Mathtrace – príručka

II. Lineárna algebra a geometria

Obsah

II. Lineárna algebra a geometria

20. Výpočty v geometrii

21. Matice

22. Vektory

23. Priamky a roviny

24. Konštrukčné úlohy

20. Výpočty v geometrii

Obvody a obsahy útvarov, objemy a povrchy telies počíta formulár ako ostatné aplikácie (Aplikácie → Geometria): vyberiete útvar, čo hľadáte a zadáte rozmery s jednotkami. Útvary: štvorec, obdĺžnik, trojuholník (strana a výška, alebo tri strany – Herónov vzorec), rovnobežník, kosoštvorec, lichobežník, pravidelný n-uholník, kruh, medzikružie, oblúk a výsek, Pytagorova veta a podobné trojuholníky; telesá: kocka, kváder, hranol, valec, pravidelný štvorboký ihlan, kužeľ a guľa.

Postup napíše vzorec, dosadí a vypočíta; keď je potrebný medzivýsledok (strana kužeľa, stenová výška ihlana), vypočíta ho najprv. Ide to aj obrátene – polomer z obsahu, hranu z objemu, odvesnu z prepony. Výsledok je presne s π a odmocninami aj približne (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Jednotky prevedie (z cm na dm, z dm³ na litre).

Ukážky

Obsah kruhu – presne s π aj približne.

Zadanie: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Výsledok

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Kružnica je množina bodov vo vzdialenosti r od stredu, kruh je kružnica aj s vnútrom. Obvod (dĺžka kružnice) o = 2πr = πd, obsah kruhu S = πr². Číslo π ≈ 3,14159 je pomer obvodu a priemeru – výsledok je presne (s π) aj približne.
  Vzorce
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Hľadáme S; zadané: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Opačne: polomer z obsahu.

Zadanie: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Výsledok

$$r \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Kružnica je množina bodov vo vzdialenosti r od stredu, kruh je kružnica aj s vnútrom. Obvod (dĺžka kružnice) o = 2πr = πd, obsah kruhu S = πr². Číslo π ≈ 3,14159 je pomer obvodu a priemeru – výsledok je presne (s π) aj približne. Vzorce

  $o = \pi d$

  $d = 2r$

  $o = 2\pi r$

  $S = \pi r^2$

- Hľadáme r; zadané: $S = 50\,\mathrm{cm}^2$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Dosadíme: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$

Trojuholník z troch strán – Herónov vzorec.

Zadanie: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Výsledok

$$S = 6\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Obsah trojuholníka je polovica súčinu strany a výšky na ňu: S = a·v_a/2. Z troch strán ho vypočíta Herónov vzorec S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), kde s = (a + b + c)/2 je polovica obvodu. Strany musia spĺňať trojuholníkovú nerovnosť – súčet dvoch je väčší ako tretia. Vzorce

  $o = a + b + c$

  $S = \frac{a v_a}{2}$

  $s = \frac{a + b + c}{2}$

  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- Hľadáme S; zadané: $a = 3\,\mathrm{cm},\ b = 4\,\mathrm{cm},\ c = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\mathrm{cm}^2$

Odvesna z prepony.

Zadanie: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Výsledok

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Postup

- V pravouhlom trojuholníku je obsah štvorca nad preponou rovný súčtu obsahov štvorcov nad odvesnami: c² = a² + b². Prepona c leží oproti pravému uhlu a je najdlhšou stranou; odvesnu dostaneme ako b = √(c² − a²). Vzorce
  $$c^2 = a^2 + b^2$$
- Hľadáme b; zadané: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Dosadíme: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Povrch kužeľa – najprv strana kužeľa.

Zadanie: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Výsledok

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Kužeľ má kruhovú podstavu s polomerom r a výšku v. Objem je tretina valca: V = πr²v/3. Strana kužeľa s je prepona trojuholníka s odvesnami r a v; plášť je kruhový výsek S_{pl} = πrs, povrch S = πr² + πrs. Vzorce
  $$V = \frac{\pi r^2 v}{3}$$
  $$s^2 = r^2 + v^2$$
  $$S_{pl} = \pi r s$$
  $$S = \pi r^2 + S_{pl}$$
- Hľadáme S; zadané: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Dosadíme: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Dosadíme: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Dosadíme: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Objem kocky v litroch.

Zadanie: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Výsledok

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Postup

- Kocka má šesť rovnakých štvorcových stien s hranou a. Objem V = a³, povrch S = 6a², telesová uhlopriečka u = a√3. Hranu z objemu dostaneme treťou odmocninou: a = $\sqrt[3]{V}$. Vzorce
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Hľadáme V; zadané: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Dosadíme: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Prevedieme jednotky: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Známe obmedzenia

- Náčrt útvaru s popísanými rozmermi zatiaľ chýba.

21. Matice

Maticu napíšte do hranatých zátvoriek ako v Matlabe: prvky oddeľte medzerou, riadky bodkočiarkou alebo novým riadkom. Prvok môže byť zlomok, odmocnina aj písmeno; desatinná čiarka platí ako inde (1,5). Kláves s mriežkou na záložke f(x) otvorí tabuľku, kam maticu vyplníte po políčkach – alebo ju tam vložíte zo schránky (bunky skopírované z Excelu či Google Tabuliek) alebo načítate zo súboru CSV.

Pri jednej matici vyberiete čipom, čo vypočítať: determinant (pri 2×2 vzorcom, pri 3×3 Sarrusovým pravidlom, inak rozvojom podľa riadku alebo stĺpca či úpravami na trojuholníkový tvar – metódu vyberiete čipom), inverznú maticu (pri 2×2 vzorcom, inak Gaussovou–Jordanovou metódou s jednotkovou maticou vedľa), hodnosť (úpravami na stupňovitý tvar) alebo transponovanú maticu.

Viac matíc pomenujte veľkými písmenami, každú na vlastný riadok, a na posledný riadok napíšte, čo vypočítať: súčet, rozdiel, násobok, súčin (riadok krát stĺpec, aj s kontrolou rozmerov), mocninu, transpozíciu A^T, inverziu A^-1, det(A), rank(A) – alebo maticovú rovnicu AX = B či XA = B, ktorú aplikácia vyrieši inverznou maticou. Sústavu rovníc zadanú maticou (rozšírená matica, Ax = b) rieši kapitola Sústavy rovníc.

Ak je v matici parameter (písmeno), hodnosť aplikácia rozoberie podľa jeho hodnôt rovnako ako sústavu – úpravami na stupňovitý tvar, kritické hodnoty dosadí. Pri inverznej matici najprv vypočíta determinant a podmienku, pre ktoré hodnoty parametra je nenulový (inverzia existuje). Inverznú maticu 3×3 a väčšiu počíta Gaussovou–Jordanovou metódou alebo – podľa čipu – adjungovanou maticou (algebraické doplnky, $A^{-1} = \text{adj } A / \det A$).

Pri štvorcovej matici vypočítate aj vlastné čísla a vlastné vektory: charakteristický polynóm $\det(A - \lambda E)$ sa rozpíše rovnako ako determinant, rozloží na súčin a jeho korene sú vlastné čísla (kvadratický činiteľ z diskriminantu, aj komplexné; kubický bez racionálneho koreňa približne). Vlastné vektory sú riešenia sústavy $(A - \lambda E)v = o$ úpravami na redukovaný stupňovitý tvar, pri každom vlastnom čísle aplikácia uvedie algebraickú aj geometrickú násobnosť. Čip Diagonalizácia k tomu zostaví matice P a D ($A = PDP^{-1}$), alebo vysvetlí, prečo maticu diagonalizovať nemožno. Singulárny rozklad $A = U\Sigma V^T$ (SVD) a pseudoinverznú maticu A^+ vypočítate pri matici ľubovoľných rozmerov: SVD cez vlastné čísla matice A^TA (pri širokej matici AA^T), normované vlastné vektory a dopočítanie druhej strany; pseudoinverziu pri matici plnej hodnosti vzorcom $(A^TA)^{-1}A^T$, inak zo singulárneho rozkladu $A^+ = V\Sigma^+U^T$ – a ak by singulárne čísla vyšli ako vnorené odmocniny, presne z rozkladu podľa hodnosti $A = BC$ vzorcom $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Vlastné čísla a diagonalizáciu aplikácia rozoberie aj pri matici s jedným parametrom (najviac 3×3): charakteristický polynóm rozloží na súčin s parametrom, vlastné čísla vyjadrí ako jeho funkcie a nájde zvláštne hodnoty parametra – kde sa dve vlastné čísla zhodujú (dva činitele majú spoločný koreň, kvadratický činiteľ nulový diskriminant) alebo kde by všeobecný výpočet vlastných vektorov delil nulou; uvedie aj hodnoty, pre ktoré sú vlastné čísla komplexné. Všeobecný prípad vyrieši s parametrom, zvláštne

hodnoty dosadí a preberie zvlášť. Čip Diagonalizácia potom odpovie, pre ktoré hodnoty parametra je matica diagonalizovateľná.

Jordanov tvar štvorcovej matice (čip Jordanov tvar, zápis jordan(A)) aplikácia vypočíta z hodností mocnín $(A - \lambda E)^k$: z nich určí počet a veľkosti Jordanových blokov, reťazce zovšeobecnených vlastných vektorov zostaví od horného vektora nadol k vlastnému vektoru a matice P, J overí ($A = PJP^{-1}$). Cez Jordanov tvar počíta aj mocninu A^n pre všeobecné n (čip Mocnina A^n, zápis A^n; mocnina bloku binomickou vetou, výsledok ako $2^{n-1}(n + 2)$) aj pre veľké číslo (A^10) a exponenciálu matice e^{At} a e^A (čip Exponenciála matice, zápis e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – hodí sa k sústavám diferenciálnych rovníc $x' = Ax$; komplexné vlastné čísla prepíše na kosínusy a sínusy. Minimálny polynóm (čip Minimálny polynóm, zápis minpoly(A)) nájde skúškou kandidátov – deliteľov charakteristického polynómu – od najnižšieho stupňa, pripomenie Cayleyho–Hamiltonovu vetu p(A) = O a pri regulárnej matici z m(A) = O vyjadrí inverznú maticu.

Ako zadať

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Prvky medzerou, riadky bodkočiarkou (alebo pod sebou vnútri zátvoriek).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Pomenované matice po riadkoch, na poslednom riadku výpočet.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinant, inverzná a transponovaná matica, hodnosť.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Vlastné čísla, diagonalizácia, singulárny rozklad, pseudoinverzia.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Jordanov tvar, všeobecná mocnina, exponenciála matice, minimálny polynóm.

Ukážky

Determinant 3×3 Sarrusovým pravidlom.

Zadanie: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinant

Výsledok

$$\det A = -3$$

Postup

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 \\ &= -3\end{aligned}$$

Rozvoj podľa stĺpca s najväčším počtom núl.

Zadanie: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Rozvoj

Výsledok

$$\det A = 25$$

Postup

- Rozvoj podľa 2. stĺpca, každý prvok násobíme jeho doplnkom so znamienkom podľa pozície

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (-5) \\ &= 25\end{aligned}$$

Inverzná matica Gaussovou–Jordanovou metódou.

Zadanie: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Inverzná matica

Výsledok

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postup

- Vedľa matice napíšeme jednotkovú maticu. Riadkovými úpravami prevedieme ľavú časť na jednotkovú

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Vľavo je jednotková matica, vpravo inverzná

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnosť úpravami na stupňovitý tvar.

Zadanie: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Hodnosť

Výsledok

$$h(A) = 2$$

Postup

- Riadkové úpravy

$$R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Riadkové úpravy $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matica je v stupňovitom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Hodnosť je počet nenulových riadkov stupňovitého tvaru: $h(A) = 2$

Hodnosť matice s parametrom.

Zadanie: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Hodnosť

Výsledok

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Postup

- Matica obsahuje parameter a – ľubovoľné reálne číslo. Hodnosť môže závisieť od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady.
- Riadkové úpravy $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Ďalej budeme počítať s prvkom $1-a$, ktorý môže byť nulový – predpokladáme preto $a \neq 1$; prípad $a = 1$ rozoberieme zvlášť.
- Riadkové úpravy $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Riadkové úpravy $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Ďalej budeme počítať s prvkom $a+2$, ktorý môže byť nulový – predpokladáme preto $a \neq -2$; prípad $a = -2$ rozoberieme zvlášť.
- Matica je v stupňovitom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Pre $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Pre $a = 1$: $h(A) = 1$ – matica po dosadení

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pre $a = -2$: $h(A) = 2$ – matica po dosadení

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica s parametrom adjungovanou maticou.

Zadanie: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Adjungovaná matica

Výsledok

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Podmienky: $a \neq 1$

Postup

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$ – inverzná matica existuje práve vtedy, keď je determinant nenulový, t. j. pre $a \neq 1$
- Algebraické doplnky prvkov (s doplneným znamienkom (-1)^(i+j))

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \\ A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

- Adjungovaná matica je transponovaná matica algebraických doplnkov; vydelíme ju determinantom

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Súčin, transpozícia, násobok a rozdiel matíc.

Zadanie: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Výsledok

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Postup

- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Transponujeme, riadky sa stanú stĺpcami
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Číslom vynásobíme každý prvok matice
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Sčítame (odčítame) prvky na rovnakých miestach
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Maticová rovnica AX = B inverznou maticou.

Zadanie: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Výsledok

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Postup

- Rovnicu vynásobíme inverznou maticou zo strany neznámej: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, inverzná matica existuje.
- Pri matici 2×2 vymeníme prvky na hlavnej diagonále, prvkom na vedľajšej zmeníme znamienko a vydelíme determinantom

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla a vlastné vektory symetrickej matice.

Zadanie: `[2 1; 1 2]` Vlastné čísla

Výsledok

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

  $$\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 3$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 3$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Iracionálne vlastné čísla z diskriminantu.

Zadanie: `[1 2; 3 4]` Vlastné čísla

Výsledok

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

  $A-\lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin: $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Korene kvadratického činiteľa z diskriminantu

  $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien): $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

Diagonalizácia A = PDP⁻¹.

Zadanie: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalizácia

Výsledok

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = 11$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = 11$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Matica má toľko lineárne nezávislých vlastných vektorov, koľko má riadkov, je teda diagonalizovateľná: P má v stĺpcoch vlastné vektory, D na diagonále vlastné čísla v rovnakom poradí a platí $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matica je symetrická: má reálne vlastné čísla a vlastné vektory k rôznym vlastným číslam sú na seba kolmé. Po ich znormovaní je P ortogonálna a $P^{-1} = P^T$

Matica, ktorú diagonalizovať nemožno.

Zadanie: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalizácia

Výsledok

Maticu nemožno diagonalizovať – nemá dosť lineárne nezávislých vlastných vektorov.

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E)&=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)+1\cdot 0\cdot 0+\\ &\quad -0\cdot(1-\lambda)\cdot 0-(1-\lambda)\cdot 0\cdot 0-1\cdot\\ &=\left(-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2\right)+0+0-0-\\ &=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2\end{aligned}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E)=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=-(\lambda-1)^2(\lambda-$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1=1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v}=\mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1=1$ (algebraická násobnosť 2, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_1=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3=2$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v}=\mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3=2$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_3=t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

- Pre $\lambda=1$ je geometrická násobnosť 1 menšia ako algebraická 2 – matica nemá dosť lineárne nezávislých vlastných vektorov, preto ju nemožno diagonalizovať.

Vlastné čísla matice s parametrom – zvláštne hodnoty a ich prípady.

Zadanie: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Vlastné čísla

Výsledok

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Osobitné hodnoty parametra – pre ne sa dve vlastné čísla zhodujú alebo by výpočet vlastných vektorov delil nulou: $a = 1,\ a = 2$. Preberieme ich zvlášť ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Všeobecný prípad $a \neq 1,\ a \neq 2$: vlastné čísla sú navzájom rôzne, matica má teda toľko lineárne nezávislých vlastných vektorov, koľko má riadkov, a je diagonalizovateľná.
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = a$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = a$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Prípad $a = 1$ – dosadíme do matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnosť 2, geometrická 1 – počet voľných neznámych)
  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = 2$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_3 = 2$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)
  $$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Pre $\lambda = 1$ je geometrická násobnosť 1 menšia ako algebraická 2 – matica nemá dosť lineárne nezávislých vlastných vektorov, preto ju nemožno diagonalizovať.
- Prípad $a = 2$ – dosadíme do matice
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- Charakteristický polynóm rozložený na súčin
  $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$
- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 1$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)
  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar
  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 2$ (algebraická násobnosť 2, geometrická 2 – počet voľných neznámych)
  $$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Pre ktoré hodnoty parametra je matica diagonalizovateľná.

Zadanie: `[0 1; a 0]` Diagonalizácia

Výsledok

Matica je diagonalizovateľná pre: $a \neq 0$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Korene kvadratického činiteľa z diskriminantu

$$\lambda^2 - a = 0: \; D = 4a, \; \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \; \sqrt{a}$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \; \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Osobitné hodnoty parametra – pre ne sa dve vlastné čísla zhodujú alebo by výpočet vlastných vektorov delil nulou: $a = 0$. Preberieme ich zvlášť ($a = 0: \; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Pre $a \in (-\infty; \, 0)$ je diskriminant záporný, vlastné čísla sú komplexne združené (diagonalizovať možno len nad komplexnými číslami).
- Všeobecný prípad $a \neq 0$: vlastné čísla sú navzájom rôzne, matica má teda toľko lineárne nezávislých vlastných vektorov, koľko má riadkov, a je diagonalizovateľná.
- Prípad $a = 0$ – dosadíme do matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 0$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 0$ (algebraická násobnosť 2, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

- Pre $\lambda = 0$ je geometrická násobnosť 1 menšia ako algebraická 2 – matica nemá dosť lineárne nezávislých vlastných vektorov, preto ju nemožno diagonalizovať.

Singulárny rozklad matice 2×3.

Zadanie: `[3 2 2; 2 3 -2]` Singulárny rozklad (SVD)

Výsledok

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Postup

- Singulárny rozklad $A = U\Sigma V^T$: matica má viac stĺpcov ako riadkov, začneme preto menšou maticou AA^T – jej vlastné čísla sú druhé mocniny singulárnych čísel a jej vlastné vektory tvoria maticu U. Vypočítame AA^T
- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$$
- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

  $$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$
- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$
- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

  $$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$
- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):

  $$\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 25$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 25$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 9$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

  $$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 9$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 – počet voľných neznámych)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Singulárne čísla sú odmocniny vlastných čísel, zoradené zostupne: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Matica Σ má rozmery matice A

  $$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
- Vlastné vektory znormujeme (vydelíme ich veľkosťou); pri násobnom vlastnom čísle ich najprv zortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým procesom. Sú to stĺpce matice

  $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

  $$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
- Stĺpce matice V pre nenulové singulárne čísla: $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$

  $$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$
- Chýbajúce stĺpce matice V doplníme na ortonormálnu bázu: normovanými riešeniami sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kolmými na predchádzajúce stĺpce

  $$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
- Singulárny rozklad

  $$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Pseudoinverzia matice s nezávislými stĺpcami.

Zadanie: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinverzia

Výsledok

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Postup

- Stĺpce matice sú lineárne nezávislé (hodnosť 2 = počet stĺpcov), matica $A^T A$ je teda regulárna a pseudoinverziu dáva vzorec:
- $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$
- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$
- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$
- $\det A^T A = 3 \neq 0$, inverzná matica existuje.
- Pri matici 2×2 vymeníme prvky na hlavnej diagonále, prvkom na vedľajšej zmeníme znamienko a vydelíme determinantom

  $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$

Pseudoinverzia singulárnej matice zo singulárneho rozkladu.

Zadanie: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Výsledok

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Postup

- Matica nemá plnú hodnosť (hodnosť 1), pseudoinverziu preto vypočítame zo singulárneho rozkladu: $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- Singulárny rozklad $A = U\Sigma V^T$: vlastné čísla matice A^TA sú druhé mocniny singulárnych čísel a jej vlastné vektory tvoria maticu V. Vypočítame A^TA
- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda-25) = 0$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 25$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$\left(A^TA-\lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_1 = 25$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 0$ sú nenulové riešenia homogénnej sústavy; maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar

$$\left(A^TA-\lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory pre $\lambda_2 = 0$ (algebraická násobnosť 1, geometrická 1 − počet voľných neznámych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Singulárne čísla sú odmocniny vlastných čísel, zoradené zostupne: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Matica Σ má rozmery matice A

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory znormujeme (vydelíme ich veľkosťou); pri násobnom vlastnom čísle ich najprv zortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým procesom. Sú to stĺpce matice

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Stĺpce matice U pre nenulové singulárne čísla: $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Chýbajúce stĺpce matice U doplníme na ortonormálnu bázu: normovanými riešeniami sústavy $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kolmými na predchádzajúce stĺpce

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Singulárny rozklad

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Matica Σ^+ vznikne transpozíciou Σ a prevrátením nenulových singulárnych čísel

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pseudoinverzná matica

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{}} \end{pmatrix}$$

Pseudoinverzia z rozkladu podľa hodnosti A = BC.

Zadanie: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinverzia

Výsledok

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Postup

- Matica nemá plnú hodnosť (hodnosť 2) a jej singulárne čísla by vyšli ako vnorené odmocniny. Pseudoinverziu preto vypočítame presne z rozkladu podľa hodnosti A = BC – B sú lineárne nezávislé stĺpce matice A, C nenulové riadky jej redukovaného stupňovitého tvaru.
- Maticu upravíme na redukovaný stupňovitý tvar; vedúce prvky sú v stĺpcoch $1, 2$, B tvoria tieto stĺpce matice A a C nenulové riadky upravenej matice

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (- \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, inverzná matica existuje.
- Pri matici 2×2 vymeníme prvky na hlavnej diagonále, prvkom na vedľajšej zmeníme znamienko a vydelíme determinantom

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Násobíme riadok so stĺpcom (rozmery $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 8 \end{pmatrix} = \left($$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66 \cdot 93 - 78 \cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, inverzná matica existuje.
- Pri matici 2×2 vymeníme prvky na hlavnej diagonále, prvkom na vedľajšej zmeníme znamienko a vydelíme determinantom

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- Pseudoinverzná matica

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jordanov tvar s dvoma blokmi k jednému vlastnému číslu.

Zadanie: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Jordanov tvar

Výsledok

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Pre $\lambda = 2$ (algebraická násobnosť 3) počítame mocniny matice $A - \lambda E$ a ich hodnosti h, kým hodnosť neklesne o algebraickú násobnosť

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Jordanových blokov pre $\lambda = 2$ je toľko, koľko je nezávislých vlastných vektorov: $n - h(A-\lambda E)$ = 2. Blokov veľkosti aspoň k je $h_{k-1} - h_k$, veľkosti blokov sú teda $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Reťazec dĺžky 2 pre $\lambda = 2$: horný vektor zvolíme z jadra $(A-\lambda E)^k$ tak, aby neležal v jadre nižšej mocniny ani v obale predchádzajúcich reťazcov, a násobíme ho maticou $A - \lambda E$ až k vlastnému vektoru

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Blok veľkosti 1 pre $\lambda = 2$ dáva vlastný vektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Jordanov tvar: P má v stĺpcoch vektory reťazcov (každý od vlastného vektora nahor), J má na diagonále vlastné čísla a vnútri blokov nad diagonálou jednotky; platí $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mocnina A^n cez Jordanov tvar.

Zadanie: `[3 1; -1 1]` Mocnina A^n

Výsledok

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin:
  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Pre $\lambda = 2$ (algebraická násobnosť 2) počítame mocniny matice $A - \lambda E$ a ich hodnosti h, kým hodnosť neklesne o algebraickú násobnosť

  $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$

  $(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = 0$

- Jordanových blokov pre $\lambda = 2$ je toľko, koľko je nezávislých vlastných vektorov: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Blokov veľkosti aspoň k je $h_{k-1} - h_k$, veľkosti blokov sú teda 2: $J_2(2)$
- Reťazec dĺžky 2 pre $\lambda = 2$: horný vektor zvolíme z jadra $(A - \lambda E)^k$ tak, aby neležal v jadre nižšej mocniny ani v obale predchádzajúcich reťazcov, a násobíme ho maticou $A - \lambda E$ až k vlastnému vektoru

  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Jordanov tvar: P má v stĺpcoch vektory reťazcov (každý od vlastného vektora nahor), J má na diagonále vlastné čísla a vnútri blokov nad diagonálou jednotky; platí $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Mocninu vypočítame cez Jordanov tvar: $A^n = PJ^nP^{-1}$. Mocninu bloku dáva binomická veta – prvok d miest nad diagonálou je $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

  $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

- Matice vynásobíme

  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$

Exponenciála e^{At} – riešenie sústavy x' = Ax.

Zadanie: `A = [0 1; -2 -3]`

e^(At)

Výsledok

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$

- Determinant matice 2×2 je súčin na hlavnej diagonále mínus súčin na vedľajšej

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):

  $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Blok veľkosti 1 pre $\lambda = -2$ dáva vlastný vektor

  $(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Blok veľkosti 1 pre $\lambda = -1$ dáva vlastný vektor

  $(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Všetky Jordanove bloky majú veľkosť 1, matica J je teda diagonálna a matica je diagonalizovateľná. P má v stĺpcoch vlastné vektory a platí $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Exponenciálu vypočítame cez Jordanov tvar: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Pri bloku je prvok d miest nad diagonálou $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

- Matice vynásobíme

  $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$

- Pre t = 1

  $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$

Minimálny polynóm, Cayleyho–Hamiltonova veta a inverzná matica z neho.

Zadanie: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Minimálny polynóm

Výsledok

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Postup

- Vlastné čísla sú korene charakteristickej rovnice det(A − λE) = 0. Od prvkov na diagonále odčítame λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Charakteristický polynóm rozložený na súčin

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Vlastné čísla (násobný koreň má viac mien):
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Minimálny polynóm delí charakteristický polynóm a má všetky jeho korene. Kandidáti od najnižšieho stupňa

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- Dosadíme maticu – nevyšla nulová matica, tento kandidát minimálnym polynómom nie je.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Dosadíme maticu – vyšla nulová matica, najnižší taký kandidát je minimálny polynóm.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- Cayleyho–Hamiltonova veta: každá štvorcová matica je koreňom svojho charakteristického polynómu
$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$
- Matica je regulárna (absolútny člen minimálneho polynómu je nenulový), z rovnosti m(A) = O preto vyjadríme inverznú maticu

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Známe obmedzenia

- Matice najviac 6×6.
- Vlastné čísla, diagonalizácia, singulárny rozklad, Jordanov tvar, mocnina A^n, exponenciála a minimálny polynóm pri maticiach najviac 4×4 a bez parametra; vlastné čísla a diagonalizácia s jedným parametrom do 3×3 (bez kubického činiteľa s parametrom), vlastné vektory všeobecného prípadu len pri vlastných číslach bez odmocniny z parametra.
- Jordanov tvar s postupom len pri racionálnych vlastných číslach, inak len výsledok; všeobecná mocnina A^n a e^{At} potrebujú presné vlastné čísla (kubický činiteľ bez racionálneho koreňa: len e^A približne).

22. Vektory

Vektor zapíšete ako v škole s bodkočiarkami, každý na vlastný riadok: u = (1; 2; 3); meno môže mať index (F_1 = (3; 4)). Bod zapíšete s hranatými zátvorkami: A[1; 2; 3]. Vektory v rovine majú dve súradnice, v priestore tri.

Samotný bod v rovine aplikácia zaradí do kvadrantu (alebo na os) podľa znamienok súradníc a nakreslí ho. Pri dvoch bodoch je popri vzdialenosti |AB| čip „Stred úsečky“ – súradnice stredu sú priemery súradníc krajných bodov. Funguje aj zápis slovami (zatiaľ po česky): „střed AB, A[1; 2], B[5; 6]“, „vzdálenost bodů A[1; 2] a B[4; 6]“, „kvadrant A[3; −2]“.

Bez ďalšieho riadku vyberiete čipom, čo vypočítať: veľkosť, súčet (výslednicu síl aj s veľkosťou a smerom), skalárny súčin (nulový znamená kolmé vektory), uhol (z kosínusu, presne v tabuľkových hodnotách, inak v stupňoch a minútach), vektorový súčin (determinantom s i, j, k), obsah rovnobežníka a trojuholníka, objem rovnobežnostena a štvorstena zmiešaným súčinom alebo lineárnu závislosť. Pri bodoch aplikácia najprv zostaví vektory AB, AC, AD z prvého bodu: dva body dajú vzdialenosť, tri trojuholník, štyri štvorsten.

Na posledný riadok môžete napísať výraz: u + 2v, u·v (alebo u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| a vektor z bodov AB. Graf ukáže vektory ako šípky – v rovine s mriežkou, v priestore s osami, ktoré otočíte prstom; obsah je vyfarbený a uhol vyznačený oblúkom.

Ako zadať

`u = (1; 2; 3)`	Vektor s bodkočiarkami, každý na vlastnom riadku.
`A[1; 2; 3]`	Bod s hranatými zátvorkami.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Výraz s vektormi na poslednom riadku.

Ukážky

Kvadrant bodu.

Zadanie: `A[3; -2]`

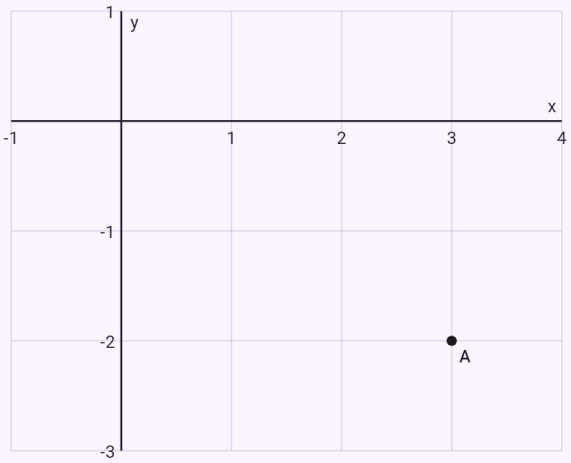
Výsledok

$A \in \mathrm{IV}$

Postup

- Bod $A[3;\ -2]$ má x kladné a y záporné – leží vo IV. kvadrante (vpravo dole).

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Stred úsečky.

Zadanie: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Výsledok

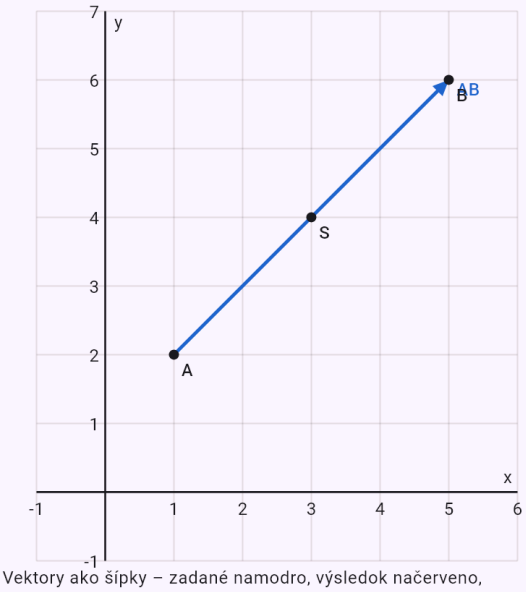
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Postup

- Stred úsečky má súradnice rovné priemerom súradníc krajných bodov

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Veľkosť vektora.

Zadanie: `u = (1; 2; 3)`

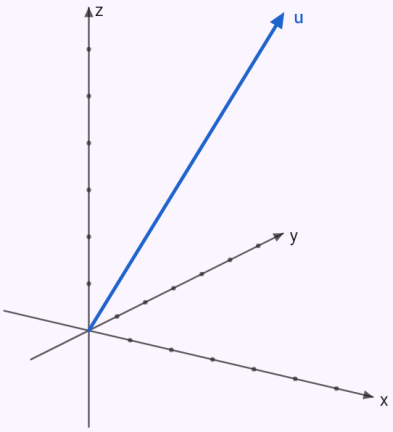
Výsledok

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Postup

- Veľkosť vektora: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Uhol dvoch vektorov.

Zadanie: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

Výsledok

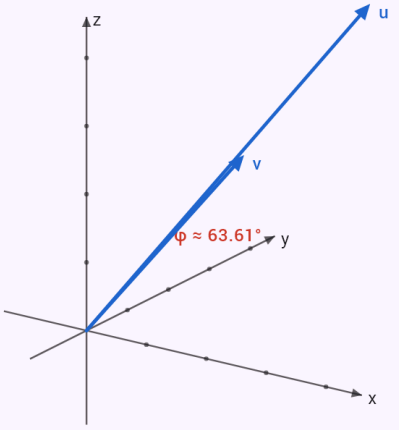
$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Postup

- Skalárny súčin je súčet súčinov zodpovedajúcich súradníc: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- Veľkosť vektora: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Veľkosť vektora: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Uhol vektorov zo skalárneho súčinu teda $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Súčet a násobok vektorov.

Zadanie: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

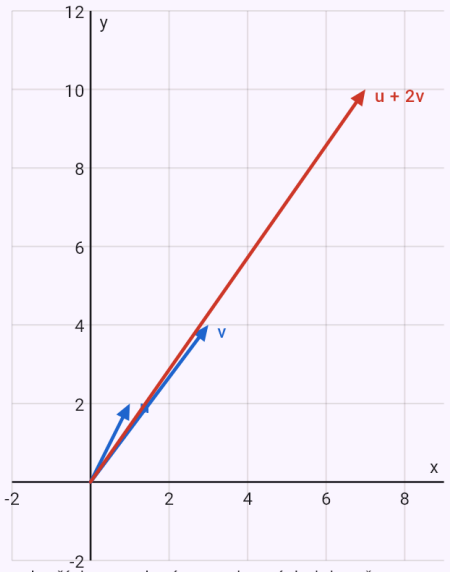
Výsledok

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Postup

- Násobok vektora – každú súradnicu vynásobíme číslom: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Vektory sčítame (odčítame) po súradniciach: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Vektorový súčin.

Zadanie: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Vektorový súčin

Výsledok

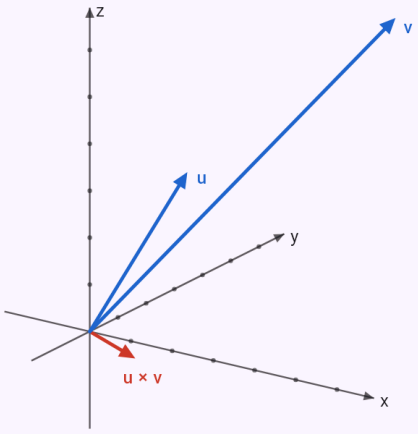
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Postup

- Vektorový súčin rozvojom determinantu podľa prvého riadku

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Obsah trojuholníka z troch bodov.

Zadanie: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Výsledok

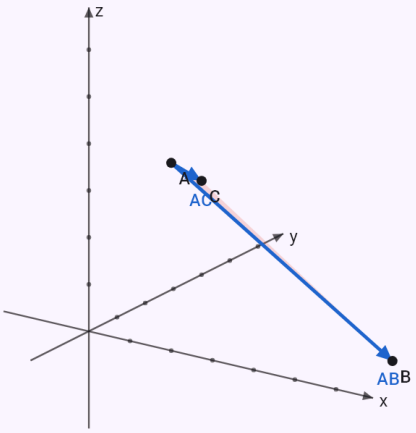
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Postup

- Vektor z bodov – súradnice koncového bodu mínus súradnice začiatočného
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$
- Vektor z bodov – súradnice koncového bodu mínus súradnice začiatočného
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$
- Vektorový súčin rozvojom determinantu podľa prvého riadku
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- Veľkosť vektora
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- Obsah rovnobežníka je veľkosť vektorového súčinu (v rovine absolútna hodnota determinantu):
  $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Trojuholník je polovica rovnobežníka:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Objem rovnobežnostena a štvorstena zmiešaným súčinom.

Zadanie: `u = (1; 0; 2)`
`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Výsledok

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Postup

- Zmiešaný súčin vypočítame ako determinant zo súradníc vektorov

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

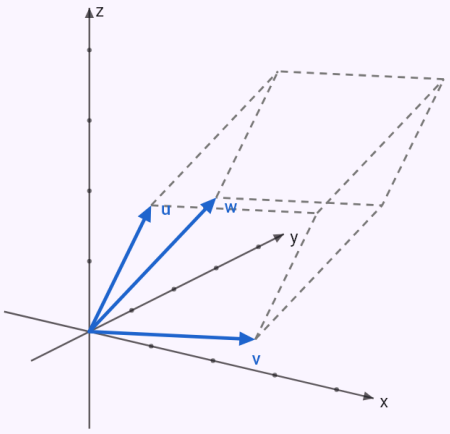
- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0 \\ &= 13 \end{aligned}$$

- Objem rovnobežnostena je absolútna hodnota zmiešaného súčinu: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Štvorsten má šestinu objemu rovnobežnostena: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Výslednica dvoch síl.

Zadanie: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Súčet (výslednica)

Výsledok

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Postup

- Vektory sčítame (odčítame) po súradniciach

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

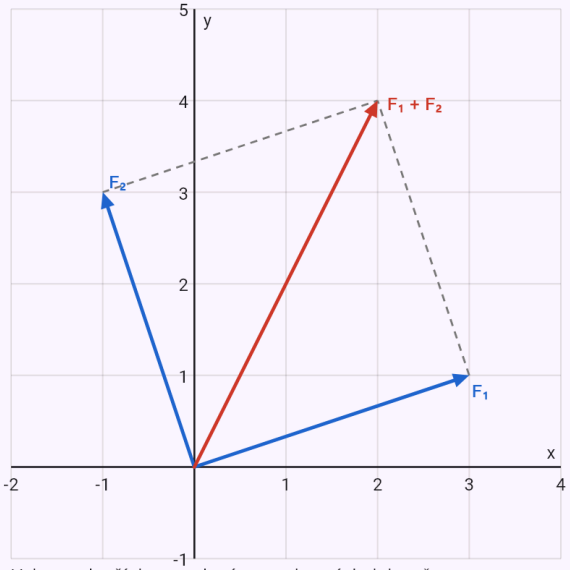
- Veľkosť vektora

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- Smer výslednice – jej uhol s kladnou polosou x:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2}, \alpha \approx 63{,}43^\circ$$

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Lineárna závislosť troch vektorov.

Zadanie: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Lineárna závislosť

Výsledok

Vektory sú lineárne závislé.

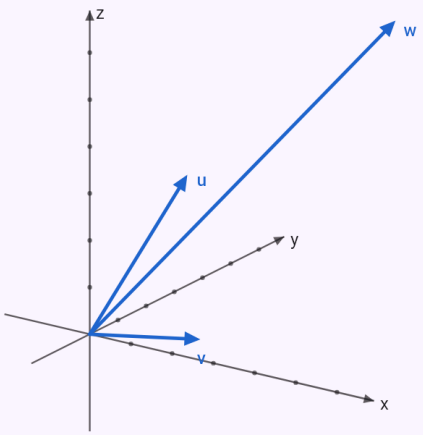
Postup

- Sarrusovo pravidlo, súčiny v smere hlavnej diagonály mínus súčiny v smere vedľajšej

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$
$$= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24$$
$$= 0$$

- Determinant zo súradníc vektorov: $D = 0$. Nenulový determinant znamená lineárne nezávislé vektory, nulový závislé.

Graf



Vektory ako šípky – zadané namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Známe obmedzenia

- Súradnice sú čísla (bez parametra), najviac šesť; graf len v rovine a v priestore.

23. Priamky a roviny

Analytická geometria v rovine aj v priestore. Bod zapíšete ako pri vektoroch: A[1; 2]. Priamku alebo rovinu pomenujte a za dvojbodku napíšte jej rovnicu, každú na vlastný riadok: všeobecnú (p: 2x + 3y − 5 = 0), smernicovú (p: y = 2x + 1), parametrickú (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) alebo vektorovú (p: X = A + t·u). V priestore je rovnica s x, y, z rovina (ρ: x + y + z = 1), parametrické vyjadrenie s dvoma parametrami tiež; priamku v priestore zapíšete parametricky alebo ako priesečnicu dvoch rovín (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Klávesy p:, q: a ρ: nájdete na klávesnici funkcií.

Čo vypočítať, vyberiete čipom – ponuka sa riadi tým, čo zadáte: pri jednej priamke alebo rovine všetky tvary rovníc, pri dvoch vzájomná poloha s priesečníkom (priesečnicou), odchýlka a vzdialenosť, pri bode a priamke (rovine) vzdialenosť, kolmica a rovnobežka bodom, kolmý priemet a súmerne združený bod. K dvom alebo trom samotným bodom pribudnú medzi čipmi vektorov rovnica priamky AB, os úsečky a ťažisko s výškami trojuholníka (v priestore rovina ABC).

Vzdialenosť vypočíta aplikácia vzorcom, alebo – čipom „Cez kolmý priemet“ – ako na cvičení: kolmica bodom, jej päta a dĺžka úsečky. Pri mimobežkách nájde aj ich os. Odchýlky sú presne v tabuľkových hodnotách, inak v stupňoch a minútach. Úlohu môžete napísať aj na posledný riadok (názvy zatiaľ po česky): odchylka(p, q), vzdalenost(A, p), prusecik(p, q), kolmice(A, p), rovnobezka(A, p), prumet(A, ρ), soumerny(A, p), osa(A, B), stred(A, B), teziste(A, B, C), primka(A, B), rovina(A, B, C). Graf ukáže priamky a roviny, v priestore ho otočíte prstom.

Geometrické zobrazenia v rovine: posunutie o vektor, otočenie okolo stredu o uhol (v stupňoch, kladný proti smeru hodinových ručičiek), rovnoľahlosť so stredom a koeficientom a stredová aj osová súmernosť. Zobraziť možno bod, mnohouholník (body za sebou: posunuti(A, B, C, u) je trojuholník), priamku aj kružnicu (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Úlohu napíšete na posledný riadok, alebo vyberiete čipom „Posunutie“, „Otočenie“, „Rovnoľahlosť“ či „Súmernosť“ – uhol a koeficient potom zapíšte na vlastný riadok (φ = 90, κ = 2), stred ako bod S. Postup ukáže predpis zobrazenia v súradniciach a obraz každého bodu, pri priamke obrazy dvoch jej bodov a pri kružnici stred a polomer; graf vzor aj obraz.

Kužeľosečky v osovej polohe (bez člena xy): doplnením na štvorce stredový alebo vrcholový tvar, pri kružnici stred a polomer, pri elipse a hyperbole stred, poloosi, výstrednosť a ohniská (pri hyperbole aj asymptoty), pri parabole vrchol, parameter, ohnisko a riadiacu priamku; v grafe krivka s význačnými bodmi.

Dotyčnicu v bode kužeľosečky napíšete slovami (zatiaľ po česky) – „tečna ke kružnici x^2 + y^2 = 25 v bodě [3; 4]“ – a aplikácia ju nájde „rozpolením“ rovnice. Vzájomnú polohu kužeľosečky a priamky („vzájemná poloha x^2/9 + y^2/4 = 1 a y = x + 1“) určí dosadením a diskriminantom: sečnica, dotyčnica, alebo nesečnica, s priesečníkmi. Guľovú plochu (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) doplní na štvorce a určí stred a polomer. Medzi tvarmi priamky je aj úsekový x/p + y/q = 1. Dotyčnice z vonkajšieho bodu

(„tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]“) nájde medzi priamkami bodom so smernicou k – dotyčnica je tá, pri ktorej je diskriminant nulový; zvislú priamku overí zvlášť. Dotyčnice rovnobežné alebo kolmé s priamkou („… rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0“, „… kolmé k přímce y = x“) hľadá s rovnakým normálovým vektorom a neznámym absolútnym členom c. Guľovú plochu napíšete s názvom a na ďalší riadok rovinu, priamku alebo bod: s rovinou porovná vzdialenosť stredu s polomerom (kružnica rezu so stredom a polomerom, bod dotyku, alebo nič), s priamkou dosadí parametrické rovnice a rozhodne diskriminantom, pri bode na ploche nájde dotykovú rovinu.

Ako zadať

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Priamka všeobecnou, smernicovou alebo parametrickou rovnicou, každá na vlastnom riadku.
`p: X = A + t·u`	Priamka vektorovou rovnicou z bodu a vektora.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Rovina všeobecnou rovnicou (v priestore).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Priamka v priestore ako priesečnica dvoch rovín.
`odchylka(p, q), vzdalenost(A, p), teziste(A, B, C)`	Úloha na poslednom riadku.
`posunuti(A, B, C, u), otoceni(A, S, 90), stejnolehlost(p, k, S, 2), soumernost(k, q)`	Geometrické zobrazenie: útvary, potom vektor, stred a uhol či koeficient, alebo stred či os súmernosti.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Kužeľosečka – rovnica v x a y druhého stupňa.

Ukážky

Všetky tvary rovnice priamky z parametrického vyjadrenia.

Zadanie: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

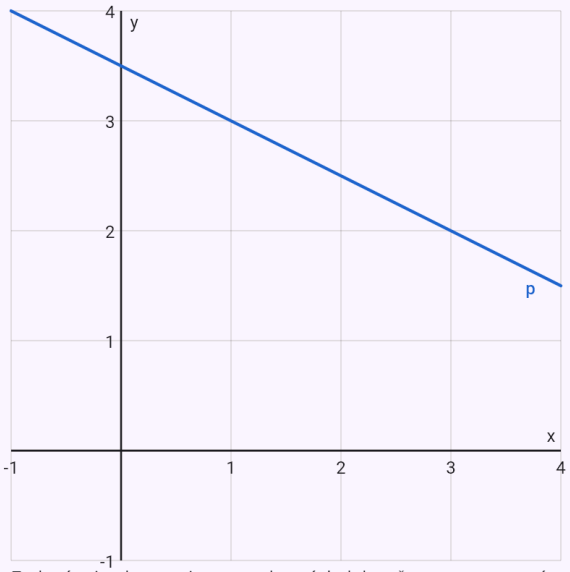
Výsledok

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Postup

- Z parametrického vyjadrenia prečítame bod (absolútne členy) a smerový vektor (koeficienty pri parametri): $P_p[1;\,3],\ \vec{u}_p = (2;\,-1)$
- Normálový vektor priamky je kolmý na smerový – súradnice vymeníme a pri jednej zmeníme znamienko: $\vec{u}_p = (2;\,-1) \ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\,2)$
- Všeobecná rovnica: koeficienty sú súradnice normálového vektora, absolútny člen dopočítame dosadením bodu $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\,3] :\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \ \Rightarrow\ c =$
- Smernicový tvar – zo všeobecnej rovnice vyjadríme y: $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Úsekový tvar – v menovateľoch sú úseky, ktoré priamka vytína na osiach x a y: $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Priesečník dvoch priamok.

Zadanie: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Výsledok

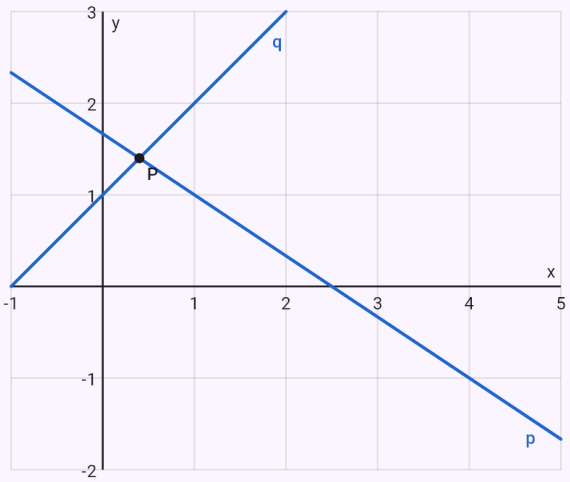
Priamky sú rôznobežné, priesečník:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Vektory nie sú násobkom jeden druhého – útvary nie sú rovnobežné
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- Priesečník je riešením sústavy rovníc oboch priamok (Cramerovo pravidlo)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$:

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Vzdialenosť bodu od priamky vzorcom.

Zadanie: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

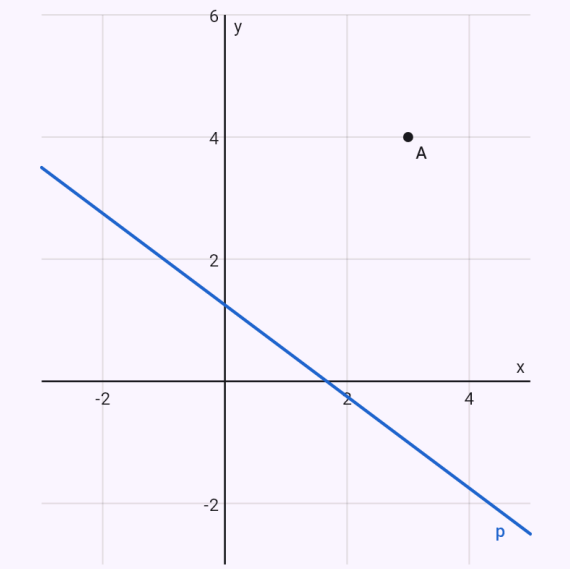
Výsledok

$$v(A, p) = 4$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- Vzdialenosť bodu od priamky
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Tá istá vzdialenosť cez kolmý priemet.

Zadanie: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Cez kolmý priemet

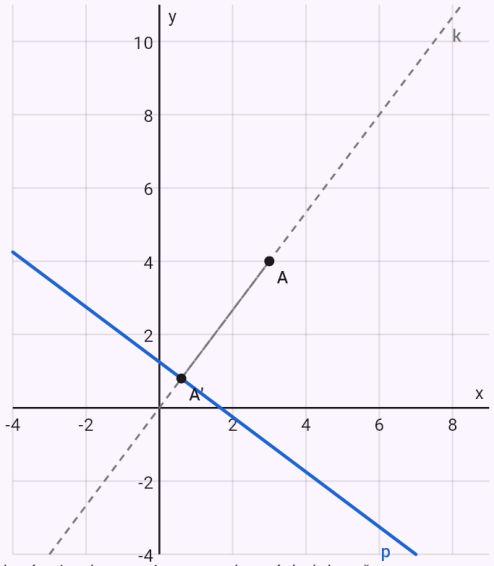
Výsledok

$$v(A,p) = 4$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $p : 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\,4)$
- Kolmica bodom A na priamku p – smerový vektor jednej priamky je normálovým vektorom druhej
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\,4),\; k : x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Päta kolmice A' je priesečníkom kolmice s útvarom p – dosadíme a vypočítame t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- Vzdialenosť bodu od priamky
  $$v(A,p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Ťažisko, výšky a ortocentrum trojuholníka.

Zadanie: `A[1; 2]`

`B[5; 2]`

`C[3; 6]` Ťažisko a výšky

Výsledok

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Postup

- Ťažisko – priemer súradníc vrcholov

  $T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$

- Výška z vrcholu A je kolmá na protiľahlú stranu – vektor strany je jej normálovým vektorom, dĺžka výšky je vzdialenosť vrcholu od strany

  $\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$

- Výška z vrcholu B je kolmá na protiľahlú stranu – vektor strany je jej normálovým vektorom, dĺžka výšky je vzdialenosť vrcholu od strany

  $\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$

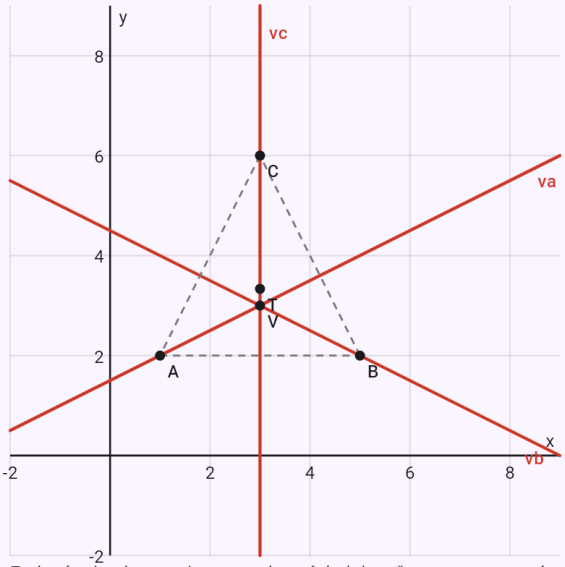
- Výška z vrcholu C je kolmá na protiľahlú stranu – vektor strany je jej normálovým vektorom, dĺžka výšky je vzdialenosť vrcholu od strany

  $\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$

- Priesečník výšok (ortocentrum) – stačia dve výšky

  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Bod súmerne združený podľa priamky.

Zadanie: `A[1; 2]`

`p: x - y = 0` Súmernosť

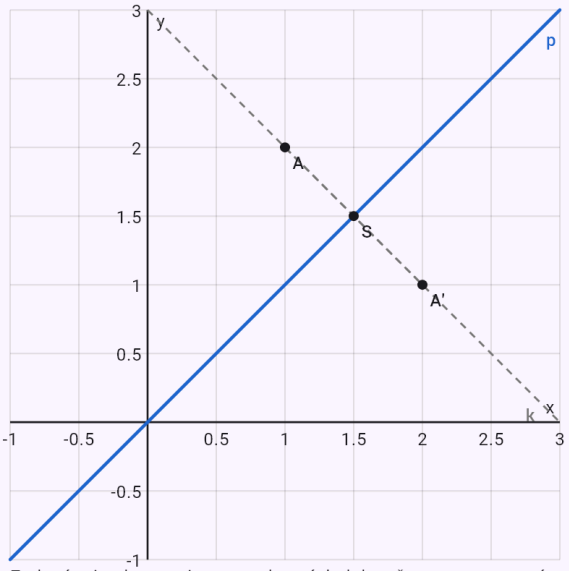
Výsledok

$$A'[2;\ 1]$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- Kolmica bodom A na priamku p – smerový vektor jednej priamky je normálovým vektorom druhej $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Päta kolmice S je priesečníkom kolmice s útvarom p – dosadíme a vypočítame t $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- Súmerne združený bod: stred súmernosti (päta kolmice) je stredom úsečky medzi bodom a jeho obrazom $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Posunutie trojuholníka o vektor.

Zadanie: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`posunuti(A, B, C, u)`

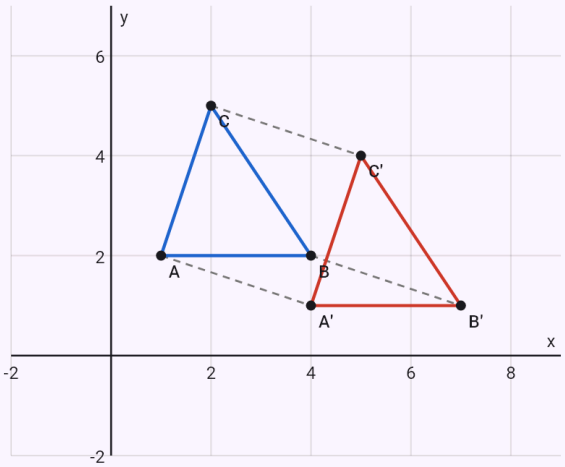
Výsledok

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Postup

- Posunutie o vektor: každý bod X sa posunie o ten istý vektor, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- Obraz bodu: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- Obraz bodu: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- Obraz bodu: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Otočenie trojuholníka o 90° okolo bodu S.

Zadanie: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`otoceni(A, B, C, S, 90)`

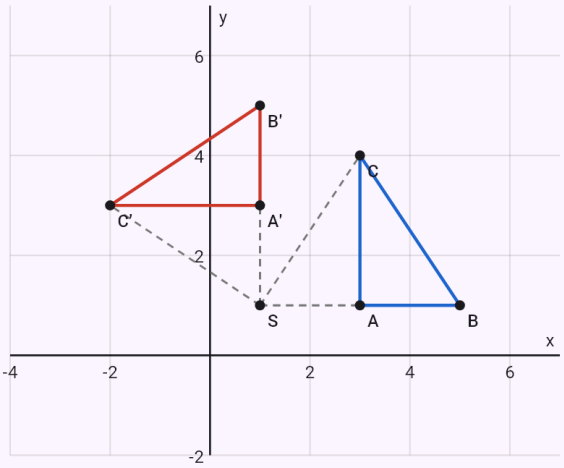
Výsledok

$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$
$C'[-2;\ 3]$

Postup

- Otočenie okolo stredu S o uhol φ (kladný proti smeru hodinových ručičiek): vektor X − S sa otočí o φ a pripočíta sa k stredu
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- Obraz bodu
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz bodu
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz bodu
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Rovnoľahlosť priamky a kružnice s koeficientom 2.

Zadanie: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
stejnolehlost(p, k, S, 2)
```

Výsledok

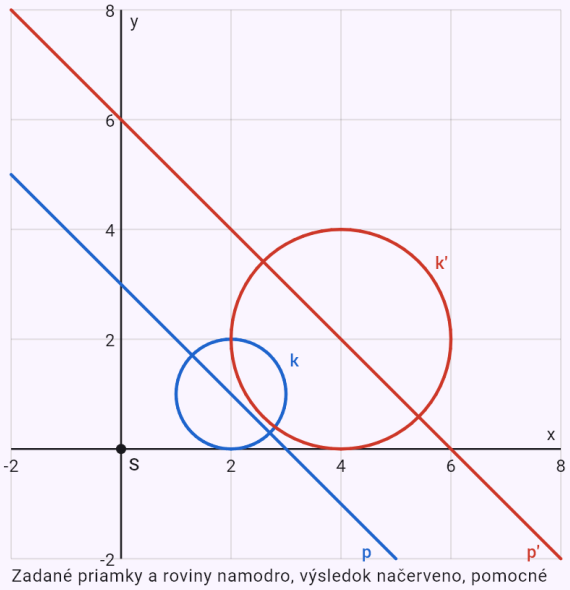
$$p' : x + y - 6 = 0$$

$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- Kružnica k – stred a polomer zo stredového tvaru (doplnením na štvorec)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom κ: vektor X – S sa vynásobí κ (záporné κ prenesie obraz na druhú stranu stredu): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- Obraz priamky p: zobrazíme dva jej body, obrazom je priamka ich obrazov – rovnobežná so vzorom
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- Normálový vektor priamky je kolmý na smerový – súradnice vymeníme a pri jednej zmeníme znamienko:
  $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- Všeobecná rovnica: koeficienty sú súradnice normálového vektora, absolútny člen dopočítame dosadením bodu
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- Obraz kružnice k: zobrazíme stred, polomer sa vynásobí |κ|
  $S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Kružnica súmerná podľa priamky – os vybraná čipom.

Zadanie: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Súmernosť

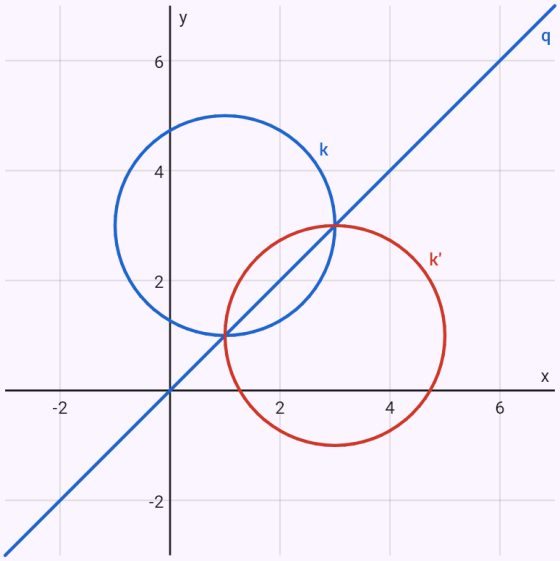
Výsledok

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Postup

- Kružnica k – stred a polomer zo stredového tvaru (doplnením na štvorec)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- Smernicový tvar prevedieme na všeobecnú rovnicu a prečítame normálový vektor:
  $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Osová súmernosť: obraz leží na kolmici na os a os rozpoľuje úsečku XX' – posunieme bod dvakrát o jeho vzdialenosť od osi v smere normálového vektora (a; b):
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- Obraz kružnice k: zobrazíme stred, polomer zostáva (zobrazenie je zhodné):
  $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S_k'[3;\,1],\; r' = r = 2$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane.

Priesečnica dvoch rovín.

Zadanie: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Výsledok

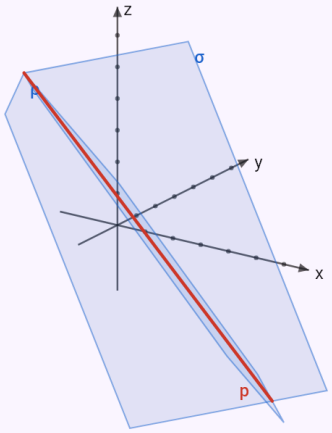
Roviny sú rôznobežné, priesečnica:

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Postup

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):
  $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Vektory nie sú násobkom jeden druhého – útvary nie sú rovnobežné
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- Smerový vektor priesečnice je kolmý na oba normálové vektory – je to ich vektorový súčin
  $$\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$$
- Bod útvaru p: zvolíme súradnice a zvyšnú dopočítame z rovnice
  $$z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$$
- Priesečnica – jej bod a smerový vektor:
  $p : x = \dfrac{4}{3} + 2t,\; y = -\dfrac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Odchýlka priamky a roviny.

Zadanie: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Odchýlka

Výsledok

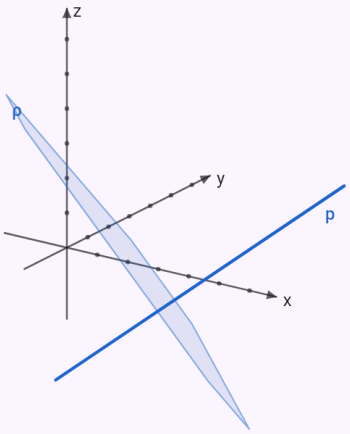
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Postup

- Z parametrického vyjadrenia prečítame bod (absolútne členy) a smerový vektor (koeficienty pri parametri): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p = (1;\,2;\,1)$
- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Odchýlka priamky a roviny: uhol smerového a normálového vektora ju dopĺňa do 90°, preto sínus teda $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Vzdialenosť a os mimobežiek.

Zadanie: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Vzdialenosť

Výsledok

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Postup

- Z parametrického vyjadrenia prečítame bod (absolútne členy) a smerový vektor (koeficienty pri parametri): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Z parametrického vyjadrenia prečítame bod (absolútne členy) a smerový vektor (koeficienty pri parametri): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- Vzdialenosť mimobežiek

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- Os mimobežiek: bod X na prvej priamke a Y na druhej tak, aby vektor XY bol kolmý na oba smerové vektory – sústava pre t a s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

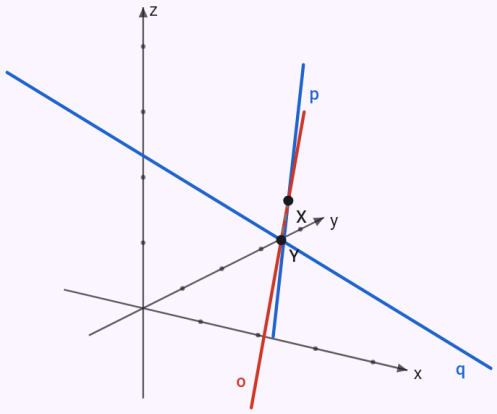
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Parametrické vyjadrenie – bod plus parameter krát smerový vektor:

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Kružnica – doplnenie na štvorce, stred a polomer.

Zadanie: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Výsledok

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

Postup

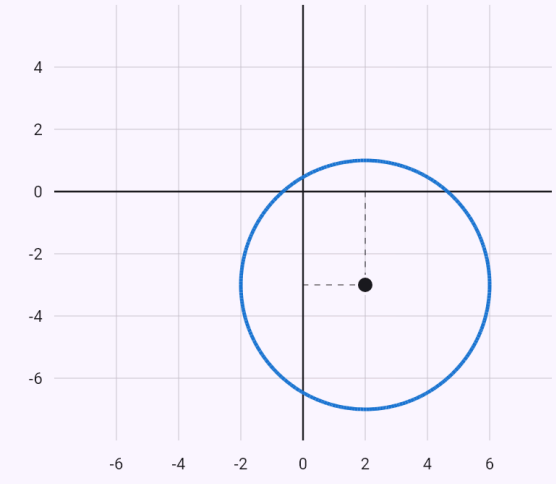
- Doplníme na štvorce

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- Stredová rovnica kružnice: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Stred $S = [2;\ -3]$, polomer $r = 4$

Graf



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Krivka zadaná rovnicou v rovine x, y.

Elipsa – poloosi, výstrednosť a ohniská.

Zadanie: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

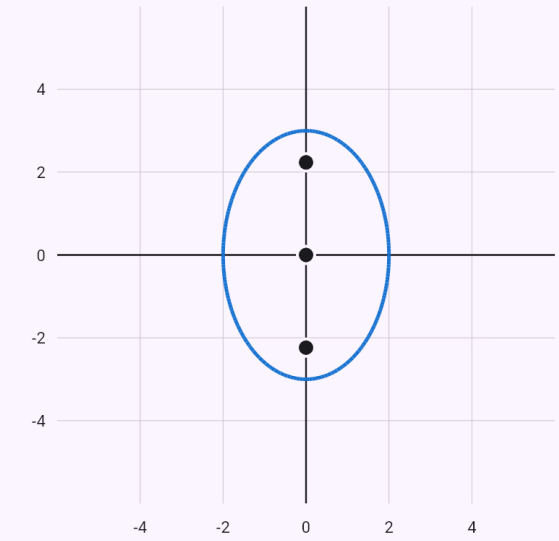
Výsledok

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Postup

- Stredová rovnica elipsy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Stred $S = [0;\ 0]$, poloosi $a = 3,\ b = 2$ (hlavná os je rovnobežná s osou y), výstrednosť $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, číselná výstrednosť $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ohniská $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Graf



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Krivka zadaná rovnicou v rovine x, y.

Hyperbola – ohniská a asymptoty.

Zadanie: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

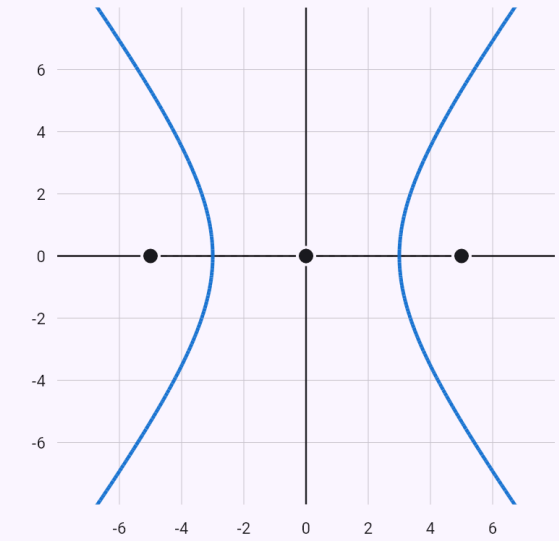
Výsledok

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Postup

- Stredová rovnica hyperboly: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Stred $S = [0;\ 0]$, poloosi $a = 3,\ b = 4$ (hlavná os je rovnobežná s osou x), výstrednosť $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, číselná výstrednosť $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, ohniská $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asymptoty $y = \pm\frac{4}{3}x$

Graf



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Krivka zadaná rovnicou v rovine x, y.

Parabola – vrchol, ohnisko a riadiaca priamka.

Zadanie: `y^2 = 8x`

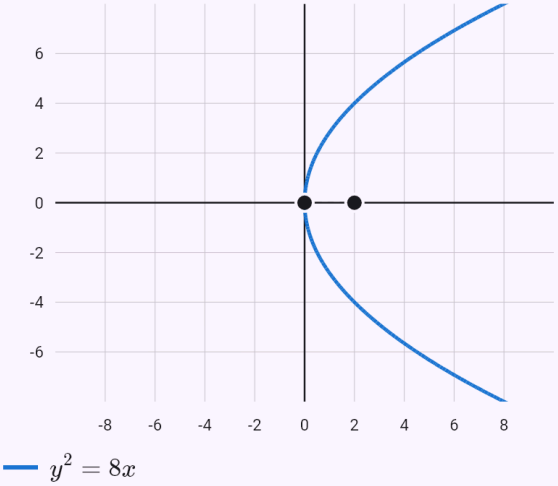
Výsledok

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Postup

- Vrcholová rovnica paraboly: $y^2 = 8x$
- Vrchol $V = [0;\ 0]$, parameter $p = 4$, os rovnobežná s osou x, ohnisko $F = [2;\ 0]$, riadiaca priamka $x = -2$

Graf



Krivka zadaná rovnicou v rovine x, y.

Dotyčnica kružnice v jej bode.

Zadanie: `tečna ke kružnici x^2 + y^2 = 25 v bodě [3; 4]`

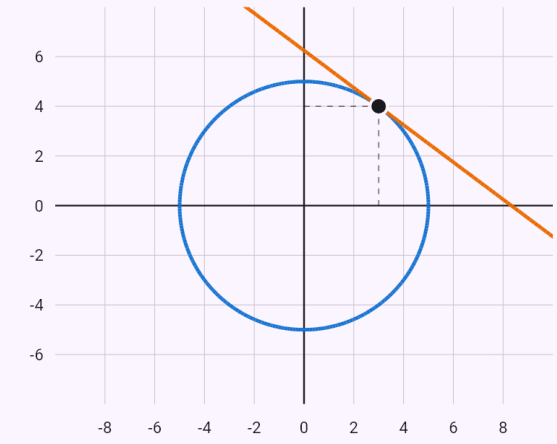
Výsledok

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Postup

- Bod $T = [3;\ 4]$ leží na kužeľosečke – po dosadení: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- Rovnicu dotyčnice v bode $[x_0; y_0]$ kužeľosečky dostaneme „rozpolením“: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \frac{x + x_0}{2}$, $y \to \frac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- Rovnica dotyčnice: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Graf



Kužeľosečka a priamky; vyznačené body sú body dotyku, priesečníky a zadaný bod.

Dotyčnice z vonkajšieho bodu – nulový diskriminant pre smernicu k.

Zadanie: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

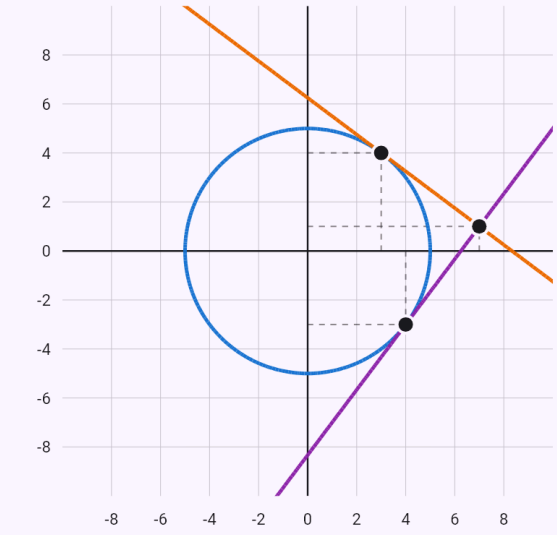
Výsledok

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Postup

- Bod $M = [7;\ 1]$ na kužeľosečke neleží – po dosadení: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, nie 0.
- Dotyčnice hľadáme medzi priamkami bodom M so smernicou k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Za y dosadíme do rovnice kužeľosečky: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- Priamka je dotyčnica práve vtedy, keď má rovnica jediný (dvojnásobný) koreň – diskriminant je nulový: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Dotyčnice: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; body dotyku: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Graf



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

Kužeľosečka a priamky; vyznačené body sú body dotyku, priesečníky a zadaný bod.

Dotyčnice rovnobežné s priamkou.

Zadanie: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

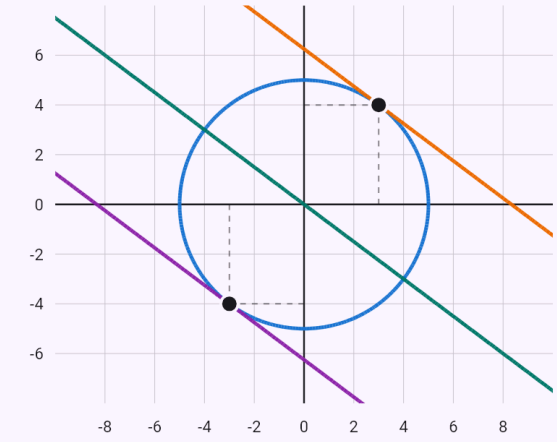
Výsledok

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Postup

- Dotyčnice rovnobežné s priamkou majú jej normálový vektor, líšia sa len absolútnym členom c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Za y dosadíme do rovnice kužeľosečky: $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- Priamka je dotyčnica práve vtedy, keď má rovnica jediný (dvojnásobný) koreň – diskriminant je nulový: $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Dotyčnice: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; body dotyku: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Graf



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

Kužeľosečka a priamky; vyznačené body sú body dotyku, priesečníky a zadaný bod.

Vzájomná poloha elipsy a priamky.

Zadanie: `vzájemná poloha x^2/9 + y^2/4 = 1 a y = x + 1`

Výsledok

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right]$$

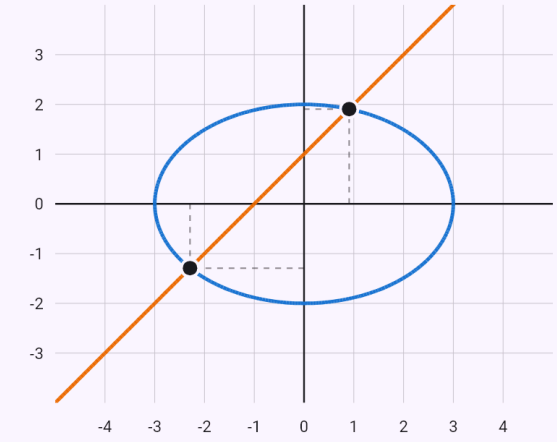
$$P_2 = \left[\frac{3(-3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1+3\sqrt{3})}{13}\right]$$

Postup

- Z rovnice priamky vyjadríme y a dosadíme do rovnice kužeľosečky: $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Diskriminant $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ je kladný – priamka je sečnica, má s kužeľosečkou dva spoločné body.
- Priesečníky

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3(-3+4}{13}\right.$$

Graf



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

Kužeľosečka a priamky; vyznačené body sú body dotyku, priesečníky a zadaný bod.

Guľová plocha – stred a polomer.

Zadanie: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Výsledok

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Postup

- Doplníme na štvorce

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- Stredová rovnica guľovej plochy: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Stred $S = [1;\ -2;\ 3]$, polomer $r = 4$

Guľová plocha a rovina – kružnica rezu.

Zadanie: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

`ρ: x + y + z = 1`

Výsledok

Rovina pretína guľovú plochu v kružnici so stredom a polomerom:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Postup

- Rovnicu guľovej plochy k doplnením na štvorce prevedieme na stredový tvar – stred a polomer

  $k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow \ S[1;\ -2;\ 3$

- Zo všeobecnej rovnice prečítame normálový vektor – koeficienty pri x, y (z):

  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$

- Vzdialenosť bodu od roviny

  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

- Vzdialenosť stredu od roviny ρ je menšia ako polomer – rovina pretína guľovú plochu v kružnici:

  $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$

- Kolmica bodom S na rovinu ρ má smer jej normálového vektora: $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$

- Päta kolmice S' je priesečníkom kolmice s útvarom ρ – dosadíme a vypočítame t

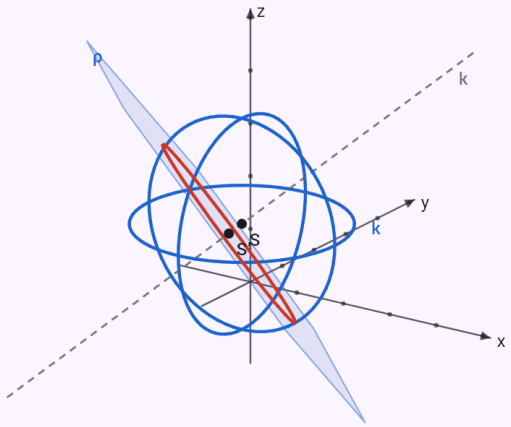
  $(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow \ t = -\frac{1}{3},\ S'[$

- Stred kružnice rezu je päta kolmice zo stredu,

  $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; polomer z Pytagorovej vety

  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Guľová plocha a priamka – priesečníky.

Zadanie: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Výsledok

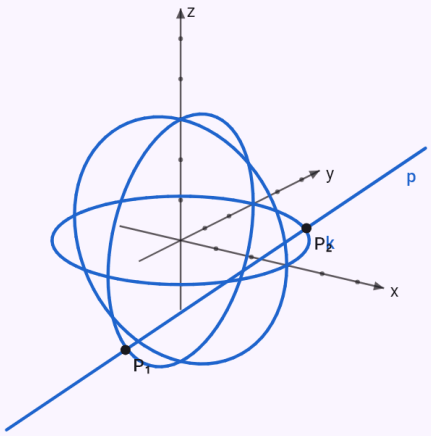
Priamka pretína guľovú plochu v dvoch bodoch:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6}; -\frac{\sqrt{42}}{3}; \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ F$$

Postup

- Rovnicu guľovej plochy k doplnením na štvorce prevedieme na stredový tvar – stred a polomer:
  $k: x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow S[0;0;0],\ r=3$
- Z parametrického vyjadrenia prečítame bod (absolútne členy) a smerový vektor (koeficienty pri parametri):
  $P_p[1;0;-1],\ \vec{u}_p=(1;2;1)$
- Parametrické rovnice priamky p dosadíme do rovnice guľovej plochy
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2 \Rightarrow 6t^2-7=0$
- Diskriminant $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ je kladný – priamka je sečnica, má s guľovou plochou dva spoločné body.
- Priesečníky
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}: P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6}; -\frac{\sqrt{42}}{3}; \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Graf



Zadané priamky a roviny namodro, výsledok načerveno, pomocné čiary čiarkovane. Vektory v priestore – graf otočíte ťahaním prsta.

Známe obmedzenia

- Súradnice a koeficienty sú čísla (bez parametra); kužeľosečky len v osovej polohe (bez člena xy).
- Geometrické zobrazenia len v rovine; kružnicu zatiaľ len zobrazí (nie vzdialenosť, polohu ani dotyčnice k nej).
- Výšky trojuholníka v priestore len dĺžkou, bez rovníc a priesečníka.
- Meno priamky alebo roviny je jedno písmeno (aj s indexom) – „a: 2x + 3 = 5“ sa preto číta ako priamka, nie ako rovnica.

24. Konštrukčné úlohy

Konštrukčné úlohy zadáte formulárom – v sekcii „Aplikácie“ na úvodnej obrazovke, odbor Geometria (formulár „Konštrukčné úlohy“). Základnou úlohou je trojuholník ABC z troch prvkov: tri strany (sss), dve strany a uhol medzi nimi (sus), stranu a dva uhly (usu – tretí uhol sa dopočíta zo súčtu 180°) alebo dve strany a uhol oproti jednej z nich (Ssu). Dĺžky sú v centimetroch, uhly v stupňoch.

Riešenie je školské: rozbor (náčrt hotového trojuholníka so zvýraznenými zadanými prvkami), postup konštrukcie v symbolickom zápise (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) a diskusia počtu riešení. Obrázkom pod výsledkom listujete šípkami krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú farebne zvýraznené. Vo výsledku sú aj dopočítané strany a uhly, podľa ktorých si narysovaný trojuholník premeriate.

Diskusia vysvetlí, prečo úloha nemá riešenie (trojuholníková nerovnosť, súčet uhlov, kružnica nezasiahne polpriamku), alebo prečo má dve (Ssu, keď je zadaný uhol oproti kratšej strane).

Trojuholník vie aj s výškou, ťažnicou alebo polomerom kružnice opísanej či vpísanej. Najprv sa narysuje strana a tretí vrchol leží v priesečníku dvoch množín bodov: rovnobežky vo vzdialenosti výšky, kružnice okolo stredu strany s polomerom ťažnice, kružnice okolo krajného bodu, ramena uhla, oblúka uhla nad stranou alebo kružníc opísaných. S dvoma stranami a výškou z ich spoločného vrcholu sa začne výškou, s polomerom kružnice vpísanej, stranou a uhlom pri nej sa zostrojí kružnica vpísaná a dotyčnica k nej.

Štvoruholníky: štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, rovnobežník a lichobežník (AB ∥ CD) zo strán a, b, c, d, uhlopriečok e, f, uhlov α, β a výšky v – prvky sa vyberajú v riadkoch ako pri trojuholníku. Väčšinou sa najprv zostrojí trojuholník ABC alebo ABD a štvrtý vrchol sa doplní; inokedy pomôžu uhlopriečky, ktoré sa rozpoľujú (pri kosoštvorci aj kolmé), rovnobežka vo vzdialenosti výšky, alebo pri lichobežníku pomocný trojuholník po posunutí strany AD či uhlopriečky BD o vektor DC.

Množiny bodov sú v rovnakom formulári: os úsečky, os uhla, Tálesova kružnica a množina vrcholov uhla danej veľkosti nad úsečkou (dva oblúky súmerné podľa úsečky). Každá sa zostrojí kružidlom a pravítkom krok po kroku; rozbor vysvetlí, prečo body ležia práve tam.

Kružnice a dotyčnice: dotyčnice z bodu ku kružnici (body dotyku na Tálesovej kružnici), spoločné dotyčnice dvoch kružníc (cez pomocné kružnice s polomerom rozdielu a súčtu polomerov), kružnica daného polomeru dotýkajúca sa ramien uhla, kružnica bodom dotýkajúca sa priamky a kružnica dvoma bodmi. Diskusia podľa vzájomnej polohy určí počet riešení – napríklad dve kružnice majú štyri, tri, dve, jednu alebo žiadnu spoločnú dotyčnicu.

Úlohy so vzťahmi: zadaný útvar (úsečka AB, kružnica k a bod A, priamka p a bod A, kružnica k a priamka p, dve rôznobežky p, q) a dva vzťahy, ktoré má spĺňať hľadaný bod – nad úsečkou vrchol C trojuholníka ABC, inak bod X. Vzťahy sa vyberajú v riadkoch: z bodu je úsečku vidieť pod uhlom (90° = Tálesova

kružnica), rovnako ďaleko od dvoch bodov alebo dvoch priamok, vzdialenosť od bodu alebo priamky, pomer vzdialeností od A a B (Apolloniova kružnica), leží na priamke či kružnici, priamka AX je dotyčnicou ku k, stred kružnice s polomerom ϱ, ktorá sa dotýka k, a A je stredom úsečky XY s Y na k alebo p (stredová súmernosť). Každý vzťah sa prevedie na množinu bodov, hľadaný bod je v ich prieniku; diskusia spočíta riešenia (nad úsečkou v jednej polrovine, druhá dá zhodné zrkadlové obrazy). Pod výsledkom sú vzdialenosti hľadaného bodu od zadaných bodov a priamok ako skúška.

Všeobecné vzťahy medzi viacerými bodmi (s kružnicou k alebo bez nej): body A až H sa zadajú riadkami vzťahov – bod leží na k, stred úsečky, dotyčnica ku k, dĺžka, pomer dĺžok, kolmosť, rovnobežnosť, bod na priamke, uhol a trojuholník (len čo nakresliť). Vzťahy sa zapíšu ako rovnice v súradniciach (stred S v začiatku, prvý bod na osi x) a vyriešia presne, s odmocninami. Výsledkom sú dĺžky medzi bodmi (s kružnicou aj ako násobky r), skúška a počet riešení až na zhodnosť. Kde to ide, nasleduje školský postup konštrukcie: každý bod na dvoch množinách – zadaná kružnica, vzdialenosť, priamka, dotyčnica, stred, stredová súmernosť – a vypočítané dĺžky zostrojené ako prepona či odvesna pravouhlého trojuholníka alebo podľa Euklidovej vety; riešenie ukáže aj mocnosť bodu a úsekový uhol, keď platí. Inak poctivo len výpočet a výsledný obrázok.

Rezy telies: kocka, kváder, pravidelný hranol a ihlan s podstavou s 3 až 6 stranami (vrcholy ABC… a A'B'C'…, pri ihlane vrchol V) a pravidelný štvorsten ABCD. Rovinu rezu určujú body X, Y, Z, každý na jednom riadku: AE=2 je bod na úsečke AE vo vzdialenosti 2 cm od A – úsečka môže byť hrana, uhlopriečka steny aj telesa alebo os SS' (S, S' sú stredy podstáv) a vzdialenosť väčšia ako jej dĺžka dá bod na predĺžení; X: AB = 1:2 je bod X, ktorý delí úsečku AB v pomere 1 : 2. Pomocné body možno použiť v ďalších riadkoch. Teleso je vo voľnom rovnobežnom premietaní s neviditeľnými hranami čiarkovane; pravidelný trojuholník, päťuholník a šesťuholník v podstave sa najprv narysuje bokom v skutočnej veľkosti a prenesie do premietania. Rez vzniká po stranách podľa školských pravidiel: body v tej istej stene sa spoja, rovnobežné steny pretne rovina v rovnobežkách, priesečník priamky strany rezu s priamkou hrany (pomocný bod T) leží aj v susednej stene a priamku bodu vnútri telesa prenesieme do podstavy pomocnou zvislou rovinou. Pod obrázkom je hotový rez v priestore, ktorý sa dá otáčať prstom.

Ukážky

Trojuholník z troch strán (sss).

Zadanie: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

Výsledok

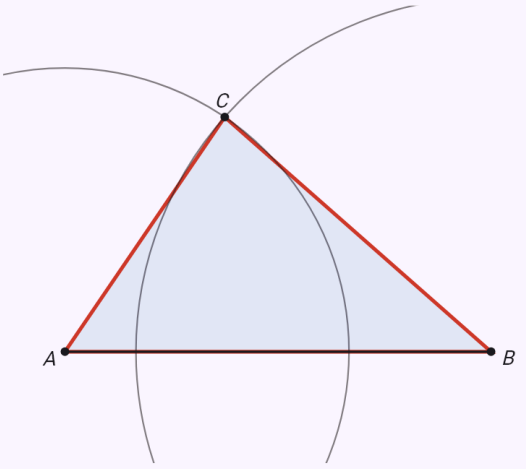
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – kružnica l so stredom B a polomerom a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – tretí vrchol je priesečníkom.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: trojuholníková nerovnosť $a + b > c$ platí, kružnice sa pretínajú. V jednej polrovine určenej prvou stranou má úloha jedno riešenie (v opačnej je s ním zhodný zrkadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Dve strany a uhol medzi nimi (sus).

Zadanie: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

Výsledok

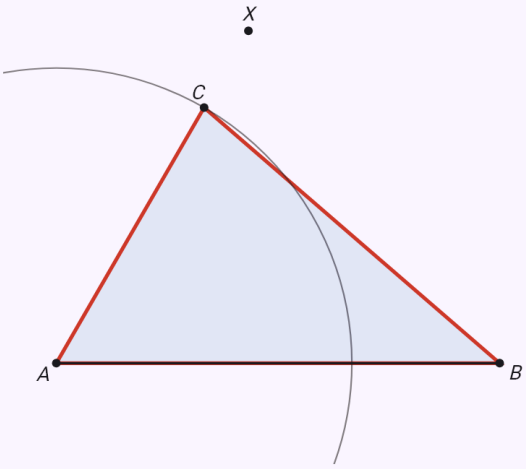
$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – zostrojíme uhol α, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – tretí vrchol je priesečníkom.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v jednej polrovine určenej prvou stranou má úloha jedno riešenie (v opačnej polrovine je s ním zhodný zrkadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strana a dva uhly, z ktorých jeden pri strane neleží – tretí uhol sa dopočíta (usu).

Zadanie: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

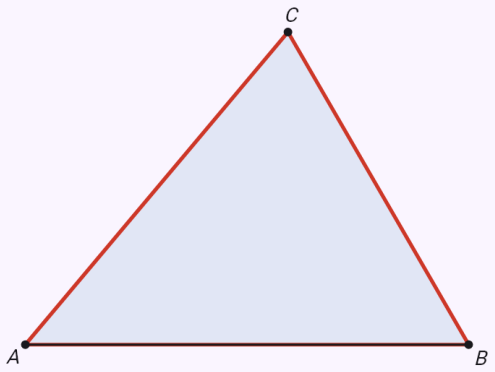
Výsledok

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Tretí uhol dopočítame zo súčtu uhlov v trojuholníku: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 50^\circ$ – zostrojíme uhol α, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 60^\circ$ – zostrojíme uhol β, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{BY}$
- 4. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – tretí vrchol je priesečníkom.
- 5. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v jednej polrovine určenej prvou stranou má úloha jedno riešenie (v opačnej polrovine je s ním zhodný zrkadlový obraz).

Graf



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Uhol oproti kratšej z dvoch strán – dve riešenia (Ssu).

Zadanie: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Výsledok

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

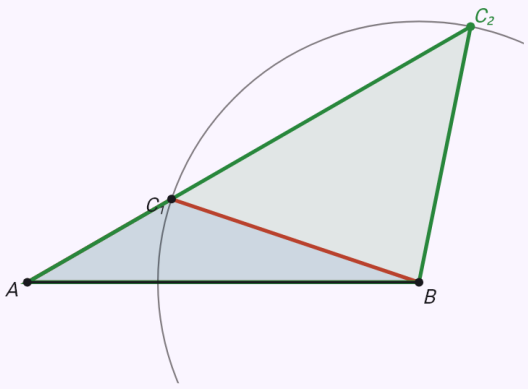
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – zostrojíme uhol α, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom B a polomerom a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – priesečníky sú dva, každý je tretím vrcholom jedného trojuholníka.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: kružnica pretína polpriamku v dvoch bodoch – v jednej polrovine určenej prvou stranou má úloha dve riešenia, dva rôzne trojuholníky.

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strany, ktoré trojuholníkovú nerovnosť nespĺňajú.

Zadanie: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

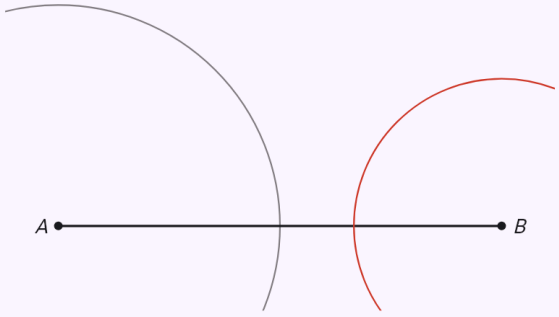
Výsledok

Útvar so zadanými prvkami nemožno zostrojiť.

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – kružnica l so stredom B a polomerom a
- Diskusia: trojuholníková nerovnosť neplatí ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – kružnice sa nepretínajú a trojuholník neexistuje.

Graf



Krok 3 z 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strana c, výška a ťažnica k nej – dve riešenia.

Zadanie: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Výsledok

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

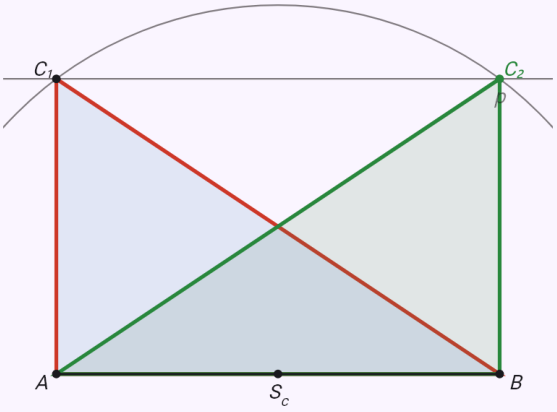
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – rovnobežka p s AB vo vzdialenosti v_c
- 3. $S_c;\ S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – stred S_c úsečky AB (priesečník jej osi s úsečkou).
- 4. $k;\ k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom S_c a polomerom t_c
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in p \cap k$ – priesečníky sú dva, každý je tretím vrcholom jedného trojuholníka.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v polrovine nad prvou stranou majú zostrojené množiny bodov 2 spoločné body – úloha má toľko riešení (v opačnej polrovine sú s nimi zhodné zrkadlové obrazy).

Graf



Krok 6 z 6

6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strana c, výška k nej a uhol oproti nej – oblúk uhla nad stranou.

Zadanie: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Výsledok

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

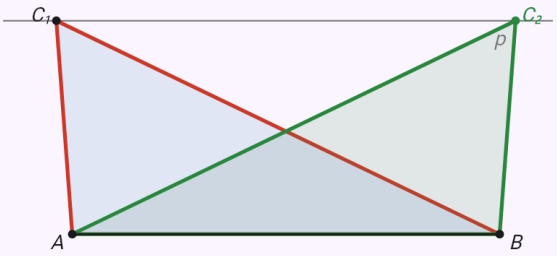
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – rovnobežka p s AB vo vzdialenosti v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – oblúk k, z ktorého je úsečka AB vidieť pod uhlom γ (zostrojený ako v úlohe „Množina vrcholov uhla“).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – priesečníky sú dva, každý je tretím vrcholom jedného trojuholníka.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v polrovine nad prvou stranou majú zostrojené množiny bodov 2 spoločné body – úloha má toľko riešení (v opačnej polrovine sú s nimi zhodné zrkadlové obrazy).

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strana, polomer kružnice opísanej a ďalšia strana – dve kružnice opísané.

Zadanie: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Výsledok

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

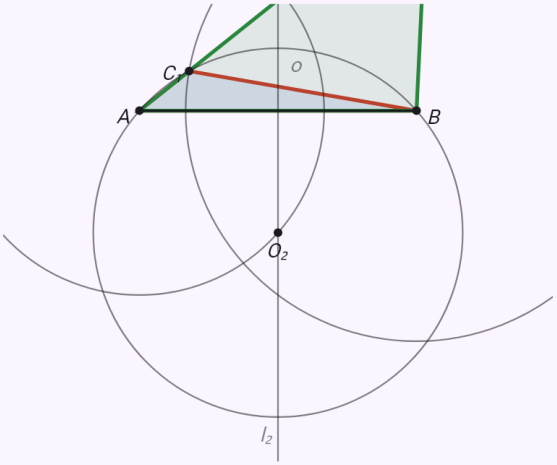
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – os o úsečky AB, zostrojená ako v úlohe „Os úsečky“.
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – priesečníky O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – kružnica opísaná l_1, l_2 so stredom O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – kružnica m so stredom B a polomerom a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – priesečníky sú dva, každý je tretím vrcholom jedného trojuholníka.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v polrovine nad prvou stranou majú zostrojené množiny bodov 2 spoločné body – úloha má toľko riešení (v opačnej polrovine sú s nimi zhodné zrkadlové obrazy).

Graf



Krok 8 z 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Dve strany a výška z ich spoločného vrcholu – výška sa narysuje prvá.

Zadanie: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Výsledok

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

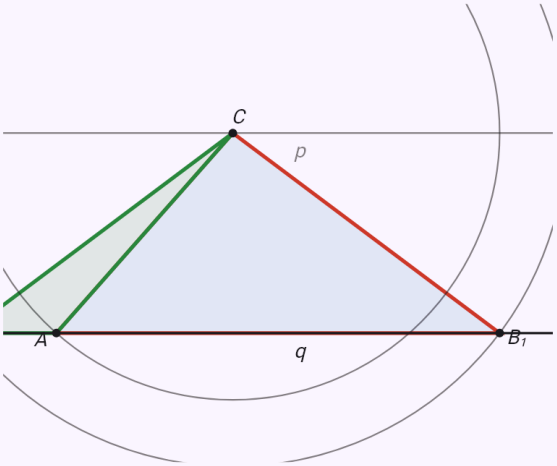
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – ľubovoľná priamka q, na ktorej bude ležať strana AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – rovnobežka p s q vo vzdialenosti v_c
- 3. C; $C \in p$ – ľubovoľný bod C priamky p
- 4. k; $k(C;\, 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom C a polomerom b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – jeden z priesečníkov, A (druhý dá zhodný trojuholník).
- 6. l; $l(C;\, 5\,\text{cm})$ – kružnica l so stredom C a polomerom a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – priesečníky sú dva, každý je tretím vrcholom jedného trojuholníka.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: kružnica l pretína priamku q v dvoch bodoch – úloha má dve riešenia, dva rôzne trojuholníky (druhý priesečník kružnice k dá len zhodné).

Graf



Krok 8 z 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Strana, uhol pri nej a polomer kružnice vpísanej – dotyčnica z Tálesovej kružnice.

Zadanie: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

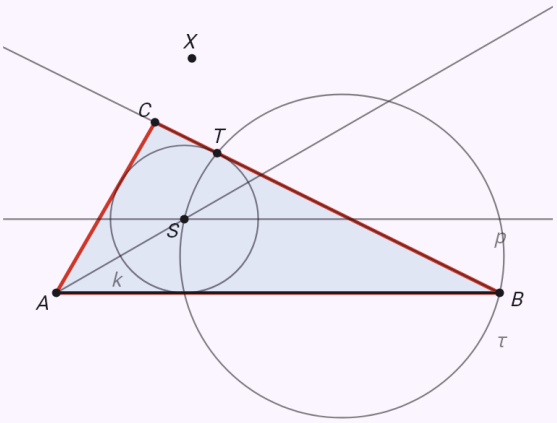
Výsledok

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Postup

- Rozbor: náčrt hotového trojuholníka, zadané prvky sú zvýraznené – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – zostrojíme uhol α, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{AX}$
- 3. $o;\ o = \overrightarrow{AY},\ |\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – os o uhla α (zostrojená ako v úlohe „Os uhla“); na nej leží stred kružnice vpísanej.
- 4. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – rovnobežka p s AB vo vzdialenosti ϱ
- 5. $S;\ S \in o \cap p$ – priesečník S
- 6. $k;\ k(S;\ \varrho)$ – kružnica vpísaná k so stredom S
- 7. $\tau;\ \tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – Talesova kružnica τ nad úsečkou BS
- 8. $T;\ T \in \tau \cap k$ – bod dotyku T dotyčnice z bodu B (druhý priesečník je bod dotyku na prvej strane).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – dotyčnica z bodu B ku kružnici vpísanej.
- 10. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – tretí vrchol je priesečníkom.
- 11. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v jednej polrovine určenej prvou stranou má úloha jedno riešenie (v opačnej polrovine je s ním zhodný zrkadlový obraz).

Graf



Krok 11 z 11
11. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Obdĺžnik zo strany a uhlopriečky – pravý uhol pri B.

Zadanie: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

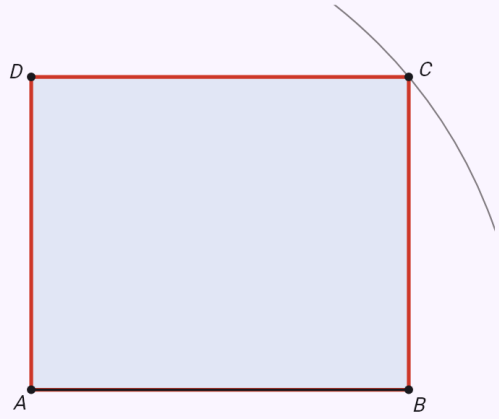
Výsledok

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): strana AB s ďalšími zadanými prvkami určuje trojuholník ABC alebo ABD, ktorý zostrojíme ako v úlohe o trojuholníku. Štvrtý vrchol doplníme – protiľahlé strany rovnobežníka sú zhodné a rovnobežné.
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$ – narysujeme stranu a
- 2. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 90^\circ$ – zostrojíme uhol β, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{BY}$
- 3. $k;\ k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom e
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – priesečník C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – štvrtý vrchol D: protiľahlé strany sú zhodné, leží preto na kružniciach so stredmi C, A a polomermi $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: úloha má jedno riešenie – každý ďalší taký štvoruholník je s ním zhodný.

Graf



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Kosoštvorec z uhlopriečok – vrcholy na osi uhlopriečky AC.

Zadanie: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

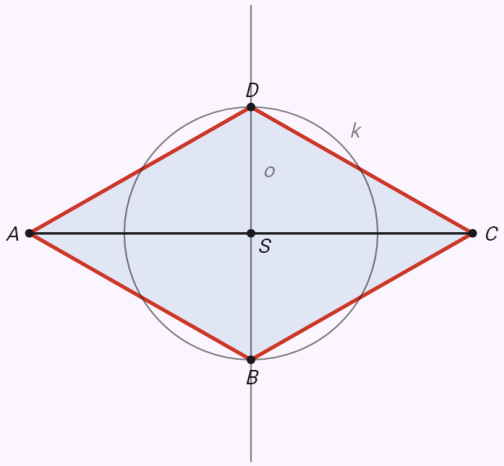
Výsledok

$$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$$
$$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$$
$$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): uhlopriečky štvorca a kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú sa. Vrcholy B a D preto ležia na osi uhlopriečky AC, v polovici druhej uhlopriečky od jej stredu S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – narysujeme uhlopriečku AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – os o úsečky AC, zostrojená ako v úlohe „Os úsečky“.
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom S a polomerom $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – priesečníky B, D
- 5. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: úloha má jedno riešenie – každý ďalší taký štvoruholník je s ním zhodný.

Graf



Krok 5 z 5
5. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rovnobežník z dvoch strán a uhlopriečky – najprv trojuholník ABC.

Zadanie: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

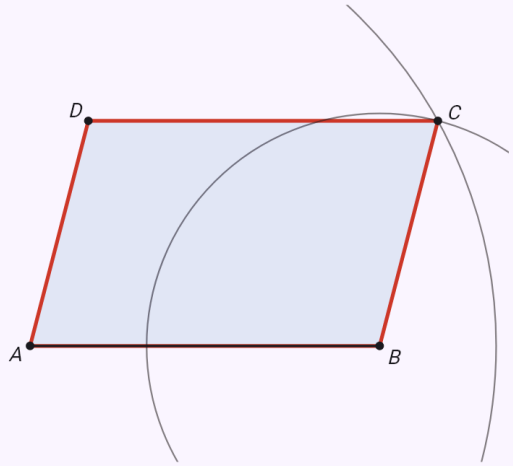
Výsledok

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): strana AB s ďalšími zadanými prvkami určuje trojuholník ABC alebo ABD, ktorý zostrojíme ako v úlohe o trojuholníku. Štvrtý vrchol doplníme – protiľahlé strany rovnobežníka sú zhodné a rovnobežné.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme stranu a
- 2. $k;\ k(A;\ 8\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom A a polomerom e
- 3. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica l so stredom B a polomerom b
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – priesečník C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – štvrtý vrchol D: protiľahlé strany sú zhodné, leží preto na kružniciach so stredmi C, A a polomermi $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: úloha má jedno riešenie – každý ďalší taký štvoruholník je s ním zhodný.

Graf



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Lichobežník zo štyroch strán – pomocný trojuholník EBC.

Zadanie: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

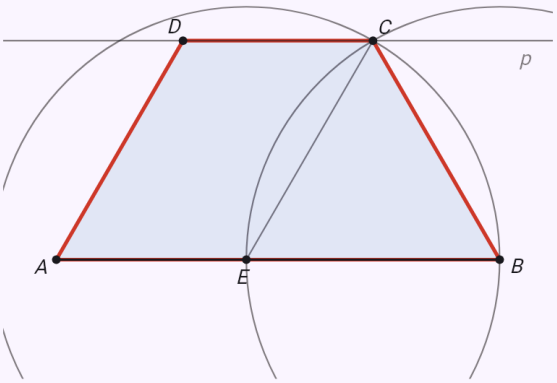
Výsledok

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): ak posunieme stranu AD o vektor DC, vznikne trojuholník EBC, kde E leží na AB a |AE| = c. Jeho strany sú |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d a uhly pri E a B sú α a β. Ten zostrojíme a vrchol D doplníme na rovnobežke s AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – narysujeme stranu a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – bod E vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom E a polomerom d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – kružnica l so stredom B a polomerom b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – priesečník C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D na rovnobežke s AB vedenej bodom C, vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od neho.
- 7. $ABCD$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: úloha má jedno riešenie – každý ďalší taký štvoruholník je s ním zhodný.

Graf



Krok 7 z 7
7. $ABCD$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Lichobežník z troch strán a uhla – dve riešenia.

Zadanie: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Výsledok

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

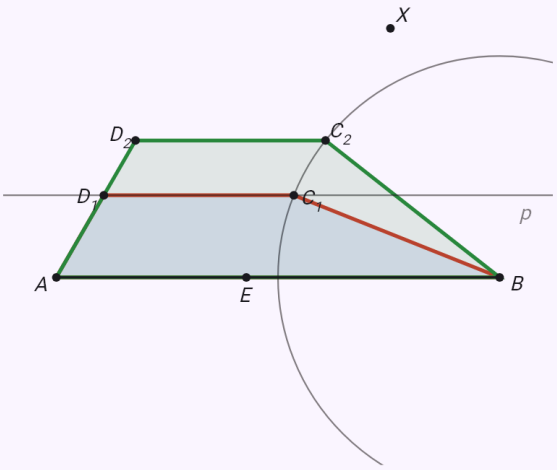
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): ak posunieme stranu AD o vektor DC, vznikne trojuholník EBC, kde E leží na AB a |AE| = c. Jeho strany sú |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d a uhly pri E a B sú α a β. Ten zostrojíme a vrchol D doplníme na rovnobežke s AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – narysujeme stranu a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – bod E vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – zostrojíme uhol α, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom B a polomerom b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – priesečníky C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D_1 na rovnobežke s AB vedenej bodom C_1, vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od neho.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – vrchol D_2 na rovnobežke s AB vedenej bodom C_2, vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od neho.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: priesečníky sú dva – úloha má dve riešenia, dva rôzne štvoruholníky.

Graf



Krok 8 z 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Os úsečky AB dlhej 6 cm.

Zadanie: `construction(segment_bisector; d=6)`

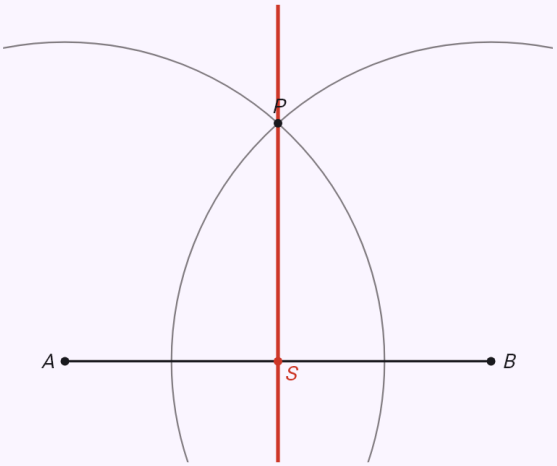
Výsledok

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): bod X, ktorý má od A a B rovnakú vzdialenosť, je vrcholom rovnoramenného trojuholníka ABX – leží na kolmici na AB prechádzajúcej jej stredom, na osi úsečky.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme úsečku AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – kružnica k so stredom A a polomerom $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – kružnica l so stredom B a rovnakým polomerom.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – priesečníky P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – priamka o je os úsečky: množina všetkých bodov, ktoré majú od A a B rovnakú vzdialenosť.

Graf



Krok 5 z 5

$5.\ o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Os uhla 70°.

Zadanie: `construction(angle_bisector; phi=70)`

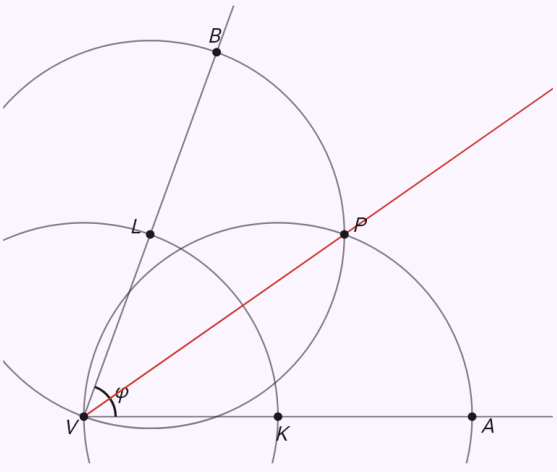
Výsledok

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Postup

- Rozbor ($|\angle AVB| = 70^\circ$): bod vnútri uhla, ktorý má od oboch ramien rovnakú vzdialenosť, leží na polpriamke, ktorá uhol rozpoľuje – na osi uhla.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – narysujeme uhol $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – kružnica k so stredom V a ľubovoľným polomerom.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – priesečníky K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – kružnica m so stredom K a polomerom $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – kružnica n so stredom L a rovnakým polomerom.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – priesečník P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – polpriamka o je os uhla: rozpoľuje ho a jej body majú od oboch ramien rovnakú vzdialenosť.

Graf



Krok 7 z 7

$7.\ o;\ o = \overrightarrow{VP}$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Tálesova kružnica nad úsečkou 5 cm.

Zadanie: `construction(thales; d=5)`

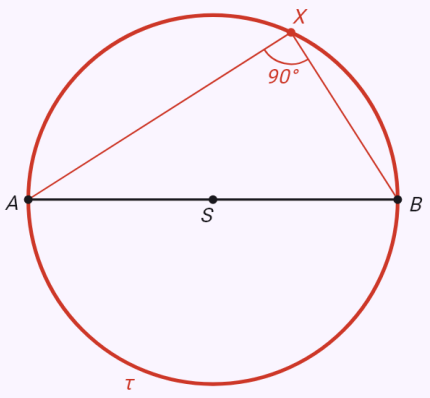
Výsledok

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): podľa Talesovej vety je uhol AXB pravý práve vtedy, keď X leží na kružnici s priemerom AB (okrem bodov A a B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – narysujeme úsečku AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – stred S úsečky AB (priesečník jej osi s úsečkou).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – Talesova kružnica τ so stredom S a polomerom $\frac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; bez bodov A a B je to hľadaná množina.

Graf



Krok 3 z 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Body, z ktorých je úsečku 6 cm vidieť pod uhlom 60°.

Zadanie: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

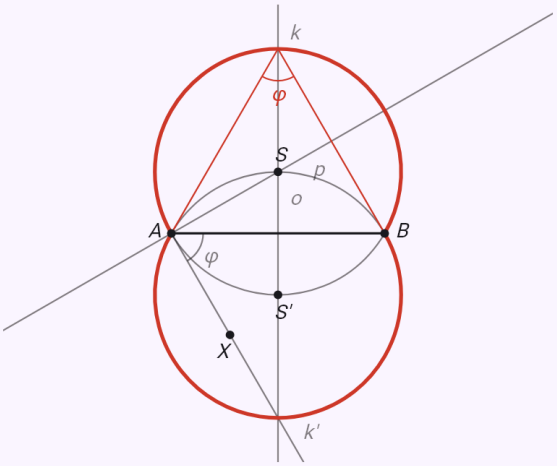
Výsledok

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$): body X, z ktorých je AB vidieť pod uhlom φ, ležia na dvoch oblúkoch súmerných podľa AB. Obvodový uhol nad tetivou AB sa rovná úsekovému uhlu, ktorý AB zviera s dotyčnicou v bode A – stred oblúka leží na osi AB a na kolmici na dotyčnicu v A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme úsečku AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – os o úsečky AB, zostrojená ako v úlohe „Os úsečky“.
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – zostrojíme uhol φ, jeho ramenom je polpriamka $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – kolmica p na polpriamku $\overrightarrow{AX}$ v bode A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – priesečník S
- 6. k; $k(S; |SA|)$ – kružnica k so stredom S a polomerom $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – kružnica k' súmerná s k podľa priamky AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – oblúky kružníc nad úsečkou AB (bez bodov A a B) sú hľadaná množina: z každého ich bodu je AB vidieť pod uhlom φ

Graf



Krok 8 z 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Dotyčnice z bodu vo vzdialenosti 5 cm ku kružnici s polomerom 3 cm.

Zadanie: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Výsledok

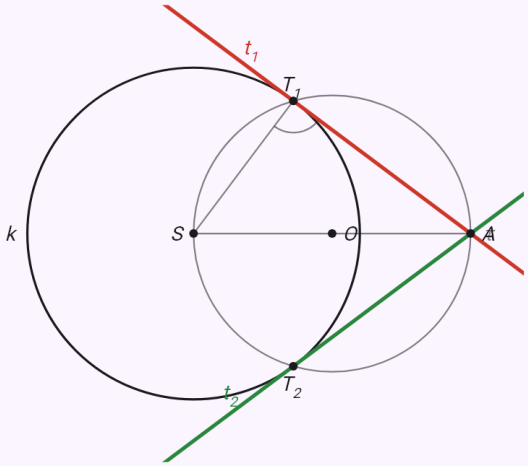
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\mathrm{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Postup

- Rozbor ($r = 3\,\mathrm{cm},\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$): dotyčnica je kolmá na polomer v bode dotyku T, uhol STA je teda pravý. Body dotyku preto ležia na Talesovej kružnici nad úsečkou SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\mathrm{cm})$ – kružnica k so stredom S a polomerom $3\,\mathrm{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$ – bod A vo vzdialenosti $5\,\mathrm{cm}$ od S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – stred O úsečky SA (priesečník jej osi s úsečkou).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – Talesova kružnica τ nad úsečkou SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – body dotyku T_1, T_2 sú priesečníky kružníc k a τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – dotyčnice t_1, t_2 z bodu A
- Diskusia: bod A leží mimo kružnice – vedú z neho dve dotyčnice, súmerné podľa priamky SA.

Graf



Krok 6 z 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Štyri spoločné dotyčnice dvoch kružníc, ktoré ležia mimo seba.

Zadanie: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

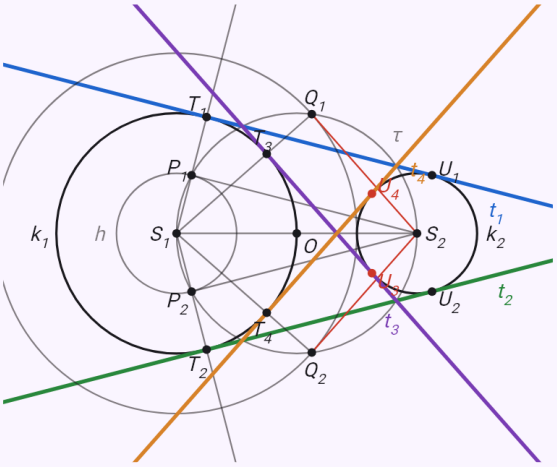
Výsledok

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): ak posunieme vonkajšiu dotyčnicu rovnobežne o menší polomer k stredom, dotýka sa pomocnej kružnice so stredom väčšej kružnice a polomerom $|r_1 - r_2|$ a prechádza stredom menšej. Pri vnútornej dotyčnici má pomocná kružnica polomer $r_1 + r_2$. Dotyčnice zo stredu k pomocnej kružnici zostrojíme pomocou Talesovej kružnice nad spojnicou stredov.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – kružnica k_1 so stredom S_1 a polomerom $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – kružnica k_2 so stredom S_2 a polomerom $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – stred O úsečky S_1S_2 (priesečník jej osi s úsečkou).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – Talesova kružnica τ nad úsečkou S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – pomocná kružnica h so stredom S_1 a polomerom rovným rozdielu polomerov, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – priesečníky P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – body dotyku T_1, T_2 sú priesečníky $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ s kružnicou k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – vonkajšie spoločné dotyčnice t_1, t_2 vedené bodmi T_1, T_2 rovnobežne s S_2P_1, S_2P_2; dotýkajú sa aj druhej kružnice.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – pomocná kružnica h' so stredom S_1 a polomerom rovným súčtu polomerov, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – priesečníky Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – body dotyku T_3, T_4 sú priesečníky S_1Q_1, S_1Q_2 s kružnicou k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – vnútorné spoločné dotyčnice t_3, t_4 vedené bodmi T_3, T_4 rovnobežne s S_2Q_1, S_2Q_2
- Diskusia: kružnice ležia mimo seba ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – majú dve vonkajšie a dve vnútorné spoločné dotyčnice.

Graf



Krok 12 z 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Kružnica s polomerom 2 cm dotýkajúca sa ramien uhla 60°.

Zadanie: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Výsledok

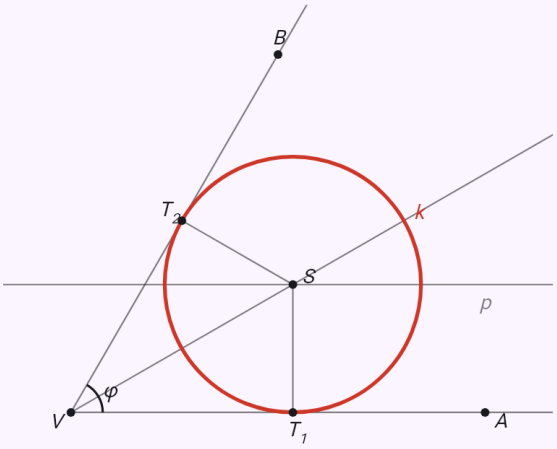
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($\varphi = 60°,\ r = 2\,\text{cm}$): stred kružnice má od oboch ramien vzdialenosť r – leží na osi uhla a zároveň na rovnobežke s ramenom vo vzdialenosti r. Body dotyku sú päty kolmíc zo stredu na ramená.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60°$ – narysujeme uhol $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – os o uhla $\angle AVB$ (zostrojená ako v úlohe „Os uhla“); jej body majú od oboch ramien rovnakú vzdialenosť.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – rovnobežka p s VA vo vzdialenosti r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – priesečník S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – body dotyku T_1, T_2 sú päty kolmíc zo stredu S na VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – hľadaná kružnica k so stredom S a polomerom $2\,\text{cm}$
- Diskusia: os uhla a rovnobežka sa pretnú vždy v jedinom bode – úloha má jedno riešenie.

Graf



Krok 6 z 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Kružnica bodom dotýkajúca sa priamky – dve riešenia.

Zadanie: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Výsledok

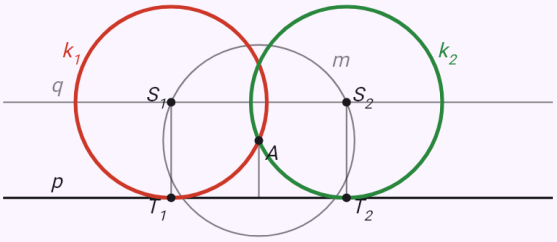
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): stred kružnice má od priamky p vzdialenosť r, leží teda na rovnobežke q s p vo vzdialenosti r na strane bodu A. Od bodu A má tiež vzdialenosť r, leží teda aj na kružnici m(A; r).
- 1. p – ľubovoľná priamka p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – bod A vo vzdialenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – rovnobežka q s p vo vzdialenosti r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – kružnica m so stredom A a polomerom $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – priesečníky S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – body dotyku T_1, T_2 sú päty kolmíc zo stredu S_1, S_2 na p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – hľadané kružnice k_1, k_2 so stredmi S_1, S_2 a polomerom $2{,}5\,\text{cm}$
- Diskusia: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – kružnica m pretína rovnobežku q v dvoch bodoch, úloha má dve riešenia.

Graf



Krok 7 z 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Kružnica dvoma bodmi s daným polomerom – dve riešenia súmerné podľa AB.

Zadanie: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Výsledok

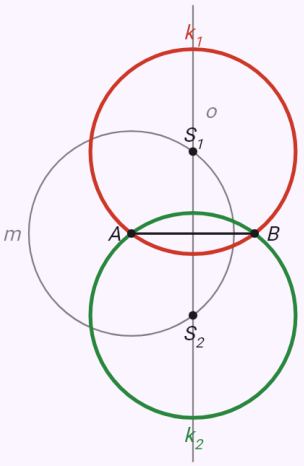
$$k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\mathrm{cm},\ r = 5\,\mathrm{cm}$): stred kružnice má od A aj od B vzdialenosť r – leží na osi úsečky AB a na kružnici m(A; r).
- 1. AB; $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – narysujeme úsečku AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – os o úsečky AB, zostrojená ako v úlohe „Os úsečky“.
- 3. m; $m(A;\,5\,\mathrm{cm})$ – kružnica m so stredom A a polomerom $5\,\mathrm{cm}$
- 4. S_1, S_2; $S_1, S_2 \in o \cap m$ – priesečníky S_1, S_2
- 5. k_1, k_2; $k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$ – hľadané kružnice k_1, k_2 so stredmi S_1, S_2 a polomerom $5\,\mathrm{cm}$
- Diskusia: $|AB| = 6\,\mathrm{cm} < 2r = 10\,\mathrm{cm}$ – kružnica m pretína os v dvoch bodoch, úloha má dve riešenia súmerné podľa AB.

Graf



Krok 5 z 5

5. k_1, k_2; $k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Vrchol C, z ktorého je AB vidieť pod uhlom 60°, vo výške 3 cm – oblúky a rovnobežky.

Zadanie: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Výsledok

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

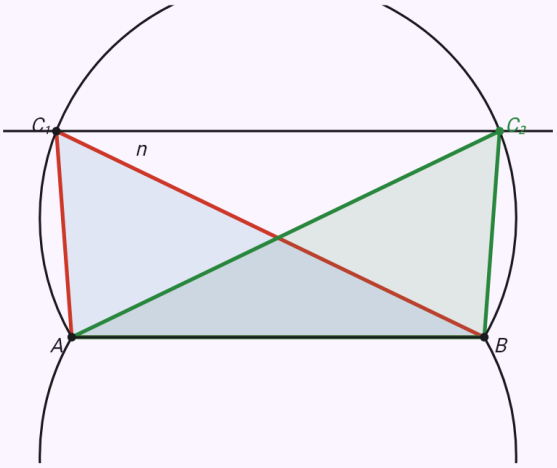
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): náčrt hotového trojuholníka ABC, zadané vzťahy sú zvýraznené. Každý z dvoch vzťahov určuje množinu bodov, na ktorej vrchol C leží – C je preto v ich prieniku.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme zadanú úsečku AB.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – body, z ktorých je úsečka AB vidieť pod uhlom 60°, ležia na dvoch oblúkoch m, m' súmerných podľa AB (zostrojených ako v úlohe „Množina vrcholov uhla“).
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – body vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od priamky AB ležia na dvoch rovnobežkách n, n' s ňou, po jednej na každej strane.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hľadané body sú priesečníky oboch množín.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v polrovine nad AB je počet spoločných bodov množín 2 – úloha má 2 riešení (v opačnej polrovine sú s nimi zhodné zrkadlové obrazy).

Graf



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Pomer |AC| : |BC| = 2 a |BC| = 3 cm – Apolloniova kružnica.

Zadanie: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

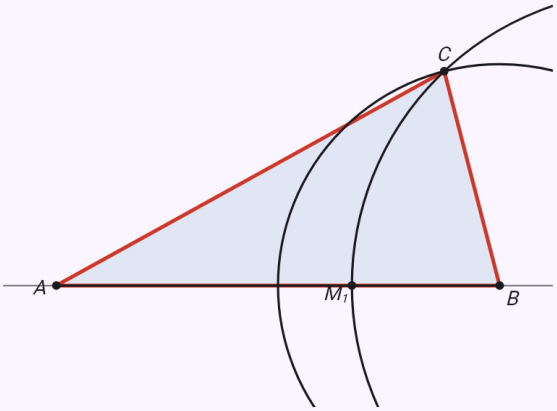
Výsledok

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Postup

- Rozbor ($|AB| = 6\,\text{cm}$): náčrt hotového trojuholníka ABC, zadané vzťahy sú zvýraznené. Každý z dvoch vzťahov určuje množinu bodov, na ktorej vrchol C leží – C je preto v ich prieniku.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – narysujeme zadanú úsečku AB.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – body, ktorých vzdialenosti od krajných bodov úsečky AB sú v pomere 2, ležia na Apolloniovej kružnici. Najprv zostrojíme body M_1 (vnútri úsečky) a M_2 (na jej predĺžení), ktoré delia AB v tomto pomere.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – Apolloniova kružnica m je Talesova kružnica nad priemerom M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – body vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od bodu B ležia na kružnici n so stredom B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – hľadaný bod je priesečníkom oboch množín.
- 6. $\triangle ABC$ – spojíme vrcholy.
- Diskusia: v polrovine nad AB majú množiny jeden spoločný bod – úloha má jedno riešenie (v opačnej polrovine je s ním zhodný zrkadlový obraz).

Graf



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Body dotyku dotyčníc z bodu A – AX dotyčnicou a X na kružnici.

Zadanie: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

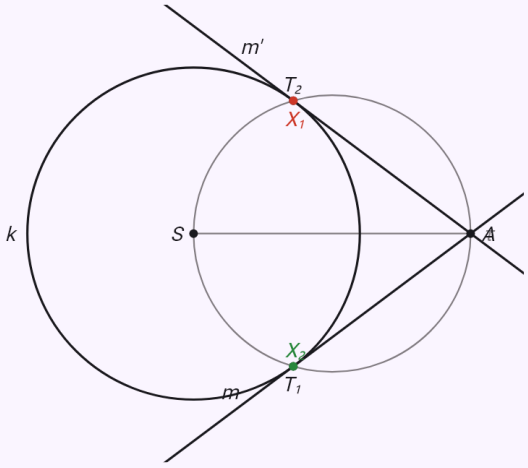
Výsledok

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm}, \ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm}, \ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$): náčrt so zadanou kružnicou k, bodom A a hľadaným bodom X, zadané vzťahy sú zvýraznené. Každý z dvoch vzťahov určuje množinu bodov – X leží v ich prieniku.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – narysujeme zadanú kružnicu k a bod A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – priamka AX má byť dotyčnicou ku k: body dotyku ležia na Talesovej kružnici τ nad priemerom SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ pretne k v bodoch dotyku T_1, T_2, dotyčnice m, m' nimi prechádzajú.
- Bod X má ležať na kružnici k – množinou bodov je samotná kružnica k, je už narysovaná.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – hľadané body sú priesečníky oboch množín.
- Diskusia: počet spoločných bodov množín je 2 – úloha má 2 riešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Stredy kružníc s polomerom 1 cm, ktoré sa dotýkajú kružnice k aj priamky p.

Zadanie: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

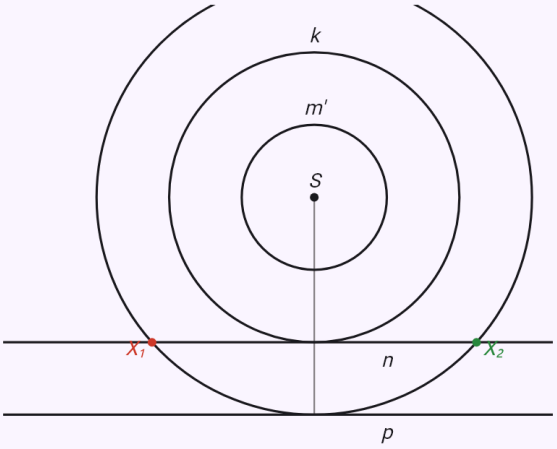
Výsledok

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$): náčrt so zadanou kružnicou k, priamkou p a hľadaným bodom X, zadané vzťahy sú zvýraznené. Každý z dvoch vzťahov určuje množinu bodov – X leží v ich prieniku.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – narysujeme zadanú kružnicu k a priamku p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – kružnica s polomerom $1\,\text{cm}$ sa dotýka k zvonka, keď má stred vo vzdialenosti r + ϱ od S, a zvnútra vo vzdialenosti |r − ϱ|: stredy ležia na kružniciach m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – body vo vzdialenosti $1\,\text{cm}$ od priamky p ležia na dvoch rovnobežkách n, n' s ňou, po jednej na každej strane.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hľadané body sú priesečníky oboch množín.
- Diskusia: počet spoločných bodov množín je 2 – úloha má 2 riešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Stredy kružníc s polomerom 1,5 cm dotýkajúcich sa dvoch rôznobežiek – štyri riešenia.

Zadanie: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

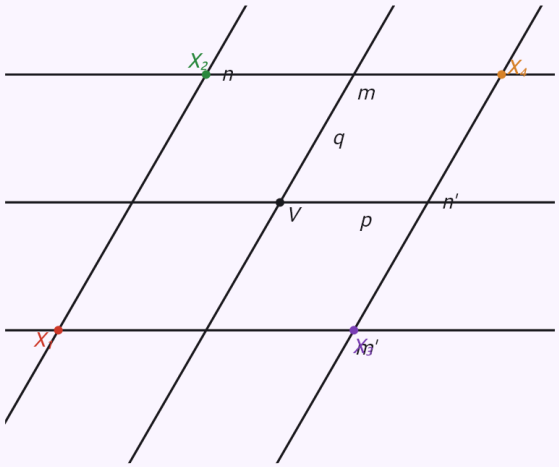
Výsledok

$$X_1:\ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2:\ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3:\ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4:\ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($|\angle(p,q)| = 60°$): náčrt so zadanými priamkami p, q a hľadaným bodom X, zadané vzťahy sú zvýraznené. Každý z dvoch vzťahov určuje množinu bodov – X leží v ich prieniku.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60°$ – narysujeme zadané priamky p, q pretínajúce sa v bode V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – body vo vzdialenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od priamky p ležia na dvoch rovnobežkách m, m' s ňou, po jednej na každej strane.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – body vo vzdialenosti $1{,}5\,\text{cm}$ od priamky q ležia na dvoch rovnobežkách n, n' s ňou, po jednej na každej strane.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – hľadané body sú priesečníky oboch množín.
- Diskusia: počet spoločných bodov množín je 4 – úloha má 4 riešení.

Graf



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Kružnica k(S; 2 cm), AC dotyčnica, k opísaná ABD, D stred BC, |AC| = 2|AD| – vyjde |AD| = r√7/2.

Zadanie: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)

Výsledok

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

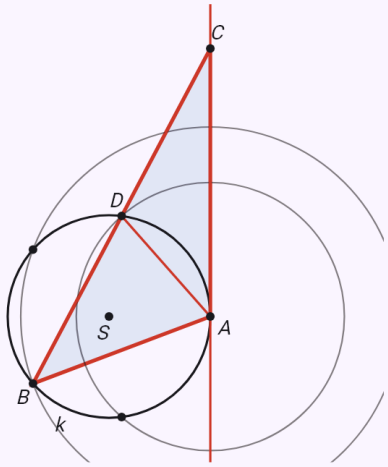
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Postup

- Rozbor ($k(S;\,2\,\text{cm})$): vzťahy zapíšeme v súradniciach. Stred S kružnice dáme do začiatku a bod A na kladnú polos x, A = [r; 0] – otočením možno každé riešenie do tejto polohy dostať. Neznáme sú súradnice ostatných bodov.
- Bod leží na kružnici k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Bod leží na kružnici k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Bod leží na kružnici k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Stred úsečky ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B+x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B+y_C}{2}$
- Priamka $\overleftrightarrow{AC}$ je dotyčnicou ku k – jej vzdialenosť od stredu S je r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Pomer dĺžok ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ je výsledný útvar – jeho vrcholy nesmú ležať na jednej priamke.
- Sústavu rovníc vyriešime presne (bez zaokrúhlenia). Počet rôznych polôh bodov, ktoré jej vyhovujú (bez splývajúcich bodov): 2, až na zhodnosť 1
- Skúška: dosadením riešenia do pôvodných vzťahov platia všetky.
- Z riešenia: mocnosť bodu C ku kružnici k – druhá mocnina dotyčnice sa rovná súčinu úsekov sečnice: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Z riešenia: úsekový uhol dotyčnice a tetivy AD sa rovná obvodovému uhlu nad touto tetivou: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41°$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – narysujeme zadanú kružnicu k.
- 2. A; $A \in k$ – ľubovoľný bod A kružnice k.
- Dĺžku $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ zostrojíme ako odvesnu pravouhlého trojuholníka s danou preponou: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – bod B je jedným z priesečníkov oboch množín (počet priesečníkov: 2).
- Dĺžku $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ zostrojíme ako odvesnu pravouhlého trojuholníka s danou preponou: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – bod D je jedným z priesečníkov oboch množín (počet priesečníkov: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – bod C súmerný s B podľa stredu D (stredová súmernosť).
- 6. $\triangle ABC$ – hotový útvar.
- Diskusia: počet polôh bodov, ktoré vzťahom vyhovujú: 2; všetky sú navzájom zhodné (súmerné) – až na zhodnosť má úloha jedno riešenie.

Graf



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Pravouhlý trojuholník bez kružnice: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, pravý uhol pri C.

Zadanie: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

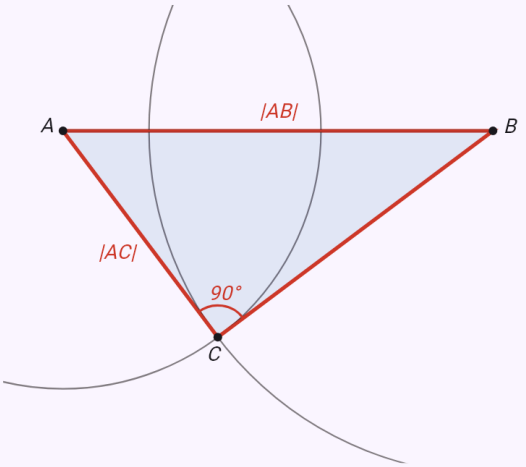
Výsledok

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor: vzťahy zapíšeme v súradniciach. Bod A dáme do začiatku a bod B na kladnú polos x – posunutím a otočením možno každé riešenie do tejto polohy dostať. Neznáme sú súradnice ostatných bodov.
- Dĺžka úsečky ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- Dĺžka úsečky ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- Uhol ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ je výsledný útvar – jeho vrcholy nesmú ležať na jednej priamke.
- Sústavu rovníc vyriešime presne (bez zaokrúhlenia). Počet rôznych polôh bodov, ktoré jej vyhovujú (bez splývajúcich bodov): 2, až na zhodnosť 1
- Skúška: dosadením riešenia do pôvodných vzťahov platia všetky.
- 1. A – ľubovoľný bod A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – bod B vo vypočítanej vzdialenosti od A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – bod C je jedným z priesečníkov oboch množín (počet priesečníkov: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – hotový útvar.
- Diskusia: počet polôh bodov, ktoré vzťahom vyhovujú: 2; všetky sú navzájom zhodné (súmerné) – až na zhodnosť má úloha jedno riešenie.

Graf



Krok 4 z 4
4. $\triangle ABC$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez kocky – protiľahlé steny v rovnobežkách.

Zadanie: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Výsledok

$$XYZK$$

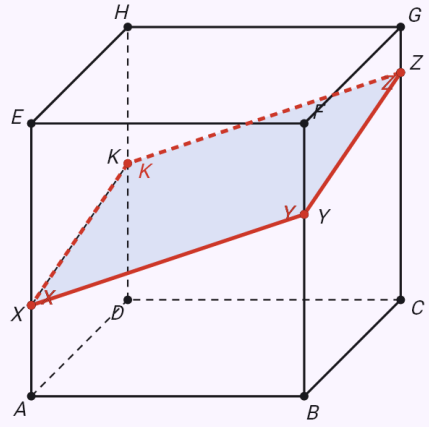
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách podľa troch pravidiel: dva body rezu v tej istej stene spojíme; rovnobežné steny pretne rovina rezu v rovnobežných úsečkách; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narysujeme kocku $ABCDEFGH$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – bod X na hrane AE vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – bod Y na hrane BF vo vzdialenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – bod Z na hrane CG vo vzdialenosti $5\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. XY – body X, Y ležia v stene $ABFE$, spojíme ich.
- 6. YZ – body Y, Z ležia v stene $BCGF$, spojíme ich.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – stena $CDHG$ je rovnobežná so stenou $ABFE$, rez ju pretne v rovnobežke s YX vedenej bodom Z; tá pretne hranu DH v bode K
- 8. XK – body X, K ležia v stene $ADHE$, spojíme ich.
- 9. $XYZK$ – rezom je štvoruholník $XYZK$

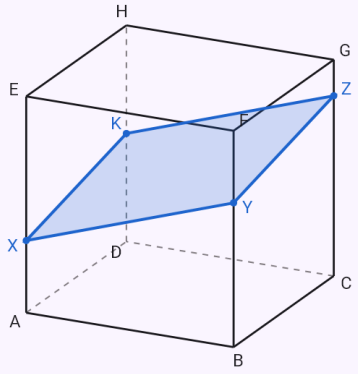
Graf



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Pravidelný šesťuholník stredmi hrán – pomocný bod T_1.

Zadanie: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Výsledok

$$XYMZKL$$

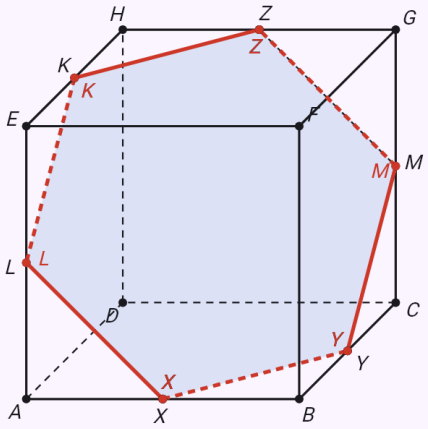
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách podľa troch pravidiel: dva body rezu v tej istej stene spojíme; rovnobežné steny pretne rovina rezu v rovnobežných úsečkách; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narysujeme kocku $ABCDEFGH$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – bod X na hrane AB vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hrane BC vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – bod Z na hrane GH vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu G
- 5. XY – body X, Y ležia v stene $ABCD$, spojíme ich.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – stena $EFGH$ je rovnobežná so stenou $ABCD$, rez ju pretne v rovnobežke s XY vedenej bodom Z; tá pretne hranu EH v bode K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – predĺžime stranu ZK a hranu EF; ich priesečník T_1 leží v rovine steny $EFGH$ aj steny $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – priamka XT_1 leží v rovine steny $ABFE$; pretne hranu AE v bode L
- 9. KL – body K, L ležia v stene $ADHE$, spojíme ich.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – stena $CDHG$ je rovnobežná so stenou $ABFE$, rez ju pretne v rovnobežke s XL vedenej bodom Z; tá pretne hranu CG v bode M
- 11. YM – body Y, M ležia v stene $BCGF$, spojíme ich.

- 12. $XYMZKL$ – rezom je šesťuholník $XYMZKL$

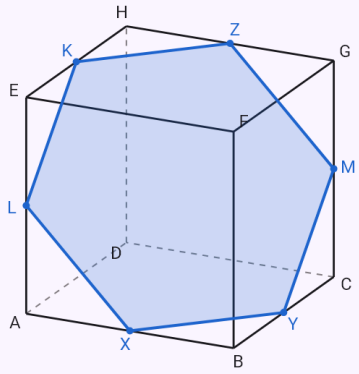
Graf



Krok 12 z 12
12. $XYMZKL$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Rez ihlana rovinou stredov dvoch bočných hrán a podstavnej hrany.

Zadanie: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Výsledok

$XYKZL$

$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$

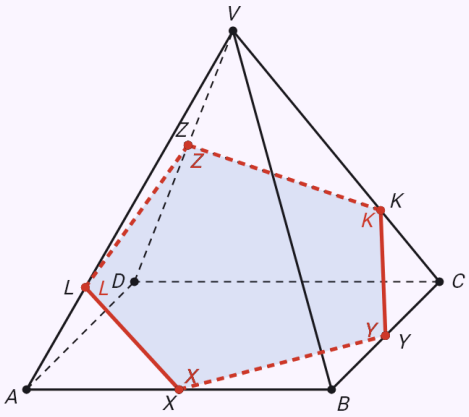
$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách: dva body rezu v tej istej stene spojíme; ak je strana rezu rovnobežná s hranou inej steny, pretne rovina túto stenu v rovnobežke s ňou; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDV$; $a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – narysujeme pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. X; $X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – bod X na hrane AB vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. Y; $Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hrane BC vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. Z; $Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – bod Z na hrane DV vo vzdialenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu D
- 5. XY – body X, Y ležia v stene $ABCD$, spojíme ich.
- 6. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – predĺžime stranu XY a hranu CD; ich priesečník T_1 leží v rovine steny $ABCD$ aj steny CDV
- 7. ZK; $K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – priamka ZT_1 leží v rovine steny CDV; pretne hranu CV v bode K
- 8. YK – body Y, K ležia v stene BCV, spojíme ich.
- 9. T_2; $T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – predĺžime stranu YK a hranu BV; ich priesečník T_2 leží v rovine steny BCV aj steny ABV
- 10. XL; $L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – priamka XT_2 leží v rovine steny ABV; pretne hranu AV v bode L
- 11. ZL – body Z, L ležia v stene DAV, spojíme ich.

- 12. $XYKZL$ – rezom je päťuholník $XYKZL$

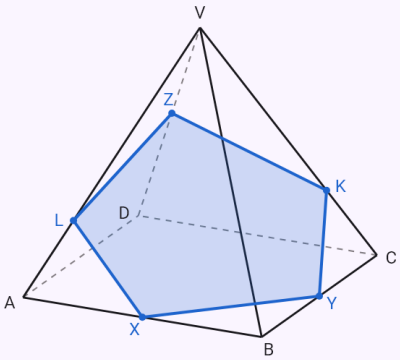
Graf



Krok 12 z 12
12. $XYKZL$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Bod na predĺžení hrany – Y 2 cm za vrcholom B.

Zadanie: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

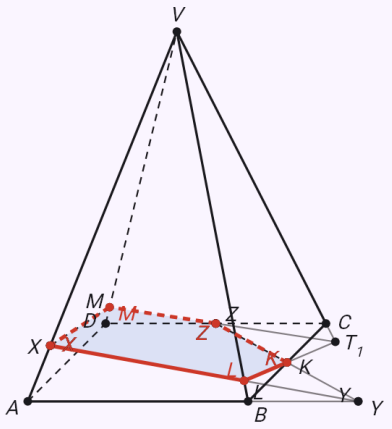
Výsledok

$$XLKZM$$
$$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$
$$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$
$$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách: dva body rezu v tej istej stene spojíme; ak je strana rezu rovnobežná s hranou inej steny, pretne rovina túto stenu v rovnobežke s ňou; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDV$; $a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – narysujeme pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. X; $X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – bod X na hrane AV vo vzdialenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 3. Y; $Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – bod Y na polpriamke AB vo vzdialenosti $6\,\text{cm}$ od vrcholu A, za vrcholom B – mimo telesa.
- 4. Z; $Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hrane CD vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. ZK; $ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – body YZ ležia v rovine steny $ABCD$; ich spojnica pretne stenu v úsečke ZK
- 6. XL; $XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – body XY ležia v rovine steny ABV; ich spojnica pretne stenu v úsečke XL
- 7. KL – body K, L ležia v stene BCV, spojíme ich.
- 8. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – predĺžime stranu KL a hranu CV; ich priesečník T_1 leží v rovine steny BCV aj steny CDV
- 9. ZM; $M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – priamka ZT_1 leží v rovine steny CDV; pretne hranu DV v bode M
- 10. XM – body X, M ležia v stene DAV, spojíme ich.
- 11. $XLKZM$ – rezom je päťuholník $XLKZM$

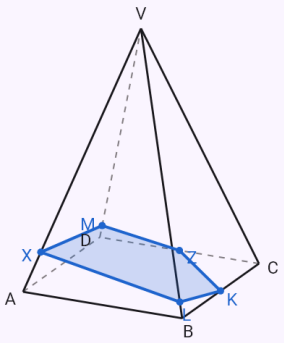
Graf



Krok 11 z 11
11. $XLKZM$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Bod vnútri telesa na telesovej uhlopriečke – pomocná zvislá rovina.

Zadanie: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Výsledok

$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$

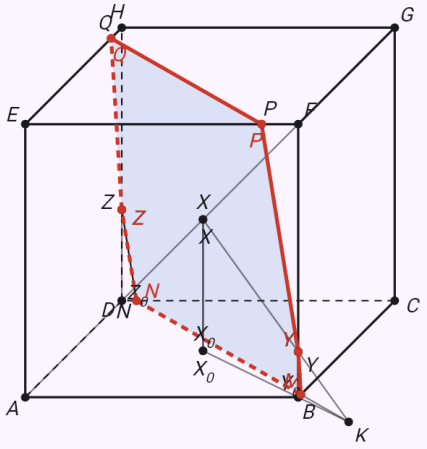
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$

$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách podľa troch pravidiel: dva body rezu v tej istej stene spojíme; rovnobežné steny pretne rovina rezu v rovnobežných úsečkách; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narysujeme kocku $ABCDEFGH$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – bod X na úsečke AG vo vzdialenosti $5\,\text{cm}$ od bodu A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – bod Y na hrane BF vo vzdialenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hrane DH vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – bod X leží vnútri telesa, preto použijeme pomocnú zvislú rovinu priamky XY: body premietneme do podstavy (X_0Y_0) a priesečník priamok XY a X_0Y_0 je bod K, v ktorom priamka XY pretína rovinu podstavy $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – bod X leží vnútri telesa, preto použijeme pomocnú zvislú rovinu priamky XZ: body premietneme do podstavy (X_0Z_0) a priesečník priamok XZ a X_0Z_0 je bod L, v ktorom priamka XZ pretína rovinu podstavy $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – body KL ležia v rovine steny $ABCD$; ich spojnica pretne stenu v úsečke MN
- 8. ZN – body Z, N ležia v stene $CDHG$, spojíme ich.
- 9. YM – body Y, M ležia v stene $BCGF$, spojíme ich.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – stena $ABFE$ je rovnobežná so stenou $CDHG$, rez ju pretne v rovnobežke s NZ vedenej bodom Y; tá pretne hranu EF v bode P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – stena $EFGH$ je rovnobežná so stenou $ABCD$, rez ju pretne v rovnobežke s MN vedenej bodom P; tá pretne hranu EH v bode Q
- 12. ZQ – body Z, Q ležia v stene $ADHE$, spojíme ich.
- 13. $QPYMNZ$ – rezom je šesťuholník $QPYMNZ$

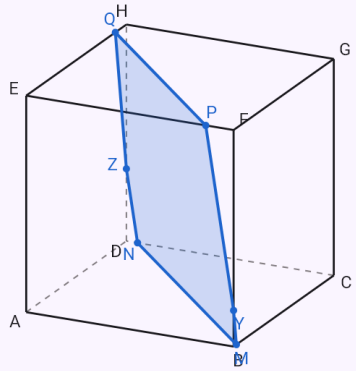
Graf



Krok 13 z 13
13. $QPYMNZ$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Bod X delí hranu AB v pomere 1 : 2.

Zadanie: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Výsledok

$XYZK$

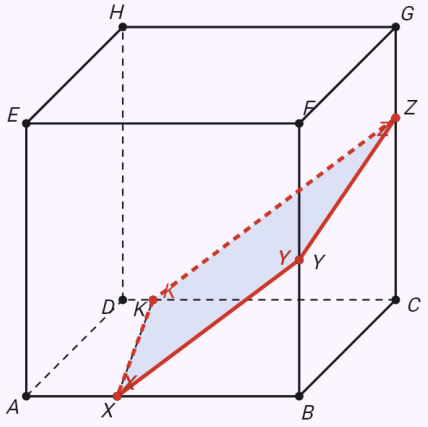
$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$

$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 6\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách podľa troch pravidiel: dva body rezu v tej istej stene spojíme; rovnobežné steny pretne rovina rezu v rovnobežných úsečkách; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – narysujeme kocku $ABCDEFGH$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – bod X delí úsečku AB v pomere $1 : 2$; tým je daný bod X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – bod Y na hrane BF vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – bod Z na hrane CG vo vzdialenosti $4\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 5. XY – body X, Y ležia v stene $ABFE$, spojíme ich.
- 6. YZ – body Y, Z ležia v stene $BCGF$, spojíme ich.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – stena $CDHG$ je rovnobežná so stenou $ABFE$, rez ju pretne v rovnobežke s XY vedenej bodom Z; tá pretne hranu CD v bode K
- 8. XK – body X, K ležia v stene $ABCD$, spojíme ich.
- 9. $XYZK$ – rezom je štvoruholník $XYZK$

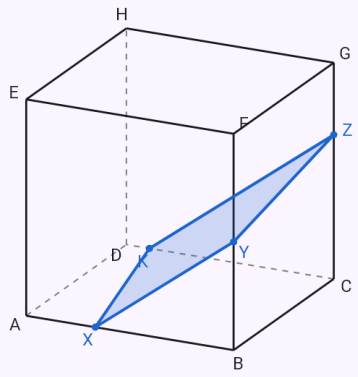
Graf



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Rez pravidelného šesťbokého hranola – podstava najprv v skutočnej veľkosti.

Zadanie: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

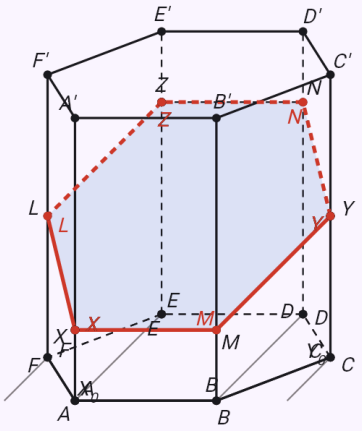
Výsledok

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Postup

- Rozbor ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách podľa troch pravidiel: dva body rezu v tej istej stene spojíme; rovnobežné steny pretne rovina rezu v rovnobežných úsečkách; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – bokom narysujeme podstavu $ABCDEF$ v skutočnej veľkosti: pravidelný šesťuholník so stranou a, strana AB leží na osi x (body A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – z vrcholov C, D, E, F vedieme kolmice na priamku AB; päty kolmíc prenesieme na os x bez zmeny a z nich nanesieme pod uhlom 45° polovicu dĺžky kolmice (hĺbku) – vznikne podstava $ABCDEF$ vo voľnom rovnobežnom premietaní.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – narysujeme pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – bod X na hrane AA' vo vzdialenosti $1\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – bod Y na hrane CC' vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – bod Z na hrane EE' vo vzdialenosti $3\,\text{cm}$ od vrcholu E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – body XY neležia v tej istej stene, preto použijeme pomocnú zvislú rovinu priamky XY: body premietneme do podstavy (X_0Y_0) a priesečník priamok XY a X_0Y_0 je bod K, v ktorom priamka XY pretína rovinu podstavy $ABCDEF$
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – body ZK ležia v rovine steny $EFF'E'$; ich spojnica pretne stenu v úsečke ZL
- 9. XL – body X, L ležia v stene $FAA'F'$, spojíme ich.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – stena $BCC'B'$ je rovnobežná so stenou $EFF'E'$, rez ju pretne v rovnobežke s LZ vedenej bodom Y; tá pretne hranu BB' v bode M
- 11. XM – body X, M ležia v stene $ABB'A'$, spojíme ich.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – stena $CDD'C'$ je rovnobežná so stenou $FAA'F'$, rez ju pretne v rovnobežke s XL vedenej bodom Y; tá pretne hranu DD' v bode N
- 13. ZN – body Z, N ležia v stene $DEE'D'$, spojíme ich.
- 14. $XMYNZL$ – rezom je šesťuholník $XMYNZL$

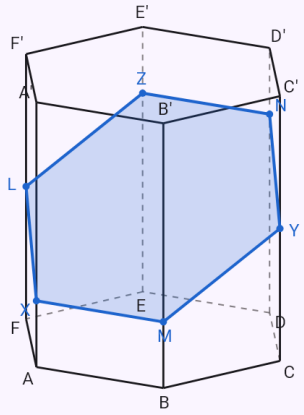
Graf



Krok 14 z 14
14. $XMYNZL$

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Rez pravidelného štvorstena stredmi troch hrán.

Zadanie: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Výsledok

XYZ

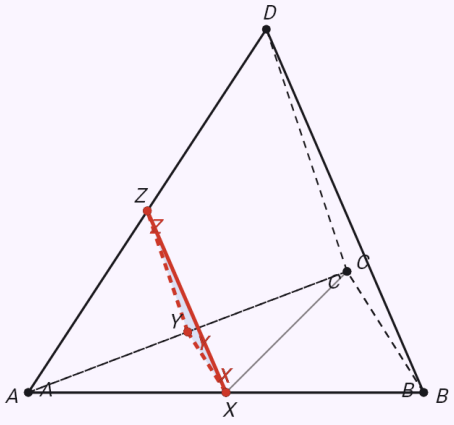
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Postup

- Rozbor ($a = 4\,\text{cm}$): rovina rezu je určená bodmi X, Y, Z. Rez zostrojíme po stranách: dva body rezu v tej istej stene spojíme; ak je strana rezu rovnobežná s hranou inej steny, pretne rovina túto stenu v rovnobežke s ňou; priamku strany rezu predĺžime do priesečníka s priamkou hrany – ten leží v rovinách oboch stien pri tejto hrane.
- 1. $ABC;\ a = 4\,\text{cm}$ – bokom narysujeme podstavu ABC v skutočnej veľkosti: pravidelný trojuholník so stranou a, strana AB leží na osi x (body A_0, B_0, …).
- 2. $ABC;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – z vrcholov C vedieme kolmice na priamku AB; päty kolmíc prenesieme na os x bez zmeny a z nich nanesieme pod uhlom 45° polovicu dĺžky kolmice (hĺbku) – vznikne podstava ABC vo voľnom rovnobežnom premietaní.
- 3. $ABCD;\ a = 4\,\text{cm}$ – narysujeme pravidelný štvorsten $ABCD$ vo voľnom rovnobežnom premietaní (hĺbka pod uhlom 45°, skrátená na polovicu), neviditeľné hrany čiarkovane.
- 4. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – bod X na hrane AB vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 5. $Y;\ Y \in AC,\ |AY| = 2\,\text{cm}$ – bod Y na hrane AC vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 6. $Z;\ Z \in AD,\ |AZ| = 2\,\text{cm}$ – bod Z na hrane AD vo vzdialenosti $2\,\text{cm}$ od vrcholu A
- 7. XY – body X, Y ležia v stene ABC, spojíme ich.
- 8. XZ – body X, Z ležia v stene ABD, spojíme ich.
- 9. YZ – body Y, Z ležia v stene CAD, spojíme ich.
- 10. XYZ – rezom je trojuholník XYZ

Graf

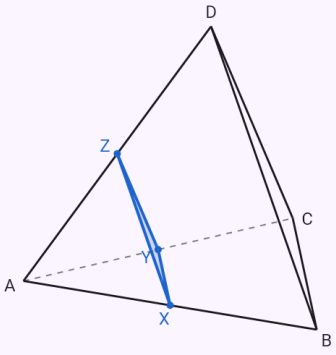


Krok 10 z 10

10. XYZ

Rozbor ukazuje náčrt hotovej konštrukcie so zadanými prvkami. Šípkami potom prejdete konštrukciu krok po kroku – prvky pridané v danom kroku sú zvýraznené.

Rez v priestore – otáčajte prstom



Známe obmedzenia

- Zatiaľ trojuholník (strany, uhly, výška a ťažnica k zadanej strane, polomery r a ϱ v uvedených kombináciách), štyri základné množiny bodov, päť úloh na kružnice a dotyčnice, štvoruholníky v kombináciách z nápovedy formulára a rezy kocky, kvádra, pravidelných hranolov a ihlanov (podstava s 3 až 6 stranami) a pravidelného štvorstena; všeobecný štvoruholník, výšky a ťažnice k iným stranám a ďalšie telesá pribudnú postupne.

- Pri úlohách so vzťahmi práve dva vzťahy k jednému z piatich zadaných útvarov; vzťahy medzi viacerými bodmi zadáte ako všeobecné vzťahy.
- Všeobecné vzťahy: najviac 8 bodov a 10 vzťahov, postup konštrukcie len z uvedeného katalógu obratov; rozbor typu „podobnosť trojuholníkov“ automaticky nevieme.
- Zadanie len formulárom – nie slovami ani z fotky.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace