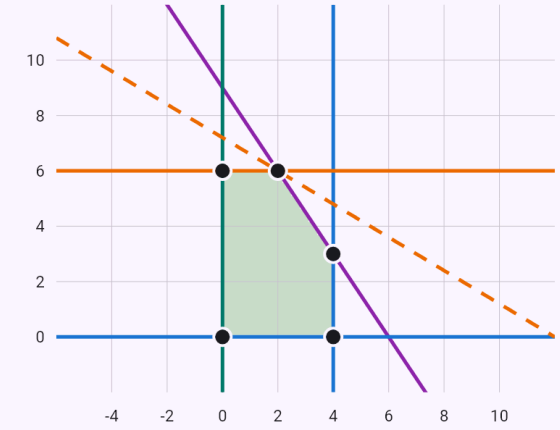
- V akom rozmedzí sa môžu meniť pravé strany, aby zostala optimálna rovnaká báza (tieňové ceny platia len v ňom)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18\rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24\rangle$

- Grafické riešenie: prípustná oblasť je mnohouholník, optimum leží v niektorom vrchole. Hodnoty účelovej funkcie vo vrcholoch (★ optimum)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Graf



- $x \le 4 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty;\ 4\rangle$
- $2y \le 12 \ \Leftrightarrow\ y \in (-\infty;\ 6\rangle$
- $3x + 2y \le 18 \ \Leftrightarrow\ y \le 9 - \frac{3x}{2}$
- $x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \langle 0;\ \infty)$
- $y \ge 0 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 0;\ \infty)$
- $z = 36 \ \Leftrightarrow\ 3x + 5y = 36$

Riešením sú priesečníky kriviek vo vyfarbenej oblasti (plný bod); prázdny bod nerovniciam nevyhovuje.

Priesečníky grafov:

● $[0;0]$ ● $[0;6]$ ● $[2;6]$ ● $[4;0]$ ● $[4;3]$

Úloha napísaná zápisom – grafické riešenie pre dve premenné.

Zadanie: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Výsledok

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Postup

- Úloha lineárneho programovania

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \leq 4$
  $x + 3y \leq 6$
  $x, y \geq 0$

- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- 1. simplexová tabuľka: vstupuje x (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- 2. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové):
  $x = 4,\ y = 0, \quad z_{max} = 12$

- Duálna úloha – každému obmedzeniu zodpovedá jedna duálna premenná, každej premennej jedno obmedzenie

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \geq 3$
  $u_1 + 3u_2 \geq 2$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Tieňové ceny (optimálne duálne premenné) z poslednej tabuľky: o koľko sa zmení optimum, keď pravú stranu obmedzenia zväčšíme o 1. Nevyčerpané obmedzenie (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má tieňovú cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- Optimum duálnej úlohy sa rovná optimu pôvodnej:
  $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Citlivostná analýza – v akom rozmedzí sa môžu meniť koeficienty účelovej funkcie, aby zostalo optimálne rovnaké riešenie

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

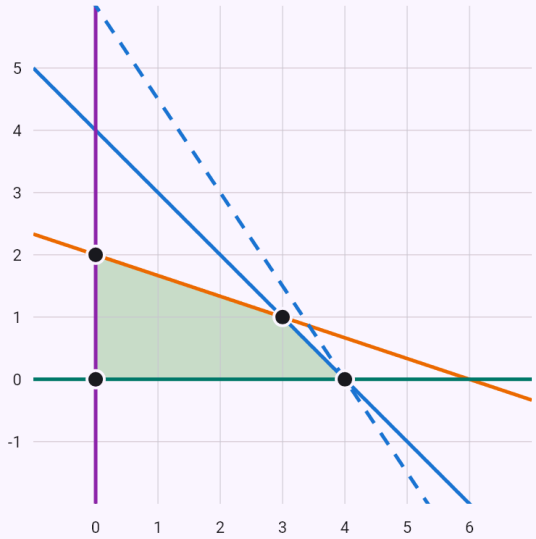
- V akom rozmedzí sa môžu meniť pravé strany, aby zostala optimálna rovnaká báza (tieňové ceny platia len v ňom)

	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- Grafické riešenie: prípustná oblasť je mnohouholník, optimum leží v niektorom vrchole. Hodnoty účelovej funkcie vo vrcholoch (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Graf



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$

$x + 3y \leq 6 \ \Leftrightarrow \ y \leq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$

$z = 12 \ \Leftrightarrow \ 3x + 2y = 12$

Riešením sú priesečníky kriviek vo vyfarbenej oblasti (plný bod); prázdny bod nerovniciam nevyhovuje.

Priesečníky grafov:

● $[0;0]$ ● $[0;2]$ ● $[3;1]$ ● $[4;0]$

Minimalizácia s ohraničeniami ≥ dvojfázovou metódou.

Zadanie: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Výsledok

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Postup

- Úloha lineárneho programovania

  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Podmienky nezápornosti nie sú zadané – predpokladáme $x, y \geq 0$
- Minimum hľadáme ako maximum opačnej funkcie: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Prvá fáza: pomocné premenné nie sú skutočným riešením, preto ich najprv vynulujeme – minimalizujeme ich súčet $\min w = a_1 + a_2$
- 1. simplexová tabuľka: vstupuje y (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje a_2 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- 2. simplexová tabuľka: vstupuje x (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje a_1 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- Na konci prvej fázy je w = 0 – pomocné premenné sú nulové a vypustíme ich. Druhá fáza pokračuje so skutočnou účelovou funkciou.
- 3. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Duálna úloha – každému obmedzeniu zodpovedá jedna duálna premenná, každej premennej jedno obmedzenie

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Tieňové ceny (optimálne duálne premenné) z poslednej tabuľky: o koľko sa zmení optimum, keď pravú stranu obmedzenia zväčšíme o 1. Nevyčerpané obmedzenie (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má tieňovú cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum duálnej úlohy sa rovná optimu pôvodnej:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Citlivostná analýza – v akom rozmedzí sa môžu meniť koeficienty účelovej funkcie, aby zostalo optimálne rovnaké riešenie

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3\rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6\rangle$

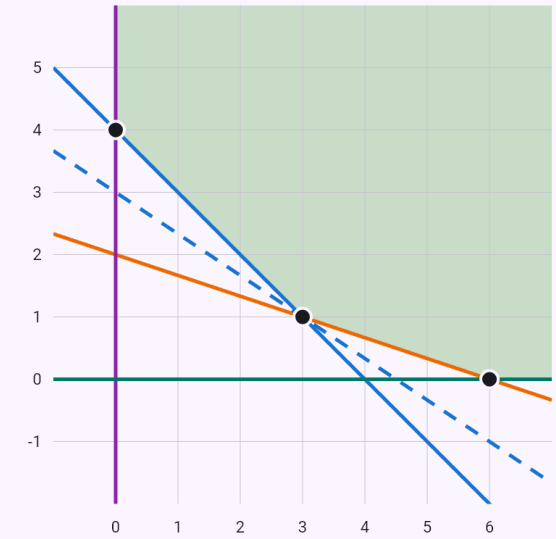
- V akom rozmedzí sa môžu meniť pravé strany, aby zostala optimálna rovnaká báza (tieňové ceny platia len v ňom)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Grafické riešenie: prípustná oblasť je mnohouholník, optimum leží v niektorom vrchole. Hodnoty účelovej funkcie vo vrcholoch (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graf



- $x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
- $x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
- $x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$
- $y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$
- $z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Riešením sú priesečníky kriviek vo vyfarbenej oblasti (plný bod); prázdny bod nerovniciam nevyhovuje.

Priesečníky grafov:

● $[0; 4]$ ● $[3; 1]$ ● $[6; 0]$

Rovnaká úloha metódou veľkého M.

Zadanie: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Výsledok

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Postup

- Úloha lineárneho programovania
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Podmienky nezápornosti nie sú zadané – predpokladáme $x, y \geq 0$

- Minimum hľadáme ako maximum opačnej funkcie: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Metóda veľkého M: pomocné premenné dáme do účelovej funkcie s veľkou pokutou −M, aby ich simplexová metóda vytlačila z bázy: $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$

- 1. simplexová tabuľka: vstupuje y (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje a_2 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- 2. simplexová tabuľka: vstupuje x (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje a_1 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- 3. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Duálna úloha – každému obmedzeniu zodpovedá jedna duálna premenná, každej premennej jedno obmedzenie
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Tieňové ceny (optimálne duálne premenné) z poslednej tabuľky: o koľko sa zmení optimum, keď pravú stranu obmedzenia zväčšíme o 1. Nevyčerpané obmedzenie (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má tieňovú cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum duálnej úlohy sa rovná optimu pôvodnej:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Citlivostná analýza – v akom rozmedzí sa môžu meniť koeficienty účelovej funkcie, aby zostalo optimálne rovnaké riešenie

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1\rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2\rangle$

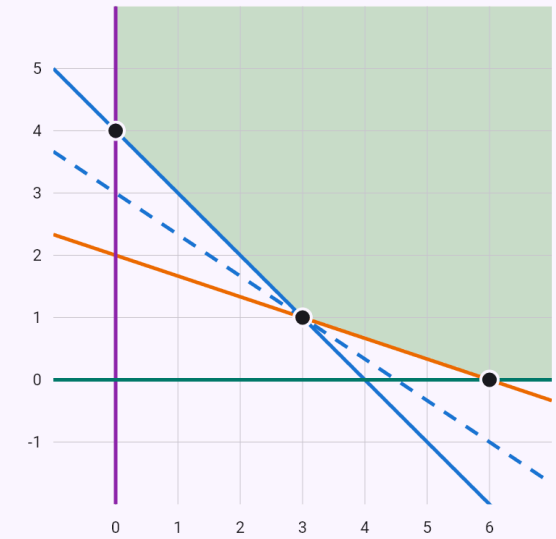
- V akom rozmedzí sa môžu meniť pravé strany, aby zostala optimálna rovnaká báza (tieňové ceny platia len v ňom)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Grafické riešenie: prípustná oblasť je mnohouholník, optimum leží v niektorom vrchole. Hodnoty účelovej funkcie vo vrcholoch (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graf



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$

$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$

$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Riešením sú priesečníky kriviek vo vyfarbenej oblasti (plný bod); prázdny bod nerovniciam nevyhovuje.

Priesečníky grafov:

● $[0; 4]$ ● $[3; 1]$ ● $[6; 0]$

Celočíselné riešenie metódou vetiev a hraníc.

Zadanie: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Výsledok

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

Postup

- Úloha lineárneho programovania

  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \leq 24$
  $x + 2y \leq 6$
  $x, y \geq 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$

- Podmienky nezápornosti nie sú zadané – predpokladáme $x, y \geq 0$
- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a

  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$

- 1. simplexová tabuľka: vstupuje x (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	-5	-4	0	0	0	

- 2. simplexová tabuľka: vstupuje y (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- 3. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové):

  $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- Úloha je celočíselná – použijeme metódu vetiev a hraníc. Riešenie bez podmienky celočíselnosti vyššie je koreň stromu P_0.
- Uzly stromu (prechádzame do hĺbky, najprv vetva ≤): necelú premennú rozdelíme na dve vetvy; × – úloha nemá prípustné riešenie, z ≤ z* – vetva nemôže dať lepšie riešenie ako najlepšie nájdené (orežeme), ✓ – celočíselné riešenie.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \leq 1,\ y \geq 2$
P_1	$y \leq 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \leq 3,\ x \geq 4$
P_2	$x \leq 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \geq 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \geq 2$	$2,\ 2$	18	$z \leq z^*$

- Najlepšie celočíselné riešenie:

  $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Graf



Východiskový stav

$P_0:\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Dopravný problém – Vogelova metóda a MODI.

Zadanie: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Výsledok

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Postup

- Jednotkové náklady, ponuka dodávateľov a_i a dopyt odberateľov b_j

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- Ponuka sa rovná dopytu – úloha je vyrovnaná:
  $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- Vogelova aproximačná metóda: v každom kroku vypočítame pokuty – rozdiel dvoch najnižších cien v riadku a stĺpci – a v riadku či stĺpci s najväčšou pokutou (v rámčeku) obsadíme pole s najnižšou cenou.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	**22**	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	**21**		10	10	$(1,1)$
3	40	20	**50**			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	**50**	$(1,4)$
5		20				40	**60**	$(2,4)$
6		**40**				40		$(2,3)$

- Východiskové riešenie (malé číslo je cena, tučne množstvo) – náklady
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- 1. iterácia metódou MODI: potenciály z $u_i + v_j = c_{ij}$ v obsadených poliach ($u_1 = 0$), v neobsadených poliach $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (v zátvorke). Najzápornejšie d = -18 má pole $(2,2)$ – obsadíme ho. Uzavretý okruh $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, presúvame θ = 2 (najmenšie množstvo v poliach so znamienkom −).

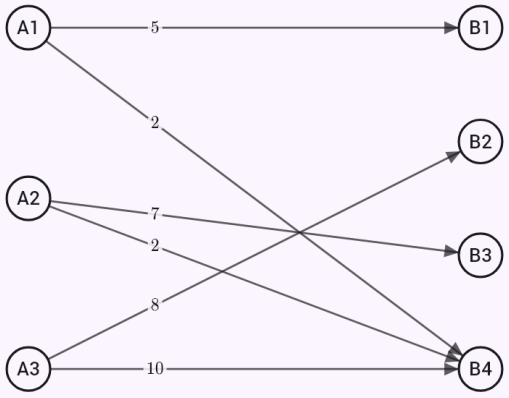
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}\boxed{-18}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	-10	10		

- Žiadne d_{ij} nie je záporné – plán prepravy je optimálny.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	8	10		

- Celkové náklady:
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Graf



Východiskový stav
$\sum$ =779

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Nevyrovnaný dopravný problém s fiktívnym odberateľom.

Zadanie: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Výsledok

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Postup

- Jednotkové náklady, ponuka dodávateľov a_i a dopyt odberateľov b_j

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- Ponuka prevyšuje dopyt ($\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – pridáme fiktívneho odberateľa B_4^* s dopytom 20 a nulovými nákladmi (tovar, ktorý zostane u dodávateľov).
- Východiskové riešenie metódou severozápadného rohu: obsadzujeme od ľavého horného poľa čo najviac a posúvame sa doprava alebo nadol (malé číslo je cena, tučne prepravované množstvo), náklady $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 0 \cdot 20 = 440$

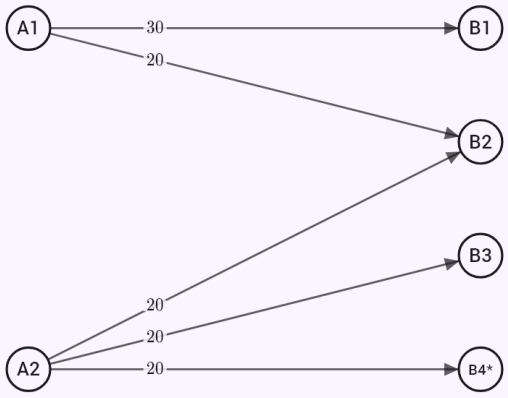
	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}.$	$^{0}.$	50
A_2	$^{5}.$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60
b_j	30	40	20	20	

- Žiadne d_{ij} nie je záporné – plán prepravy je optimálny.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	-1		

- Niektoré d_{ij} je nulové – existuje aj iné optimálne riešenie s rovnakými nákladmi.
- Celkové náklady: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Graf



Východiskový stav
$\sum = 440$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Priradenie pracovníkov k úlohám s najmenšími nákladmi.

Zadanie: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Výsledok

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Postup

- Náklady – riadky sú pracovníci (stroje), stĺpce úlohy

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Od každého riadku odčítame jeho minimum $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- Od každého stĺpca odčítame jeho minimum $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

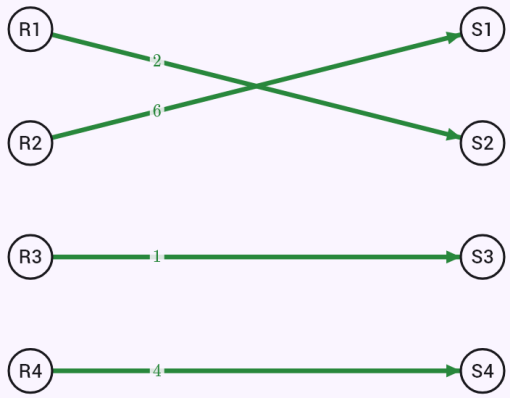
- Na pokrytie núl treba 4 čiar – vyberieme nezávislé nuly, v každom riadku aj stĺpci jednu (v rámčeku).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- Priradenie s pôvodnými nákladmi – spolu $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Graf



Priradenie s najväčším ziskom.

Zadanie: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Výsledok

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Postup

- Náklady – riadky sú pracovníci (stroje), stĺpce úlohy

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Hľadáme maximum – prevedieme ho na minimum: od najväčšieho čísla 9 odčítame každý prvok.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- Od každého riadku odčítame jeho minimum $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- Od každého stĺpca odčítame jeho minimum $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

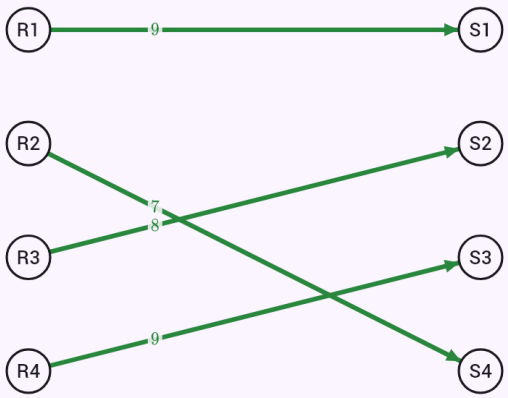
- Na pokrytie núl treba 4 čiar – vyberieme nezávislé nuly, v každom riadku aj stĺpci jednu (v rámčeku).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- Priradenie s pôvodnými nákladmi – spolu $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Graf



Hra so sedlovým bodom – maximin sa rovná minimaxu.

Zadanie: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Výsledok

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Postup

- Výplatná matica (3×3): riadky sú stratégie hráča A, stĺpce stratégie hráča B, čísla výhry A (prehry B). A chce výhru čo najväčšiu, B čo najmenšiu.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- Hľadáme sedlový bod: v každom riadku minimum (to si A zaručí), v každom stĺpci maximum (viac B neprehrá). $\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 2$ – maximin sa rovná minimaxu, hra má sedlový bod.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
max	6	2	6	

- Optimálne čisté stratégie (sedlové body): (A_1, B_2); cena hry $v = 2$

Hra 2 × 2 bez sedlového bodu – zmiešané stratégie vzorcom.

Zadanie: `game(3 -1; -2 4)`

Výsledok

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Postup

- Výplatná matica (2×2): riadky sú stratégie hráča A, stĺpce stratégie hráča B, čísla výhry A (prehry B). A chce výhru čo najväčšiu, B čo najmenšiu.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Hľadáme sedlový bod: v každom riadku minimum (to si A zaručí), v každom stĺpci maximum (viac B neprehrá). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – sedlový bod neexistuje. Hráči budú voliť zmiešané stratégie – každú čistú stratégiu s istou pravdepodobnosťou.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Hra 2 × 2 bez sedlového bodu (stratégie A_1, A_2 a B_1, B_2): A volí prvý riadok s pravdepodobnosťou p tak, aby mal proti obom stĺpcom rovnakú strednú výhru, B volí prvý stĺpec s pravdepodobnosťou q obdobne. Pre maticu (a b; c d)

$$p = \frac{d - c}{a - b - c + d} = \frac{4 - (-2)}{3 - (-1) - (-2) + 4} = \frac{3}{5}$$

$$q = \frac{d - b}{a - b - c + d} = \frac{4 - (-1)}{3 - (-1) - (-2) + 4} = \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2)}{3 - (-1) - (-2) + 4} = 1$$

- Optimálne zmiešané stratégie: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; cena hry $v = 1$

Dominované stratégie vyškrtnuté jedna po druhej.

Zadanie: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Výsledok

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Postup

- Výplatná matica (3×3): riadky sú stratégie hráča A, stĺpce stratégie hráča B, čísla výhry A (prehry B). A chce výhru čo najväčšiu, B čo najmenšiu.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- Hľadáme sedlový bod: v každom riadku minimum (to si A zaručí), v každom stĺpci maximum (viac B neprehrá). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budú voliť zmiešané stratégie – každú čistú stratégiu s istou pravdepodobnosťou.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- Stratégia A_3 je dominovaná stratégiou A_1 – tá dáva hráčovi A v každom stĺpci aspoň rovnako. A ju nezvolí, vyškrtneme ju

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- Stratégia B_3 je dominovaná stratégiou B_1 – s ňou hráč B v žiadnom riadku neprehrá viac. B ju nezvolí, vyškrtneme ju

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Hra 2 × 2 bez sedlového bodu (stratégie A_1, A_2 a B_1, B_2): A volí prvý riadok s pravdepodobnosťou p tak, aby mal proti obom stĺpcom rovnakú strednú výhru, B volí prvý stĺpec s pravdepodobnosťou q obdobne. Pre maticu (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Optimálne zmiešané stratégie: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; cena hry $v = 1$

Hra 2 × 4 graficky – maximum dolnej obálky.

Zadanie: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Výsledok

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Postup

- Výplatná matica (2×4): riadky sú stratégie hráča A, stĺpce stratégie hráča B, čísla výhry A (prehry B). A chce výhru čo najväčšiu, B čo najmenšiu.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- Hľadáme sedlový bod: v každom riadku minimum (to si A zaručí), v každom stĺpci maximum (viac B neprehrá). $\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budú voliť zmiešané stratégie – každú čistú stratégiu s istou pravdepodobnosťou.

	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

- Grafická metóda: A hrá prvý riadok s pravdepodobnosťou p, druhý s 1 − p. Jeho stredná výhra proti každej stratégii B je priamka v p; B zvolí tú najmenšiu, A preto hľadá najvyšší bod dolnej obálky priamok – maximum $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Priamky

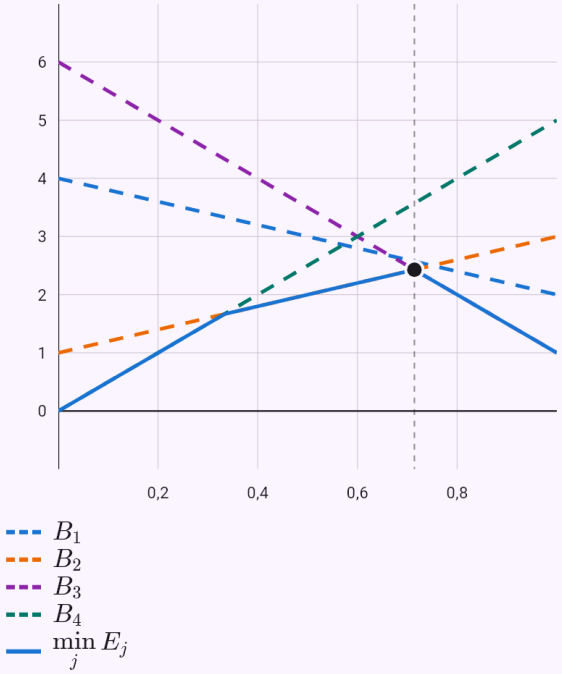
$$B_1: \; E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \; E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \; E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \; E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- Optimum leží na priesečníku priamok B_2, B_3. B ich mieša s pravdepodobnosťami w a 1 − w tak, aby bolo A jedno, ktorý riadok hrá:

$$2w + (-5)(1-w) = 0 \;\Rightarrow\; w = \frac{5}{7}$$

- Optimálne zmiešané stratégie: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; cena hry $v = \frac{17}{7}$

Graf



Priamky sú stredné výhry hráča A proti jednotlivým stratégiám B podľa p; zvýraznená dolná obálka je to, čo si A zaručí, bod je jej maximum.

Kameň, papier, nožnice lineárnym programovaním – každá stratégia s pravdepodobnosťou 1/3.

Zadanie: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Výsledok

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Postup

- Výplatná matica (3×3): riadky sú stratégie hráča A, stĺpce stratégie hráča B, čísla výhry A (prehry B). A chce výhru čo najväčšiu, B čo najmenšiu.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	1
A_2	1	0	-1
A_3	-1	1	0

- Hľadáme sedlový bod: v každom riadku minimum (to si A zaručí), v každom stĺpci maximum (viac B neprehrá). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ _ sedlový bod neexistuje. Hráči budú voliť zmiešané stratégie – každú čistú stratégiu s istou pravdepodobnosťou.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	-1	1	-1
A_2	1	0	-1	-1
A_3	-1	1	0	-1
max	1	1	1	

- Ku všetkým prvkom matice pripočítame k = 2, aby boli kladné – optimálne stratégie sa tým nezmenia, cena hry vzrastie o k.
- Väčšiu hru prevedieme na lineárne programovanie. Hráč B: max Σ y⃞ pri Σ⃞ a'⃞⃞·y⃞ ≤ 1, y⃞ ≥ 0, kde $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Duálna úloha k nej patrí hráčovi A.
- Úloha lineárneho programovania

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- Štandardný tvar: k obmedzeniu ≤ pripočítame doplnkovú premennú s, od obmedzenia ≥ ju odčítame a pridáme pomocnú (umelú) premennú a, k rovnosti len pomocnú. Východiskovú bázu tvoria s a a

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$$

- 1. simplexová tabuľka: vstupuje y_1 (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_2 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	

- 2. simplexová tabuľka: vstupuje y_3 (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_1 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- 3. simplexová tabuľka: vstupuje y_2 (najzápornejšie $z_j - c_j$), vystupuje s_3 (najmenší podiel b/a); pivot je v rámčeku.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	–
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- 4. tabuľka: žiadne $z_j - c_j$ nie je záporné – riešenie je optimálne.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- Optimálne riešenie prečítame z poslednej tabuľky (premenné mimo bázy sú nulové)
  $y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$

- Duálna úloha – každému obmedzeniu zodpovedá jedna duálna premenná, každej premennej jedno obmedzenie
  $\min v = u_1 + u_2 + u_3$
  $2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$
  $u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$
  $3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$
  $u_1, u_2, u_3 \geq 0$

- Tieňové ceny (optimálne duálne premenné) z poslednej tabuľky: o koľko sa zmení optimum, keď pravú stranu obmedzenia zväčšíme o 1. Nevyčerpané obmedzenie (s rezervou $b_i - a_i x > 0$) má tieňovú cenu 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- Optimum duálnej úlohy sa rovná optimu pôvodnej:
  $v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$

- Citlivostná analýza – v akom rozmedzí sa môžu meniť koeficienty účelovej funkcie, aby zostalo optimálne rovnaké riešenie

	c_j	
y_1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- V akom rozmedzí sa môžu meniť pravé strany, aby zostala optimálna rovnaká báza (tieňové ceny platia len v ňom)

	b_i	
1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Z optima: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Stratégie dostaneme vynásobením optimálnych y (pri hráčovi A tieňových cien) číslom v'.

- Optimálne zmiešané stratégie: $p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; cena hry $v = 0$

Bimaticová hra (súboj pohlaví) – dve čisté a jedna zmiešaná Nashova rovnováha.

Zadanie: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Výsledok

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Postup

- Bimaticová hra (2 × 2): v každom poli je dvojica (výhra A, výhra B) a každý hráč chce svoju výhru čo najväčšiu.

	B_1	B_2
A_1	$(2,\ 1)$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$(1,\ 2)$

- Najlepšie odpovede: v každom stĺpci podčiarkneme najväčšiu výhru A, v každom riadku nadčiarkneme najväčšiu výhru B. Polia, kde sú obe (v rámčeku), sú Nashove rovnováhy v čistých stratégiách: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- Zmiešaná rovnováha: A volí p tak, aby bolo B jedno, ktorý stĺpec hrá, B volí q tak, aby bolo A jedno, ktorý riadok hrá (stredné výhry $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow\ p = \frac{2}{3}$$

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow\ q = \frac{1}{3}$$

Známe obmedzenia

- Najviac 12 premenných a 15 ohraničení; celočíselné úlohy do 6 premenných. Všetky premenné musia byť nezáporné – voľné premenné zatiaľ nie sú.
- Dopravný a priraďovací problém do rozmeru 8 × 8.
- Maticové hry do 6 × 6; zmiešanú Nashovu rovnováhu bimaticovej hry počíta len pri hre 2 × 2.

52. Grafy, siete a logistika

Úlohy na grafoch a sieťach nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Logistika a siete: najkratšia cesta (Dijkstrov, Bellmanov–Fordov a Floydov–Warshallov algoritmus), minimálna kostra (Kruskal, Prim), maximálny tok a minimálny rez, menová arbitráž ako hľadanie záporného cyklu a kritická cesta projektu (CPM, PERT).

Graf zadáte do viacriadkového poľa: na riadok jedna hrana – A-B 4 je neorientovaná hrana s váhou 4, A->B 4 orientovaná, pri toku A->B 3/7 daný tok a kapacita; bez čísla má hrana váhu 1. Namiesto hrán môžete vložiť maticu váh po riadkoch (-, ∞ alebo 0 znamená, že hrana nie je), nad ňu prípadne riadok s názvami uzlov. Uzly sa môžu volať písmenom aj slovom (PHA, Brno). Činnosti projektu sa zadávajú názvom, trvaním a predchodcami (D 5 B C), pre PERT tromi odhadmi (B 3/4/11 A).

Pri arbitráži môžete namiesto vlastných kurzov zvoliť dnešný kurzový lístok ČNB alebo ECB – stačí vypísať meny (CZK EUR USD GBP). S jedným lístkom arbitráž nikdy nevyjde (postup ukáže prečo), s oboma lístkami naraz sa pre každú dvojicu mien vezme výhodnejší kurz a cyklus nad 1 vyjsť môže. Tlačidlo „Doplniť kurzy na úpravu“ vloží kurzy jedného lístka do poľa Výmenné kurzy – upravíte ich napríklad podľa lístka zmenárne s nákupom a predajom.

Postup ukazuje tabuľku iterácií ako v skriptách – trvalé a dočasné značky Dijkstrovho algoritmu, prechody Bellmanovho–Fordovho, matice Floydovho–Warshallovho po každom uzle, zoradené hrany Kruskalovho algoritmu, zlepšujúce cesty toku, dopredný a spätný prechod CPM. Pod výsledkom je graf, ktorým šípkami prejdete krok za krokom: červeno je zmena v danom kroku, modro to, čo je už rozhodnuté, zeleno výsledok.

Ukážky

Najkratšia cesta Dijkstrovým algoritmom.

Zadanie: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2;`

`from=A; to=F; method=dijkstra)`

Výsledok

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

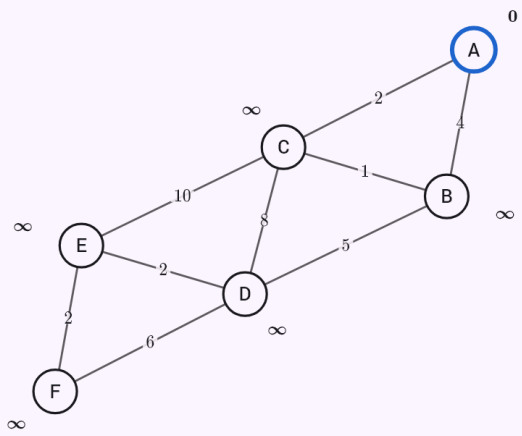
Postup

- Neorientovaný graf s 6 uzlami a 9 hranami.
- Dijkstrov algoritmus: v každom kroku trvalo označíme uzol s najmenšou dočasnou značkou (v rámčeku) a znížime značky jeho susedov, ak cez neho vedie kratšia cesta (tučne); dolný index je predchodca.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- Cestu prečítame spätne podľa predchodcov: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, jej dĺžka $2 + 1 + 5 + 2 + 2 = 12$

Graf



Východiskový stav
$d(\mathrm{A}) = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Záporná váha hrany – Bellmanov–Fordov algoritmus.

Zadanie: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Výsledok

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

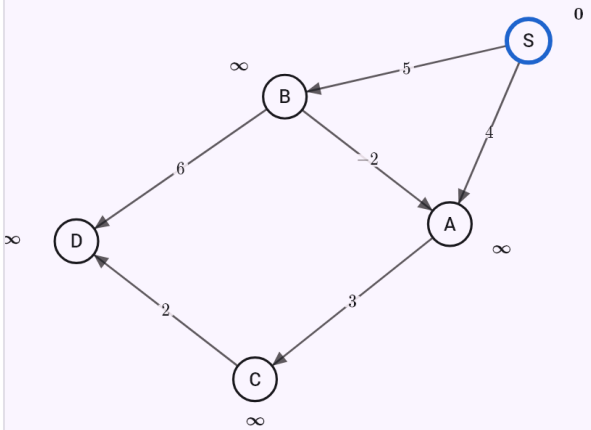
Postup

- Orientovaný graf s 5 uzlami a 6 hranami.
- Bellmanov–Fordov algoritmus: v každom prechode skúsime skrátiť cestu cez každú hranu, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; zmenené značky sú tučne, dolný index je predchodca.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- V $2.$ prechode sa už žiadna značka nezmenila – vzdialenosti sú konečné.
- Cestu prečítame spätne podľa predchodcov: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, jej dĺžka $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Graf



Východiskový stav
$d(\mathrm{S}) = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Vzdialenosti medzi všetkými dvojicami uzlov.

Zadanie: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Výsledok

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Postup

- Orientovaný graf s 4 uzlami a 6 hranami.
- Floydov–Warshallov algoritmus začína maticou váh hrán (∞ – hrana nie je)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzol A ako medzizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, skrátené vzdialenosti sú tučne.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzol B ako medzizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, skrátené vzdialenosti sú tučne.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

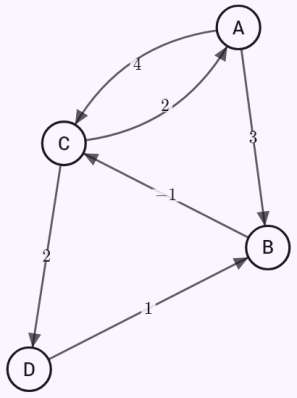
- Povolíme uzol C ako medzizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, skrátené vzdialenosti sú tučne.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Povolíme uzol D ako medzizastávku: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$, skrátené vzdialenosti sú tučne.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Graf



Východiskový stav
$D^{(0)}$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Minimálna kostra Kruskalovým algoritmom.

Zadanie: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G`

`9; F-G 11; method=kruskal)`

Výsledok

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

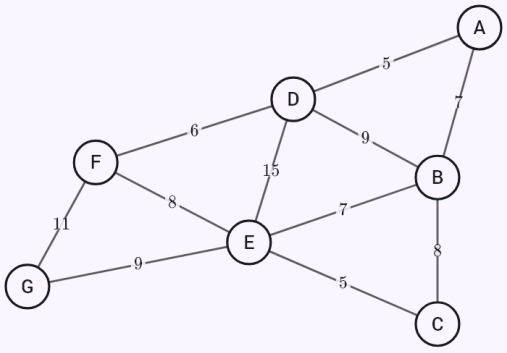
Postup

- Neorientovaný graf s 7 uzlami a 11 hranami.
- Kruskalov algoritmus: hrany zoradíme od najlacnejšej a každú pridáme (✓), ak neuzavrie cyklus (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- Súčet váh hrán kostry: $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Graf



Východiskový stav

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Najkratšia sieť spájajúca krajské mestá Primovým algoritmom.

Zadanie: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Výsledok

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

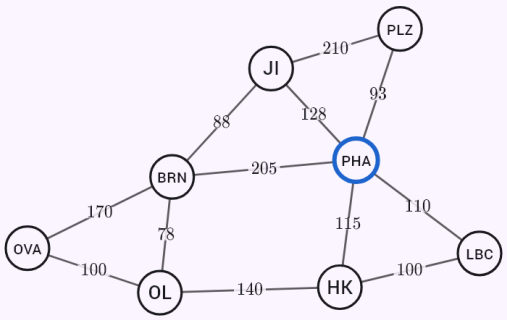
Postup

- Neorientovaný graf s 8 uzlami a 12 hranami.
- Primov algoritmus od uzla PHA: v každom kroku pripojíme najlacnejšiu hranu, ktorá vedie zo stromu k uzlu mimo neho.

		w
1	$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ}$	93
2	$\mathrm{PHA}-\mathrm{LBC}$	110
3	$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK}$	100
4	$\mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$	128
5	$\mathrm{JI}-\mathrm{BRN}$	88
6	$\mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$	78
7	$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$	100

- Súčet váh hrán kostry:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Graf



Východiskový stav
PHA

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Maximálny tok a minimálny rez.

Zadanie: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Výsledok

$f_{max} = 23$

$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$

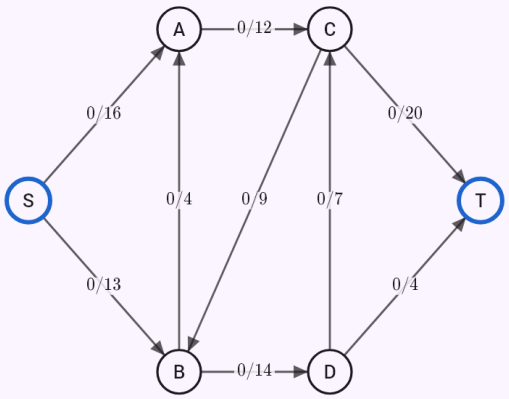
Postup

- Hľadáme maximálny tok zo zdroja S do stoku T, začíname s tokom veľkosti 0
- 1. zlepšujúca cesta (najkratšia v reziduálnej sieti): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšime o najmenšiu rezervu $\min(16, 12, 20) = 12$, veľkosť toku je teraz 12
- 2. zlepšujúca cesta (najkratšia v reziduálnej sieti): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšime o najmenšiu rezervu $\min(13, 14, 4) = 4$, veľkosť toku je teraz 16
- 3. zlepšujúca cesta (najkratšia v reziduálnej sieti): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Tok zvýšime o najmenšiu rezervu $\min(9, 10, 7, 8) = 7$, veľkosť toku je teraz 23
- Ďalšia zlepšujúca cesta neexistuje – zo zdroja sa v reziduálnej sieti dostaneme len do uzlov $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Tok po hranách (f) a ich kapacity (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Hrany z množiny S von tvoria minimálny rez: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Sú všetky plné a súčet ich kapacít $12 + 7 + 4 = 23$ sa rovná maximálnemu toku.

Graf



Východiskový stav
$f = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Zárobkový cyklus zmien troch mien.

Zadanie: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24;`

USD->GBP 0.7)

Výsledok

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Postup

- Kurzy a váhy hrán $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

- Cyklus zarobí, keď je súčin kurzov väčší ako 1 – po zlogaritmovaní je to záporný cyklus váh

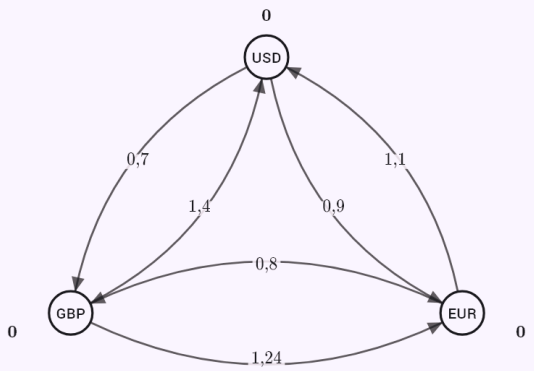
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- Bellmanov–Fordov algoritmus začneme zo všetkých mien naraz (všetky značky 0); zmenené značky sú tučne, dolný index je predchodca.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{GBP}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{USD}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{USD}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Značky sa menia aj v n-tom prechode – podľa predchodcov nájdeme záporný cyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Súčin kurzov $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, zisk $0{,}8\,\%$: z 1000 jednotiek je po jednom obehu 1008

Graf



Východiskový stav
$d = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Konzistentné kurzy zadané maticou – arbitráž neexistuje.

Zadanie: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Výsledok

Arbitráž neexistuje – žiadny cyklus zmien nezarobí.

Postup

- Kurzy a váhy hrán $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	0,04	3,2189
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	0,0432	3,1419
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	25	−3,2189
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	1,08	−0,076961
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	23,1481	−3,1419
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	0,925926	0,076961

- Cyklus zarobí, keď je súčin kurzov väčší ako 1 – po zlogaritmovaní je to záporný cyklus váh
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

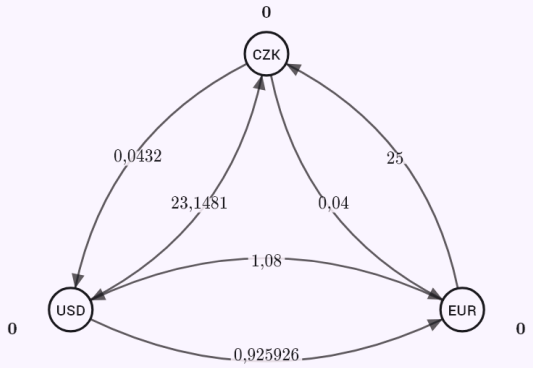
- Bellmanov–Fordov algoritmus začneme zo všetkých mien naraz (všetky značky 0); zmenené značky sú tučne, dolný index je predchodca.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- V 2. prechode sa už žiadna značka nezmenila – vzdialenosti sú konečné.
- Ani v n-tom prechode sa značky nezmenili – záporný cyklus a teda ani arbitráž neexistuje. Potenciály p = −d sú logaritmy konzistentných „cien“ mien: pre každý kurz platí $\ln r \le p$(cieľová) − p(východisková).

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Graf



Východiskový stav
$d = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Kurzy jedného lístka (ČNB) – arbitráž nikdy nevyjde.

Zadanie: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Výsledok

Arbitráž neexistuje – žiadny cyklus zmien nezarobí.

Postup

- Kurzy z kurzového lístka: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Lístok uvádza hodnotu jednej jednotky každej meny v základnej mene CZK (k) – a jej logaritmus p = ln k

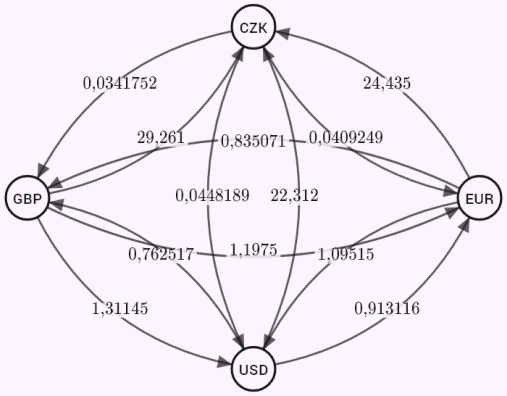
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$	$3{,}3763$

- Kurz medzi dvoma menami je krížový kurz cez základnú menu: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Na každom cykle sa hodnoty k skrátia a súčin kurzov je presne 1. Kurzy jedného lístka ($\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB}$) sú konzistentné, arbitráž z nich nikdy nevyjde – logaritmy p = ln k sú „ceny“ mien, ktoré to dokladajú.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- ČNB aj ECB vyhlasujú len stredné (referenčné) kurzy, bez nákupu a predaja. S kurzami zmenárne (nákup a predaj) každý cyklus prerobí.

Graf



Kurzy ČNB a ECB dohromady – nepatrný „zisk“ medzi referenčnými kurzami.

Zadanie: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Výsledok

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}0009332 \;(+0{,}09332\,\%)$$

Postup

- Kurzy z kurzového lístka:
  $\mathrm{ČNB},\ 27.\ 11.\ 2026;\quad \mathrm{ECB},\ 27.\ 11.\ 2026$
- Pre každú dvojicu mien vezmeme výhodnejší z dvoch kurzov – ČNB alebo ECB (posledný stĺpec tabuľky). Ten druhý by žiadny cyklus nezlepšil.
- Kurzy a váhy hrán $w = -\ln r$

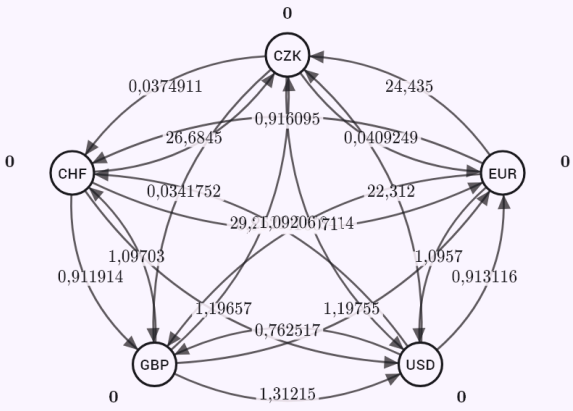
	r	$w = -\ln r$	
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	0,0409249	3,196	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	0,0448414	3,1046	ECB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{GBP}$	0,0341752	3,3763	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{CHF}$	0,0374911	3,2837	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	24,435	−3,196	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	1,0957	−0,091393	ECB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	0,835071	0,18024	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CHF}$	0,916095	0,087635	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	22,312	−3,1051	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	0,913116	0,090892	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	0,762517	0,27113	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF}$	0,836501	0,17853	ČNB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CZK}$	29,2621	−3,3763	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	1,19755	−0,18028	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	1,31215	−0,27167	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CHF}$	1,09703	−0,092604	ČNB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{CZK}$	26,6845	−3,2841	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{EUR}$	1,09206	−0,088066	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$	1,19657	−0,17946	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{GBP}$	0,911914	0,092209	ECB

- Cyklus zarobí, keď je súčin kurzov väčší ako 1 – po zlogaritmovaní je to záporný cyklus váh
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- Bellmanov–Fordov algoritmus začneme zo všetkých mien naraz (všetky značky 0); zmenené značky sú tučne, dolný index je predchodca.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272064}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272996}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}273929}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}274862}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}275795}$

- Značky sa menia aj v n-tom prechode – podľa predchodcov nájdeme záporný cyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Súčin kurzov $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, zisk $0{,}09332\,\%$: z 1000 jednotiek je po jednom obehu $1000{,}933$
- Cyklus vyšiel len medzi referenčnými kurzami dvoch bánk, ktoré sa stanovujú v inom čase a inak zaokrúhľujú. Za tieto kurzy sa neobchoduje – zisk je prakticky nezarobiteľný.

Graf



Východiskový stav
$d = 0$

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Kritická cesta a rezervy činností.

Zadanie: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Výsledok

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Postup

- Činnosti, ich doby trvania a predchodcovia

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Dopredný prechod: činnosť začne najskôr, až skončia všetci jej predchodcovia (ES = najväčší EF predchodcov), skončí v EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- Doba trvania projektu je najneskorší z najskorších koncov: $T = 14$
- Spätný prechod: činnosť musí skončiť najneskôr, keď musia začať jej nasledovníci (LF = najmenší LS nasledovníkov), začať najneskôr v LS = LF − t.

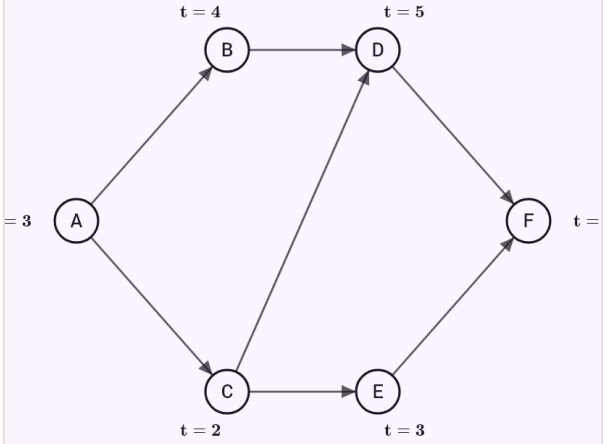
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- Rezerva každej činnosti; kritické činnosti (★) žiadnu nemajú

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- Kritická cesta – oneskorenie ktorejkoľvek jej činnosti oneskorí celý projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Graf



Východiskový stav

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

PERT – pravdepodobnosť dokončenia projektu do termínu.

Zadanie: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Výsledok

$$T = 13$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$$
$$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$$

Postup

- Činnosti, ich doby trvania a predchodcovia

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT: očakávané doby trvania a rozptyly z troch odhadov

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Dopredný prechod: činnosť začne najskôr, až skončia všetci jej predchodcovia (ES = najväčší EF predchodcov), skončí v EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- Doba trvania projektu je najneskorší z najskorších koncov: $T = 13$
- Spätný prechod: činnosť musí skončiť najneskôr, keď musia začať jej nasledovníci (LF = najmenší LS nasledovníkov), začať najneskôr v LS = LF − t.

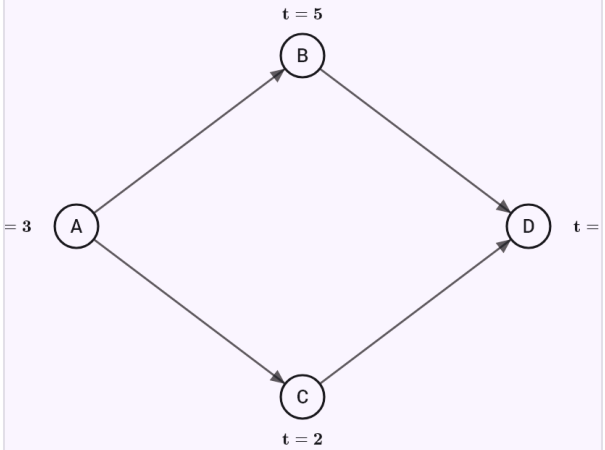
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- Rezerva každej činnosti; kritické činnosti (★) žiadnu nemajú

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- Kritická cesta – oneskorenie ktorejkoľvek jej činnosti oneskorí celý projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- Rozptyl doby trvania projektu je súčet rozptylov činností na kritickej ceste:
  $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- Doba trvania má približne normálne rozdelenie – pravdepodobnosť dokončenia do termínu:
  $P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15-13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$

Graf



Východiskový stav

Šípkami prejdete jednotlivé kroky algoritmu. Načerveno je zmena v tomto kroku, namodro to, čo je už rozhodnuté, nazeleno výsledok. Pri uzloch sú ich značky (vzdialenosť, najskoršie a najneskoršie termíny).

Známe obmedzenia

- Graf môže mať najviac 30 uzlov a 200 hrán; matice Floydovho–Warshallovho algoritmu po jednotlivých uzloch sa ukazujú do 6 uzlov, pri väčších grafoch len výsledná matica.
- Arbitráž hľadá jeden zárobkový cyklus (nie nutne najvýnosnejší); rozdiely pod 0,0001 % sa považujú za zaokrúhlenie kurzov.

- ČNB aj ECB vyhlasujú len stredné (referenčné) kurzy, za ktoré sa neobchoduje; „zisk“ z oboch lístkov naraz je rádovo stotiny percenta a prakticky nezarobiteľný.
- S oboma lístkami len meny, ktoré vyhlasujú obe banky (ruský rubeľ ani jedna).
- Okružné jazdy, problém batohu, zásoby a fronty pripravujeme; lineárne programovanie, dopravný a priraďovací problém sú v samostatnej kapitole.

53. Psychometria

Psychometrické výpočty na interpretáciu výsledkov testov (podľa skrípt „Klinická psychometrie – od čísla k interpretaci“) nájdete vo formulári „Štatistika a psychometria“ – sekcia „Aplikácie“ na úvodnej obrazovke, odbor Psychológia. Vyberiete úlohu, škálu a hľadanú veličinu a vyplníte namerané hodnoty; priemer a smerodajnú odchýlku normy predvyplní voľba škály (IQ 100; 15, T 50; 10, vážené skóre 10; 3, z 0; 1, sten 5,5; 2, stanin 5; 2), „Vlastná“ nechá zadať normu iného testu. Ikonka „?“ vysvetlí, odkiaľ vzorec pochádza.

Nápoveda priamo v aplikácii: ikonka „?“ pri každej úlohe formulára vysvetlí, čo úloha počíta a odkiaľ vzorec pochádza. Vo výsledku je postup krok za krokom a odborné pojmy v ňom (Cohenova κ, ROC krivka, interval spoľahlivosti, p-hodnota, percentil, pravé skóre, prediktívne hodnoty …) sú bodkovane podčiarknuté – ťuknutím na pojem sa zobrazí jeho krátke vysvetlenie obyčajnými slovami, často s príkladom. Poznámky na konci postupu upozornia, ako výsledok interpretovať a na čo si dať pozor.

Prevody štandardných skóre: $z = (X - M)/SD$ a z neho T, IQ, vážené skóre, sten a stanin (zaokrúhlené na celé číslo v rozsahu škály) aj percentil. Skóre a percentil: percentilové poradie $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ za predpokladu normálneho rozdelenia a obrátene skóre k zadanému percentilu.

Štandardná chyba merania $SEM = SD \cdot \sqrt{(1 - r)}$ z reliability r. Interval spoľahlivosti okolo pozorovaného skóre $X \pm z \cdot SEM$ na hladine 80, 90, 95 alebo 99 % ($z = 1{,}28$; 1,645; 1,96; 2,576). Odhad pravého skóre $T' = M + r(X - M)$ – regresia k priemeru – s intervalom okolo T' a štandardnou chybou odhadu $SEE = SD \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

Významnosť rozdielu dvoch skóre tej istej škály (napr. indexov WAIS): štandardná chyba rozdielu $SE\_diff = SD \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ a kritický rozdiel $z \cdot SE\_diff$. Prediktívne hodnoty testu podľa Bayesovej vety: PPV a NPV zo senzitivity, špecificity a prevalencie – alebo z tabuľky 2×2 (skutočne a falošne pozitívne a negatívne), voliteľne s prevalenciou populácie, na ktorej sa test použije – a k nim vierohodnostné pomery LR^+ a LR^-.

Spearmanov–Brownov vzorec (v tom istom formulári) vypočíta reliabilitu testu predĺženého k-krát, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, alebo obrátene, koľkokrát test predĺžiť pre cieľovú reliabilitu – so zadaným počtom položiek aj potrebný počet položiek. Bonferroniho korekcia dá prísnejšiu hladinu $\alpha' = \alpha/m$ pre m porovnaní a k nej pravdepodobnosť falošne významného výsledku bez korekcie a Šidákovu korekciu.

Reliabilitu a zhodu z nameraných dát vypočítajú čipy pri zápise data(…) alebo pri mriežke „Ako dáta“ (vloženie z Excelu, súbor CSV): Cronbachovo α – položky v stĺpcoch, respondenti v riadkoch – s položkovou analýzou (korelácia položky so zvyškom testu, α po vyradení položky); ICC – hodnotitelia v stĺpcoch, subjekty v riadkoch – všetkých šesť variantov podľa Shrouta a Fleissa z tabuľky analýzy rozptylu; Cohenova κ z dvoch stĺpcov hodnotenia (kategórie ako čísla) alebo zo štvorcovej tabuľky zhody; ROC krivka a AUC zo stĺpca skóre a stĺpca stavu 0/1 (1 = porucha) cez Mannovu–Whitneyho štatistiku U,

s hraničným skóre podľa Youdenovho indexu a grafom ROC krivky. K α, ICC, κ aj AUC patrí interval spoľahlivosti (90, 95 alebo 99 % čipom): α podľa Feldta, ICC z F-rozdelenia, κ z asymptotickej smerodajnej chyby, AUC podľa Hanleyho a McNeila. Pri poradových kategóriách vypočíta κ aj s lineárnymi alebo kvadratickými váhami. ROC krivku vezme aj z dvoch stĺpcov skóre dvoch skupín (prvá pozitívna, smú mať rôznu dĺžku) a k AUC pridá Mannov–Whitneyho test. Tri stĺpce – skóre dvoch testov a stav – porovná DeLongovým testom s oboma krivkami v jednom grafe.

Postup končí interpretačnou poznámkou: percentily sú poradová škála (nesčítajú sa ani nepriemerujú), prevod na percentil platí len pri normálne rozloženom skóre, štatisticky významný rozdiel ešte nie je nezvyčajný (base rate diskrepancie), prediktívne hodnoty závisia od prevalencie. Graf ukáže normálnu krivku s vyznačeným skóre, intervalom alebo kritickou oblasťou.

Ukážky

IQ 85 vo všetkých škálach: z = −1, T = 40, vážené skóre 7.

Zadanie: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Výsledok

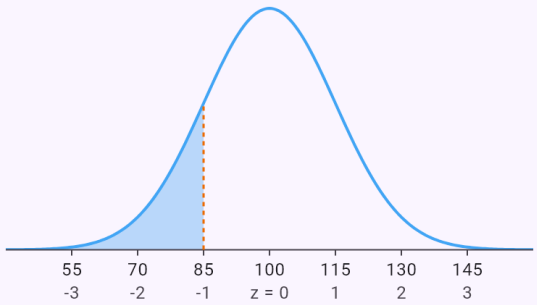
$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

Postup

- Zadané: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Štandardné skóre vyjadrujú, ako ďaleko je výkon od priemeru normy, v jednotkách smerodajnej odchýlky. Najprv vypočítame z = (X − M)/SD, potom ho prevedieme na inú škálu: T = 50 + 10z, IQ = 100 + 15z, vážené (škálované) skóre = 10 + 3z, sten = 5,5 + 2z (1–10), stanin = 5 + 2z (1–9). Percentil udáva, koľko percent populácie má nižšie skóre – platí len pre normálne rozložené skóre. Rovnica modelu:
  $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Dosadíme: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Dosadíme: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Dosadíme: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Dosadíme: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Dosadíme
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Dosadíme:
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$
- Sten a stanin sú celé čísla – vypočítanú hodnotu zaokrúhlime a obmedzíme na rozsah škály (1–10, 1–9).
- Dosadíme: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- Prevod na percentil platí len pre normálne rozložené skóre. Pri zošikmených testoch (napr. časové skóre TMT) treba percentil vyčítať priamo z normatívnej tabuľky.
- Percentily sú poradová škála – nerovnako „veľké“ kroky (v strede je medzi 50. a 60. percentilom malý rozdiel skóre, na okrajoch veľký). Percentily preto nesčítame, nepriemerujeme ani neodčítame.

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



$PR \approx 16 \quad X = 85$

IQ 130 zodpovedá 98. percentilu.

Zadanie: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Výsledok

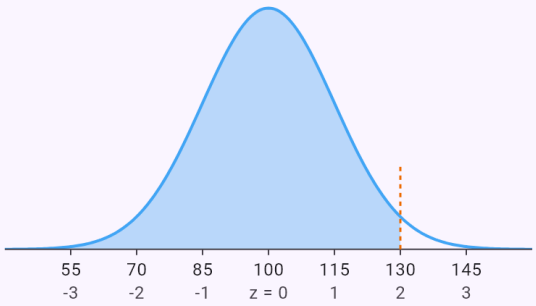
$$PR \approx 98$$

Postup

- Hľadáme PR; zadané: $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Percentil (percentilové poradie) hovorí, koľko percent normatívnej populácie dosiahlo nižšie skóre. Za predpokladu normálneho rozdelenia ho dostaneme zo z-skóre distribučnou funkciou: PR = 100·Φ(z), a naopak skóre z percentilu cez kvantil z = Φ⁻¹(PR/100). Rovnica modelu: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Dosadíme: $z = \frac{130 - 100}{15} = 2$
- Dosadíme: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- Prevod na percentil platí len pre normálne rozložené skóre. Pri zošikmených testoch (napr. časové skóre TMT) treba percentil vyčítať priamo z normatívnej tabuľky.
- Percentily sú poradová škála – nerovnako „veľké“ kroky (v strede je medzi 50. a 60. percentilom malý rozdiel skóre, na okrajoch veľký). Percentily preto nesčítame, nepriemerujeme ani neodčítame.

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



$PR \approx 98 \quad X = 130$

T-skóre zodpovedajúce 16. percentilu.

Zadanie: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Výsledok

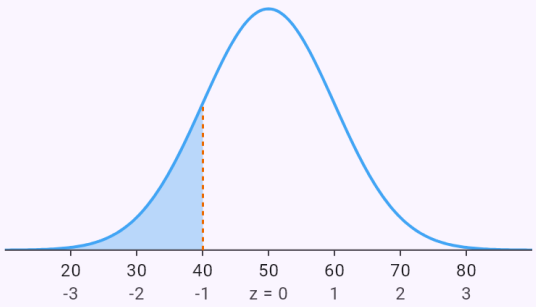
$$X \approx 40{,}1$$

Postup

- Hľadáme X; zadané:
  $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Prevedieme jednotky: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Percentil (percentilové poradie) hovorí, koľko percent normatívnej populácie dosiahlo nižšie skóre. Za predpokladu normálneho rozdelenia ho dostaneme zo z-skóre distribučnou funkciou: PR = 100·Φ(z), a naopak skóre z percentilu cez kvantil z = Φ⁻¹(PR/100). Rovnica modelu: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $z = \Phi^{-1}\left(\frac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- Dosadíme
  $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- Prevod na percentil platí len pre normálne rozložené skóre. Pri zošikmených testoch (napr. časové skóre TMT) treba percentil vyčítať priamo z normatívnej tabuľky.
- Percentily sú poradová škála – nerovnako „veľké“ kroky (v strede je medzi 50. a 60. percentilom malý rozdiel skóre, na okrajoch veľký). Percentily preto nesčítame, nepriemerujeme ani neodčítame.

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

Štandardná chyba merania testu s reliabilitou 0,97.

Zadanie: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Výsledok

$$SEM \approx 2{,}6$$

Postup

- Hľadáme SEM; zadané: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Žiadne meranie nie je presné: pozorované skóre X = pravé skóre T + chyba E. Štandardná chyba merania SEM = SD·√(1 − r) udáva, o koľko sa pozorované skóre typicky líši od pravého; r je reliabilita testu (napr. test-retest alebo Cronbachovo α). Čím vyššia reliabilita, tým menšia chyba. Rovnica modelu: $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Štandardná chyba merania:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

95% interval spoľahlivosti okolo IQ 95.

Zadanie: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Výsledok

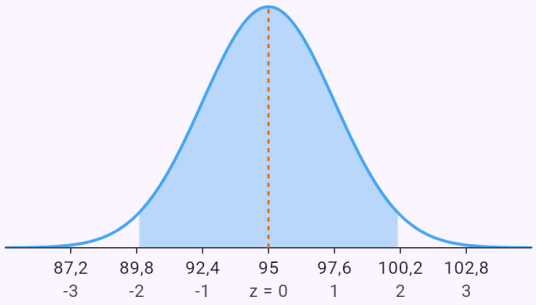
$95\,\%: \ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle$

Postup

- Hľadáme X; zadané:
  $X = 95, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Okolo pozorovaného skóre vytýčime pásmo, v ktorom s danou spoľahlivosťou leží pravé skóre: X ± z·SEM, kde z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) alebo 2,576 (99 %). Skóre treba teda chápať ako interval, nie ako presné číslo. Rovnica modelu
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Štandardná chyba merania:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Kritická hodnota normovaného rozdelenia:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Dosadíme
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow \langle 89{,}91;\ 100{,}1\rangle$
- Interval je postavený okolo pozorovaného skóre. Presnejší (hlavne pri extrémnych skóre) je interval okolo odhadu pravého skóre – model „Odhad pravého skóre“.

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



$95\,\%: \ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle \quad X = 95$

Odhad pravého skóre IQ 74 pri reliabilite 0,92.

Zadanie: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Výsledok

$$T' \approx 76{,}1$$

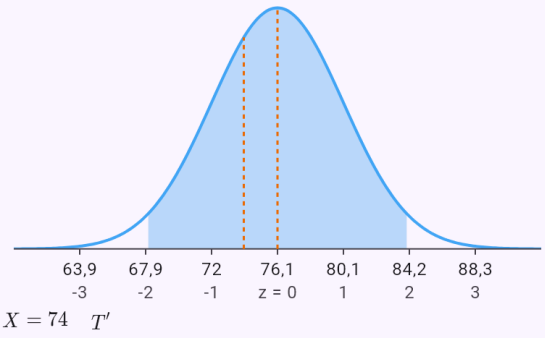
$$95\,\% : \ \langle 68{,}1;\ 84{,}1 \rangle$$

Postup

- Hľadáme T'; zadané:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- Pri extrémnych skóre sa pravé skóre odhaduje bližšie k priemeru (regresia k priemeru): T' = M + r(X − M). Interval spoľahlivosti sa potom stavia okolo T' so štandardnou chybou odhadu SEE = SD·√(r(1 − r)). Tento postup je presnejší ako interval okolo pozorovaného skóre, hlavne pri nízkej reliabilite. Rovnica modelu
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Dosadíme: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- Odhad pravého skóre je bližšie k priemeru ako pozorované skóre – pri opakovanom meraní by extrémny výsledok pravdepodobne vyšiel menej extrémny.
- Štandardná chyba odhadu pravého skóre:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Kritická hodnota normovaného rozdelenia:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Dosadíme
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow \langle 68{,}1;\ 84{,}06 \rangle$

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



Rozdiel dvoch indexov 112 a 97 – je významný?

Zadanie: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Výsledok

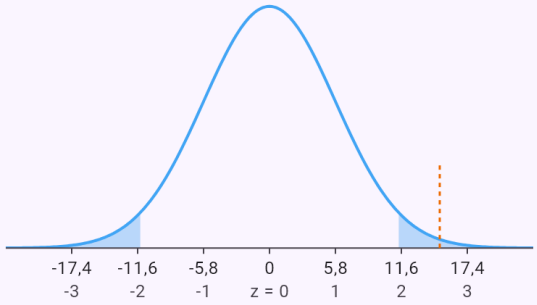
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

Postup

- Hľadáme D; zadané:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Líšia sa dve skóre (napr. indexy WAIS) viac, ako by spôsobila chyba merania? Štandardná chyba rozdielu SE_diff = SD·√(2 − r_{11} − r_{22}) a kritický rozdiel z·SE_diff. Rozdiel, ktorý ho dosiahne, je štatisticky významný – to však neznamená, že je nezvyčajný. Rovnica modelu
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Štandardná chyba rozdielu:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Kritická hodnota normovaného rozdelenia:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Kritický rozdiel: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Dosadíme: $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- Rozdiel dosahuje kritickú hodnotu – je štatisticky významný (nemožno ho vysvetliť len chybou merania).
- Štatisticky významný rozdiel ešte neznamená nezvyčajný: rozdiely indexov tejto veľkosti má v normatívnej vzorke často 20–30 % ľudí (base rate diskrepancie). Na interpretáciu treba zistiť aj početnosť rozdielu v norme.

Graf

Hustota normálneho rozdelenia, vyfarbená plocha je hľadaná pravdepodobnosť



$95\,\%$ $D = 15$

Skríning so senzitivitou 92,5 % a špecificitou 74,6 % pri prevalencii 2 %.

Zadanie: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

`input=rates)`

Výsledok

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Postup

- Hľadáme PPV; zadané:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- Senzitivita (Se) je podiel chorých, ktorých test zachytí, špecificita (Sp) podiel zdravých, ktorých test správne vylúči. Pre prax je však dôležité, aká veľká je pravdepodobnosť poruchy pri pozitívnom výsledku – pozitívna prediktívna hodnota PPV. Podľa Bayesovej vety závisí od prevalencie p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), negatívna NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Rovnica modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Dosadíme
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Dosadíme
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Vierohodnostné pomery:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Prediktívne hodnoty závisia od prevalencie: pri nízkej prevalencii je aj pri dobrom teste väčšina pozitívnych výsledkov falošne pozitívnych. Pozitívny výsledok skríningu treba preto overiť.

Prediktívne hodnoty z tabuľky 2×2.

Zadanie: `model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)`

Výsledok

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Postup

- Hľadáme PPV; zadané:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Senzitivita: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Špecificita: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Prevalencia vo vzorke: $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- Senzitivita (Se) je podiel chorých, ktorých test zachytí, špecificita (Sp) podiel zdravých, ktorých test správne vylúči. Pre prax je však dôležité, aká veľká je pravdepodobnosť poruchy pri pozitívnom výsledku – pozitívna prediktívna hodnota PPV. Podľa Bayesovej vety závisí od prevalencie p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), negatívna NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Rovnica modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Dosadíme
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Dosadíme
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Vierohodnostné pomery:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Prediktívne hodnoty závisia od prevalencie: pri nízkej prevalencii je aj pri dobrom teste väčšina pozitívnych výsledkov falošne pozitívnych. Pozitívny výsledok skríningu treba preto overiť.

Vnútorná konzistencia dotazníka so štyrmi položkami.

Zadanie: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Cronbachovo α

Výsledok

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ \langle 0{,}765;\ 0{,}990\rangle$$

Postup

- Počet položiek (stĺpcov) k = 4, počet respondentov (riadkov) 6
- Výberové rozptyly položiek a ich súčet

  $$s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$$

  $$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Celkové skóre každého respondenta (súčet jeho odpovedí): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. Rozptyl celkových skóre: $s^2_X \approx 24{,}17$
- Cronbachovo α – vnútorná konzistencia je výborná.

  $$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Položková analýza – priemer, rozptyl, korelácia položky so zvyškom testu a α po vyradení položky

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- Interval spoľahlivosti $95\,\%$ podľa Feldta – podiel $(1 - \alpha)/(1 - \alpha_0)$ má F-rozdelenie s n − 1 a (n − 1)(k − 1) stupňami voľnosti

  $$F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$$

  $$F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$$

  $$\alpha_L = 1 - (1 - \alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

  $$\alpha_U = 1 - (1 - \alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Orientačné hodnotenie α: ≥ 0,9 výborná, ≥ 0,8 dobrá, ≥ 0,7 prijateľná vnútorná konzistencia. Na výskum stačí zhruba 0,7, na rozhodovanie o jednotlivcovi (diagnostiku) sa odporúča aspoň 0,9.
- Vysoké α ešte neznamená, že test meria jedinú vlastnosť, a rastie aj so samotným počtom položiek. Ak vzrastie α po vyradení niektorej položky (posledný stĺpec tabuľky), položka do škály najskôr nepatrí.

Zhoda štyroch hodnotiteľov pri šiestich subjektoch (príklad Shrouta a Fleissa).

Zadanie: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (zhoda hodnotiteľov)

Výsledok

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \;\; \langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \;\; \langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \;\; \langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \;\; \langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \;\; \langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \;\; \langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$$

Postup

- Počet hodnotených subjektov (riadkov) 6, počet hodnotiteľov (stĺpcov) k = 4, celkový priemer $\bar{x} = 5{,}292$
- Analýza rozptylu – súčty štvorcov SS, stupne voľnosti df a priemerné štvorce MS medzi subjektmi (R), medzi hodnotiteľmi (C), reziduálne (E) a vnútri subjektov (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Jednofaktorový model – každý subjekt môžu hodnotiť iní hodnotitelia

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Dvojfaktorový model s náhodnými hodnotiteľmi – absolútna zhoda

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Dvojfaktorový model s pevnými hodnotiteľmi – konzistencia

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Intervaly spoľahlivosti 95 % z F-rozdelenia (Shrout a Fleiss) – pomery priemerných štvorcov a ich hranice

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\, 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\, 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\, 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\, 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Všetkých šesť ICC s intervalmi spoľahlivosti 95 %

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$\langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$
$ICC(1,4)$	0,443	$\langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$
$ICC(2,1)$	0,290	$\langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$
$ICC(2,4)$	0,620	$\langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$
$ICC(3,1)$	0,715	$\langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$
$ICC(3,4)$	0,909	$\langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$

- Ktorú ICC použiť: ICC(1,·) – každý subjekt hodnotia iní hodnotitelia; ICC(2,·) – hodnotitelia sú náhodný výber a zaujíma nás absolútna zhoda; ICC(3,·) – pevne daní hodnotitelia, zaujíma nás konzistencia. ICC(·,1) platí pre jedného hodnotiteľa, ICC(·,k) pre priemer k hodnotiteľov. Orientačne (Koo a Li): pod 0,5 slabá, 0,5–0,75 stredná, 0,75–0,9 dobrá, nad 0,9 výborná reliabilita.
- ICC(3,k) sa rovná Cronbachovmu α vypočítanému z tých istých dát (hodnotitelia ako položky).
- Interval spoľahlivosti ICC býva pri malom počte subjektov široký – aj vysoké ICC môže mať dolnú hranicu nízku. ICC(2,·) majú interval približný (Satterthwaiteove stupne voľnosti).
- Pozor: dát je málo, odhady (hlavne rozptylu a kvartilov) sú neisté.

Zhoda dvoch lekárov v troch diagnostických kategóriách.

Zadanie: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)` Cohenova κ

Výsledok

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\% : \ \langle 0{,}256;\ 0{,}986 \rangle$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Postup

- Z dvojíc hodnotení zostavíme tabuľku zhody (riadky hodnotiteľ A, stĺpce hodnotiteľ B, na diagonále zhoda)

$A \backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Pozorovaná zhoda – podiel prípadov na diagonále:
$$p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$
- Zhoda očakávaná náhodou – z riadkových a stĺpcových súčtov
$$p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$$
- Cohenova κ – zhoda je značná (Landis a Koch).

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$$

- Interval spoľahlivosti $95\,\%$ z asymptotickej smerodajnej chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)
$SE \approx 0{,}1861$
$\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow \langle 0{,}256;\ 0{,}986 \rangle$
- κ očisťuje zhodu o zhodu očakávanú náhodou: 0 znamená len náhodnú zhodu, 1 úplnú zhodu. Ak prevažuje jedna kategória, vychádza κ nízka aj pri vysokej percentuálnej zhode – preto uvádzame aj p_o.
- Kategórie berieme ako nominálne – každý nesúlad váži rovnako. Pri poradových kategóriách (napr. stupeň závažnosti) sa používa vážená κ, ktorá menší nesúlad trestá menej.

Tie isté diagnózy s kvadratickými váhami – susedné kategórie sa počítajú ako čiastočná zhoda.

Zadanie: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Cohenova κ, Kvadratické váhy

Výsledok

$\kappa_w \approx 0{,}7955$

$95\,\%: \ \langle 0{,}576;\ 1{,}000\rangle$

$p_o = 0{,}9375$

$p_e \approx 0{,}6944$

Postup

- Z dvojíc hodnotení zostavíme tabuľku zhody (riadky hodnotiteľ A, stĺpce hodnotiteľ B, na diagonále zhoda)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Kvadratické váhy zhody – malý nesúlad sa trestá málo, veľký veľa: $w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- Vážená pozorovaná zhoda – početnosti tabuľky násobené váhami: $p_o = \frac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \frac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$

- Vážená zhoda očakávaná náhodou – zo súčtov riadkov a stĺpcov s váhami: $p_e = \frac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \frac{100}{144} \approx 0{,}6944$
- Vážená Cohenova κ – zhoda je značná (Landis a Koch).

  $\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$

- Interval spoľahlivosti 95 % z asymptotickej smerodajnej chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)

  $SE \approx 0{,}1119$

  $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow \langle 0{,}576;\ 1{,}000\rangle$

- κ očisťuje zhodu o zhodu očakávanú náhodou: 0 znamená len náhodnú zhodu, 1 úplnú zhodu. Ak prevažuje jedna kategória, vychádza κ nízka aj pri vysokej percentuálnej zhode – preto uvádzame aj p_o.
- Vážená κ počíta aj čiastočnú zhodu: hodnotenie o jeden stupeň vedľa sa nepočíta ako úplný nesúlad. S kvadratickými váhami sa vážená κ blíži k ICC; voľbu váh je dobré uviesť.

Cohenova κ z tabuľky zhody 2×2.

Zadanie: `data(20 5; 10 15)` Cohenova κ

Výsledok

$\kappa = 0{,}4$

$95\,\%: \ \langle 0{,}151;\ 0{,}649\rangle$

$p_o = 0{,}7$

$p_e = 0{,}5$

Postup

- Tabuľka zhody (riadky hodnotiteľ A, stĺpce hodnotiteľ B, na diagonále zhoda) s riadkovými a stĺpcovými súčtami

$A\backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- Pozorovaná zhoda – podiel prípadov na diagonále: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20 + 15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$
- Zhoda očakávaná náhodou – z riadkových a stĺpcových súčtov

  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$

- Cohenova κ: $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – zhoda je mierna (Landis a Koch).
- Interval spoľahlivosti 95 % z asymptotickej smerodajnej chyby (Fleiss, Cohen a Everitt)

  $SE \approx 0{,}127$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow \langle 0{,}151;\ 0{,}649\rangle$

- κ očisťuje zhodu o zhodu očakávanú náhodou: 0 znamená len náhodnú zhodu, 1 úplnú zhodu. Ak prevažuje jedna kategória, vychádza κ nízka aj pri vysokej percentuálnej zhode – preto uvádzame aj p_o.

Ako dobre skóre testu odlišuje pacientov (stav 1) od zdravých (stav 0).

Zadanie: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` ROC krivka a AUC

Výsledok

$$AUC \approx 0{,}9167$$

$$95\,\%: \ \langle 0{,}706;\ 1{,}000\rangle$$

$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$

$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Postup

- Pozitívne prípady (stav 1) a negatívne (stav 0): $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Všetky skóre zoradíme a očíslujeme poradím. Súčet poradí pozitívnych prípadov: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- Mannova–Whitneyho štatistika U – počet dvojíc (pozitívny, negatívny), kde má pozitívny prípad vyššie skóre: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- Plocha pod ROC krivkou: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – rozlišovacia schopnosť testu je vynikajúca.
- Interval spoľahlivosti 95 % podľa Hanleyho a McNeila

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$

$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$

$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + }{n_1 n_0}}$$

$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow \langle 0{,}706;\ 1{,}0$$

- Nulová hypotéza: test nerozlišuje (AUC = 0,5), alternatívna: rozlišuje – Mannov–Whitneyho test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- Testové kritérium – pri platnosti H_0 má normované normálne rozdelenie: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- Kritická hodnota na hladine α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \ge 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Keďže $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, nulovú hypotézu zamietame – výsledok je štatisticky významný.
- p-hodnota je pravdepodobnosť výsledku aspoň takého extrémneho ako pozorovaný, ak H_0 platí – nie je to pravdepodobnosť, že H_0 platí. Nezamietnutie H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; štatistická významnosť nehovorí nič o veľkosti ani praktickom význame rozdielu.
- Hraničné skóre s najväčším Youdenovým indexom je 14 (pozitívne je skóre ≥ 14)

$$Se = 1$$

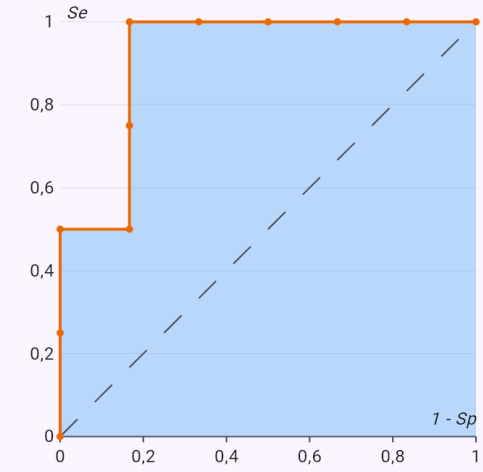
$$Sp \approx 0{,}8333$$

$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$$

- AUC je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný pozitívny prípad má vyššie skóre ako náhodne vybraný negatívny (0,5 – test nerozlišuje, 1 – rozlišuje dokonale). Hraničné skóre podľa Youdenovho indexu je len jedna z možností – v praxi sa volí aj podľa toho, čo stojí falošne pozitívny a falošne negatívny výsledok.
- Pozor: dát je málo, odhady (hlavne rozptylu a kvartilov) sú neisté.

Graf

ROC krivka – vyfarbená plocha je AUC, prerušovaná uhlopriečka zodpovedá testu, ktorý nerozlišuje



Skóre pacientov a zdravých v dvoch skupinách rôznej veľkosti, s Mannovým–Whitneyho testom.

Zadanie: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` ROC krivka a AUC

Výsledok

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%: \ \langle 0{,}787;\ 1{,}000\rangle$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Postup

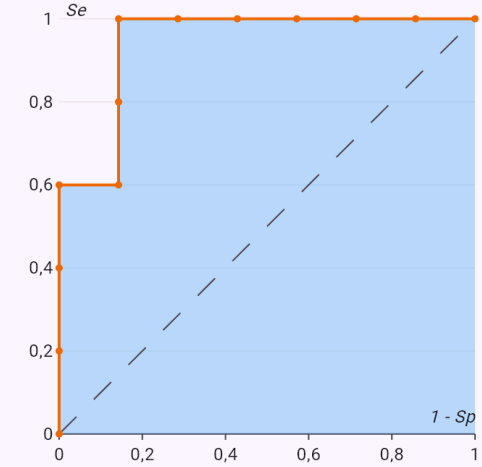
- Pozitívna skupina pacienti a negatívna skupina zdravi: $n_1 = 5, \quad n_0 = 7$
- Všetky skóre zoradíme a očíslujeme poradím. Súčet poradí pozitívnych prípadov: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- Mannova–Whitneyho štatistika U – počet dvojíc (pozitívny, negatívny), kde má pozitívny prípad vyššie skóre: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- Plocha pod ROC krivkou: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – rozlišovacia schopnosť testu je vynikajúca.
- Interval spoľahlivosti 95 % podľa Hanleyho a McNeila

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + \cdots}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow \langle 0{,}787;\ 1, \cdots$$

- Nulová hypotéza: test nerozlišuje (AUC = 0,5), alternatívna: rozlišuje – Mannov–Whitneyho test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- Testové kritérium – pri platnosti H_0 má normované normálne rozdelenie: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- Kritická hodnota na hladine α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \ge 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Keďže $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, nulovú hypotézu zamietame – výsledok je štatisticky významný.
- p-hodnota je pravdepodobnosť výsledku aspoň takého extrémneho ako pozorovaný, ak H_0 platí – nie je to pravdepodobnosť, že H_0 platí. Nezamietnutie H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; štatistická významnosť nehovorí nič o veľkosti ani praktickom význame rozdielu.
- Hraničné skóre s najväčším Youdenovým indexom je 14 (pozitívne je skóre ≥ 14) $Se = 1$ $Sp \approx 0{,}8571$ $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$
- AUC je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný pozitívny prípad má vyššie skóre ako náhodne vybraný negatívny (0,5 – test nerozlišuje, 1 – rozlišuje dokonale). Hraničné skóre podľa Youdenovho indexu je len jedna z možností – v praxi sa volí aj podľa toho, čo stojí falošne pozitívny a falošne negatívny výsledok.
- Pozor: dát je málo, odhady (hlavne rozptylu a kvartilov) sú neisté.

Graf

ROC krivka – vyfarbená plocha je AUC, prerušovaná uhlopriečka zodpovedá testu, ktorý nerozlišuje



Dva testy na tých istých ľuďoch – rozlišujú rôzne dobre? (DeLongov test)

Zadanie: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16`

1; 16 8 0; 10 13 0)

ROC krivka a AUC

Výsledok

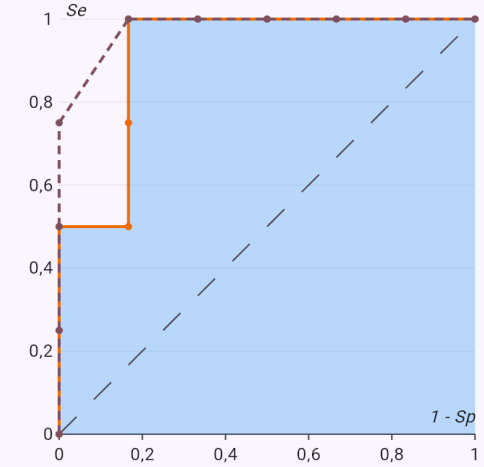
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ \langle -0{,}277;\ 0{,}152 \rangle$$

Postup

- Dva testy A a B na rovnakých prípadoch, pozitívny stav 1 : $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Plochy pod ROC krivkami oboch testov a ich smerodajné chyby (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- Rozptyl rozdielu podľa DeLonga – testy sú na rovnakých prípadoch, preto odčítame ich kovarianciu (korelácia AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- Nulová hypotéza: oba testy rozlišujú rovnako, alternatívna: líšia sa
  H_0: $AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  H_1: $AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- Testové kritérium – pri platnosti H_0 má normované normálne rozdelenie
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- Kritická hodnota na hladine α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \geq 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Keďže $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, nulovú hypotézu nezamietame – dáta neposkytujú dosť dôkazov proti nej.
- p-hodnota je pravdepodobnosť výsledku aspoň takého extrémneho ako pozorovaný, ak H_0 platí – nie je to pravdepodobnosť, že H_0 platí. Nezamietnutie H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; štatistická významnosť nehovorí nič o veľkosti ani praktickom význame rozdielu.
- Interval spoľahlivosti 95 % rozdielu oboch AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- DeLongov test porovnáva AUC dvoch testov na rovnakých prípadoch – berie do úvahy, že sú korelované. Nesignifikantný rozdiel neznamená, že sú testy rovnako dobré, len že dáta rozdiel nepreukázali.
- Pozor: dát je málo, odhady (hlavne rozptylu a kvartilov) sú neisté.

Graf

ROC krivky oboch testov – prvý plnou čiarou s vyfarbenou plochou, druhý čiarkovane



O koľko predĺžiť test s reliabilitou 0,7 a 20 položkami na reliabilitu 0,9.

Zadanie: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Výsledok

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Postup

- Hľadáme k; zadané: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Dlhší test meria spoľahlivejšie: ak ho predĺžime k-krát rovnako kvalitnými (paralelnými) položkami, vzrastie reliabilita podľa Spearmanovho–Brownovho vzorca r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Naopak možno vypočítať, koľkokrát test predĺžiť, aby dosiahol cieľovú reliabilitu. Vzorec sa používa aj na korekciu split-half reliability (k = 2).
  Rovnica modelu: $k = \frac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$
- Dosadíme
  $k = \frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$
- Potrebný počet položiek:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- Vzorec predpokladá, že pridané položky sú rovnako kvalitné ako pôvodné (paralelné). Skutočný nárast býva menší a s dĺžkou testu rastie aj únava respondenta.

Korigovaná hladina pre 10 porovnaní.

Zadanie: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Výsledok

$$\alpha' = 0{,}005$$

Postup

- Hľadáme α'; zadané: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Pri m testoch na hladine α rastie pravdepodobnosť, že aspoň jeden vyjde významný len náhodou: 1 − (1 − α)^m. Bonferroniho korekcia preto posudzuje každý test na prísnejšej hladine α' = α/m. Šidákova korekcia 1 − (1 − α)^(1/m) je o niečo menej prísna. Rovnica modelu: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Dosadíme: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Pravdepodobnosť aspoň jedného falošne významného výsledku bez korekcie: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1-0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Šidákova korekcia $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1-0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- Bonferroniho korekcia je konzervatívna: chráni pred falošne významnými výsledkami, ale pri mnohých porovnaniach ľahko prehliadne skutočný rozdiel. Menej prísna je napríklad Holmova metóda alebo kontrola FDR (Benjaminiho–Hochbergova).

Známe obmedzenia

- Percentil sa počíta z normálneho rozdelenia – pri zošikmených testoch (časové skóre TMT) je správny len percentil z normatívnej tabuľky.
- Intervaly spoľahlivosti sú asymptotické alebo približné – pri malých vzorkách (do 10–20 prípadov) ich berte orientačne.
- Zadanie slovami alebo z fotky (text úlohy zo skrípt) zatiaľ nevieme – hodnoty sa vypĺňajú do formulára.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace