Mathtrace – príručka

I. Rovnice, nerovnice a výrazy

Obsah

I. Rovnice, nerovnice a výrazy

1. Lineárne rovnice a nerovnice
2. Kvadratické rovnice
3. Rovnice vyšších stupňov
4. Rovnice s neznámou v menovateli
5. Iracionálne rovnice
6. Exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice
7. Absolútna hodnota
8. Goniometrické rovnice a nerovnice
9. Nerovnice a sústavy nerovníc
10. Sústavy rovníc
11. Rovnice a nerovnice s parametrom
12. Vyjadrenie neznámej zo vzorca
13. Úpravy výrazov
14. Deliteľnosť a prvočísla
15. Uhly v stupňoch, minútach a sekundách
16. Percentá, pomer a trojčlenka
17. Prevody jednotiek
18. Logika a množiny
19. Komplexné čísla

1. Lineárne rovnice a nerovnice

Lineárnu rovnicu aplikácia upraví tak, ako sa to robí v škole – roznásobí zátvorky, prevedie neznámu na jednu stranu a vydelí. Pri nerovnici stráži zmenu znamienka pri násobení záporným číslom a výsledok zapíše intervalom; graf ukáže obe strany ako priamky a riešenie vyznačí na osi x.

Čipom „Podrobný“ (alebo trvalo prepínačom „Podrobný postup rovníc“ na úvodnej obrazovke) ukáže postup tak, ako sa rovnice učia na základnej škole: na oboch stranách rovnakú úpravu (/ −4x, / :2), pod ňou medzikrok a výsledok. Neznámu prevádza na stranu, kde vyjde s kladným koeficientom.

Ukážky

Rovnica so zátvorkou.

Zadanie: `3(x - 2) = 2x + 5`

Výsledok

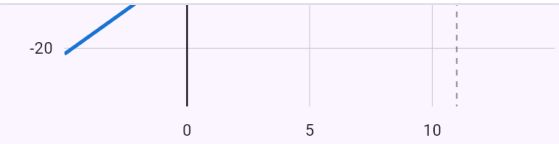
$x = 11$

Postup

- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x - 11 = 0$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $x = 11$

Graf





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Priesečníky grafov:

- $[11; 27]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Nerovnica – delenie záporným číslom obráti znamienko.

Zadanie: `2x - 3 < 5x + 6`

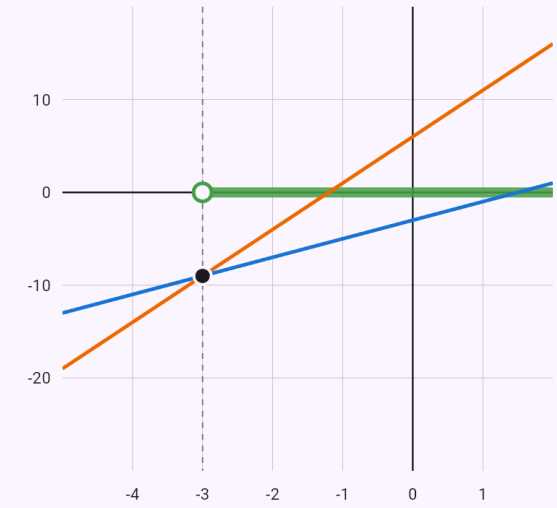
Výsledok

$$x \in (-3;\, \infty)$$

Postup

- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $-3x < 9$
- Vydelíme záporným číslom -3, znamienko nerovnosti sa obráti: $x > -3$

Graf



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $[-3; -9]$

Podrobný postup – rovnaká úprava na oboch stranách, rozpísaná ako v škole.

Zadanie: `4x + 3 = 6x + 7` Podrobný

Výsledok

$$x = -2$$

Postup

- Od oboch strán odčítame $4x$

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

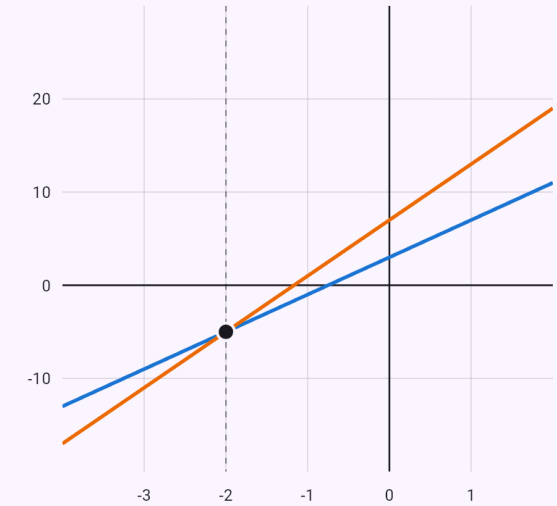
- Od oboch strán odčítame 7

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Obe strany vydelíme 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Graf



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Priesečníky grafov:

- $[-2; -5]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Zlomky – obe strany vynásobíme spoločným menovateľom.

Zadanie: `x/2 + x/3 = 10` Podrobný

Výsledok

$$x = 12$$

Postup

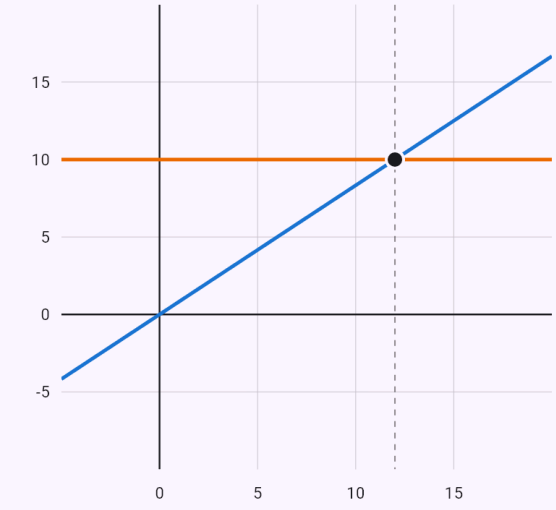
- Obe strany vynásobíme 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Obe strany vydelíme 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Graf



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Priesečníky grafov:

- $[12; 10]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

2. Kvadratické rovnice

Kvadratickú rovnicu aplikácia prevedie do tvaru ax² + bx + c = 0 a rieši ju diskriminantom a vzorcom; spozná aj dvojnásobný koreň. Ak rovnica nemá reálne riešenie, povie to a tlačidlom „Zobraziť komplexné riešenie“ ukáže komplexné korene.

Ukážky

Dva reálne korene.

Zadanie: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Výsledok

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

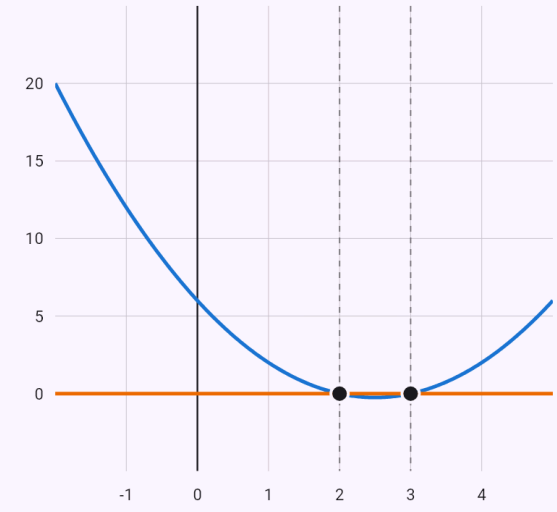
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Graf



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Priesečníky grafov:

● $[2; 0]$ ● $[3; 0]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Záporný diskriminant – komplexné korene.

Zadanie: `x^2 + 2x + 5 = 0` Zobraziť komplexné riešenie

Výsledok

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) Σ Bisekcia

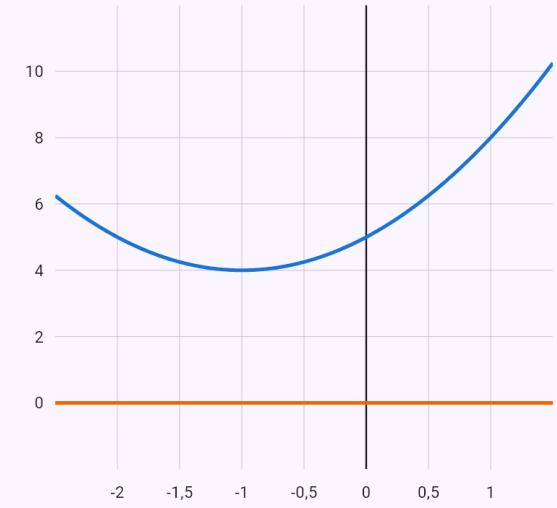
Σ Sečnice Σ Regula falsi

Σ Prostá iterácia

Postup

- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Diskriminant je záporný – v obore komplexných čísel:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Graf



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Grafy sa nepretínajú – rovnica nemá žiadne reálne riešenie.

3. Rovnice vyšších stupňov

Bikvadratickú rovnicu aplikácia prevedie substitúciou na kvadratickú. Všeobecnú rovnicu vyššieho stupňa rozloží Hornerovou schémou: korene hľadá medzi deliteľmi absolútneho člena a každý nájdený koreň z rovnice vydelí, kým nezostane kvadratická rovnica.

Ukážky

Bikvadratická rovnica substitúciou y = x².

Zadanie: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Výsledok

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

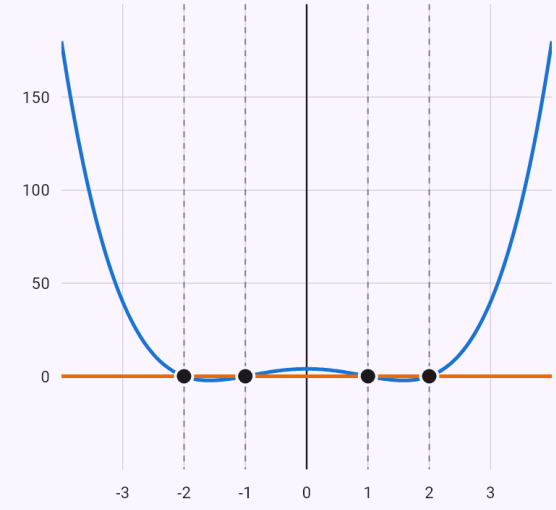
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Substitúciou $u = x^2$ prevedieme rovnicu na kvadratickú: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Vypočítame diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Dosadíme do vzorca pre korene: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graf



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Priesečníky grafov:

● $[-2; 0]$ ● $[-1; 0]$ ● $[1; 0]$ ● $[2; 0]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Hornerova schéma – korene medzi deliteľmi absolútneho člena.

Zadanie: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Výsledok

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

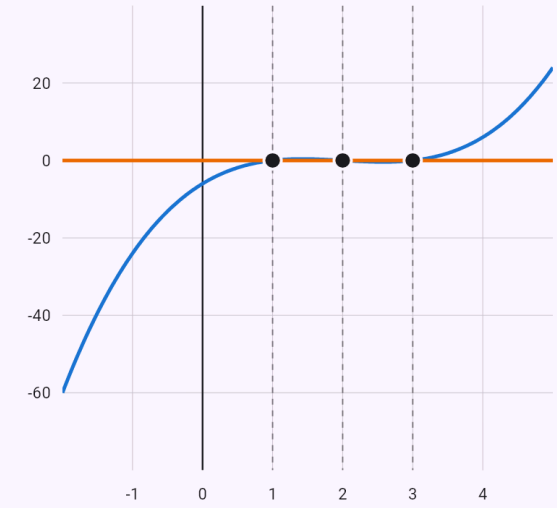
- Racionálne korene môžu byť len delitele absolútneho člena -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Hornerovou schémou overíme koreň $x = 1$ a vydelíme ním polynóm:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Vypočítame diskriminant:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

Graf



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Priesečníky grafov:

● $[1; 0]$ ● $[2; 0]$ ● $[3; 0]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

4. Rovnice s neznámou v menovateli

Pri rovnici s neznámou v menovateli aplikácia najprv stanoví podmienky, potom rovnicu vynásobí spoločným menovateľom a vyrieši. Korene porovná s podmienkami a tie, ktoré im nevyhovujú, vyradí.

Ukážky

Podmienky, spoločný menovateľ, kvadratická rovnica.

Zadanie: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Výsledok

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Podmienky: $x \neq 1$

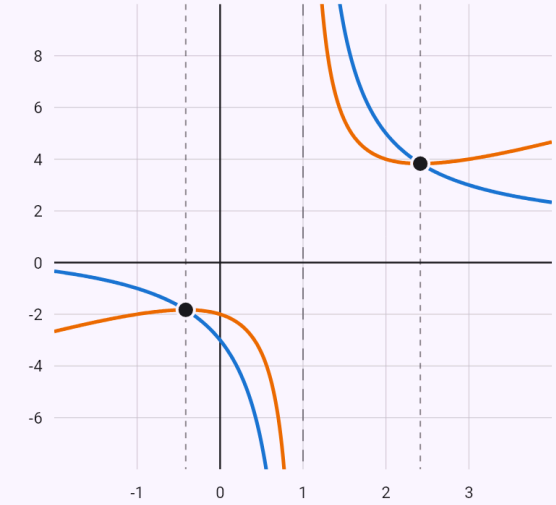
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $x \neq 1$
- Obe strany vynásobíme menovateľom $x - 1$:
  $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Koreň $x = 1 - \sqrt{2}$ podmienkam vyhovuje.
- Koreň $x = 1 + \sqrt{2}$ podmienkam vyhovuje.

Graf



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Priesečníky grafov:

- $\left[1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right]$
- $\left[1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

5. Iracionálne rovnice

Rovnicu s neznámou pod odmocninou aplikácia rieši osamostatnením odmocniny a umocnením. Umocnenie môže pridať korene, ktoré rovnicu nespĺňajú – preto vždy nasleduje skúška a nevyhovujúce korene vyradí.

Ukážky

Umocnenie a skúška – jeden z koreňov rovnicu nespĺňa.

Zadanie: `sqrt(x+5) = x - 1`

Výsledok

$x = 4$

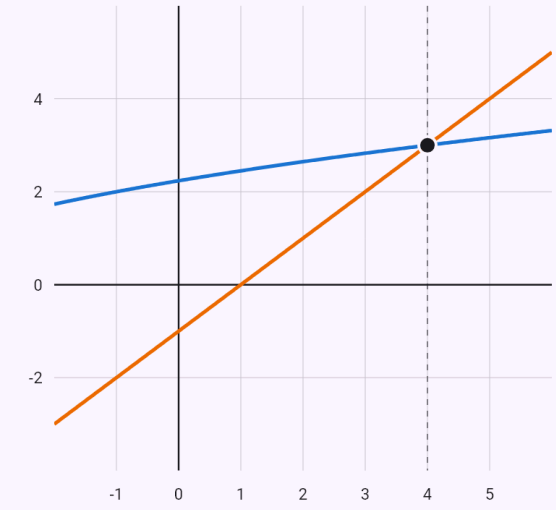
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Obe strany umocníme na druhú (nie je to ekvivalentná úprava, korene preto overíme skúškou): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Vypočítame diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Dosadíme do vzorca pre korene: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Skúška pre $x = -1$: Ľ = 2, P = -2, Ľ ≠ P – koreň nevyhovuje.
- Skúška pre $x = 4$: Ľ = 3, P = 3, Ľ = P – koreň vyhovuje.

Graf



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Priesečníky grafov:

- $[4; 3]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Známe obmedzenia

- Iracionálne nerovnice zatiaľ neriešime.

6. Exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice

Exponenciálnu rovnicu aplikácia rieši prevedením na rovnaký základ, logaritmovaním alebo substitúciou; logaritmickú zlúčením logaritmov podľa pravidiel a odlogaritmovaním, vždy s podmienkami. Nerovnice rieši cez monotónnosť – pri základe menšom ako 1 sa znamienko obráti. Logaritmus podielu, ktorého čitateľ alebo menovateľ nemôže byť záporný (odmocnina), rozpíše na rozdiel logaritmov ako v škole.

Rovnice s rôznymi základmi: $a^x + b^x = c^x$ so základmi z dvoch prvočísel ($25^x + 10^x = 4^x$) vydelí mocninou a substitúciou $t = (5/2)^x$ prevedie na kvadratickú; logaritmy rôznych základov prevedie na jeden ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logaritmy, ktorých základy sú mocninami jedného čísla ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), prevedie na jeden základ ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), rovnicu vynásobí a logaritmy zlúči. Logaritmus s neznámou v základe ($\log_x 8 = 3$) odlogaritmuje podľa definície ($x^3 = 8$) s podmienkami $x > 0$, $x \neq 1$. Rovnicu s neznámou v základe aj v exponente ($x^{(\log x)} = 100$) zlogaritmuje a vyrieši substitúciou $t = \log x$. Nerovnice so substitúciou $t = \log(x + 1)$ a sústavy logaritmických a exponenciálnych nerovníc rieši rovnako ako jednotlivé nerovnice – cez monotónnosť.

Rovnice a nerovnice s hyperbolickými funkciami prevedie podľa definície ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) na exponenciálne a vyrieši substitúciou $t = e^x$; argsinh $x = c$ vyrieši inverznou funkciou ($x = \sinh c$).

Ukážky

Substitúcia t = 2ˣ.

Zadanie: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Výsledok

$$x = 2$$

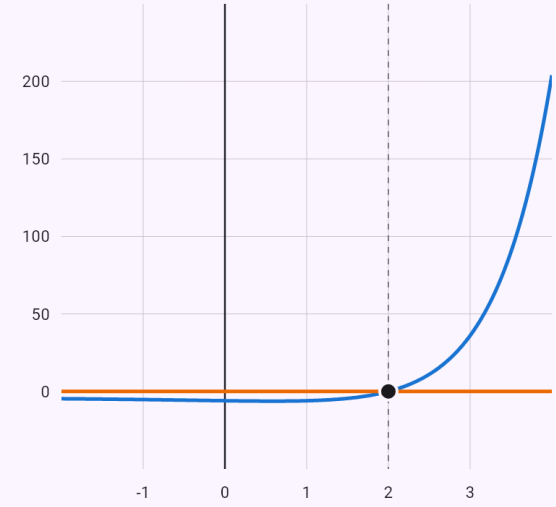
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Zavedieme substitúciu $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Rovnica $2^x = -1$ nemá reálne riešenie.
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graf



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Priesečníky grafov:

- $[2; 0]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Zlúčenie logaritmov, podmienky.

Zadanie: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Výsledok

$$x = 3$$

Podmienky: $x > 1$

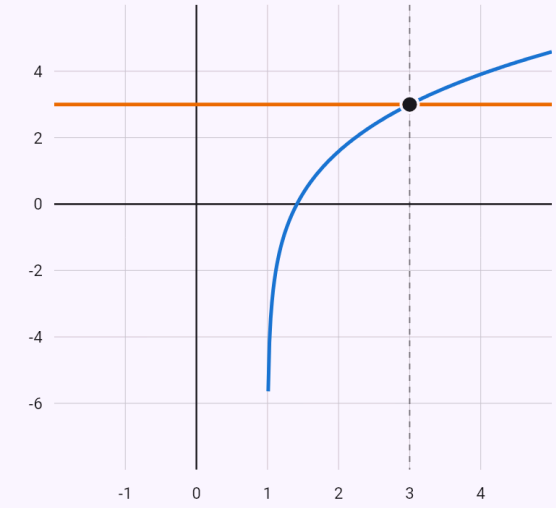
Riešiť numerickou metódou:

- Σ Dotyčnice (Newton)
- Σ Bisekcia
- Σ Sečnice
- Σ Regula falsi
- Σ Prostá iterácia

Postup

- Definičný obor – podmienky: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Podľa pravidiel na počítanie s logaritmami ich zlúčime: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Odlogaritmujeme: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - 9 = 0$
- Vypočítame diskriminant: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Dosadíme do vzorca pre korene: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$
- Koreň $x = -3$ nevyhovuje podmienke $x > 1$, nie je teda riešením.
- Koreň $x = 3$ podmienkam vyhovuje.

Graf



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$

$y = 3$

Priesečníky grafov:

- $[3; 3]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Rôzne základy – vydelíme 4^d a substitúcia $t = (5/2)^d$.

Zadanie: `25^d + 10^d = 4^d`

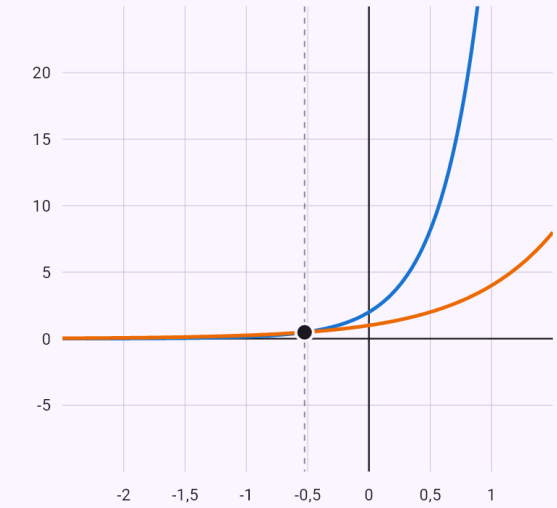
Výsledok

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Postup

- Rovnicu vydelíme kladným výrazom 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Zavedieme substitúciu $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Rovnica $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nemá reálne riešenie.
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Graf



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Priesečníky grafov:

- $\left[\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota d.

Základ menší ako 1 – znamienko nerovnosti sa obráti.

Zadanie: `(1/2)^x > 8`

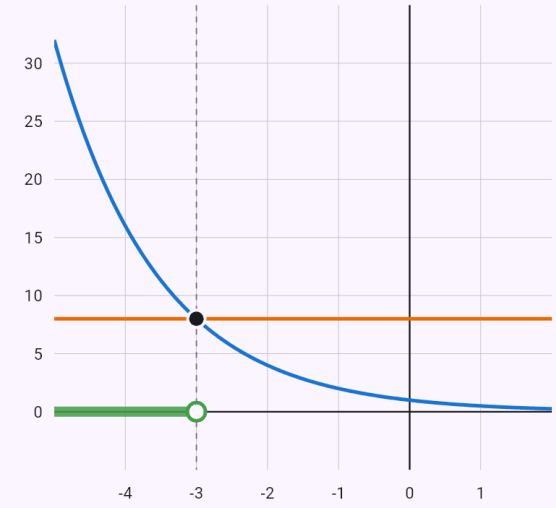
Výsledok

$$x \in (-\infty;\ -3)$$

Postup

- Obe strany zapíšeme ako mocniny s rovnakým základom: $2^{-x} > 2^3$
- Exponenciálna funkcia so základom 2 je rastúca – pre exponenty platí nerovnosť s rovnakým znamienkom: $-x > 3$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $-x > 3$
- Vydelíme záporným číslom -1, znamienko nerovnosti sa obráti: $x < -3$
- Riešením tejto nerovnice je $x \in (-\infty;\ -3)$

Graf



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $[-3; 8]$

Hyperbolický tangens z definície – substitúcia t = e²ˣ.

Zadanie: `tgh x = 1/2`

Výsledok

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Dosadíme definície

  $$\operatorname{tgh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

  $$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Zavedieme substitúciu $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Vyriešime: $t = 3$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

Neznáma v základe – podľa definície, koreň −1 nevyhovuje podmienkam.

Zadanie: `log_x (2x+3) = 2`

Výsledok

$$x = 3$$

Podmienky: $x > 0,\ x \neq 1$

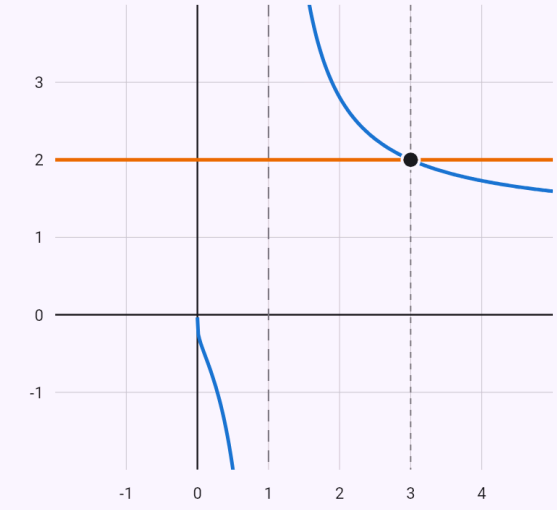
Riešiť numerickou metódou:

- Σ Dotyčnice (Newton)
- Σ Bisekcia
- Σ Sečnice
- Σ Regula falsi
- Σ Prostá iterácia

Postup

- Definičný obor – podmienky: $x > 0,\ x \neq 1$
- Odlogaritmujeme: $x^2 = 2x + 3$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- Koreň $x = -1$ nevyhovuje podmienke $x > 0,\ x \neq 1$, nie je teda riešením.
- Koreň $x = 3$ podmienkam vyhovuje.

Graf



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Priesečníky grafov:

- $[3; 2]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Neznáma v základe aj v exponente – zlogaritmujeme, substitúcia t = log x.

Zadanie: `x^(log x) = 100`

Výsledok

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Podmienky: $x > 0$

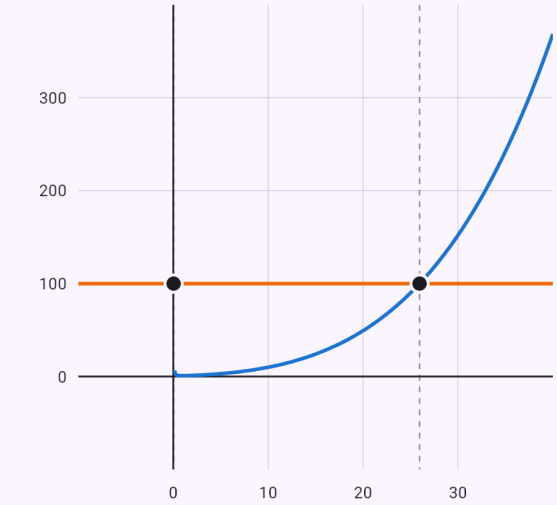
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Obe strany zlogaritmujeme:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Definičný obor – podmienky: $x > 0$
- Zavedieme substitúciu $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej:
  $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej:
  $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- Koreň $x = 10^{-\sqrt{2}}$ podmienkam vyhovuje.
- Koreň $x = 10^{\sqrt{2}}$ podmienkam vyhovuje.

Graf



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Priesečníky grafov:

- $\left[10^{-\sqrt{2}}; 100\right]$
- $\left[10^{\sqrt{2}}; 100\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Logaritmus podielu s odmocninou – rozpíšeme na rozdiel logaritmov.

Zadanie: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Výsledok

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Podmienky: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

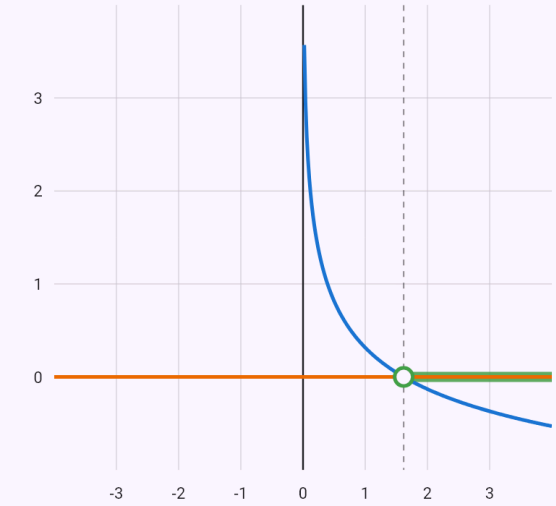
Postup

- Jedna časť podielu nemôže byť záporná, takže podiel je kladný práve vtedy, keď sú kladné obe – logaritmus podielu preto rozpíšeme na rozdiel logaritmov a menšiteľ prevedieme na druhú stranu: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Definičný obor – podmienky: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Logaritmická funkcia so základom 3 je rastúca – odlogaritmujeme a znamienko nerovnosti zostane: $\sqrt{x+1} < x$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Definičný obor – podmienky: $x \geq -1$
- Nulové body rozdelia číselnú os na intervaly: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- Riešením tejto nerovnice je $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

Graf



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right]$

Známe obmedzenia

- Logaritmy rôznych základov, ktoré nie sú mocninami jedného čísla ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$), rieši len numericky.
- Hyperbolické rovnice, ktoré vedú na rovnicu 4. stupňa v e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$), rieši len numericky; nerovnice s hyperbolometrickými funkciami zatiaľ nevieme.

7. Absolútna hodnota

Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou aplikácia rieši dvoma spôsobmi, ktoré vyberiete čipom: „Podľa definície“ – skratkou rozpísaním |a| = b alebo |a| < b – a „Nulové body“ – rozdelením číselnej osi na intervaly, na ktorých má každá absolútna hodnota pevné znamienko. Bez voľby zvolí vhodnejší spôsob sama.

Vnorené absolútne hodnoty (||x| − 2| = 1) rieši rovnako: podľa definície postupne zvonku dovnútra, metódou nulových bodov zvnútra von – najprv nulové body vnútorných absolútnych hodnôt, na každom intervale potom zvyšnú absolútnu hodnotu.

Nerovnicu |f| < |g| (na každej strane len absolútna hodnota) možno vyriešiť aj čipom „Umocnením“: obe strany sú nezáporné, takže ju umocní na druhú a vyrieši ako kvadratickú. Samotný výraz s absolútnymi hodnotami (|x − 1| + |x + 2|) zjednoduší po častiach – nulové body, tabuľka znamienok a na každom intervale výraz bez absolútnych hodnôt. Za čiarkou možno zadať interval (|x| − 2, x < 0): výraz sa potom zjednoduší len na ňom.

Ukážky

Jedna absolútna hodnota – rozpísanie podľa definície.

Zadanie: `|2x - 1| = 5`

Výsledok

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

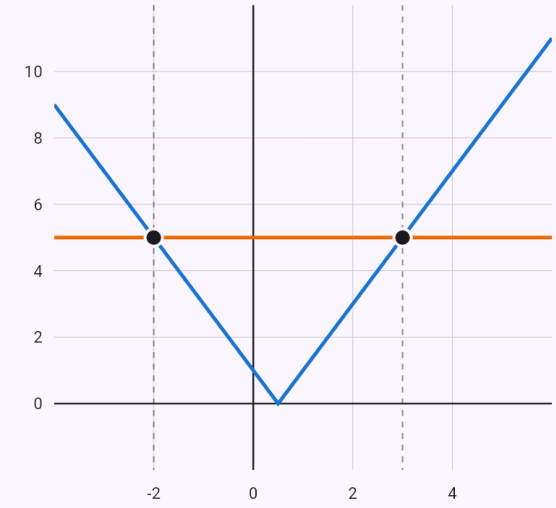
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Absolútna hodnota je len jedna a na druhej strane je číslo – stačí ju rozpísať podľa definície.
- Podľa definície platí $|2x - 1| = 5$ práve vtedy, keď $2x - 1 = 5$ alebo $2x - 1 = -5$
- Vyriešime: $2x - 1 = 5 \;\Rightarrow\; x = 3$
- Vyriešime: $2x - 1 = -5 \;\Rightarrow\; x = -2$

Graf



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Priesečníky grafov:

● $[-2; 5]$ ● $[3; 5]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Dve absolútne hodnoty – metóda nulových bodov.

Zadanie: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Výsledok

$$x \in (-3;\ 2)$$

Postup

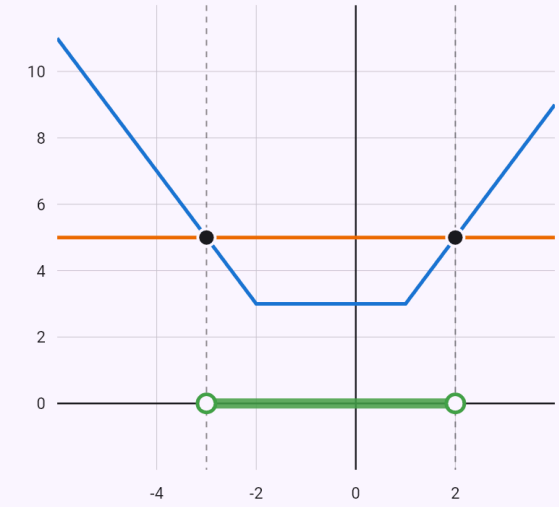
- Absolútne hodnoty odstránime metódou nulových bodov: rozdelia číselnú os na intervaly a na každom z nich majú výrazy v absolútnych hodnotách stále znamienko.
- Nulové body výrazov v absolútnych hodnotách: $x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1, \quad x + 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = -2$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\ -2)$	$\langle -2;\ 1)$	$\langle 1;\ \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na intervale $(-\infty;\ -2)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Vyriešime: $-2x - 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $-2x < 6$
- Vydelíme záporným číslom -2, znamienko nerovnosti sa obráti: $x > -3$
- Riešením tejto nerovnice je $x \in (-3;\ \infty)$
- Prienik s intervalom $(-\infty;\ -2)$: $x \in (-3;\ -2)$
- Na intervale $\langle -2;\ 1)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- Neznáma sa vyrušila a zostalo pravdivé tvrdenie $3 < 5$ – riešením je celý interval $\langle -2;\ 1)$
- Na intervale $\langle 1;\ \infty)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Vyriešime: $2x + 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $2x < 4$
- Vydelíme kladným číslom 2, znamienko nerovnosti sa nemení: $x < 2$

- Riešením tejto nerovnice je $x \in (-\infty;\ 2)$
- Prienik s intervalom $\langle 1;\ \infty)$: $x \in \langle 1;\ 2)$
- Riešením je zjednotenie výsledkov: $x \in (-3;\ 2)$

Graf



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

● $[-3;5]$ ● $[2;5]$

Vnorená absolútna hodnota – podľa definície zvonku dovnútra.

Zadanie: `||x| - 2| = 1`

Výsledok

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

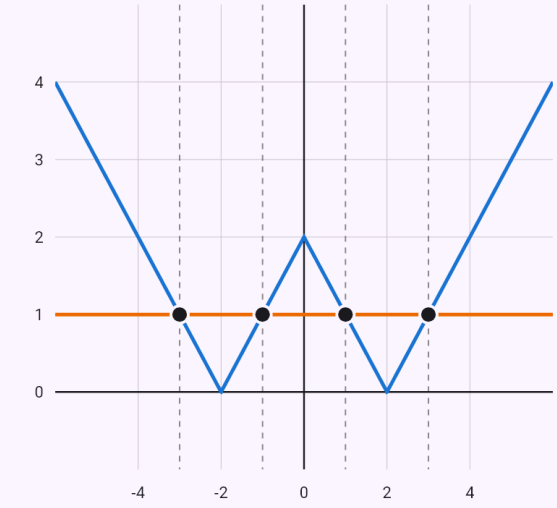
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Absolútna hodnota je len jedna a na druhej strane je číslo – stačí ju rozpísať podľa definície.
- Podľa definície platí $||x| - 2| = 1$ práve vtedy, keď $|x| - 2 = 1$ alebo $|x| - 2 = -1$
- Osamostatníme absolútnu hodnotu: $|x| = 3$
- Podľa definície platí $|x| = 3$ práve vtedy, keď $x = 3$ alebo $x = -3$
- Osamostatníme absolútnu hodnotu: $|x| = 1$
- Podľa definície platí $|x| = 1$ práve vtedy, keď $x = 1$ alebo $x = -1$

Graf



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Priesečníky grafov:

● $[-3; 1]$ ● $[-1; 1]$ ● $[1; 1]$ ● $[3; 1]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Absolútna hodnota na oboch stranách – umocnenie na druhú.

Zadanie: `|x - 1| < |2x + 3|` Umocnením

Výsledok

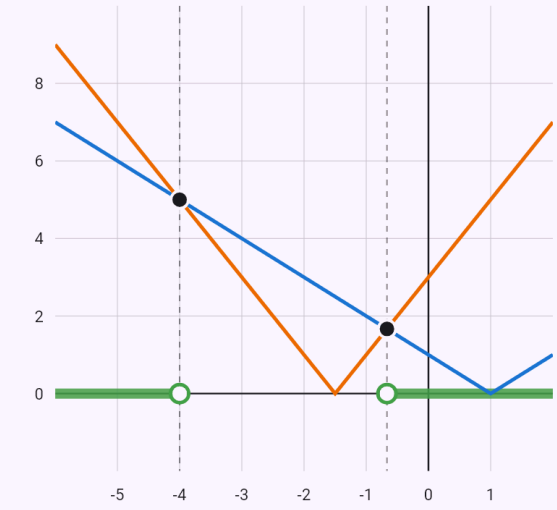
$$x \in (-\infty;\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3};\, \infty\right)$$

Postup

- Na oboch stranách je len absolútna hodnota – obe strany sú nezáporné, nerovnicu preto môžeme umocniť na druhú (je to ekvivalentná úprava).
- Umocníme obe strany: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Rozložíme na súčin: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Nulové body rozdelia číselnú os na intervaly: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\, -4)$	$(-4;\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3};\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Graf



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $[-4; 5]$
- $\left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right]$

Výraz s absolútnymi hodnotami – po častiach na intervaloch.

Zadanie: `|x - 1| + |x + 2|`

Výsledok

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -2) \\ 3, & x \in \langle -2;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Postup

- Absolútne hodnoty odstránime metódou nulových bodov: rozdelia číselnú os na intervaly a na každom z nich majú výrazy v absolútnych hodnotách stále znamienko.
- Nulové body výrazov v absolútnych hodnotách: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\, -2)$	$\langle -2;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na intervale $(-\infty;\, -2)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Na intervale $\langle -2;\, 1)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na intervale $\langle 1;\, \infty)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Výraz s absolútnymi hodnotami na zadanom intervale – po častiach len tam.

Zadanie: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Výsledok

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Postup

- Výraz upravíme len pre hodnoty z intervalu $(-1;\, \infty)$ – absolútne hodnoty odstránime podľa znamienok výrazov v nich.
- Nulové body výrazov v absolútnych hodnotách: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-1;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- Na intervale $(-1;\, 1)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na intervale $\langle 1;\, \infty)$ odstránime absolútne hodnoty podľa znamienok: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Známe obmedzenia

- Umocnenie ponúkame len pri nerovnici s jedinou absolútnou hodnotou na každej strane.

8. Goniometrické rovnice a nerovnice

Aplikácia prevedie rovnicu na základné rovnice typu sin x = a a tie vyrieši na jednotkovej kružnici: nájde uhly v jednej otočke a pripočíta k nim násobky periódy ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Kružnica je nakreslená priamo v postupe.

Prednostne používa známe vzorce – dvojnásobný a polovičný argument, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, súčet na súčin –, ďalej vyberanie pred zátvorku, substitúciu $t = \sin x$, delenie homogénnej rovnice $\cos^n x$ a pomocný uhol pri $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Výsledok ešte overí numericky na celej perióde.

Neznáma latinským písmenom (x, t) je v radiánoch, gréckym písmenom (alpha, β, …) v stupňoch – rovnako ako zadanie so znakom ° (sin(x + 30°)). Korene v danom intervale dostanete, keď interval pripíšete za čiarku alebo na ďalší riadok.

Nerovnicu aplikácia rieši oblúkom na jednotkovej kružnici, zložitejšiu cez nulové body na jednej perióde; výsledok sú intervaly s periódou.

Ukážky

Dve vetvy riešenia, uhly na jednotkovej kružnici.

Zadanie: `sin x = 1/2`

Výsledok

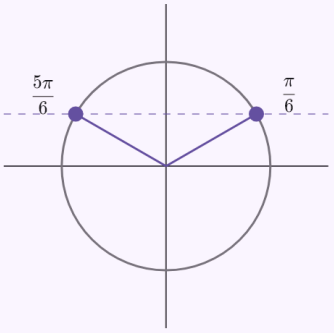
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

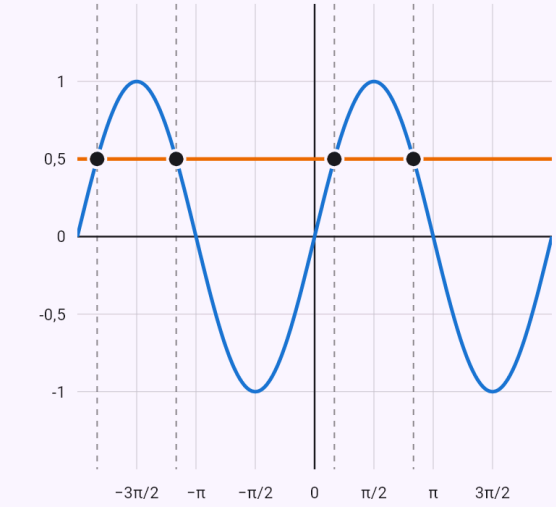
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základná rovnica $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Priesečníky grafov:

- $\left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Substitúcia t = sin x a kvadratická rovnica.

Zadanie: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Výsledok

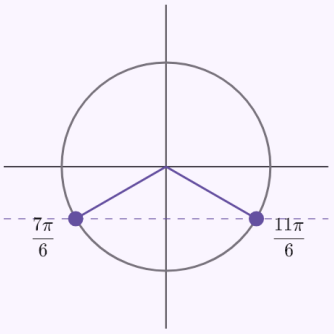
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Presne to nejde – odkiaľ je „≈", ukáže numerická metóda:

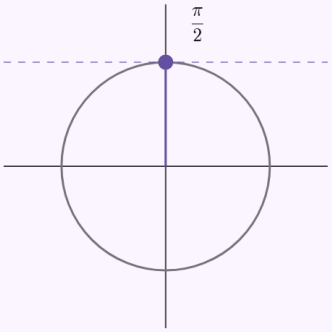
Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

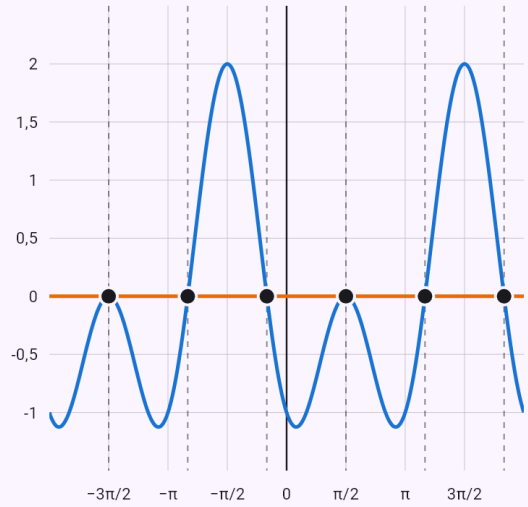
- Zavedieme substitúciu $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Vypočítame diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Dosadíme do vzorca pre korene: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Základná rovnica $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Základná rovnica $\sin x = 1$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{2}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graf



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Priesečníky grafov:

- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{7\pi}{6}; 0\right]$
- $\left[\frac{11\pi}{6}; 0\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Vzorec pre sin 2x a rozklad na súčin.

Zadanie: `sin 2x = cos x`

Výsledok

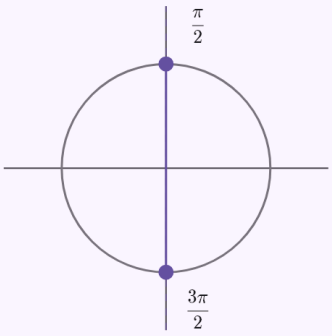
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Presne to nejde – odkiaľ je „≈", ukáže numerická metóda:

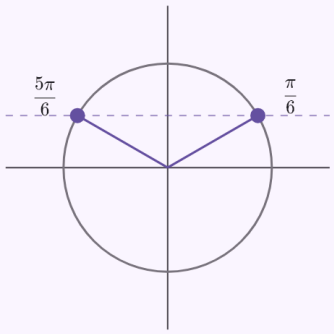
Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

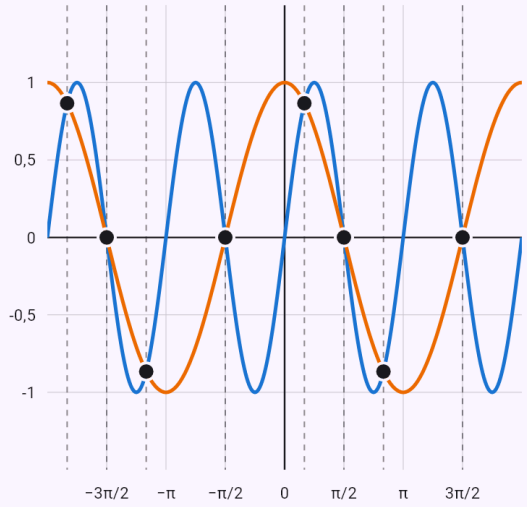
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Použijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Rozložíme na súčin – súčin je nulový práve vtedy, keď je nulový niektorý z činiteľov: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Riešime rovnicu $\cos x = 0$
- Základná rovnica $\cos x = 0$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Riešime rovnicu $2\sin x - 1 = 0$
- Osamostatníme goniometrickú funkciu: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Základná rovnica $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Priesečníky grafov:

- $\left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Pomocný uhol: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

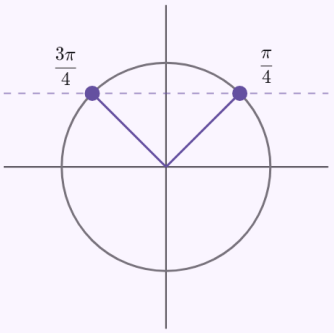
Zadanie: `sin x + cos x = 1`

Výsledok

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

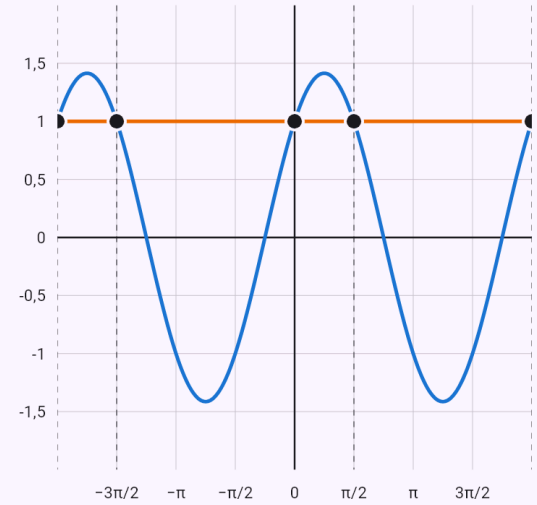
- Prevedieme všetko na jednu stranu:
  $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Zavedieme pomocný uhol φ:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, kde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Osamostatníme goniometrickú funkciu:
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Základná rovnica $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy:
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Vyjadríme neznámu

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \ \vee\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graf



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Priesečníky grafov:

- $[-2\pi; 1]$
- $\left[-\frac{3\pi}{2}; 1\right]$
- $[0; 1]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$
- $[2\pi; 1]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Grécke písmeno – výsledok v stupňoch.

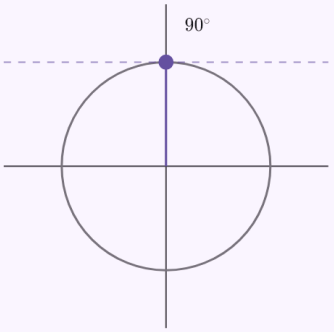
Zadanie: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Výsledok

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

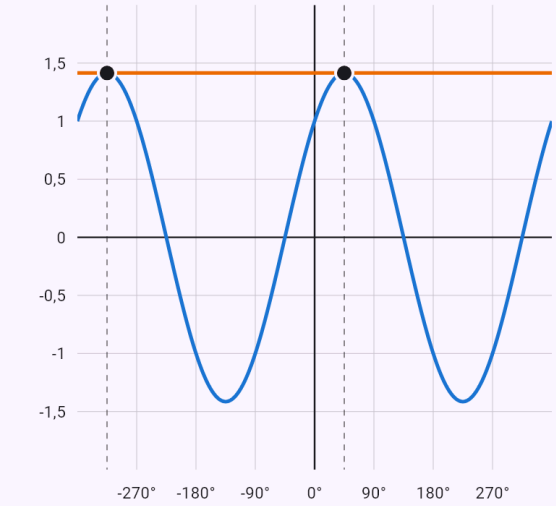
Postup

- Prevedieme všetko na jednu stranu:
  $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Zavedieme pomocný uhol φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, kde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Osamostatníme goniometrickú funkciu:
  $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Základná rovnica $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly 90°; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy:
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Vyjadríme neznámu
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Graf



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Priesečníky grafov:

- $[-315^\circ; \sqrt{2}]$
- $[45^\circ; \sqrt{2}]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Len korene v zadanom intervale.

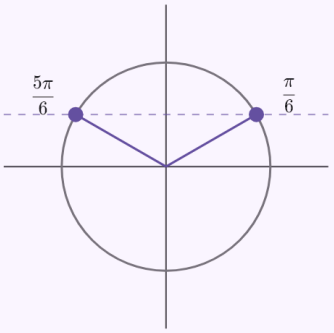
Zadanie: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Výsledok

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

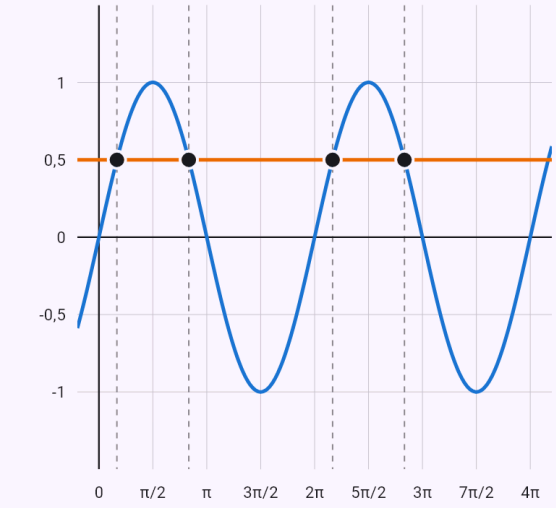
Postup

- Základná rovnica $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy:
  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- V intervale $x \in \langle 0;\ 4\pi)$ ležia riešenia
  $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Graf



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Priesečníky grafov:

- $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$
- $\left[\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu rovnice – jeho prvá súradnica je hodnota x.

Oblúk na jednotkovej kružnici, interval okolo nuly.

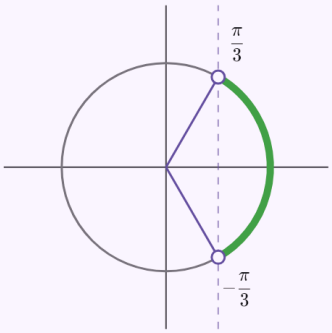
Zadanie: `cos x > 1/2`

Výsledok

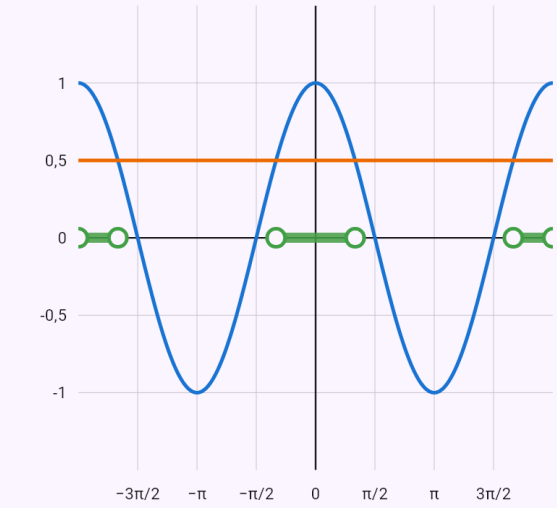
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základná nerovnica $\cos x > \frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej vyhovuje vyznačený oblúk; s periódou: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Graf



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Nulové body na perióde a znamienko medzi nimi.

Zadanie: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

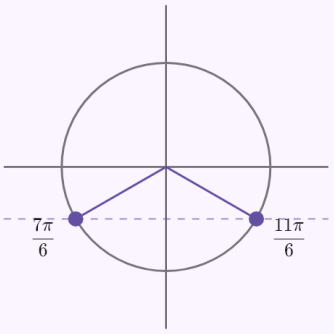
Výsledok

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

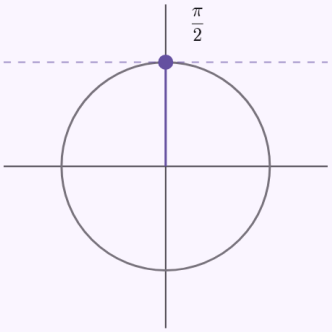
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Najprv vyriešime rovnicu $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Zavedieme substitúciu $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Základná rovnica $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy:
  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

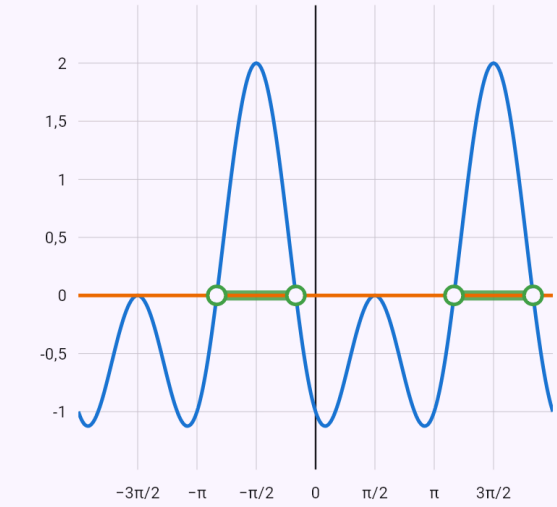


- Základná rovnica $\sin x = 1$: na jednotkovej kružnici jej v jednej otočke vyhovujú uhly $\frac{\pi}{2}$; všetky riešenia dostaneme pripočítaním násobkov periódy:
  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Funkcia má periódu 2π. Jednu periódu rozdelia na intervaly nulové body (a body, kde funkcia nie je definovaná) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; podľa znamienka v nich nerovnici vyhovuje: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$

Graf



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$
Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Známe obmedzenia

- Rovnice, kde je neznáma aj mimo goniometrickej funkcie (x = cos x), riešime len numericky – metódou dotyčníc s tabuľkou iterácií (pozri Numerické metódy), bez periódy.
- Dvojitú goniometrickú nerovnicu (−1/2 < sin x < 1/2) a goniometrické funkcie v absolútnej hodnote zatiaľ nevieme.

9. Nerovnice a sústavy nerovníc

Kvadratickú nerovnicu a nerovnicu s neznámou v menovateli aplikácia rieši nulovými bodmi a tabuľkou znamienok. Dvojitú nerovnicu a sústavu nerovníc rieši ako prienik riešení jednotlivých nerovníc, ktorý ukáže na číselnej osi. Sústavu nerovníc s dvoma neznámymi vyrieši ako oblasť v rovine a vyfarbí ju v grafe.

V sústave nerovníc s dvoma neznámymi aplikácia vypíše aj rohy oblasti – priesečníky hraníc s presnými súradnicami. Sústavu rovnice a nerovníc s jednou neznámou rieši vyriešením rovnice a dosadením koreňov do nerovníc; s dvoma neznámymi je riešením časť krivky rovnice ležiaca v oblasti nerovníc – v grafe je zvýraznená a jej krajné body sú vypočítané presne. Sústavu možno zapísať aj na jeden riadok, oddelenú bodkočiarkami ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Sústavu dvoch a viacerých rovníc s nerovnicami vyrieši ako sústavu rovníc a jej riešenia dosadí do nerovníc; s dvoma neznámymi ukáže v grafe krivky v oblasti nerovníc, nevyhovujúce priesečníky prázdnym krúžkom.

Ukážky

Kvadratická nerovnica – nulové body a znamienka.

Zadanie: `x^2 - x - 6 > 0`

Výsledok

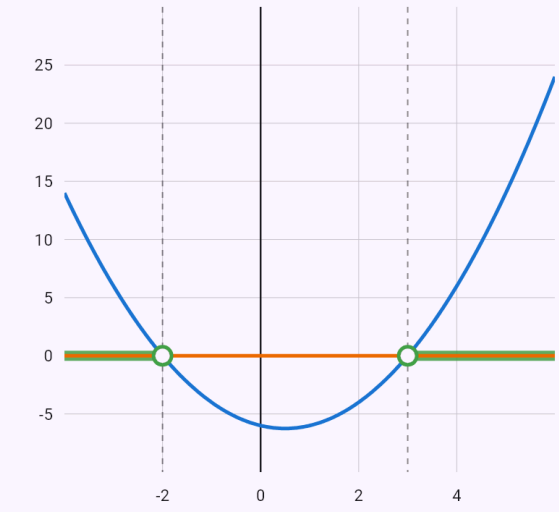
$$x \in (-\infty;\, -2) \cup (3;\, \infty)$$

Postup

- Rozložíme na súčin: $(x-3)(x+2) > 0$
- Nulové body rozdelia číselnú os na intervaly: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\, -2)$	$(-2;\, 3)$	$(3;\, \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Graf



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$
Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:
● $[-2; 0]$ ● $[3; 0]$

Nerovnica s neznámou v menovateli – menovateľ nesmie byť nula.

Zadanie: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Výsledok

$$x \in \langle -1;\ 3)$$

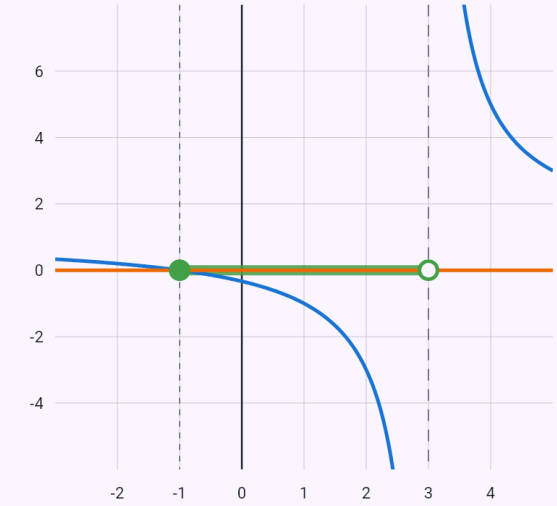
Podmienky: $x \neq 3$

Postup

- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $x \neq 3$
- Nulové body rozdelia číselnú os na intervaly: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Graf



$y = \dfrac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $[-1; 0]$

Dvojitá nerovnica.

Zadanie: `-1 <= 2x + 1 < 5`

Výsledok

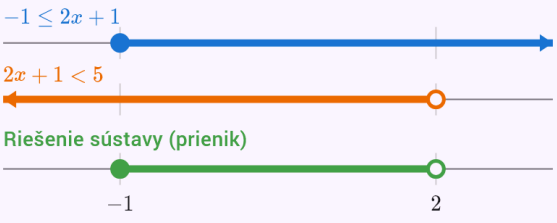
$$x \in \langle -1;\ 2)$$

Postup

- 1. nerovnica: $-1 \leq 2x + 1$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $-2x \leq 2$
- Vydelíme záporným číslom -2, znamienko nerovnosti sa obráti: $x \geq -1$
- Riešením tejto nerovnice je $x \in \langle -1;\ \infty)$
- 2. nerovnica: $2x + 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $2x < 4$
- Vydelíme kladným číslom 2, znamienko nerovnosti sa nemení: $x < 2$
- Riešením tejto nerovnice je $x \in (-\infty;\ 2)$

- Riešením sústavy je prienik riešení jednotlivých nerovníc: $x \in \langle -1;\ 2)$

Graf



Každá nerovnica má na osi svoj riadok, nazeleno je ich prienik. Plné koliesko do riešenia patrí, prázdne nie.

Sústava nerovníc s dvoma neznámymi – oblasť v rovine a jej rohy.

Zadanie: `x + y <= 4`

`x - y >= 0`

`y >= 0`

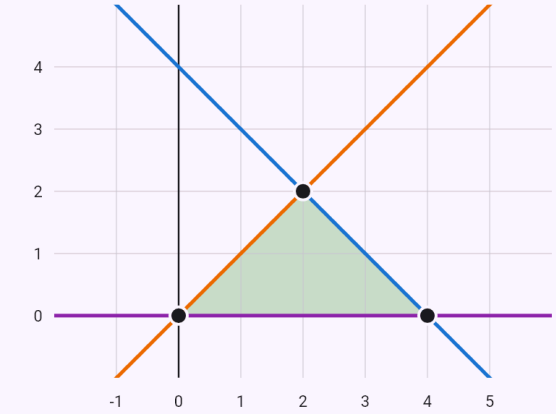
Výsledok

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in \langle 0;\, \infty)$$

Postup

- 1. nerovnica: $x + y \leq 4$
- Hranicou je krivka $x + y = 4$ – kreslíme ju plnou čiarou, jej body do riešenia patria.
- Dosadíme bod $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ platí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod leží.
- 2. nerovnica: $x - y \geq 0$
- Hranicou je krivka $x - y = 0$ – kreslíme ju plnou čiarou, jej body do riešenia patria.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ platí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod leží.
- 3. nerovnica: $y \geq 0$
- Hranicou je krivka $y = 0$ – kreslíme ju plnou čiarou, jej body do riešenia patria.
- Dosadíme bod $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ platí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod leží.
- Riešením sústavy je spoločná časť týchto oblastí – v grafe je vyfarbená.
- Rohy oblasti (priesečníky hraníc): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Graf



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\, \infty)$

Riešením je vyfarbená oblasť. Plná hranica do riešenia patrí, čiarkovaná nie.

Rohy oblasti:

● $[0; 0]$ ● $[2; 2]$ ● $[4; 0]$

Nerovnica v obore celých čísel – vypíšu sa celé čísla z intervalu.

Zadanie: `x^2 < 10`

Výsledok

$$x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

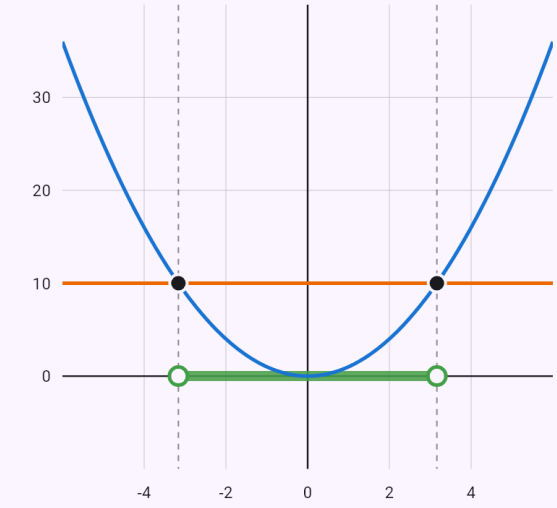
Postup

- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - 10 < 0$
- Nulové body rozdelia číselnú os na intervaly:
  $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Znamienka na jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty;\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10};\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- V reálnych číslach vychádza $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$, v $\mathbb{Z}$:
  $x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Graf



$y = x^2$
$y = 10$

Riešenie nerovnice – kde vzťah medzi oboma krivkami platí

Priesečníky grafov:

- $\left[-\sqrt{10}; 10\right]$
- $\left[\sqrt{10}; 10\right]$

Rovnica a nerovnica – korene rovnice dosadíme do nerovnice.

Zadanie: `x^2 - x - 6 = 0`

`x > 0`

Výsledok

$$x = 3$$

Postup

- Najprv vyriešime rovnicu $x^2 - x - 6 = 0$, jej korene potom dosadíme do nerovníc.
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- Koreň $x = -2$ nevyhovuje podmienke $x > 0$, nie je teda riešením.
- Koreň $x = 3$ podmienkam vyhovuje.

Kružnica a polrovina – riešením je oblúk, krajné body k nemu nepatria.

Zadanie: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

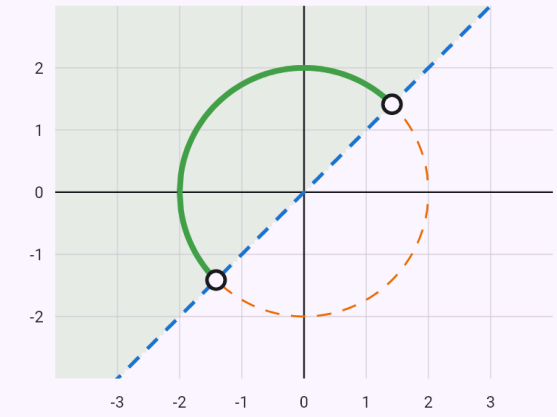
Výsledok

$x^2 + y^2 = 4$
$y > x$

Postup

- Riešením sú body krivky $x^2 + y^2 = 4$, ktoré ležia v oblasti danej nerovnicami. Najprv túto oblasť nájdeme:
- Hranicou je krivka $y = x$ – kreslíme ju čiarkovane, jej body do riešenia nepatria.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $0 > 1$ neplatí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod neleží.
- Krajné body časti krivky: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – ležia na čiarkovanej hranici, do riešenia nepatria.

Graf



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Riešením je nazeleno zvýraznená časť krivky – tá, ktorá leží vo vyfarbenej oblasti. Plný krajný bod do riešenia patrí, prázdny nie.

Krajné body:

○ $\left[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right]$ ○ $\left[\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Kružnica a priamka s nerovnicou – priesečník pod osou x nevyhovuje.

Zadanie: `x^2 + y^2 = 25`
`x - y = 1`
`y > 0`

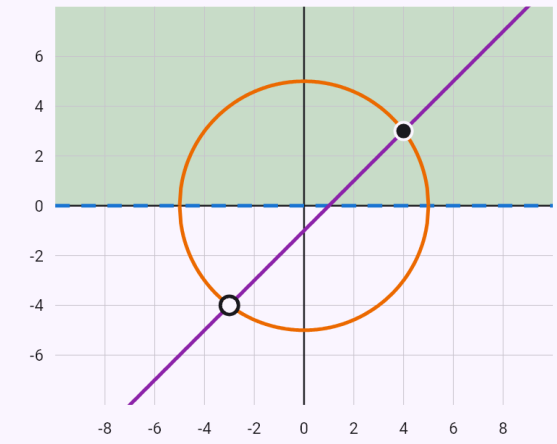
Výsledok

$x = 4$
$y = 3$

Postup

- Najprv vyriešime sústavu rovníc, jej riešenie potom dosadíme do nerovníc.
- Riešenie $x = -3,\ y = -4$ nevyhovuje nerovnici $y > 0$, sústave teda nevyhovuje.
- Riešenie $x = 4,\ y = 3$ nerovniciam vyhovuje.

Graf



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0;\ \infty)$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Riešením sú priesečníky kriviek vo vyfarbenej oblasti (plný bod); prázdny bod nerovniciam nevyhovuje.

Priesečníky grafov:

○ $[-3; -4]$ ● $[4; 3]$

10. Sústavy rovníc

Sústavu lineárnych rovníc s dvoma neznámymi aplikácia rieši sčítacou alebo dosadzovacou metódou, väčšiu sústavu Gaussovou eliminániou – v rovniciach alebo v matici (rozšírená matica sústavy a riadkové úpravy). Štvorcovú sústavu vyrieši aj Cramerovým pravidlom (determinanty). Metódu vyberiete čipom. Pri sústave dvoch rovníc s dvoma neznámymi je aj graf, na ktorom sú riešenia priesečníky priamok alebo kriviek.

Počet rovníc a neznámych sa nemusí zhodovať. Gaussova eliminácia spozná, kedy sústava nemá riešenie (vyjde rovnica ako 0 = 1), a kedy ich má nekonečne veľa: neznáme, ktoré rovnice neurčujú, zvolí ako parametre t, s, … (tak, aby riešenie vyšlo bez zlomkov) a riešenie zapíše aj vo vektorovom tvare. V maticovom tvare rozhodne o počte riešení Frobeniova veta – porovná hodnosť matice sústavy, hodnosť rozšírenej matice a počet neznámych. Pri homogénnej sústave (všetky pravé strany 0) ukáže bázu priestoru riešení.

Neznáme môžete písať aj s indexom: x_1, x_1 alebo x1. Sústavu možno zadať aj maticou – rozšírenou maticou s pravými stranami za zvislou čiarou, alebo maticou A, vektorom pravých strán b a rovnicou Ax = b; neznáme sú potom x_1, x_2, … a východiskovou metódou je Gaussova eliminácia v matici.

Sústava môže obsahovať jeden alebo dva parametre – písmená, ktoré nie sú neznámymi (neznáme sú x, y, z, u, v, w, t a x_1, x_2, …). Aplikácia potom rozoberie riešiteľnosť podľa hodnôt parametrov (diskusia): s čipom „Gauss – matica“ (predvolený pri troch a viacerých rovniciach) upravuje rozšírenú maticu; kde by násobila výrazom s parametrom, ktorý môže byť nulový, predpokladá, že nulový nie je, a jeho nulové hodnoty dosadí a dorieši zvlášť – v každom prípade rozhodne Frobeniova veta. S čipom „Cramerovo pravidlo“ vypočíta determinanty ako výrazy s parametrom: pre D ≠ 0 dostane vzorce, korene D dosadí. Pri dvoch parametroch vyjdú aj prípady ako „b = 4, a ≠ 2“ alebo „a = b“.

Nelineárnu sústavu (napríklad kružnica a priamka) aplikácia vyrieši a zakreslí, zatiaľ bez postupu.

Ako zadať

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Neznáme s indexom – x_1, x_1 aj x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	Rozšírená matica – pravé strany za zvislou čiarou.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	Matica sústavy, vektor pravých strán a rovnica Ax = b.

Ukážky

Sčítacia metóda.

Zadanie: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Sčítacia

Výsledok

$$x = 2$$
$$y = 1$$

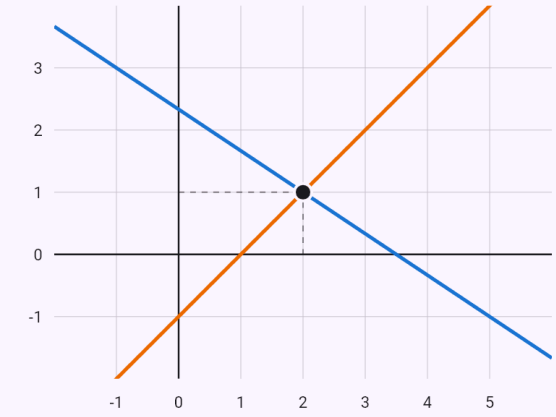
Postup

- Prvú rovnicu vynásobíme číslom 1 a druhú číslom -2, aby sa po sčítaní vyrušilo x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Rovnice sčítame, x sa vyruší: $5y = 5$
- Vyriešime: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Dosadíme do 2. rovnice: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Graf



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Priesečníky grafov:

- $[2; 1]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu sústavy – jeho súradnice sú hodnoty x a y.

Tri rovnice – Gaussova eliminácia.

Zadanie: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Gaussova eliminácia

Výsledok

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Postup

- Z ďalších rovníc vylúčime x

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Z ďalších rovníc vylúčime y

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Vyriešime: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Cramerovo pravidlo – determinanty D, D_x, D_y.

Zadanie: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Cramerovo pravidlo

Výsledok

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Postup

- Vypočítame determinant

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Vypočítame determinant

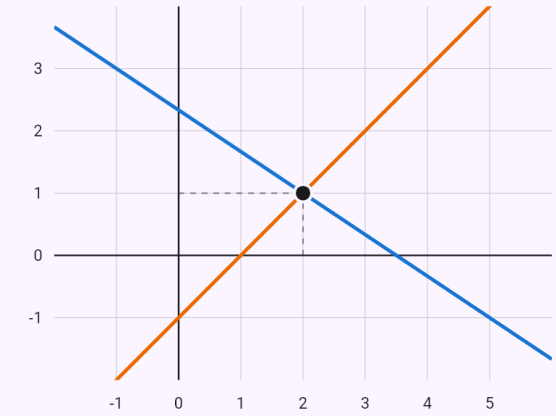
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Vypočítame determinant

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Podľa Cramerovho pravidla: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Podľa Cramerovho pravidla: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Graf



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Priesečníky grafov:

- $[2; 1]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu sústavy – jeho súradnice sú hodnoty x a y.

Nekonečne veľa riešení – Frobeniova veta, parameter a vektorový tvar.

Zadanie: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matica

Výsledok

Má nekonečne veľa riešení.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Postup

- Rozšírená matica sústavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Riadkové úpravy $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rovnica 0 = 0 platí vždy, vynecháme ju

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Frobeniova veta: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – hodnosti sa rovnajú, ale sú menšie ako počet neznámych, sústava má nekonečne veľa riešení.
- Maticu v stupňovitom tvare prepíšeme späť na rovnice

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Neznáme, ktoré rovnice neurčujú, zvolíme ako parametre: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Vyriešime: $z = 1$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow\ x = 2 - 2t$
- Riešenie vo vektorovom tvare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sústava bez riešenia – vyjde rovnica, ktorá neplatí.

Zadanie: `x + y + z = 2`

`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Výsledok

Nemá žiadne riešenie.

Postup

- Z ďalších rovníc vylúčime x

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

- Z ďalších rovníc vylúčime y

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Vyšla rovnica $0 = 1$, ktorá nemá riešenie – sústava teda nemá riešenie.

Homogénna sústava – báza priestoru riešení.

Zadanie: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauss – matica

Výsledok

Má nekonečne veľa riešení.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Postup

- Sústava je homogénna (všetky pravé strany sú 0) – vždy má triviálne riešenie (samé nuly), netriviálne riešenie má práve vtedy, keď je hodnosť matice sústavy menšia ako počet neznámych.
- Rozšírená matica sústavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Vymeníme $2.$ a $3.$ rovnicu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Rovnica 0 = 0 platí vždy, vynecháme ju
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Frobeniova veta: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – hodnosti sa rovnajú, ale sú menšie ako počet neznámych, sústava má nekonečne veľa riešení.
- Maticu v stupňovitom tvare prepíšeme späť na rovnice
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Neznáme, ktoré rovnice neurčujú, zvolíme ako parametre: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Dosadíme do $2.$ rovnice: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Dosadíme do $1.$ rovnice: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- Riešenie vo vektorovom tvare
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Báza priestoru riešení (dimenzia 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Sústava zadaná rozšírenou maticou.

Zadanie: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Výsledok

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Postup

- Rozšírená matica sústavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

- Frobeniova veta: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice aj počtu neznámych, sústava má práve jedno riešenie.
- Maticu v stupňovitom tvare prepíšeme späť na rovnice
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Vyriešime: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Sústava s parametrom – rozšírená matica, prípady a = 1 a a = −2.

Zadanie: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matica

Výsledok

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Postup

- Neznáme sú $x,\ y,\ z$, parameter a je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Rozšírená matica sústavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Vymeníme $1.$ a $2.$ rovnicu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Ďalej budeme počítať s prvkom $1 - a$, ktorý môže byť nulový – predpokladáme preto $a \neq 1$; prípad $a = 1$ rozoberieme zvlášť.
- Vymeníme $2.$ a $3.$ rovnicu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Ďalej budeme počítať s prvkom $-a - 2$, ktorý môže byť nulový – predpokladáme preto $a \neq -2$; prípad $a = -2$ rozoberieme zvlášť.
- Pre $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – sústava má jediné riešenie: $x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Pre $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$ – sústava má nekonečne veľa riešení: $x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pre $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – sústava nemá riešenie. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dva parametre – rozbor podľa a aj b.

Zadanie: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Výsledok

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Postup

- Neznáme sú $x,\ y,\ z$, parametre $a,\ b$ sú ľubovoľné reálne čísla. Riešenie závisí od ich hodnôt, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Rozšírená matica sústavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Riadkové úpravy $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Ďalej budeme počítať s prvkom $(a-2)(a-1)$, ktorý môže byť nulový – predpokladáme preto $a \neq 1,\ a \neq 2$; prípad $a = 2,\ a = 1$ rozoberieme zvlášť.
- Pre $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – sústava má jediné riešenie
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Pre $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – sústava nemá riešenie. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pre $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – sústava má nekonečne veľa riešení:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pre $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – sústava nemá riešenie. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pre $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – sústava má nekonečne veľa riešení:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Matica po dosadení
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kružnica a priamka.

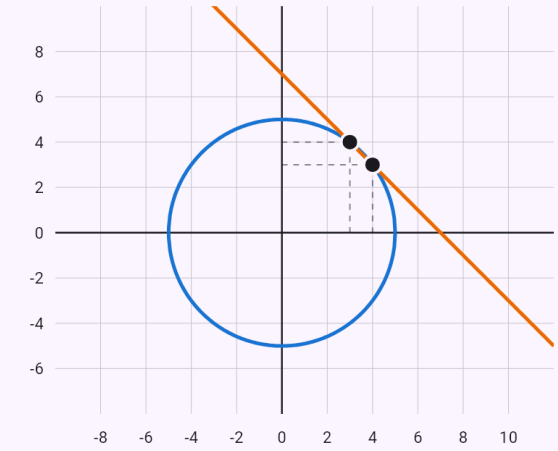
Zadanie: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Výsledok

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Graf



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Priesečníky grafov:

● $[3; 4]$ ● $[4; 3]$

Každý priesečník zodpovedá jednému riešeniu sústavy – jeho súradnice sú hodnoty x a y.

Známe obmedzenia

- Nelineárne sústavy sú zatiaľ bez postupu.

11. Rovnice a nerovnice s parametrom

Ak je v rovnici okrem neznámej ešte ďalšie písmeno, je to parameter – ľubovoľné reálne číslo, od ktorého závisí riešenie. Aplikácia rovnicu upraví na tvar A·x = B (pri kvadratickej A·x² + B·x + C = 0) a riešenie rozoberie podľa hodnôt parametra (diskusia): kde je koeficient pri neznámej nulový, kde je diskriminant kladný, nulový alebo záporný, kde podmienky vylúčia koreň a pre ktoré hodnoty nemá úloha zmysel. Výsledok zhrnie po prípadoch.

Neznámu aplikácia vyberie podľa poradia x, y, z, u, v, w, t, ostatné písmená sú parametre; inú neznámu vyberiete čipom „Neznáma“ alebo ju napíšete za čiarku. Graf ukáže všetky riešenia ako krivku (pri nerovnici oblasť) v rovine parameter – neznáma; posuvníkom zvolíte hodnotu parametra a na zvislej priamke prečítate riešenie.

Za čiarku môžete napísať aj otázku na korene: „x^2 + px + 4 = 0, x > 0“ – pre ktoré p sú všetky korene kladné (čipom „Podmienka platí pre“ prepnete na aspoň jeden koreň), „…, x = 3“ – pre ktoré p je 3 koreňom. Lineárnu rovnicu aplikácia rieši dosadením koreňa do podmienky, kvadratickú Vietovými vzorcami. Sústavu dvoch lineárnych rovníc s parametrom rieši determinantmi (Cramerovým pravidlom) a rozoberie, kedy má jedno, žiadne a nekonečne veľa riešení. Kvadratickú nerovnicu a nerovnicu s neznámou v menovateli rozoberie podľa poradia nulových bodov. Posuvník v grafe sa zastaví presne na kritických hodnotách parametra, tie sú aj pod grafom. Sústavu s parametrom s viacerými rovnicami, s dvoma parametrami alebo maticovou metódou nájdete v kapitole Sústavy rovníc.

Písmená v neurčitom integráli berie aplikácia ako konštanty a pripíše, ktoré nesmú byť nulové (∫ dx/(a − bx)³ pre b ≠ 0). V limite a v určitom integráli sú písmená tiež parametre – pozri kapitoly Limity a Určitý integrál.

Ako zadať

`2ax + a = 4x`	Parameter je každé ďalšie písmeno; neznáma je x (alebo y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, neznámá q`	Neznámu alebo parameter môžete napísať za čiarku (zatiaľ po česky: „a je parametr“, „neznámá q“).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Otázka na korene za čiarkou: pre ktoré p majú všetky korene (alebo aspoň jeden) danú vlastnosť.

Ukážky

Lineárna rovnica – pre a = 2 nemá riešenie.

Zadanie: `2ax + a = 4x`

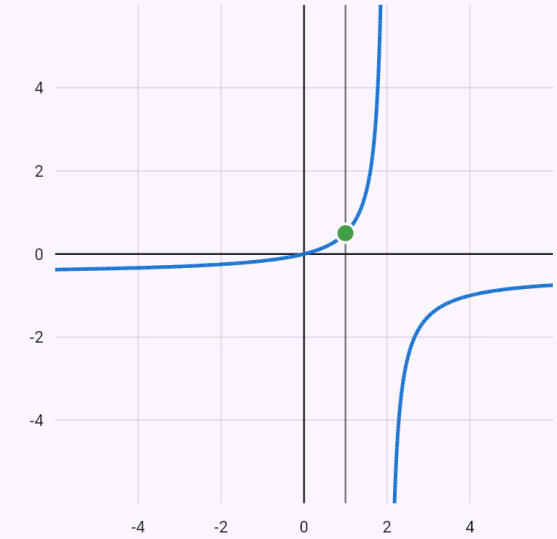
Výsledok

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Postup

- Neznáma je x, parameter a je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Upravíme na základný tvar: $2(a-2)x = -a$
- Pre $a \neq 2$ je $2(a-2)$ rôzne od nuly, môžeme ním vydeliť: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Pre $a = 2$ je koeficient pri neznámej nulový: $0 \cdot x = -2$, teda $x \in \emptyset$

Graf



$2ax + a = 4x$

Každý bod [a; x] krivky je riešením. Pre zvolenú hodnotu a leží riešenie na zvislej priamke – posúvaj ju posuvníkom.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Kvadratická rovnica – diskusia podľa diskriminantu.

Zadanie: `x^2 + 6x + p = 0`

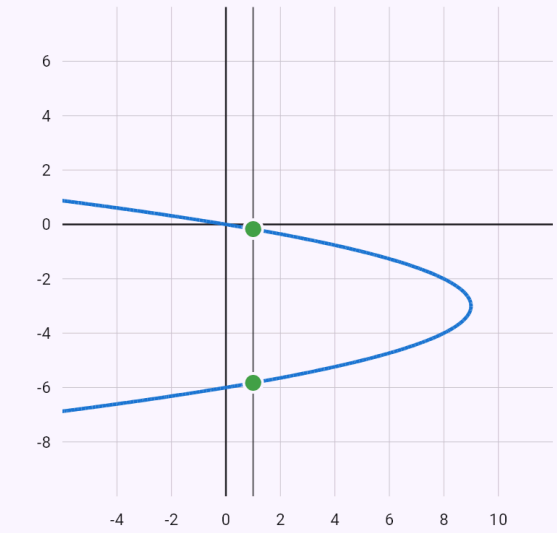
Výsledok

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Postup

- Neznáma je x, parameter p je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Upravíme na základný tvar: $x^2 + 6x + p = 0$
- Diskriminant v závislosti od parametra: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Pre $p < 9$ je D > 0, rovnica má dva rôzne korene: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Pre $p > 9$ je D < 0, rovnica nemá reálne riešenie.
- Pre $p = 9$ je D = 0, rovnica má jeden dvojnásobný koreň: $x = -3$

Graf



$x^2 + 6x + p = 0$

Každý bod [p; x] krivky je riešením. Pre zvolenú hodnotu p leží riešenie na zvislej priamke – posúvaj ju posuvníkom.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Nerovnica – znamienko koeficientu rozhoduje o smere nerovnosti.

Zadanie: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

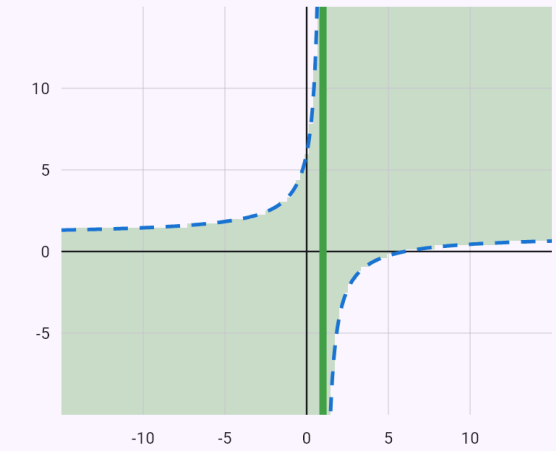
Výsledok

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Postup

- Neznáma je x, parameter p je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Upravíme na základný tvar: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Pre $p < 1$ je $2(1-p)$ kladné – vydelíme a znak nerovnosti zostane: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pre $p > 1$ je $2(1-p)$ záporné – vydelíme a znak nerovnosti sa obráti: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pre $p = 1$ je koeficient pri neznámej nulový: $0 \cdot x < 10$, teda $x \in \mathbb{R}$

Graf



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{p-6}{p-1}$

Vyfarbená oblasť tvorí všetky riešenia [p; x]. Pre zvolenú hodnotu p je riešením zvýraznená časť zvislej priamky – posúvaj ju posuvníkom.

p = 1

$p = 1$

Oba korene väčšie ako 1 – diskriminant a Vietove vzorce.

Zadanie: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

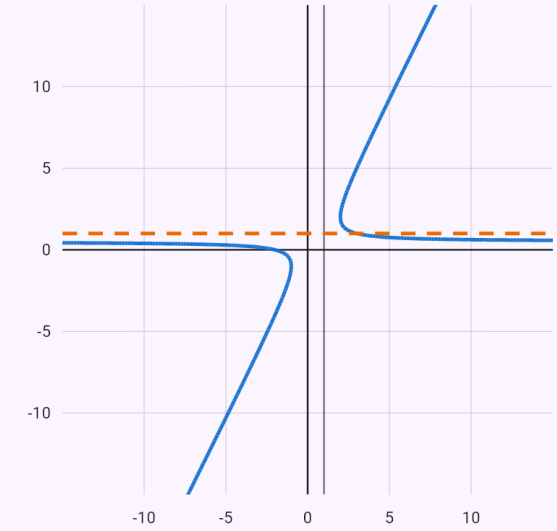
Výsledok

$$2 \leq p < 3$$

Postup

- Neznáma je x, parameter p je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Upravíme na základný tvar: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Diskriminant v závislosti od parametra
  $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p - 2$
- Pre $p \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$ je D > 0, rovnica má dva rôzne korene: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Pre $-1 < p < 2$ je D < 0, rovnica nemá reálne riešenie.
- Pre $p = -1$ je D = 0, rovnica má jeden dvojnásobný koreň: $x = -1$
- Pre $p = 2$ je D = 0, rovnica má jeden dvojnásobný koreň: $x = 2$
- Hľadáme hodnoty parametra, pre ktoré všetky korene rovnice spĺňajú $x > 1$ (a nejaký koreň existuje).
- Podľa Vietových vzorcov: $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- Rovnica musí mať reálne korene: $D \geq 0$, teda $p \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 2;\ \infty)$
- Podmienka na súčet: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, teda $p > 1$
- Podmienka na súčin: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, teda $p < 3$
- Podmienku spĺňajú hodnoty parametra $2 \leq p < 3$

Graf



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Každý bod [p; x] krivky je riešením. Pre zvolenú hodnotu p leží riešenie na zvislej priamke – posúvaj ju posuvníkom.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1: \quad x \in \emptyset$

Sústava s parametrom – determinanty, priamky rôznobežné, rovnobežné, totožné.

Zadanie: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Výsledok

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Postup

- Neznáme sú $x,\ y$, parameter a je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Upravíme na základný tvar

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Sústavu riešime pomocou determinantov (Cramerovo pravidlo)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Pre $a \neq -1,\ a \neq 1$ je D ≠ 0 – sústava má jediné riešenie (priamky sú rôznobežné): $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$
- Pre $a = -1$ je D = 0 a sústava nemá riešenie (priamky sú rovnobežné rôzne).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Pre $a = 1$ je D = 0 a obe rovnice sústavy opisujú tú istú priamku – riešení je nekonečne veľa: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Nerovnica s neznámou v menovateli – riešenie podľa poradia nulového bodu p a bodu 1.

Zadanie: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Výsledok

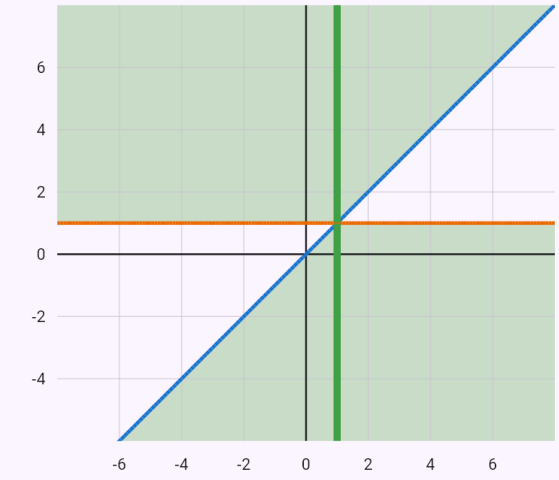
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty), & p > 1 \end{cases}$$

Podmienky: $x \neq 1$

Postup

- Neznáma je x, parameter p je ľubovoľné reálne číslo. Riešenie závisí od jeho hodnoty, preto rozoberieme jednotlivé prípady (diskusia riešenia).
- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $x \neq 1$
- Upravíme na základný tvar: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Nulové body čitateľa: p; menovateľ je nulový pre 1
- Pre $p < 1$ – podľa poradia nulových bodov a znamienka na intervaloch: $x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty)$
- Pre $p > 1$ – podľa poradia nulových bodov a znamienka na intervaloch: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty)$
- Pre $p = 1$ riešime $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$; $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$

Graf



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

Vyfarbená oblasť tvorí všetky riešenia [p; x]. Pre zvolenú hodnotu p je riešením zvýraznená časť zvislej priamky – posúvaj ju posuvníkom.

p = 1

$p = 1$

Známe obmedzenia

- Úplná diskusia po intervaloch len s jedným parametrom, s viacerými parametrami všeobecné prípady.
- Otázky na korene len pri lineárnych a kvadratických rovniciach; sústavy s parametrom len dve lineárne rovnice; parameter v odmocnine alebo logaritme zatiaľ nie.

12. Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Vzorec z matematiky, fyziky alebo chémie (m = ρV, S = πr², v = s/t) aplikácia upraví tak, aby zvolené písmeno zostalo samo na jednej strane. Ostatné písmená sú dané veličiny – počíta s nimi ako so známymi číslami. Kroky sú ekvivalentné úpravy ako v škole: prevedenie členov na druhú stranu, vynásobenie menovateľom, vydelenie, vyňatie pred zátvorku, odmocnenie, prevrátené hodnoty.

Ktoré písmeno vyjadriť, vyberiete čipom „Vyjadriť“; bez voľby aplikácia vyjadrí prvé písmeno na strane so vzorcom. Výsledok je vzorec s podmienkami – čím sa delí, nesmie byť nula (V = m/ρ pre ρ ≠ 0). Veličiny vo vzorci sú kladné, preto odmocnina má len kladnú hodnotu: r = √(S/π).

Rovnicu v x a y aplikácia vyjadrí podľa y (priamka 2x + y = x + 2y je y = x); pri ostatných rovniciach v x a y sú medzi čipmi derivácie, integrálu a grafu aj „Vyjadriť y“ a „Vyjadriť x“. Tu odmocnina dáva obe znamienka: x² + y² = 25 je y = ±√(25 − x²).

Rovnice s parametrom (2ax + a = 4x, neznáma x) sa nevyjadrujú ako vzorec, ale riešia s diskusiou – pozri predchádzajúcu kapitolu.

Ako zadať

`m = ρV`	Vzorec – na jednej strane samotná veličina, písmená veľké aj malé (E, I, V sú veličiny).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indexy podčiarkovníkom (R_1, v_0), grécke písmená (ρ, rho, \rho), π je konštanta.
`2x + y = x + 2y`	Rovnica v x a y – vyjadrí sa y.

Ukážky

Hustota – vydelenie veličinou s podmienkou ρ ≠ 0.

Zadanie: `m = ρV`

Výsledok

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Podmienky: $\rho \neq 0$

Postup

- Vyjadríme V. S ostatnými písmenami ($m,\ \rho$) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým V nezostane samo na jednej strane.
- Vymeníme strany rovnice: $\rho V = m$
- Obe strany vydelíme ρ, ktoré nesmie byť nula ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Obsah lichobežníka – vynásobenie dvoma, vydelenie výškou a prevedenie a.

Zadanie: `S = (a + c)/2 · v`

Výsledok

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Podmienky: $v \neq 0$

Postup

- Vyjadríme c. S ostatnými písmenami ($S,\ a,\ v$) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým c nezostane samo na jednej strane.
- Vymeníme strany rovnice: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Obe strany vynásobíme 2: $v(a+c) = 2S$
- Obe strany vydelíme v, ktoré nesmie byť nula ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Od oboch strán odčítame a: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Prevedieme na spoločného menovateľa: $c = \frac{2S - av}{v}$

Obsah kruhu – odmocnenie, polomer je kladný.

Zadanie: `S = πr^2`

Výsledok

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Postup

- Vyjadríme r. S ostatnými písmenami (S) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým r nezostane samo na jednej strane.
- Vymeníme strany rovnice: $\pi r^2 = S$
- Obe strany vydelíme π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Obe strany odmocníme. r je veličina a veličiny sú kladné – platí len kladná odmocnina: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Paralelné rezistory – spoločný menovateľ a prevrátené hodnoty.

Zadanie: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Výsledok

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Podmienky: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Postup

- Vyjadríme R_1. S ostatnými písmenami ($R,\ R_2$) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým R_1 nezostane samo na jednej strane.
- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Vymeníme strany rovnice: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Od oboch strán odčítame $\frac{1}{R_2}$: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Prevedieme na spoločného menovateľa: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Keď sa rovnajú dva výrazy, rovnajú sa aj ich prevrátené hodnoty: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Priamka – členy s y vľavo, ostatné vpravo.

Zadanie: `2x + y = x + 2y`

Výsledok

$$y = x$$

Postup

- Vyjadríme y. S ostatnými písmenami (x) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým y nezostane samo na jednej strane.
- Členy s y prevedieme na ľavú stranu, ostatné na pravú (s opačným znamienkom) a sčítame

  $$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Obe strany vynásobíme (-1): $y = x$

Kružnica vyjadrená podľa y – odmocnina s ±.

Zadanie: `x^2 + y^2 = 25`

Výsledok

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Postup

- Vyjadríme y. S ostatnými písmenami (x) počítame ako so známymi číslami a rovnicu upravujeme ekvivalentnými úpravami, kým y nezostane samo na jednej strane.
- Od oboch strán odčítame x^2: $y^2 = 25 - x^2$
- Obe strany odmocníme; rovnakú druhú mocninu má číslo aj číslo k nemu opačné, preto ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Známe obmedzenia

- Písmeno len v mocninách, zlomkoch a odmocninách; vo funkciách (sin, log, exponent) ani v druhej mocnine spolu s prvou (s = v_0t + ½at^2 podľa t) zatiaľ nie.

13. Úpravy výrazov

Výraz bez znamienka rovnosti aplikácia upraví podľa zvoleného čipu: zjednoduší (pri lomenom výraze prevedie na spoločný menovateľ a skráti, s podmienkami), roznásobí, rozloží na súčin (vyberaním pred zátvorku, vzorcami aj Hornerovou schémou) alebo rozloží na parciálne zlomky – ako na papieri, s rovnicami pre neznáme koeficienty. Rozklad na súčin je nad celými číslami; ak sa dá výraz nad reálnymi číslami rozložiť ďalej (pomocou iracionálnych koreňov), ukáže to ďalší krok. Odmocninu z jednočlena aplikácia čiastočne odmocní – pri párnej odmocnine s absolútnou hodnotou tam, kde môže byť základ záporný. Počíta aj s komplexnými číslami – delenie rozšírením komplexne združeným číslom.

Číselné výrazy so zlomkami počíta po krokoch ako v škole: najprv najvnútornejšie zátvorky (okrúhle, hranaté aj zložené), pri zloženom zlomku čitateľa a menovateľa zvlášť, potom mocniny, násobenie a delenie (zlomkom násobením prevrátenou hodnotou, aj s dvojbodkou alebo ÷) a nakoniec sčítanie cez spoločného menovateľa. Zmiešané číslo zapíšete s medzerou – 2 1/3 (z fotky aj 2⅓) – a aplikácia ho najprv prevedie na zlomok; súčin dvoch čísel píšte vždy s bodkou. Výsledok väčší ako 1 ukáže aj ako zmiešané číslo.

Polynóm vydelený polynómom zapíšte s dvojbodkou: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). Aplikácia delí pod sebou ako na papieri – vydelí najvyššie členy, výsledkom vynásobí deliteľa a odčíta – a ukáže podiel, zvyšok a skúšku; pri deliteli x − a ponúkne aj Hornerovu schému. Zlomok p/q sa ako doteraz zjednoduší, delenie zvolíte čipom „Delenie polynómov“.

Binomická veta: k-ty člen rozvoja („5. člen (2x - 1/x)^8“) aj člen bez x („člen bez x v (x + 1/x)^10“) zo všeobecného člena. Permutácie P(5) a s opakovaním P′(2, 3, 1) aplikácia počíta ako faktoriály.

Kombinatoriku môžete zadať aj krátkou vetou (zatiaľ po česky): „Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?“ (s dovetkom „záleží na pořadí“, „s opakováním“), „Kolika způsoby lze seřadit 5 osob?“ (aj okolo okrúhleho stola), „Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 bez opakování?“ a „Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?“. Vie aj dve klasické úlohy o pravdepodobnosti: narodeninový problém (aspoň dvaja z n ľudí oslavujú narodeniny v ten istý deň) a šatniarku, ktorá stratí lístky (nikto nedostane svoj kabát – aj listy v obálkach).

Ukážky

Číselný výraz so zlomkami – najprv násobenie, potom spoločný menovateľ.

Zadanie: `2/3 - 1/6*2` Zjednodušiť

Výsledok

$$\frac{1}{3}$$

Postup

- Najprv násobenie a delenie: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Vnorené zátvorky od najvnútornejšej.

Zadanie: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Výsledok

$$7$$

Postup

- Najprv vypočítame najvnútornejšiu zátvorku: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Dosadíme: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Najprv vypočítame najvnútornejšiu zátvorku: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Dosadíme: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Najprv vypočítame najvnútornejšiu zátvorku: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Dosadíme: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Násobíme – čitateľa čitateľom, menovateľa menovateľom – a krátime: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Zložený zlomok – čitateľ a menovateľ zvlášť, potom násobenie prevrátenou hodnotou.

Zadanie: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Výsledok

$$\frac{10}{21}$$

Postup

- Najprv vypočítame čitateľa a menovateľa zloženého zlomku zvlášť: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Najprv vypočítame čitateľa a menovateľa zloženého zlomku zvlášť: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Dosadíme: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Zložený zlomok: čitateľa vynásobíme prevrátenou hodnotou menovateľa
  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Zmiešané čísla – prevod na zlomky a výsledok aj ako zmiešané číslo.

Zadanie: `2 1/3 + 1 1/2`

Výsledok

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Postup

- Zmiešané čísla prevedieme na zlomky – celú časť vynásobíme menovateľom a pripočítame čitateľa
  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Dosadíme: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Prevedieme na spoločného menovateľa: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Výsledok ako zmiešané číslo: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Zjednodušenie lomeného výrazu.

Zadanie: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Zjednodušiť

Výsledok

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Podmienky: $x \neq -1$

Postup

- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $x \neq -1$
- Rozložíme čitateľa a menovateľa na súčin: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Skrátime spoločným činiteľom $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Roznásobenie.

Zadanie: `(x + 2)^3` Roznásobiť

Výsledok

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Postup

- Roznásobíme zátvorky a sčítame podobné členy: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Rozklad na súčin Hornerovou schémou.

Zadanie: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Rozložiť

Výsledok

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Postup

- Racionálne korene môžu byť len delitele absolútneho člena -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Hornerovou schémou overíme koreň $x = 1$ a vydelíme ním polynóm:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Dosadením zistíme, že títo kandidáti korene nie sú: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Hornerovou schémou overíme koreň $x = 2$ a vydelíme ním polynóm:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Rozklad na parciálne zlomky.

Zadanie: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Parciálne zlomky

Výsledok

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Podmienky: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Postup

- Podmienky – menovateľ nesmie byť nula: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Rozložíme menovateľa na súčin: $(x-1)(x+2)$
- Rozklad hľadáme v tvare: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Obe strany vynásobíme menovateľom $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Dosadíme $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Dosadíme $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Čiastočné odmocnenie s absolútnou hodnotou.

Zadanie: `sqrt(8a^5 b^2)` Zjednodušiť

Výsledok

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Postup

- Čiastočne odmocníme – mocniny pod odmocninou vyberieme pred ňu (pri párnej odmocnine s absolútnou hodnotou, kde môže byť základ záporný): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Delenie komplexných čísel.

Zadanie: `(3+4i)/(1-2i)` Algebraický tvar

Výsledok

$$-1+2i$$

Postup

- Zlomok rozšírime číslom komplexne združeným k menovateľu, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Rovnica s faktoriálmi – podmienky, skrátenie a kontrola koreňov.

Zadanie: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Výsledok

$$x = 5$$

Postup

- Podmienky: faktoriál a kombinačné číslo existujú len pre celé nezáporné čísla – každý argument (pri kombinačnom čísle n, k aj n − k) musí byť celé číslo ≥ 0: $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Faktoriály rozpíšeme na najmenší z nich, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), a skrátime; kombinačné číslo zapíšeme ako súčin: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2 + x = 30$
- Zostáva rovnica bez faktoriálov, všetko prevedieme na jednu stranu: $x^2 + x - 30 = 0$
- Korene rovnice sú $x = -6,\ x = 5$; podmienkam vyhovuje $x = 5$

Delenie pod sebou – podiel, zvyšok a skúška.

Zadanie: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Výsledok

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Postup

- 1. krok – vydelíme najvyššie členy $2x^3 : x^2 = 2x$, výsledkom vynásobíme deliteľa $2x \cdot \left(x^2+1\right) = 2x^3+2x$ a odčítame, zostane $3x^2-3x+5$
- 2. krok – vydelíme najvyššie členy $3x^2 : x^2 = 3$, výsledkom vynásobíme deliteľa $3 \cdot \left(x^2+1\right) = 3x^2+3$ a odčítame, zostane $-3x+2$
- Delenie pod sebou $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- Podiel je $2x+3$, zvyšok $-3x+2$
- Skúška – podiel krát deliteľ plus zvyšok dá delenec: $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

Delenie dvojčlenom x − 1 Hornerovou schémou.

Zadanie: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Hornerova schéma

Výsledok

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Postup

- Hornerova schéma pre $x=1$ – hore koeficienty delenca, dole ich postupné súčty; posledné číslo je zvyšok

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- Podiel je x^2+x-1, zvyšok 0
- Skúška – podiel krát deliteľ plus zvyšok dá delenec: $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Rovnica s kombinačným číslom C(n, 2) – aj V(n, k), C', V' s opakovaním.

Zadanie: `C(n, 2) = 45`

Výsledok

$n = 10$

Postup

- Podmienky: faktoriál a kombinačné číslo existujú len pre celé nezáporné čísla – každý argument (pri kombinačnom čísle n, k aj n − k) musí byť celé číslo ≥ 0: $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Faktoriály rozpíšeme na najmenší z nich, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), a skrátime; kombinačné číslo zapíšeme ako súčin: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Zostáva rovnica bez faktoriálov, všetko prevedieme na jednu stranu: $n^2 - n - 90 = 0$
- Korene rovnice sú $n = -9,\ n = 10$; podmienkam vyhovuje $n = 10$

Výber k z n zadaný vetou – kombinácie.

Zadanie: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Výsledok

120

Postup

- Vyberáme 3 z 10, na poradí nezáleží a prvky sa neopakujú – počet kombinácií:
- $C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Párne trojmiestne čísla – dva prípady podľa poslednej číslice.

Zadanie: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Výsledok

52

Postup

- Hľadáme 3ciferné čísla z číslic $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Na prvom mieste nesmie byť nula. Číslice sa nesmú opakovať. Číslo je párne práve vtedy, keď je párna jeho posledná číslica.
- Na konci je 0 – na ostatné miesta zostávajú všetky ostatné číslice: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- Na konci je iná vhodná číslica ako 0 – na prvom mieste potom nesmie byť nula ani táto číslica: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Oba prípady sčítame: $20 + 32 = 52$

Slová z písmen slova – permutácie s opakovaním.

Zadanie: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Výsledok

151200

Postup

- Slovo má 10 písmen, spočítame, koľkokrát je v ňom ktoré: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Slová sú permutácie s opakovaním – výmenou rovnakých písmen vznikne to isté slovo:
  $P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$

Narodeninový problém cez opačný jav.

Zadanie: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Výsledok

$P(A) \approx 0{,}5073$

Postup

- Ľahšie je spočítať opačný jav A': všetkých 23 ľudí má narodeniny v rôzne dni (rok má 365 dní, každý je rovnako pravdepodobný).
- Pravdepodobnosť, že sú všetky narodeniny rôzne
  $P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- Hľadaná pravdepodobnosť je doplnok do jednej:
  $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Šatniarka stratila lístky – permutácie bez pevného bodu.

Zadanie: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Výsledok

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Postup

- Rozdania, pri ktorých nikto nedostane to svoje, sú permutácie bez pevného bodu – ich počet podľa princípu inklúzie a exklúzie
  $$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$
- Všetkých rozdaní je n!, pravdepodobnosť je podiel:
  $$P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$
- Pre väčší počet ľudí sa pravdepodobnosť takmer nemení:
  $$\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$$

Člen binomického rozvoja bez x.

Zadanie: `člen bez x v (x + 1/x)^10`

Výsledok

$$T_6 = 252$$

Postup

- Všeobecný $(k+1)$. člen binomického rozvoja:
  $$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$$
- Člen bez x má exponent pri x nulový:
  $$10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$$
- Hľadaný 6. člen: $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Deliteľnosť a prvočísla

Samotné celé číslo aplikácia rozloží na prvočinitele – delí ho postupne najmenšími prvočíslami a zapíše 360 = 2³·3²·5; pri prvočísle ukáže, že ho nedelí žiadne prvočíslo do jeho odmocniny. Test môžete zadať aj ako prvocislo(97).

Najväčší spoločný deliteľ NSD(60, 90) a najmenší spoločný násobok NSN(18, 30) aplikácia počíta z rozkladov na prvočinitele, čipom „Euklidov algoritmus“ delením so zvyškom. Rozšírený Euklidov algoritmus s tabuľkou dá Bézoutovu rovnosť bezout(240, 46): NSD(240, 46) = 240·u + 46·v.

Delitele čísla dělitelé(36) aplikácia hľadá po dvojiciach 1·36, 2·18, … až k odmocnine a počet overí z rozkladu. Znaky deliteľnosti dělitelnost(1236) prejde tabuľkou pre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 a 25 (posledná číslica, ciferný súčet, striedavý súčet…); jeden deliteľ napíšete ako dělitelnost(1236, 7), vetou „je 1236 dělitelné 7“ (zatiaľ po česky) alebo 7 | 1236 – pre deliteľa bez školského pravidla aplikácia vydelí so zvyškom. Prvočísla do 200 nájde Eratostenovým sitom („prvočísla do 50“). Lineárnu rovnicu ax + by = c v celých číslach („3x + 5y = 1, x, y ∈ $\mathbb{Z}$“ alebo čipom $\mathbb{Z}$) rieši cez Bézoutovu rovnosť – všetky riešenia x = x_0 + 5k, y = y_0 − 3k.

Modulárna aritmetika: zvyšok 17 mod 5, inverzia 3^(-1) mod 11 (z rozšíreného Euklidovho algoritmu, so skúškou) a mocnina 7^13 mod 13 opakovaným umocňovaním na druhú. Na nich stojí šifra RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) vypočíta n, φ(n), súkromný kľúč d a správu zašifruje a znova dešifruje; e a m môžete vynechať.

Ako zadať

`360, rozklad(360), prvocislo(97)`	Rozklad na prvočinitele, test prvočíselnosti.
`NSD(60, 90), NSN(18, 30)`	Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok (aj gcd, lcm).
`dělitelé(36), dělitelnost(1236), dělitelnost(1236, 7)`	Delitele čísla a znaky deliteľnosti – všetky, alebo jeden deliteľ (aj veta „je 1236 dělitelné 7“, 7 | 1236).
`prvočísla do 50`	Prvočísla do n (najviac 200) Eratostenovým sitom; aj prvocisla(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Lineárna rovnica v celých číslach (diofantická); aj diofant(3, 5, 1).
`bezout(240, 46)`	Bézoutova rovnosť.

`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Zvyšok, inverzia a mocnina modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	Šifra RSA s malými číslami.

Ukážky

Rozklad na prvočinitele postupným delením.

Zadanie: `360`

Výsledok

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Postup

- Číslo 360 delíme postupne najmenšími prvočíslami, kým nezostane 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Rozklad na prvočinitele: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Prvočíslo – žiadny deliteľ do odmocniny.

Zadanie: `97`

Výsledok

Číslo je prvočíslo.

Postup

- Stačí skúsiť prvočísla do $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – žiadne z nich číslo 97 nedelí, je to teda prvočíslo.

NSD z rozkladov na prvočinitele.

Zadanie: `NSD(60, 90)`

Výsledok

$$\mathrm{NSD}\,(60, 90) = 30$$

Postup

- Rozklad na prvočinitele: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Rozklad na prvočinitele: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Najväčší spoločný deliteľ je súčin spoločných prvočiniteľov s najmenšími exponentmi:
  $\mathrm{NSD}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

NSN cez NSD Euklidovým algoritmom.

Zadanie: `NSN(60, 90)` Euklidov algoritmus

Výsledok

$$\mathrm{NSN}\,(60, 90) = 180$$

Postup

- Euklidov algoritmus – väčšie číslo vydelíme menším so zvyškom, potom deliteľa zvyškom, kým zvyšok nie je 0; posledný nenulový zvyšok je najväčší spoločný deliteľ

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{NSD}\,(60, 90) = 30$$

- Najmenší spoločný násobok je súčin čísel delený ich najväčším spoločným deliteľom

$$\mathrm{NSN}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{NSD}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Delitele po dvojiciach, počet z rozkladu.

Zadanie: `dělitelé(36)`

Výsledok

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Postup

- Deliteľov hľadáme po dvojiciach $d \cdot 36/d$ – stačí skúšať čísla d do 6, druhého deliteľa dvojice k nim dopočítame

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Kontrola počtu deliteľov z rozkladu na prvočinitele – exponenty zväčšené o 1 vynásobíme:
  $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

Tabuľka znakov deliteľnosti.

Zadanie: `dělitelnost(1236)`

Výsledok

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Postup

- Znaky deliteľnosti: 2, 5, 10 – posledná číslica; 4, 25 – posledné dvojčíslie; 8 – posledné trojčíslie; 3, 9 – ciferný súčet; 6 = 2 · 3 a 12 = 3 · 4 – obe zároveň; 7 – poslednú číslicu odtrhneme a jej dvojnásobok odčítame od zvyšku; 11 – striedavý súčet číslic

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Deliteľnosť siedmimi – odtrhnutie poslednej číslice.

Zadanie: `dělitelnost(1309, 7)`

Výsledok

$$7 \mid 1309$$

Postup

- Deliteľnosť siedmimi: odtrhneme poslednú číslicu, jej dvojnásobok odčítame od zvyšného čísla a opakujeme, kým nezostane najviac dvojciferné číslo – to je deliteľné 7 práve vtedy, keď je deliteľné pôvodné číslo (pri veľkých číslach býva rýchlejšie rovno deliť):
  $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Eratostenovo sito.

Zadanie: `prvočísla do 50`

Výsledok

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Postup

- Číslo 2 je prvočíslo – škrtneme všetky jeho násobky; menšie násobky už sú škrtnuté, začneme od $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- Číslo 3 je prvočíslo – škrtneme všetky jeho násobky; menšie násobky už sú škrtnuté, začneme od $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- Číslo 5 je prvočíslo – škrtneme všetky jeho násobky; menšie násobky už sú škrtnuté, začneme od $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- Číslo 7 je prvočíslo – škrtneme všetky jeho násobky; menšie násobky už sú škrtnuté, začneme od $7^2 = 49$: 49
- Eratostenovo sito: stačí škrtať násobky prvočísel do odmocniny z 50. Neškrtnuté čísla sú prvočísla – je ich 15

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

Bézoutova rovnosť rozšíreným Euklidovým algoritmom.

Zadanie: `bezout(240, 46)`

Výsledok

$$\mathrm{NSD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46$$

Postup

- Rozšírený Euklidov algoritmus – každý zvyšok r zapíšeme ako r = 240·u + 46·v; nový riadok je predposledný mínus q-násobok posledného

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- Z posledného nenulového riadku tabuľky vyplýva Bézoutova rovnosť:
  $\mathrm{NSD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Diofantická rovnica cez Bézoutovu rovnosť.

Zadanie: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Výsledok

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Rovnicu $3x + 5y = 1$ riešime v celých číslach. Má riešenie práve vtedy, keď najväčší spoločný deliteľ čísel 3 a 5 delí pravú stranu.
- Rozšírený Euklidov algoritmus – každý zvyšok r zapíšeme ako r = 5·u + 3·v; nový riadok je predposledný mínus q-násobok posledného

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- Z posledného nenulového riadku tabuľky vyplýva Bézoutova rovnosť: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- Bézoutovu rovnosť vynásobíme číslom 1 – dostaneme jedno riešenie: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, teda $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Všetky riešenia dostaneme, keď k x pripočítavame násobky 5 a k y zároveň násobky -3 (ľavá strana sa nezmení); posunom volíme najmenšie nezáporné $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Skúška: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Mocnina modulo n opakovaným umocňovaním na druhú.

Zadanie: `7^13 mod 13`

Výsledok

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Postup

- Exponent rozložíme na súčet mocnín dvojky:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Opakovane umocňujeme na druhú a berieme zvyšky modulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Vynásobíme potrebné mocniny a priebežne berieme zvyšky modulo 13
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – kľúče, zašifrovanie a dešifrovanie.

Zadanie: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Výsledok

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Postup

- Modul: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- Eulerova funkcia:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Euklidov algoritmus – väčšie číslo vydelíme menším so zvyškom, potom deliteľa zvyškom, kým zvyšok nie je 0; posledný nenulový zvyšok je najväčší spoločný deliteľ

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{NSD}\,(120, 7) = 1$$

- Verejný exponent e musí byť nesúdeliteľný s φ(n):
  $\mathrm{NSD}\,(7, 120) = 1$ – podmienka platí.
- Rozšírený Euklidov algoritmus – každý zvyšok r zapíšeme ako r = 120·u + 7·v; nový riadok je predposledný mínus q-násobok posledného

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- Súkromný exponent d je inverzia e modulo φ(n):
  $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Verejný kľúč $(n, e) = (143, 7)$, súkromný kľúč $(n, d) = (143, 103)$
- Zašifrovanie správy m: $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Exponent rozložíme na súčet mocnín dvojky:
  $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Opakovane umocňujeme na druhú a berieme zvyšky modulo 143
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Vynásobíme potrebné mocniny a priebežne berieme zvyšky modulo 143
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Dešifrovanie – vyjde pôvodná správa:
  $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Exponent rozložíme na súčet mocnín dvojky:
  $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Opakovane umocňujeme na druhú a berieme zvyšky modulo 143
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Vynásobíme potrebné mocniny a priebežne berieme zvyšky modulo 143
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Známe obmedzenia

- Rozklad na prvočinitele vie čísla do 10^{18}; väčšie prvočíslo len overí testom.
- RSA je školská ukážka s malými číslami (n = p·q do zhruba bilióna), nie skutočné šifrovanie.

15. Uhly v stupňoch, minútach a sekundách

Samotný uhol aplikácia prevedie do všetkých tvarov: stupne, minúty a sekundy (5,5° = 5°30′), desatinné stupne, minúty, sekundy a radiány – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Len jeden tvar dostanete zápisom „= ? ′“, „= ?°“, „= ?″“ alebo „= ? rad“. Radiány na stupne: „π/6 rad“.

Uhly sčítava a odčítava ako v škole – zvlášť stupne, minúty a sekundy; 60′ prevedie na 1°, a keď minút nie je dosť, rozmení jeden stupeň na 60′. Násobí a delí ich číslom: 100° : 3 delí postupne, zvyšok stupňov prevedie na minúty a zvyšok minút na sekundy.

Minúty a sekundy zapíšete znakmi ′ a ″ (na klávesnici aplikácie) alebo apostrofom a úvodzovkami: 25°30'15". Stupne s funkciou (sin 30°) počíta kapitola Goniometrické rovnice.

Ako zadať

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Uhol – stupne, minúty, sekundy, aj desatinné stupne.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Súčet, rozdiel, násobok a podiel číslom.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Jeden tvar prevodu, radiány na stupne.

Ukážky

Desatinné stupne vo všetkých tvaroch.

Zadanie: `5,5°`

Výsledok

$$
\begin{aligned}
&5^\circ 30' \\
&= 330' \\
&= 19800'' \\
&= \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}
\end{aligned}
$$

Postup

- Desatinnú časť stupňa prevedieme na minúty (1° = 60'), desatinnú časť minúty na sekundy (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- Na minúty: stupne násobíme 60 (1° = 60') a pripočítame minúty: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- Na sekundy: minúty násobíme 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- Na radiány: 180° = π rad, stupne teda násobíme π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$

Súčet – 60' prevedieme na 1°.

Zadanie: `25°30’ + 18°45’`

Výsledok

$$44^\circ 15'$$

Postup

- Sčítame zvlášť stupne, minúty a sekundy: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Každých 60" dáva 1' a každých 60' dáva 1° – prevedieme: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Rozdiel – jeden stupeň rozmeníme na 60′.

Zadanie: `25°15′ - 18°45′`

Výsledok

$6^\circ 30'$

Postup

- Minút (sekúnd) je menej, ako odčítame – jeden stupeň (minútu) rozmeníme na 60′ (60″): $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Odčítame zvlášť stupne, minúty a sekundy: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Delenie číslom so zvyškom v minútach.

Zadanie: `100° : 3`

Výsledok

$33^\circ 20'$

Postup

- Delíme postupne: stupne, zvyšok prevedieme na minúty a pripočítame; minúty, zvyšok na sekundy; sekundy

$$\begin{aligned} 100^\circ : 3 &= 33^\circ,\ 1^\circ = 60' \\ 60' : 3 &= 20' \\ \Rightarrow\ 100^\circ : 3 &= 33^\circ 20' \end{aligned}$$

Radiány na stupne.

Zadanie: `π/6 rad`

Výsledok

$$\begin{aligned} &30^\circ \\ &= 1800' \\ &= 108000'' \end{aligned}$$

Postup

- Z radiánov na stupne: π rad = 180°, násobíme teda 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- Na minúty: stupne násobíme 60 (1° = 60′) a pripočítame minúty: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- Na sekundy: minúty násobíme 60 (1′ = 60″): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Známe obmedzenia

- Rovnice s uhlami v minútach (x + 25°30′ = 90°) zatiaľ nie.

16. Percentá, pomer a trojčlenka

Percentá zadáte krátko, bez slovnej úlohy: časť „20 % z 480“, základ „15 % = 45“, počet percent „96 z 480 = ? %“, zdraženie a zľavu „480 + 15 %“, „480 − 20 %“ a pôvodnú hodnotu pred zmenou „x − 20 % = 384“. Aplikácia počíta cez 1 % ako dnes v škole (1 % = 480 : 100 = 4,8); čipom „Vzorcom“ prepnete na časť = základ · počet percent s percentami ako desatinným číslom (480 · 0,2).

Pomer „12 : 18“ skráti na 2 : 3, celok rozdelí v pomere („300 v poměru 2 : 3 : 5“ – súčet dielov, jeden diel, jednotlivé časti) a úmeru „3 : 4 = x : 20“ vyrieši súčinom vonkajších a vnútorných členov. Pomer zlomkov („2/3 : 4/9“) najprv vynásobí najmenším spoločným násobkom menovateľov; vnútri dlhšieho výrazu je dvojbodka delenie.

Trojčlenku zapíšete ako v škole – dva riadky s tromi bodkami (alebo …, →): „10 kg … 25 €, 12 kg … x“, jednotky môžete vynechať. Predvolená je priama úmernosť, čipom „Nepriama“ (alebo slovom „nepřímá“ za čiarkou) nepriama. Jednoduchý úrok: úrok(istina, sadzba %, roky, daň %) – daň je nepovinná. Zložený úrok: složený úrok(vklad, sadzba %, roky, daň %, frekvencia) – daň a frekvencia (ročně, pololetně, čtvrtletně, měsíčně, spojitě) sú nepovinné; ďalšie úlohy (sporenie, úver, úročenie na dni) sú v Aplikáciách, kapitola Ekonómia.

Ako zadať

`20 % z 480, 15 % = 45, 96 z 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Percentá – časť, základ, počet percent, zmena, pôvodná hodnota.
`12 : 18, 300 v poměru 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Krátenie pomeru, rozdelenie v pomere, úmera.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	Trojčlenka – priama aj nepriama úmernosť.
`úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Jednoduchý úrok s daňou.
`složený úrok(10000, 3 %, 5, 15 %, měsíčně)`	Zložený úrok s daňou a frekvenciou pripisovania.

Ukážky

Časť cez 1 %.

Zadanie: `20 % z 480`

Výsledok

96

Postup

- Najprv 1 % – základ (celok, 100 %) vydelíme 100:
  $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Hľadané percentá sú toľkokrát 1 %: $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Zľava vzorcom.

Zadanie: `480 - 20 %` Vzorcom časť = základ · počet percent

Výsledok

384

Postup

- Znížená hodnota = základ · (1 − počet percent),
  $20\,\% = 0{,}2$: $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Pôvodná cena pred zľavou.

Zadanie: `x - 20 % = 384`

Výsledok

$x = 480$

Postup

- Pôvodná hodnota je 100 %; po znížení z nej zostalo menej percent – a to je známa hodnota:
  $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % dostaneme, keď známu hodnotu vydelíme počtom jej percent: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- Základ je 100 %, teda stokrát 1 %:
  $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Rozdelenie v pomere.

Zadanie: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Výsledok

$$60,\ 90,\ 150$$

Postup

- Celok rozdelíme na toľko dielov, koľko je súčet členov pomeru: $2 + 3 + 5 = 10$
- Na jeden diel pripadá: $300 : 10 = 30$
- Každá časť má toľko dielov, koľko hovorí jej člen pomeru: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; skúška $60 + 90 + 150 = 300$

Pomer zlomkov.

Zadanie: `2/3 : 4/9`

Výsledok

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Postup

- Zlomky odstránime – všetky členy pomeru vynásobíme najmenším spoločným násobkom menovateľov 9
  $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$
- Pomer skrátime – všetky členy vydelíme ich najväčším spoločným deliteľom 2: $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Nepriama úmernosť.

Zadanie: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Nepriama

Výsledok

$$x = 8\,\text{dní}$$

Postup

- Zápis trojčlenky. Nepriama úmernosť – koľkokrát viac jednej veličiny, toľkokrát menej druhej, šípky mieria proti sebe

$$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

- Podľa šípok zostavíme úmeru – druhý pomer je prevrátený: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Jednoduchý úrok s daňou 15 %.

Zadanie: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Výsledok

$$10000 + 510 = 10510$$

Postup

- Úrok = istina · p/100 · doba v rokoch:
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Z úroku sa odvádza daň $15\,\%$, zostane čistý úrok:
  $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Na konci je istina aj s úrokom: $10000 + 510 = 10510$

Zložený úrok s daňou 15 % a mesačným pripisovaním.

Zadanie: `složený úrok(10000, 3 %, 5, 15 %, měsíčně)`

Výsledok

$$K_n \approx 11\,358{,}31$$

Postup

- Zadané: $K_0 = 10\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Prevedieme jednotky:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Pri jednoduchom úročení sa úrok počíta stále z pôvodného vkladu: K_n = K₀(1 + pn). Pri zloženom sa úroky pripisujú a ďalej úročia: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), kde m je počet pripísaní za rok (ročné, polročné, štvrťročné, mesačné). Spojité úročenie je limita pre m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Daň z úrokov d (na Slovensku 19 %, v ČR 15 %) znižuje sadzbu na p(1 − d). Efektívna ročná sadzba porovná rôzne frekvencie. Diskontovanie je opačný výpočet – koľko vložiť dnes. S infláciou π je reálna hodnota K_n/(1 + π)^n. Zmiešané úročenie (ako banky pripisujú úroky raz ročne) úročí celé roky zložene a zvyšok posledného roka jednoducho: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Rovnica modelu: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Pripísanie úrokov za rok: $m = 12$
- Sadzba po zdanení úrokov:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Efektívna ročná sadzba:
  $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Dosadíme: $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11\,358{,}31$
- Úroky spolu: $K_n - K_0 \approx 1\,358{,}31$

Známe obmedzenia

- Slovné úlohy zatiaľ nie – zadanie treba zapísať krátko; zložené úročenie s pravidelnými vkladmi a ďalšie finančné úlohy sú vo formulároch v Aplikáciách.

17. Prevody jednotiek

Prevod zapíšete ako „5 m² = ? cm²“ (alebo „5 m2 na cm2“). Aplikácia napíše prevodný vzťah a podľa neho násobí (na menšiu jednotku) alebo delí (na väčšiu); pri desatinných jednotkách dodá, o koľko miest sa posunie desatinná čiarka. Pri plochách a objemoch vysvetlí, prečo je prevodné číslo mocninou: 1 m = 100 cm, teda 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Dĺžka mm až km, plocha mm² až km² aj ár a hektár, objem mm³ až m³ aj ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), hmotnosť mg až t, čas s, min, h, d – aj zložený „1 h 30 min“ a výsledok v hodinách a minútach –, rýchlosť km/h a m/s (1 m/s = 3,6 km/h) a teplota °C, K, °F podľa vzorcov.

Ako zadať

`5 m² = ? cm², 3,5 l na m³, 1 h 30 min = ? min`	Hodnota s jednotkou, „= ?“ (alebo „na“) a cieľová jednotka.

Ukážky

Plocha – prevodné číslo je druhá mocnina.

Zadanie: `5 m² = ? cm²`

Výsledok

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Postup

- Pri plochách a objemoch sa prevádzajú oba (všetky tri) rozmery – prevodné číslo dĺžok umocníme
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Na menšiu jednotku – vyjde viac jednotiek, číslo násobíme: $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Ak násobíme jednotkou s nulami (tu 4), posunieme desatinnú čiarku doprava o toľko miest, koľko má núl; chýbajúce miesta doplníme nulami.

Litre na kubické metre.

Zadanie: `3,5 l = ? m³`

Výsledok

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Postup

- Prevodný vzťah: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- Na väčšiu jednotku – vyjde menej jednotiek, číslo delíme: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Ak delíme jednotkou s nulami (tu 3), posunieme desatinnú čiarku doľava o toľko miest, koľko má núl; chýbajúce miesta doplníme nulami.

Minúty na hodiny aj v hodinách a minútach.

Zadanie: `150 min = ? h`

Výsledok

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Postup

- Prevodný vzťah: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- Na väčšiu jednotku – vyjde menej jednotiek, číslo delíme: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- V hodinách a minútach: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Rýchlosť – delíme 3,6.

Zadanie: `72 km/h = ? m/s`

Výsledok

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Prevodný vzťah: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- Na väčšiu jednotku – vyjde menej jednotiek, číslo delíme: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Teplota vzorcom.

Zadanie: `20 °C = ? K`

Výsledok

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Postup

- Teploty sa neprevádzajú násobkom, ale vzorcom (stupnice majú inú nulu):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logika a množiny

Výrok so spojkami ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ aplikácia vyhodnotí pravdivostnou tabuľkou – stĺpec pre každú spojku, jednotky pre pravdu – a povie, či je to tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľný výrok; pri splniteľnom pripíše disjunktívnu a konjunktívnu normálnu formu a zjednodušený tvar.

Čipom „Negácia“ výrok neguje krok za krokom podľa de Morganových zákonov, negácie implikácie a ekvivalencie. Výrok s kvantifikátormi (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) neguje rovno – všeobecný kvantifikátor sa zmení na existenčný, nerovnosť na opačnú. Pri implikácii ponúkne aj obmenenú a obrátenú implikáciu.

Množiny zadané vymenovaním ({1, 2, 3}) alebo intervalom ((1; 5), ⟨3; 7)) a ich zjednotenie, prienik, rozdiel, doplnok vzhľadom na základnú množinu U a symetrický rozdiel aplikácia vypočíta operáciu po operácii. Pri vymenovaní nakreslí Vennov diagram s prvkami v jednotlivých oblastiach, pri intervaloch výsledok na číselnej osi.

Bez zadaných prvkov (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) overí rovnosť množinových výrazov tabuľkou príslušnosti a Vennovými diagramami oboch strán; samotný výraz (A \ B) ∪ (B \ C) vyfarbí vo Vennovom diagrame. Rozhodne tiež, či platí 3 ∈ A alebo A ⊆ B.

Ako zadať

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Spojky z klávesnice aplikácie (záložka ∧∪) alebo z fotky (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Implikácia a ekvivalencia šípkami z bežnej klávesnice. &, | a ! aplikácia ako spojky nečíta – znamenajú absolútnu hodnotu a faktoriál.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Kvantifikátory s oborom (∈ ℝ) alebo podmienkou (> 0), za dvojbodkou výrok.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	Úloha zapísaná slovom (zatiaľ po česky alebo anglicky) – negace, obměněná a obrácená implikace (negation, contrapositive, converse).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Množina vymenovaním (prvky oddelené čiarkou, s bodkočiarkami pri desatinnej čiarke), intervalom, základná množina U; každá definícia na vlastný riadok alebo za čiarku.

`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	Zjednotenie, prienik, rozdiel (aj \), doplnok A', symetrický rozdiel; prienik sa vyhodnocuje pred ostatnými.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Prvok množiny a podmnožina – platí, alebo neplatí.

Ukážky

Tautológia – implikácia je ekvivalentná so svojou obmenou.

Zadanie: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Výsledok

Výrok je tautológia – je pravdivý pre každé ohodnotenie.

Postup

- Tabuľka pravdivostných hodnôt (1 – pravda, 0 – nepravda), stĺpec pre každú spojku

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- V poslednom stĺpci sú samé jednotky – výrok je pravdivý pre každé ohodnotenie, je to tautológia.

Splniteľný výrok s normálnymi formami.

Zadanie: `(p ∨ q) ⇒ r`

Výsledok

Výrok je splniteľný – pravdivý len pre niektoré ohodnotenia. Zjednodušený ekvivalentný tvar:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Postup

- Tabuľka pravdivostných hodnôt (1 – pravda, 0 – nepravda), stĺpec pre každú spojku

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- V poslednom stĺpci sú jednotky aj nuly – výrok je splniteľný, ale nie je to tautológia.
- Zjednodušený tvar: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; úplná disjunktívna normálna forma – disjunkcia riadkov, kde je výrok pravdivý
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- Konjunktívna normálna forma – z riadkov, kde je výrok nepravdivý
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Negácia de Morganovými zákonmi krok za krokom.

Zadanie: `p ∧ (q ⇒ r)` Negácia

Výsledok

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Postup

- Negácia výroku: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- De Morganov zákon, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$:
  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- Negácia implikácie, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$:
  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Negácia výroku s kvantifikátorom.

Zadanie: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Výsledok

$$\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$$

Postup

- Negácia výroku: $\neg\big(\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 > 0\big)$
- Negácia všeobecného výroku – „pre všetky platí“ sa zmení na „existuje, pre ktoré neplatí“: $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \neg\big(x^2 + 1 > 0\big)$
- Negácia rovnosti či nerovnosti je opačný vzťah ($<$ na $\geq$, $=$ na $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Obmenená implikácia.

Zadanie: `p ⇒ ¬q` Obmena implikácie

Výsledok

$$q \Rightarrow \neg p$$

Postup

- Obmena implikácie $A \Rightarrow B$ je $\neg B \Rightarrow \neg A$ – je s ňou ekvivalentná: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, po úprave negácií $q \Rightarrow \neg p$

Doplnok zjednotenia s Vennovým diagramom.

Zadanie: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

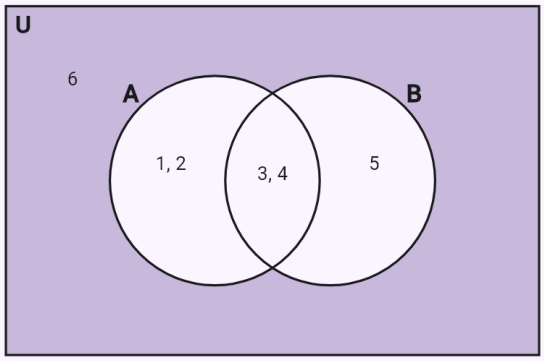
Výsledok

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Postup

- Zadané: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Zadané: $B = \{3, 4, 5\}$
- Zadané: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Zjednotenie – prvky, ktoré patria aspoň do jednej z množín: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Doplnok – prvky základnej množiny, ktoré do množiny nepatria: $(A \cup B)' = \{6\}$

Graf



Prienik intervalov na číselnej osi.

Zadanie: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

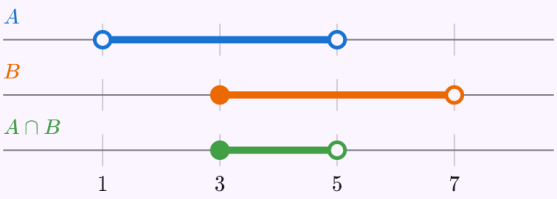
Výsledok

$$A \cap B = \langle 3;\ 5)$$

Postup

- Zadané: $A = (1;\ 5)$
- Zadané: $B = \langle 3;\ 7)$
- Prienik – prvky, ktoré patria do oboch množín: $A \cap B = \langle 3;\ 5)$

Graf



Každá zadaná množina má na osi svoj riadok, nazeleno je výsledok. Plné koliesko do množiny patrí, prázdne nie.

Distributívny zákon tabuľkou príslušnosti.

Zadanie: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Výsledok

Rovnosť platí – obe strany sú tá istá množina.

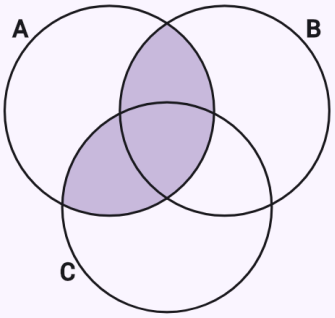
Postup

- Tabuľka príslušnosti – pre každú možnosť, do ktorých množín prvok patrí (1 – patrí), porovnáme obe strany

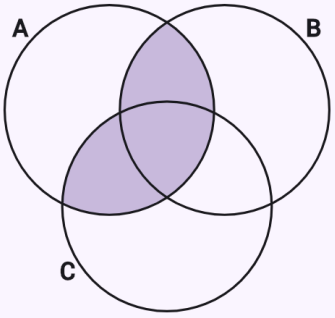
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Graf

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



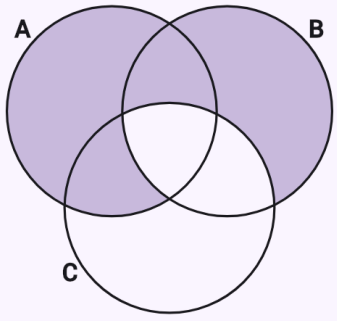
Množinový výraz vo Vennovom diagrame.

Zadanie: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Výsledok

$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Graf



Známe obmedzenia

- Pravdivostná tabuľka najviac pre 5 premenných (32 riadkov), Vennov diagram najviac pre 4 množiny.
- Množiny zadané vlastnosťou ({x ∈ ℝ: x² < 4}) zatiaľ aplikácia nečíta – zapíšte ich intervalom.

19. Komplexné čísla

Komplexné číslo zapíšte s imaginárnou jednotkou i: 1 - i√3 (alebo 1 - i*sqrt(3)), v goniometrickom tvare 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) alebo cis(pi/3), v exponenciálnom 3e^(i pi/4); uhly môžete zadať aj v stupňoch (cos 60° + i sin 60°). Čísla možno pomenovať, každé na vlastnom riadku (z_1 = 1 + i), a na posledný riadok napísať výraz s ich menami (z_1/z_2, z^8).

Pri samotnom čísle aplikácia vypočíta absolútnu hodnotu $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ a argument φ – z tabuľkových hodnôt kosínusu a sínusu, inak cez ostrý uhol z $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ podľa kvadrantu (presne s arctg aj približne v radiánoch a v stupňoch) – a zapíše goniometrický a exponenciálny tvar. Číslo v goniometrickom tvare prevedie na algebraický. Argument je v intervale $\langle 0; 2\pi)$, čipom „Hlavná hodnota argumentu“ ho prepnete na $(-\pi; \pi\rangle$. Graf ukáže číslo v Gaussovej rovine ako vektor s oblúkom argumentu.

Mocninu (1 + i)^10 aplikácia počíta Moivreovou vetou a argument zmenší o násobky 2π; súčin a podiel cez absolútne hodnoty a argumenty. Čipom zvolíte „Goniometrický tvar“ (pri mocnine „Moivreova veta“) alebo „Algebraický tvar“; delenie algebraických čísel rozšírením komplexne združeným číslom je v kapitole Úpravy výrazov. Odmocnina root(3, 8i) aj binomická rovnica $z^3 = 8i$ dajú všetkých n koreňov zo vzorca $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; v grafe ležia vo vrcholoch pravidelného n-uholníka. Rovnica s neznámou z sa rieši rovno v komplexnom obore, čip „Obor riešenia:“ ju prepne na $\mathbb{R}$. Kvadratickú rovnicu s komplexnými koeficientmi ($z^2 + i = 2z$) aplikácia rieši doplnením na štvorec, $(z - 1)^2 = 1 - i$, a odmocninu komplexného čísla hľadá ako a + bi porovnaním reálnych a imaginárnych častí.

Rovnicu s komplexne združeným číslom $\bar{z}$ (kláves $\bar{z}$ vloží conj(z), z fotky \bar{z}), s |z|, Re z a Im z aplikácia rieši dosadením z = x + yi: obe strany upraví na tvar a + bi, porovná reálne a imaginárne časti a vzniknutú sústavu dvoch rovníc pre x a y vyrieši – jednu rovnicu vyjadrí a dosadí do druhej, a keď sa dá rozložiť na súčin (y(2x + 1) = 0), rozdelí riešenie na prípady. Riešenia ukáže ako body Gaussovej roviny. Keď sa imaginárne časti porovnajú samy ($|z - 1| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $|z - i| < |z + 1|$), je výsledkom množina bodov: aplikácia umocní absolútne hodnoty, doplní na štvorce a opíše kružnicu (kruh, vonkajšok kruhu), priamku, polrovinu alebo os úsečky. Viac podmienok, každú na vlastný riadok alebo oddelené čiarkou ($|z| \leq 2$, $\operatorname{Re} z > 0$), aj dvojitú nerovnosť ($1 < |z - 1| \leq 2$) zakreslí ako prienik – vyfarbenú oblasť, plná hranica do množiny patrí, čiarkovaná nie.

Ako zadať

`1 - i*sqrt(3)`	Algebraický tvar s imaginárnou jednotkou i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	Goniometrický tvar, skrátene cis φ.
`3e^(i pi/4)`	Exponenciálny tvar.

`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Pomenované čísla, každé na vlastnom riadku, a výraz s nimi.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Všetky n-té odmocniny, binomická rovnica.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Komplexne združené číslo, reálna a imaginárna časť.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Množina bodov v Gaussovej rovine, viac podmienok po riadkoch.

Ukážky

Absolútna hodnota, argument z tabuľkových hodnôt, goniometrický a exponenciálny tvar.

Zadanie: `1 - i*sqrt(3)`

Výsledok

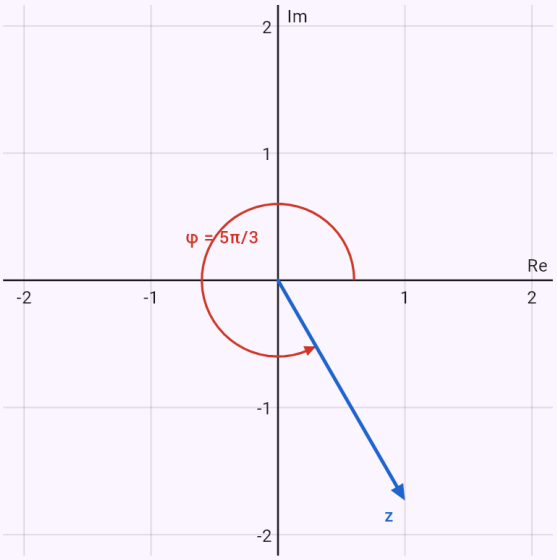
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Postup

- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²):
  $$\left|1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – sú to tabuľkové hodnoty
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- Goniometrický tvar z = |z|(cos φ + i sin φ):
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- Exponenciálny tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Argument, ktorý nie je v tabuľke – ostrý uhol a kvadrant.

Zadanie: `-3 + 4i`

Výsledok

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

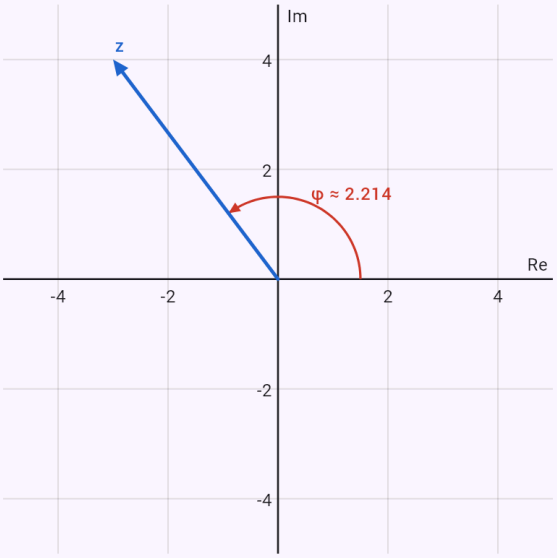
$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Postup

- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- Ostrý uhol α z tg α = |b/a|. Číslo leží v 2. kvadrante, odtiaľ argument
  $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$
  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- Goniometrický tvar z = |z|(cos φ + i sin φ)
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$
- Exponenciálny tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Z goniometrického tvaru na algebraický.

Zadanie: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Výsledok

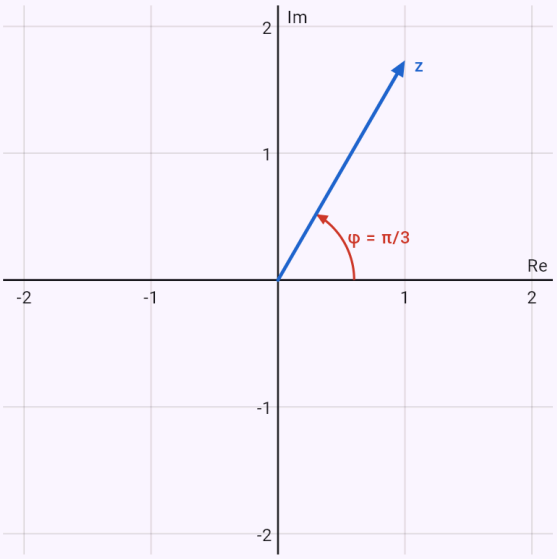
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Postup

- Číslo je zadané v goniometrickom (exponenciálnom) tvare – absolútnu hodnotu a argument prečítame
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosínusu a sínusu a roznásobíme
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- Exponenciálny tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Moivreova veta.

Zadanie: `(1 + i)^10` Moivreova veta

Výsledok

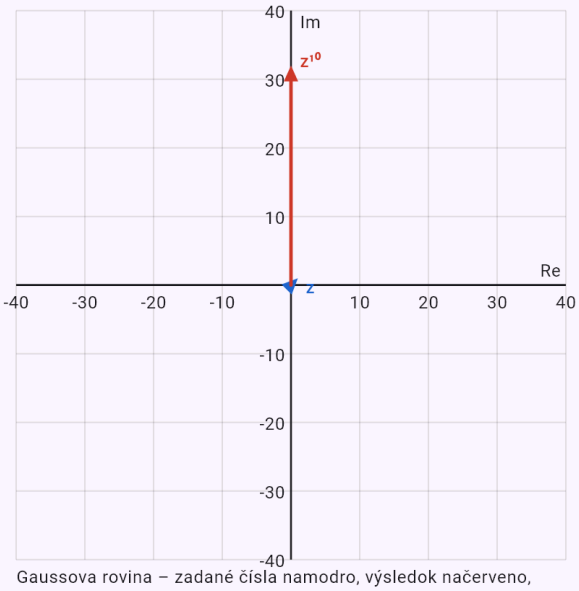
$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

Postup

- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – sú to tabuľkové hodnoty
  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Moivreova veta $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- Argument upravíme do intervalu $\langle 0; 2\pi)$ – odčítame (pripočítame) násobok plného uhla: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosínusu a sínusu a roznásobíme: $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Podiel v goniometrickom tvare.

Zadanie: `z_1 = 1 + i`
`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Goniometrický tvar

Výsledok

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

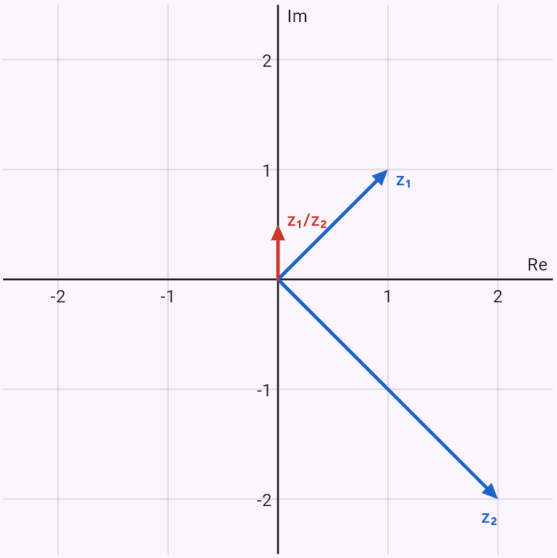
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Postup

- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – sú to tabuľkové hodnoty
  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²):
  $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Argument φ určíme z cos φ = a/|z| a sin φ = b/|z| – sú to tabuľkové hodnoty
  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Pri delení sa absolútne hodnoty delia a argumenty odčítajú
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- Argument upravíme do intervalu $\langle 0; 2\pi)$ – odčítame (pripočítame) násobok plného uhla: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- Algebraický tvar – dosadíme hodnoty kosínusu a sínusu a roznásobíme

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0 + i) = \frac{1}{2}i$$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Binomická rovnica – tri korene vo vrcholoch trojuholníka.

Zadanie: `z^3 = 8i`

Výsledok

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

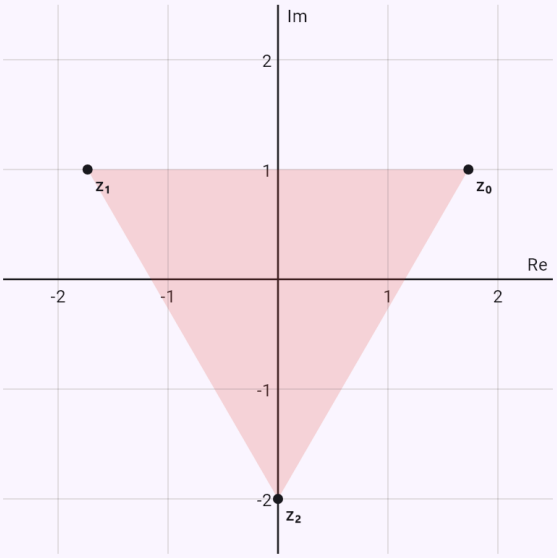
Postup

- Binomická rovnica $z^n = a$ – jej korene sú všetky n-té odmocniny čísla a: $z^3 = 8i$
- Absolútna hodnota |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Číslo leží na osi, argument určíme priamo: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Všetkých 3 koreňov dáva vzorec $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Pre k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Pre k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Pre k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- Korene ležia v Gaussovej rovine vo vrcholoch pravidelného 3-uholníka vpísaného do kružnice so stredom 0 a polomerom 2

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Rovnica s komplexne združeným číslom – porovnanie reálnych a imaginárnych častí.

Zadanie: `z + 2conj(z) = 3 - i`

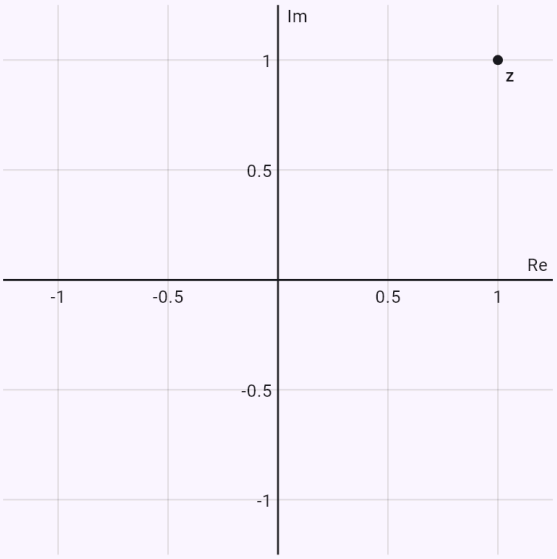
Výsledok

$$z = 1 + i$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y sú reálne čísla: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obe strany upravíme na tvar a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Komplexné čísla sa rovnajú, keď sa rovnajú ich reálne aj imaginárne časti: $3x = 3$ a $-y = -1$
- Dosadíme $y = 1$ do druhej rovnice: $3x = 3$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $3x - 3 = 0$
- Členy s neznámou necháme vľavo, ostatné prevedieme doprava: $3x = 3$
- Vydelíme koeficientom 3: $x = 1$

Graf



Gaussova rovina – riešenia rovnice ako body: na vodorovnej osi reálna časť, na zvislej imaginárna.

Rovnica z² = z̄ – rozklad na súčin a riešenie po prípadoch, štyri body.

Zadanie: `z^2 = conj(z)`

Výsledok

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

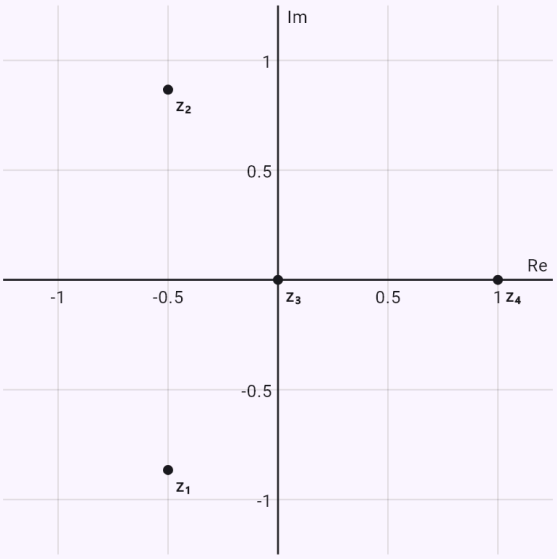
Riešiť numerickou metódou:

Σ Dotyčnice (Newton) | Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y sú reálne čísla:
  $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obe strany upravíme na tvar a + bi:
  $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Komplexné čísla sa rovnajú, keď sa rovnajú ich reálne aj imaginárne časti: $x^2 - y^2 = x$ a $2xy = -y$
- Rovnicu rozložíme na súčin – je nulový, keď je nulový niektorý z činiteľov
  $2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$
- Dosadíme $x = -\frac{1}{2}$ do druhej rovnice: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Dosadíme $y = 0$ do druhej rovnice: $x^2 = x$
- Prevedieme všetko na jednu stranu: $x^2 - x = 0$
- Vypočítame diskriminant:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Dosadíme do vzorca pre korene:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Graf



Gaussova rovina – riešenia rovnice ako body: na vodorovnej osi reálna časť, na zvislej imaginárna.

Prienik kruhu a polroviny – vyfarbená oblasť, čiarkovaná hranica do nej nepatrí.

Zadanie: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

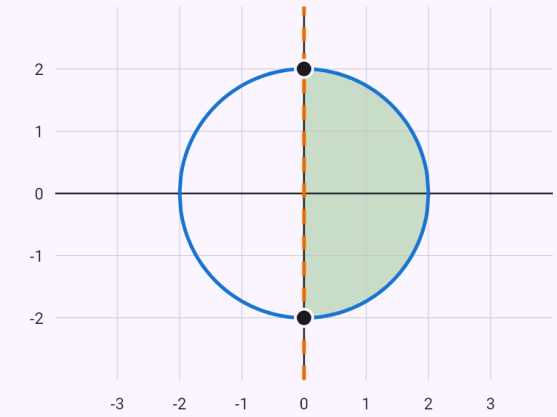
Výsledok

$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y sú reálne čísla: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- 1. podmienka pre x a y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Obe strany sú nezáporné, umocníme ich na druhú: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Je to kruh so stredom 0 a polomerom 2 aj s hraničnou kružnicou.
- 2. podmienka pre x a y: $x > 0$
- Je to polrovina napravo od priamky $x = 0$, hraničná priamka do nej nepatrí.
- 1. nerovnica: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Hranicou je krivka $x^2 + y^2 = 4$ – kreslíme ju plnou čiarou, jej body do riešenia patria.
- Dosadíme bod $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ platí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod leží.
- 2. nerovnica: $x > 0$
- Hranicou je krivka $x = 0$ – kreslíme ju čiarkovane, jej body do riešenia nepatria.
- Dosadíme bod $[1;\ 0]$: $1 > 0$ platí – riešením je tá časť roviny, v ktorej bod leží.
- Riešením sústavy je spoločná časť týchto oblastí – v grafe je vyfarbená.
- Rohy oblasti (priesečníky hraníc): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Graf



$|z| \leq 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \ \Leftrightarrow\ x > 0$

Gaussova rovina – na vodorovnej osi x = Re z, na zvislej y = Im z. Množinou bodov je vyfarbená oblasť. Plná hranica do nej patrí, čiarkovaná nie.

Body rovnako vzdialené od i a od −1 – os úsečky.

Zadanie: `|z - i| = |z + 1|`

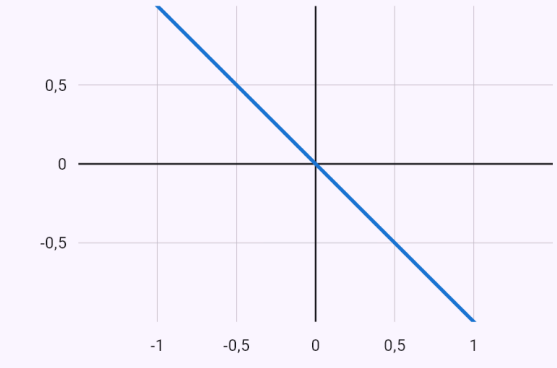
Výsledok

$$y = -x$$

Postup

- Dosadíme z = x + yi, kde x a y sú reálne čísla: $z = x + yi$
- Podmienka pre x a y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Obe strany sú nezáporné, umocníme ich na druhú: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Sú to body rovnako vzdialené od bodov i a -1 – os úsečky s krajnými bodmi i a -1: $y = -x$

Graf



$|z - i| = |z + 1|$

Gaussova rovina – na vodorovnej osi x = Re z, na zvislej y = Im z. Množinou bodov je zakreslená čiara.

Známe obmedzenia

- Korene s argumentom mimo tabuľkových hodnôt sú v goniometrickom tvare a približne v algebraickom.
- Množinu bodov aplikácia opíše, keď je to kružnica (kruh), priamka (polrovina) alebo os úsečky; iné kužeľosečky (Im $z^2 = 2$) len zakreslí a súčet absolútnych hodnôt ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, elipsa) zatiaľ nevie.
- Sústavu pre x a y, ktorú nemožno riešiť vyjadrením jednej neznámej, aplikácia vyrieši bez postupu.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace