Mathtrace – príručka

VI. Aplikácie: fyzika a technika

Obsah

VI. Aplikácie: fyzika a technika

42. Aplikácie diferenciálnych rovníc

43. Fyzika

44. Statika a pružnosť

45. Astronómia a astrofyzika

46. Aplikácie komplexnej analýzy

42. Aplikácie diferenciálnych rovníc

Aplikácie nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“ – dlaždice odborov, ktoré si zvolíte v nastaveniach (ozubené koliesko, „Moje odbory“), a jednotlivé aplikácie pripnuté špendlíkom v zozname alebo vo formulári; „Všetky aplikácie“ ich ukáže po odboroch (aplikácia môže patriť do viacerých odborov, napríklad RC obvod do fyziky aj elektrotechniky). Diferenciálne rovnice používa formulár s 23 modelmi: rádiouhlíková metóda, rozpad a polčas, exponenciálny rast, rozpadový rad, Newtonovo ochladzovanie (aj čas smrti z dvoch meraní), chemická kinetika 0.–2. rádu, liek v krvi (jedna dávka, opakované dávky, infúzia), alkohol v krvi, sporenie a splácanie úveru, obvody RC, RL a RLC, kmitanie pružiny, pád s odporom vzduchu, vytekanie nádoby, miešanie v nádrži, logistický a Gompertzov rast, populácia s lovom, epidémia SIR, dravec a korisť, konkurencia dvoch druhov a chemostat.

Vyberiete model, jeho variant a čo hľadáte; konštanty (polčas ^{14}C, tiažové zrýchlenie, …) sú predvyplnené a dajú sa prepísať. Pri každej veličine aj pri výsledku si zvolíte jednotku – aplikácia hodnoty prevedie (prevod je v postupe). Ikonka „?“ pri modeli vysvetlí, ako sa k jeho rovnici dospelo.

Postup začína zostavením modelu (prečo práve táto rovnica), pokračuje riešením rovnice (separácia premenných, integračný faktor, charakteristická rovnica), dosadením podmienok a vyjadrením hľadanej veličiny a končí dosadením čísel. Sústavy (SIR, dravec–korisť, konkurencia, chemostat) sa riešia numericky metódou Runge–Kutta, presne potom rovnovážne stavy a ich stabilita. Graf ukáže veličiny v čase s vyznačenou odpoveďou, pri sústavách aj fázovú rovinu.

Ukážky

Vek nálezu, v ktorom zostáva 35 % ¹⁴C.

Zadanie: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Výsledok

$$t \approx 8700\,\text{rokov}$$

Postup

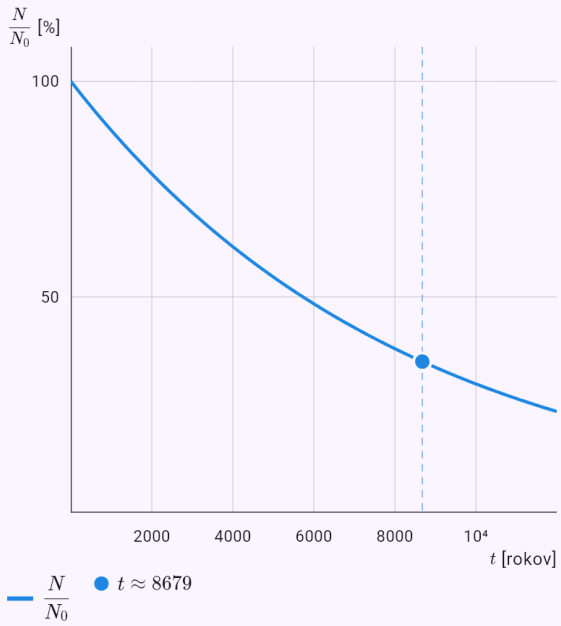
- Hľadáme t; zadané: $T_{1/2} = 5730\,\text{rokov}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Prevedieme jednotky: $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Živé organizmy prijímajú uhlík z ovzdušia, a preto obsahujú rovnaký podiel rádioaktívneho izotopu ¹⁴C ako atmosféra. Po smrti príjem ustane a ¹⁴C sa rozpadá. Počet rozpadov za jednotku času je úmerný počtu jadier, ktoré ešte zostávajú: dN/dt = −λN, kde λ je rozpadová konštanta. Riešením je N = N₀·e^(−λt) a za polčas T½ = 5730 rokov ubudne polovica, takže λ = ln 2 / T½. Zo zostávajúceho podielu ¹⁴C (alebo z pomeru nameranej aktivity a aktivity živej vzorky) vypočítame vek. Rovnica modelu: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separujeme premenné: $\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Integrujeme obe strany: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- Za polčas klesne množstvo na polovicu – rozpadová konštanta

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\text{rok}^{-}$$

- Vyjadríme hľadanú veličinu: $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N_0}{N}$
- Dosadíme: $t = \frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\text{rokov}$

- Laboratóriá uvádzajú „rádiouhlíkový vek“ s Libbyho polčasom 5568 rokov a prepočítavajú ho kalibračnou krivkou (obsah ¹⁴C v atmosfére nebol vždy rovnaký) – skutočný vek sa preto môže o niečo líšiť.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Čas smrti: telo malo pri náleze 30 °C, o hodinu neskôr 28 °C, v miestnosti je 20 °C.

Zadanie: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

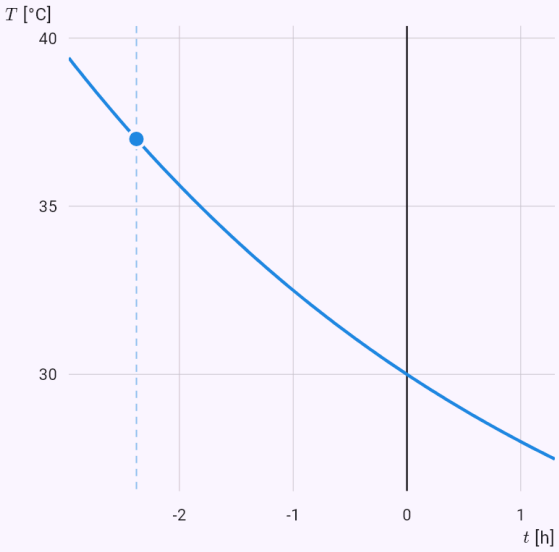
Výsledok

$$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$$

Postup

- Hľadáme t; zadané $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C},\quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C},\quad t_1 = 1\,\mathrm{h},\quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Teleso odovzdáva teplo okoliu tým rýchlejšie, čím väčší je rozdiel teplôt: dT/dt = −k(T − T_a), kde T_a je teplota okolia a k závisí od telesa (veľkosť, materiál, prúdenie vzduchu). Riešením je T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt) − rozdiel teplôt klesá exponenciálne. Konštantu k možno určiť z dvoch meraní. Kriminalisti tak odhadujú čas smrti: zmerajú teplotu tela pri náleze a o niečo neskôr a dopočítajú, kedy malo telo 37 °C. Rovnica modelu: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separujeme premenné: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Integrujeme obe strany: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $T(0) = T_0$: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- Konštantu k určíme z druhého merania $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Vyjadríme hľadanú veličinu $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Dosadíme: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Záporný čas znamená dobu pred prvým meraním (pri určení času smrti toľko hodín pred nálezom).

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Liek 500 mg každých 8 hodín – ustálená hladina medzi dávkami.

Zadanie: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

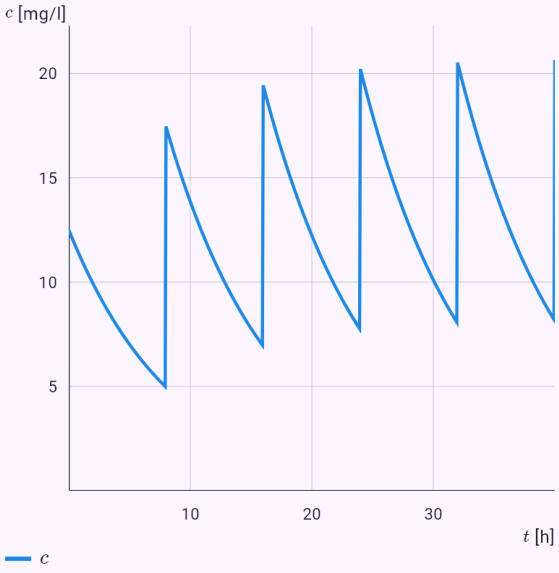
Výsledok

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

Postup

- Hľadáme c_{max}; zadané $D = 500\,\mathrm{mg},\quad V = 40\,\mathrm{l},\quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h},\quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Liek podaný do krvi sa rozptýli v distribučnom objeme V; obličky a pečeň ho vylučujú rýchlosťou úmernou koncentrácii: dc/dt = −kc, kde k = ln 2 / T½ (biologický polčas). Po jednej dávke D je c = (D/V)·e^(−kt). Pri opakovanom podávaní po intervale τ sa zvyšky sčítajú (geometrický rad) a hladina sa ustáli medzi c_min a c_max. Pri infúzii rýchlosťou R platí dc/dt = R/V − kc a koncentrácia sa blíži k ustálenej hodnote R/(kV). Rovnica modelu: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Začiatočná koncentrácia po podaní dávky: $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Eliminačná konštanta z biologického polčasu: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h^{-1}}$
- Separujeme premenné: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Integrujeme obe strany: $\ln|c| = -kt + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $c = Ce^{-kt}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $c = c_0 e^{-kt}$
- Podiel lieku, ktorý zostane do ďalšej dávky: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Vyjadríme hľadanú veličinu $c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q},\quad c_{min} = q\,c_{max}$
- Dosadíme: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Dosadíme: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Kumulačný faktor (koľkokrát je ustálená hladina vyššia ako po jednej dávke): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Graf



Ako sa veličiny menia v čase.

Mesačná splátka úveru 1 000 000 Kč na 20 rokov pri úroku 5 %.

Zadanie: model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];

```
kind=loan)
```

Výsledok

$$a \approx 6\,592\,\text{Kč/mes.}$$

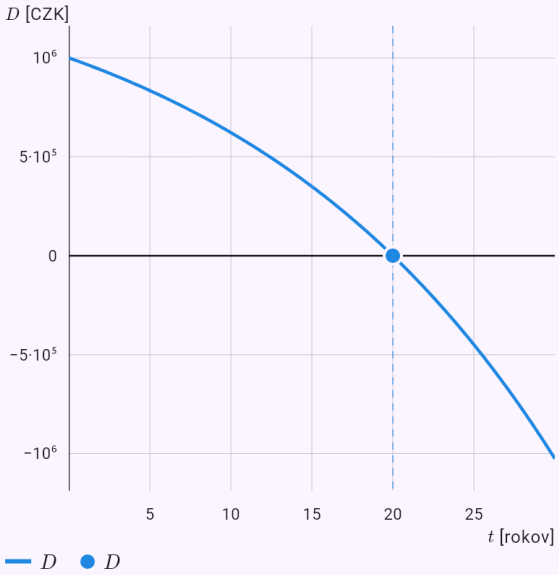
Postup

- Hľadáme a; zadané
  $D_0 = 1\,000\,000\,\text{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{ročne}, \quad t = 20\,\text{rokov},$
- Prevedieme jednotky: $r = 5\,\%\ \text{ročne} = 0{,}05\,\text{rok}^{-1}$
- Pri spojitom úročení pribúda úrok v každom okamihu úmerne zostatku: dB/dt = rB, kde r je ročná úroková sadzba. Pravidelné vklady zostatok zvyšujú (dB/dt = rB + a), splátky úveru dlh znižujú (dD/dt = rD − a). Rovnicu vyriešime separáciou premenných a z riešenia dopočítame zostatok, dobu splácania alebo výšku splátky (spojitá obdoba anuity). Rovnica modelu:
  $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Separujeme premenné: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Integrujeme obe strany: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C:
  $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Spojité úročenie je model – banky úročia mesačne alebo ročne, výsledky sa líšia len málo.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Dosadíme

$$a = \frac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79\,100\,\text{Kč/rok}$$

- Celkovo zaplatené: $a\,t = 1\,582\,000\,\text{CZK}$
- Prevedieme jednotky:
  $a \approx 79\,100\,\text{Kč/rok} = 6\,592\,\text{Kč/mes.}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Za aký čas sa kondenzátor nabije na polovicu napätia zdroja.

Zadanie: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

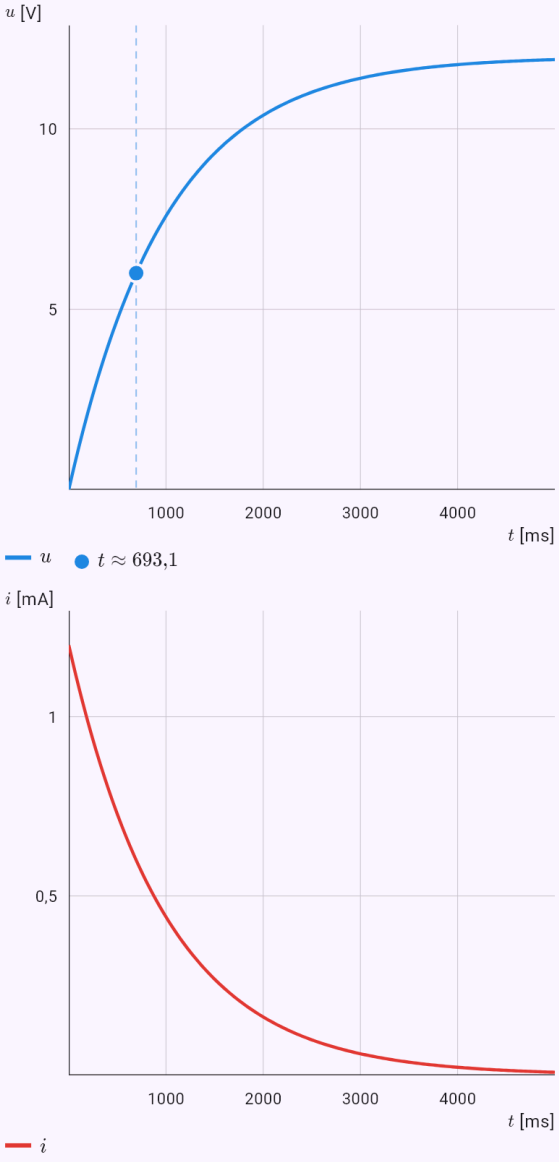
Výsledok

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Postup

- Hľadáme t; zadané $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Pri nabíjaní kondenzátora cez rezistor platí podľa Kirchhoffovho zákona U = Ri + u a prúd kondenzátor nabíja: i = C·du/dt. Spolu RC·du/dt + u = U. Napätie sa blíži k napätiu zdroja: u = U(1 − e^(−t/τ)), kde τ = RC je časová konštanta; prúd i = (U/R)·e^(−t/τ) klesá. Pri vybíjaní je u = U₀·e^(−t/τ). Rovnica modelu: $RC\frac{du}{dt} + u = U$
- Časová konštanta: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Separujeme premenné: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integrujeme obe strany: $\ln|u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $u(0) = 0$: $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Dosadíme: $t = -1000 \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Tlmené kmitanie pružiny – výchylka v čase 1 s.

Zadanie: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

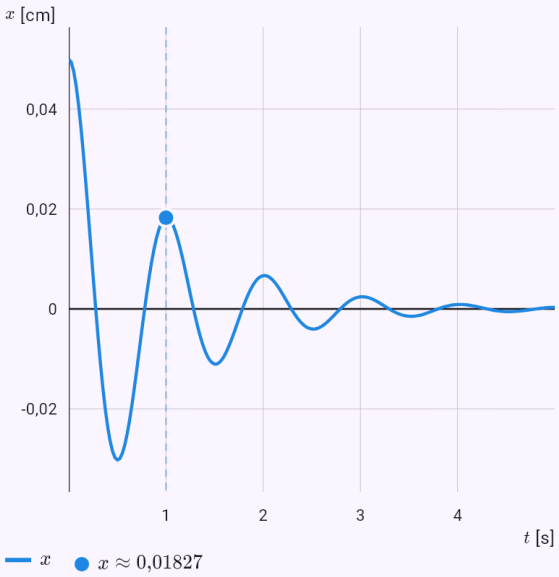
Výsledok

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Postup

- Hľadáme x; zadané
  $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Prevedieme jednotky: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Na teleso na pružine pôsobí sila pružiny −kx (Hookov zákon), tlmenie −b·v (odpor úmerný rýchlosti) a prípadne budiaca sila $F_0 \cdot \cos \omega t$. Podľa 2. Newtonovho zákona $m \cdot x'' = -kx - b \cdot x' + F_0 \cdot \cos \omega t$, teda $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – lineárna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientmi. Korene charakteristickej rovnice určia, či teleso kmitá (podkritické tlmenie), alebo sa len vracia do rovnováhy. Pri budení blízko vlastnej frekvencie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ nastáva rezonancia. Rovnica modelu:
  $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Vlastná uhlová frekvencia (bez tlmenia):
  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Súčiniteľ útlmu: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Riešenie hľadáme v tvare $x = e^{\lambda t}$; po dosadení a vydelení $e^{\lambda t}$ dostaneme charakteristickú rovnicu:
  $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Podkritické tlmenie ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): komplexné korene – tlmené kmity.
- Riešenie homogénnej rovnice:
  $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia:
  $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, odtiaľ
  $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie):
  $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Dosadíme: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Prevedieme jednotky: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Epidémia s R_0 = 2,5 – vrchol a konečný počet nakazených.

Zadanie: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Výsledok

$$I_{max} \approx 2340\,\text{jed.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{jed.}$$

Postup

- Hľadáme t_{max}; zadané $N = 10\,000\,\text{jed.}, \quad I_0 = 10\,\text{jed.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{d}$
- Populáciu N rozdelíme na vnímavých S, nakazených I a uzdravených (imúnnych) R. Nakazených pribúda úmerne počtu stretnutí vnímavých s nakazenými: β·S·I/N; nakazení sa uzdravujú rýchlosťou γ = 1/D, kde D je doba choroby. Sústava S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI nemá riešenie v elementárnych funkciách – riešime ju numericky. Presne však odvodíme základné reprodukčné číslo R_0 = β/γ, vrchol epidémie, konečný počet nakazených a prah kolektívnej imunity 1 − 1/R_0. Rovnica modelu

$$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
$$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
$$R' = \gamma I$$

- Rýchlosť uzdravovania: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Rýchlosť prenosu nákazy: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- Súčet S + I + R = N je stály (sčítaním rovníc dostaneme nulu).
- Prah kolektívnej imunity (podiel imúnnych, pri ktorom sa choroba prestane šíriť): $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- Epidémia sa rozbehne, pretože na začiatku platí $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Vrchol epidémie nastane pri S = N/R_0; z rovnice pre dI/dS

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$

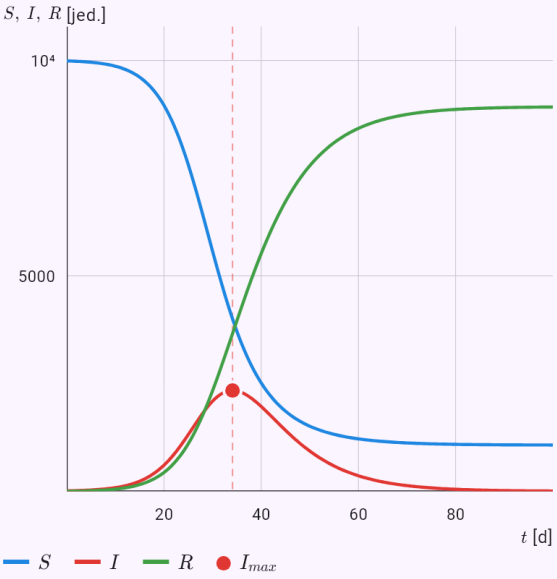
- Rovnicu vyriešime numericky (polením intervalu)

$$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{jed.}$$

- Chorobu celkovo prekoná: $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{jed.}\ (89{,}3\,\%)$
- Sústavu nemožno vyriešiť v elementárnych funkciách – riešime ju numericky metódou Runge–Kutta 4. rádu s krokom $0{,}05$ na intervale $\langle 0;\ 100\rangle$
- › Postup metódy: Rungeho–Kuttova metóda 4. rádu, 2000 krokov
- Z numerického riešenia: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

Graf

Priebeh v čase | Fázová rovina



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Dravec a korisť – rovnováha, stabilita a perióda kmitov.

Zadanie: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

`c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Výsledok

$[x^*;\, y^*] \approx [80;\, 50]$

$T \approx 14{,}9\,\text{mes.}$

Postup

- Hľadáme T; zadané

  $a = 0{,}5\,\text{mes.}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{jed.}\cdot\text{mes.})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{m}$

- Korisť x sa bez dravcov množí (ax), dravce y bez koristi hynú (−cy). Stretnutia, úmerné súčinu xy, korisť uberajú (−bxy) a dravcom pridávajú potravu (+dxy). Sústava x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) má rovnovážny stav [c/d; a/b]. Linearizácia v ňom dáva rýdzo imaginárne vlastné čísla – populácie okolo rovnováhy periodicky kolíšu, dravce s oneskorením za koristou. Riešime numericky, presne odvodíme rovnováhy a prvý integrál. Rovnica modelu

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Rovnovážne stavy – všetky derivácie sú nulové

  $x(a-by)=0,\ y(dx-c)=0 \Rightarrow [0;\,0],\ \left[\frac{c}{d};\,\frac{a}{b}\right] \approx [80;$

- Stabilitu určíme linearizáciou – Jacobiho matica sústavy

  $J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & dx-c \end{pmatrix}$

- V bode $[0;\,0]$ vlastné čísla $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – sedlo (nestabilné).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- V bode $[80;\,50]$ vlastné čísla $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – stred (kmity okolo rovnováhy).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Vydelením rovníc a separáciou dostaneme prvý integrál – veličinu, ktorá sa pozdĺž trajektórie nemení:
  $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Keďže V sa pozdĺž trajektórie nemení, trajektórie sú uzavreté krivky – populácie periodicky kolíšu okolo rovnováhy.

- Perióda malých kmitov okolo rovnováhy (z vlastných čísel): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{mes.}$

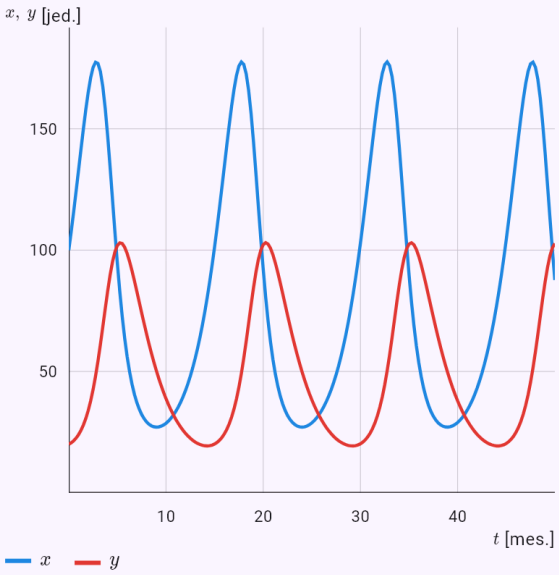
- Sústavu nemožno vyriešiť v elementárnych funkciách – riešime ju numericky metódou Runge–Kutta 4. rádu s krokom $0{,}0125$ na intervale $\langle 0;\,50\rangle$

- › Postup metódy: Rungeho–Kuttova metóda 4. rádu, 4000 krokov

- Z numerického riešenia: $T \approx 14{,}95\,\text{mes.}$

Graf

Priebeh v čase | Fázová rovina



Ako sa veličiny menia v čase.

Kužeľová nádoba: čas vyprázdnenia.

Zadanie: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

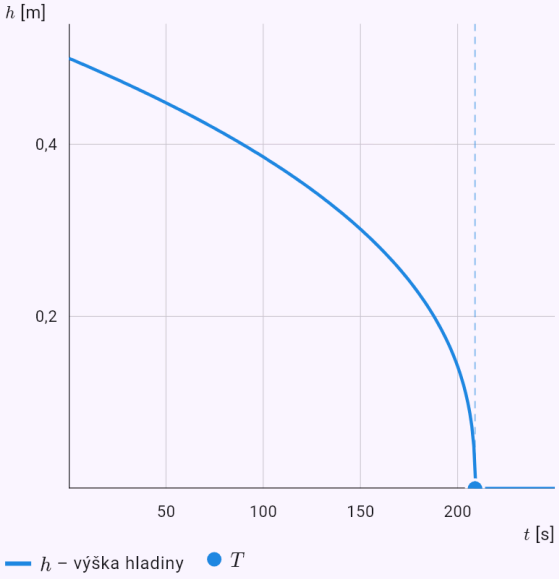
Výsledok

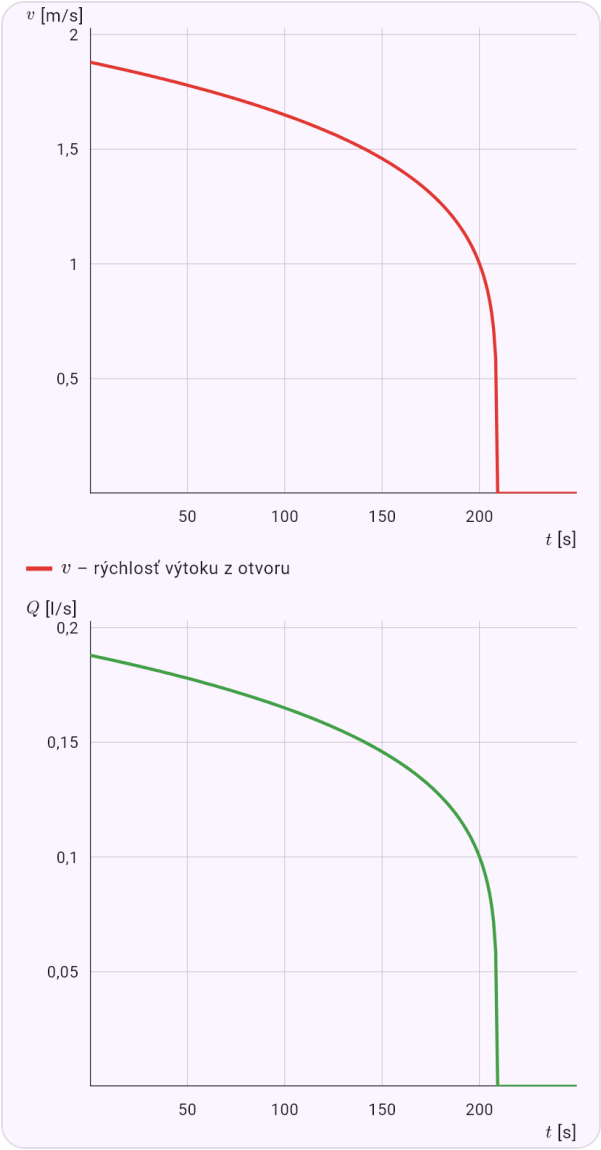
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

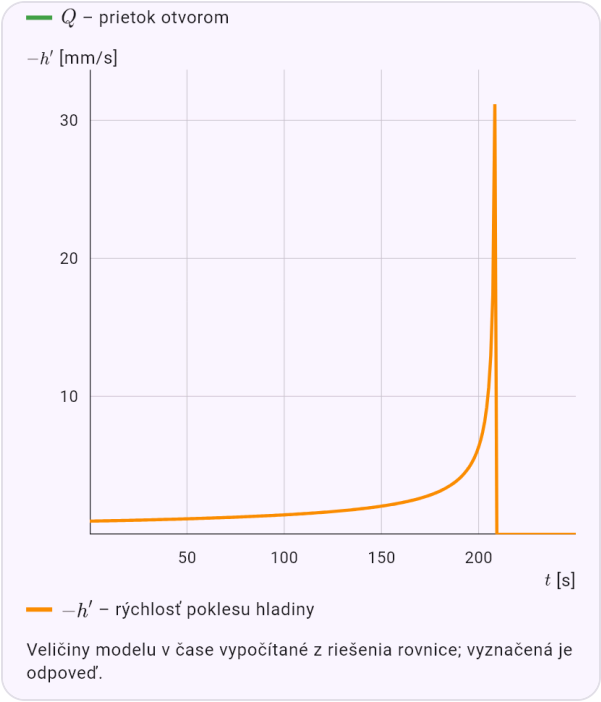
Postup

- Hľadáme T; zadané
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Prevedieme jednotky
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Rotačná nádoba vybraného tvaru má otvor v dne. Kvapalina z neho vyteká rýchlosťou danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o veľký otvor (člen s²/S²), o výtokovú rúrku dĺžky L (pridá výšku L, ale aj trenie podľa viskozity kvapaliny – laminárne alebo turbulentné) a pri uzavretej nádobe o podtlak vzduchu nad hladinou, ktorý odtok spomalí až zastaví. Za čas dt vytečie s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integráciou. Graf ukazuje výšku hladiny, rýchlosť výtoku a prietok. Pri tvare r = R·(h/H)^p bez rúrky a veka ukáže na porovnanie aj vzorec. Pri r = k·h^(1/4) klesá hladina rovnakou rýchlosťou, tak fungovali vodné hodiny. Rovnica modelu
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Prierez nádoby vo výške h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Voda pri 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Kvapalná za bežného tlaku od 0 do 100 °C.
- Separujeme premenné: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Rýchlosť výtoku závisí od výšky hladiny zložito, integrál preto počítame numericky.
- Na porovnanie podľa Torricelliho bez opravy na veľký otvor: $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Dosadíme: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Prevedieme jednotky: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Graf







Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Olej z guľovej nádoby rúrkou – výška hladiny, rýchlosť výtoku z otvoru, prietok a rýchlosť poklesu hladiny.

Zadanie: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

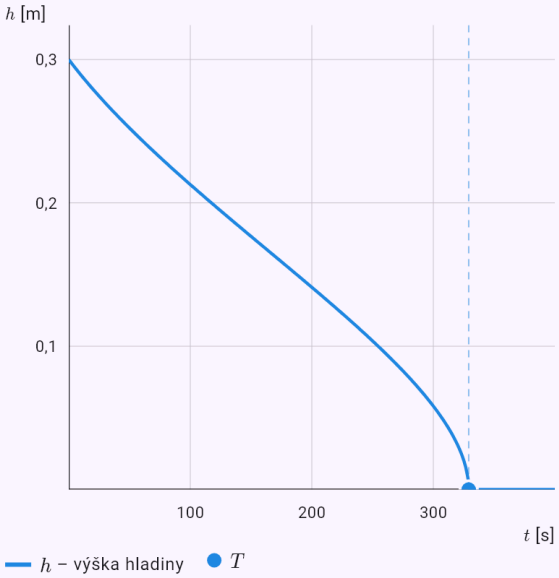
Výsledok

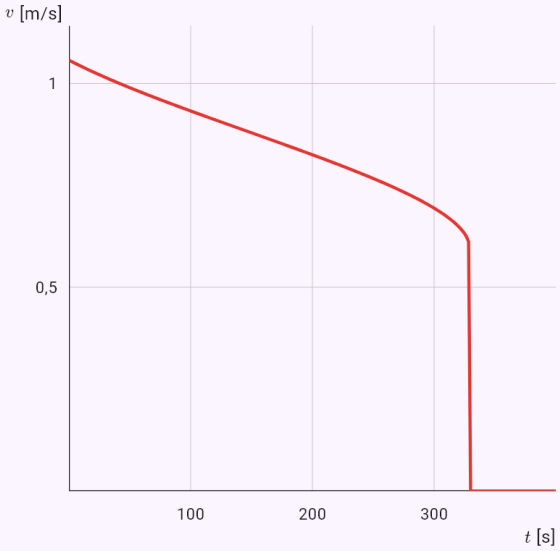
$$T \approx 5{,}48\ \text{min}$$

Postup

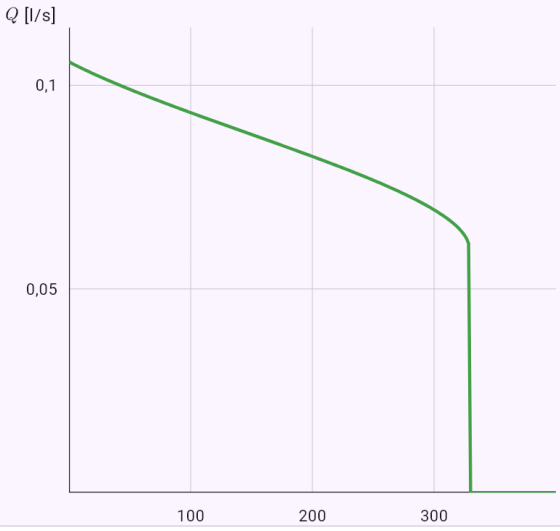
- Hľadáme T; zadané
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Prevedieme jednotky
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Rotačná nádoba vybraného tvaru má otvor v dne. Kvapalina z neho vyteká rýchlosťou danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o veľký otvor (člen s²/S²), o výtokovú rúrku dĺžky L (pridá výšku L, ale aj trenie podľa viskozity kvapaliny – laminárne alebo turbulentné) a pri uzavretej nádobe o podtlak vzduchu nad hladinou, ktorý odtok spomalí až zastaví. Za čas dt vytečie s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integráciou. Graf ukazuje výšku hladiny, rýchlosť výtoku a prietok. Pri tvare r = R·(h/H)^p bez rúrky a veka ukáže na porovnanie aj vzorec. Pri r = k·h^(1/4) klesá hladina rovnakou rýchlosťou, tak fungovali vodné hodiny. Rovnica modelu
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Prierez nádoby vo výške h: $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Slnečnicový olej pri 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Tuhne okolo −17 °C, nevrie – nad 200 °C sa rozkladá; viskozita silno klesá s teplotou.
- Separujeme premenné: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Rýchlosť výtoku závisí od výšky hladiny zložito, integrál
  preto počítame numericky.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Dosadíme: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Prevedieme jednotky: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

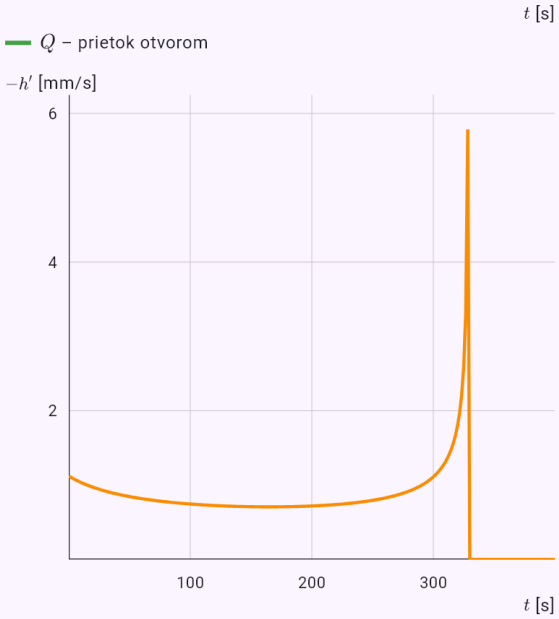
Graf





v – rýchlosť výtoku z otvoru





$-h'$ – rýchlosť poklesu hladiny

Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Tvar nádoby, z ktorej hladina klesá rovnomerne.

Zadanie: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

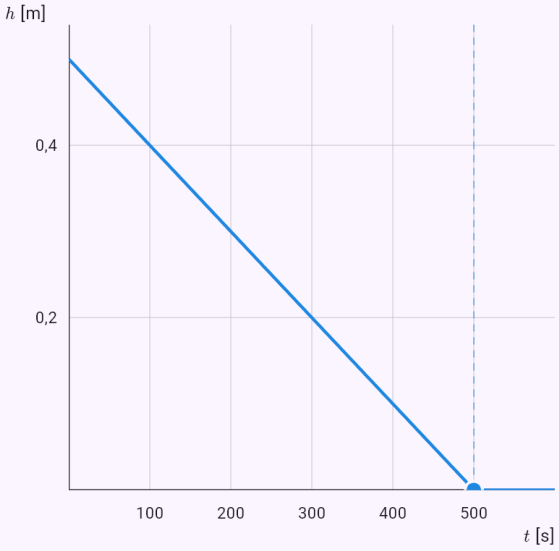
Výsledok

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hľadáme $r(h_0)$; zadané
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm}, \quad g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2,$
- Prevedieme jednotky
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}5\,\mathrm{m}$
- Rotačná nádoba vybraného tvaru má otvor v dne. Kvapalina z neho vyteká rýchlosťou danou rovnováhou energie: Torricelliho v = μ√(2gh) opravíme o veľký otvor (člen s²/S²), o výtokovú rúrku dĺžky L (pridá výšku L, ale aj trenie podľa viskozity kvapaliny – laminárne alebo turbulentné) a pri uzavretej nádobe o podtlak vzduchu nad hladinou, ktorý odtok spomalí až zastaví. Za čas dt vytečie s·v·dt a hladina klesne o dh, takže dt = −S(h)/(s·v) dh a čas dostaneme integráciou. Graf ukazuje výšku hladiny, rýchlosť výtoku a prietok. Pri tvare r = R·(h/H)^p bez rúrky a veka ukáže na porovnanie aj vzorec. Pri r = k·h^(1/4) klesá hladina rovnakou rýchlosťou, tak fungovali vodné hodiny. Rovnica modelu:
  $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Hladina klesá rovnomerne, keď je prierez úmerný √h, teda r = k·h^(1/4). Tento tvar mali vodné hodiny.
- Dosadíme: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\mathrm{m}$
- Prevedieme jednotky: $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\mathrm{m} = 24{,}46\,\mathrm{cm}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

43. Fyzika

Fyzikálne výpočty nájdete v sekcii „Aplikácie“, odbor Fyzika. Raketový motor má päť režimov: ťah, špecifický impulz, Ciolkovského rovnicu, viacstupňovú raketu a výtokovú rýchlosť z termodynamiky ideálnej dýzy.

Ťah sa počíta z hmotnostného toku a výtokovej rýchlosti, voliteľne aj s tlakovým členom – graf potom ukáže, ako ťah rastie s výškou v štandardnej atmosfére. V Ciolkovského rovnici možno hľadať prírastok rýchlosti, potrebné palivo, štartovaciu alebo konečnú hmotnosť aj výtokovú rýchlosť. Výsledky sú ideálne, bez gravitačných a aerodynamických strát.

Keplerove zákony majú samostatný formulár s piatimi režimami: elipsa, plochy, poloha v čase, doba obehu a rýchlosť z rovnice vis-viva. Graf kreslí dráhu v pravej mierke a teleso sa v nej pohybuje podľa posuvníka alebo po stlačení tlačidla prehrať. V 2. zákone sú farebné výseky, ktoré teleso opíše za rovnaký čas.

Formulár Vzájomné ovplyvňovanie telies počíta ťažisko sústavy, Lagrangeove body, slapy, dráhové rezonancie a stáčanie perihélia. Graf ťažiska ukáže obe telesá okolo [[barycenter|ťažiska]] B v pravej mierke. Keď je krúžok väčšieho telesa v celku neviditeľne malý (Slnko okolo ťažiska sústavy Slnko–Jupiter), prepínač „Detail okolo ťažiska“ ho ukáže zväčšený a s polomerom R aj obrys telesa – je vidieť, že ťažisko leží tesne nad povrchom Slnka. Známy príbeh: Urán sa od predpovedanej dráhy odchyľoval a Le Verrier z týchto porúch v roku 1846 vypočítal, kde má byť neznáma planéta. Neptún bol potom nájdený takmer na vypočítanom mieste.

Problém troch telies sa počíta numericky v jednotkách, kde G = 1: periodické riešenie „osmička“, chaotická pytagorejská úloha, kde sa dva takmer rovnaké behy časom rozídu, a vlastné zadanie. Presnosť výpočtu kontroluje zmena celkovej energie.

Jadrová fyzika je v aplikáciách len na mierové použitie: laboratórium, medicína a energetika. Formulár Jadrová fyzika počíta aktivitu vzorky, rádioaktívnu rovnováhu, Batemanove rovnice rozpadového radu, väzbovú energiu s grafom podľa hmotnostného čísla, energiu reakcie a energiu paliva v porovnaní s uhlím.

Formulár Jadrový reaktor ukazuje generácie neutrónov ako geometrickú postupnosť, periódu reaktora s oneskorenými neutrónmi a veľkosť aktívnej zóny v jednogrupovom difúznom modeli, a to len pre moderované mreže (grafit, ľahká voda).

Balistika počíta šikmý vrh pre školskú fyziku, šport a poľovníctvo. Vo vákuu sú k dispozícii presné vzorce s postupom, s odporom vzduchu numerické riešenie metódou Runge-Kutta vrátane čelného a bočného vetra, hustoty vzduchu podľa výšky a Coriolisovej sily. Graf ukazuje bokorys a porovnanie s vákuom, pri bočnom unášaní aj pôdorys. Pri nadzvukových strelách sa súčiniteľ odporu berie z približnej krivky podľa

Machovho čísla. Počíta sa len let, nie účinok na cieľ, a stáčanie rotujúcej strely zahrnuté nie je. Obrátená úloha nájde pre danú vzdialenosť oba elevačné uhly, plochý a strmý.

Lietadlo počíta výkony pre civilné letectvo a výučbu: ustálený let s parabolickou polárou, dĺžku rozjazdu a dobehu numericky vrátane vetra a nadmorskej výšky, zákrutu a klzavý let. Voliteľný prízemný efekt zmenší indukovaný odpor. Stlačiteľnosť vzduchu model nepočíta, pri dopravných lietadlách v cestovnej rýchlosti je výsledok len orientačný. Rýchlosť a dĺžky možno zadať aj v uzloch a stopách.

Návrat do atmosféry počíta prelet kozmickej lode atmosférou numericky metódou Runge-Kutta: rýchlosť, uhol dráhy a výšku nad guľatou Zemou so štandardnou atmosférou. Výsledkom je pristátie, odraz späť do vesmíru alebo prekročenie limitu, najväčšie preťaženie (s kontrolou vzorcom Allena a Eggersa), tepelný tok v [[stagnationPoint|stagnačnom bode]] a teplota štítu z [[radiativeEquilibrium|radiačnej rovnováhy]]. Režim Vstupný koridor nájde polením intervalu plytkú a strmú hranicu vstupného uhla – pre návrat od Mesiaca vychádza [[entryCorridor|koridor]] široký asi 2°, s poznámkou o Apolle 13. Predvoľby: Vostok, Apollo, Sojuz a raketoplán (pri ňom vecná poznámka o nehode Columbie). Jediné riadenie je stále [[bankAngle|natočenie vztlaku]]; Zem sa v modeli neotáča. Interaktívna ukážka, kde vztlak natáčate počas letu, je na mathtrace.app v časti „Vyskúšaj si“.

Telesá vo vode sú formulár pre výučbu a civilné použitie: vztlak a plávanie vrátane balóna, tlak s hĺbkou, Bernoulliho rovnica, klesanie a stúpanie s pridanou hmotnosťou, dosah a pokles harpúny pre športový rybolov, ponorené plavidlo na vlastný pohon, balast a loď. Súčiniteľ odporu gule sa berie podľa Reynoldsovho čísla, bublina má vlastnú koreláciu. Odpor lode je trenie podľa krivky ITTC-57 plus zadaný zvyškový súčiniteľ, preto je mimo výtlačnej plavby len orientačný. Pri lodi možno zapnúť porovnanie s ekranoplánom KM: práca proti odporu na tonu a kilometer a graf výkonu podľa rýchlosti.

Termonukleárna fúzia má dva formuláre, oba len na mierové použitie (elektrárne, laboratóriá, Slnko a hviezdy). Formulár Termonukleárna fúzia počíta energiu reakcie (D-T, D-D, D-³He a reťazec p-p v Slnku) vrátane rozdelenia energie medzi produkty, energiu paliva v porovnaní so štiepením uránu a s uhlím, výšku [[coulombBarrier|Coulombovej bariéry]] a [[gamowPeak|Gamowov vrchol]]. Fúzny reaktor nemôže „ujsť“ ako štiepny: fúzia nemá kritické množstvo, pri poruche plazma vychladne a reakcia sama ustane.

Formulár Fúzna plazma počíta [[lawsonCriterion|Lawsonovo kritérium]] s grafom potrebného trojného súčinu podľa teploty, zisk Q, rýchlosť reakcie ⟨σv⟩ ako integrál cez Maxwellovo rozdelenie Simpsonovou metódou (porovnaný s publikovanou parametrizáciou Boscha a Halea), hustotu fúzneho výkonu, straty brzdným žiarením a Larmorov polomer nabitej častice v magnetickom poli. Dynamiku plazmy (magnetohydrodynamiku) aplikácia nepočíta.

Urýchľovače častíc majú dva formuláre. Relativistická kinematika počíta [[lorentzFactor|Lorentzov faktor]], rýchlosť, energiu a hybnosť zo zadanej rýchlosti alebo kinetickej energie a dilatáciu času s doletom nestabilných častíc (mión, pión, kaón). Formulár Urýchľovače porovnáva energiu zrážky √s vo

vstrečných zväzkoch a na pevnom terči, počíta polomer dráhy a potrebné magnetické pole a straty synchrotrónovým žiarením. Ponuka nastaví hodnoty pre LHC, LEP alebo Tevatron.

Ukážky

Ťah motora pri hladine mora a porovnanie s vákuom.

Zadanie: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa]; pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)`

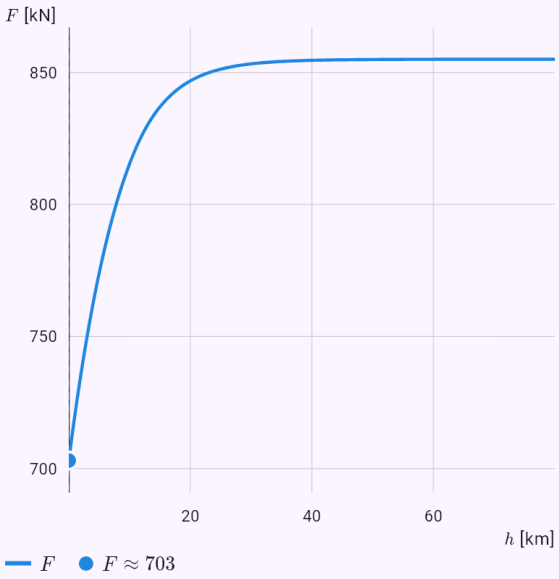
Výsledok

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hľadáme F; zadané
  $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Prevedieme jednotky
  $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Raketa sa poháňa tým, že vyhadzuje hmotu: za sekundu odíde hmotnosť Δm/Δt rýchlosťou v_e a zo zachovania hybnosti vzniká ťah F = (Δm/Δt)·v_e. Ak je tlak plynu na výstupe dýzy p_e iný ako okolitý p_a, pridáva sa člen (p_e − p_a)·A_e − preto ťah s výškou rastie. Rovnica modelu: $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Tlakový člen ťahu
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Plyn je v dýze preexpandovaný (p_e < p_a) − okolitý tlak ťah znižuje. Typické pri štarte motora určeného pre väčšie výšky.
- Hybnostný člen ťahu: $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Dosadíme: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Špecifický impulz
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$$
- Ťah vo vákuu: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- Prevedieme jednotky: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Výtoková rýchlosť zo špecifického impulzu pre RP-1/LOX.

Zadanie: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Výsledok

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme v_e; zadané: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- Špecifický impulz I_sp = v_e/g_0 hovorí, koľko sekúnd dokáže 1 kg paliva vyvinúť ťah rovný tiaži 1 kg, a porovnáva tak palivá. Rovnica modelu: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Normálne tiažové zrýchlenie: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $v_e = I_{sp} g_0$
- Dosadíme: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Čím väčší špecifický impulz, tým menej paliva spotrebuje motor na rovnaký ťah. Typicky vo vákuu: tuhé palivo ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Prírastok rýchlosti podľa Ciolkovského rovnice.

Zadanie: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

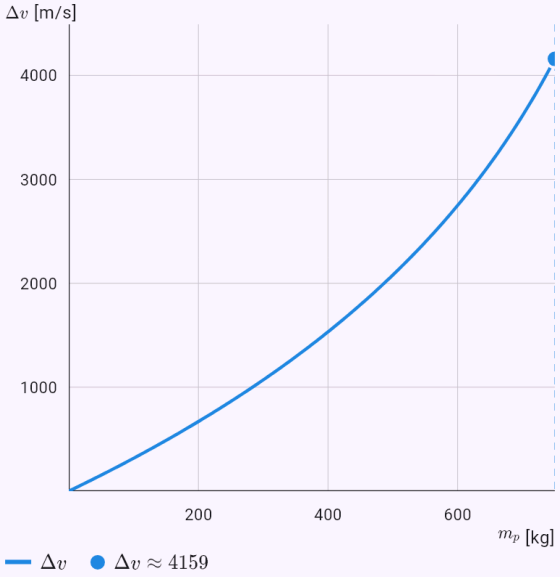
Výsledok

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme Δv; zadané: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- Hybnosť vyhodeného paliva odovzdáva rakete rýchlosť: z m·dv = −v_e·dm integráciou vyplýva Ciolkovského rovnica Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Rovnica modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separujeme premenné: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integrujeme obe strany: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Dosadíme: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Hmotnostný pomer: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Podiel paliva na štartovacej hmotnosti: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Ideálny výsledok bez gravitačných a aerodynamických strát. Na nízku obežnú dráhu treba v skutočnosti asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Koľko paliva potrebuje 1 t rakety na nízku obežnú dráhu.

Zadanie: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

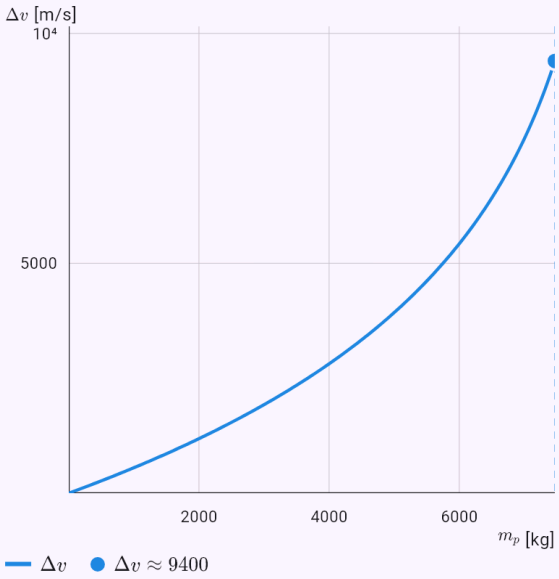
Výsledok

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hľadáme m_p; zadané: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s},\quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s},\quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- Hybnosť vyhodeného paliva odovzdáva rakete rýchlosť: z m·dv = −v$_e$·dm integráciou vyplýva Ciolkovského rovnica Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Rovnica modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separujeme premenné: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integrujeme obe strany: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $m_p = m_0 - m_f = m_f\left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1\right)$
- Dosadíme: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1\right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Hmotnostný pomer: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Podiel paliva na štartovacej hmotnosti: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Ideálny výsledok bez gravitačných a aerodynamických strát. Na nízku obežnú dráhu treba v skutočnosti asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Trojstupňová raketa triedy Saturn V a prínos stupňov.

Zadanie: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

Výsledok

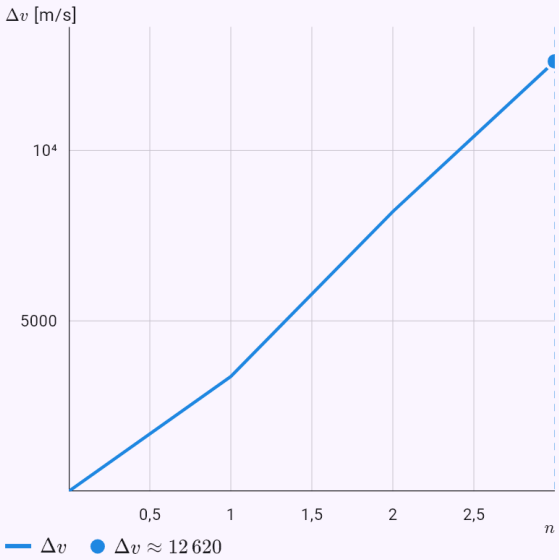
$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme Δv; zadané
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sl}$
- Prevedieme jednotky
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Každý stupeň pridá rýchlosť podľa Ciolkovského rovnice a prázdne nádrže sa odhodia, takže ďalší stupeň už neťahá zbytočnú hmotu. Prírastky rýchlosti sa sčítajú.
  Rovnica modelu: $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Normálne tiažové zrýchlenie: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Prírastok rýchlosti stupňa
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Prírastok rýchlosti stupňa
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Prírastok rýchlosti stupňa
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Na porovnanie jeden stupeň s rovnakou hmotnosťou a palivom
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Odhodením prázdnych stupňov získa raketa navyše $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ oproti jednému stupňu s rovnakým palivom.

- Ideálny výsledok bez gravitačných a aerodynamických strát. Na nízku obežnú dráhu treba v skutočnosti asi 9,4 km/s.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Výtoková rýchlosť vodíkového motora z termodynamiky dýzy.

Zadanie: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];`

`mode=nozzle; propellant=hydrogen)`

Výsledok

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme v_e; zadané

  $T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$

- Prevedieme jednotky: $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- Výtoková rýchlosť vyplýva z termodynamiky ideálnej dýzy: rastie s teplotou v spaľovacej komore a klesá s molárnou hmotnosťou splodín. Rovnica modelu

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Molárna plynová konštanta: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Člen expanzie

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Dosadíme

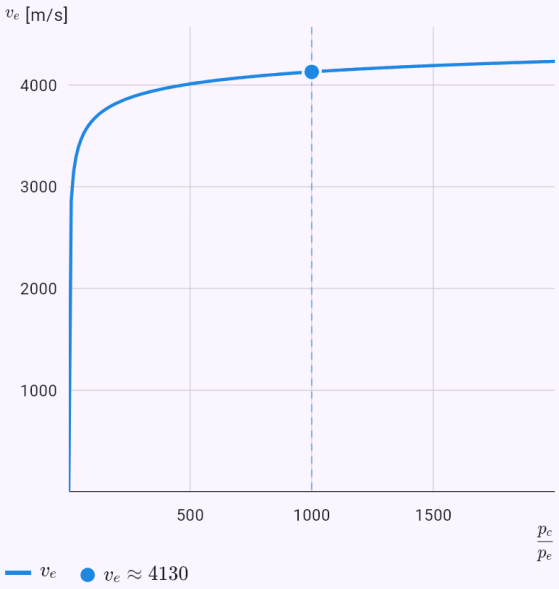
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Špecifický impulz: $I_{sp} = \frac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Medzná rýchlosť pri expanzii do vákua:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- Výtoková rýchlosť rastie s √(T/M) – preto má vodík (ľahké splodiny) najväčší špecifický impulz.
- Ideálne izoentropické prúdenie; skutočná dýza dosiahne asi 92–98 % tejto hodnoty.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Perihélium Halleyho kométy z veľkej polosi a výstrednosti.

Zadanie: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

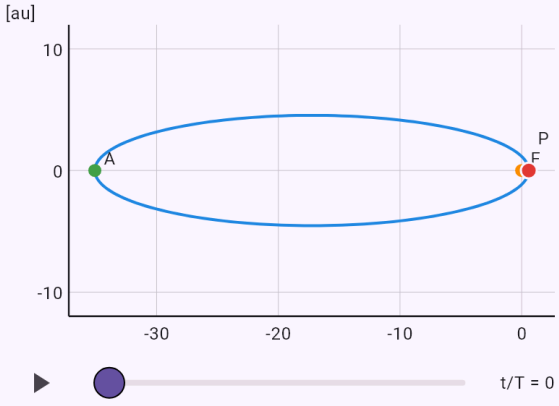
Výsledok

$$r_p \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$$

Postup

- Hľadáme r_p; zadané: $a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad e = 0{,}9671$
- 1. Keplerov zákon: planéta obieha po elipse a centrálne teleso je v jej ohnisku. Vzdialenosť r závisí od uhla θ od perihélia; najbližšie je v perihéliu r_p = a(1 − e), najďalej v aféliu r_a = a(1 + e). Výstrednosť e hovorí, ako je elipsa pretiahnutá. Rovnica modelu: $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $r_p = a(1-e)$
- Dosadíme: $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$
- Vzdialenosť v aféliu: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\mathrm{au}$

Graf



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Rýchlosť Zeme v aféliu z 2. Keplerovho zákona; výseky za rovnaký čas.

Zadanie: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

Výsledok

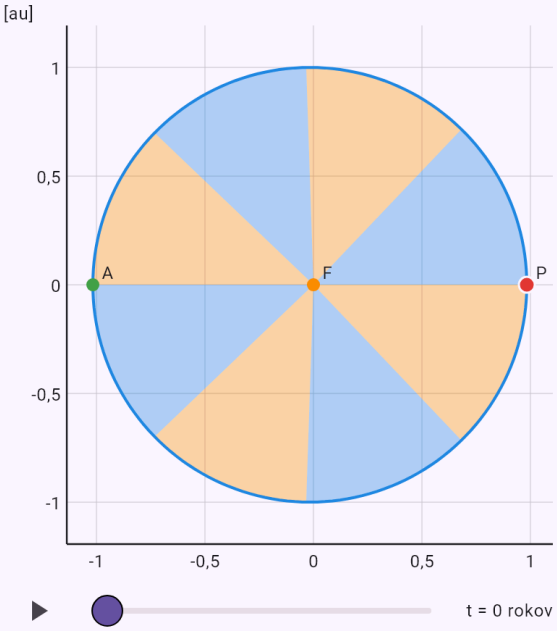
$$v_a \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$$

Postup

- Hľadáme v_a; zadané $r_p = 0{,}9833\,\mathrm{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\mathrm{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\mathrm{km/s}$
- 2. Keplerov zákon: sprievodič z ohniska opíše za rovnaký čas rovnakú plochu, pretože sa zachováva moment hybnosti. Plošná rýchlosť je konštantná, takže teleso je najrýchlejšie v perihéliu: v_p·r_p = v_a·r_a. Farebné výseky v grafe vznikli za rovnaký čas a majú rovnaký obsah. Rovnica modelu: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \mathrm{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $v_a = v_p \frac{r_p}{r_a}$
- Dosadíme: $v_a = 30{,}29 \cdot \frac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$
- Pomer rýchlostí: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Teleso je najrýchlejšie v perihéliu a najpomalšie v aféliu; Zem preto obieha najrýchlejšie v januári.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Kde je Halleyho kométa 10 rokov po prechode perihéliom (Newtonova metóda).

Zadanie: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr];`

`mode=position; body=halley)`

Výsledok

$\theta \approx 168\,^\circ$

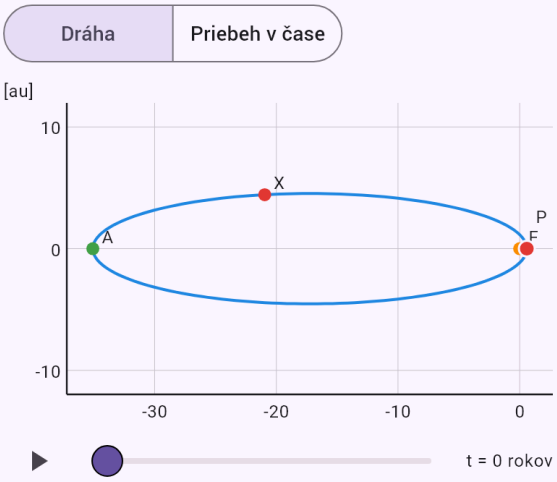
Postup

- Hľadáme θ; zadané $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{rokov}, \quad t =$
- Kde bude teleso v čase t, určuje Keplerova rovnica M = E − e·sin E. Stredná anomália M rastie s časom rovnomerne, excentrická anomália E sa z nej nedá vyjadriť vzorcom, preto sa hľadá Newtonovou metódou. Rovnica modelu: $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Stredná anomália: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- Keplerova rovnica nemá riešenie vo vzorcoch, E sa preto hľadá numericky.
- Iterácie Newtonovej metódy: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Krok: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Krok: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Krok: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Krok: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Krok: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Excentrická anomália: $E \approx 1{,}78021$
- Pravá anomália

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Vzdialenosť od ohniska: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Graf



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Výška geostacionárnej dráhy z 3. Keplerovho zákona.

Zadanie: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

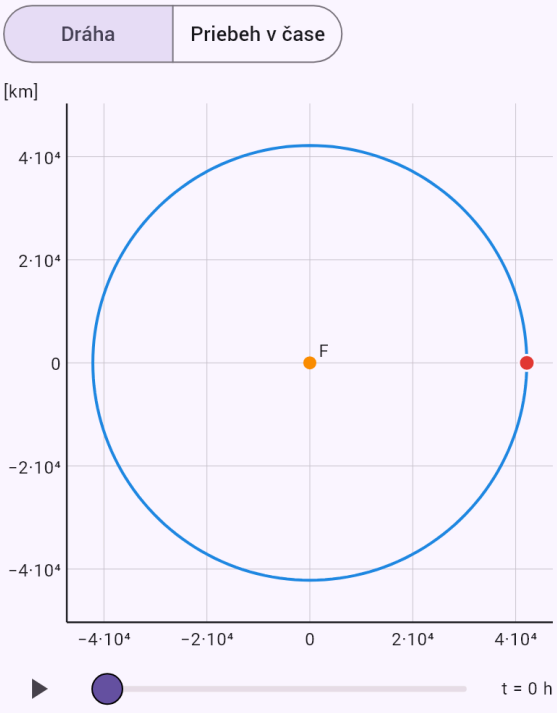
Výsledok

$$h \approx 35\,790\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hľadáme h; zadané
  $T = 86\,160\,\mathrm{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6378\,\mathrm{km}$
- Prevedieme jednotky: $R = 6378\,\mathrm{km} = 6\,378\,000\,\mathrm{m}$
- 3. Keplerov zákon: pomer T²/a³ závisí len od hmotnosti centrálneho telesa. Z obehu mesiaca preto zistíme hmotnosť planéty a z požadovanej doby obehu výšku dráhy, napríklad geostacionárnej. Rovnica modelu:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Dosadíme
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $h = a - R$
- Dosadíme: $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Vzťah platí pre hmotnosť obiehajúceho telesa zanedbateľnú oproti M; inak doň patrí M + m.
- Prevedieme jednotky: $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35\,790\,\mathrm{km}$

Graf



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Rýchlosť Halleyho kométy v perihéliu z rovnice vis-viva.

Zadanie: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg];`

`mode=visviva; central=sun)`

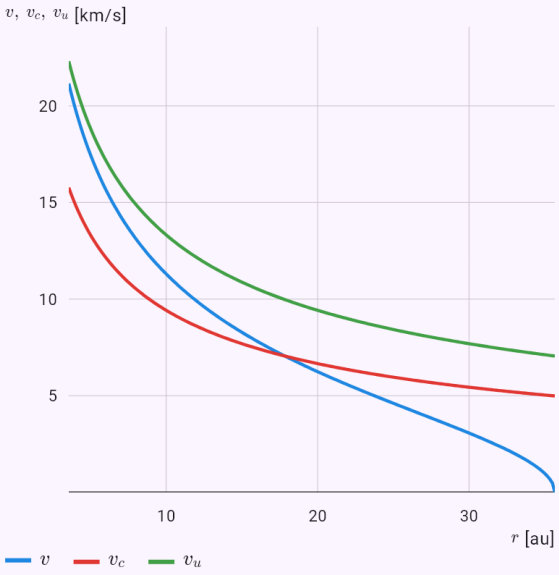
Výsledok

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Postup

- Hľadáme v; zadané
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Prevedieme jednotky
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- Zákon vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) vyplýva zo zachovania energie a dáva rýchlosť v ľubovoľnom mieste dráhy. Kruhová rýchlosť udrží teleso na kružnici, úniková je √2-krát väčšia a teleso sa už nevráti. Rovnica modelu:
  $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Dosadíme
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Kruhová rýchlosť v tejto vzdialenosti:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Úniková rýchlosť v tejto vzdialenosti:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Prevedieme jednotky: $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Ťažisko sústavy Slnko–Jupiter leží tesne nad povrchom Slnka; „Detail okolo ťažiska“ ukáže, ako Slnko okolo neho krúži.

Zadanie: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

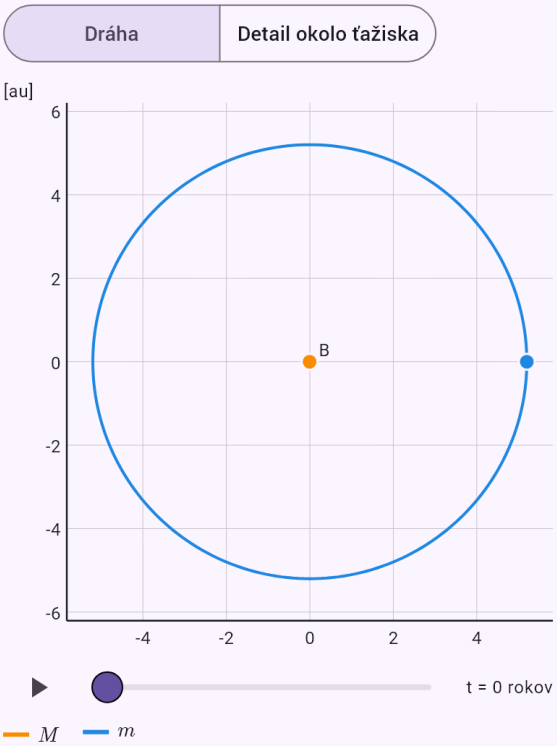
Výsledok

$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$

Postup

- Hľadáme r_b; zadané
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Prevedieme jednotky
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- V skutočnosti obiehajú obe telesá okolo spoločného ťažiska (barycentra). Problém dvoch telies sa prevádza na pohyb jedného telesa s redukovanou hmotnosťou a do 3. Keplerovho zákona patrí súčet M + m. Kolísanie hviezdy okolo ťažiska prezrádza exoplanéty. Rovnica modelu
  $r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$
- Dosadíme
  $r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
- Vzdialenosť druhého telesa od ťažiska:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Ťažisko leží mimo telesa: $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Väčšie teleso tak samo opisuje viditeľný krúžok.
- Prevedieme jednotky: $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Graf



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Vzdialenosť bodu L2, kde pracuje teleskop Jamesa Webba.

Zadanie: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

Výsledok

$$r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mil. km}$$

Postup

- Hľadáme r_{L_2}; zadané

  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$

- V sústave obiehajúcej spolu s telesom m je päť miest, kde sa gravitácia oboch telies a odstredivá sila vyrovnajú. L1, L2 a L3 ležia na spojnici telies a hľadajú sa numericky, L4 a L5 tvoria s oboma telesami rovnostranné trojuholníky. Rovnica modelu

  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$

- Pomer hmotností: $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$

- Približne pre malé m: $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{mil. km}$

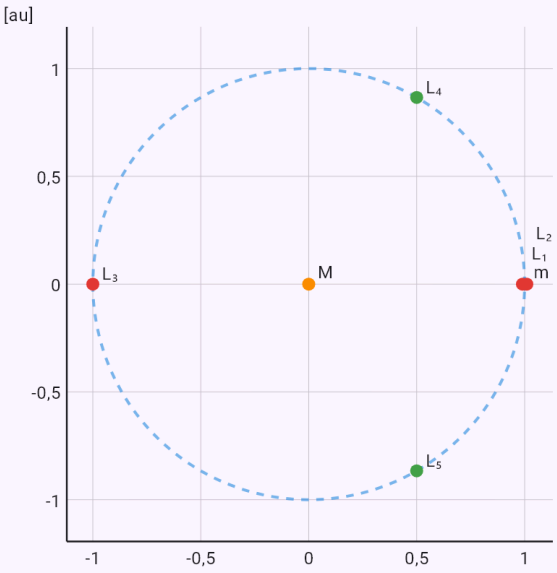
- Lagrangeov bod je koreňom rovnice na spojnici telies, počíta sa polením intervalu.

- Presne z rovnice: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mil. km}$

- L1, L2 a L3 sú nestabilné: teleso tam musí udržiavať polohu korekciami, ako teleskop Jamesa Webba v L2.

- L4 a L5 sú stabilné, pretože M/m > 25; pri Jupiteri sa tam držia trójania.

Graf



Telesá a význačné body v skutočnej mierke.

Slapové zrýchlenie spôsobené Mesiacom.

Zadanie: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide; tideSource=moon)`

Výsledok

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}^2$$

Postup

- Hľadáme a_s; zadané

  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\text{kg}, \quad R = 6371\,\text{km}, \quad d = 384\,400\,\text{km}$

- Prevedieme jednotky

  $R = 6371\,\text{km} = 6\,371\,000\,\text{m}, \quad d = 384\,400\,\text{km} = 3{,}84$

- Bližšia strana telesa je priťahovaná silnejšie ako vzdialenejšia. Slapové zrýchlenie 2GMR/d³ klesá s treťou mocninou vzdialenosti, preto má Mesiac väčší vplyv ako oveľa hmotnejšie Slnko. Rovnica modelu: $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$

- Dosadíme

  $$a_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{(3{,}844 \cdot 10^8)^3} \approx 1{,}099$$

- Presne, rozdiel gravitácie na bližšej strane a v strede

  $$\frac{GM}{(d-R)^2} - \frac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}^2$$

- Pôsobiace teleso vytvára dva prílivové valy: na bližšej strane aj na opačnej, a za otočku preto nastávajú dva prílivy.

- Slapové trenie brzdí rotáciu: Mesiac je k Zemi viazaný stále rovnakou stranou a vzďaľuje sa asi o 3,8 cm za rok.

Rezonancia mesiacov Io, Európa a Ganymedes.

Zadanie: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Výsledok

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Postup

- Zadané: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Dráhová rezonancia vzniká, keď sú doby obehu v pomere malých celých čísel; telesá sa potom pravidelne stretávajú a ovplyvňujú. Príklady: Io, Európa a Ganymedes 1 : 2 : 4, Neptún a Pluto 2 : 3. Kirkwoodove medzery v páse planétok ležia v rezonanciách s Jupiterom. Rovnica modelu: $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Najväčšia odchýlka od celočíselného pomeru: $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Doby obehu sú v pomere malých celých čísel: ide o dráhovú rezonanciu.

Stáčanie perihélia Merkúra podľa všeobecnej relativity.

Zadanie: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km]; e=0.2056[one]; mode=precession)`

Výsledok

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{rokov}$$

Postup

- Hľadáme $\Delta\varphi$; zadané
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km}, \quad e = 0{,}205$
- Prevedieme jednotky:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$
- Podľa všeobecnej relativity sa perihélium dráhy pomaly stáča o 6πGM/(c²a(1 − e²)) za obeh. Pri Merkúre to robí 43" za storočie, čo je rozdiel, ktorý Newtonova mechanika nevysvetlila. Rovnica modelu:
  $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Stočenie za jeden obeh
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Počet obehov za 100 rokov: $N = \dfrac{100\,\text{rokov}}{T} \approx 415{,}3$
- Dosadíme: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{rokov}$
- Newtonova mechanika predpovedá pri Merkúre menšie stáčanie, zvyšných 43" za storočie vysvetlila až všeobecná relativita.

Periodické riešenie troch rovnakých telies v tvare osmičky.

Zadanie: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Výsledok

$$E \approx -1{,}28714$$

Postup

- Hľadáme E; zadané: $t_k = 6{,}326$
- Tri telesá vo všeobecnosti nemajú riešenie vo vzorcoch. Existujú však výnimočné periodické dráhy: v riešení „osmička“ (Chenciner a Montgomery, 2000) obiehajú tri rovnaké telesá po jedinej krivke tvaru osmičky. Rovnica modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Vo všeobecnosti pre tri telesá neexistuje riešenie vo vzorcoch, pohyb sa preto počíta numericky s jednotkami, kde G = 1.
- Počet krokov výpočtu: $N = 2748$
- Celková energia:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

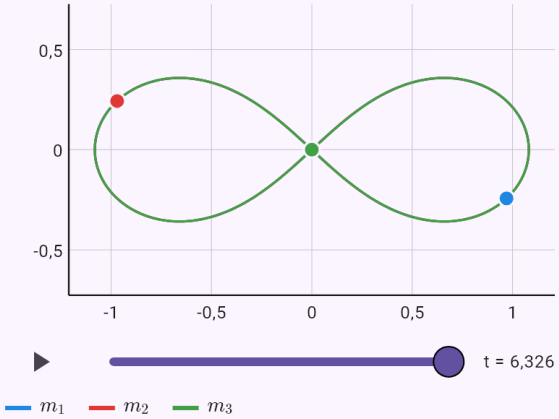
- Relatívna zmena energie za výpočet (kontrola presnosti):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$$

- Tri rovnaké telesá obiehajú po jednej krivke tvaru osmičky a po perióde sa vrátia na svoje miesta.

- Najväčšia vzdialenosť od začiatočnej polohy po jednej perióde: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Graf



Telesá v skutočnej mierke. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte pohyb v čase.

Chaos: kedy sa dva takmer rovnaké behy rozídu.

Zadanie: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Výsledok

$$t_s \approx 42{,}9$$

Postup

- Hľadáme t_s; zadané: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Problém troch telies je chaotický: nepatrná zmena začiatku sa časom zosilní tak, že dráhy nemajú nič spoločné. Pytagorejská úloha s hmotnosťami 3, 4 a 5 sa počíta dvakrát, druhýkrát s malou odchýlkou δ. Rovnica modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Vo všeobecnosti pre tri telesá neexistuje riešenie vo vzorcoch, pohyb sa preto počíta numericky s jednotkami, kde G = 1.
- Počet krokov výpočtu: $N = 52\,307$
- Celková energia:

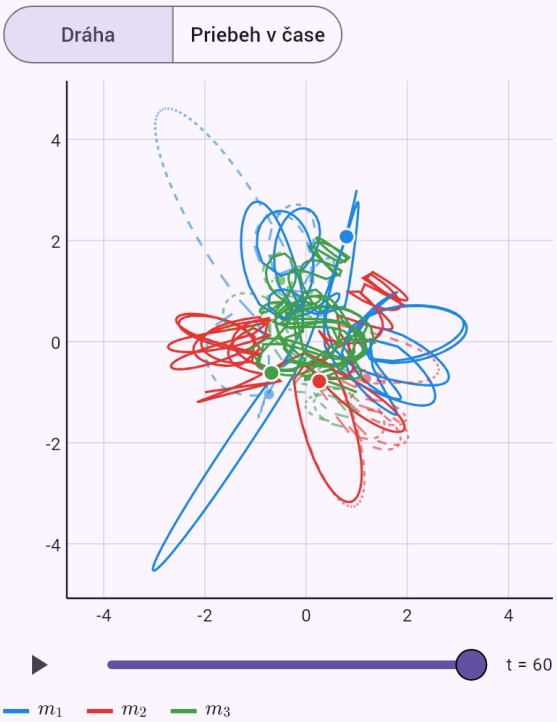
$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

- Relatívna zmena energie za výpočet (kontrola presnosti):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

- Počíta sa aj druhý beh s posunom o $\delta = 0{,}001$. Prerušované čiary sú tento beh; rozchod ukazuje chaos. V grafe v čase je priamka v logaritme znakom exponenciálneho rastu.
- Za čas t_s sa poloha niektorého telesa v oboch behoch líši o viac ako 1.

Graf



Plná a prerušovaná čiara sú dva behy s nepatrne iným začiatkom.

Aktivita 1 g rádia, približne jedno curie.

Zadanie: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

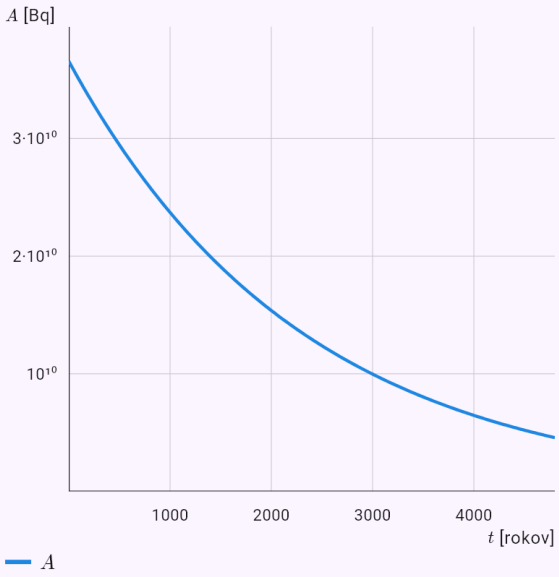
Výsledok

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Postup

- Hľadáme A; zadané:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{rokov}$
- Prevedieme jednotky:
  $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{rokov} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- Aktivita A = λN hovorí, koľko jadier sa rozpadne za sekundu. Počet jadier N vyplýva z hmotnosti, molárnej hmotnosti a Avogadrovej konštanty, rozpadová konštanta λ z polčasu. Rovnica modelu:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \frac{m}{M} N_A$
- Za polčas klesne množstvo na polovicu – rozpadová konštanta: $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Počet jadier: $N = \frac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Dosadíme
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Becquerel je jeden rozpad za sekundu. Historická jednotka curie zodpovedá približne aktivite 1 g rádia, 3,7·10¹⁰ Bq.

Graf



Ako sa veličiny menia v čase.

Pomer aktivít v generátore Mo-99 / Tc-99m používanom v nemocniciach.

Zadanie: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

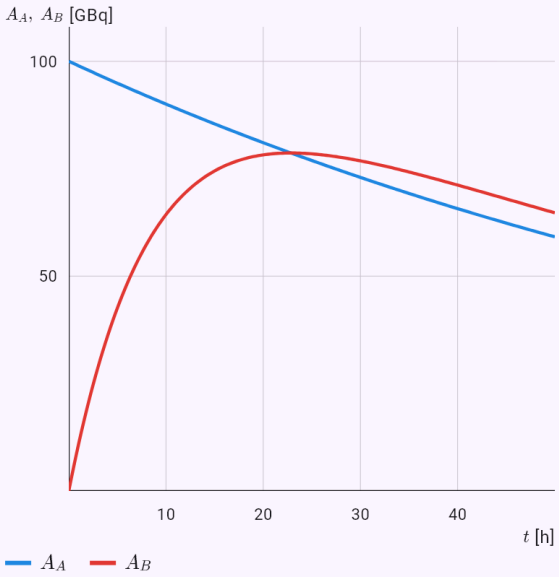
Výsledok

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Postup

- Hľadáme $\frac{A_B}{A_A}$; zadané:
  $A_{A,0} = 100\,\mathrm{GBq}, \quad T_A = 66\,\mathrm{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\mathrm{h}$
- Ak vzniká krátkodobý dcérsky nuklid z dlhodobého materského, jeho aktivita po čase dobehne materskú a potom ju sleduje v pevnom pomere. Na tom stoja generátory rádionuklidov v nemocniciach. Rovnica modelu
  $$A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$
- Za polčas klesne množstvo na polovicu – rozpadová konštanta: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$$
- Dosadíme: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Prechodná rovnováha: po niekoľkých polčasoch dcérskeho nuklidu je pomer aktivít stály.

Graf



Ako sa veličiny menia v čase.

Trojčlenný rozpadový rad podľa Batemanových rovníc.

Zadanie: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

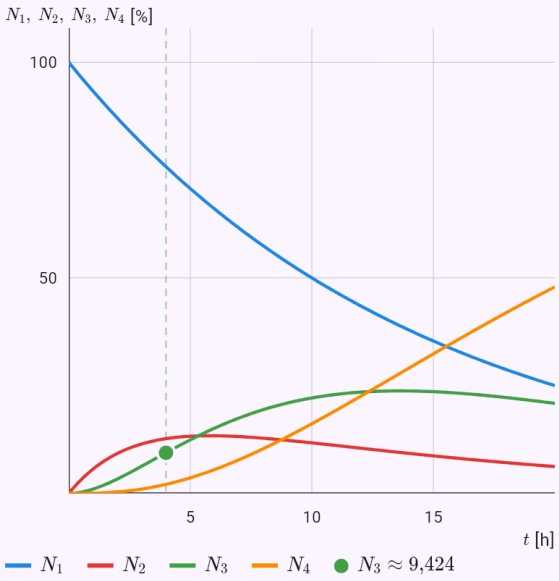
Výsledok

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Postup

- Hľadáme N_n; zadané:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\mathrm{h}, \quad t = 4\,\mathrm{h}$
- Batemanove rovnice opisujú rozpadový rad: každý člen vzniká z predchádzajúceho a rozpadá sa na ďalší. Je to sústava lineárnych diferenciálnych rovníc s riešením v uzavretom tvare. Rovnica modelu:
  $N_k' = \lambda_{k-1}N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- Za polčas klesne množstvo na polovicu – rozpadová konštanta
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $$N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j}(\lambda_l - \lambda_j)}$$
- Dosadíme: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- V grafe je aj stabilný konečný produkt; súčet všetkých členov je stály.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Väzbová energia na nukleón pri železe-56.

Zadanie: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

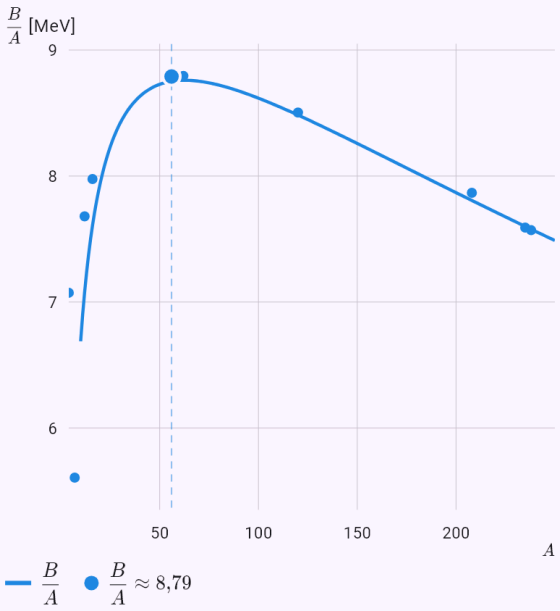
Výsledok

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Hľadáme $\frac{B}{A}$; zadané:
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Jadro váži menej ako jeho voľné protóny a neutróny. Rozdiel Δm zodpovedá podľa E = mc² väzbovej energii. Jej krivka na nukleón má maximum pri železe, preto energiu uvoľňuje štiepenie ťažkých aj zlučovanie ľahkých jadier. Rovnica modelu:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Hmotnostný úbytok
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Energetický ekvivalent: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Dosadíme: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Väzbová energia na nukleón: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Energia štiepenia uránu-235.

Zadanie: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Výsledok

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Energia reakcie Q je rozdiel hmotností pred reakciou a po nej prepočítaný vzťahom E = mc². Kladné Q znamená, že sa energia uvoľňuje. Rovnica modelu:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right) c^2$
- Reakcia: $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Súčet hmotností:
  $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Dosadíme: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Bezprostredne sa uvoľní táto energia; s rozpadmi štiepnych produktov je to asi 200 MeV na štiepenie.

Koľko uhlia nahradí 1 g uránu-235.

Zadanie: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg];`

`mode=fuel)`

Výsledok

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hľadáme m_c; zadané
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- Z hmotnosti paliva vyplýva počet jadier a z energie jedného štiepenia celková energia, ktorú možno porovnať so spaľovaním uhlia. Rovnica modelu: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Počet jadier: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Dosadíme
  $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme
  $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Ideálny výpočet: skutočný reaktor využije len niekoľko percent paliva a na elektrinu prevedie asi tretinu tepla.

Počet neutrónov po 10 generáciách pri k = 1,05.

Zadanie: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

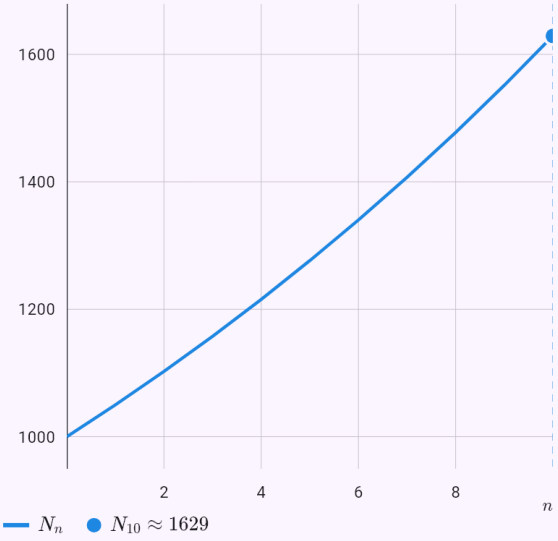
Výsledok

$$N_n \approx 1629$$

Postup

- Hľadáme N_n; zadané:
  $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Multiplikačný faktor k hovorí, koľko neutrónov ďalšej generácie vyvolá jeden neutrón. Počet neutrónov tvorí geometrickú postupnosť $N_0 k^n$: pri k < 1 reakcia dohasína, pri k = 1 beží ustálene a pri k > 1 rastie. Rovnica modelu: $N_n = N_0 k^n$
- Stav nadkritický: k > 1, výkon rastie. Reaktor do tohto stavu prechádza len krátko a nepatrne, keď sa má výkon zvýšiť.
- Dosadíme: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Súčet všetkých generácií v podkritickom stave.

Zadanie: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

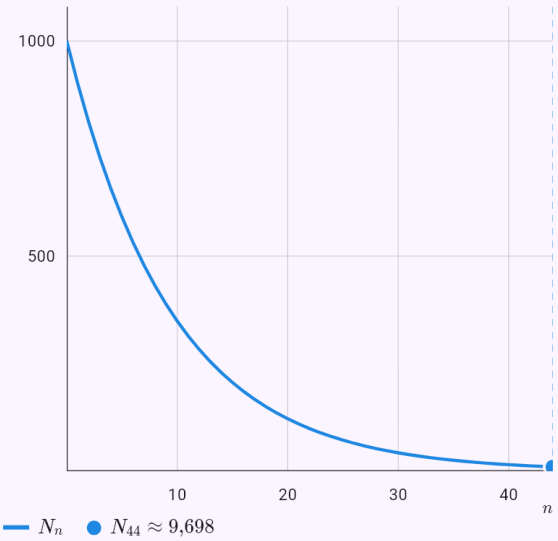
Výsledok

$$S \approx 10\,000$$

Postup

- Hľadáme S; zadané: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Multiplikačný faktor k hovorí, koľko neutrónov ďalšej generácie vyvolá jeden neutrón. Počet neutrónov tvorí geometrickú postupnosť N_0k^n: pri k < 1 reakcia dohasína, pri k = 1 beží ustálene a pri k > 1 rastie. Rovnica modelu: $N_n = N_0 k^n$
- Stav podkritický: k < 1, reakcia dohasína.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Dosadíme: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Perióda reaktora s oneskorenými neutrónmi.

Zadanie: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s]; mode=kinetics)`

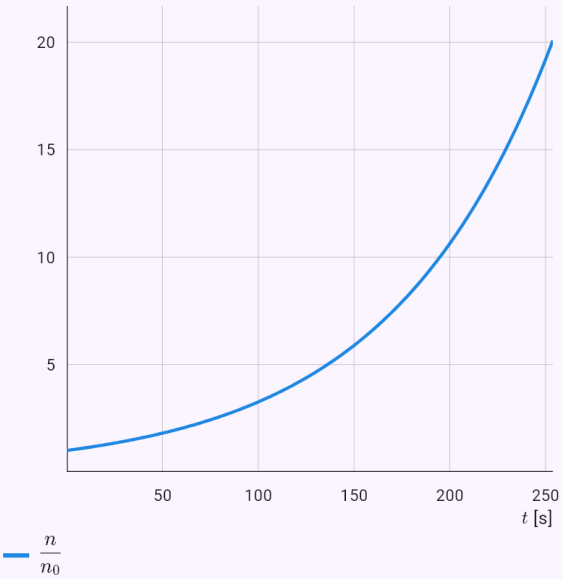
Výsledok

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Postup

- Hľadáme T; zadané
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- Výkon reaktora sa mení exponenciálne s periódou T = ℓ/(k − 1). Oneskorené neutróny predĺžia strednú dobu generácie asi tisíckrát, a preto možno reaktor riadiť.
  Rovnica modelu: $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \frac{\ell}{k-1}$
- Reaktivita: $\rho = \frac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Dosadíme: $T_p = \frac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Stredná doba generácie s oneskorenými neutrónmi: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Dosadíme: $T = \frac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Bez oneskorených neutrónov by perióda bola zlomok sekundy. Vďaka nim stačia regulačné tyče na zmeny výkonu reagovať.
- Výkon s touto periódou rastie.

Graf



Ako sa veličiny menia v čase.

Polomer grafitovej aktívnej zóny tvaru gule.

Zadanie: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite; shape=sphere)`

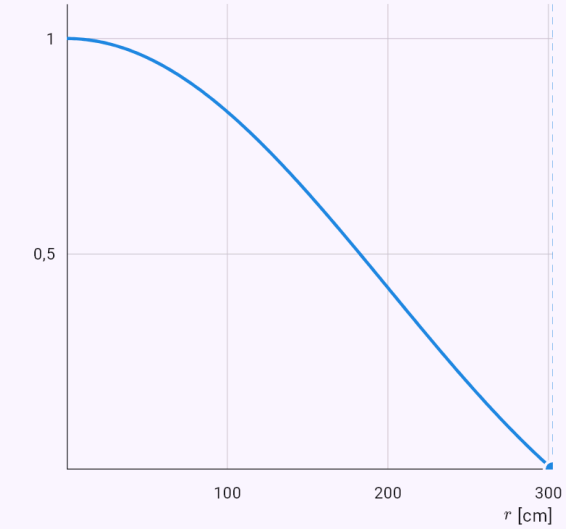
Výsledok

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme R; zadané: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- V jednogrupovom difúznom modeli musí tvar neutrónového toku spĺňať $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0$. Veľkosť aktívnej zóny reaktora vyplýva z podmienky, že tok na okraji klesne na nulu. Ide o úlohu na vlastnú hodnotu, určenú pre moderované mreže energetických reaktorov. Rovnica modelu: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrický parameter: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Rovnica s guľovou súmernosťou: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Substitúcia: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Okrajová podmienka: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Dosadíme: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Jednogrupový difúzny model bez reflektora: skutočné reaktory majú reflektor, a sú preto menšie. Všeobecný tvar vedie na parciálnu diferenciálnu rovnicu.
- Prevedieme jednotky: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Hrana grafitovej aktívnej zóny tvaru kocky.

Zadanie: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

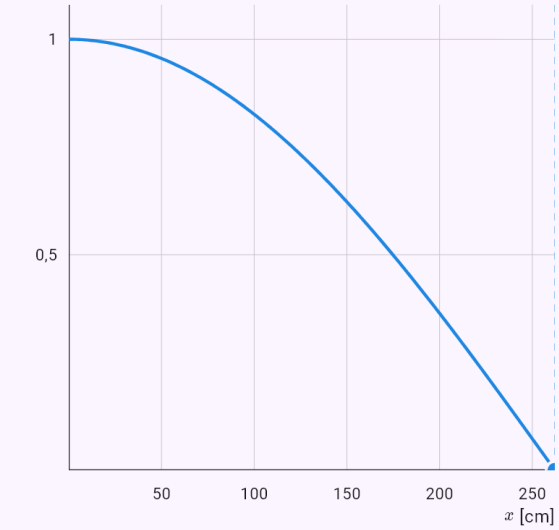
Výsledok

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

Postup

- Hľadáme a; zadané: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- V jednogrupovom difúznom modeli musí tvar neutrónového toku spĺňať ∇²φ + B²φ = 0. Veľkosť aktívnej zóny reaktora vyplýva z podmienky, že tok na okraji klesne na nulu. Ide o úlohu na vlastnú hodnotu, určenú pre moderované mreže energetických reaktorov.
  Rovnica modelu: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrický parameter:
  $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Separácia premenných v x, y, z
  $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- Dosadíme
  $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$
- Jednogrupový difúzny model bez reflektora: skutočné reaktory majú reflektor, a sú preto menšie. Všeobecný tvar vedie na parciálnu diferenciálnu rovnicu.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Medená tyč 100 °C s koncami na 20 °C – teplota v strede po 10 minútach.

Zadanie: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Výsledok

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

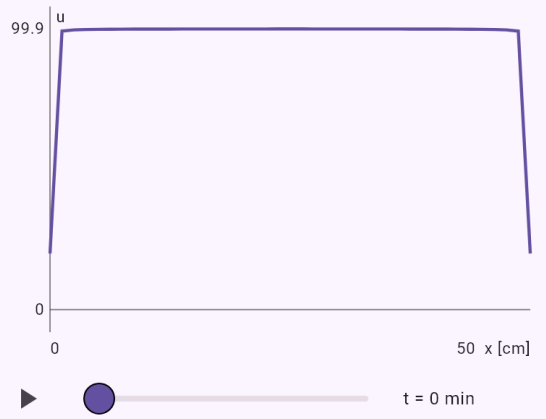
Postup

- Hľadáme T; zadané
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e = $
- Prevedieme jednotky
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- Rozloženie teploty v tyči opisuje rovnica vedenia tepla T_t = α·T_xx; teplotná vodivosť α = λ/(ρc) hovorí, ako rýchlo sa teplota vyrovnáva. Tyč má na začiatku všade teplotu T_0 a od okamihu t = 0 sa konce držia na teplote T_e (alebo je jeden koniec izolovaný). Riešenie separáciou premenných je Fourierov rad; každý člen klesá exponenciálne, najpomalšie prvý s časovou konštantou τ. Oba konce sa držia na teplote T_e, najdlhšie si teplotu drží stred tyče. Rovnica modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Riešenie separáciou premenných (Fourierov rad)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Časová konštanta najpomalšieho člena
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e) S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$

- Súčet radu v bode: $S \approx 0{,}07967$
- Dosadíme: $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Oceľová tyč s jedným izolovaným koncom – za aký čas zostane 5 % rozdielu teplôt.

Zadanie: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

Výsledok

$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

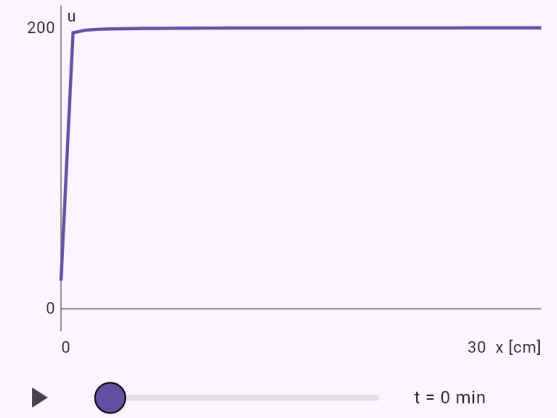
Postup

- Hľadáme t; zadané
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Prevedieme jednotky
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- Rozloženie teploty v tyči opisuje rovnica vedenia tepla T_t = α·T_xx; teplotná vodivosť α = λ/(ρc) hovorí, ako rýchlo sa teplota vyrovnáva. Tyč má na začiatku všade teplotu T_0 a od okamihu t = 0 sa konce držia na teplote T_e (alebo je jeden koniec izolovaný). Riešenie separáciou premenných je Fourierov rad; každý člen klesá exponenciálne, najpomalšie prvý s časovou konštantou τ. Koniec x = 0 sa drží na teplote T_e a koniec x = L je izolovaný (teplo ním neprechádza) – tyč sa správa ako polovica dvakrát dlhšej tyče, najdlhšie si teplotu drží izolovaný koniec. Rovnica modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Riešenie separáciou premenných (Fourierov rad)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -$
- Časová konštanta najpomalšieho člena
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$

- Dosadíme: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- Najteplejší je izolovaný koniec. Po chvíli prevládne prvý člen radu, preto stačí jeho útlm; presný čas vyjde z celého radu.
- Prevedieme jednotky: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Medená doska 30 × 20 cm zo 100 °C s okrajmi na 20 °C – teplota v strede po 2 minútach.

Zadanie: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Výsledok

$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$

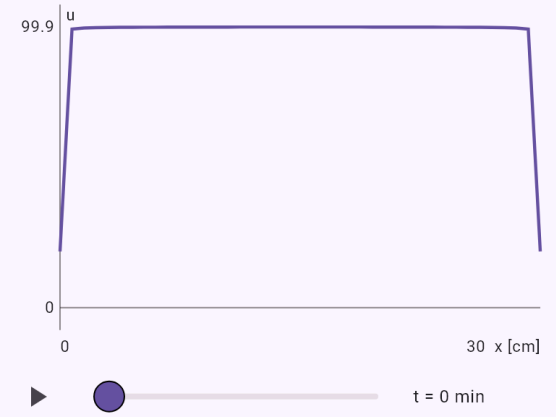
Postup

- Hľadáme T; zadané
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Prevedieme jednotky
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- Teplotu v obdĺžnikovej doske a × b opisuje rovnica vedenia tepla T_t = α(T_xx + T_yy). Doska má na začiatku všade teplotu T_0 a od t = 0 sa okraje držia na teplote T_e. Úloha sa separuje na dve tyče: podiel zostávajúceho rozdielu teplôt je súčinom radov pre tyč dĺžky a a tyč dĺžky b – preto doska chladne rýchlejšie ako každá z oboch tyčí. Najdlhšie si teplotu drží stred dosky. Rovnica modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separácia na dve tyče – súčin dvoch Fourierových radov
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Časová konštanta najpomalšieho člena
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Súčty oboch radov v bode:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$

- Dosadíme
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$
- Graf ukazuje teplotu pozdĺž priamky: $y = 10\,\mathrm{cm}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Betónová doska s jedným izolovaným okrajom – za koľko hodín zostane 5 % rozdielu teplôt.

Zadanie: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Výsledok

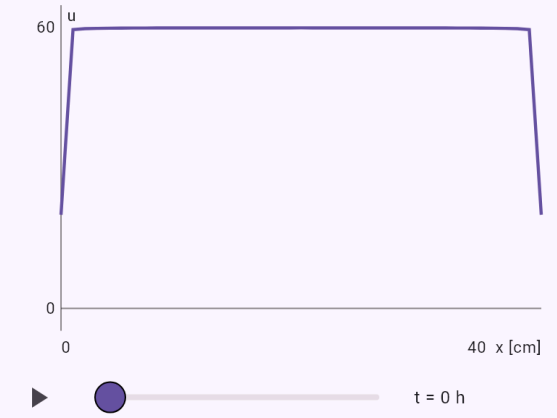
$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

Postup

- Hľadáme t; zadané
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Prevedieme jednotky
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- Teplotu v obdĺžnikovej doske a × b opisuje rovnica vedenia tepla T_t = α(T_xx + T_yy). Doska má na začiatku všade teplotu T_0 a od t = 0 sa tri okraje držia na teplote T_e, okraj y = b je izolovaný (teplo ním neprechádza). Úloha sa separuje na dve tyče; izolovaný okraj sa správa ako os súmernosti dvakrát vyššej dosky. Najdlhšie si teplotu drží stred izolovaného okraja. Rovnica modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separácia na dve tyče – súčin dvoch Fourierových radov
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Časová konštanta najpomalšieho člena
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)} \approx$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Dosadíme: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$
- Najteplejší je stred izolovaného okraja. Po chvíli prevládne súčin prvých členov oboch radov (16/π²)·e^(−t/τ), preto stačí jeho útlm; presný čas vyjde z celých radov.
- Graf ukazuje teplotu pozdĺž priamky: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Struna e¹ gitary – základná frekvencia.

Zadanie: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

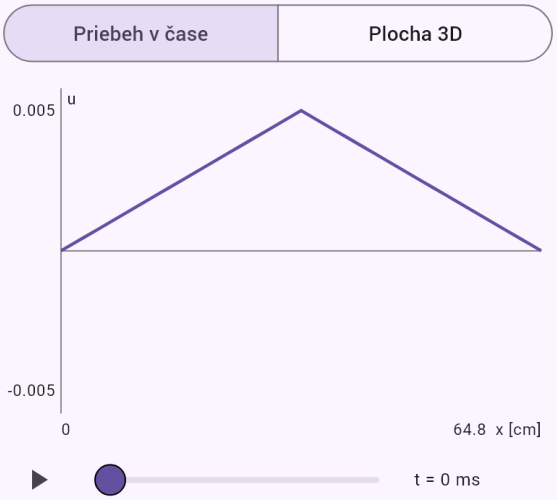
Výsledok

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Postup

- Hľadáme f_1; zadané:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Prevedieme jednotky
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Napnutá struna s upevnenými koncami sa riadi vlnovou rovnicou u_tt = c²·u_xx; rýchlosť vlny c = √(F/μ) dáva ťahová sila F a dĺžková hustota μ. Separáciou premenných vyjdú stojaté vlny sin(nπx/L) s frekvenciami f_n = n·c/(2L). Brnknutá struna má tvar trojuholníka – rozloží sa do Fourierovho radu a každá harmonická kmitá svojou frekvenciou. Rovnica modelu
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Rýchlosť vlny: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Vlastné kmity struny (stojaté vlny)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Dosadíme: $f_1 = \dfrac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Vyššie frekvencie sú celočíselnými násobkami základnej (harmonické) – preto má struna jasnú výšku tónu.

Graf



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Brnknutá struna – výchylka v strede po 1 ms.

Zadanie: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

`x=32.4[cm]; t=1[ms])`

Výsledok

$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

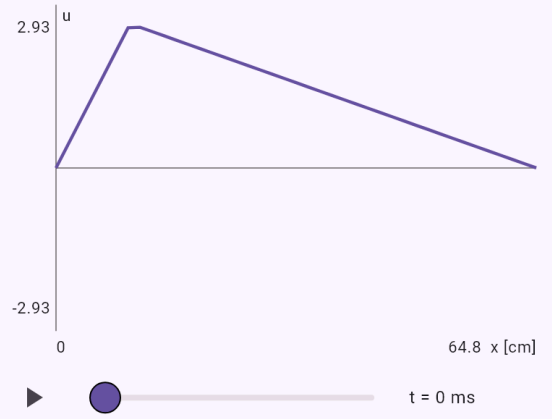
Postup

- Hľadáme u; zadané
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- Prevedieme jednotky
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
- Napnutá struna s upevnenými koncami sa riadi vlnovou rovnicou u_tt = c²·u_xx; rýchlosť vlny c = √(F/μ) dáva ťahová sila F a dĺžková hustota μ. Separáciou premenných vyjdú stojaté vlny sin(nπx/L) s frekvenciami f_n = n·c/(2L). Brnknutá struna má tvar trojuholníka – rozloží sa do Fourierovho radu a každá harmonická kmitá svojou frekvenciou. Rovnica modelu
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Rýchlosť vlny: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$
- Vlastné kmity struny (stojaté vlny)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Brnknutá struna – Fourierov rad
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Dosadíme: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$

- Za periódu sa tvar struny vráti: $T = \dfrac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$
- Prevedieme jednotky: $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Bubon – frekvencia módu (1, 1) s jedným uzlovým priemerom.

Zadanie: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

```
n=1[one])
```

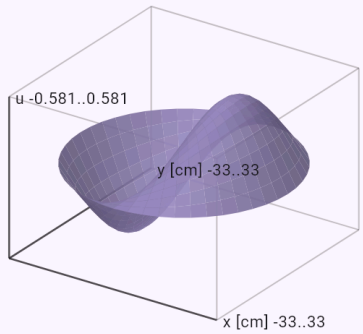
Výsledok

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Postup

- Hľadáme f_{mn}; zadané $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Prevedieme jednotky: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Kruhová membrána upevnená na okraji (blana bubna) sa riadi vlnovou rovnicou u_tt = c²·Δu s rýchlosťou c = √(T/σ). V polárnych súradniciach sa premenné oddelia: uhlová časť je cos(mφ), radiálna Besselova funkcia J_m(kr). Podmienka na okraji J_m(ka) = 0 dáva k = j_mn/a, kde j_mn je n-tý koreň J_m, a frekvencie f_mn = j_mn·c/(2πa). Mód (m, n) má m uzlových priemerov a n − 1 uzlových kružníc. Rovnica modelu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a,\varphi,t) = 0$
- Rýchlosť vlny v membráne: $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$
- Separácia v polárnych súradniciach – Besselova rovnica $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- Okraj membrány je upevnený: $J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$
- Dosadíme: $f_{11} = \frac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Vyššie módy nie sú celočíselnými násobkami základného. Preto bubon neznie takou jasnou výškou tónu ako struna. $\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Dostrel šikmého vrhu vo vákuu.

Zadanie: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Výsledok

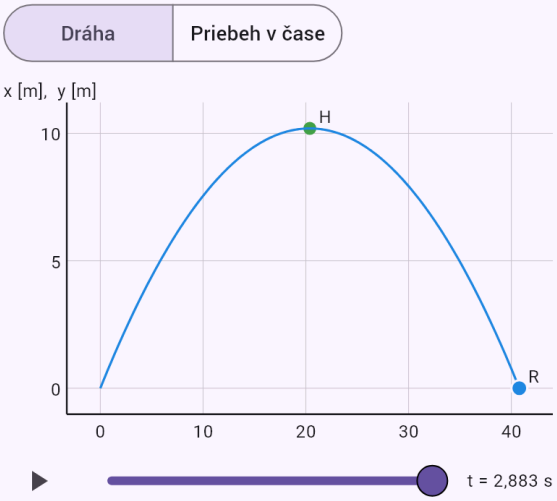
$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme R; zadané: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Bez odporu vzduchu sa pohyb rozkladá na dva nezávislé: vodorovný je rovnomerný a zvislý je rovnomerne zrýchlený. Dráhou je parabola a všetky hodnoty možno vyjadriť presnými vzorcami. Rovnica modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Doba letu
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $R = v_{0x} T$
- Dosadíme: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Pri rovnakej výške štartu a dopadu platia školské vzorce
  $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$
  $H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
  $T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

- Najväčší dostrel je pri uhle 45°; uhly α a 90° − α dávajú rovnaký dostrel.

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Dopadová rýchlosť pri vrhu z výšky.

Zadanie: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

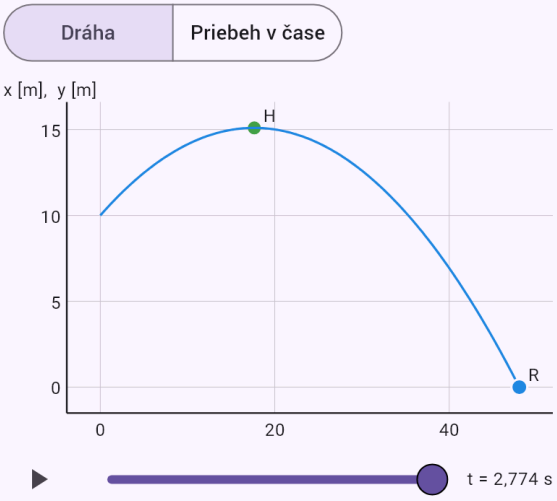
Výsledok

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme v_k; zadané:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Bez odporu vzduchu sa pohyb rozkladá na dva nezávislé: vodorovný je rovnomerný a zvislý je rovnomerne zrýchlený. Dráhou je parabola a všetky hodnoty možno vyjadriť presnými vzorcami. Rovnica modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Dosadíme
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Vyplýva to zo zákona zachovania mechanickej energie, nezávisí od uhla.

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Dva elevačné uhly pre vzdialenosť 200 m.

Zadanie: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Výsledok

$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

Postup

- Hľadáme α; zadané: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- Do rovnice dráhy sa dosadí vzdialenosť a výška cieľa. Po substitúcii u = tg α vznikne kvadratická rovnica, ktorá má zvyčajne dva korene: plochú a strmú dráhu. Rovnica modelu

$$h_k = h_0 + d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g d^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$$

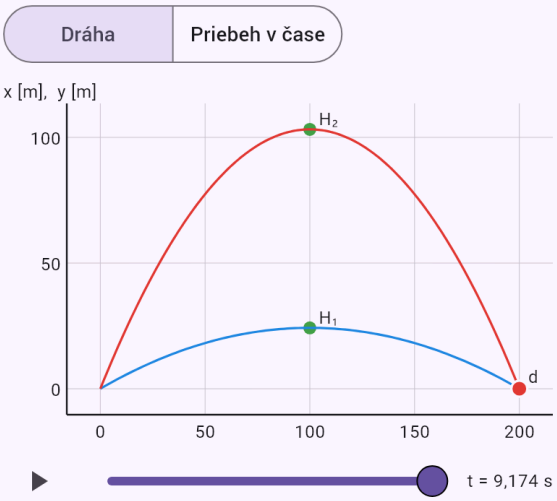
- Kvadratická rovnica pre tg α

$$u = \mathrm{tg}\,\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$$
$$a = \frac{g d^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81 \cdot (200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$$
$$c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$$

- Diskriminant:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4 \cdot 78{,}48 \cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Korene: $u_{1,2} = \frac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Riešenie
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Riešenie
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$

- Na vodorovnej rovine dávajú oba uhly súčet 90°.

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Dostrel futbalovej lopty s odporom vzduchu a porovnanie s vákuom.

Zadanie: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledok

$$R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$$

Postup

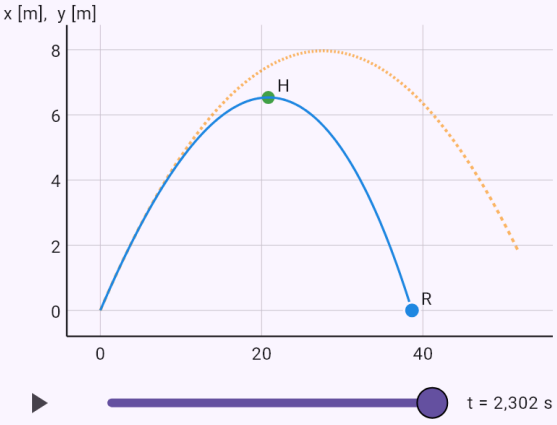
- Hľadáme R; zadané
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ś
- Prevedieme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Na teleso pôsobí tiaž a odpor vzduchu proti rýchlosti voči vzduchu, takže sa v rovniciach prejaví aj vietor. Zložky rýchlosti sú prepojené a presné riešenie neexistuje, sústava sa preto rieši numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Sústava šiestich rovníc pre x, y, z a zložky rýchlosti bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov:
  $N = 1807$
- Priebeh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Kľúčové hodnoty
  $H \approx 6{,}534\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- Rovnaký vrh vo vákuu
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Podiel dostrelu vo vzduchu a vo vákuu: $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Plná čiara je dráha vo vzduchu, čiarkovaná dráha vo vákuu. Osi nemajú rovnakú mierku.

Bočná odchýlka lopty vo vetre, s bokorysom a pôdorysom.

Zadanie: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledok

$$z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$$

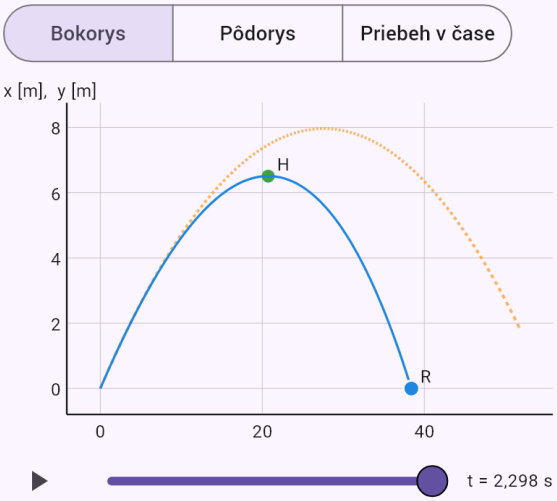
Postup

- Hľadáme z; zadané
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad S$
- Prevedieme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Na teleso pôsobí tiaž a odpor vzduchu proti rýchlosti voči vzduchu, takže sa v rovniciach prejaví aj vietor. Zložky rýchlosti sú prepojené a presné riešenie neexistuje, sústava sa preto rieši numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- Sústava šiestich rovníc pre x, y, z a zložky rýchlosti bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov: $N = 1804$
- Priebeh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Kľúčové hodnoty
  $H \approx 6{,}51\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}298\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}4\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$
- Rovnaký vrh vo vákuu
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Podiel dostrelu vo vzduchu a vo vákuu: $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Vplyv vetra: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\mathrm{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

Graf



Plná čiara je dráha vo vzduchu, čiarkovaná dráha vo vákuu. Osi nemajú rovnakú mierku.

Športová malokalibrovka: rýchlosť na konci letu, krivka G1.

Zadanie: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Výsledok

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Postup

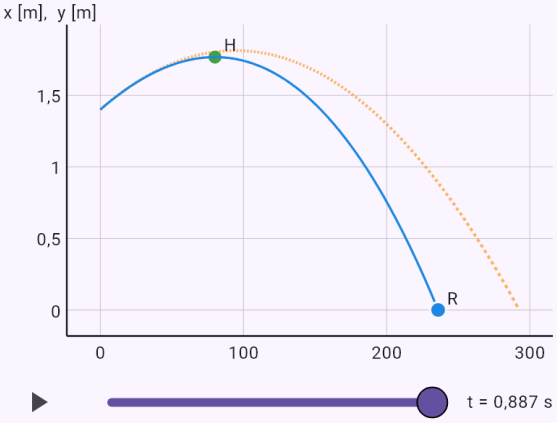
- Hľadáme v_k; zadané
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Prevedieme jednotky
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Na teleso pôsobí tiaž a odpor vzduchu proti rýchlosti voči vzduchu, takže sa v rovniciach prejaví aj vietor. Zložky rýchlosti sú prepojené a presné riešenie neexistuje, sústava sa preto rieši numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $m\vec{v} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Machovo číslo a súčiniteľ odporu pri štarte:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Sústava šiestich rovníc pre x, y, z a zložky rýchlosti bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov:
  $N = 73$
- Priebeh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Kľúčové hodnoty
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- Rovnaký vrh vo vákuu
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Podiel dostrelu vo vzduchu a vo vákuu: $\frac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Súčiniteľ odporu sa berie z približnej krivky podľa Machovho čísla, pri strele krivka G1 násobená tvarovým súčiniteľom. Tabuľky výrobcu majú prednosť. Stáčanie rotujúcej strely sa nepočíta.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Plná čiara je dráha vo vzduchu, čiarkovaná dráha vo vákuu. Osi nemajú rovnakú mierku.

Poľovnícka guľovnica: dostrel s hustotou vzduchu podľa výšky.

Zadanie: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

`cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)`

Výsledok

$$R \approx 2365\,\mathrm{m}$$

Postup

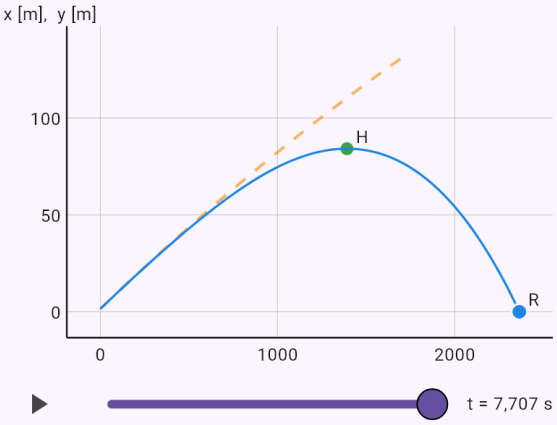
- Hľadáme R; zadané
  $v_0 = 860\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad m = 9{,}72\,\mathrm{g},$
- Prevedieme jednotky
  $m = 9{,}72\,\mathrm{g} = 0{,}00972\,\mathrm{kg}, \quad S = 48{,}1\,\mathrm{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Na teleso pôsobí tiaž a odpor vzduchu proti rýchlosti voči vzduchu, takže sa v rovniciach prejaví aj vietor. Zložky rýchlosti sú prepojené a presné riešenie neexistuje, sústava sa preto rieši numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Hustota vzduchu podľa štandardnej atmosféry:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\mathrm{kg/m^3}$
- Machovo číslo a súčiniteľ odporu pri štarte:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Sústava šiestich rovníc pre x, y, z a zložky rýchlosti bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov:
  $N = 335$
- Priebeh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Kľúčové hodnoty
  $H \approx 84{,}15\,\mathrm{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2365\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Rovnaký vrh vo vákuu
  $R_v \approx 13\,110\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\mathrm{s}$
- Podiel dostrelu vo vzduchu a vo vákuu: $\frac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Súčiniteľ odporu sa berie z približnej krivky podľa Machovho čísla, pri strele krivka G1 násobená tvarovým súčiniteľom. Tabuľky výrobcu majú prednosť. Stáčanie rotujúcej strely sa nepočíta.
- Počas letu rýchlosť klesla pod rýchlosť zvuku; v tejto oblasti sa súčiniteľ odporu mení najviac.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Plná čiara je dráha vo vzduchu, čiarkovaná dráha vo vákuu. Osi nemajú rovnakú mierku.

Delová guľa zo školskej fyziky: odchýlka vplyvom Coriolisovej sily.

Zadanie: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Výsledok

$$z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$$

Postup

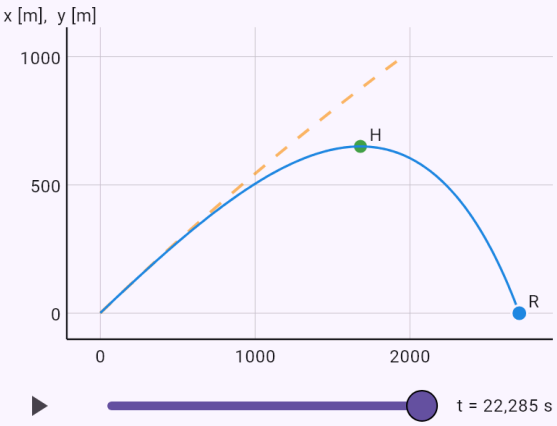
- Hľadáme z; zadané
  $v_0 = 439\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\mathrm{m}, \quad m = 5580\,\mathrm{g},$
- Prevedieme jednotky
  $m = 5580\,\mathrm{g} = 5{,}58\,\mathrm{kg}, \quad S = 10\,200\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0102\,\mathrm{m^2}$
- Na teleso pôsobí tiaž a odpor vzduchu proti rýchlosti voči vzduchu, takže sa v rovniciach prejaví aj vietor. Zložky rýchlosti sú prepojené a presné riešenie neexistuje, sústava sa preto rieši numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Zložky začiatočnej rýchlosti
  $v_{0x} = 439 \cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 439 \sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Machovo číslo a súčiniteľ odporu pri štarte:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Uhlová rýchlosť Zeme (Coriolisova sila):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
- Sústava šiestich rovníc pre x, y, z a zložky rýchlosti bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov:
  $N = 1023$
- Priebeh letu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Kľúčové hodnoty
  $H \approx 650{,}1\,\mathrm{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2706\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Rovnaký vrh vo vákuu
  $R_v \approx 17\,020\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 2457\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\mathrm{s}$
- Podiel dostrelu vo vzduchu a vo vákuu: $\frac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Vplyv Coriolisovej sily
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Súčiniteľ odporu sa berie z približnej krivky podľa Machovho čísla, pri strele krivka G1 násobená tvarovým súčiniteľom. Tabuľky výrobcu majú prednosť. Stáčanie rotujúcej strely sa nepočíta.
- Počas letu rýchlosť klesla pod rýchlosť zvuku; v tejto oblasti sa súčiniteľ odporu mení najviac.

Graf

Bokorys | Pôdorys | Priebeh v čase



Plná čiara je dráha vo vzduchu, čiarkovaná dráha vo vákuu. Osi nemajú rovnakú mierku.

Plochý a strmý uhol pre loptu s odporom vzduchu.

Zadanie: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Výsledok

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

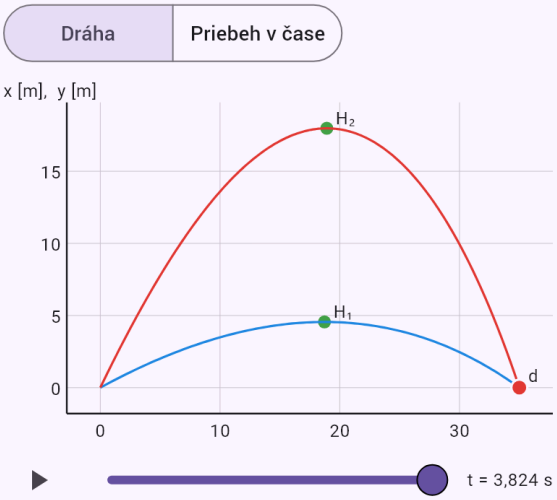
$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

Postup

- Hľadáme α; zadané
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Prevedieme jednotky
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- S odporom vzduchu vzorec neexistuje. Výpočet preto skúša rôzne uhly a sleduje, ako vysoko teleso vo vzdialenosti cieľa letí. Uhly, kedy prechádza presne cieľom, sa nájdu polením intervalu. Rovnica modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Konštanta odporu vzduchu (súčiniteľ odporu): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Medzná rýchlosť voľného pádu: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Odpor vzduchu voči tiaži pri štarte: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Uhly boli nájdené metódou streľby: polením intervalu podľa výšky vo vzdialenosti d, teda hľadaním koreňa rovnice $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Riešenie
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Riešenie

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Pádová rýchlosť malého lietadla.

Zadanie: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

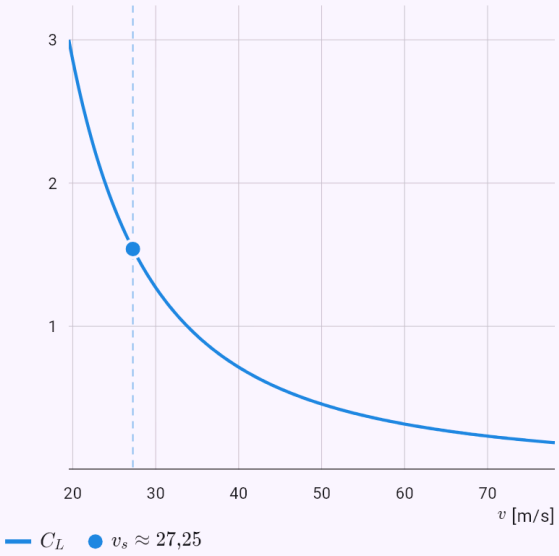
Výsledok

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Postup

- Hľadáme v_s; zadané
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- Vo vodorovnom lete sa vztlak rovná tiaži a ťah odporu. Odpor má dve časti: škodlivý rastie s druhou mocninou rýchlosti, indukovaný s ňou klesá, takže existuje rýchlosť najmenšieho odporu. Rovnica modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Tiaž lietadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Dosadíme
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Prevedieme jednotky: $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Odpor v ustálenom lete a graf škodlivého a indukovaného odporu.

Zadanie: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

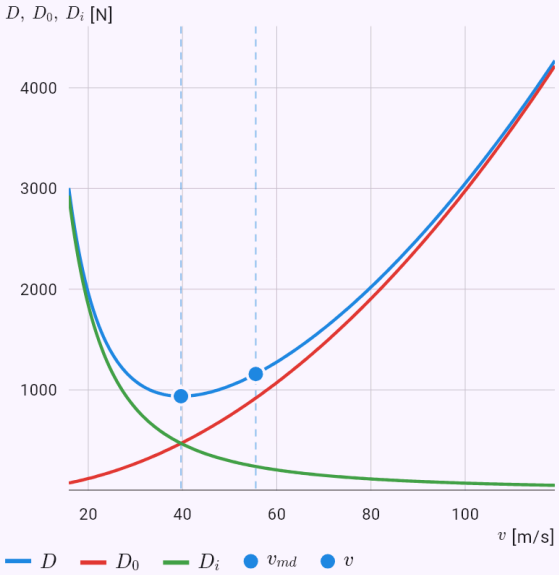
Výsledok

$$D \approx 1{,}158\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hľadáme D; zadané $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 1$
- Prevedieme jednotky: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- Vo vodorovnom lete sa vztlak rovná tiaži a ťah odporu. Odpor má dve časti: škodlivý rastie s druhou mocninou rýchlosti, indukovaný s ňou klesá, takže existuje rýchlosť najmenšieho odporu. Rovnica modelu: $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Tiaž lietadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Štíhlosť krídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Súčiniteľ indukovaného odporu (Oswaldov súčiniteľ e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Dynamický tlak $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\mathrm{Pa}$
- Potrebný súčiniteľ vztlaku: $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Škodlivý a indukovaný odpor: $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\mathrm{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\mathrm{N}$
- Klzavosť pri tejto rýchlosti: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $D = D_0 + D_i$
- Dosadíme: $D \approx 1158\,\mathrm{N}$
- Prevedieme jednotky: $D \approx 1158\,\mathrm{N} = 1{,}158\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Ekranoplán KM: koľko odporu ušetrí prízemný efekt.

Zadanie: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

Výsledok

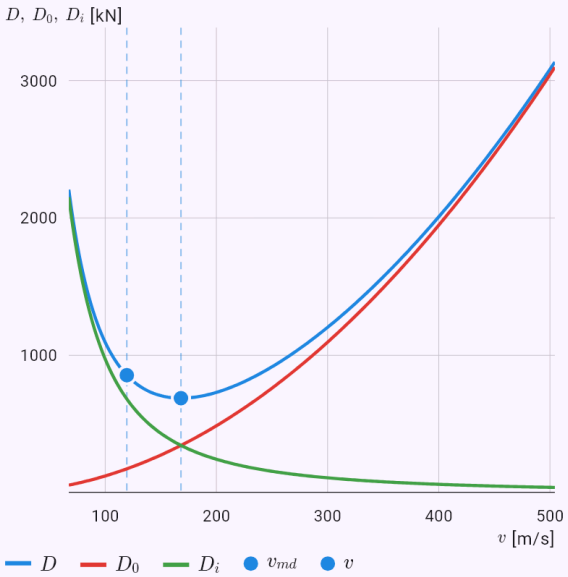
$$D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hľadáme D; zadané $v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad S = 662{,}5\,\mathrm{m^2}, \quad b$
- Prevedieme jednotky: $v = 430\,\mathrm{km/h} = 119{,}4\,\mathrm{m/s}$
- Vo vodorovnom lete sa vztlak rovná tiaži a ťah odporu. Odpor má dve časti: škodlivý rastie s druhou mocninou rýchlosti, indukovaný s ňou klesá, takže existuje rýchlosť najmenšieho odporu. Rovnica modelu: $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Tiaž lietadla: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\mathrm{kN}$
- Štíhlosť krídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Súčiniteľ indukovaného odporu (Oswaldov súčiniteľ e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- Prízemný efekt zmenší indukovaný odpor $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Prírastok vztlaku pri rovnakom uhle nábehu (odhad z teórie nosnej čiary) $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Empirický vzorec McCormicka pre bežné krídla. Pri krídle s malou štíhlosťou a koncovými doskami, aké má ekranoplán, je skutočný efekt silnejší.
- Dynamický tlak $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\mathrm{Pa}$
- Potrebný súčiniteľ vztlaku: $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Škodlivý a indukovaný odpor $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\mathrm{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\mathrm{kN}$

- Klzavosť pri tejto rýchlosti: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Úspora odporu vďaka prízemnému efektu: $\Delta D \approx 235{,}4\,\mathrm{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $D = D_0 + D_i$
- Dosadíme: $D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$
- Prevedieme jednotky: $D \approx 855\,600\,\mathrm{N} = 855{,}6\,\mathrm{kN}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Dĺžka rozjazdu malého lietadla s grafom rýchlosti a dráhy.

Zadanie: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Výsledok

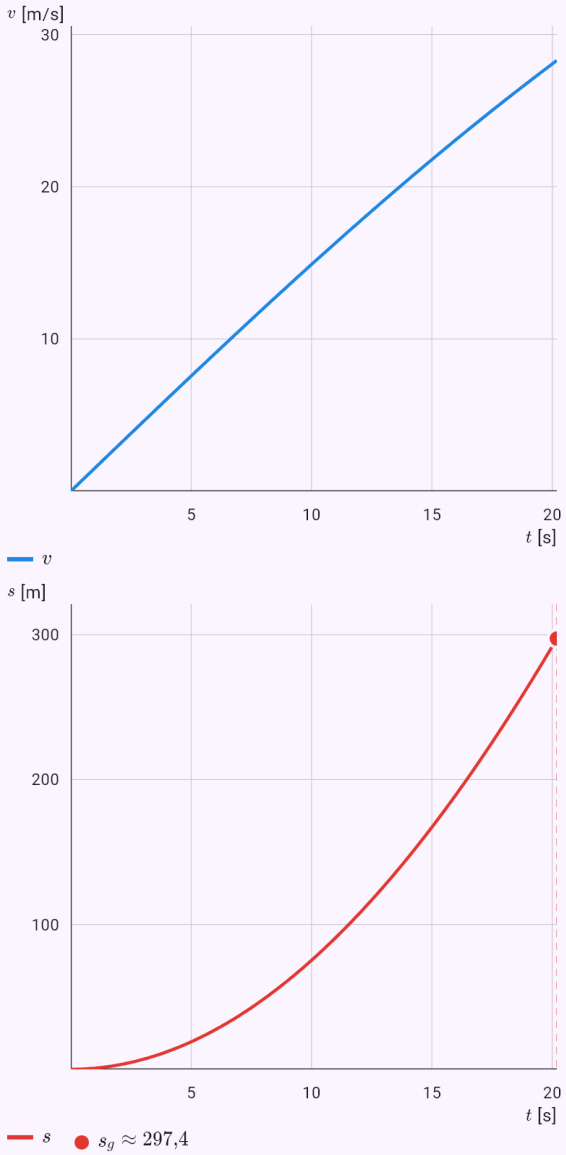
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme s_g; zadané
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Prevedieme jednotky: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- Lietadlo zrýchľuje z pokoja do rýchlosti odlepenia. Pôsobí ťah, odpor vzduchu a valivé trenie, ktoré klesá s rastúcim vztlakom. Rovnice sa riešia numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu; ťah sa berie ako priemerný a stály. Rovnica modelu
  $$m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = v$$
- Tiaž lietadla: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Pádová rýchlosť
  $$v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$$
- Rýchlosť odlepenia voči vzduchu:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Štíhlosť krídla: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Súčiniteľ indukovaného odporu (Oswaldov súčiniteľ e, polára): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Súčiniteľ odporu pri jazde po dráhe:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Zrýchlenie na začiatku a na konci
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$
- Rovnica bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov: $N = 2172$
- Priebeh na dráhe

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Polomer zákruty pri náklone 30°.

Zadanie: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

Výsledok

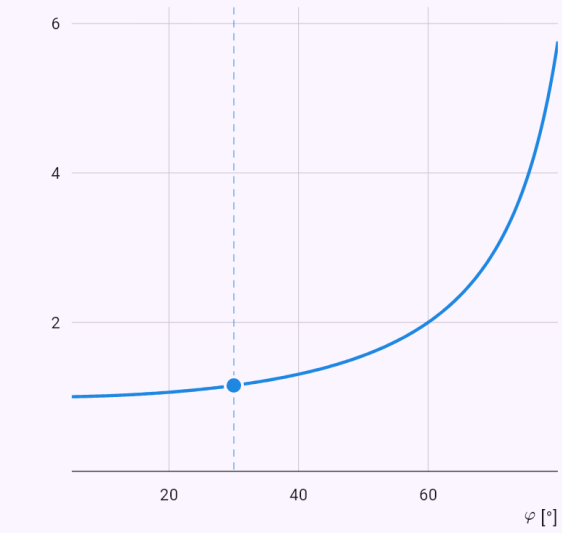
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

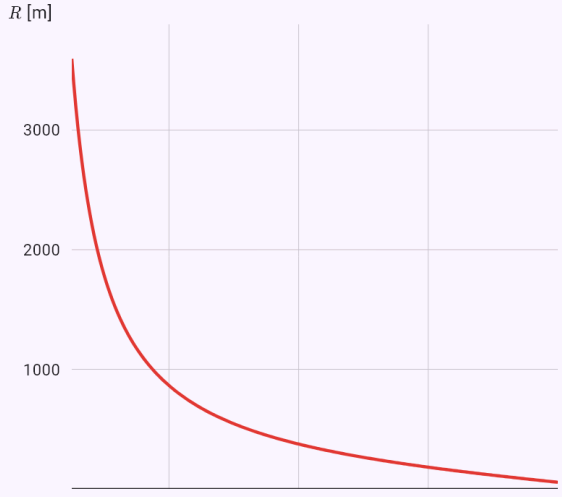
Postup

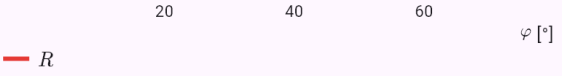
- Hľadáme R; zadané: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Prevedieme jednotky: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- V koordinovanej zákrute drží zvislá zložka vztlaku tiaž a vodorovná zložka zakrivuje dráhu. Násobok zaťaženia závisí len od náklonu, polomer aj od rýchlosti. Rovnica modelu: $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $R = \dfrac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}$
- Dosadíme

$$R = \frac{(55{,}56)^2}{9{,}81 \cdot \mathrm{tg}\,30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Graf







Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Dolet vetroňa z výšky 1000 m.

Zadanie: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Výsledok

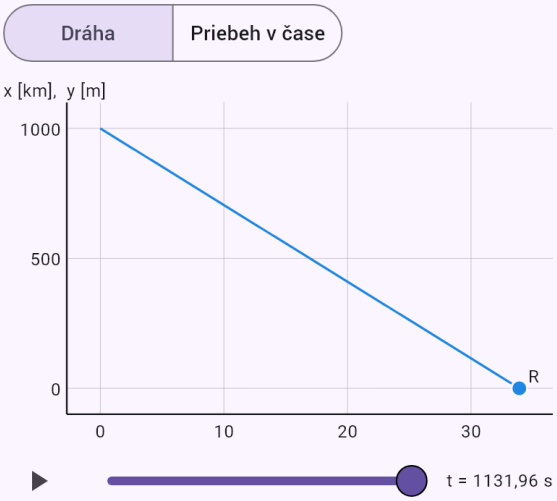
$$R \approx 33{,}91\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hľadáme R; zadané $h = 1000\,\mathrm{m}, \quad m = 600\,\mathrm{kg}, \quad S = 17{,}95\,\mathrm{m}^2, \quad b = 17\,\mathrm{m}$
- Bez ťahu lietadlo klesá po priamke, ktorej sklon určuje pomer vztlaku a odporu. Dolet z výšky je výška krát kĺzavosť a najväčší je pri rýchlosti najlepšej kĺzavosti. Rovnica modelu: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{D}{L} = \dfrac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \dfrac{v}{E}$
- Tiaž lietadla: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\mathrm{N}$
- Štíhlosť krídla: $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Súčiniteľ indukovaného odporu (Oswaldov súčiniteľ e, polára): $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Súčiniteľ vztlaku pri najlepšej kĺzavosti: $C_L^* = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Rýchlosť najlepšej kĺzavosti $v = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Najväčšia kĺzavosť a najmenší odpor $E_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Uhol kĺzania: $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Počíta sa s malým uhlom kĺzania, keď sa vztlak prakticky rovná tiaži, a so stálou hustotou vzduchu.

- Vyjadríme hľadanú veličinu: $R = hE$
- Dosadíme: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\mathrm{m}$
- Prevedieme jednotky: $R \approx 33\,910\,\mathrm{m} = 33{,}91\,\mathrm{km}$

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Apollo 13: preťaženie pri vstupe pod uhlom −6,20°.

Zadanie: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])`

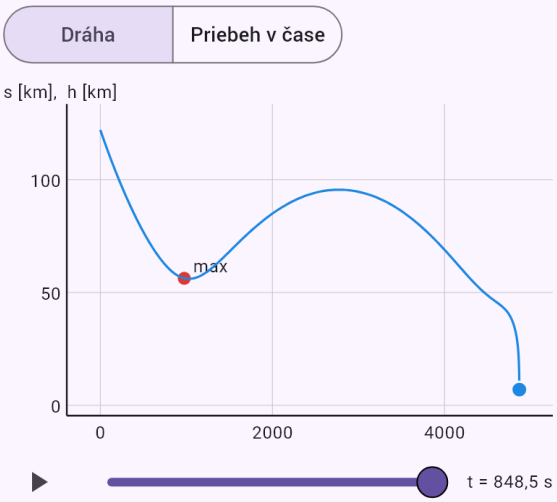
Výsledok

$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$

Postup

- Hľadáme a_{max}; zadané
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Jeden prelet atmosférou zo vstupnej výšky h_0 (štandardne 122 km) so zadaným uhlom dráhy γ_0 a stálym natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otvorenie padákov, pri raketoplane prechod do klzavého letu). Najväčšie preťaženie porovnáme so vzorcom Allena a Eggersa pre balistický vstup. Tepelný tok v stagnačnom bode dáva Suttonov–Gravesov vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiačná rovnováha εσT⁴ = q. Rovnica modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Čelná plocha a balistický koeficient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Hustota vzduchu podľa štandardnej atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Zvislá zložka vztlaku pri natočení σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Zachytenie: loď zostúpila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Najväčšie preťaženie (numericky)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Balistický vstup bez vztlaku by podľa Allena a Eggersa dal oveľa viac – vztlak preťaženie znižuje
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Najväčší tepelný tok v stagnačnom bode (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Teplota povrchu štítu z radiačnej rovnováhy (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Zjednodušenie: Zem je guľatá a neotáča sa, C_D a L/D sú stále a natočenie σ je počas celého letu rovnaké (skutočné riadenie ho mení). Tepelný tok je len konvektívny; pri návrate od Mesiaca pridáva ešte žiarenie žeravej rázovej vrstvy. Ablatívny štít časť tepla odnáša odparovaním, radiačná rovnovážna teplota je preto horný odhad.

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Vstupný koridor kabíny Apolla pri návrate od Mesiaca.

Zadanie: `model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn])`

Výsledok

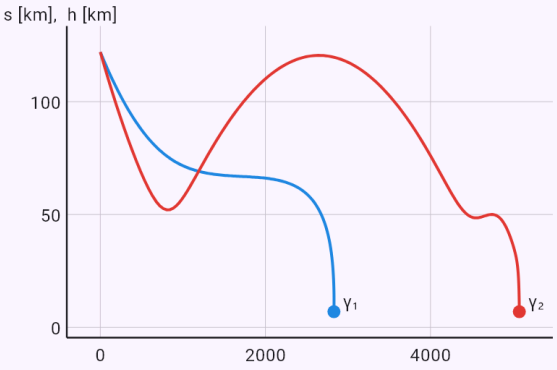
$$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$$
$$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$$
$$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$$

Postup

- Hľadáme $\Delta\gamma$; zadané
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Hranice vstupného uhla nájdeme polením intervalu. Plytká hranica je najplochší vstup, ktorý sa so vztlakom natočeným nadol (σ = 180°) ešte nevynorí nad vstupnú výšku; strmá hranica je najstrmší vstup, ktorý so vztlakom nahor (σ = 0°) neprekročí zadané preťaženie (a tepelný tok, ak je zadaný). Pre návrat od Mesiaca vychádza koridor široký len asi 2°. Apollo 13 (apríl 1970) sa po výbuchu kyslíkovej nádrže vracalo s vypnutou veliteľskou loďou a šetrilo energiou. Dráhu posádka opravovala ručným zážihom motora lunárneho modulu, zameraným podľa Zeme v zameriavači v okne, a posledná korekcia mierila do stredu koridoru. Plánovaný vstupný uhol bol −6,20°; počítač veliteľskej lode znovu zapli až pred vstupom. Rovnica modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Čelná plocha a balistický koeficient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Hustota vzduchu podľa štandardnej atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Plytká hranica koridoru (vztlak nadol):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Strmá hranica koridoru (vztlak nahor):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Šírka vstupného koridoru: $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Zjednodušenie: Zem je guľatá a neotáča sa, C_D a L/D sú stále a natočenie σ je počas celého letu rovnaké (skutočné riadenie ho mení). Tepelný tok je len konvektívny; pri návrate od Mesiaca pridáva ešte žiarenie žeravej rázovej vrstvy. Ablatívny štít časť tepla odnáša odparovaním, radiačná rovnovážna teplota je preto horný odhad.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Osi nemajú rovnakú mierku.

Vostok: balistický zostup bez vztlaku a 8–9 g.

Zadanie: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])

Výsledok

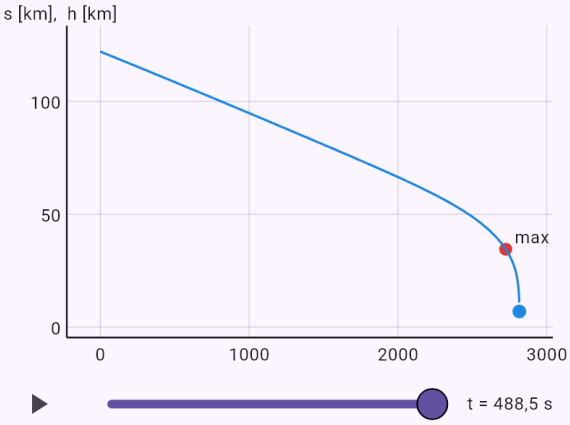
$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

Postup

- Hľadáme a_{max}; zadané
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Jeden prelet atmosférou zo vstupnej výšky h_0 (štandardne 122 km) so zadaným uhlom dráhy γ_0 a stálym natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otvorenie padákov, pri raketoplane prechod do klzavého letu). Najväčšie preťaženie porovnáme so vzorcom Allena a Eggersa pre balistický vstup. Tepelný tok v stagnačnom bode dáva Suttonov–Gravesov vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiačná rovnováha εσT⁴ = q. Rovnica modelu
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Čelná plocha a balistický koeficient
  $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Hustota vzduchu podľa štandardnej atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Zachytenie: loď zostúpila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Najväčšie preťaženie (numericky)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Kontrola vzorcom Allena a Eggersa pre balistický vstup (bez gravitácie, exponenciálna atmosféra s výškou H)
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$$
- Najväčší tepelný tok v stagnačnom bode (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Teplota povrchu štítu z radiačnej rovnováhy (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Zjednodušenie: Zem je guľatá a neotáča sa, C_D a L/D sú stále a natočenie σ je počas celého letu rovnaké (skutočné riadenie ho mení). Tepelný tok je len konvektívny; pri návrate od Mesiaca pridáva ešte žiarenie žeravej rázovej vrstvy. Ablatívny štít časť tepla odnáša odparovaním, radiačná rovnovážna teplota je preto horný odhad.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Raketoplán: teplota štítu z radiačnej rovnováhy.

Zadanie: model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Výsledok

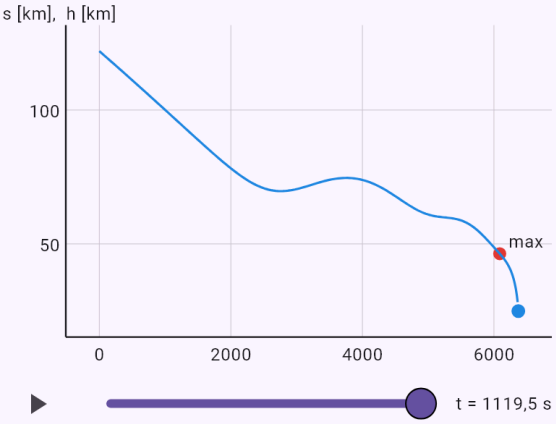
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Postup

- Hľadáme T_{max}; zadané
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Jeden prelet atmosférou zo vstupnej výšky h_0 (štandardne 122 km) so zadaným uhlom dráhy γ_0 a stálym natočením vztlaku σ až do výšky h_k (otvorenie padákov, pri raketoplane prechod do klzavého letu). Najväčšie preťaženie porovnáme so vzorcom Allena a Eggersa pre balistický vstup. Tepelný tok v stagnačnom bode dáva Suttonov–Gravesov vzorec q = k·√(ρ/R_n)·v³ a teplotu povrchu štítu radiačná rovnováha εσT⁴ = q. Rovnica modelu
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Raketoplán vstupoval s uhlom nábehu okolo 40° a nadbytočný vztlak maril náklonom okolo pozdĺžnej osi (až asi 70°); pristával ako klzák bez motora. Hodnoty predvoľby sú približné. Ako extrémne je tepelná ochrana namáhaná, ukázala nehoda Columbie (misia STS-107). Pri štarte 16. 1. 2003 kus izolačnej peny z vonkajšej nádrže prerazil panel z uhlíkového kompozitu RCC na nábežnej hrane ľavého krídla. Nábežné hrany sa pri návrate ohrievajú asi na 1 650 °C (okolo 3 000 °F). Pri návrate 1. 2. 2003 vniklo prierazom do krídla horúce plazma, konštrukcia sa roztavila a raketoplán sa nad Texasom rozpadol; zahynulo všetkých sedem členov posádky.
- Čelná plocha a balistický koeficient
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Hustota vzduchu podľa štandardnej atmosféry (nad 86 km izotermicky)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Zvislá zložka vztlaku pri natočení σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Zachytenie: loď zostúpila do výšky h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Najväčšie preťaženie (numericky)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Balistický vstup bez vztlaku by podľa Allena a Eggersa dal oveľa viac – vztlak preťaženie znižuje
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Najväčší tepelný tok v stagnačnom bode (Sutton–Graves) a celkové teplo na m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Teplota povrchu štítu z radiačnej rovnováhy (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Zjednodušenie: Zem je guľatá a neotáča sa, C_D a L/D sú stále a natočenie σ je počas celého letu rovnaké (skutočné riadenie ho mení). Tepelný tok je len konvektívny; pri návrate od Mesiaca pridáva ešte žiarenie žeravej rázovej vrstvy. Ablatívny štít časť tepla odnáša odparovaním, radiačná rovnovážna teplota je preto horný odhad.

Graf

Dráha | Priebeh v čase



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Koľko z ľadovca je pod hladinou.

Zadanie: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

Výsledok

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Postup

- Hľadáme φ; zadané:
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Na teleso v tekutine pôsobí vztlaková sila rovná tiaži vytlačenej tekutiny. Plávajúce teleso je ponorené z takej časti, aký je pomer hustôt. Rovnaký zákon nesie aj balón vo vzduchu. Rovnica modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Dosadíme: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Prevedieme jednotky: $\varphi \approx 0{,}8946 \;= 89{,}46\,\%$

Čo unesie teplovzdušný balón.

Zadanie: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Výsledok

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Postup

- Hľadáme m_p; zadané
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Na teleso v tekutine pôsobí vztlaková sila rovná tiaži vytlačenej tekutiny. Plávajúce teleso je ponorené z takej časti, aký je pomer hustôt. Rovnaký zákon nesie aj balón vo vzduchu. Rovnica modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Hmotnosť, ktorú plyn unesie
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $m_p = m_v - m_0$
- Dosadíme: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

Tlak na dne Mariánskej priekopy.

Zadanie: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

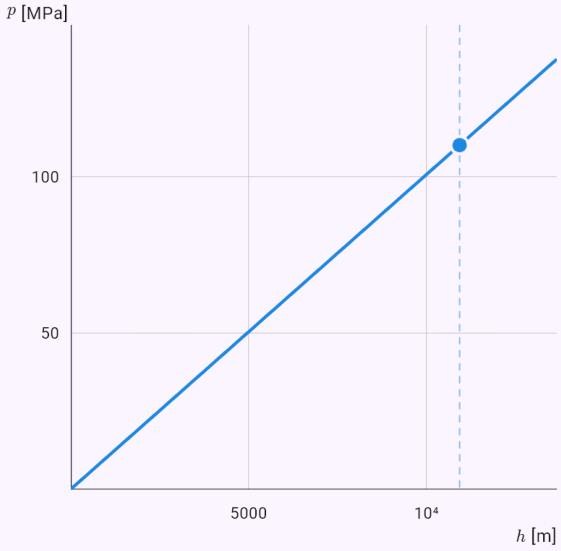
Výsledok

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

Postup

- Hľadáme p; zadané: $h = 10\,940\,\text{m}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}^3$
- Tlak rastie s hĺbkou lineárne, o hustotu krát g krát hĺbku. Na hladine k nemu prispieva tlak vzduchu. Voda sa berie ako nestlačiteľná. Rovnica modelu: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Vo veľkej hĺbke sa voda mierne stláča a mení sa aj hustota s teplotou a slanosťou; výsledok sa môže líšiť asi o 2 %.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Dosadíme:
  $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\,\text{MPa}$
- Koľkokrát väčší je tlak ako atmosférický: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Prevedieme jednotky: $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\,\text{Pa} = 1101\,\text{bar}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Tlak v zúžení potrubia.

Zadanie: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa]; rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Výsledok

$$p_2 \approx 170{,}1\,\text{kPa}$$

Postup

- Hľadáme p_2; zadané
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2, \quad v_1 = 2\,\text{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Prevedieme jednotky
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2 = 0{,}002\,\text{m}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2,$
- Pozdĺž prúdnice ideálnej kvapaliny sa zachováva súčet tlaku, kinetickej a polohovej energie objemu. V zúžení rastie rýchlosť a klesá tlak; ak klesne až k tlaku pár, nastáva kavitácia. Rovnica modelu:
  $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Rovnica kontinuity: $v_2 = v_1 \dfrac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \dfrac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\,\text{m/s}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Dosadíme
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - (\ldots$
- Prevedieme jednotky: $p_2 \approx 170\,100\,\text{Pa} = 170{,}1\,\text{kPa}$

Medzná rýchlosť kameňa vo vode a graf rozbehu.

Zadanie: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3]; nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

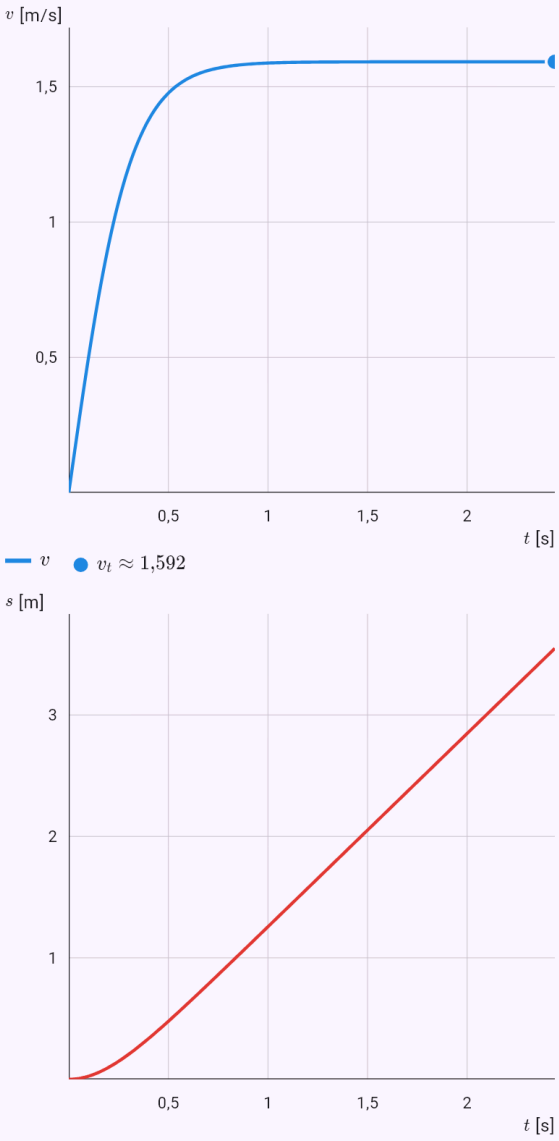
Výsledok

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Postup

- Hľadáme v_t; zadané
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Prevedieme jednotky: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Teleso klesá alebo stúpa, kým sa odpor nevyrovná rozdielu tiaže a vztlaku. Tak dosiahne medznú rýchlosť. Pri rozbehu musí rozpohybovať aj okolitú vodu, to opisuje pridaná hmotnosť. Rovnice sa riešia numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objem, prierez a hmotnosť gule
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- Výsledná sila smeruje nadol, teleso klesá:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Hmotnosť vrátane pridanej hmotnosti:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Reynoldsovo číslo a súčiniteľ odporu pri medznej rýchlosti: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Medzná rýchlosť: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Časová konštanta rozbehu s pridanou hmotnosťou a bez nej
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- Pridaná hmotnosť mení len rozbeh. Medzná rýchlosť od nej nezávisí, pretože v ustálenom pohybe sa už nič nezrýchľuje.
- Dosadíme: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Ako dlho stúpa bublina z hĺbky 10 m.

Zadanie: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

`nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)`

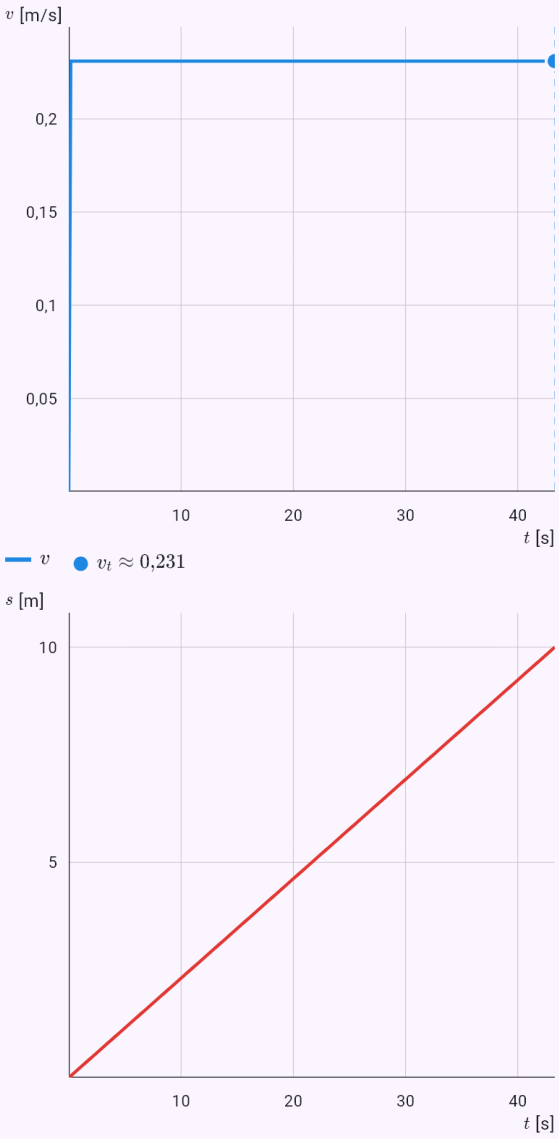
Výsledok

$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$

Postup

- Hľadáme t; zadané
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Prevedieme jednotky: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Teleso klesá alebo stúpa, kým sa odpor nevyrovná rozdielu tiaže a vztlaku. Tak dosiahne medznú rýchlosť. Pri rozbehu musí rozpohybovať aj okolitú vodu, to opisuje pridaná hmotnosť. Rovnice sa riešia numericky metódou Runge-Kutta 4. rádu. Rovnica modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objem, prierez a hmotnosť gule
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- Výsledná sila smeruje nahor, teleso stúpa:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Hmotnosť vrátane pridanej hmotnosti:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Eötvösovo číslo určuje, ako sa bublina deformuje:
  $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Reynoldsovo číslo a súčiniteľ odporu pri medznej rýchlosti: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Medzná rýchlosť: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Časová konštanta rozbehu s pridanou hmotnosťou a bez nej
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- Pridaná hmotnosť mení len rozbeh. Medzná rýchlosť od nej nezávisí, pretože v ustálenom pohybe sa už nič nezrýchľuje.
- Korelácia Tomiyamu platí pre bežnú, mierne znečistenú vodu. V čistej vode stúpajú malé bubliny rýchlejšie, veľké bubliny sa rozpadajú alebo kolíšu.
- Rovnica bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov: $N = 3363$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

Pokles drieku harpúny na vzdialenosť 5 m.

Zadanie: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)

Výsledok

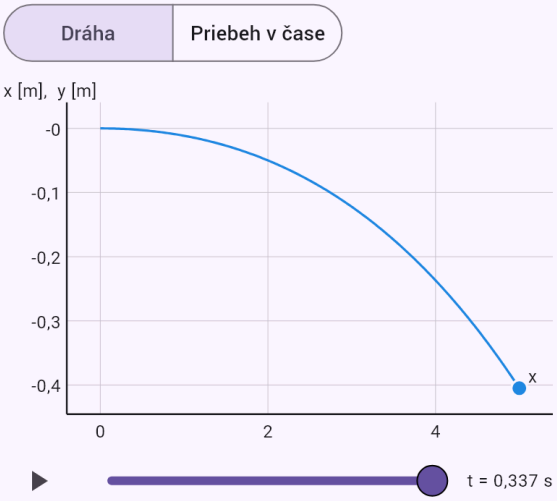
$$\Delta y \approx 40{,}5\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hľadáme Δy; zadané
  $x = 5\,\mathrm{m}, \quad v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\mathrm{kg}, \quad d = 7\,\mathrm{mm},$
- Prevedieme jednotky: $d = 7\,\mathrm{mm} = 0{,}007\,\mathrm{m}$
- Harpúna pre športový rybolov: štíhly driek brzdí hlavne trenie pozdĺž povrchu, preto stráca rýchlosť po niekoľkých metroch. Pokles určuje tiaž zmenšená o vztlak. Rovnice sa riešia numericky. Rovnica modelu
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Súčiniteľ trenia podľa krivky ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Súčiniteľ odporu drieku: špička a trenie po dĺžke:
  $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Dĺžka, na ktorej rýchlosť klesne asi na 37 %, a zrýchlenie nadol vo vode
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\mathrm{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\mathrm{m/}$
- Rovnica bola vyriešená metódou Runge-Kutta 4. rádu, počet krokov: $N = 1538$
- Model nepočíta odpor šnúry, ten skutočný dosah ďalej skracuje. Pridaná hmotnosť drieku v pozdĺžnom smere je zanedbateľná.

- Prevedieme jednotky: $\Delta y \approx 0{,}405\,\mathrm{m} = 40{,}5\,\mathrm{cm}$

Graf



Osi nemajú rovnakú mierku. Posuvníkom alebo tlačidlom prehrať sledujte let v čase.

Dosah podvodného dronu na batériu.

Zadanie: model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

Výsledok

$$R \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$$

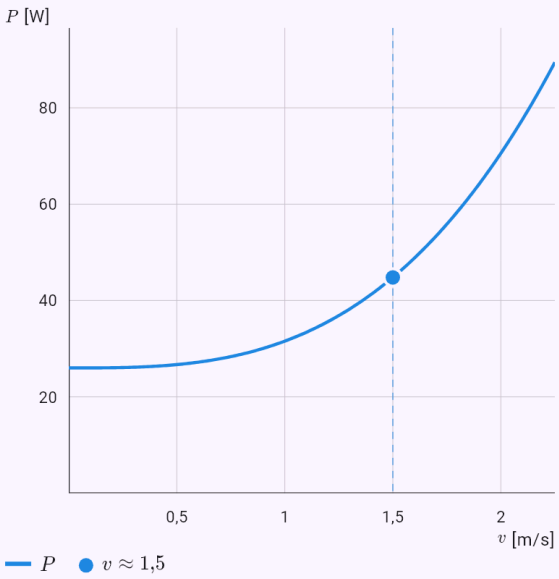
Postup

- Hľadáme R; zadané $v = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\mathrm{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Prevedieme jednotky: $E = 1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$
- V ustálenej plavbe sa ťah rovná odporu. Odpor rastie s druhou mocninou rýchlosti, výkon s treťou. Pri batérii navyše hrá rolu stála spotreba prístrojov, preto existuje rýchlosť najväčšieho dosahu. Rovnica modelu: $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Súčiniteľ K v odpore D = Kv²

$$K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\mathrm{kg/m}$$

- Potrebný výkon: $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\mathrm{W}$
- Rýchlosť najväčšieho dosahu: $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\mathrm{m/s}$
- Výdrž batérie: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\mathrm{h}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $R = v t_E$
- Dosadíme: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$
- Prevedieme jednotky: $R \approx 120\,500\,\mathrm{m} = 120{,}5\,\mathrm{km}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Historická ponorka: výkon rastie s treťou mocninou rýchlosti.

Zadanie: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

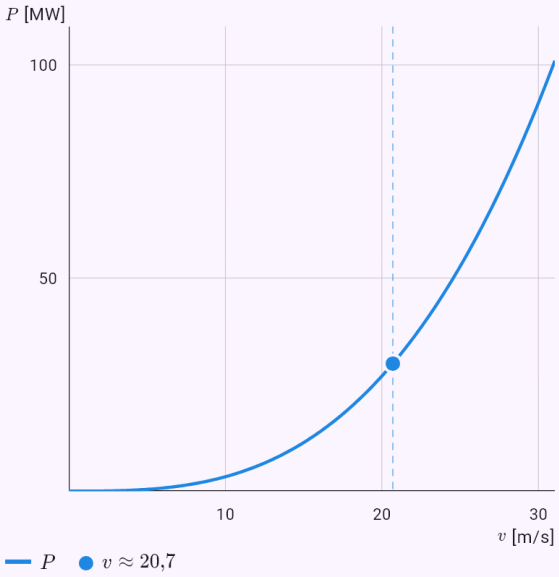
Výsledok

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hľadáme P; zadané
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- V ustálenej plavbe sa ťah rovná odporu. Odpor rastie s druhou mocninou rýchlosti, výkon s treťou. Pri batérii navyše hrá rolu stála spotreba prístrojov, preto existuje rýchlosť najväčšieho dosahu. Rovnica modelu:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Súčiniteľ K v odpore D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2}\cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h$
- Dosadíme: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- Výkon rastie s treťou mocninou rýchlosti: dvojnásobná rýchlosť znamená osemnásobný výkon:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Prevedieme jednotky: $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Koľko vody musí prijať ponorka, aby sa vznášala.

Zadanie: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Výsledok

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Postup

- Hľadáme m_b; zadané
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Ponorené plavidlo sa vznáša, keď sa jeho hmotnosť aj s balastom rovná hmotnosti vytlačenej vody. Vypustením alebo prijatím vody stúpa alebo klesá. Vyfúknutie nádrže v hĺbke stojí viac vzduchu, pretože musí pretlačiť okolitý tlak. Rovnica modelu: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Dosadíme: $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Objem balastnej vody: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- Prevedieme jednotky: $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

Výkon kontajnerovej lode s rozkladom odporu.

Zadanie: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

Výsledok

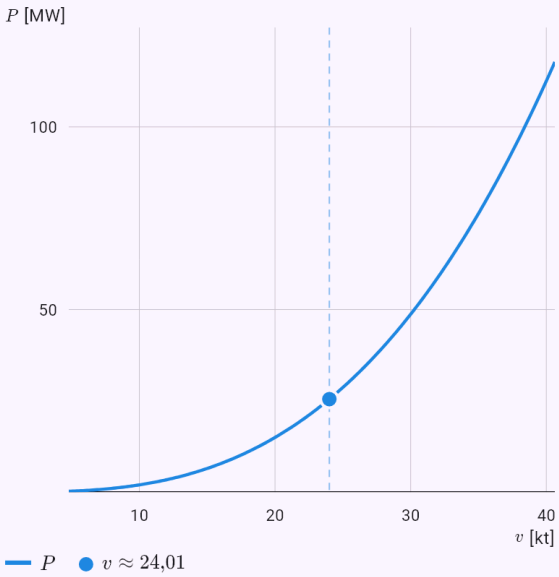
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hľadáme P; zadané
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- Ponor vyplýva z výtlaku, priečna stabilita z metacentra. Odpor má treciu časť podľa krivky ITTC-57 a zvyškovú časť zo zadaného súčiniteľa. Froudeho číslo a trupová rýchlosť ukazujú, kedy vlny na trupe začnú odpor prudko zvyšovať. Rovnica modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froudeho a Reynoldsovo číslo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Súčiniteľ trenia podľa krivky ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Trecí a zvyškový odpor
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Zvyškový súčiniteľ sa berie ako stály. V skutočnosti sa s rýchlosťou mení a získava sa z modelových skúšok.
- Celkový odpor: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Dosadíme: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Prevedieme jednotky: $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Metacentrická výška: stabilita lode.

Zadanie: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Výsledok

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme GM; zadané
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- Ponor vyplýva z výtlaku, priečna stabilita z metacentra. Odpor má treciu časť podľa krivky ITTC-57 a zvyškovú časť zo zadaného súčiniteľa. Froudeho číslo a trupová rýchlosť ukazujú, kedy vlny na trupe začnú odpor prudko zvyšovať. Rovnica modelu
  $Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Objem výtlaku a plocha vodorysky (blokový súčiniteľ)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Výška stredu vztlaku nad kýlom (Morrishov vzorec)
  $KB = T - \frac{1}{3}\left(\frac{T}{2} + \frac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Výška metacentra nad stredom vztlaku:
  $BM = \frac{I}{\nabla} = \frac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $GM = KB + BM - KG$
- Dosadíme: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Metacentrum leží nad ťažiskom, loď je priečne stabilná.
- Platí pre malé náklony. Moment vodorysky je odhad z jej súčiniteľa, presný je pre obdĺžnik; pri skutočnej lodi je výsledok len prvým odhadom.

Plavba lode 544 t a let ekranoplánu KM tesne nad hladinou.

Zadanie: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)

Výsledok

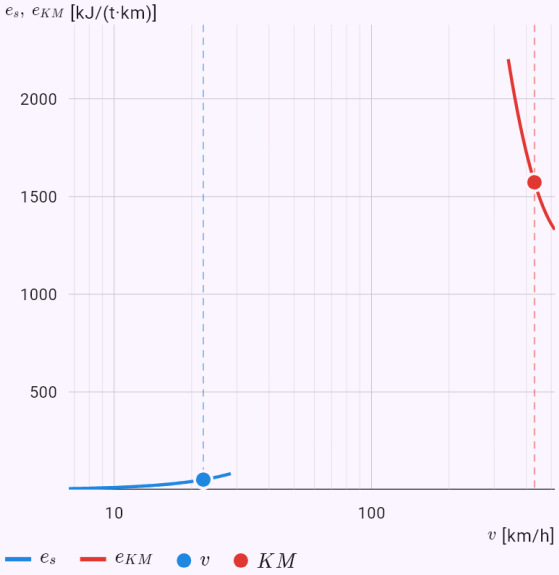
$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Postup

- Hľadáme P; zadané
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- Ponor vyplýva z výtlaku, priečna stabilita z metacentra. Odpor má treciu časť podľa krivky ITTC-57 a zvyškovú časť zo zadaného súčiniteľa. Froudeho číslo a trupová rýchlosť ukazujú, kedy vlny na trupe začnú odpor prudko zvyšovať. Rovnica modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froudeho a Reynoldsovo číslo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Súčiniteľ trenia podľa krivky ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Trecí a zvyškový odpor
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Zvyškový súčiniteľ sa berie ako stály. V skutočnosti sa s rýchlosťou mení a získava sa z modelových skúšok.
- Ekranoplán KM v cestovnej rýchlosti (rovnaký výpočet ako vo formulári Lietadlo)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Práca proti odporu na tonu a kilometer: loď a KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Koľkokrát viac energie KM potrebuje a koľkokrát je rýchlejší: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM sa počíta v prízemnom efekte so súčiniteľom McCormicka. Porovnanie je práca proti odporu, nezahŕňa účinnosť motorov, vlny ani počasie.

- Celkový odpor: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Dosadíme: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Prevedieme jednotky: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Graf



Vodorovná os je logaritmická, pretože sa rýchlosti líšia mnohonásobne. Bodky sú zadaná rýchlosť lode a cestovná rýchlosť ekranoplánu.

Energia neutrónu z reakcie D-T – rozdelenie podľa zákona zachovania hybnosti.

Zadanie: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Výsledok

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Postup

- Energia jednej reakcie z atómových hmotností. Pri dvoch produktoch sa energia rozdelí podľa zákona zachovania hybnosti: ľahšia častica odnesie väčší diel. Rovnica modelu: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reakcia: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Hmotnosti pred a po: $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Dosadíme: $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Produkty odlietajú s opačnými a rovnako veľkými hybnosťami, kinetické energie sú preto v obrátenom pomere hmotností.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Dosadíme: $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energia jadra hélia: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Koľko uhlia nahradí 1 g paliva D-T.

Zadanie: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Výsledok

$$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$$

Postup

- Hľadáme m_c; zadané: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Prevedieme jednotky: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Koľko energie dá dané množstvo paliva. Porovnanie so štiepením uránu U-235 (asi 200 MeV na jadro) a so spálením uhlia. Rovnica modelu:
  $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reakcia: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energia jednej reakcie:
  $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme
  $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Dosadíme: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Dosadíme: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- Fúzia nemá kritické množstvo. Pri poruche plazma vychladne a reakcia sama ustane, reaktor nemôže „utiecť“ ako štiepny.
- Prevedieme jednotky: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Gamowov vrchol pre reťazec p-p v strede Slnka.

Zadanie: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one];`

`T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Výsledok

$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

Postup

- Hľadáme E_0; zadané:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- Jadrá bariéru v skutočnosti pretunelujú. Pravdepodobnosť tunelovania e^(−√(E_G/E)) s energiou prudko rastie, zatiaľ čo rýchlych jadier v Maxwellovom rozdelení prudko ubúda. Súčin oboch má ostrý Gamowov vrchol E_0: tam reakcie skutočne prebiehajú. Gamowov faktor berieme ako hotový vzorec, jeho odvodenie patrí do kvantovej mechaniky. Rovnica modelu

  $$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$
- Redukovaná hmotnosť

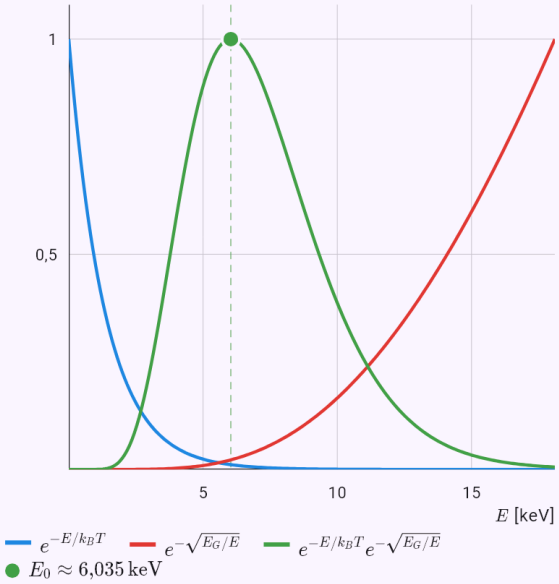
  $$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$
- Dosadíme

  $$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$
- Dosadíme

  $$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$
- Šírka vrcholu: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Poloha vrcholu v násobkoch k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- Reakcie prebiehajú hlavne v úzkom páse energií okolo E_0,

niekoľkokrát nad priemernou energiou k_BT. V grafe sú obe funkcie a ich súčin, každá delená svojím maximom.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Trojný súčin podľa parametrov ITER a porovnanie s podmienkou zapálenia.

Zadanie: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

```
mode=lawson)
```

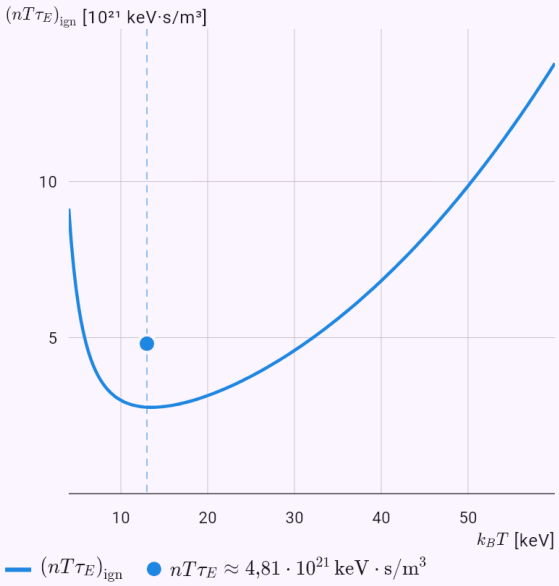
Výsledok

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$$

Postup

- Hľadáme $nT\tau_E$; zadané
  $n = 10^{20}\ \mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\ \mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\ \mathrm{s}$
- Lawsonovo kritérium: plazma sa sama udrží horúca (zapálenie), keď ohrev alfa časticami z reakcií D-T vyrovná tepelné straty 3nk_BT/τ_E. Rozhoduje trojný súčin hustoty n, teploty T a doby udržania energie τ_E. Jeho minimum, asi 3·10²¹ keV·s/m³, leží okolo 14 keV. Rovnica modelu
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Rýchlosť reakcie D-T (parametrizácia)
  $\langle\sigma v\rangle(13\ \mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m^3/s}$
- Dosadíme
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12 \cdot (13)^2}{3520 \cdot 2{,}073 \cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s}$$
- Dosadíme
  $nT\tau_E = 10^{20} \cdot 13 \cdot 3{,}7 \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$
- Trojný súčin stačí na zapálenie: ohrev alfa časticami pokryje straty – $\dfrac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Najnižší potrebný trojný súčin, asi 3·10²¹ keV·s/m³, je okolo 14 keV. Straty brzdným žiarením tu zanedbávame.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Rýchlosť reakcie D-T pri 10 keV integrálom Simpsonovou metódou.

Zadanie: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Výsledok

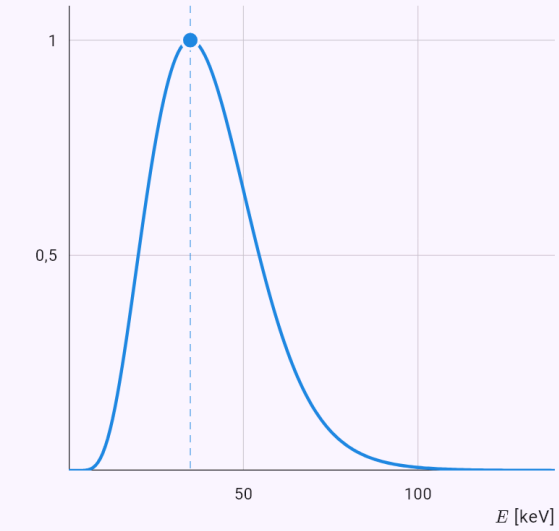
$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Postup

- Hľadáme $\langle \sigma v \rangle$; zadané: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- Rýchlosť reakcie ⟨σv⟩ je účinný prierez σ(E) spriemerovaný cez Maxwellovo rozdelenie rýchlostí. Počítame ju integrálom Simpsonovou metódou a porovnávame s publikovanou parametrizáciou. Účinné prierezy sú podľa Boscha a Halea (Nuclear Fusion 1992). Rovnica modelu
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$
- Reakcia: ${}^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n$
- Účinný prierez (Bosch-Hale):
  $\sigma(E) = \dfrac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$
- Simpsonova metóda: $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Integrál
  $$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$
- Hodnoty v SI
  $\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2,$
- Dosadíme
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$
- Porovnanie s parametrizáciou
  $\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$

- Integrand je nenulový hlavne v okolí Gamowovho vrcholu, preto stačí integrovať do 40 k_BT. Rozdiel od parametrizácie je v rádoch percent.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Larmorov polomer alfa častice z fúzie v poli 5 T.

Zadanie: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

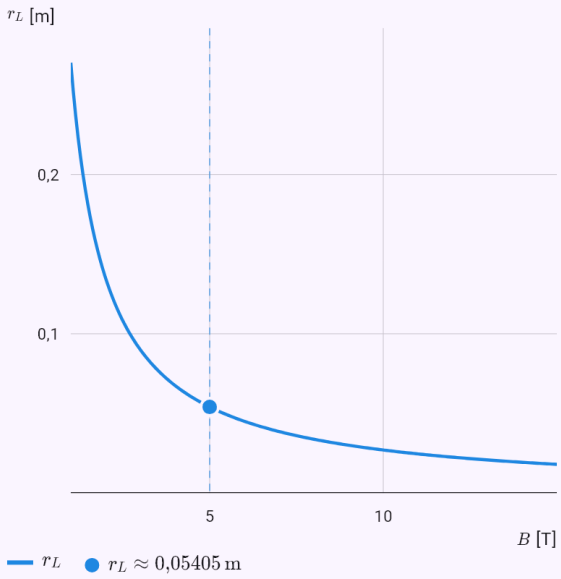
Výsledok

$$r_L \approx 5{,}405\,\mathrm{cm}$$

Postup

- Hľadáme r_L; zadané:
  $m = 4{,}002\,\mathrm{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\mathrm{keV}, \quad B = 5\,\mathrm{T}$
- Nabitá častica v magnetickom poli obieha po kružnici okolo siločiary (Larmorov polomer), a preto magnetické pole drží horúcu plazmu ďalej od stien. Počíta sa relativisticky, pri pomalých iónoch je γ ≈ 1. Rovnica modelu: $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Hmotnosť: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Lorentzov faktor a rýchlosť
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}04$
- Hybnosť
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$
- Dosadíme
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\mathrm{m}$
- Lióny v tokamaku obiehajú po kružniciach s polomerom milimetrov až centimetrov, a preto ich magnetické pole drží ďalej od stien.
- Prevedieme jednotky: $r_L \approx 0{,}05405\,\mathrm{m} = 5{,}405\,\mathrm{cm}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Lorentzov faktor protónu v LHC.

Zadanie: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Výsledok

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

Postup

- Hľadáme γ; zadané:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Prevedieme jednotky:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Zo zadanej rýchlosti (ako zlomku c) alebo z kinetickej energie vypočíta γ, rýchlosť, celkovú energiu a hybnosť. Protón v LHC (6,8 TeV) je pomalší ako svetlo len o niekoľko metrov za sekundu. Rovnica modelu
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Pokojová energia: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Dosadíme: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Rýchlosť: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- O koľko je pomalšia ako svetlo:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Ultrarelativistická častica: energia je takmer celá kinetická a rýchlosť sa líši od c len nepatrne.

Koľko miónov z výšky 15 km doletí k zemi vďaka dilatácii času.

Zadanie: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

Výsledok

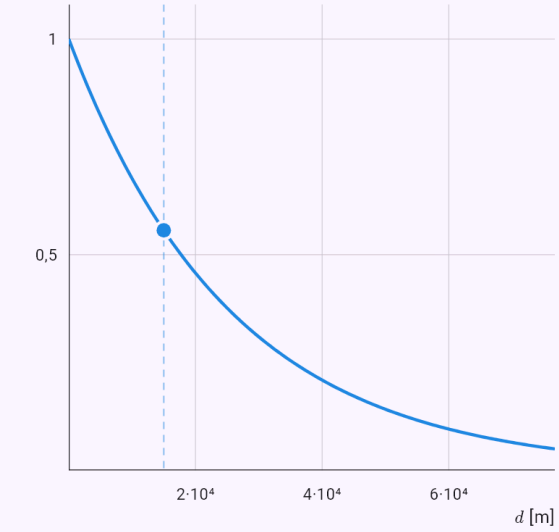
$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Postup

- Hľadáme $\frac{N}{N_0}$; zadané
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Prevedieme jednotky
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Nestabilná častica sa rozpadá s vlastnou strednou dobou života τ_0. V laboratóriu sa jej čas spomalí γ-krát, takže doletí γ-krát ďalej. Mióny vzniknuté 15 km vysoko v atmosfére by bez dilatácie času k zemi takmer nedoleteli. Rovnica modelu:
  $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Dosadíme: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Rýchlosť: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Dosadíme
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{m}$
- Dosadíme: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Bez dilatácie času by doletel podiel:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- Z pohľadu častice sa čas nespomalí, skráti sa však vzdialenosť (kontrakcia dĺžok). Oba pohľady dávajú rovnaký počet rozpadov.

- Prevedieme jednotky: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 = 55{,}64\,\%$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Energia zrážky zväzku LHC na pevnom terči.

Zadanie: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

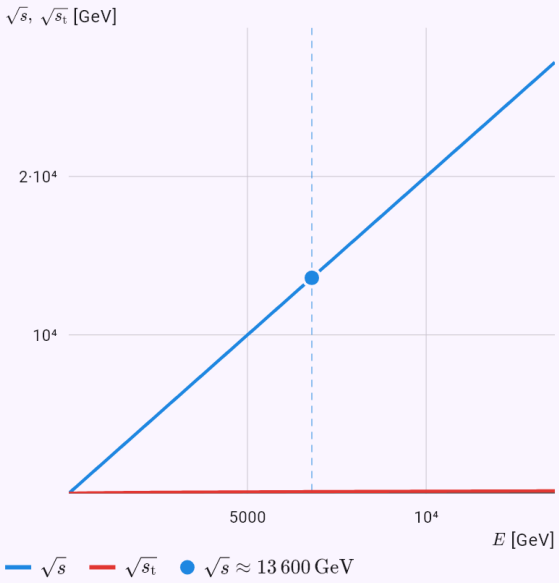
Výsledok

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Postup

- Hľadáme $\sqrt{s_t}$; zadané:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Vo vstrečných zväzkoch sa celá energia oboch častíc premení na energiu zrážky: √s = 2E. Zväzok namierený na pevný terč väčšinu energie spotrebuje na pohyb ťažiska, √s rastie len s odmocninou z E. Preto sa stavajú zrážače. Rovnica modelu:
  $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s je invariantná hmotnosť sústavy: energia, ktorá je k dispozícii na vznik nových častíc.
- Dosadíme
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Vstrečné zväzky: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Strata energie elektrónu za jeden obeh v LEP.

Zadanie: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

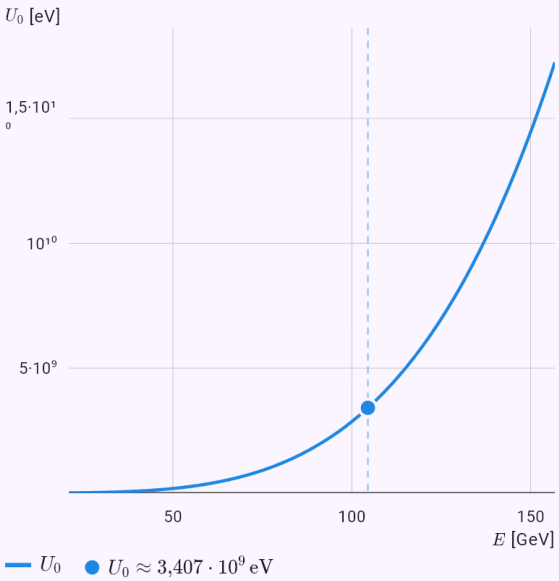
Výsledok

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Postup

- Hľadáme U_0; zadané
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Prevedieme jednotky: $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Nabitá častica na zakrivenej dráhe vyžaruje (synchrotrónové žiarenie). Strata za obeh rastie s γ⁴, teda pri rovnakej energii s 1/m⁴. Elektrón stratí 10¹³-krát viac ako protón, preto LEP skončil pri 104 GeV a LHC urýchľuje protóny. Rovnica modelu:
  $U_0 = \dfrac{e^2 \beta^3 \gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Lorentzov faktor: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Dosadíme
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}$
- V elektrónvoltoch: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\mathrm{eV}$
- Elektróny vyžarujú 10¹³-krát viac ako protóny rovnakej energie: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- Druhý druh častice pri rovnakej energii a dráhe: $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- Prevedieme jednotky: $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

44. Statika a pružnosť

Formulár Statika (Aplikácie, odbor Technika) má tri režimy. Nosník leží na osi x od 0 do L a podopiera ho kĺb, posuvný kĺb alebo votknutie; zaťažiť ho môžete zvislými aj šikmými silami, momentmi a spojitým zaťažením – rovnomerným, trojuholníkovým alebo lichobežníkovým. Viac síl zapíšete do jedného poľa oddelených medzerou, ich polohy a uhly v rovnakom poradí. Vnútorné kĺby urobia z nosníka [[gerberBeam|Gerberov nosník]].

Postup začne [[freeBody|uvoľnením]]: podpery nahradia reakcie a hodnosť sústavy rovníc rovnováhy ukáže [[staticDeterminacy|statickú určitosť]]. Ak je nosník staticky neurčitý alebo uloženie výnimkové, aplikácia to povie aj so stupňom neurčitosti. Rovnice sa riešia postupne – vždy tá, v ktorej zostala jediná neznáma (moment k podpere, pri Gerberovom nosníku najprv časť za kĺbom), nevyužitá rovnica poslúži ako kontrola.

Vnútorné sily N, T a M aplikácia vypíše po úsekoch medzi význačnými bodmi a nájde najväčší ohybový moment podľa [[schwedlerTheorem|Schwedlerovej vety]]: tam, kde je priečna sila nulová, alebo v mieste jej skoku. Pod náčrtom nosníka so zaťažením a reakciami sú grafy N, T a M v rovnakej mierke dĺžky.

Režim Teleso v rovine počíta reakcie telesa zadaného bodmi podpier a pôsobiskami síl – napríklad rebríka opretého o stenu. Pri posuvnej podpere zvolíte smer reakcie uhlom β.

Prierezové charakteristiky vypočítajú plochu, [[centroid|ťažisko]], kvadratické momenty podľa [[parallelAxisTheorem|Steinerovej vety]], [[sectionModulus|prierezové moduly]] a pri nesúmerných prierezoch aj [[principalAxes|hlavné osi]] – pre obdĺžnik, rúru, profily T, I, U, L aj prierez zložený z obdĺžnikov a kruhov s otvormi. Obrázok ukáže prierez v skutočnej mierke s ťažiskom a osami. Zaoblenie valcovaných profilov zanedbávame.

Formulár Cisterna s kvapalinou počíta čiastočne naplnenú cisternu pri brzdení, rozbehu a v oblúku. Hladina sa nakloní kolmo na výslednicu tiaže a zotrvačnej sily (tan θ = a/g), ťažisko kvapaliny sa posunie a s ním ťažisko celku. Zaťaženia náprav sú reakcie nosníka na dvoch podperách, v oblúku aplikácia vypočíta [[loadTransferRatio|prenos zaťaženia]] na vonkajšie kolesá a kritickú rýchlosť, pri ktorej sa cisterna prevráti – aj s porovnaním s pevným nákladom a s vlastnou frekvenciou [[sloshing|šplechotu]]. Interaktívna ukážka je na mathtrace.app v časti „Vyskúšaj si“.

Formulár Návrh nosníka porovná tri varianty nosníka namáhaného ohybom: najľahší normalizovaný profil z tabuliek (IPE, HEB, kruhové a obdĺžnikové rúry), optimálny konštantný prierez zvoleného tvaru (obdĺžnik, kruh, rúra s obmedzenou štíhlosťou steny) a [[uniformStrengthBeam|nosník stálej pevnosti]]. Stráži pevnosť, povolený priehyb L/n a pri voľnom konci šmyk; postup ukáže, ktorá podmienka je [[activeConstraint|aktívna]], a graf priebeh prierezu, momentu a priehybu po dĺžke. Inšpiráciou bola diplomová práca z optimalizácie: votknuté rameno navrhnuté optimalizáciou vyšlo podstatne ľahšie ako podľa tabuliek.

Ukážky

Prostý nosník so silou a spojitým zaťažením na časti dĺžky: reakcie, úseky a najväčší moment.

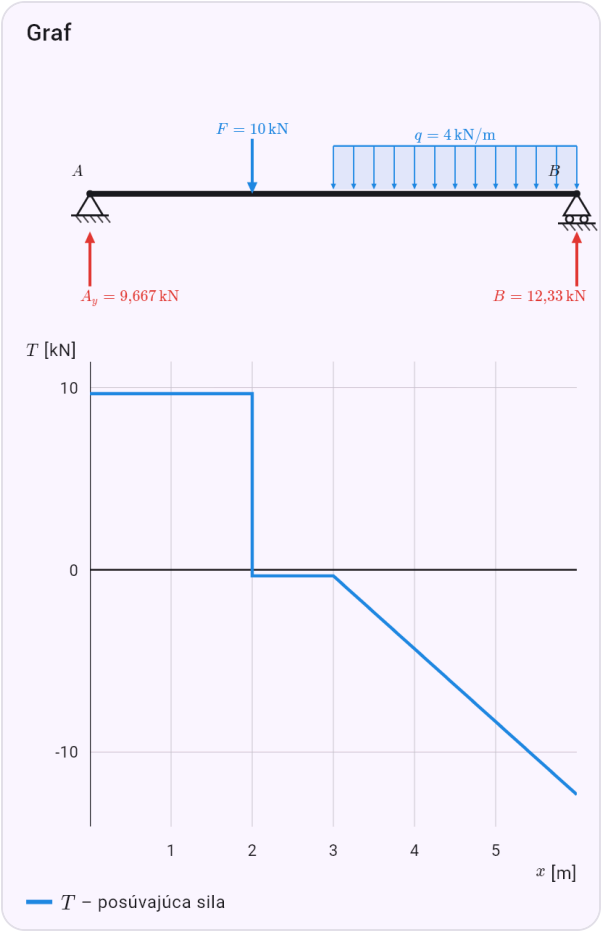
Zadanie: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

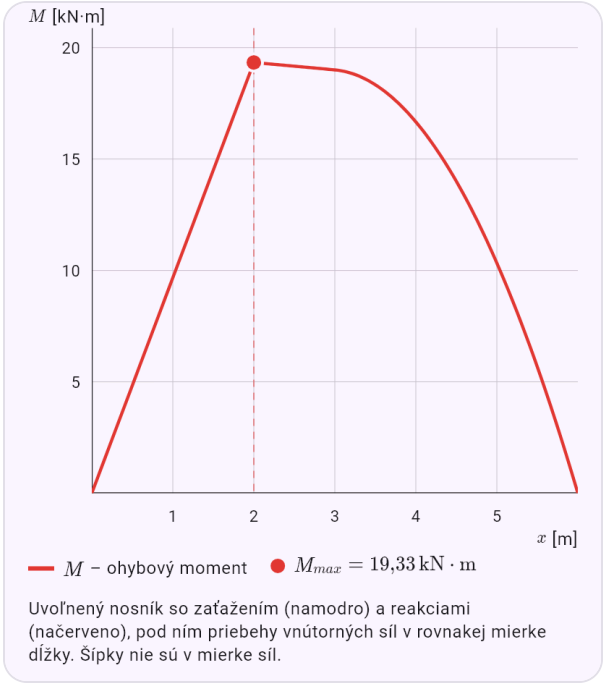
Výsledok

$$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 2\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme M_{max}; zadané
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- Nosník leží na osi x od 0 do L. Kĺb prenesie vodorovnú aj zvislú silu, posuvný kĺb len silu kolmú na podložku, votknutie navyše moment. Sila zviera s osou nosníka uhol α (90° = zvislo nadol), moment je kladný proti smeru hodinových ručičiek, spojité zaťaženie je kladné smerom nadol. Vnútorné kĺby z nosníka robia Gerberov nosník: v kĺbe je ohybový moment nulový a to dáva rovnicu navyše. Priebehy N, T a M vzniknú po úsekoch podľa Schwedlerovej vety. Rovnica modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradné bremeno spojitého zaťaženia (v ťažisku zaťažovacieho obrazca):
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Neznáme reakcie: $A_x,\ A_y,\ B$
- Staticky určité: neznámych je toľko, koľko je nezávislých rovníc (n neznámych, e rovníc, h hodnosť):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Súčet vodorovných síl:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Kontrola nevyužitou rovnicou:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Schwedlerova veta: derivácia ohybového momentu je posúvajúca sila a derivácia posúvajúcej sily je záporne vzaté spojité zaťaženie. Kde je T nulová, má M extrém.
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 0;\ 2\rangle: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 2;\ 3\rangle: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m)
  $x \in \langle 3;\ 6\rangle: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2$
- Najväčší ohybový moment je v mieste skoku posúvajúcej sily: $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Kladný ohybový moment prehýba nosník nadol (dolné vlákna sú ťahané), záporný nahor, typicky nad podperou alebo vo votknutí.





Konzola so šikmou silou na konci a rovnomerným zaťažením: vodorovná aj zvislá reakcia a moment vo votknutí.

Zadanie: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

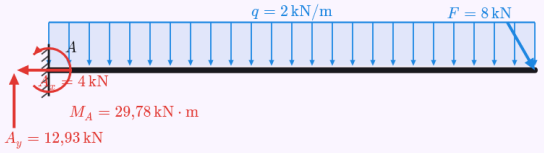
Výsledok

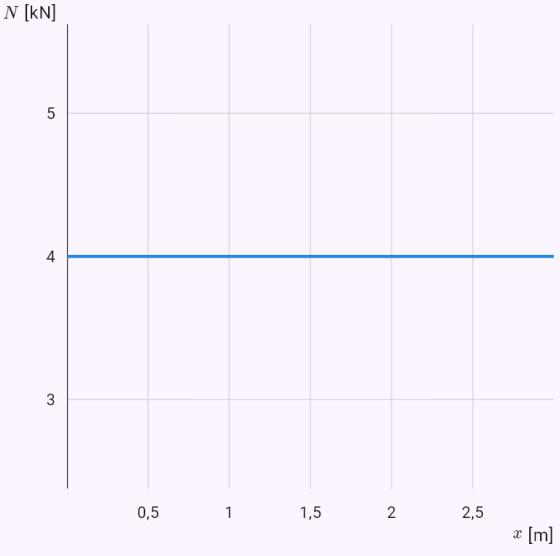
$$A_x = -4\,\mathrm{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\mathrm{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\mathrm{kN\cdot m}$$

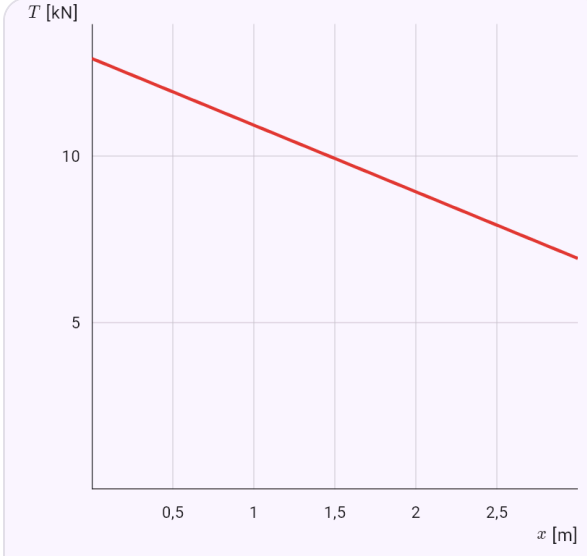
Postup

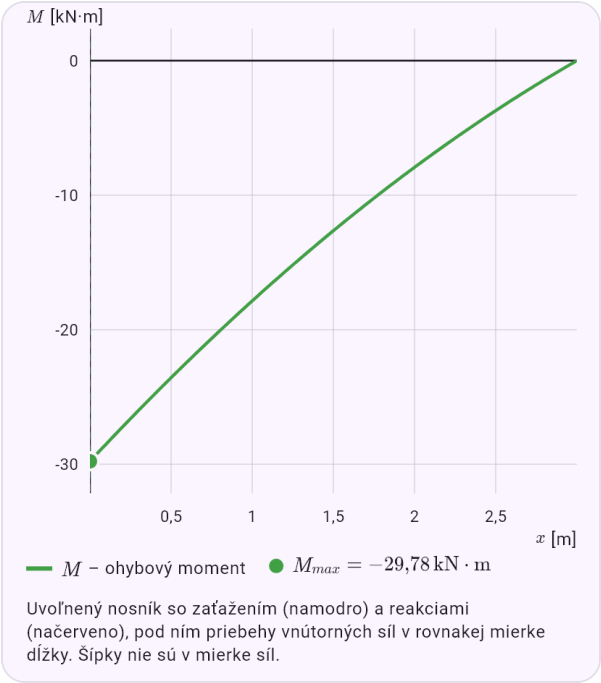
- Hľadáme R; zadané
  $L = 3\,\mathrm{m}, \quad F = 8\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 3\,\mathrm{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- Nosník leží na osi x od 0 do L. KÍb prenesie vodorovnú aj zvislú silu, posuvný KÍb len silu kolmú na podložku, votknutie navyše moment. Sila zviera s osou nosníka uhol α (90° = zvislo nadol), moment je kladný proti smeru hodinových ručičiek, spojité zaťaženie je kladné smerom nadol. Vnútorné KÍby z nosníka robia Gerberov nosník: v KÍbe je ohybový moment nulový a to dáva rovnicu navyše. Priebehy N, T a M vzniknú po úsekoch podľa Schwedlerovej vety. Rovnica modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradné bremeno spojitého zaťaženia (v ťažisku zaťažovacieho obrazca):
  $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{3}{2} = 1{,}5\,\mathrm{m}$
- Rozklad šikmej sily do osí:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\mathrm{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\mathrm{kN}$
- Neznáme reakcie: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Staticky určité: neznámych je toľko, koľko je nezávislých rovníc (n neznámych, e rovníc, h hodnosť):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Súčet vodorovných síl:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\mathrm{kN}$
- Súčet zvislých síl
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

Graf









Uvoľnený nosník so zaťažením (namodro) a reakciami (načerveno), pod ním priebehy vnútorných síl v rovnakej mierke dĺžky. Šípky nie sú v mierke síl.

Gerberov nosník s tromi podperami a kĺbom: výpočet začne časťou za kĺbom.

Zadanie: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

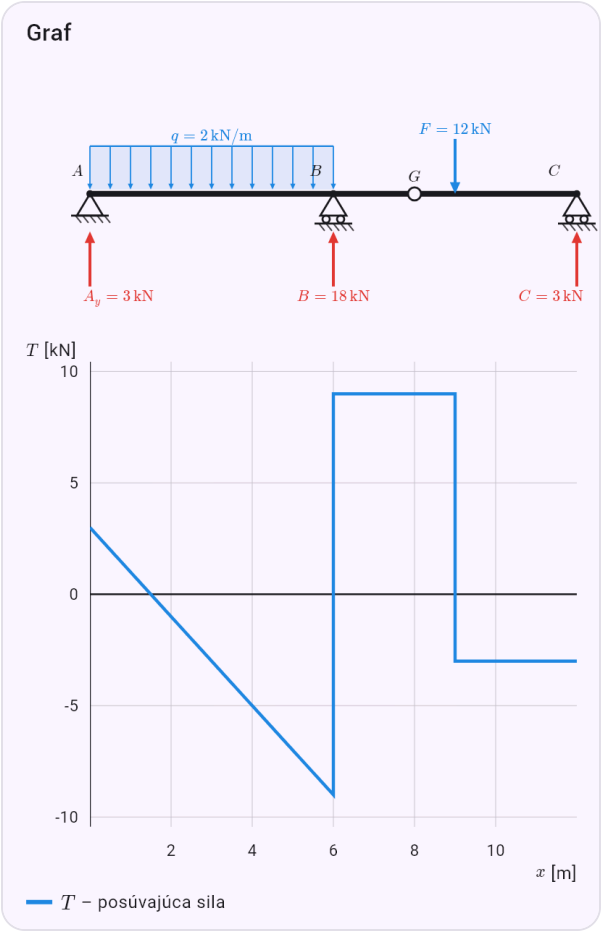
```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

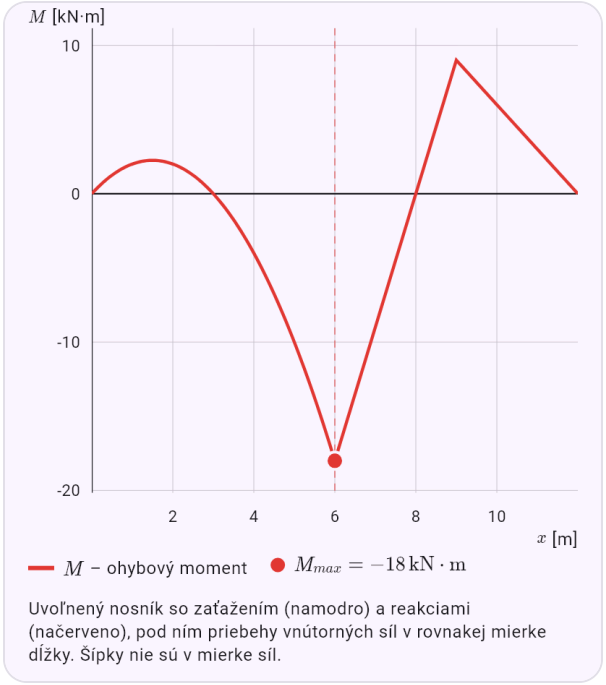
Výsledok

$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme M_{max}; zadané
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- Nosník leží na osi x od 0 do L. KÍb prenesie vodorovnú aj zvislú silu, posuvný KÍb len silu kolmú na podložku, votknutie navyše moment. Sila zviera s osou nosníka uhol α (90° = zvislo nadol), moment je kladný proti smeru hodinových ručičiek, spojité zaťaženie je kladné smerom nadol. Vnútorné kĺby z nosníka robia Gerberov nosník: v kĺbe je ohybový moment nulový a to dáva rovnicu navyše. Priebehy N, T a M vzniknú po úsekoch podľa Schwedlerovej vety. Rovnica modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Náhradné bremeno spojitého zaťaženia (v ťažisku zaťažovacieho obrazca):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Neznáme reakcie: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Staticky určité: neznámych je toľko, koľko je nezávislých rovníc (n neznámych, e rovníc, h hodnosť):
  $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Moment časti napravo od kĺbu ku kĺbu je nulový:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Moment časti naľavo od kĺbu ku kĺbu je nulový
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Súčet vodorovných síl:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Kontrola nevyužitou rovnicou:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Schwedlerova veta: derivácia ohybového momentu je posúvajúca sila a derivácia posúvajúcej sily je záporne vzaté spojité zaťaženie. Kde je T nulová, má M extrém.
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 0;\ 6\rangle: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 6;\ 9\rangle: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Vnútorné sily v úseku (x v m, sily v kN, momenty v kN·m):
  $x \in \langle 9;\ 12\rangle: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Najväčší ohybový moment je v mieste skoku posúvajúcej sily: $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Kladný ohybový moment prehýba nosník nadol (dolné vlákna sú ťahané), záporný nahor, typicky nad podperou alebo vo votknutí.





Uvoľnený nosník so zaťažením (namodro) a reakciami (načerveno), pod ním priebehy vnútorných síl v rovnakej mierke dĺžky. Šípky nie sú v mierke síl.

Rebrík opretý o hladkú stenu s váhou rebríka a človeka: reakcie na zemi a na stene.

Zadanie: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

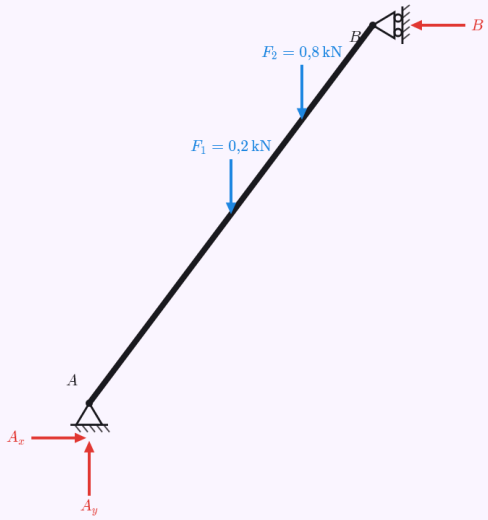
Výsledok

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Postup

- Hľadáme R; zadané
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Teleso v rovine zadané bodmi podpier a pôsobiskami síl (x doprava, y nahor). Pri posuvnej podpere uhol β udáva smer reakcie: 90° zdola nahor, 0° od steny vľavo doprava, 180° od steny vpravo doľava. Príklad: rebrík opretý o hladkú stenu, päta sa o podlahu opiera trením (kĺb), horný koniec kĺže po stene (posuvný kĺb). Rovnica modelu: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Neznáme reakcie: $A_x,\ A_y,\ B$
- Staticky určité: neznámych je toľko, koľko je nezávislých rovníc (n neznámych, e rovníc, h hodnosť):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Súčet vodorovných síl
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Súčet momentov k podpere – rovnica s jedinou neznámou
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Kontrola nevyužitou rovnicou:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Graf



Uvoľnené teleso: zaťaženie namodro, reakcie podpier načerveno. Šípky nie sú v mierke síl. Hodnoty reakcií sú vo výsledku.

Votknutie s posuvnou podperou je raz staticky neurčité.

Zadanie: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

`xF=2[m])`

Výsledok

$$s = n - h = 1$$

Postup

- Hľadáme R; zadané:
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- Nosník leží na osi x od 0 do L. KĺB prenesie vodorovnú aj zvislú silu, posuvný kĺb len silu kolmú na podložku, votknutie navyše moment. Sila zviera s osou nosníka uhol α (90° = zvislo nadol), moment je kladný proti smeru hodinových ručičiek, spojité zaťaženie je kladné smerom nadol. Vnútorné kĺby z nosníka robia Gerberov nosník: v kĺbe je ohybový moment nulový a to dáva rovnicu navyše. Priebehy N, T a M vzniknú po úsekoch podľa Schwedlerovej vety. Rovnica modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Neznáme reakcie: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Staticky neurčité: neznámych je viac ako nezávislých rovníc:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Neznámych reakcií je viac, ako koľko dajú rovnice rovnováhy. Chýbajúce rovnice dajú až deformačné podmienky (napr. nulový priehyb nad podperou) – staticky neurčité nosníky appka zatiaľ nerieši. Stupeň neurčitosti s hovorí, koľko podpier je navyše.

Graf



Uvoľnený nosník so zaťažením (namodro) a reakciami (načerveno), pod ním priebehy vnútorných síl v rovnakej mierke dĺžky. Šípky nie sú v mierke síl.

Prierez T: ťažisko, kvadratický moment a prierezový modul.

Zadanie: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

`tf=20[mm]; tw=20[mm])`

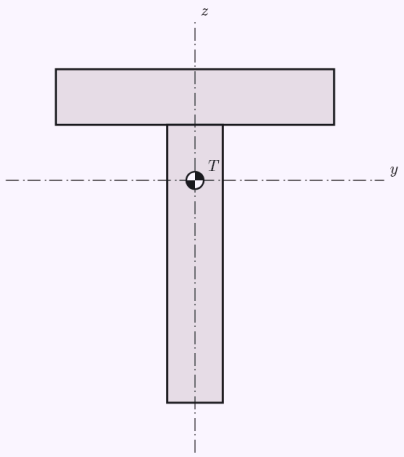
Výsledok

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Postup

- Hľadáme W_y; zadané
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Prierez rozdelíme na obdĺžniky a kruhy, otvory odčítame. Ťažisko je vážený priemer ťažísk častí, kvadratické momenty k osiam prechádzajúcim ťažiskom dá Steinerova veta. Os y je vodorovná, z zvislá, takže I_y rozhoduje o ohybe vo zvislej rovine. Z momentu a vzdialenosti krajných vlákien vyplýva prierezový modul W, pri nesúmernom priereze (L) aj hlavné osi. Zaoblenie valcovaných profilov zanedbávame, preto sa hodnoty od tabuliek o niečo líšia. Rovnica modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Časť prierezu
  $$1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$$
- Časť prierezu
  $$2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$$
- Plocha prierezu: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Ťažisko ako vážený priemer ťažísk častí
  $$y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého prierezu
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$$
- Prierezové moduly (e = vzdialenosť krajných vlákien od ťažiska)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$$
- Polomery zotrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$$

Graf



Prierez v skutočnej mierke s ťažiskom T a osami y, z, ktoré ním prechádzajú; pri nesúmernom priereze aj hlavné osi 1, 2.

Rovnoramenný uholník L: deviačný moment a hlavné osi pod 45°.

Zadanie: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm];`

`t=10[mm])`

Výsledok

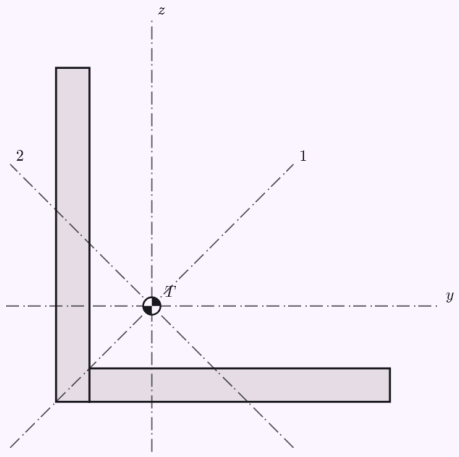
$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\mathrm{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\mathrm{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Postup

- Hľadáme I_1; zadané:
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad t = 10\,\mathrm{mm}$
- Prierez rozdelíme na obdĺžniky a kruhy, otvory odčítame. Ťažisko je vážený priemer ťažísk častí, kvadratické momenty k osiam prechádzajúcim ťažiskom dá Steinerova veta. Os y je vodorovná, z zvislá, takže I_y rozhoduje o ohybe vo zvislej rovine. Z momentu a vzdialenosti krajných vlákien vyplýva prierezový modul W, pri nesúmernom priereze (L) aj hlavné osi. Zaoblenie valcovaných profilov zanedbávame, preto sa hodnoty od tabuliek o niečo líšia. Rovnica modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \mathbf{I}$$
- Časť prierezu
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$$
- Časť prierezu
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$$
- Plocha prierezu: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\mathrm{mm}^2$
- Ťažisko ako vážený priemer ťažísk častí
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{1000 \cdot 5}{1}$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého prierezu
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$$
- Deviačný moment
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\mathrm{mm}^4$$

- Hlavné kvadratické momenty
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Natočenie hlavnej osi 1 od osi y
  $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Prierezové moduly (e = vzdialenosť krajných vlákien od ťažiska)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$$
- Polomery zotrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}$$

Graf



Prierez v skutočnej mierke s ťažiskom T a osami y, z, ktoré ním prechádzajú; pri nesúmernom priereze aj hlavné osi 1, 2.

Doska s kruhovým otvorom mimo stredu: zložený prierez a posun ťažiska.

Zadanie: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm];`

`rh=100[mm]; ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])`

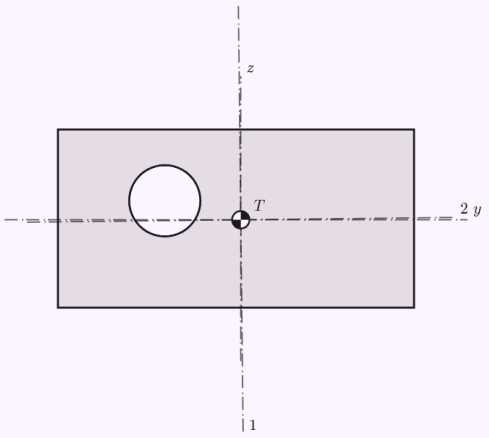
Výsledok

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

Postup

- Hľadáme I_y; zadané
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- Prierez rozdelíme na obdĺžniky a kruhy, otvory odčítame. Ťažisko je vážený priemer ťažísk častí, kvadratické momenty k osiam prechádzajúcim ťažiskom dá Steinerova veta. Os y je vodorovná, z zvislá, takže I_y rozhoduje o ohybe vo zvislej rovine. Z momentu a vzdialenosti krajných vlákien vyplýva prierezový modul W, pri nesúmernom priereze (L) aj hlavné osi. Zaoblenie valcovaných profilov zanedbávame, preto sa hodnoty od tabuliek o niečo líšia. Rovnica modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \sum$$
- Časť prierezu
  $$1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$$
- Otvor (odčítava sa)
  $$2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$$
- Plocha prierezu: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Ťažisko ako vážený priemer ťažísk častí
  $$y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$
- Steinerova veta: vlastný moment časti + plocha × druhá mocnina vzdialenosti osí
  $$I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$$
- Kvadratické momenty celého prierezu
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Deviačný moment
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$$
- Hlavné kvadratické momenty
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$$
- Natočenie hlavnej osi 1 od osi y
  $$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$$
- Prierezové moduly (e = vzdialenosť krajných vlákien od ťažiska)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Polomery zotrvačnosti
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$$

Graf



Prierez v skutočnej mierke s ťažiskom T a osami y, z, ktoré ním prechádzajú; pri nesúmernom priereze aj hlavné osi 1, 2.

Cisterna z polovice plná vody brzdí 5 m/s²: predná náprava nesie o desiatky percent viac.

Zadanie: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

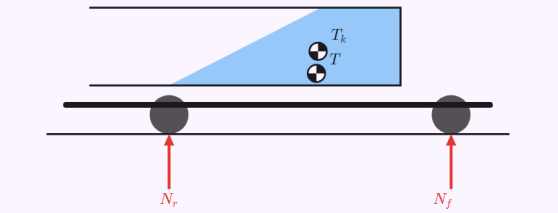
Výsledok

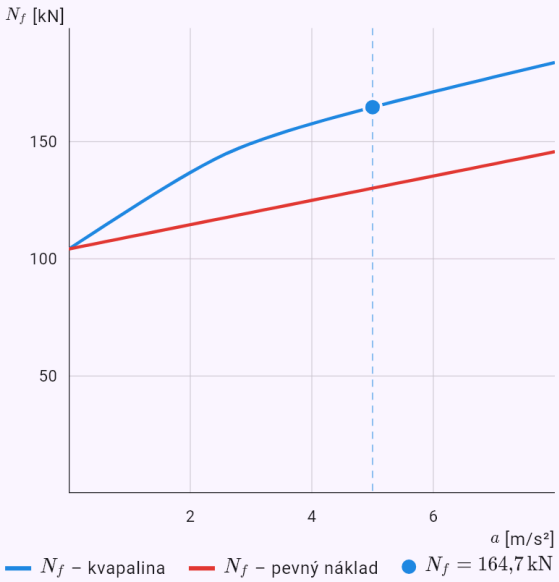
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Postup

- Hľadáme N_f; zadané
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Brzdenie so spomalením a: kvapalina sa nahrnie dopredu, hladina sa nakloní o uhol θ a ťažisko sa posunie dopredu aj nahor. Zaťaženia náprav sú reakcie nosníka na dvoch podperách so zotrvačnou silou m·a v ťažisku. Rovnica modelu: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g}$
- Objem nádrže a kvapaliny
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Sklon hladiny – kolmo na výslednicu tiaže a zotrvačnej sily
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Ťažisko kvapaliny sa posunie dopredu a nahor
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Ťažisko celého vozidla
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Zaťaženie náprav z momentovej rovnováhy k zadnej náprave (zotrvačná sila v ťažisku)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Predná náprava v pokoji a pri jazde; s pevným nákladom
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Vlastná frekvencia prvej vlny (špliechanie)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\operatorname{tgh}\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}854$
- Kvázistatický model platí pre ustálené brzdenie. Po prudkom zabrzdení kvapalina kmitá s periódou T a nárazy na čelo nádrže môžu zaťaženie krátko zvýšiť ešte viac; preto majú cisterny prepážky.

Graf





Bočný pohľad s naklonenou hladinou, ťažiskom kvapaliny T_k a celku T a zaťažením náprav; graf ukazuje zaťaženie prednej nápravy podľa spomalenia pre kvapalinu a pevný náklad.

Tá istá cisterna v oblúku R = 60 m: kritická rýchlosť s kvapalinou a s pevným nákladom.

Zadanie: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];`

`W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

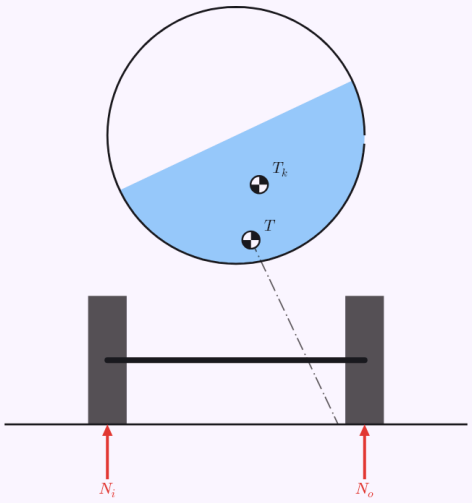
Výsledok

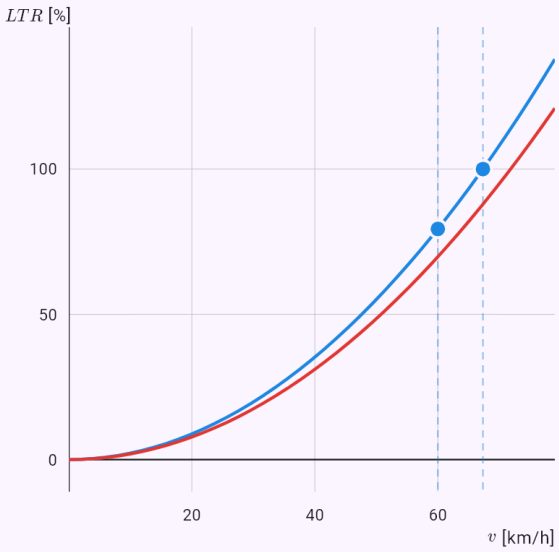
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Postup

- Hľadáme v_{krit}; zadané
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Oblúk s polomerom R rýchlosťou v: dostredivé zrýchlenie a = v²/R, kvapalina sa preleje von a s ňou ťažisko. Vozidlo sa prevráti, keď výslednica tiaže a odstredivej sily prejde vonkajšími kolesami (LTR = 100 %). Náklon karosérie na pružinách (k_r stupňov na každé g) posunie ťažisko ešte ďalej von. Rovnica modelu:
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Objem nádrže a kvapaliny
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Dostredivé zrýchlenie v oblúku
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Sklon hladiny – kolmo na výslednicu tiaže a zotrvačnej sily
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Ťažisko kvapaliny v priereze (y von zo zákruty):
  $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Náklon karosérie posunie ťažisko celku ešte ďalej von
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Prenos zaťaženia na vonkajšie kolesá
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Medza prevrátenia: výslednica prechádza vonkajšími kolesami
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Pevný náklad na porovnanie:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Vlastná frekvencia prvej vlny (špliechanie)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L} \operatorname{tgh} \dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}743$
- Skutočné cisterny sa prevracajú už okolo 0,35–0,45 g: okrem náklonu na pružinách sa stláčajú pneumatiky a kvapalina v oblúku navyše kmitá. Kvázistatická medza je horný odhad.

Graf





LTR – kvapalina LTR – pevný náklad
$v_{krit} = 67{,}33\,\mathrm{km/h}$ $LTR = 79{,}39\,\%$

Pohľad zozadu v oblúku (von doprava) s naklonenou hladinou, ťažiskom a výslednicou; graf ukazuje prenos zaťaženia na vonkajšie kolesá podľa rýchlosti – pri 100 % sa vnútorné kolesá zdvihnú.

Konzola 2 m so silou 10 kN: IPE 200 z tabuliek, optimálna rúra a rúra stálej pevnosti.

Zadanie: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

Výsledok

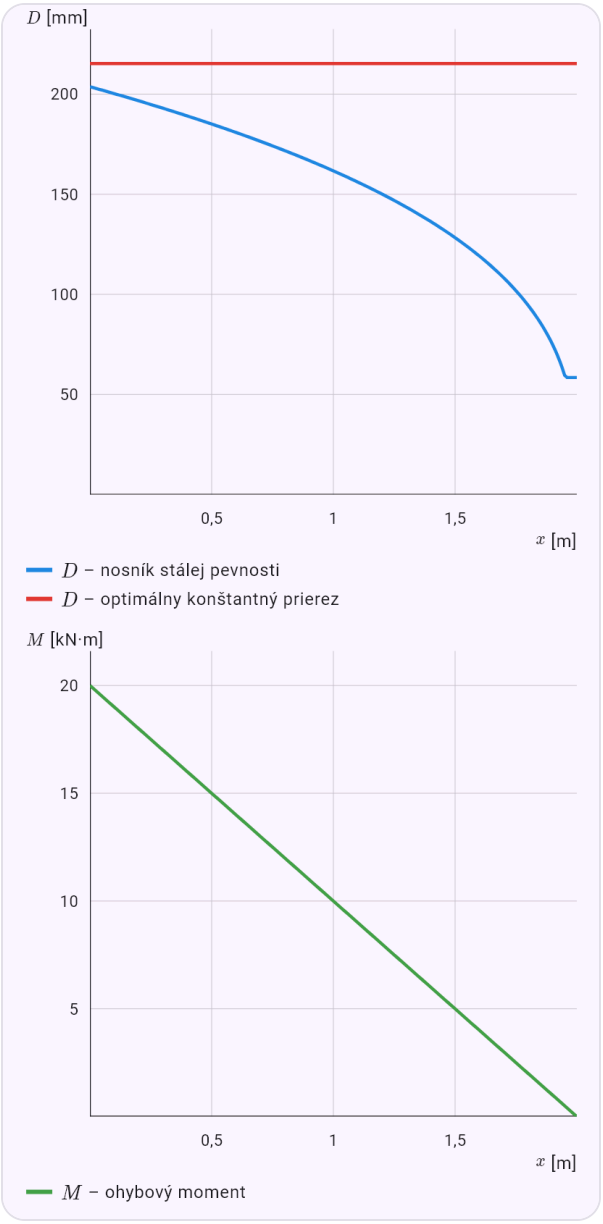
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

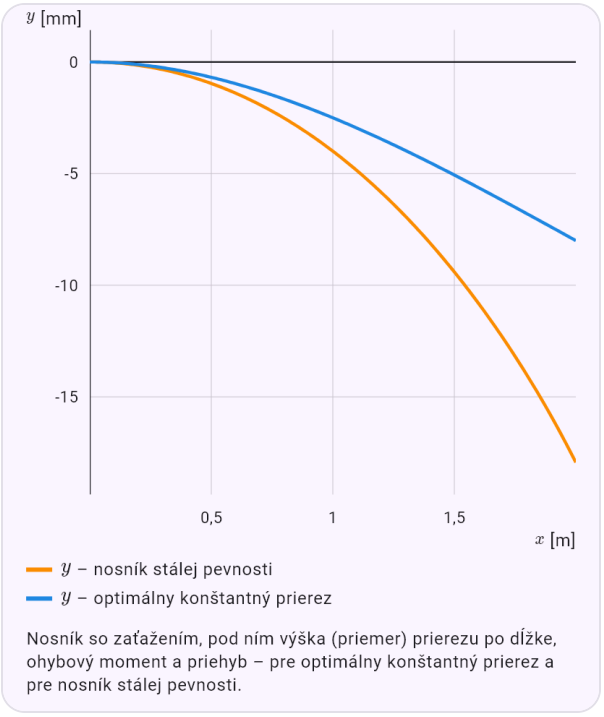
Postup

- Hľadáme m; zadané
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Votknutý nosník (konzola) dĺžky L so silou F na voľnom konci alebo so spojitým zaťažením q po celej dĺžke. Najväčší moment je vo votknutí. Rovnica modelu
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Najväčší ohybový moment: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmienka pevnosti – najmenší prierezový modul
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Podmienka priehybu (integráciou E·I·y'' = −M) – najmenší kvadratický moment
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$$
- Najľahší vyhovujúci profil v každom rade
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3,\ I = 1943\,\text{cm}^4,\ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Podľa tabuliek – najľahší zo všetkých
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Tenšia stena dáva pri rovnakom W menšiu plochu, optimum je preto na medzi štíhlosti: $\frac{D}{t} = \lambda = 50$
- 2. Optimálny konštantný prierez – najmenší rozmer, ktorý splní obe podmienky
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$$
- Aktívna je podmienka priehybu (napätie vychádza menšie, ako je dovolené): $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Plocha a hmotnosť optimálneho prierezu:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálej pevnosti – σ(x) = σ_dov všade, pri voľnom konci najmenší prierez kvôli šmyku
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$$
- Hmotnosť a priehyb nosníka stálej pevnosti
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$$
- Nosník stálej pevnosti stráži len napätie, preto je poddajnejší a povolený priehyb prekročí. V praxi sa prierez zväčší alebo sa použije len pri nosníkoch, kde rozhoduje pevnosť.
- Hmotnosť variantov oproti profilu z tabuliek:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$
- Vlastnú tiaž nosníka sme zanedbali; pri dlhých a ťažkých nosníkoch sa pripočíta k spojitému zaťaženiu.

Graf







Nosník so zaťažením, pod ním výška (priemer) prierezu po dĺžke, ohybový moment a priehyb – pre optimálny konštantný prierez a pre nosník stálej pevnosti.

Obdĺžnik stálej pevnosti so stálou šírkou: výška po dĺžke ako parabola, o tretinu menej materiálu.

Zadanie: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Výsledok

$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$

$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$

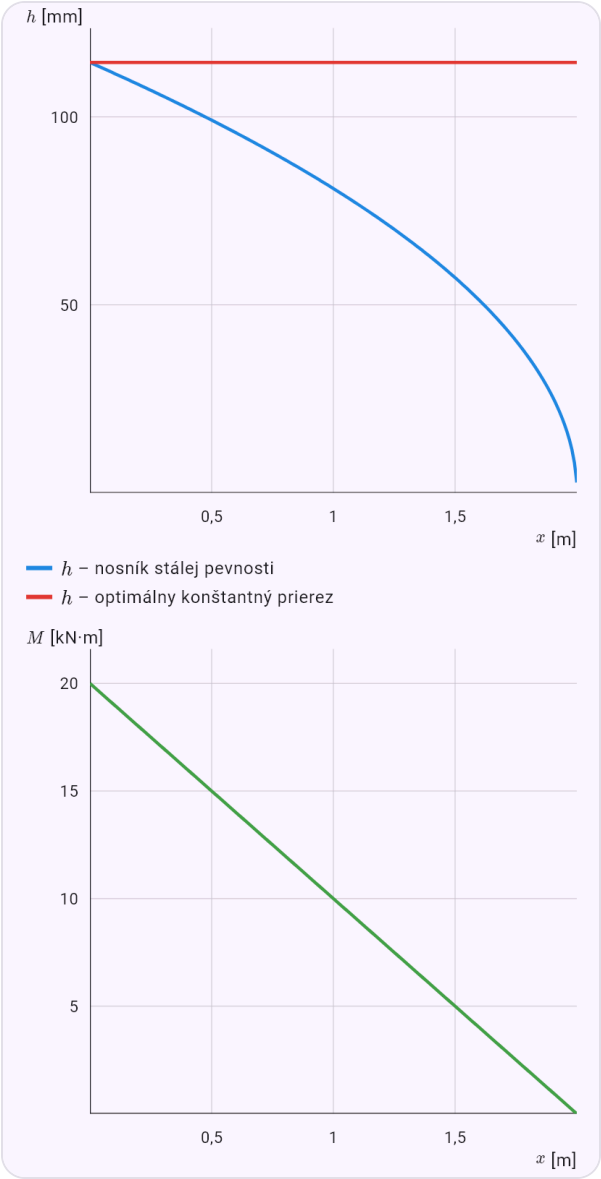
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

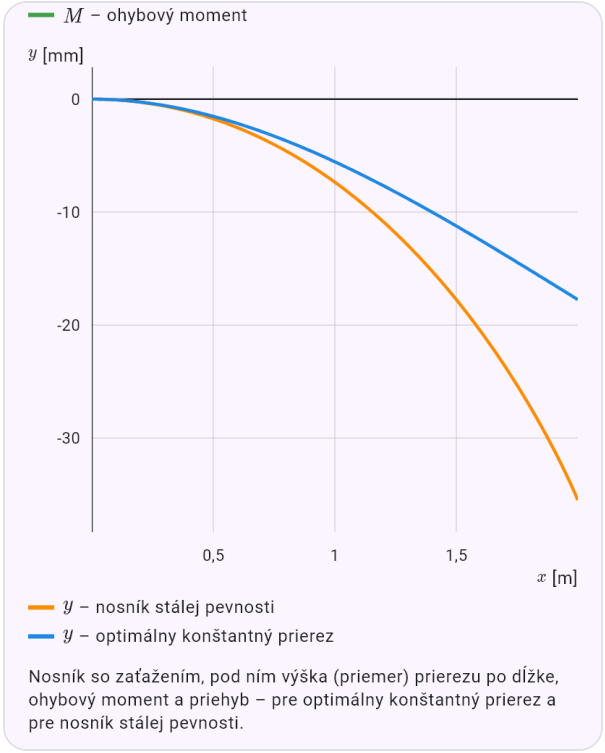
Postup

- Hľadáme m; zadané
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Votknutý nosník (konzola) dĺžky L so silou F na voľnom konci alebo so spojitým zaťažením q po celej dĺžke. Najväčší moment je vo votknutí. Rovnica modelu
  $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \dfrac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$
- Najväčší ohybový moment: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmienka pevnosti – najmenší prierezový modul
  $W \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \dfrac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$
- Podmienka priehybu (integráciou E·I·y'' = −M) – najmenší kvadratický moment
  $y_{max} = \dfrac{FL^3}{3EI} \le \dfrac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$
- Najľahší vyhovujúci profil v každom rade
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Podľa tabuliek – najľahší zo všetkých
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Optimálny konštantný prierez – najmenší rozmer, ktorý splní obe podmienky
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\dfrac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- Aktívna je podmienka pevnosti (priehyb vychádza menší, ako je povolený): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Plocha a hmotnosť optimálneho prierezu:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálej pevnosti – σ(x) = σ_dov všade, pri voľnom konci najmenší prierez kvôli šmyku
  $h(x) = \sqrt{\dfrac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \dfrac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$
- Hmotnosť a priehyb nosníka stálej pevnosti
  $m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$
- Hmotnosť variantov oproti profilu z tabuliek:
  $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Vlastnú tiaž nosníka sme zanedbali; pri dlhých a ťažkých nosníkoch sa pripočíta k spojitému zaťaženiu.

Graf







Nosník so zaťažením, pod ním výška (priemer) prierezu po dĺžke, ohybový moment a priehyb – pre optimálny konštantný prierez a pre nosník stálej pevnosti.

Prostý nosník 6 m so spojitým zaťažením: rozhoduje priehyb.

Zadanie: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

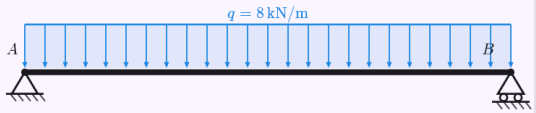
Výsledok

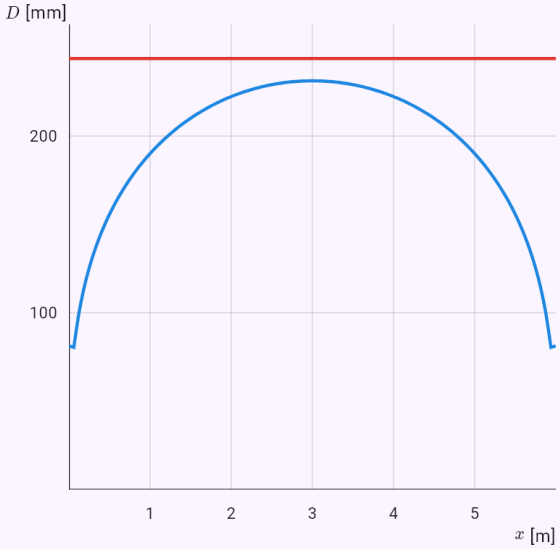
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Postup

- Hľadáme m; zadané
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Prostý nosník dĺžky L so silou F v strede alebo so spojitým zaťažením q po celej dĺžke. Najväčší moment je v strede. Rovnica modelu
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Najväčší ohybový moment: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Podmienka pevnosti – najmenší prierezový modul
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Podmienka priehybu (integráciou E·I·y'' = −M) – najmenší kvadratický moment
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- Najľahší vyhovujúci profil v každom rade
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Podľa tabuliek – najľahší zo všetkých
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Tenšia stena dáva pri rovnakom W menšiu plochu, optimum je preto na medzi štíhlosti: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 40$
- 2. Optimálny konštantný prierez – najmenší rozmer, ktorý splní obe podmienky
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- Aktívna je podmienka priehybu (napätie vychádza menšie, ako je dovolené): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Plocha a hmotnosť optimálneho prierezu:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Nosník stálej pevnosti – σ(x) = σ_dov všade, pri voľnom konci najmenší prierez kvôli šmyku
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Hmotnosť a priehyb nosníka stálej pevnosti
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- Nosník stálej pevnosti stráži len napätie, preto je poddajnejší a povolený priehyb prekročí. V praxi sa prierez zväčší alebo sa použije len pri nosníkoch, kde rozhoduje pevnosť.
- Hmotnosť variantov oproti profilu z tabuliek:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$$
- Vlastnú tiaž nosníka sme zanedbali; pri dlhých a ťažkých nosníkoch sa pripočíta k spojitému zaťaženiu.

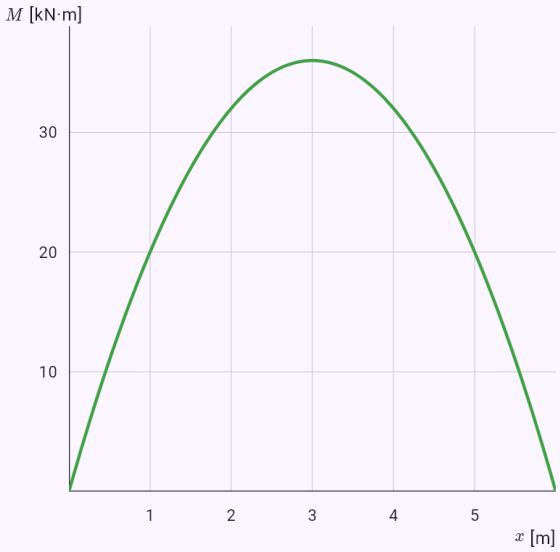
Graf



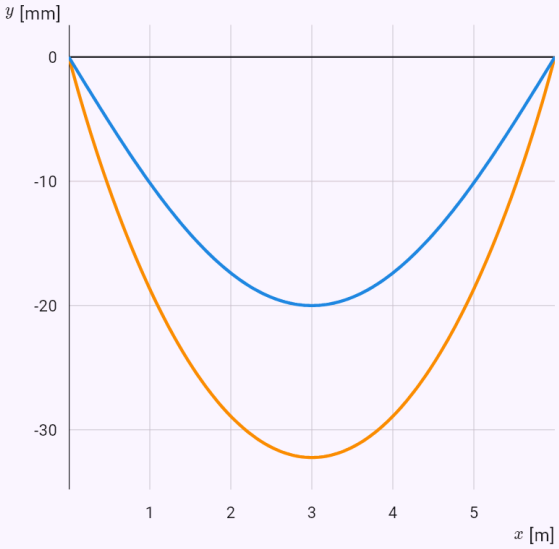


D – nosník stálej pevnosti

D – optimálny konštantný prierez



M – ohybový moment



y – nosník stálej pevnosti

y – optimálny konštantný prierez

Nosník so zaťažením, pod ním výška (priemer) prierezu po dĺžke, ohybový moment a priehyb – pre optimálny konštantný prierez a pre nosník stálej pevnosti.

45. Astronómia a astrofyzika

Odbor Astronómia a astrofyzika nájdete v sekcii „Aplikácie“. Popri Keplerových zákonoch, vzájomnom ovplyvňovaní telies a probléme troch telies (opísaných v kapitole Fyzika) má formuláre Čierne diery, Neutrónové hviezdy, Gravitačné vlny, Hviezdne veľkosti a vzdialenosti, Žiarenie hviezd, Červený posun a Hubbleov zákon a Exoplanéty. Vzorce sú hotové a postup ukazuje dosadenie. Rovnice všeobecnej relativity aplikácia nerieši, používa len ich výsledky pre nerotujúcu čiernu dieru.

Formulár Čierne diery počíta [[schwarzschildRadius|Schwarzschildov polomer]], fotónovú sféru a najvnútornejšiu stabilnú dráhu, „hustotu“ čiernej diery s grafom podľa hmotnosti v logaritmickej mierke, únikovú rýchlosť, gravitačnú dilatáciu času a červený posun (aj pre dvoje hodiny, napríklad GPS), slapovú silu, Hawkingovu teplotu s časom vyparenia a hmotnosť Sgr A* z obehu hviezdy S2. Ponuka objektov vyplní Slnko, Zem, neutrónovú hviezdu, hviezdnu čiernu dieru, Sgr A* alebo M87*.

Neutrónové hviezdy majú hustotu, gravitáciu na povrchu, roztočenie pri kolapse zo zachovania momentu hybnosti a najkratšiu možnú periódu rotácie. Gravitačné vlny počítajú frekvenciu zo vzdialenosti obiehajúcej dvojice (a naopak) a energiu vyžiarenú pri splynutí, napríklad GW150914.

Základy úvodného kurzu astronómie: Pogsonova rovnica, modul vzdialenosti s [[absoluteMagnitude|absolútnou hviezdnou veľkosťou]] a paralaxa; Wienov a Stefanov-Boltzmannov zákon pre [[blackBody|absolútne čierne teleso]], slnečná konštanta a rovnovážna teplota planéty; Dopplerov [[redshift|červený posun]] a Hubbleov zákon s Hubbleovým časom; pri exoplanétach hĺbka tranzitu, metóda radiálnych rýchlostí a [[habitableZone|obývateľná zóna]].

Ku Keplerovým zákonom pribudol Hohmannov prelet medzi dvoma kruhovými dráhami (Δv a doba letu) a k vzájomnému ovplyvňovaniu telies [[rocheLimit|Rocheova medza]] a Hillova sféra.

Ukážky

Do akej guľôčky by sa musela stlačiť Zem, aby z nej bola čierna diera.

Zadanie: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Výsledok

$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$

Postup

- Hľadáme r_s; zadané: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Prevedieme jednotky:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Schwarzschildov polomer r_s = 2GM/c² je polomer horizontu udalostí. Zem by sa musela stlačiť do guľôčky s priemerom asi 18 mm, Slnko do gule s polomerom 3 km. Svetlo môže obiehať na fotónovej sfére 1,5 r_s, najvnútornejšia stabilná dráha hmoty (ISCO) je 3 r_s.
  Rovnica modelu
  $r_s = \dfrac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \dfrac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$
- Dosadíme
  $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$
- Platí pre nerotujúcu čiernu dieru. Pri rotujúcej (Kerrovej) ležia ISCO a fotónová sféra bližšie.
- Prevedieme jednotky: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

„Hustota“ čiernej diery M87* – redšia ako vzduch.

Zadanie: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

Výsledok

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

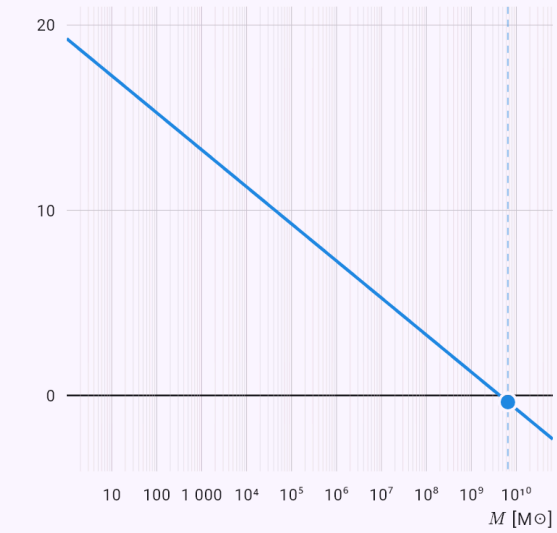
Postup

- Hľadáme ρ; zadané: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Prevedieme jednotky:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- Priemerná „hustota“ vnútri horizontu: hmotnosť delená objemom gule s polomerom r_s. Klesá s 1/M². Hviezdna čierna diera je hustejšia ako atómové jadro, čierna diera s 10^8 hmotnosťami Slnka má hustotu vody a M87* je redšia ako vzduch. Graf má hmotnosť v logaritmickej mierke. Rovnica modelu: $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Dosadíme

$$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$$

- Na porovnanie: atómové jadro, voda a vzduch (asi 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Redšia ako vzduch – „hustota“ je len priemer cez objem horizontu.

Graf



Vodorovná os je logaritmická – každý dielik je desaťnásobok predchádzajúceho. Bodka je zadaná hodnota alebo odpoveď.

O koľko sa denne predbiehajú hodiny družíc GPS vplyvom gravitácie.

Zadanie: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

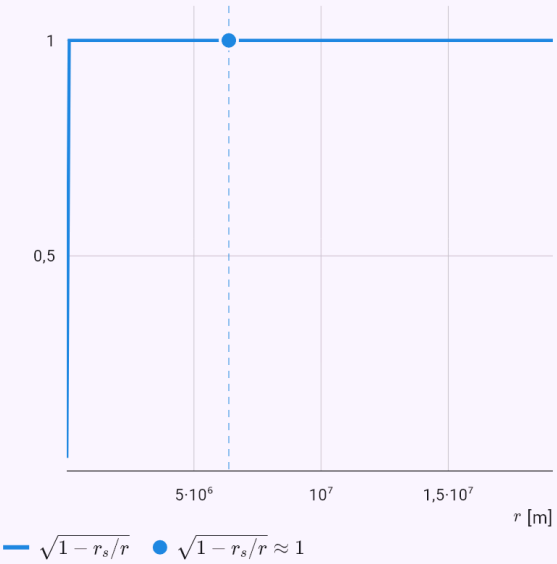
Výsledok

$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Postup

- Hľadáme Δt; zadané
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Prevedieme jednotky
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Hodiny blízko hmotného telesa idú pomalšie: dτ/dt = √(1 − r_s/r). Svetlo odtiaľ prichádza posunuté k červenej. S druhou vzdialenosťou r_2 porovná dvoje hodiny. Družice GPS (r_2 = 26 571 km) idú voči zemi napred asi o 45,7 µs za deň. Rovnica modelu
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Dosadíme
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Oneskorenie za jednotku času: $1 - \frac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Dosadíme
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Porovnanie dvoch hodín v rôznej vzdialenosti, kladný rozdiel znamená, že bližšie hodiny idú pomalšie.
- Prevedieme jednotky: $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Slapová sila na človeka na horizonte hviezdnej čiernej diery.

Zadanie: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

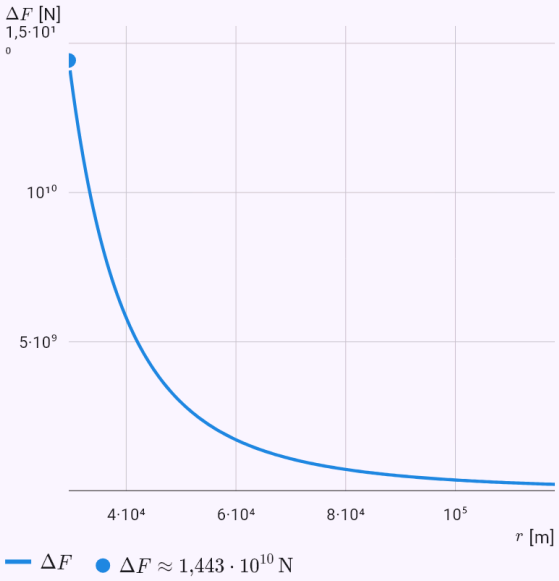
Výsledok

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Postup

- Hľadáme ΔF_s; zadané:
  $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Prevedieme jednotky: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- Slapová sila je rozdiel gravitácie na hlavu a na nohy. Pri hviezdnej čiernej diere roztrhá človeka dávno pred horizontom („špagetizácia“), pri veľkej čiernej diere (Sgr A*) je na horizonte nepatrná. Rovnica modelu:
  $\Delta F \approx \frac{2GMm\,L}{r^3}$
- Dosadíme
  $r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $\Delta F_s = \frac{2GMm\,L}{r_s^3} = \frac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Dosadíme
  $\Delta F_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- V násobkoch tiaže telesa: $\frac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- Slapová sila je oveľa väčšia, ako telo vydrží – „špagetizácia“.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Hmotnosť Sgr A* z obehu hviezdy S2.

Zadanie: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Výsledok

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Postup

- Hľadáme M; zadané: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{rokov}$
- Prevedieme jednotky
  $a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{rokov} = 5{,}0$
- Hviezda S2 obieha stred Galaxie po elipse s veľkou polosou asi 1 019 au za 16,05 roka. Z Keplerovho 3. zákona vyplýva hmotnosť Sgr A* asi 4 milióny SĺNk v oblasti menšej ako slnečná sústava. Za toto meranie bola Nobelova cena za fyziku 2020. Rovnica modelu:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Dosadíme
  $M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$
- V hmotnostiach Slnka: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizont Sgr A*
  $r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \frac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Nobelova cena za fyziku 2020 (Genzel, Ghez) za objav supermasívneho kompaktného objektu v strede Galaxie.
- Prevedieme jednotky:
  $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

Perióda rotácie jadra po kolapse na neutrónovú hviezdu.

Zadanie: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Výsledok

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\mathrm{ms}$$

Postup

- Hľadáme T_2; zadané:
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km}, \quad R_2 = 12\,\mathrm{km}$
- Prevedieme jednotky
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d} = 2\,195\,000\,\mathrm{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km} = 6{,}96 \cdot$
- Zachovanie momentu hybnosti: keď sa jadro zmenší, roztočí sa rýchlejšie, perióda klesá s druhou mocninou polomeru (ako krasokorčuliarka s pritiahnutými pažami). Tak vznikajú pulzary s periódami v milisekundách až sekundách. Rovnica modelu
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- Berieme hviezdu ako homogénnu guľu bez straty hmotnosti.

- Dosadíme
  $T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$
- Koľkokrát rýchlejšie sa točí: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Skutočné pulzary sa točia pomalšie (milisekundy až sekundy): jadro pred kolapsom rotuje pomalšie a moment hybnosti odnáša aj vyvrhnutý obal.
- Prevedieme jednotky: $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}6524\,\mathrm{ms}$

Energia vyžiarená gravitačnými vlnami pri splynutí GW150914.

Zadanie: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Výsledok

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Postup

- Hľadáme E; zadané:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Prevedieme jednotky
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- Splynutím vznikne čierna diera ľahšia ako súčet oboch. Rozdiel hmotností odnesú gravitačné vlny ako energiu E = Δm·c². Rovnica modelu:
  $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Dosadíme
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Podiel vyžiarenej hmotnosti:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$

- Dosadíme
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$
- V porovnaní s celým životom Slnka:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\mathrm{rokov}} \approx 4438$
- LIGO zachytilo vlny z GW150914 vzdialenej 1,3 miliardy svetelných rokov, posunuli zrkadlá o tisícinu priemeru protónu.

Vzdialenosť Síria z modulu vzdialenosti.

Zadanie: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod;`

`star=sirius)`

Výsledok

$$d \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$$

Postup

- Hľadáme d; zadané: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- Absolútna hviezdna veľkosť M je tá, ktorú by hviezda mala zo vzdialenosti 10 pc. Modul vzdialenosti m − M určuje vzdialenosť, keď poznáme skutočnú svietivosť hviezdy (cefeidy, supernovy Ia). Rovnica modelu: $m - M = 5 \log \frac{d}{10\ \mathrm{pc}}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $d = 10\ \mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Dosadíme: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$
- Vo svetelných rokoch: $d \approx 8{,}658\ \mathrm{ly}$
- Pohlcovanie svetla medzihviezdnym prachom zanedbávame, hviezda potom vyzerá ďalej.

Vlnová dĺžka maxima žiarenia Slnka.

Zadanie: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

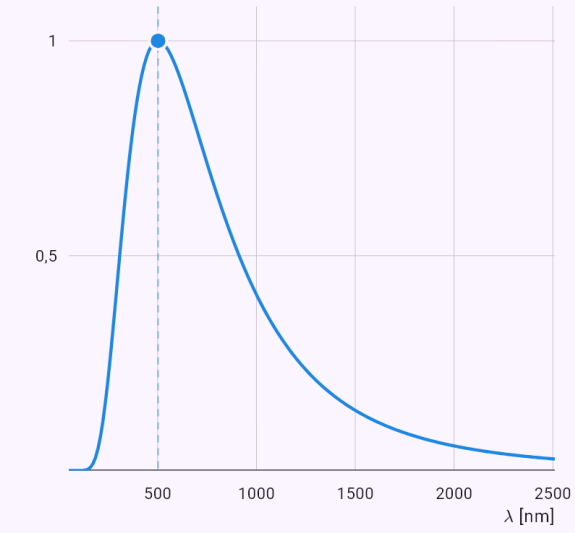
Výsledok

$$\lambda_{\max} \approx 502\ \mathrm{nm}$$

Postup

- Hľadáme $\lambda_{\max}$; zadané: $T = 5772\ \mathrm{K}$
- Wienov posunovací zákon: vlnová dĺžka, na ktorej teleso vyžaruje najviac, je nepriamo úmerná teplote. Slnko má maximum pri zelenej farbe (asi 500 nm), chladná Betelgeuze v infračervenej oblasti, horúca Vega v modrej. Rovnica modelu: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$
- Wienova konštanta v nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\ \mathrm{nm \cdot K}$
- Dosadíme: $\lambda_{\max} = \frac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\ \mathrm{nm}$
- Maximum je vo viditeľnom svetle.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Rovnovážna teplota Zeme bez skleníkového javu.

Zadanie: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium;`

`planet=earth)`

Výsledok

$$T_{\text{eq}} \approx 254\,\text{K}$$

Postup

- Hľadáme T_{eq}; zadané:
  $L = 1\,L_\odot, \quad a = 1\,\text{au}, \quad A = 0{,}306$
- Prevedieme jednotky
  $L = 1\,L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\text{W}, \quad a = 1\,\text{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Slnečná konštanta S je výkon dopadajúci na 1 m² vo vzdialenosti a od hviezdy. Planéta pohltí S(1 − A) na ploche prierezu πR² a vyžiari σT⁴ z celého povrchu 4πR². Z rovnováhy vyplýva teplota bez skleníkového efektu. Rovnica modelu:
  $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eq}}^4$
- Dosadíme
  $S = \dfrac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\text{W/m}^2$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Dosadíme
  $T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\text{K}$
- Bez skleníkového efektu. Skutočná priemerná teplota Zeme je vyššia: $T_\oplus \approx 288\,\text{K}$

Hubbleov čas ako odhad veku vesmíru.

Zadanie: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Výsledok

$$t_H \approx 13{,}97\,\text{mld. rokov}$$

Postup

- Hľadáme t_H; zadané: $H_0 = 70\,\text{km/(s}\cdot\text{Mpc)}$
- Hubblov zákon v = H_0·d. Prevrátená hodnota Hubblovej konštanty (Hubblov čas) odhaduje vek vesmíru, asi 14 miliárd rokov. Presný vek 13,8 miliardy rokov vychádza z modelu rozpínania. Rovnica modelu:
  $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Hubblova konštanta v s⁻¹
  $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086 \cdot 10^{19}}\,\text{s}^{-1} \approx 2{,}269 \cdot 10^{-18}\,\text{s}^{-1}$
- Dosadíme: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269 \cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\text{s}$
- V miliardách rokov: $t_H \approx 13{,}97\,\text{mld. rokov}$
- Hubblov čas je len odhad veku, rozpínanie sa spomaľovalo a teraz sa zrýchľuje.
- Prevedieme jednotky:
  $t_H \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\text{s} = 13{,}97\,\text{mld. rokov}$

Hĺbka tranzitu Zeme pred Slnkom.

Zadanie: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

Výsledok

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

Postup

- Hľadáme $\frac{\Delta F}{F}$; zadané: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Prevedieme jednotky:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Keď planéta prechádza pred hviezdou, zakryje časť jej kotúčika a jasnosť klesne o pomer plôch (R_p/R_*)². Jupiter by Slnko zoslabil o 1 %, Zem len o 84 milióntin (ppm). Rovnica modelu: $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Dosadíme: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- V miliónтinách (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- Tranzit uvidíme, len keď sa na dráhu planéty dívame takmer z boku.
- Prevedieme jednotky: $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

Doba Hohmannovho preletu zo Zeme k Marsu.

Zadanie: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

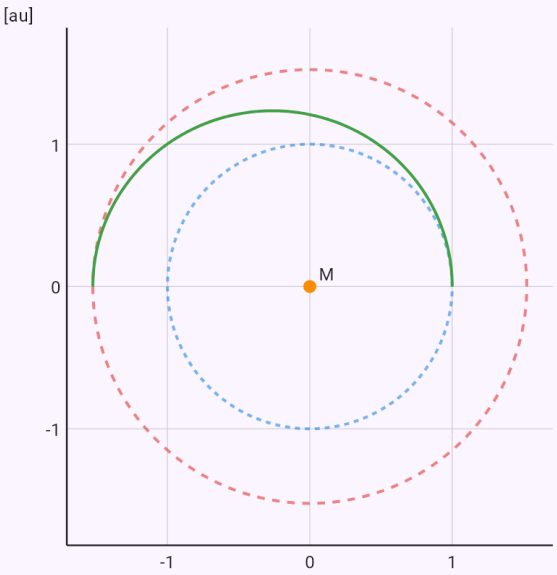
Výsledok

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

Postup

- Hľadáme t; zadané
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Prevedieme jednotky
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- Hohmannova prechodová dráha je polovica elipsy, ktorá sa dotýka východiskovej aj cieľovej kruhovej dráhy. Dvoma zážihmi (Δv) sa prejde z jednej na druhú s najmenšou spotrebou paliva. Let zo Zeme k Marsu tak trvá asi 259 dní. Rovnica modelu
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Dosadíme
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Dosadíme
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- V dňoch: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Von: zrýchliť v smere letu, na cieľovej dráhe zrýchliť znova.
- Prevedieme jednotky: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

Graf



Telesá a význačné body v skutočnej mierke.

Rocheova medza Saturna pre ľadový mesiac – prečo sú tam prstence.

Zadanie: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Výsledok

$$d_R \approx 129\,000\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hľadáme d_R; zadané $R = 58\,230\,\mathrm{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3}, \quad \rho_m = 0{,}917\,\mathrm{g/}$
- Prevedieme jednotky $R = 58\,230\,\mathrm{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\mathrm{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3} =$
- Rocheova medza: bližšie k planéte slapové sily roztrhajú mesiac, ktorý drží pohromade len vlastná gravitácia. Preto má Saturn prstence vnútri svojej Rocheovej medze. Pevný mesiac vydrží bližšie ako kvapalný. Rovnica modelu: $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Dosadíme $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\frac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
- V polomeroch planéty: $\frac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Vnútri Rocheovej medze nevznikne veľký mesiac, preto tam sú prstence (Saturn).
- Prevedieme jednotky: $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 129\,000\,\mathrm{km}$

46. Aplikácie komplexnej analýzy

Formuláre v Aplikáciách (odbory Fyzika, Elektrotechnika, Technika, Geometria a Matematická analýza) využívajú funkcie komplexnej premennej z predchádzajúcej kapitoly. Každý má postup s komplexným potenciálom, zobrazením alebo pólmi a graf v Gaussovej rovine.

Ideálne prúdenie a profil krídla: [[complexPotential|komplexný potenciál]] w(z), [[streamline|prúdnice]] ako vrstevnice Im w a tlak z Bernoulliho rovnice. Obtekanie valca aj s cirkuláciou (body zastavenia, Magnusov jav, vztlak L′ = ρUΓ), Rankinovo teleso, prúdenie do rohu a vír. Žukovského profil vznikne konformným zobrazením z = ζ + b²/ζ, cirkuláciu určí [[kuttaCondition|Kuttova podmienka]] a vztlak Kuttova–Žukovského veta; graf ukáže prúdnice okolo profilu a C_L podľa uhla nábehu.

Pole konformným zobrazením: koaxiálny kábel (w = ln z prevedie kábel na doskový kondenzátor – kapacita, indukčnosť a vlnová impedancia), dvojvodičové vedenie cez Möbiovo zobrazenie, potenciál v kline medzi doskami a ustálená teplota v polrovine; siločiary a ekvipotenciály v grafe. Napätie okolo kruhového otvoru v doske podľa Kirscha s komplexnými potenciálmi Kolosova a Muschelišviliho dáva [[stressConcentration|koncentráciu napätia]] 3 pri ťahu, 2 pri rovnakom ťahu v dvoch smeroch a 4 pri šmyku. Mercatorova mapa je komplexný logaritmus stereografickej projekcie: mierka 1/cos φ, Tissotove krúžky a [[loxodrome|loxodróma]] ako priamka oproti ortodróme.

Riadenie a signály: stabilita regulačnej slučky s prenosom K·e^(−sτ)/(s^q(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)) [[nyquistCriterion|Nyquistovým kritériom]] (argumentový princíp, bezpečnosť v zosilnení a vo fáze, Bodeho diagram) a [[rootLocus|geometrickým miestom koreňov]] (asymptoty, bod rozvetvenia, kritické zosilnenie). Návrh [[butterworthFilter|Butterworthovho]] a Čebyševovho filtra z pólov na kružnici a elipse, číslicový filter 2. rádu s pólmi a nulami v rovine z, impulznou odozvou cez rezíduá a frekvenčnou charakteristikou na jednotkovej kružnici. Rezonančná krivka mechanického oscilátora alebo obvodu RLC zo vzdialeností bodu iω od pólov, [[qualityFactor|činiteľ akosti]] a šírka pásma. Striedavé obvody s fázormi sú v kapitole Elektrotechnika.

Odozva a vedenie: Lorentzov oscilátor dáva index lomu a absorpciu prostredia; póly v dolnej polrovine znamenajú kauzalitu a [[kramersKronig|Kramersove–Kronigove relácie]], ktoré aplikácia overí numerickým integrálom s hlavnou hodnotou. Prirodzená šírka spektrálnej čiary vyplýva z Fourierovej transformácie tlmenej vlny. [[smithChart|Smithov diagram]]: činiteľ odrazu ako Möbiova transformácia, pomer stojatých vĺn, vstupná impedancia vedenia, štvrťvlnový transformátor a prispôsobenie pahýľom.

Hračky na mathtrace.app v časti „Vyskúšaj si“: Mandelbrotova a Juliova množina a Newtonove panvy – iterácia v komplexnej rovine, ktorú si posuniete a zväčšíte.

Ukážky

Rotujúci valec: cirkulácia posunie body zastavenia pod vodorovnú os.

Zadanie: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Výsledok

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

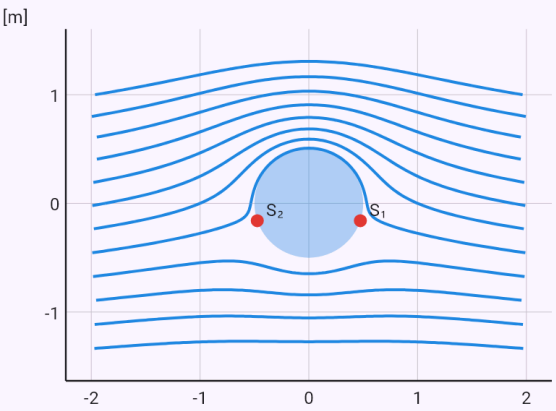
Postup

- Hľadáme θ_s; zadané
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Obtekanie valca: prúd U(z + R²/z), k nemu voliteľne vír s cirkuláciou Γ (rotujúci valec). Na povrchu je rýchlosť 2U·sin θ, takže na bokoch je dvojnásobná. Cirkulácia posunie body zastavenia nadol a vytvorí vztlak podľa Kuttovej–Žukovského vety L′ = ρUΓ na meter dĺžky.
  Rovnica modelu: $w(z) = U\left(z + \dfrac{R^2}{z}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- Komplexne združená rýchlosť je derivácia potenciálu
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \dfrac{R^2}{z^2}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi z}$
- Na povrchu valca je rýchlosť dotyčnicová
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Najväčšia rýchlosť na povrchu:
  $v_{max} = 2U + \dfrac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Body zastavenia (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\dfrac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Súčiniteľ tlaku z Bernoulliho rovnice
  $c_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \dfrac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Vztlak na meter dĺžky (Kuttova–Žukovského veta):
  $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Rotujúci valec alebo lopta s cirkuláciou má vztlak kolmý na prúd – Magnusov jav, ktorým sa točí zahratá lopta. Flettnerove lode ho využívajú na pohon.

Graf

Prúdnice | Graf



Plné čiary sú prúdnice, čiarkované ekvipotenciály (len bez cirkulácie). Tam, kde sú prúdnice hustejšie, tečie tekutina rýchlejšie.

Žukovského profil 12 % s prehnutím 2 % pri uhle nábehu 4°.

Zadanie: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

```
tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])
```

Výsledok

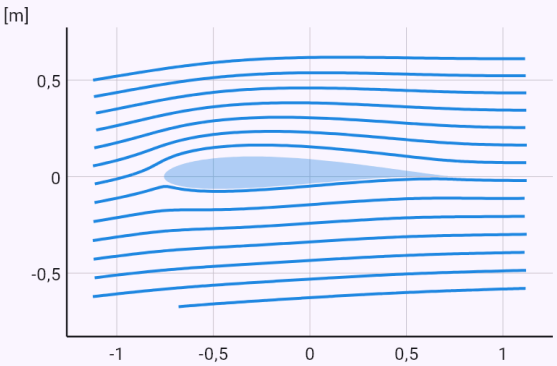
$$C_L \approx 0{,}7243$$

Postup

- Hľadáme C_L; zadané
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Žukovského profil vznikne konformným zobrazením z = ζ + b²/ζ z kružnice, ktorá prechádza bodom ζ = b. Posunutie stredu vľavo dá hrúbku, nahor prehnutie. Obtekanie kružnice sa prenesie na profil, cirkuláciu určí Kuttova podmienka (prúd opúšťa ostrú odtokovú hranu hladko) a vztlak Kuttova–Žukovského veta. Vychádza známe C_L ≈ 2π(α + β), rovnako ako pri tenkom profile. Výkony celého lietadla počíta formulár Lietadlo. Rovnica modelu
  $z = \zeta + \dfrac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta - \mu)e^{-i\alpha} + \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta - \mu}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}$
- Kružnica v rovine ζ, z ktorej profil vznikne
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Cirkulácia z Kuttovej podmienky na odtokovej hrane
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha + \beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Vztlak na meter dĺžky (Kuttova–Žukovského veta):
  $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Súčiniteľ vztlaku, v zátvorke teória tenkého profilu
  $C_L = \dfrac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \dfrac{8\pi a}{c}\sin(\alpha + \beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha + \beta$
- Ideálna tekutina: platí pre malé uhly nábehu bez odtrhnutia prúdu (pri bežných profiloch zhruba do 10–15°). Skutočné krídlo konečného rozpätia má vztlak menší kvôli indukovanému odporu (formulár Lietadlo).

Graf

Prúdnice | Graf



Prúdnice okolo profilu v skutočnej mierke. Odtoková hrana vpravo – prúd ju opúšťa hladko (Kuttova podmienka), nad profilom sú prúdnice hustejšie a tlak nižší.

Rankinovo teleso – šírka ďaleko po prúde Q/U.

Zadanie: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

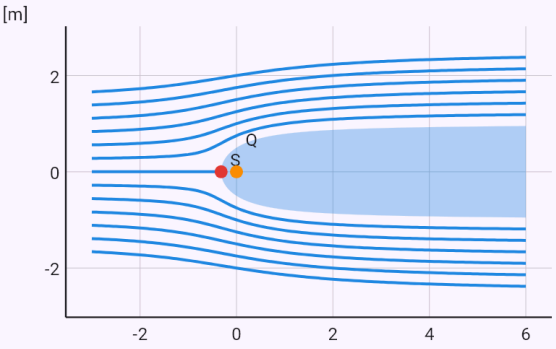
Výsledok

$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme d; zadané: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Zdroj výdatnosti Q (m²/s na meter hĺbky) v prúde rýchlosti U. Deliaca prúdnica ψ = Q/2 obopína Rankinovo polovičné teleso, ktoré tvarom pripomína nábežnú časť piliera mosta alebo prove. Vpredu je bod zastavenia, ďaleko vzadu má teleso šírku Q/U. Rovnica modelu:
  $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- Komplexne združená rýchlosť je derivácia potenciálu:
  $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Bod zastavenia pred zdrojom:
  $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Deliaca prúdnica – obrys telesa: $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Šírka telesa ďaleko po prúde:
  $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Najväčšia rýchlosť na povrchu telesa (numericky)
  $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$
- Rankinovo teleso je prvý odhad obtekania zaoblenej prednej časti telesa (pilier, trup, nábežná hrana). Za telesom v ideálnej tekutine chýba úplav.

Graf



Plné čiary sú prúdnice, čiarkované ekvipotenciály (len bez cirkulácie). Tam, kde sú prúdnice hustejšie, tečie tekutina rýchlejšie.

Koaxiálny kábel RG-58: vlnová impedancia asi 50 Ω.

Zadanie: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

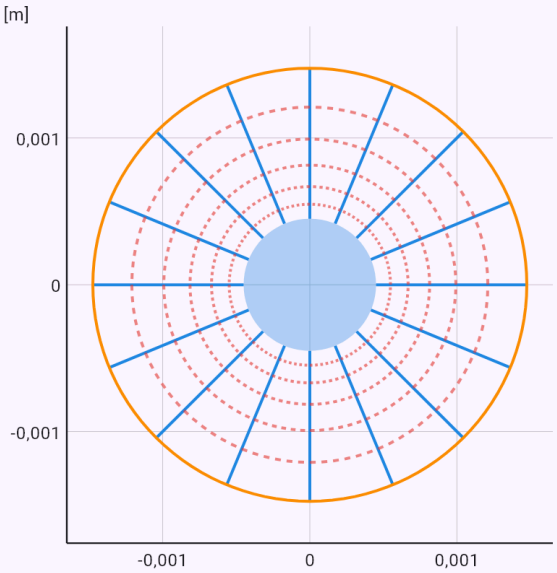
Výsledok

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Postup

- Hľadáme Z_0; zadané:
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Prevedieme jednotky
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm} = 0{,}0014$
- Koaxiálny kábel: logaritmus w = ln z rozvinie medzikružie a < |z| < b na obdĺžnik šírky 2π a výšky ln(b/a). Z kábla je doskový kondenzátor a kapacita, indukčnosť aj vlnová impedancia vyplývajú hneď. Rovnica modelu:
  $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Obraz medzikružia v rovine w = ln z – obdĺžnik
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Potenciál je lineárny v Re w
- Kapacita ako pri doskovom kondenzátore:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Indukčnosť a vlnová impedancia vedenia
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Kábel RG-58 (vodič 0,9 mm, polyetylén 2,95 mm) má asi 50 Ω a 100 pF/m. Vlnová impedancia závisí len od pomeru b/a, preto majú tenké aj hrubé káble rovnakých 50 alebo 75 Ω.

Graf



Plné čiary sú siločiary, čiarkované ekvipotenciály; oboje sa krížia v pravom uhle. Vodiče sú vyfarbené alebo hrubé.

Kapacita dvojvodičového vedenia cez Möbiovo zobrazenie.

Zadanie: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

Výsledok

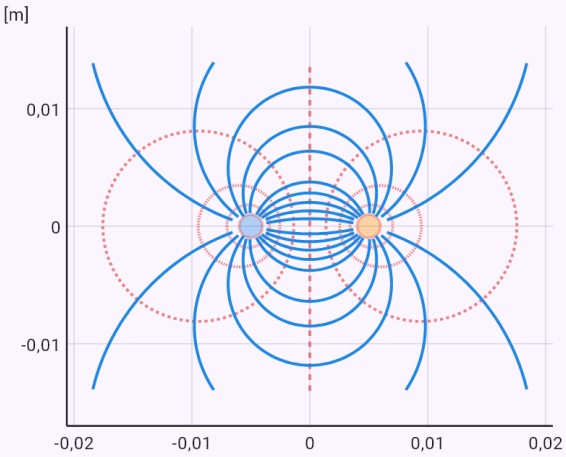
$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Postup

- Hľadáme C'; zadané: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Prevedieme jednotky:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Dvojvodičové vedenie (dva rovnobežné drôty): Möbiovo zobrazenie w = (z − h)/(z + h) prevedie obe kružnice drôtov na sústredné kružnice, teda na koaxiálny kábel. Ekvipotenciály sú Apolloniove kružnice, siločiary kružnice prechádzajúce bodmi ±h. Rovnica modelu
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Obrazy drôtov sú sústredné kružnice
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{argcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Kapacita dvojvodičového vedenia
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{argcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Indukčnosť a vlnová impedancia vedenia
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{argcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{\cdot}$$
- Ploché dvojlinkové vedenie k anténam mávalo 300 Ω, krútená dvojlinka v dátových kábloch asi 100 Ω. Vzorec

platí pre drôty ďaleko od iných vodičov.

Graf



Plné čiary sú siločiary, čiarkované ekvipotenciály; oboje sa krížia v pravom uhle. Vodiče sú vyfarbené alebo hrubé.

Ustálená teplota v polrovine s horúcou a studenou časťou hranice.

Zadanie: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC];`

x=0.5[m]; y=1[m])

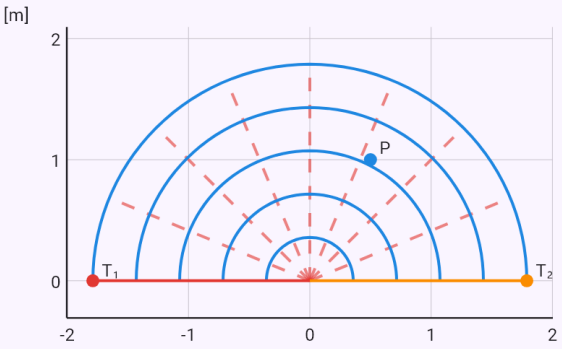
Výsledok

$$T \approx 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$$

Postup

- Hľadáme T; zadané
  $T_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Ustálené vedenie tepla v polrovine y > 0, ktorej hranica má vľavo teplotu T_1 a vpravo T_2. Teplota je harmonická, rovnako ako potenciál v kline s uhlom 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Izotermy sú lúče zo začiatku, tepelný tok tečie po polkružniciach. Rovnica modelu
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Harmonická funkcia s danými hodnotami na hranici
- Uhol bodu: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^\circ$
- Teplota v bode: $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$
- Napríklad zem pod rozhraním dvoch povrchov s rôznou teplotou. Na hranici v začiatku skáče teplota z T_1 na T_2, preto tam tok rastie nad všetky medze.

Graf



Čiarkované lúče sú izotermy, plné polkružnice čiary tepelného toku.

Kruhový otvor v ťahanej doske: súčiniteľ koncentrácie napätia 3.

Zadanie: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

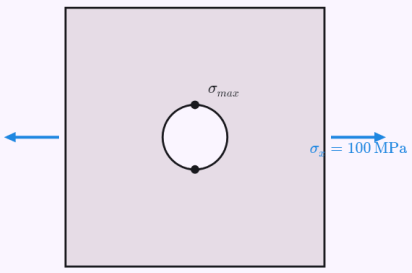
Výsledok

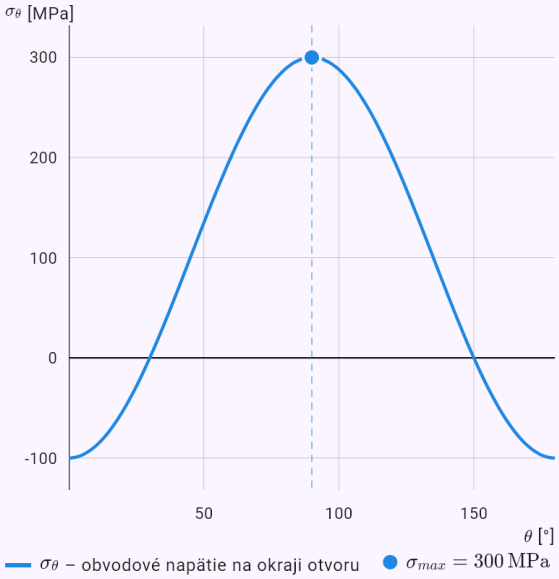
$$K_t \approx 3$$

Postup

- Hľadáme K_t; zadané: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Ťah σ_x v jednom smere: na okraji otvoru naprieč ťahu je 3σ_x, v smere ťahu −σ_x (tlak). Rovnica modelu
  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$
- Komplexné potenciály Kolosova–Muschelišviliho pre ťah σ
  $$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$
- Na okraji otvoru je radiálne napätie nulové, obvodové
  $r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$
- Obvodové napätie v okolí otvoru (Kirsch)
  $$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$
- Najväčšie napätie a súčiniteľ koncentrácie
  $$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$
- Vo vzdialenosti dvoch polomerov od stredu je napätie len o 22 % vyššie ako v doske – koncentrácia je miestna.
- Platí pre pružný materiál a otvor malý oproti rozmerom dosky (šírka aspoň päťkrát väčšia ako priemer). Pri úzkom páse je K_t menší, ale napätie v oslabenom priereze väčšie.

Graf





Doska s otvorom a napätie, ktorým je namáhaná (šípky nie sú v mierke). Graf ukazuje obvodové napätie na okraji otvoru podľa uhla θ od osi x; bodky na otvore sú miesta najväčšieho napätia.

Na 60° šírky sú dĺžky na mape dvojnásobné.

Zadanie: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

Výsledok

$$k \approx 2$$

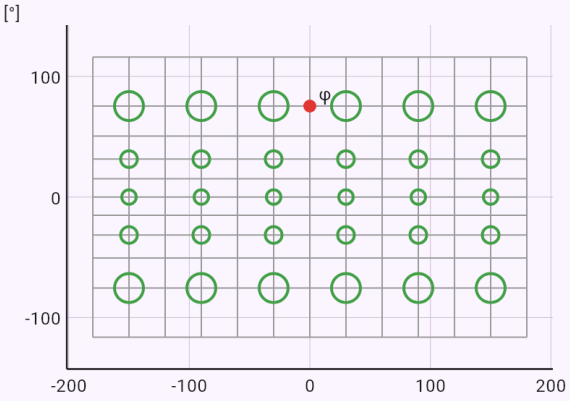
Postup

- Hľadáme k; zadané: $\varphi = 60\,^\circ$
- Vzdialenosť rovnobežky φ od rovníka na mape šírky W a mierka k = 1/cos φ. Tissotove krúžky v grafe sú na zemeguli rovnako veľké. Rovnica modelu

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- Zobrazenie je konformné, dĺžky sa zväčšujú rovnako vo všetkých smeroch: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Mierka na rovnobežke φ: $k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$
- Plochy sa zväčšujú s k², na 60° štyrikrát. Póly na mape nie sú, ležia v nekonečne.

Graf



Sieť poludníkov po 30° a rovnobežiek po 15°. Tissotove krúžky sú na zemeguli rovnako veľké, na mape rastú s 1/cos φ – tvar sa zachová, plocha nie.

Praha – New York: ortodróma a dlhšia loxodróma.

Zadanie: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg]; lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Výsledok

$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Postup

- Hľadáme d; zadané

$$\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$$

- Loxodróma medzi dvoma miestami (zemepisná šírka a dĺžka, západ záporne): kurz, dĺžka a porovnanie s ortodrómou – najkratšou cestou po hlavnej kružnici. Rovnica modelu

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- Zobrazenie je konformné, dĺžky sa zväčšujú rovnako vo všetkých smeroch: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Na mape je loxodróma priamka – kurz z rozdielu súradníc

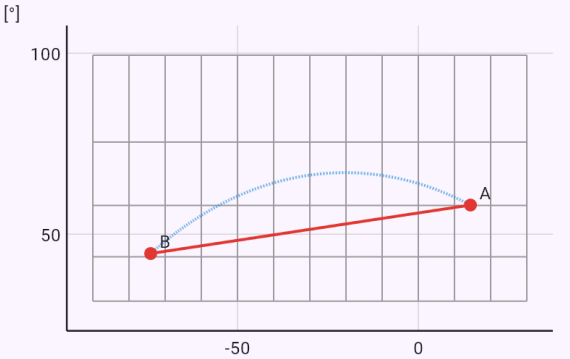
$$\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$$

- Dĺžka loxodrómy: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Ortodróma (najkratšia cesta po guli)

$$d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$$

- Loxodróma je dlhšia ako ortodróma, ale dá sa plávať so stálym kurzom. Lietadlá na dlhých tratiach letia po ortodróme a kurz priebežne menia.

Graf



Plná priamka je loxodróma (stály kurz), čiarkovaná krivka ortodróma (najkratšia cesta), obe v Mercatorovom zobrazení.

Bezpečnosť vo fáze slučky s tromi zotrvačnými členmi.

Zadanie: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s]; T2=1[s]; T3=1[s])`

Výsledok

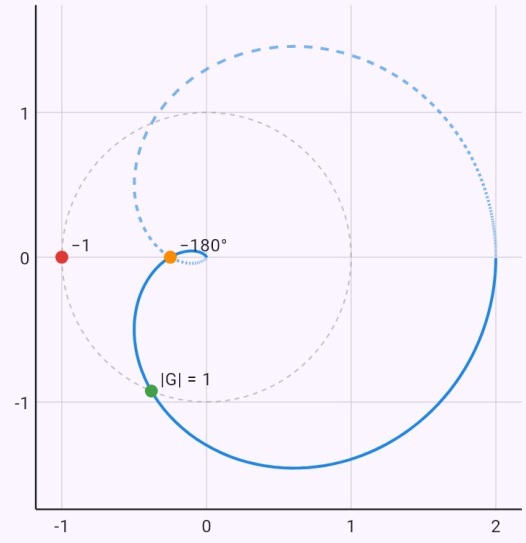
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Postup

- Hľadáme φ_m; zadané:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Nyquistovo kritérium vyplýva z argumentového princípu: počet obtočení bodu −1 krivkou G(iω) je rozdiel počtu nestabilných pólov uzavretej a otvorenej slučky. Pre stabilnú otvorenú slučku nesmie krivka bod −1 obtočiť. Ako ďaleko od neho zostane, ukazujú bezpečnosť v zosilnení a vo fáze. Rovnica modelu
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Argumentový princíp: N obtočení bodu −1, Z nestabilných pólov uzavretej slučky, P otvorenej:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frekvencia, kde fáza dosiahne −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Bezpečnosť v zosilnení a kritické zosilnenie
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frekvencia, kde |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Bezpečnosť vo fáze: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- Krivka bod −1 neobtáča – uzavretá slučka je stabilná:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Obvyklá požiadavka: bezpečnosť v zosilnení aspoň 6 dB a vo fáze 30–60°. Dopravné oneskorenie fázu stále uberá, preto je oneskorená sústava horšie regulovateľná.

Graf

Nyquistov diagram | Graf



Plná krivka je G(iω) pre ω > 0, čiarkovaná jej zrkadlový obraz pre záporné ω, čiarkovaná kružnica |G| = 1. Uzavretá slučka je stabilná, keď krivka neobtáča bod −1.

Geometrické miesto koreňov s integrátorom: kritické zosilnenie 3.

Zadanie: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

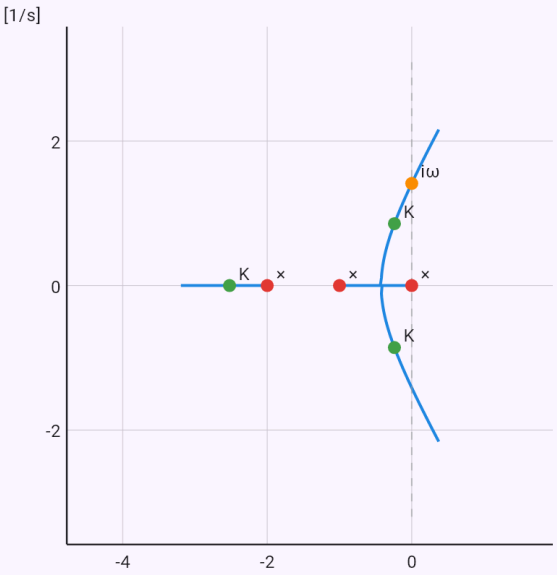
Výsledok

$$K_{krit} \approx 3$$

Postup

- Hľadáme K_{krit}; zadané:
  $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- Geometrické miesto koreňov: ako sa pohybujú póly uzavretej slučky, keď zosilnenie K rastie od nuly. Vetvy začínajú v póloch otvorenej slučky, odchádzajú po asymptotách a na imaginárnej osi prechádza systém do nestability (kritické zosilnenie z Routhovej–Hurwitzovej podmienky). Rovnica modelu:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Póly otvorenej slučky (začiatky vetiev): $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asymptoty vetiev: ťažisko a uhly
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Bod rozvetvenia na reálnej osi:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Priesečník s imaginárnou osou – hranica stability
  $s = i\omega: \quad \operatorname{Im} D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Zadané zosilnenie je pod kritickým – stabilné:
  $K = 1 < K_{krit}$
- Póly uzavretej slučky pre zadané K:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Graf



Vetvy ukazujú póly uzavretej slučky pre rastúce K: začínajú v póloch otvorenej slučky (×), body K sú póly pre zadané zosilnenie, iω priesečník s imaginárnou osou.

Potrebný rád Čebyševovho filtra pre útlm 40 dB o oktávu vyššie.

Zadanie: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

Výsledok

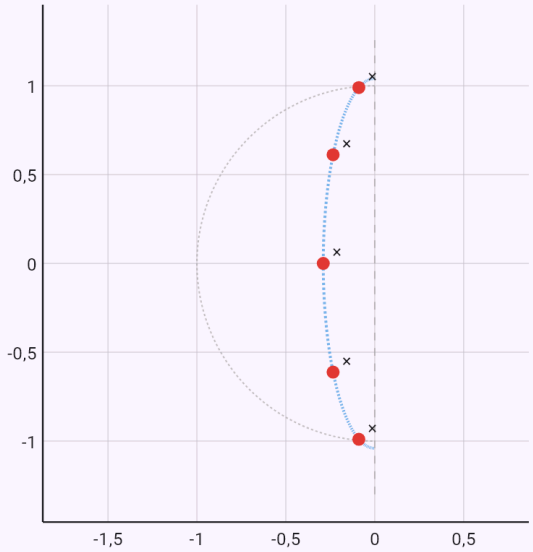
$$n \approx 5$$

Postup

- Hľadáme n; zadané
  $f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($
- Čebyšev: v priepustnom pásme zvlnenie A_p, za to strmší prechod do nepriepustného pásma ako Butterworth rovnakého rádu. Rovnica modelu
  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$
- Parameter zvlnenia: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Potrebný rád (zaokrúhlime nahor)
  $$n \geq \frac{\operatorname{argcosh}\sqrt{\frac{10^{A_s/10}-1}{10^{A_p/10}-1}}}{\operatorname{argcosh}(f_s/f_c)} = 4{,}536 \Rightarrow n = 5$$
- Póly na polelipse
  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{argsinh}}{n}$$
- Póly (vztiahnuté k ω_c)
  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28$$
- Prenos – všetky póly vľavo, filter je stabilný
  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$
- Za strmosť platí Čebyšev zvlnením a horším fázovým (skupinovým) oneskorením – horšie prenáša tvar impulzov.

Graf

Póly | Graf



Póly v komplexnej rovine s (×), stabilný systém ich má naľavo od imaginárnej osi.

Impulzná odozva číslicového filtra s komplexnými pólmi cez rezíduá.

Zadanie: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Výsledok

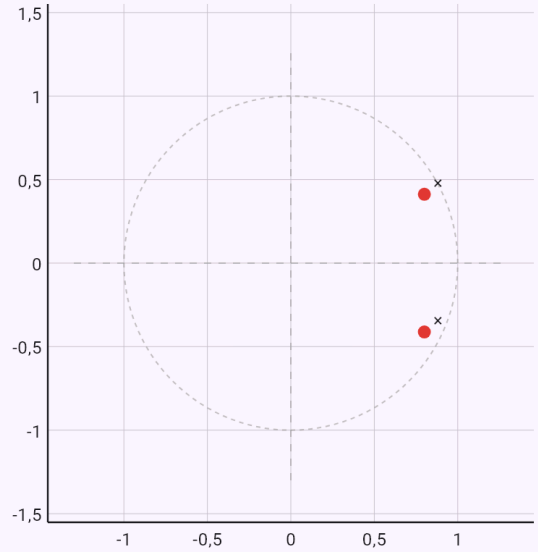
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Postup

- Hľadáme $h[n]$; zadané:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Číslicový filter počíta výstup z niekoľkých posledných vzoriek: y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. Jeho prenos je racionálna funkcia H(z) (Z-transformácia). Filter je stabilný, keď všetky póly ležia vnútri jednotkovej kružnice. Impulznú odozvu dá inverzná Z-transformácia cez rezíduá: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n-1}]. Frekvenčná charakteristika je H na jednotkovej kružnici, z = e^(iΩ). Rovnica modelu
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Diferenčná rovnica filtra:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Póly prenosu
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Póly vnútri jednotkovej kružnice – filter je stabilný:
  $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Inverzná Z-transformácia cez rezíduá:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Komplexne združené póly dávajú tlmený kmit
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \vartheta$
- Hodnota odozvy: $h[10] = -0{,}6596$

Graf

Póly a nuly | Graf



Póly (×) a nuly (○) prenosu v rovine z s jednotkovou kružnicou. Filter je stabilný, keď sú všetky póly vnútri.

Činiteľ akosti oscilátora z polohy pólov.

Zadanie: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Výsledok

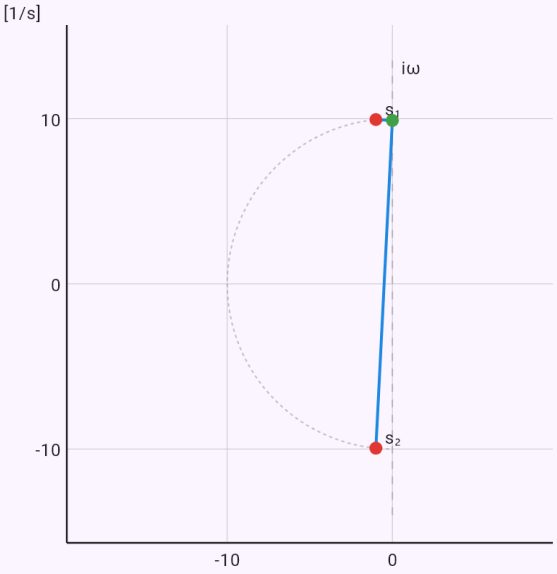
$$Q \approx 5$$

Postup

- Hľadáme Q; zadané:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Hmotnosť na pružine s tlmením, budená harmonickou silou. X/X₀ je amplitúda oproti výchylke pri statickom zaťažení rovnakou silou. Rovnica modelu:
  $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Póly prenosu
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplitúda zo vzdialeností od pólov
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Vrchol rezonančnej krivky
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Činiteľ akosti a šírka pásma
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Blízko rezonancie má krivka tvar Lorentzovej čiary
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Preto sa stroje nesmú dlho točiť na vlastnej frekvencii rámu a mosty sa kontrolujú na budenie chodcami a vetrom.

Graf

Póly | Graf



Póly v komplexnej rovine s (×), stabilný systém ich má naľavo od imaginárnej osi.

Index lomu pod rezonanciou Lorentzovho oscilátora, kontrola Kramersovou–Kronigovou reláciou.

Zadanie: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

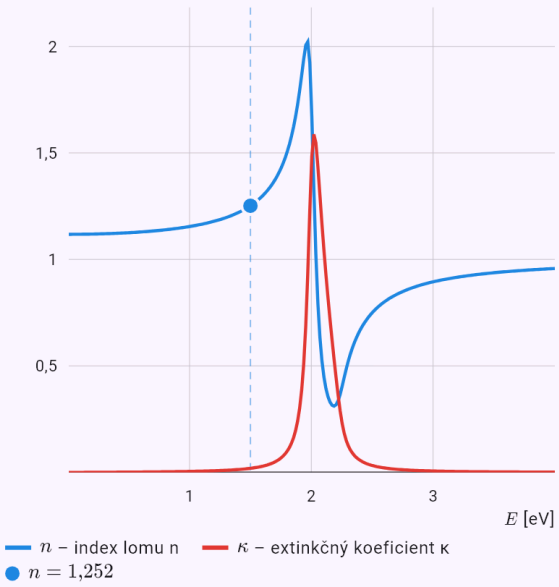
Výsledok

$$n \approx 1{,}252$$

Postup

- Hľadáme n; zadané
  $E_0 = 2\,\mathrm{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\mathrm{eV}, \quad E_p = 1\,\mathrm{eV}, \quad E = 1{,}5\,\mathrm{eV}$
- Index lomu n a extinkčný koeficient κ z n + iκ = √(1 + χ). Energia fotónu E, rezonancia E₀, šírka Γ a sila oscilátora E_p v elektrónvoltoch. Rovnica modelu:
  $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Póly susceptibility ležia v dolnej polrovine
  $E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4}} - \dfrac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$
- Kauzalita: Kramersova–Kronigova relácia
  $\mathrm{Im}\, E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty \dfrac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$
- Susceptibilita pri zadanej energii:
  $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Kontrola: χ' z integrálu cez χ" (numericky) a priamo:
  $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Komplexný index lomu:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Vlnová dĺžka a koeficient absorpcie
  $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 826{,}6\,\mathrm{nm}, \quad \alpha = \dfrac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\mathrm{m}^{-1}$
- Pod rezonanciou index lomu s energiou rastie – normálna disperzia, ktorou hranol rozkladá svetlo na farby.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prirodzená šírka sodíkovej čiary D – asi 10 MHz.

Zadanie: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

Výsledok

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$

Postup

- Hľadáme $\Delta\nu$; zadané: $\tau = 16\,\mathrm{ns}$
- Vybudený atóm vyžaruje vlnu, ktorá exponenciálne slabne s dobou života τ. Jej Fourierova transformácia (reziduum v jednom póle) dá Lorentzov tvar čiary s polšírkou Δν = 1/(2πτ) – prirodzená šírka spektrálnej čiary. Rovnica modelu: $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Fourierova transformácia tlmenej vlny

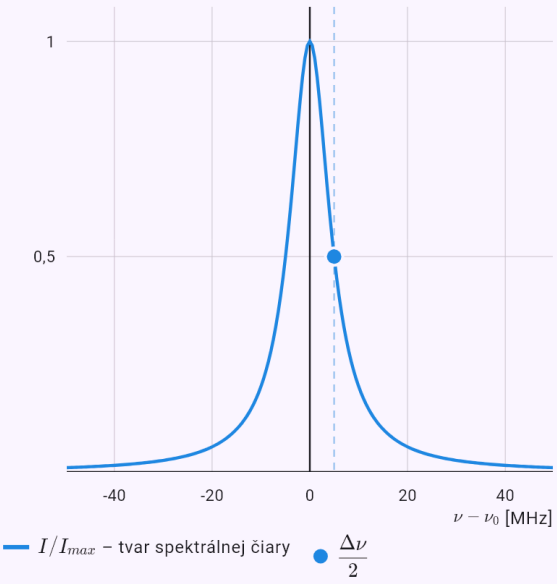
$$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$

- Lorentzov tvar čiary a jej polšírka

$$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{}{2}$$

- Prirodzená šírka čiary: $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\mathrm{ns}} = 9{,}947\,\mathrm{MHz}$
- Sodíková čiara D (τ ≈ 16 ns) má prirodzenú šírku asi 10 MHz. Skutočné čiary v plyne rozširuje ešte Dopplerov jav a zrážky.

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prispôsobenie záťaže 100 Ω k vedeniu 50 Ω skratovaným pahýľom.

Zadanie: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

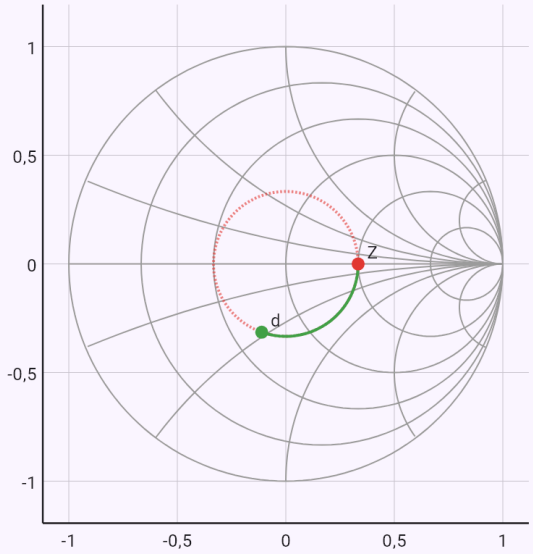
Výsledok

$$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$
$$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$

Postup

- Hľadáme d; zadané
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Činiteľ odrazu Γ = (Z − Z₀)/(Z + Z₀) na vedení s vlnovou impedanciou Z_0 je Möbiova transformácia. Zobrazí pravú polrovinu impedancií na jednotkový kruh – Smithov diagram. Pohyb po vedení ku generátoru je otáčanie po kružnici |Γ| = konšt. v smere hodinových ručičiek, pol vlnovej dĺžky je celá otáčka. Odtiaľ pomer stojatých vĺn, vstupná impedancia vedenia, štvrťvlnový transformátor aj prispôsobenie pahýľom. Rovnica modelu
  $$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{Z_L}{Z_0}$$
- Normovaná impedancia záťaže: $z = \frac{100}{50} = 2$
- Činiteľ odrazu:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Pomer stojatých vĺn a útlm odrazu
  $$PSV = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$$
- Vlnová dĺžka na vedení: $\lambda = \frac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Normovaná admitancia záťaže: $y = \frac{1}{z} = 0{,}5$
- Miesto, kde má admitancia reálnu časť 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Dĺžka skratovaného pahýľa, ktorý vyruší susceptanciu
  $y_s = -j\,\mathrm{cotg}\,\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \frac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccotg}\,(0{,}7($
- Pahýľ je kúsok vedenia zakončený skratom, pripojený paralelne. Na zvolenej frekvencii potom vedenie za ním nevidí žiadny odraz.

Graf



Kružnice stáleho odporu a oblúky stálej reaktancie (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). Čiarkovaná kružnica má polomer |Γ| (stály PSV), farebný oblúk je posun po vedení ku generátoru.

Známe obmedzenia

- Prúdenie je ideálne: bez viskozity, odtrhnutia a úplavu. Odpor ani správanie pri veľkých uhloch nábehu model nedá.
- Konformné zobrazenia sú len pre uvedené tvary; všeobecný tvar vodičov alebo profilu (Schwarzova–Christoffelova transformácia) zatiaľ nevie.
- Prenos regulačnej slučky má pevný tvar s tromi zotrvačnými členmi a najviac dvoma integrátormi; nuly v čitateli a nestabilnú otvorenú slučku zatiaľ nevie.
- Číslicový filter je 2. rádu, analógové filtre len dolný priepust.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace