# Mathtrace – príručka

III. Matematická analýza

## Obsah


III. Matematická analýza

25. Limity
26. Derivácie
27. Priebeh funkcie
28. Funkcie viacerých premenných
    - Mapa integrálnych viet
    - Fyzikálne aplikácie integrálnych viet
29. Taylorov polynóm
30. Neurčitý integrál
    - Základné integrály a substitúcia
    - Per partes
    - Racionálne funkcie
    - Goniometrické funkcie
    - Hyperbolické funkcie
    - Odmocniny
31. Určitý integrál a jeho aplikácie
    - Určitý integrál
    - Nevlastný integrál
    - Plocha pod krivkou a medzi krivkami
    - Dĺžka krivky
    - Objem rotačného telesa
    - Plášť rotačného telesa
    - Aplikácie s parametrami
    - Ťažisko
    - Krivky zadané parametricky a v polárnych súradniciach
    - Krivky zadané rovnicou
32. Nekonečné rady
    - Číselné rady

- Mocninové rady
- Taylorov rad

33. Fourierove rady

# 25. Limity

Mathtrace vypočíta limitu funkcie jednej premennej vo vlastnom bode, v nekonečne aj jednostrannú limitu a postupuje ako v škole: najprv skúsi do funkcie dosadiť. Limitu postupnosti (n → ∞) vypočíta rovnako – aj tvar 1^∞ alebo súčet mocnín, z ktorého vyberie najrýchlejšie rastúci člen.

Keď dosadením vyjde neurčitý výraz (0/0, ∞/∞, …), zvolí úpravu podľa tvaru funkcie – rozklad a krátenie, rozšírenie združeným výrazom, vydelenie najvyššou mocninou, známu limitu (sin x / x) alebo l'Hospitalovo pravidlo, aj opakovane. Mocninu, v ktorej základe aj exponente je premenná (tvary $0^0$, $\infty^0$, 1^∞), prepíše ako e^(g·ln f) a limitu vypočíta v exponente; keď je funkcia definovaná len na jednej strane bodu (x^(ln(x+1)) len pre x > 0), vypočíta limitu z tej strany a povie to. Čipom „L'Hospitalovo pravidlo" zvolíte pravidlo rovno; keď dosadením neurčitý výraz nevyjde, postup vysvetlí, prečo ho nemožno použiť.

Ďalšie písmená v zadaní (k v (1 + k/x)^x) berie ako parametre – konštanty, s ktorými počíta všeobecne; keď výsledok platí len pre kladné hodnoty parametra, povie to. Písmeno môže byť aj v bode limity: lim (x² − a²)/(x − a) pre x → a = 2a. Graf pri limite s parametrom nekreslí.

Nekonečnú limitu ani limitu, ktorá neexistuje (jednostranné limity sa líšia), nevydá za číslo – povie to slovami a ukáže jednostranné limity. K výsledku patrí graf funkcie v okolí bodu s vyznačenou hodnotou limity.

Pri limite postupnosti kreslí graf ako body $a_1$, $a_2$, $a_3$, … namiesto spojitej krivky.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)` | Limita napísaná ručne: za slovom lim v zátvorke premenná, šípka -> a bod, potom funkcia. |
| `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)` | Limita v nekonečne: nekonečno sa píše oo (mínus nekonečno -oo). |
| `lim(x->0+) 1/x` | Jednostranná limita: za bodom + (sprava) alebo − (zľava). |
| `\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}` | Z fotky alebo v zápise LaTeX, ako ho rozpozná fotoaparát. |
| `lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)` | Limita postupnosti v nekonečne. |

# Ukážky

## Neurčitý výraz 0/0 – čitateľa rozložíme a skrátime.

Zadanie: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

**Výsledok**

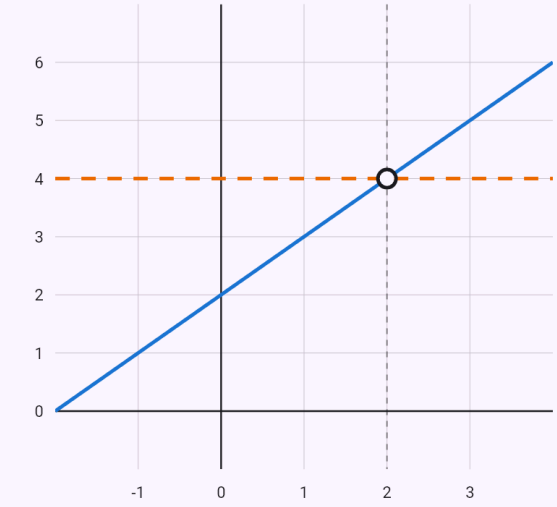
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

**Postup**

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- Upravíme a skrátime

  $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$$
- Dosadíme: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

**Graf**




$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$y = 4$

**Limita:**

○ $[2; 4]$

Prázdne koliesko – k tejto hodnote sa funkcia blíži (v samotnom bode definovaná byť nemusí); čiarkovane hodnota limity.

## Limita v nekonečne – čitateľa aj menovateľa vydelíme najvyššou mocninou.

Zadanie: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

**Výsledok**

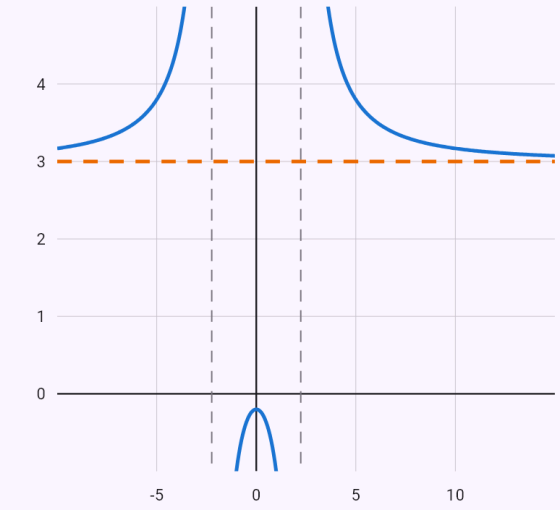
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

**Postup**

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ – výraz treba upraviť.
- Čitateľa aj menovateľa vydelíme $x^2$ – členy typu c/xⁿ sa blížia k nule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

**Graf**




$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Prázdne koliesko – k tejto hodnote sa funkcia blíži (v samotnom bode definovaná byť nemusí); čiarkovane hodnota limity.

## Známa limita sin x / x.

Zadanie: `lim(x->0) sin(3x)/x`

**Výsledok**

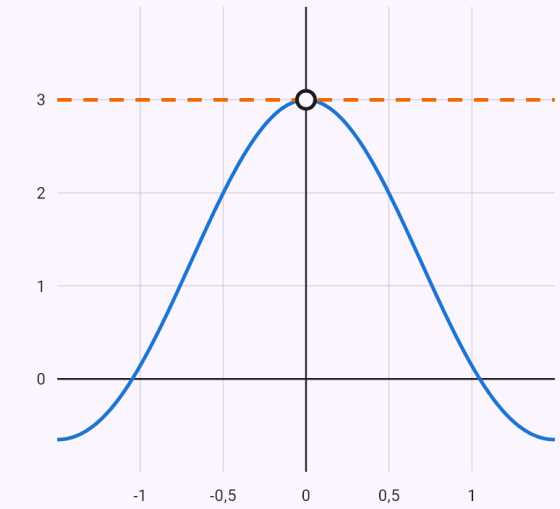
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

**Postup**

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- Použijeme známu limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

**Graf**




$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

**Limita:**

○ $[0; 3]$

Prázdne koliesko – k tejto hodnote sa funkcia blíži (v samotnom bode definovaná byť nemusí); čiarkovane hodnota limity.

## L'Hospitalovo pravidlo, použité dvakrát po sebe.

Zadanie: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

### Výsledok

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

### Postup

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitateľa aj menovateľa

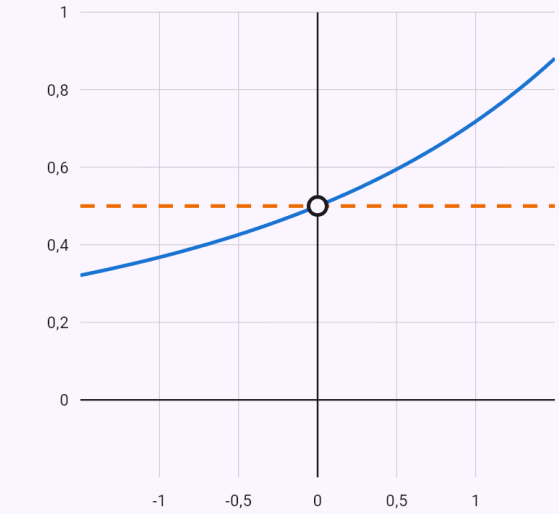
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitateľa aj menovateľa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Dosadíme: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

### Graf




$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

**Limita:**

- $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Prázdne koliesko – k tejto hodnote sa funkcia blíži (v samotnom bode definovaná byť nemusí); čiarkovane hodnota limity.

## Neurčitý výraz $0^0$ – mocninu prepíšeme ako e^(g·ln f); funkcia je definovaná len pre x > 0, preto limita

**sprava.**

Zadanie: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

### Výsledok

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

### Postup

- Naľavo od bodu $0$ funkcia nie je definovaná, počítame preto limitu sprava.
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $0^0$ – výraz treba upraviť.
- Základ aj exponent obsahujú premennú – mocninu zapíšeme ako e na súčin exponentu a logaritmu základu a limitu prevedieme do exponentu

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $0 \cdot \infty$ – výraz treba upraviť.
- Súčin prepíšeme na podiel

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ – výraz treba upraviť.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitateľa aj menovateľa

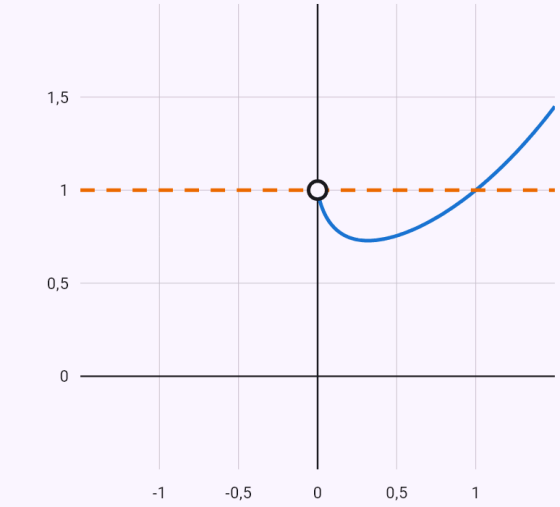
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- Činiteľ $x+1$ má v bode limitu hodnotu $1$ – vyberieme ho pred limitu

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitateľa aj menovateľa

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$
- Dosadíme

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- Limitu exponentu dosadíme späť: $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$

### Graf




$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

**Limita:**

○ $[0; 1]$

Prázdne koliesko – k tejto hodnote sa funkcia blíži (v samotnom bode definovaná byť nemusí); čiarkovane hodnota limity.

## Jednostranné limity sa líšia – limita neexistuje.

Zadanie: `lim(x->0) 1/x`

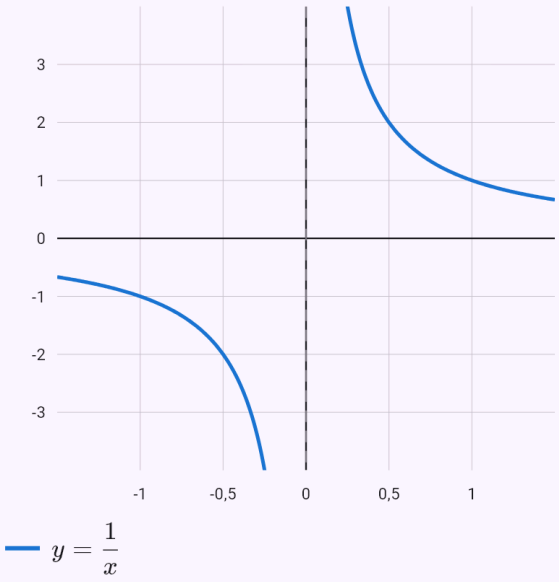
**Výsledok**

Limita neexistuje – jednostranné limity sa líšia.

**Postup**

- Dosadením vychádza nenulové číslo delené nulou – limita je nekonečná, znamienko určíme zvlášť zľava a sprava: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Jednostranné limity: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

**Graf**




## Limita postupnosti – vyberieme najrýchlejšie rastúci člen $9^n$.

Zadanie: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

**Výsledok**

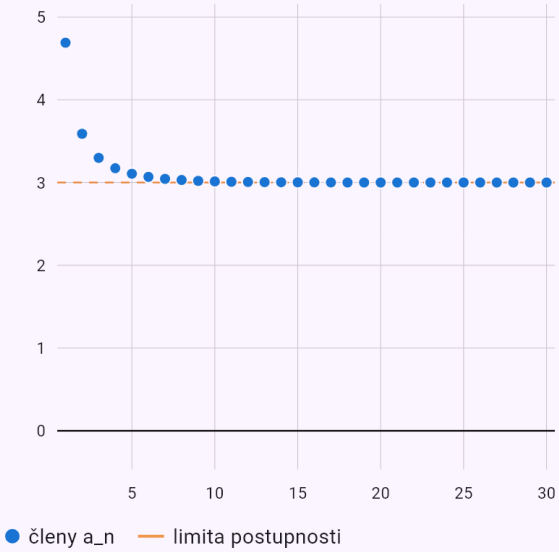
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

**Postup**

- Vyberieme pred zátvorku najrýchlejšie rastúci člen $9^n$ – podiely ostatných členov s ním idú k nule

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

**Graf**




Body sú členy postupnosti a_n pre n = 1, 2, 3, … Ak má postupnosť limitu, členy sa k nej (čiarkovane) blížia.

## Limita s parametrom k – známa limita (1 + 1/x)^x = e dáva e^k.

Zadanie: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

**Výsledok**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

**Postup**

- Písmená iné ako premenná sú parametre – pevné čísla, s ktorými počítame ako s konštantami: $k$
- Dosadením vychádza neurčitý výraz $1^{\infty}$ – výraz treba upraviť.
- Základ zapíšeme ako $1+\frac{1}{t}$, kde t = $\frac{x}{k}$, a mocninu ako $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ umocnené na $k$. Výraz v hranatej zátvorke sa blíži k e – je to známa limita $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$.

  Zostáva limita exponentu

  $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

# 26. Derivácie

Aplikácia derivuje podľa pravidiel – derivácia súčtu, konštanty, súčinu, podielu aj zloženej funkcie – a pri každom kroku povie, ktoré pravidlo použila. Vie aj vyššie derivácie a hodnotu derivácie v bode. Základné funkcie ($x^2$, sin x, $e^x$, …) zderivuje aj z definície ako limitu podielu diferencií. Výsledok doplní graf funkcie a jej derivácie.

Pri funkcii zadanej implicitne rovnicou s x a y ($x^3 + y^3 = 3xy$) zderivuje obe strany podľa x (y berie ako funkciu x) a vyjadrí $y'$, alebo použije vzorec $y' = -F_x / F_y$; vie aj $y''$ a v zadanom bode dotyčnicu a normálu, v grafe nakreslí krivku.

V singulárnom bode (krivka sa kríži alebo má hrot) nájde dotyčnice z členov najnižšieho stupňa rovnice – pri Descartovom liste v začiatku x = 0 a y = 0.

Diferenciál funkcie $df = f'(x)\,dx$, v bode s krokom („diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1“) aj s približnou hodnotou $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. Zápis „přibližně √4.1“ (zatiaľ po česky) zvolí bod $x_0 = 4$, kde hodnotu poznáme presne, a porovná odhad so skutočnou hodnotou.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `(x^2 sin x)'` | Derivácia apostrofom za zátvorkou. |
| `d/dx (e^x / x)` | Zápis d/dx, aj z fotky (\frac{d}{dx}). |
| `(x^3 ln x)''` | Vyššie derivácie viacerými apostrofmi, alebo rádom pri čipe „Derivovať“. |
| `(x^2 + 1)'\|_{x=2}` | Hodnota derivácie v bode, alebo vyplňte bod pri čipe. |
| `x^2 sin x` | Výraz s čipom „Derivovať“ – tam vyberiete aj rád, bod a spôsob (podľa pravidiel / z definície). |
| `x^3 + y^3 = 3xy` | Rovnica s x a y – čip „Implicitná derivácia“ (rád 1 alebo 2, postup, bod $[x_0; y_0]$) alebo „Graf krivky“; písané diff(x^3+y^3=3xy, x). |
| `diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1` | Diferenciál v bode s krokom (bez bodu všeobecne: diferenciál x^2 sin x). |
| `přibližně √4.1` | Približný výpočet hodnoty pomocou diferenciálu. |

# Ukážky

## Derivácia súčinu.

Zadanie: `(x^2 sin x)'`

**Výsledok**

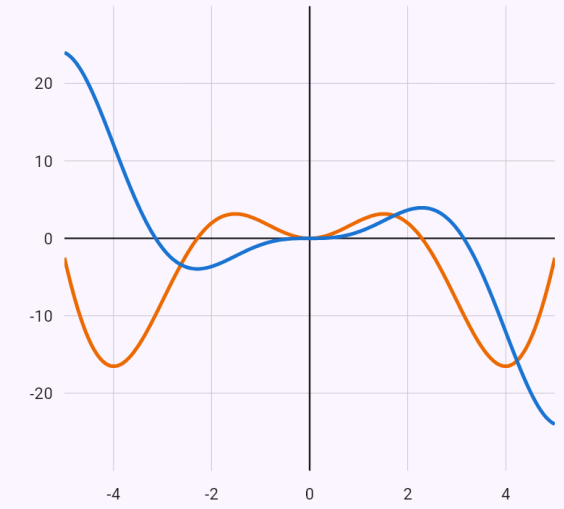
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

**Postup**

- Derivácia súčinu (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

**Graf**




Kde je derivácia kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá. V nulových bodoch derivácie má funkcia vodorovnú dotyčnicu.

## Derivácia podielu.

Zadanie: `d/dx (e^x / x)`

**Výsledok**

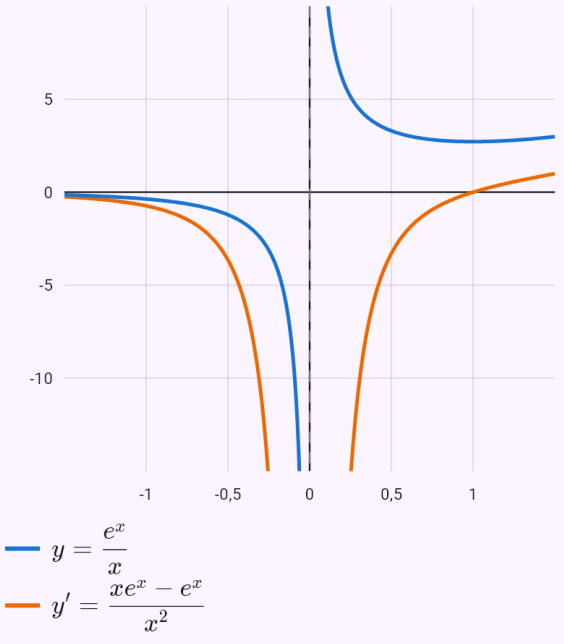
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

**Postup**

- Derivácia podielu (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

**Graf**



Kde je derivácia kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá. V nulových bodoch derivácie má funkcia vodorovnú dotyčnicu.

## Druhá derivácia.

Zadanie: `(x^3 ln x)''`

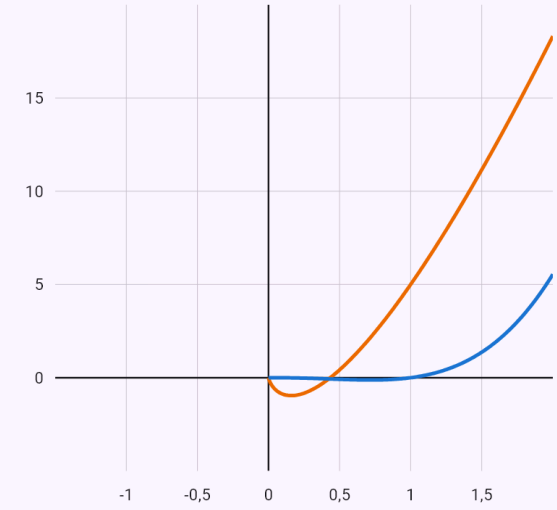
### Výsledok

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

### Postup

- 1. derivácia: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Derivácia súčinu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- 2. derivácia: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- Derivácia súčtu je súčet derivácií:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Konštantu vyberieme pred deriváciu:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Derivácia súčinu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Dosadíme:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Dosadíme: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Upravíme: $y'' = 5x + 6x \ln x$

### Graf




Kde je druhá derivácia kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, je konkávna (prehnutá nadol).

## Derivácia z definície ako limita.

Zadanie: x^2 Derivovať → Z definície

### Výsledok

$$y' = 2x$$

### Postup

- Derivácia z definície

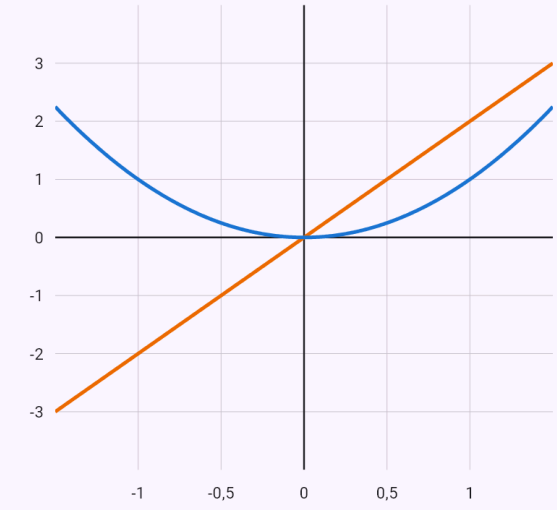
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Dosadením vychádza neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz treba upraviť.
- Upravíme a skrátime

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

- Dosadíme: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

### Graf




$y = x^2$
$y' = 2x$

Kde je derivácia kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá. V nulových bodoch derivácie má funkcia vodorovnú dotyčnicu.

# Implicitná derivácia – Descartov list, dotyčnica a normála v bode [3/2; 3/2], druhá derivácia.

Zadanie: `x^3 + y^3 = 3xy` Implicitná derivácia, rád 2, bod [3/2; 3/2]

### Výsledok

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$$

Podmienky: $y^2 - x \neq 0$

### Postup

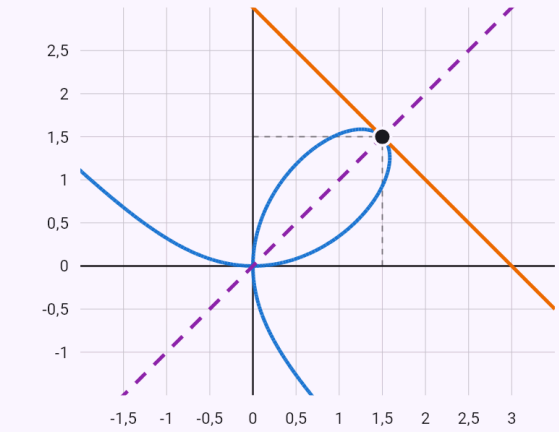
- Funkcia y = y(x) je zadaná rovnicou $x^3 + y^3 = 3xy$ – obe strany zderivujeme podľa x a y berieme ako funkciu x (derivácia zloženej funkcie: napr. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivujeme obe strany: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Členy s y' prevedieme na ľavú stranu, ostatné na pravú, a y' vyberieme pred zátvorku: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Vyjadríme y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- Druhá derivácia – y' zderivujeme podľa x znova (y aj y' sú funkcie x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$
- Dosadíme za y'

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$
- Na krivke platí $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – výraz sa tým zjednoduší: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Bod $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ leží na krivke: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\, y=\frac{3}{2}} = 0$
- Derivácia v bode $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – smernica dotyčnice: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- Dotyčnica: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- Normála je kolmá na dotyčnicu, má smernicu $1$: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- Druhá derivácia v bode: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

### Graf




$x^3 + y^3 = 3xy$
t: $y = 3 - x$
n: $y = x$

Krivka zadaná rovnicou. V zadanom bode je dotyčnica (plnou čiarou) a normála (čiarkovane).

## Diferenciál √x v bode 4 s krokom 0,1.

Zadanie: `diferenciál √x, x0 = 4, dx = 0.1`

**Výsledok**

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

**Postup**

- Diferenciál funkcie – lineárna časť jej prírastku:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Diferenciál v bode $x_0$ pre krok $h$
  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Prírastok funkcie nahradíme diferenciálom. Presná hodnota je $2{,}0248457$, chyba odhadu $0{,}00015$
  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

## Približná hodnota ∛27,1 pomocou diferenciálu.

Zadanie: `přibližně \sqrt[3]{27.1}`

**Výsledok**

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

**Postup**

- Číslo zapíšeme ako hodnotu funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bode blízko $x_0 = 27$, kde ju poznáme presne; krok je $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- Diferenciál funkcie – lineárna časť jej prírastku:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- Diferenciál v bode $x_0$ pre krok $h$
  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \frac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Prírastok funkcie nahradíme diferenciálom. Presná hodnota je $3{,}0036991$, chyba odhadu $0{,}0000046$
  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

# 27. Priebeh funkcie

Priebeh funkcie aplikácia vyšetrí v obvyklom poradí: definičný obor, párnosť a nepárnosť, priesečníky s osami, znamienko funkcie, limity v krajných bodoch definičného oboru a asymptoty, prvá derivácia – monotónnosť a extrémy (aj pomocou vyšších derivácií), druhá derivácia – konvexnosť, konkávnosť a inflexné body, nakoniec obor hodnôt. Všetko zhrnie v prehľade a nakreslí graf s vyznačenými bodmi.

Pri goniometrickej funkcii aplikácia nájde periódu, vyšetrí funkciu na jednej perióde a výsledky zapíše s periódou (maximum v $x = \pi/2 + 2k\pi$); ak má periodickú deriváciu len samotná derivácia ($x + 2 \sin x$), opakujú sa s periódou extrémy a monotónnosť. Absolútne hodnoty odstráni podľa znamienok na intervaloch a v hrotoch porovná jednostranné derivácie; kde je derivácia nekonečná, ukáže zvislú dotyčnicu. Vnorené absolútne hodnoty a súčty absolútnych hodnôt vyšetrí po častiach; kde je funkcia na intervale konštantná, uvedie to aj s hodnotou (minimum v každom bode intervalu).

Absolútne (globálne) extrémy na uzavretom intervale (zápis zatiaľ po česky): „extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩“ – aplikácia nájde stacionárne body a body bez derivácie vnútri intervalu a porovná funkčné hodnoty v nich a v krajných bodoch. Bez intervalu „extrémy …“ vyšetrí priebeh funkcie. Inverznú funkciu („inverzní funkce f(x) = …“) nájde vyjadrením x z rovnice y = f(x) so skúškou zložením; graf ukáže f, $f^{-1}$ a os y = x.

Vrchol paraboly („vrchol paraboly y = x^2 - 4x + 7“, stačí aj samotné y = …) nájde doplnením na štvorec – s osou, oborom hodnôt a posunutím grafu $y = ax^2$. Zloženú funkciu zapíšete s definíciami: „f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))“.

Graf posunutím, natiahnutím a preklopením: „posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1“ – aplikácia vyjde zo základnej funkcie (sin, cos, tg, cotg, $e^x$, $a^x$, ln, $\log_a$, odmocnina, mocnina, 1/x, |x|) a krok po kroku ju stlačí či roztiahne pozdĺž osi x, posunie doprava či doľava, roztiahne pozdĺž osi y, preklopí a posunie nahor či nadol; vie aj |f(x)| a f(|x|). V grafe je základná aj výsledná funkcia.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `průběh y = x^3 - 3x` | Slovom „průběh“ (zatiaľ po česky) pred funkciou. |
| `x^3 - 3x` | Funkcia s čipom „Priebeh funkcie“. |
| `extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩` | Absolútne extrémy na uzavretom intervale (aj „max a min …, x ∈ ⟨a; b⟩“). |
| `inverzní funkce f(x) = (2x+1)/(x-3)` | Inverzná funkcia (aj „f^{-1}, f(x) = …“). |

# Ukážky

## Polynóm – extrémy a inflexný bod.

Zadanie: `x^3 - 3x` Priebeh funkcie

### Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = \mathbb{R}$

Párnosť a nepárnosť: nepárna

Priesečníky s osou x: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$

Rastúca: $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$

Klesajúca: $\langle -1;\ 1\rangle$

Lokálne maximum: $[-1;\ 2]$

Lokálne minimum: $[1;\ -2]$

Konvexná: $\langle 0;\ \infty)$

Konkávna: $(-\infty;\ 0\rangle$

Inflexné body: $[0;\ 0]$

### Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – funkcia je nepárna (graf je súmerný podľa začiatku).
- Priesečníky s osou x:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, teda
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3};\ 0)$ | $(0;\ \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3};\ \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

  Funkcia je kladná pre $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ \infty\right)$ a záporná pre $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$
- Limity v krajných bodoch definičného oboru
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v ±∞ neexistuje:
  $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Prvá derivácia: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- Stacionárne body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

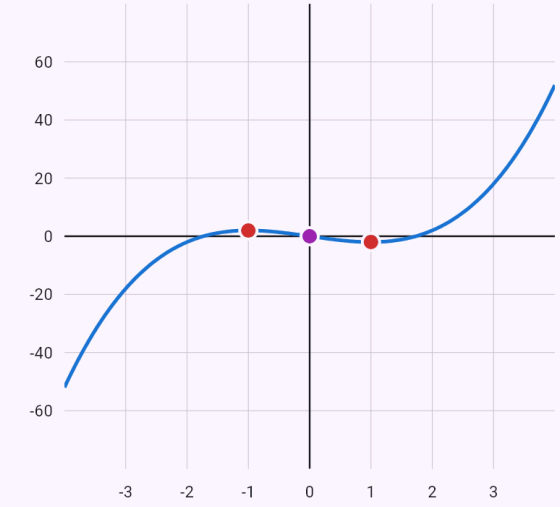
| | $(-\infty;\ -1)$ | $(-1;\ 1)$ | $(1;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

  Funkcia je rastúca na $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$ a klesajúca na $\langle -1;\ 1\rangle$
- V bode $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – lokálne maximum.
- V bode $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – lokálne minimum.
- Lokálne maximum $[-1;\ 2]$, lokálne minimum $[1;\ -2]$
- Druhá derivácia: $f''(x) = 6x$
- Body podozrivé z inflexie: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $\cup$ |

  Funkcia je konvexná na $\langle 0;\ \infty)$ a konkávna na $(-\infty;\ 0\rangle$
- V bode $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – prvá nenulová derivácia (od tretej) je nepárneho rádu, je tu inflexný bod.
- Inflexné body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \mathbb{R}$

### Graf




$y = x^3 - 3x$

**Významné body:**

- maximum $[-1;2]$
- inflexia $[0;0]$
- minimum $[1;-2]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Lomená funkcia – asymptoty.

Zadanie: `x^2/(x - 1)` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Obor hodnôt: $H(f) = (-\infty;\, 0\rangle \cup \langle 4;\, \infty)$

Párnosť a nepárnosť: ani párna, ani nepárna

Priesečníky s osou x: $[0;\ 0]$

Rastúca: $(-\infty;\, 0\rangle,\ \langle 2;\, \infty)$

Klesajúca: $\langle 0;\, 1),\ (1;\, 2\rangle$

Lokálne maximum: $[0;\ 0]$

Lokálne minimum: $[2;\ 4]$

Konvexná: $(1;\, \infty)$

Konkávna: $(-\infty;\, 1)$

Asymptoty: $x = 1,\ y = x + 1$

## Postup

- Definičný obor – podmienky $x \neq 1$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Definičný obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nie je súmerný podľa nuly – funkcia nie je párna ani nepárna.
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\, 0)$ | $(0;\, 1)$ | $(1;\, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ |

  Funkcia je kladná pre $x \in (1;\, \infty)$ a záporná pre $x \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, 1)$

- Limity v krajných bodoch definičného oboru

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Zvislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = 1$
- Asymptota so smernicou v ±∞: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – priamka $y = x + 1$
- Prvá derivácia

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Stacionárne body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(-\infty;\, 0)$ | $(0;\, 1)$ | $(1;\, 2)$ | $(2;\, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |

  Funkcia je rastúca na $(-\infty;\, 0\rangle,\ \langle 2;\, \infty)$ a klesajúca na $\langle 0;\, 1),\ (1;\, 2\rangle$

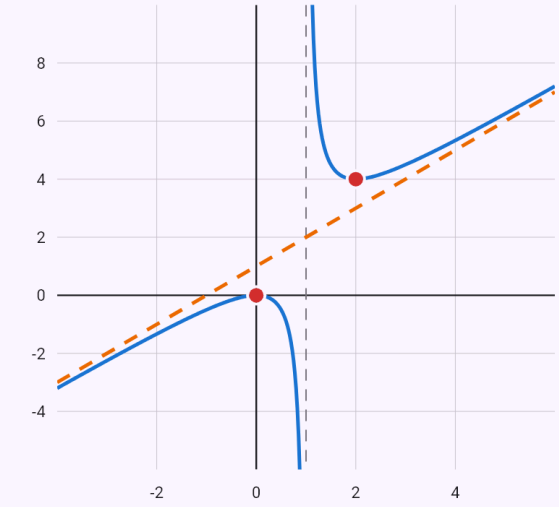
- V bode $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokálne maximum.
- V bode $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – lokálne minimum.
- Lokálne maximum $[0;\ 0]$, lokálne minimum $[2;\ 4]$
- Druhá derivácia: $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
- Rovnica $f''(x) = 0$ nemá riešenie.
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\, 1)$ | $(1;\, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ∩ | ∪ |

  Funkcia je konvexná na $(1;\, \infty)$ a konkávna na $(-\infty;\, 1)$

- Funkcia nemá inflexné body.
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = (-\infty;\, 0\rangle \cup \langle 4;\, \infty)$

## Graf




$y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

**Významné body:**

● maximum $[0;0]$ ● minimum $[2;4]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Periodická funkcia – všetko na jednej perióde, výsledky s periódou.

Zadanie: `sin 2x + 2cos x` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Párnosť a nepárnosť: ani párna, ani nepárna

Perióda: $p = 2\pi$

Priesečníky s osou x: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Rastúca: $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Klesajúca: $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Lokálne maximum: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Lokálne minimum: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Konvexná:
$\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right.$

Konkávna:
$\left\langle \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, \left\langle -\arcsin \right.$

Inflexné body:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkcia je periodická s periódou $2\pi$ – vyšetríme ju na jednej perióde (od 0 do $2\pi$) a výsledky zopakujeme s periódou, k $\in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – to nie je f(x) ani −f(x), funkcia nie je párna ani nepárna.
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, teda $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 2$, teda $[0;\ 2]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(0;\ \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$ | $(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | − | + |

  Funkcia je kladná pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ a záporná pre $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Periodická funkcia (ktorá nie je konštantná) nemá limitu v ±∞.
- Prvá derivácia: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Stacionárne body

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(0;\ \frac{\pi}{6})$ | $(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$ | $(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2})$ | $(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | ↗ |

  Funkcia je rastúca na $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$ a klesajúca na $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$
- Lokálne maximum $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, lokálne minimum $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Druhá derivácia: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Body podozrivé z inflexie

  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia

konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(0;\ \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2};\ \pi+\arcsin(\frac{1}{4}))$ | $(\pi+\arcsin(\frac{1}{4});\ \frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $\cup$ | $\cap$ |

Funkcia je konvexná na a konkávna na

$$\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi \right.$$

$$\left\langle \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \right.$$

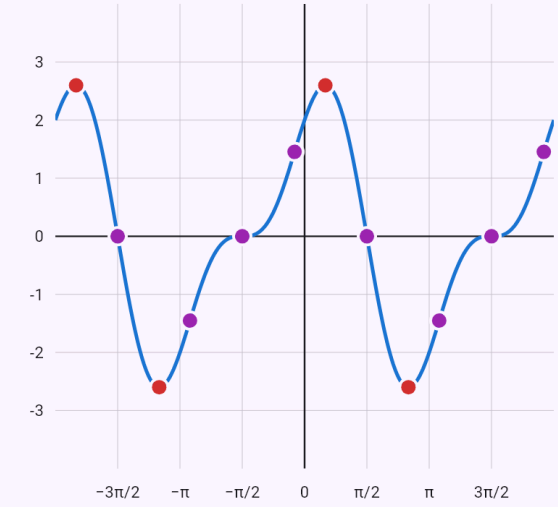
- Inflexné body

$$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít:

$$H(f)=\left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

## Graf




$y=\sin 2x+2\cos x$

**Významné body:**

- maximum $\left[-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexia $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$
- minimum $\left[-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexia $\left[-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- inflexia $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$
- inflexia $\left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- maximum $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexia $\left[\frac{\pi}{2};\ 0\right]$
- minimum $\left[\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- inflexia $\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$
- inflexia $\left[\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$
- inflexia $\left[2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Tangens – zvislé asymptoty, obor hodnôt $\mathbb{R}$.

Zadanie: `tg x` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Obor hodnôt: $H(f) = \mathbb{R}$

Párnosť a nepárnosť: nepárna

Perióda: $p = \pi$

Priesečníky s osou x: $[k\pi;\ 0]$

Rastúca: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Konvexná: $\left\langle k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Konkávna: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right\rangle$

Inflexné body: $[k\pi;\ 0]$

Asymptoty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

## Postup

- Definičný obor – podmienky $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Funkcia je periodická s periódou $\pi$ – vyšetríme ju na jednej perióde (od 0 do $\pi$) a výsledky zopakujeme s periódou, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ – funkcia je nepárna (graf je súmerný podľa začiatku).
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, teda $[k\pi;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(0;\ \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2};\ \pi)$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $-$ |

  Funkcia je kladná pre $x \in \left(k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a záporná pre $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right)$
- Periodická funkcia (ktorá nie je konštantná) nemá limitu v ±∞.
- Limity v krajných bodoch definičného oboru

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Zvislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Prvá derivácia: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Rovnica $f'(x) = 0$ nemá riešenie – funkcia nemá stacionárne body.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

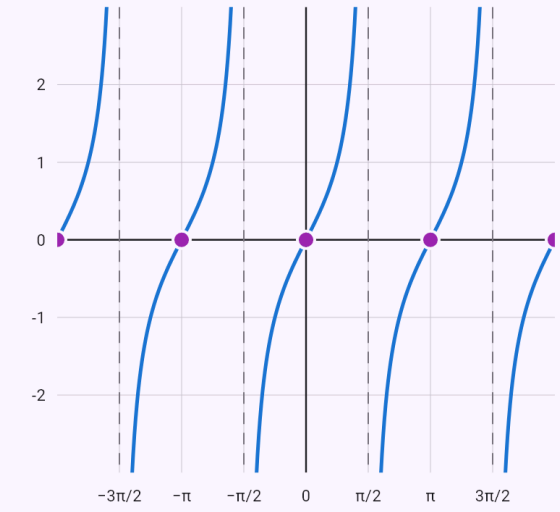
| | $(0;\ \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2};\ \pi)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↗ |

  Funkcia je rastúca na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- Funkcia nemá lokálne extrémy.
- Druhá derivácia: $f''(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
- Body podozrivé z inflexie: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(0;\ \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2};\ \pi)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ∪ | ∩ |

  Funkcia je konvexná na $\left\langle k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a konkávna na $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right\rangle$
- Inflexné body: $[k\pi;\ 0]$
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \mathbb{R}$

## Graf




$y = \operatorname{tg} x$

**Významné body:**

- inflexia $[-2\pi; 0]$
- inflexia $[-\pi; 0]$
- inflexia $[0; 0]$
- inflexia $[\pi; 0]$
- inflexia $[2\pi; 0]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Hyperbolický tangens – vodorovné asymptoty y = ±1.

Zadanie: `tgh x` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = (-1;\ 1)$

Párnosť a nepárnosť: nepárna

Priesečníky s osou x: $[0;\ 0]$

Rastúca: $\mathbb{R}$

Konvexná: $(-\infty;\ 0\rangle$

Konkávna: $\langle 0;\ \infty)$

Inflexné body: $[0;\ 0]$

Asymptoty: $y = -1,\ y = 1$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- – funkcia je nepárna (graf je súmerný podľa začiatku).
  $f(-x) = \operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x = -f(x)$
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ |

  Funkcia je kladná pre $x \in (0;\ \infty)$ a záporná pre $x \in (-\infty;\ 0)$
- Limity v krajných bodoch definičného oboru
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – priamka $y = -1$
- Asymptota so smernicou v +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – priamka $y = 1$
- Prvá derivácia: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- Rovnica $f'(x) = 0$ nemá riešenie – funkcia nemá stacionárne body.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(-\infty;\ \infty)$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

  Funkcia je rastúca na $\mathbb{R}$
- Funkcia nemá lokálne extrémy.
- Druhá derivácia: $f''(x) = -\dfrac{2\operatorname{tgh} x}{\cosh^2 x}$
- Body podozrivé z inflexie: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ |

  Funkcia je konvexná na $(-\infty;\ 0\rangle$ a konkávna na $\langle 0;\ \infty)$
- V bode $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – prvá nenulová derivácia (od tretej) je nepárneho rádu, je tu inflexný bod.
- Inflexné body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = (-1;\ 1)$

## Periodická je len derivácia – hodnoty extrémov rastú s k.

Zadanie: `x + 2sin x` Priebeh funkcie

### Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Párnosť a nepárnosť: nepárna

Perióda: $p = 2\pi$

Priesečníky s osou x: $[0;\ 0]$

Rastúca: $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Klesajúca: $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Lokálne maximum: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokálne minimum: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Konvexná: $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$

Konkávna: $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$

Inflexné body: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

### Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkcia sama periodická nie je, ale jej derivácia áno (perióda $2\pi$) – monotónnosť, extrémy a konvexnosť sa opakujú s touto periódou, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – funkcia je nepárna (graf je súmerný podľa začiatku).
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Limity v krajných bodoch definičného oboru

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- Prvá derivácia: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Stacionárne body

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(0;\ \frac{2\pi}{3})$ | $(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3})$ | $(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

  Funkcia je rastúca na $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$ a klesajúca na $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

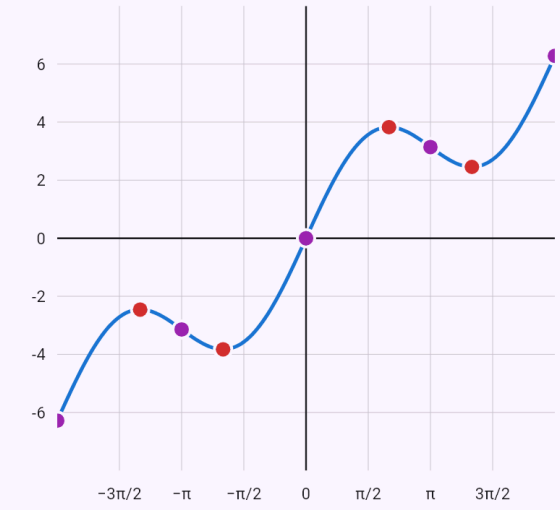
- Lokálne maximum $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, lokálne minimum $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Druhá derivácia: $f''(x) = -2\sin x$
- Body podozrivé z inflexie: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(0;\ \pi)$ | $(\pi;\ 2\pi)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | + |
| $f(x)$ | ∩ | ∪ |

  Funkcia je konvexná na $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$ a konkávna na $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$

- Inflexné body: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

### Graf




$y = x + 2\sin x$

**Významné body:**

- inflexia $[-2\pi; -2\pi]$
- maximum $\left[-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right]$
- inflexia $[-\pi; -\pi]$
- minimum $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexia $[0; 0]$
- maximum $\left[\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexia $[\pi; \pi]$
- minimum $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$
- inflexia $[2\pi; 2\pi]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Absolútna hodnota – hroty, jednostranné derivácie.

Zadanie: `|x^2 - 1|` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = \langle 0;\, \infty)$

Párnosť a nepárnosť: párna

Priesečníky s osou x: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$

Rastúca: $\langle -1;\, 0\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$

Klesajúca: $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 0;\, 1\rangle$

Lokálne maximum: $[0;\, 1]$

Lokálne minimum: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$

Konvexná: $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$

Konkávna: $\langle -1;\, 1\rangle$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolútne hodnoty odstránime podľa znamienok ich argumentov na jednotlivých intervaloch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty;\, -1) \\ 1 - x^2, & x \in \langle -1;\, 1) \\ x^2 - 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

- – funkcia je párna (graf je súmerný podľa osi y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, teda $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 1$, teda $[0;\, 1]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\, -1)$ | $(-1;\, 1)$ | $(1;\, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Funkcia je kladná pre $x \in (-\infty;\, -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, \infty)$ a záporná pre $x \in \emptyset$

- Limity v krajných bodoch definičného oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v −∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

- Asymptota so smernicou v +∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

- Prvá derivácia

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Stacionárne body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- V bode $x = -1$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), graf tam má hrot.
- V bode $x = 1$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), graf tam má hrot.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(-\infty;\, -1)$ | $(-1;\, 0)$ | $(0;\, 1)$ | $(1;\, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

Funkcia je rastúca na $\langle -1;\, 0\rangle,\ \langle 1;\, \infty)$ a klesajúca na $(-\infty;\, -1\rangle,\ \langle 0;\, 1\rangle$

- V bode $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokálne maximum.
- Lokálne maximum $[0;\ 1]$, lokálne minimum $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Druhá derivácia

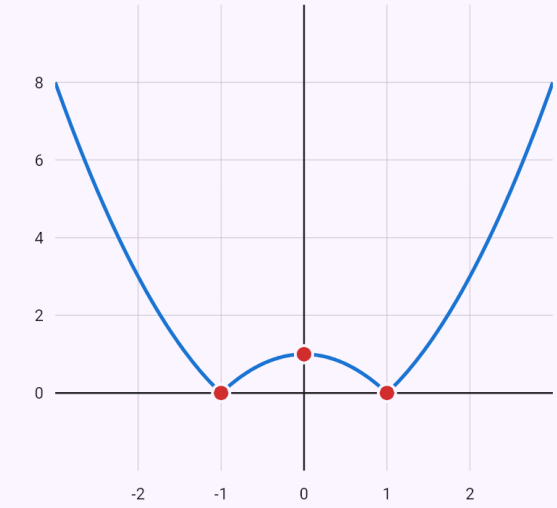
$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

- Rovnica $f''(x) = 0$ nemá riešenie.
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\ -1)$ | $(-1;\ 1)$ | $(1;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

  Funkcia je konvexná na $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$ a konkávna na $\langle -1;\ 1\rangle$
- Funkcia nemá inflexné body.
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

**Graf**




$y = |x^2 - 1|$

**Významné body:**

- minimum $[-1; 0]$
- maximum $[0; 1]$
- minimum $[1; 0]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Tretia odmocnina – zvislá dotyčnica v nule.

Zadanie: `x^(1/3)` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
Obor hodnôt: $H(f) = \mathbb{R}$
Párnosť a nepárnosť: nepárna
Priesečníky s osou x: $[0;\ 0]$
Rastúca: $\mathbb{R}$
Konvexná: $(-\infty;\ 0\rangle$
Konkávna: $\langle 0;\ \infty)$
Inflexné body: $[0;\ 0]$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – funkcia je nepárna (graf je súmerný podľa začiatku).
- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 0$, teda $[0;\ 0]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ |

  Funkcia je kladná pre $x \in (0;\ \infty)$ a záporná pre $x \in (-\infty;\ 0)$
- Limity v krajných bodoch definičného oboru
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v −∞ neexistuje:
  $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Asymptota so smernicou v +∞ neexistuje:
  $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Prvá derivácia: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnica $f'(x) = 0$ nemá riešenie – funkcia nemá stacionárne body.
- V bode $x = 0$ je derivácia nekonečná ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – graf tam má zvislú dotyčnicu.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

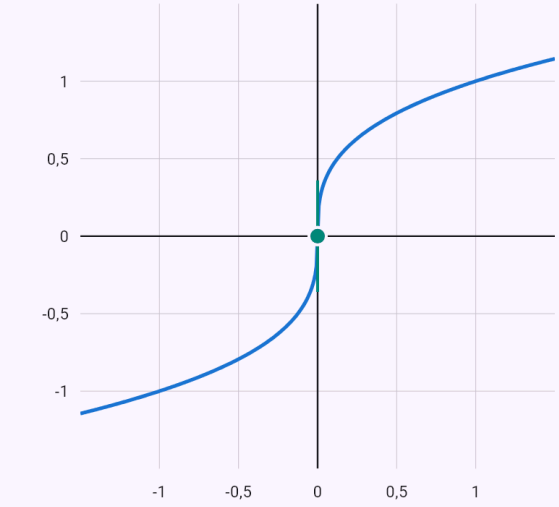
| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↗ |

  Funkcia je rastúca na $\mathbb{R}$
- Funkcia nemá lokálne extrémy.
- Druhá derivácia: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnica $f''(x) = 0$ nemá riešenie.
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\ 0)$ | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ∪ | ∩ |

  Funkcia je konvexná na $(-\infty;\ 0\rangle$ a konkávna na $\langle 0;\ \infty)$
- Inflexné body: $[0;\ 0]$
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \mathbb{R}$

## Graf




$y = x^{\frac{1}{3}}$

**Významné body:**

● inflexia $[0;0]$ ● zvislá dotyčnica $[0;0]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Vnorená absolútna hodnota – po častiach, párna funkcia.

Zadanie: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

Párnosť a nepárnosť: párna

Priesečníky s osou x: $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$

Rastúca: $\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Klesajúca: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

Lokálne maximum: $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$

Lokálne minimum: $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$

Konvexná: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Konkávna: $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolútne hodnoty odstránime podľa znamienok ich argumentov na jednotlivých intervaloch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty;\ -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in \langle -3;\ 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in \langle 0;\ 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in \langle 3;\ \infty) \end{cases}$$

- – funkcia je párna (graf je súmerný podľa osi y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Priesečníky s osou x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, teda $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$
- Priesečník s osou y: $f(0) = 3$, teda $[0;\ 3]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\ -3)$ | $(-3;\ 3)$ | $(3;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Funkcia je kladná pre $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ \infty)$ a záporná pre $x \in \emptyset$

- Limity v krajných bodoch definičného oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v −∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

- Asymptota so smernicou v +∞ neexistuje:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

- Prvá derivácia

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+$$

- Stacionárne body: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- V bode $x = -3$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), graf tam má hrot.
- V bode $x = 0$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), graf tam má hrot.
- V bode $x = 3$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), graf tam má hrot.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(-\infty;\ -3)$ | $(-3;\ -1)$ | $(-1;\ 0)$ | $(0;\ 1)$ | $(1;\ 3)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ |

Funkcia je rastúca na a klesajúca na

$\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

$(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

- V bode $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – lokálne maximum.
- V bode $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – lokálne maximum.
- Lokálne maximum $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$, lokálne minimum $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$
- Druhá derivácia

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

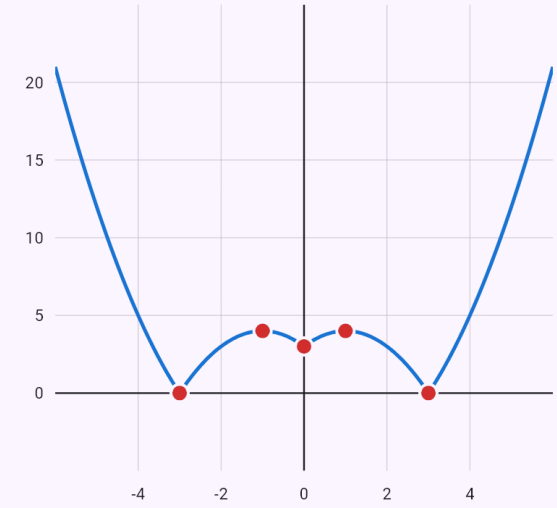
- Rovnica $f''(x) = 0$ nemá riešenie.
- Znamienko druhej derivácie – kde je kladná, je funkcia konvexná (prehnutá nahor), kde je záporná, konkávna (prehnutá nadol):

| | $(-\infty;\ -3)$ | $(-3;\ 0)$ | $(0;\ 3)$ | $(3;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cap$ | $\cup$ |

Funkcia je konvexná na $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$ a konkávna na $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$

- Funkcia nemá inflexné body.
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \langle 0;\ \infty)$

**Graf**




$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

**Významné body:**

- minimum $[-3; 0]$
- maximum $[-1; 4]$
- minimum $[0; 3]$
- maximum $[1; 4]$
- minimum $[3; 0]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

# Súčet absolútnych hodnôt – konštantný úsek a dve šikmé asymptoty.

Zadanie: `|x - 2| + |x + 3|` Priebeh funkcie

## Výsledok

Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnôt: $H(f) = \langle 5;\, \infty)$

Párnosť a nepárnosť: ani párna, ani nepárna

Rastúca: $\langle 2;\, \infty)$

Klesajúca: $(-\infty;\, -3\rangle$

Konštantná: $\langle -3;\, 2\rangle$

Lokálne minimum: $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\, 2\rangle$

Asymptoty: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

## Postup

- Definičný obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Absolútne hodnoty odstránime podľa znamienok ich argumentov na jednotlivých intervaloch

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -3) \\ 5, & x \in \langle -3;\, 2) \\ 2x + 1, & x \in \langle 2;\, \infty) \end{cases}$$

- – to nie je f(x) ani -f(x), funkcia nie je párna ani nepárna.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- Rovnica $f(x) = 0$ nemá riešenie – graf os x nepretína.
- Priesečník s osou y: $f(0) = 5$, teda $[0;\ 5]$
- Znamienko funkcie na intervaloch medzi nulovými bodmi a bodmi mimo definičného oboru:

| | $(-\infty;\, \infty)$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $+$ |

Funkcia je kladná pre $x \in \mathbb{R}$ a záporná pre $x \in \emptyset$

- Limity v krajných bodoch definičného oboru

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Zvislé asymptoty funkcia nemá.
- Asymptota so smernicou v -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – priamka $y = -2x - 1$
- Asymptota so smernicou v +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – priamka $y = 2x + 1$
- Prvá derivácia

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

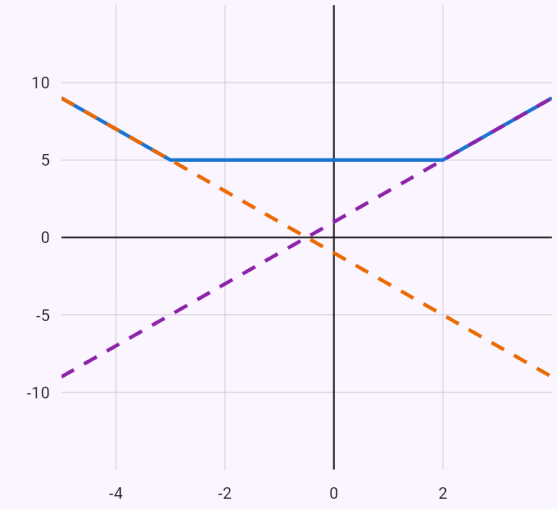
- Rovnica $f'(x) = 0$ nemá riešenie – funkcia nemá stacionárne body.
- V bode $x = -3$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), graf tam má hrot.
- V bode $x = 2$ derivácia neexistuje – jednostranné derivácie sú rôzne ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), graf tam má hrot.
- Znamienko prvej derivácie – kde je kladná, funkcia rastie, kde je záporná, klesá:

| | $(-\infty;\, -3)$ | $(-3;\, 2)$ | $(2;\, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | → | ↗ |

Funkcia je rastúca na $\langle 2;\, \infty)$ a klesajúca na $(-\infty;\, -3\rangle$. Na $\langle -3;\, 2\rangle$ je konštantná (f' = 0).

- Lokálne minimum $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\, 2\rangle$, maximum funkcia nemá.
- Druhá derivácia: $f''(x) = 0$
- Druhá derivácia je nulová – graf je časť priamky, funkcia nie je konvexná ani konkávna.
- Obor hodnôt – z monotónnosti, extrémov a limít: $H(f) = \langle 5;\, \infty)$

## Graf




$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

## Absolútne extrémy na intervale – stacionárne body a krajné body.

Zadanie: `extrémy x^3 - 3x na ⟨-2; 3⟩`

**Výsledok**

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

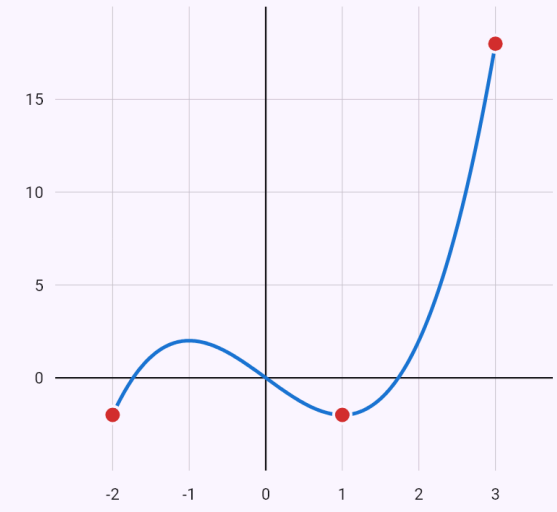
**Postup**

- Derivácia funkcie: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Stacionárne body ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; všetky ležia v intervale $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Spojitá funkcia nadobúda na uzavretom intervale najväčšiu aj najmenšiu hodnotu (Weierstrassova veta) – v stacionárnom bode, v bode bez derivácie alebo v krajnom bode. Porovnáme funkčné hodnoty

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $2$ | $-2$ | $18$ |

- Najväčšia hodnota na intervale $\langle -2;\ 3 \rangle$ je $f(3) = 18$, najmenšia $f(-2) = f(1) = -2$

**Graf**




$y = x^3 - 3x$

**Významné body:**

- maximum $[3; 18]$
- minimum $[-2; -2]$
- minimum $[1; -2]$

Načerveno lokálne extrémy, nafialovo inflexné body, prázdne koliesko – bod, v ktorom funkcia nie je definovaná; čiarkovane asymptoty.

## Inverzná funkcia lineárnej lomenej funkcie so skúškou.

Zadanie: `inverzní funkce f(x) = (2x+1)/(x-3)`

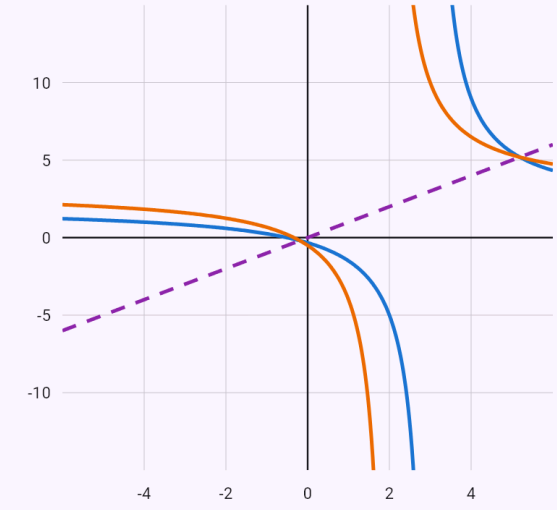
**Výsledok**

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

**Postup**

- Funkcia $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, podmienky definičného oboru: $x - 3 \neq 0$
- Rovnicu $y = f(x)$ vyriešime vzhľadom na $x$: $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$
- Vymeníme premenné $x$ a $y$: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Definičný obor inverznej funkcie je obor hodnôt $f$: $x - 2 \neq 0$
- Skúška zložením: $f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

**Graf**




$y = \frac{2x+1}{x-3}$

$f^{-1}$

$y = x$

Graf inverznej funkcie je súmerný s grafom f podľa priamky y = x.

## Vrchol paraboly doplnením na štvorec.

Zadanie: `vrchol paraboly y = x^2 - 4x + 7`

**Výsledok**

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

**Postup**

- Doplníme na štvorec: $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Vrchol $V = [2;\ 3]$, os paraboly $x = 2$; parabola je otvorená nahor, obor hodnôt $H(f) = \langle 3; \infty)$
- Graf vznikne posunutím grafu $y = x^2$ o vektor $(2;\ 3)$

## Graf sínusoidy stlačením, posunutím a natiahnutím.

Zadanie: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

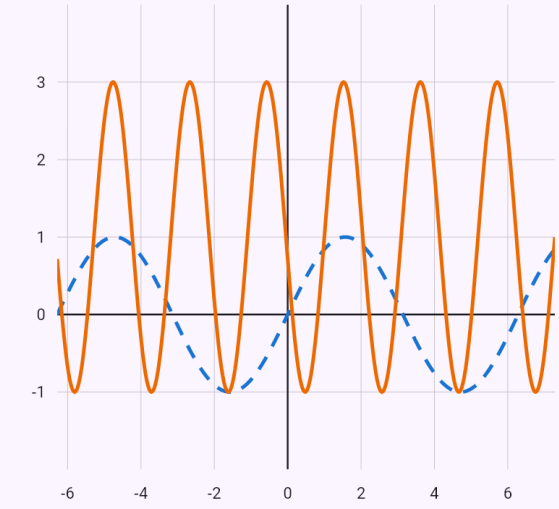
**Výsledok**

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

**Postup**

- Vyjdeme z grafu základnej funkcie $y = \sin x$
- Graf stlačíme v smere osi x 3-krát (k osi y): $y = \sin(3x)$
- Graf posunieme o $1$ doprava v smere osi x: $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Graf roztiahneme v smere osi y 2-krát: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Graf posunieme o $1$ nahor v smere osi y: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

**Graf**




Čiarkovane graf základnej funkcie, plnou čiarou výsledný graf.

### Odmocnina posunutá a preklopená podľa osi x.

Zadanie: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

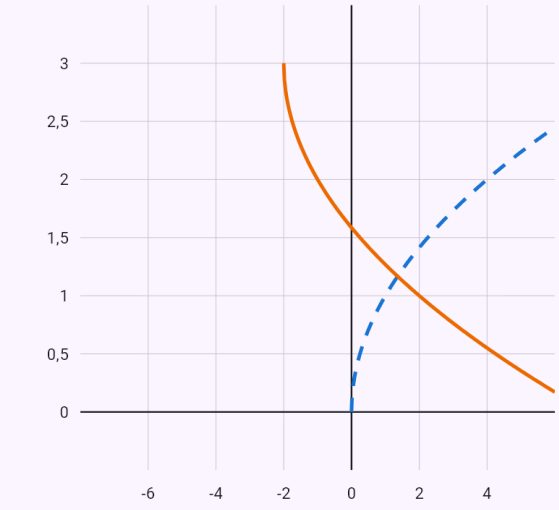
**Výsledok**

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

**Postup**

- Vyjdeme z grafu základnej funkcie $y = \sqrt{x}$
- Graf posunieme o $2$ doľava v smere osi x: $y = \sqrt{x+2}$
- Graf preklopíme podľa osi x: $y = -\sqrt{x+2}$
- Graf posunieme o $3$ nahor v smere osi y: $y = -\sqrt{x+2} + 3$

**Graf**




$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x+2} + 3$

Čiarkovane graf základnej funkcie, plnou čiarou výsledný graf.

### Zložená funkcia f(g(x)).

Zadanie: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

**Výsledok**

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

**Postup**

- Do vonkajšej funkcie $f$ dosadíme za $x$ vnútornú funkciu $g$: $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

## Známe obmedzenia

- Funkcia, ktorá nemá ani periodickú deriváciu (x·sin x), sa vyšetrí len numericky na intervale ⟨−2π; 2π⟩ a bez periódy; cyklometrické funkcie (arcsin, arctg) zatiaľ nevyšetríme.
- Absolútne extrémy len na uzavretom intervale a pri spojitej funkcii; inverzná funkcia len tam, kde ju možno vyjadriť vzorcom – pri funkcii, ktorá nie je prostá (x²), inverziu na časti definičného oboru zatiaľ nehľadá.

# 28. Funkcie viacerých premenných

Parciálne derivácie (prvé aj druhé, zmiešané) a gradient funkcie dvoch alebo troch premenných – pri derivovaní podľa jednej premennej berie ostatné ako konštanty.

Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných: stacionárne body zo sústavy f_x = 0, f_y = 0 a o každom rozhodne determinant Hessovej matice D = f_xx·f_yy − f_xy² (minimum, maximum, sedlo). Viazané extrémy s jednou väzbou („extrémy xy, x + y = 1“) Lagrangeovou metódou a ohraničeným Hessiánom.

Derivácia v smere (gradient krát jednotkový vektor), totálny diferenciál s približnou hodnotou a dotyková rovina plochy. Dvojný integrál sa zadáva postupnými hranicami alebo oblasťou z nerovníc; aplikácia oblasť rozdelí na normálne časti, ukáže vnútorný aj vonkajší integrál a nakreslí oblasť; prepínač 3D ukáže plochu integrandu nad ňou. Čipy pod výsledkom menia poradie integrácie a prepínajú na polárne súradnice.

Vektorová analýza: divergencia, rotácia (pri rovinnom poli jediné číslo ∂Q/∂x − ∂P/∂y), Laplaceov operátor a potenciál konzervatívneho poľa – aplikácia najprv overí nulovú rotáciu, potom φ nájde postupnou integráciou zložiek a urobí skúšku ∇φ = F. Pole sa zadáva ako vektor (P; Q; R) alebo (P; Q), aj s jednotkovými vektormi i, j, k alebo pomenované „F = …“ na zvláštnom riadku. Pri rovinnom poli graf ukáže šípky poľa a vrstevnice potenciálu. Čipy pod výsledkom prepínajú medzi divergenciou, rotáciou a potenciálom toho istého poľa.

Krivkové integrály: 1. druhu ∫_C f ds (dĺžka krivky, hmotnosť drôtu) a 2. druhu ∫_C F·dr (práca sily, cirkulácia ∮ po uzavretej krivke). Krivka sa zadá parametrizáciou r(t) alebo predvoľbou – úsečka, kružnica, graf y = f(x), lomená čiara; v postupe je dotykový vektor, dosadenie do poľa a integrál podľa t. Pri konzervatívnom poli aplikácia výsledok overí potenciálom φ(B) − φ(A) (nezávislosť od cesty), pri uzavretej rovinnej krivke (kružnica, elipsa, konvexný mnohouholník) Greenovou vetou – vypočíta aj dvojný integrál cez oblasť vnútri. Čipy pod výsledkom prepínajú, ktorý spôsob je hlavný. Formulár „Krivkový integrál“ (sekcia „Aplikácie“, odbor Viacrozmerná analýza) ponúka predvoľby krivky; graf ukáže krivku s orientáciou nad šípkami poľa a oblasťou z Greenovej vety, priestorovú krivku v 3D, otočnú prstom.

Trojné integrály: postupnými hranicami, cez teleso z nerovníc (∭_V, aj z fotky) alebo formulárom „Trojný integrál“ (sekcia „Aplikácie“, odbor Viacrozmerná analýza) s predvoľbami kváder, guľa, valec, kužeľ, teleso medzi grafmi a nerovnice. Aplikácia teleso opíše ako normálnu oblasť – najvnútornejšia premenná medzi dvoma plochami nad priemetom – a vypočíta tri integrály po sebe (Fubiniho veta). V cylindrických a sférických súradniciach ukáže dosadenie s Jakobiánom (r, ρ² sin θ) a hranice v nových premenných; keď karteziánsky presný výsledok nevyjde, prejde na ne sama a pri guli, valci alebo x² + y² v zadaní ich čipom ponúkne. Formulár vypočíta aj objem, hmotnosť s hustotou ρ, ťažisko a moment zotrvačnosti vzhľadom na os. Teleso ukáže otočný 3D graf.

Písmená okrem x, y, z (polomer r, výška h, hrany a, b, c) sú kladné parametre: výsledok je vzorec, napríklad V = 4/3 πr³ pre guľu ball(r) – cylindrická súradnica sa popri polomere r píše ϱ – alebo V = abc pre kváder. Aplikácia vzorec overí numericky pre niekoľko hodnôt parametrov; 3D obrázok telesa kreslí pre hodnotu 1.

Plošné integrály: 1. druhu ∬_S f dS (obsah plochy, hmotnosť škrupiny) a 2. druhu – tok ∬_S F·n dS. Plocha sa zadá predvoľbou – graf z = g(x, y) nad oblasťou D, sféra, polsféra, valec, kužeľ (celý povrch s podstavami, alebo len plášť) – alebo parametrizáciou r(u, v). V postupe sú dotykové vektory r_u, r_v, normálový vektor r_u × r_v s orientáciou (pri uzavretej ploche von, pri grafe nahor, inak podľa parametrizácie; zápisom outward, inward, up, down), plošný element a dvojný integrál cez parametre; uzavretú plochu sčíta po častiach. Tok uzavretou plochou aplikácia overí Gaussovou vetou (trojný integrál divergencie), tok rotácie Stokesovou vetou – krivkovým integrálom po hranici; čipy pod výsledkom prepínajú, ktorý spôsob je hlavný. Formulár „Plošný integrál“ (sekcia „Aplikácie“, odbor Viacrozmerná analýza) ponúka predvoľby plochy; otočný 3D graf ukáže plochu s normálami, šípkami poľa a hranicou.

Drôt a škrupina: formuláre krivkového a plošného integrálu (voľba „Čo vypočítať“) aj zápis quantity=mass / centroid / inertia vypočítajú hmotnosť drôtu alebo škrupiny s hustotou f (prázdna = 1), ťažisko a moment zotrvačnosti vzhľadom na os (axis=x, y, z). Planimeter lineint(area; C) vypočíta obsah oblasti vnútri uzavretej rovinnej krivky ako ½∮ x dy − y dx a overí ho Greenovou vetou.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `parciální derivace x^2 y + y^3` | Všetky prvé parciálne derivácie (s „druhé“ aj druhé). |
| `∂/∂x (x^2 y + y^3)` | Jedna parciálna derivácia (aj \frac{\partial}{\partial x}). |
| `gradient x^2 y + y^3` | Gradient. |
| `extrémy x^2 + y^2 - 2x + 4y` | Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných. |
| `extrémy xy, x + y = 1` | Viazané extrémy – funkcia a za čiarkou väzba. |
| `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))` | Derivácia v smere: funkcia, bod, smer (aj slovami po česky „derivace ve směru“). |
| `totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)` | Totálny diferenciál; bod a prírastky h sú nepovinné (aj slovami po česky „totální diferenciál“). |

| | |
|---|---|
| `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])` | Dotyková rovina v bode, plocha z = f(x, y) alebo F(x, y, z) = 0 (aj slovami po česky „tečná rovina“). |
| `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx` | Dvojný integrál postupnými hranicami (aj \int_0^1 dx \int_0^x ... dy). |
| `iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)` | Dvojný integrál cez oblasť z nerovníc (aj \iint_D ..., D: ...); môžete pridať order=dxdy alebo polar. |
| `div(x y; y z; z x)` | Divergencia poľa (aj ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, slovom „divergence“). |
| `∇×(y z; x z; x y)` | Rotácia (aj rot, curl, \nabla \times, slovom „rotace“); pri poli (P; Q) jediné číslo. |
| `Δ(x^2 y + y^3)` | Laplaceov operátor funkcie dvoch alebo troch premenných (aj laplace(...), ∇², \Delta). |
| `potenciál (2x + y; x + 2y)` | Potenciál konzervatívneho poľa (aj potential(...)); pole môže byť pomenované: „div F, F = (y; x; 0)“. |
| `lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))` | Krivkový integrál – pole (P; Q) alebo funkcia f, potom krivka: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); aj cw (v smere hodinových ručičiek), method=green / method=potential (aj slovami po česky „křivkový integrál … po …“). Za krivkou môže byť quantity=mass / centroid / inertia (s axis=…); namiesto funkcie area vypočíta obsah vnútri uzavretej krivky. |
| `lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)` | Hmotnosť drôtu s hustotou f, quantity=centroid jeho ťažisko, quantity=inertia moment zotrvačnosti (axis=x, y, z). |
| `lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))` | Planimeter – obsah oblasti vnútri uzavretej rovinnej krivky z integrálu po hranici (Greenova veta). |
| `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1` | Z fotky ∮_C alebo ∫_C s P dx + Q dy, F·dr alebo f ds; krivka za čiarkou alebo na ďalšom riadku (C: …). |
| `\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2` | Integrál 1. druhu – krivka parametricky s rozsahom parametra (aj t ∈ [a, b]). |

| | |
|---|---|
| `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)` | Trojný integrál – funkcia, potom teleso nerovnicami alebo predvoľbou ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); súradnice cart, cyl, sph, poradie order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (aj axis=x). Slovami (zatiaľ po česky) „trojný integrál z přes V: …“, „objem tělesa …“, „hmotnost tělesa … s hustotou …“, „těžiště tělesa …“, „moment setrvačnosti tělesa … vzhledem k ose z“. |
| `\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0` | Z fotky ∭ (\iiint_V) s dV alebo dx dy dz; teleso za čiarkou (V: …) alebo pod integrálom. |
| `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx` | Postupnými hranicami – tri integrály za sebou, diferenciály na konci alebo hneď za svojím integrálom. |
| `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))` | Plošný integrál – funkcia f, pole (P; Q; R) alebo curl(P; Q; R), potom plocha: graph(z = …; nerovnice D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (len plášť), closed (polsféra s podstavou), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. Slovami (zatiaľ po česky) „plošný integrál … přes …“, „tok pole … plochou …“. Pri funkcii f aj quantity=mass / centroid / inertia (s axis=…). |
| `\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1` | Z fotky ∬_S alebo ∯_S s f dS, F·dS alebo F·n dS; plocha za čiarkou alebo na ďalšom riadku: S: x² + y² + z² = R² (so z ≥ 0 polsféra), x² + y² = R² s hranicami z (plášť valca), z = g(x, y) s nerovnicami, r(u, v) s rozsahmi parametrov. |
| `\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0` | Tok rotácie (∇ × F, rot F, curl F) – pole pomenované zvlášť; kontrola Stokesovou vetou. |
| `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)` | Hmotnosť, ťažisko alebo moment zotrvačnosti škrupiny s plošnou hustotou f. |

# Ukážky

## Druhé parciálne derivácie, aj zmiešaná.

Zadanie: `druhé parciální derivace x^2 y + y^3`

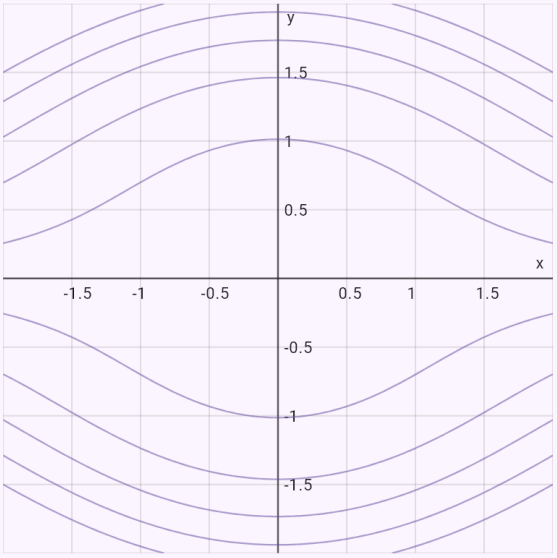
**Výsledok**

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

**Postup**

- Parciálna derivácia podľa $x$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- Parciálna derivácia podľa $y$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- Parciálna derivácia podľa $xx$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- Parciálna derivácia podľa $xy$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- Parciálna derivácia podľa $yy$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

**Graf**




Vrstevnice funkcie f.

## Lokálne extrémy – sedlový bod a minimum.

Zadanie: `extrémy x^3 - 3xy + y^3`

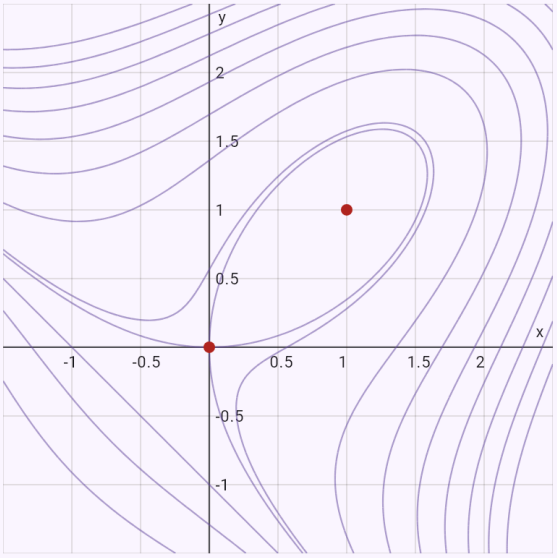
**Výsledok**

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

**Postup**

- Parciálna derivácia podľa $x$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- Parciálna derivácia podľa $y$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Stacionárne body $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ sú riešením sústavy, v ktorej sú obe parciálne derivácie nulové
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Druhé parciálne derivácie $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ a determinant Hessovej matice
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- V bode $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – sedlový bod, extrém tam nie je $(f(0;\ 0) = 0)$.
- V bode $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ a $f_{xx} = 6 > 0$ – lokálne minimum $f(1;\ 1) = -1$

**Graf**




Vrstevnice funkcie f.

## Viazaný extrém Lagrangeovou metódou.

Zadanie: `extrémy xy, x + y = 1`

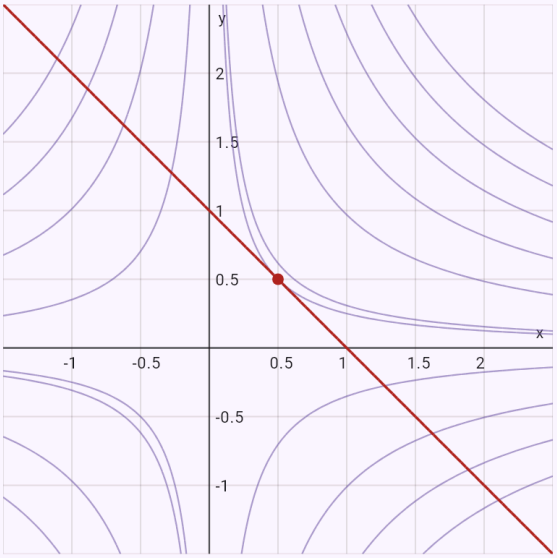
**Výsledok**

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

**Postup**

- Lagrangeova funkcia s multiplikátorom $\lambda$: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Jej parciálne derivácie sú nulové a platí väzba
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Body podozrivé z viazaného extrému (riešenia sústavy): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- V bode $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ $(\lambda = \frac{1}{2})$ vychádza ohraničený Hessián kladný – viazané lokálne maximum $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

**Graf**




Vrstevnice funkcie f.

## Derivácia v smere a najväčší rast.

Zadanie: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

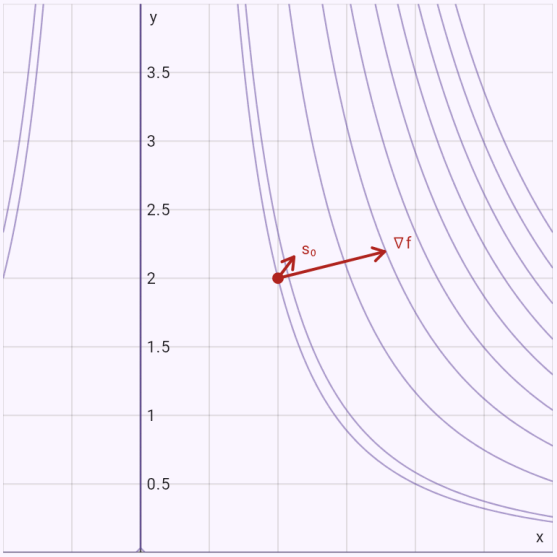
**Výsledok**

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

**Postup**

- Parciálna derivácia podľa $x$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_x = 2xy$
- Parciálna derivácia podľa $y$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_y = x^2$
- Smer prevedieme na jednotkový vektor: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Gradient v bode $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- Derivácia v smere je skalárny súčin gradientu a jednotkového vektora
  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- Najväčší rast je v smere gradientu a má veľkosť $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

**Graf**




Vrstevnice funkcie f. Šípka ∇f mieri v smere najväčšieho rastu.

## Dotyková rovina paraboloidu.

Zadanie: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

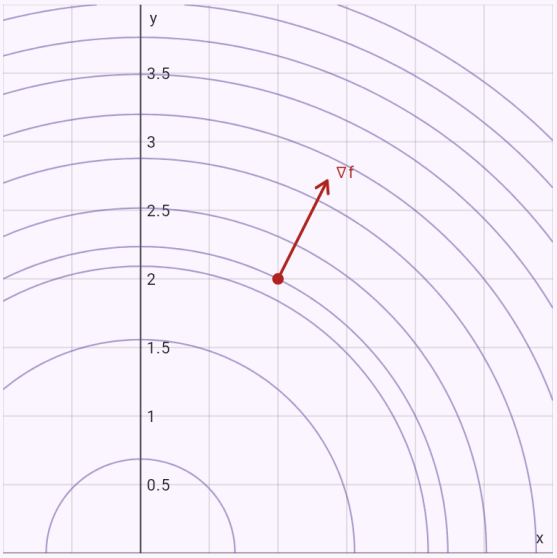
### Výsledok

$$z = 2x + 4y - 5$$

### Postup

- Parciálna derivácia podľa $x$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_x = 2x$
- Parciálna derivácia podľa $y$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $f_y = 2y$
- Dopočítame tretiu súradnicu bodu dotyku: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Dosadíme do rovnice dotykovej roviny z − $z_0$ = f_x·(x − $x_0$) + f_y·(y − $y_0$): $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Normálový vektor roviny: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

### Graf




Vrstevnice funkcie f. Šípka ∇f mieri v smere najväčšieho rastu.

## Dvojný integrál cez trojuholník.

Zadanie: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

### Výsledok

$$\frac{1}{8}$$

Poradie integrácie:

✓ dy dx | dx dy

Súradnice:

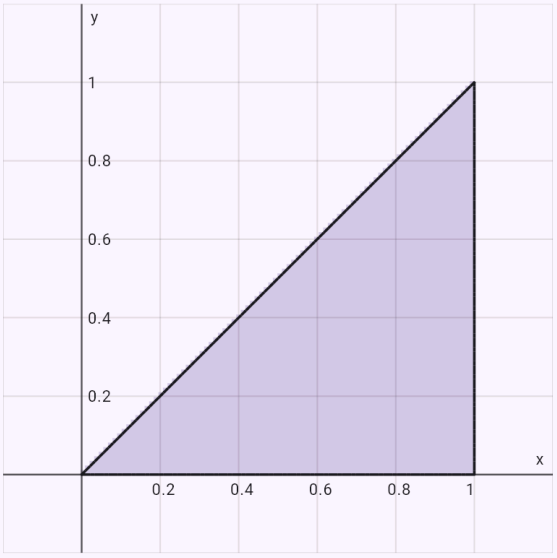
✓ Karteziánske | Polárne

### Postup

- Oblasť opíšeme ako normálnu oblasť: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný: $\int_0^1 \left( \int_0^x xy\, dy \right) dx$
- Vnútorný integrál podľa $y$ (druhá premenná je konštanta): $\int_0^x xy\, dy = \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- Vonkajší integrál podľa $x$: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

### Graf

✓ 2D | 3D




Oblasť integrácie.

## Vnútorný integrál nie je elementárny – aplikácia sama zamení poradie.

Zadanie: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

### Výsledok

$$\frac{e-1}{2}$$

Poradie integrácie:

✓ dx dy | dy dx

Súradnice:

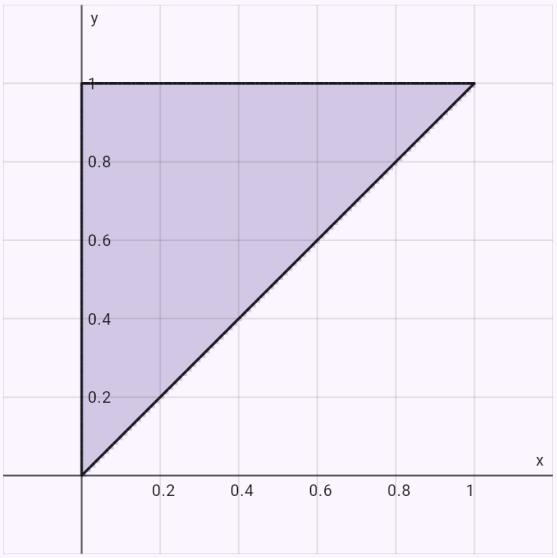
✓ Karteziánske | Polárne

### Postup

- Vnútorný integrál podľa $y$ nemá elementárnu primitívnu funkciu, preto poradie integrácie vymeníme.
- Oblasť opíšeme ako normálnu oblasť: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný: $\int_0^1 \left( \int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- Vnútorný integrál podľa $x$ (druhá premenná je konštanta): $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[ x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- Vonkajší integrál podľa $y$: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[ \frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

### Graf

✓ 2D | 3D




Oblasť integrácie.

## Štvrťkruh v polárnych súradniciach.

Zadanie: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

**Výsledok**

$$\frac{\pi}{8}$$

Súradnice:

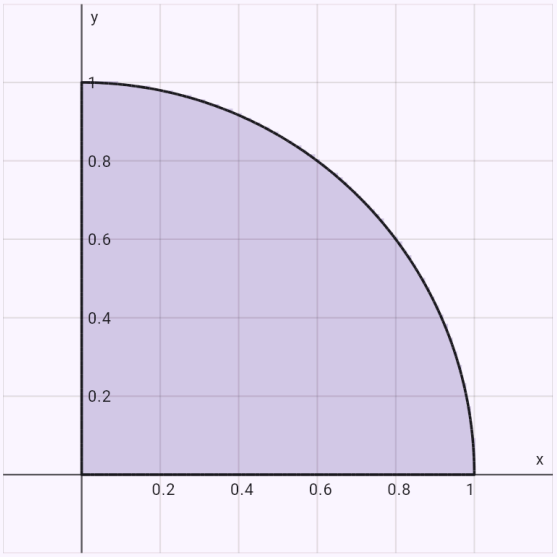
Karteziánske | ✓ Polárne

**Postup**

- Polárne súradnice: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, kde r je jakobián transformácie. Integrand: $f \cdot r = r^3$
- Oblasť v polárnych súradniciach: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- Vnútorný integrál podľa $r$ (druhá premenná je konštanta): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- Vonkajší integrál podľa $\varphi$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

**Graf**

✓ 2D | 3D




Oblasť integrácie.

## Divergencia priestorového poľa ako súčet troch parciálnych derivácií.

Zadanie: `div(x y; y z; z x)`

**Výsledok**

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Pre toto pole vypočítať:

✓ divergencia | rotácia | potenciál

**Postup**

- Vektorové pole a jeho zložky: $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- Parciálna derivácia podľa $x$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $\frac{\partial P}{\partial x} = y$
- Parciálna derivácia podľa $y$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$
- Parciálna derivácia podľa $z$ – ostatné premenné berieme ako konštanty: $\frac{\partial R}{\partial z} = x$
- Divergencia je súčet parciálnych derivácií zložiek, každej podľa „jej“ premennej $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

## Rotácia rovinného víru – šípky poľa obiehajú okolo začiatku.

Zadanie: `rot(-y; x)`

### Výsledok

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

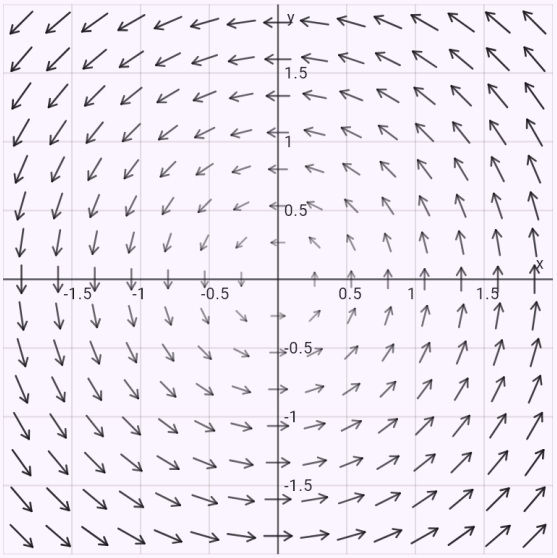
Pre toto pole vypočítať:

divergencia | ✓ rotácia | potenciál

### Postup

- Vektorové pole a jeho zložky:
  $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Pri rovinnom poli je rotácia jediné číslo – zložka z, teda ∂Q/∂x − ∂P/∂y
  $$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

### Graf




Šípky ukazujú smer a veľkosť poľa (dlhšie a tmavšie = silnejšie).

## Harmonická funkcia – Laplaceov operátor je nulový.

Zadanie: `Δ(x^2 - y^2)`

### Výsledok

$$\Delta f = 0$$

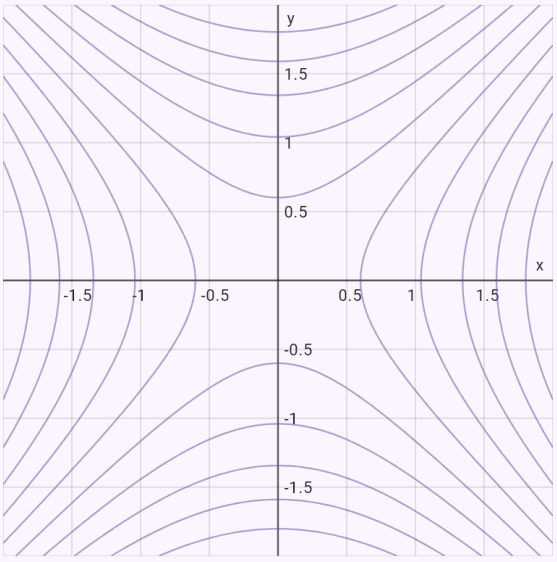
Pre túto funkciu vypočítať:

✓ Laplaceov operátor Δf | gradient ∇f

### Postup

- Prvá a druhá parciálna derivácia podľa $x$:
  $$f_x = 2x, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$
- Prvá a druhá parciálna derivácia podľa $y$:
  $$f_y = -2y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$
- Laplaceov operátor je súčet druhých parciálnych derivácií: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – funkcia je harmonická.

### Graf




Vrstevnice funkcie f.

## Potenciál školskou metódou: integrácia P podľa x, porovnanie s Q, skúška; graf s ekvipotenciálami.

Zadanie: `potential(2x y; x^2)`

### Výsledok

$$\varphi = x^2 y + C$$

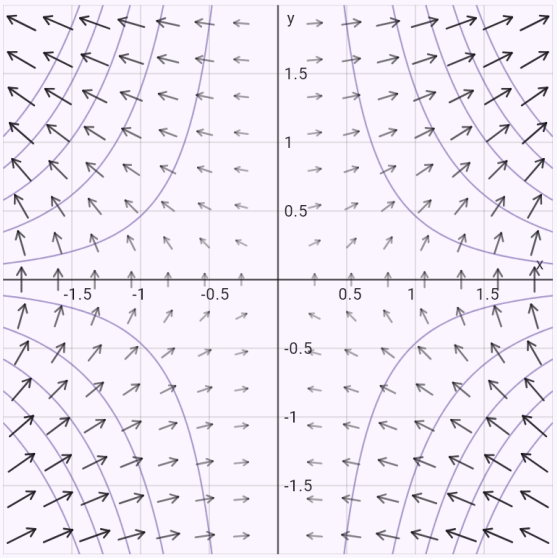
Pre toto pole vypočítať:

divergencia | rotácia | ✓ potenciál

### Postup

- Vektorové pole a jeho zložky:
  $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Rotácia je nulová (v rovine ∂Q/∂x = ∂P/∂y), pole je konzervatívne a potenciál hľadať má zmysel:
  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Hľadáme φ, pre ktoré ∇φ = F. Integrujeme P podľa x, integračná „konštanta“ smie závisieť od ostatných premenných: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Derivujeme φ podľa $y$ a porovnáme so zložkou $Q$ – zostane derivácia „konštanty“
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- „Konštantu“ zintegrujeme podľa $y$; nová smie závisieť len od zvyšných premenných, nakoniec je to číslo C:
  $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Skúška – gradient potenciálu je zadané pole:
  $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

### Graf




Šípky ukazujú smer a veľkosť poľa (dlhšie a tmavšie = silnejšie). Vrstevnice potenciálu φ (ekvipotenciály) – pole je na ne všade kolmé.

# Práca konzervatívneho poľa – parametrizáciou a kontrola potenciálom φ = x²y.

Zadanie: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

### Výsledok

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Vypočítať:

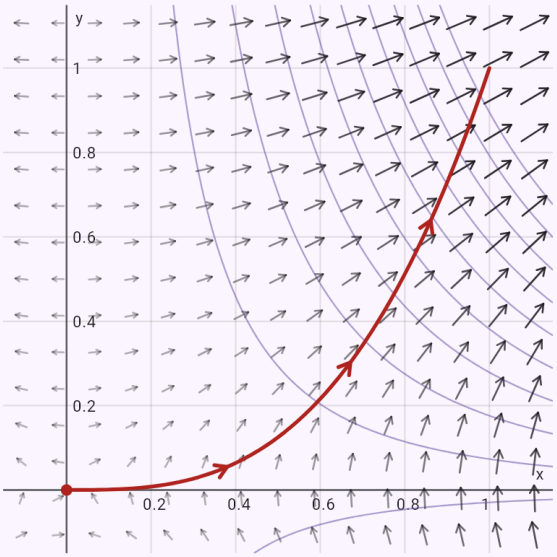
- ✓ parametrizáciou
- potenciálom

Upraviť vo formulári

### Postup

- Krivkový integrál 2. druhu vektorového poľa po orientovanej krivke C (napríklad práca sily po dráhe):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametrizácia krivky: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie:
  $\vec{r}\,'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a skalárne vynásobíme dotyčnicovým vektorom
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra:
  $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Kontrola: pole je konzervatívne, má potenciál φ a integrál nezávisí od cesty – stačí rozdiel φ(B) − φ(A)
  $\varphi = x^2y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

### Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod). Šípky ukazujú smer a veľkosť poľa (dlhšie a tmavšie = silnejšie). Vrstevnice potenciálu φ (ekvipotenciály) – pole je na ne všade kolmé.

# Cirkulácia po jednotkovej kružnici z fotky, kontrola Greenovou vetou v polárnych súradniciach.

Zadanie: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

## Výsledok

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Vypočítať:

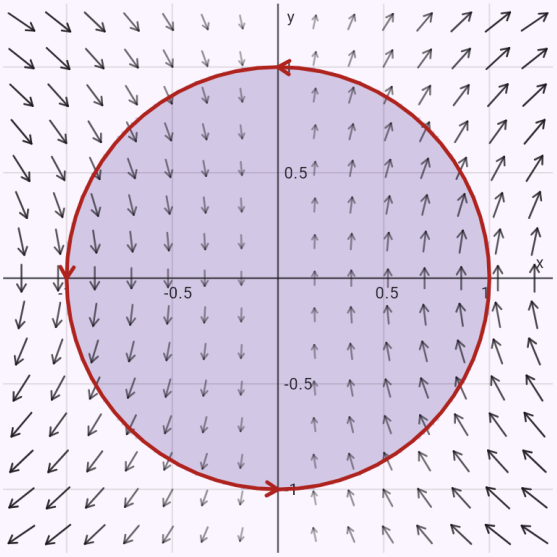
parametrizáciou | Greenovou vetou

Upraviť vo formulári

## Postup

- Krivka je uzavretá – integrál 2. druhu po nej je cirkulácia poľa: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- Kružnica so stredom S a polomerom r obehnutá raz (parametrizácia uhlom t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie:
  $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a skalárne vynásobíme dotyčnicovým vektorom
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t$
- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra:
  $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Kontrola Greenovou vetou: krivka je kladne orientovaná (proti smeru hodinových ručičiek), integrál po nej sa rovná dvojnému integrálu cez oblasť D vnútri
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- Oblasť D vnútri krivky – cez ňu vypočítame dvojný integrál: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Polárne súradnice: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, kde r je jakobián transformácie. Integrand:
  $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- Oblasť v polárnych súradniciach:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný
  $\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- Vnútorný integrál podľa $r$ (druhá premenná je konštanta)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -$
- Vonkajší integrál podľa $\varphi$
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Obe strany Greenovej vety vyšli rovnako: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

## Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod). Šípky ukazujú smer a veľkosť poľa (dlhšie a tmavšie = silnejšie). Vyfarbená je oblasť D vnútri krivky z Greenovej vety.

# Dĺžka paraboly – integrál 1. druhu z 1.

Zadanie: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

## Výsledok

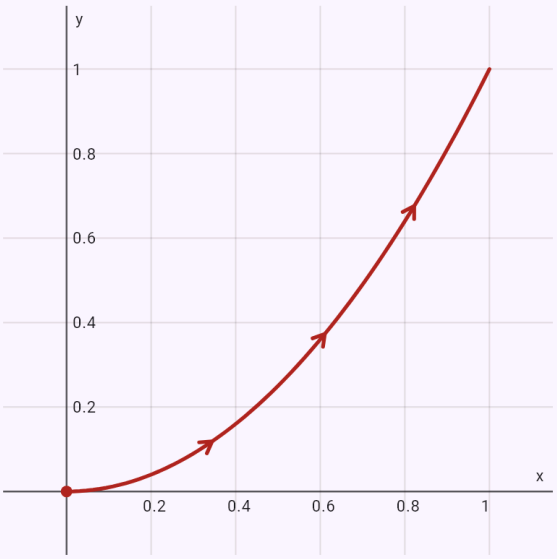
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{argsinh} 2}{4}$$

Upraviť vo formulári

## Postup

- Krivkový integrál 1. druhu funkcie f po krivke C – sčítame hodnoty f vynásobené dĺžkou malých kúskov krivky ds: $\int_C ds$
- Graf funkcie – parametrom je samo x (parametrizácia r(x) = (x; f(x))): $y = x^2$ : $\vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie: $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- Jeho veľkosť; element dĺžky oblúka je ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Dosadíme parametrizáciu do f a vynásobíme veľkosťou dotyčnicového vektora: $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra $\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{argsinh} 2}{4}$
- Integrál z 1 ds je dĺžka krivky (s hustotou f namiesto 1 by to bola hmotnosť drôtu).

## Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod).

## Skrutkovica v priestore – otočný 3D graf so šípkami poľa.

Zadanie: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

### Výsledok

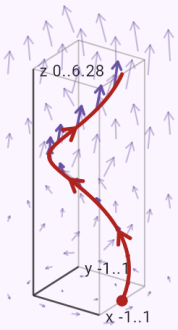
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Upraviť vo formulári

### Postup

- Krivkový integrál 2. druhu vektorového poľa po orientovanej krivke C (napríklad práca sily po dráhe):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametrizácia krivky:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a skalárne vynásobíme dotyčnicovým vektorom
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra:
  $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

### Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod). Šípky ukazujú pole, na krivke sú sýtejšie. Otáčajte ťahaním prsta.

# Ťažisko polkružnice – hmotnosť a dva statické momenty.

Zadanie: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

### Výsledok

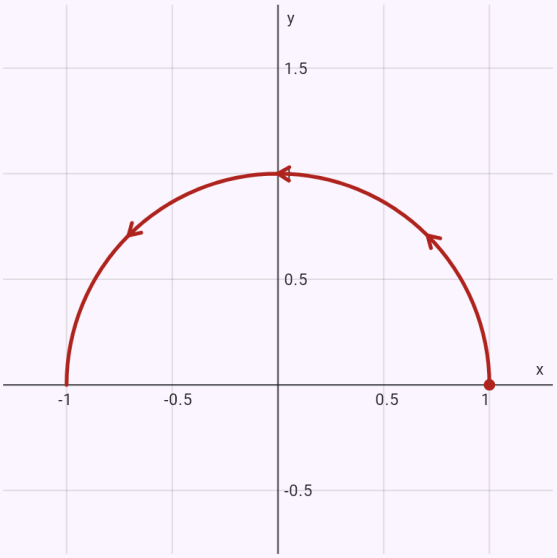
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Upraviť vo formulári

### Postup

- Krivkový integrál 1. druhu funkcie f po krivke C – sčítame hodnoty f vynásobené dĺžkou malých kúskov krivky ds: $\int_C ds$
- Ťažisko drôtu: statické momenty (integrál súradnice krát hustota) delené hmotnosťou, pre y (a z) obdobne $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametrizácia krivky: $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie: $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Jeho veľkosť; element dĺžky oblúka je ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Dosadíme parametrizáciu do f a vynásobíme veľkosťou dotyčnicového vektora: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- Statický moment pre súradnicu $x$ – rovnaký postup s integrandom $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Statický moment pre súradnicu $y$ – rovnaký postup s integrandom $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Súradnice ťažiska sú momenty delené hmotnosťou: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

### Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod).

## Obsah elipsy planimetrom: ½∮ x dy − y dx = πab.

Zadanie: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

### Výsledok

$$A = 6\pi$$

Vypočítať:

parametrizáciou | Greenovou vetou

Upraviť vo formulári

### Postup

- Krivka je uzavretá – integrál 2. druhu po nej je cirkulácia poľa: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- Obsah oblasti vnútri uzavretej krivky ako krivkový integrál po hranici (planimeter) – podľa Greenovej vety s Q_x − P_y = 1: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- Parametrizácia krivky: $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Dotyčnicový vektor – derivácia parametrizácie: $\vec{r}\,'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a skalárne vynásobíme dotyčnicovým vektorom

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \frac{3}{2}$$

- Zostáva obyčajný určitý integrál cez interval parametra: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Kontrola Greenovou vetou: krivka je kladne orientovaná (proti smeru hodinových ručičiek), integrál po nej sa rovná dvojnému integrálu cez oblasť D vnútri

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

- Oblasť D vnútri krivky – cez ňu vypočítame dvojný integrál: $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Oblasť opíšeme ako normálnu oblasť: $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný

$$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$

- Vnútorný integrál podľa $y$ (druhá premenná je konštanta)

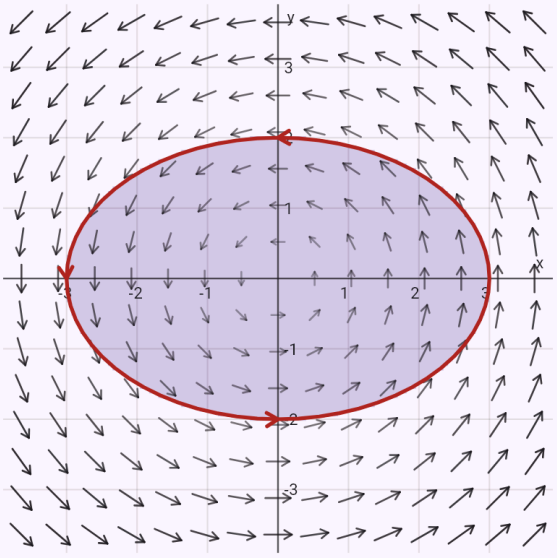
$$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$

- Vonkajší integrál podľa $x$

$$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$

- Obe strany Greenovej vety vyšli rovnako: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

### Graf




Krivka C so šípkami v smere jej orientácie (bodka = začiatočný bod). Šípky ukazujú smer a veľkosť poľa (dlhšie a tmavšie = silnejšie). Vyfarbená je oblasť D vnútri krivky z Greenovej vety.

# Horná polguľa vo sférických súradniciach – Jakobián ρ² sin θ, hranice ρ, θ, φ.

Zadanie: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

**Výsledok**

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Počítať v súradniciach:

karteziánske | cylindrické | ✓ sférické

Upraviť vo formulári

## Postup

- Trojný integrál funkcie cez teleso V: $\iiint_V z\,dV$
- Sférické súradnice – J = ρ² sin θ je jakobián transformácie (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); dosadenie a integrand

  $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$

  $f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$
- Teleso v sférických súradniciach:

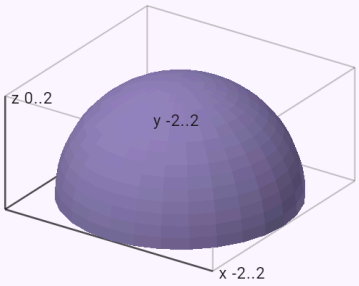
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný

  $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$
- Najvnútornejší integrál podľa $\rho$ (ostatné premenné sú konštanty)

  $\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$
- Prostredný integrál podľa $\theta$

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$
- Vonkajší integrál podľa $\varphi$: $\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

## Graf




Teleso V, cez ktoré sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

## Štvorsten postupnými hranicami – tri integrály po sebe.

Zadanie: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

**Výsledok**

$$\frac{1}{24}$$

Počítať v súradniciach:

karteziánske | cylindrické | sférické

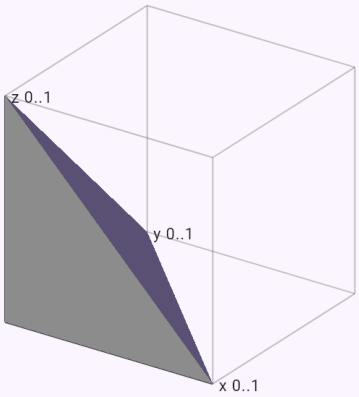
Upraviť vo formulári

**Postup**

- Trojný integrál funkcie cez teleso V: $\iiint_V x \, dV$
- Teleso opíšeme ako normálnu oblasť – $z$ leží medzi dvoma plochami nad priemetom telesa:
  $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le -x-y+1$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný:
  $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty):
  $\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x-y+1)$
- Prostredný integrál podľa $y$
  $\int_0^{1-x} (x(-x-y+1))\, dy = \left[-\frac{x(x+y-1)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} =$
- Vonkajší integrál podľa $x$

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

**Graf**




Teleso V, cez ktoré sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

## Objem kužeľa v cylindrických súradniciach.

Zadanie: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

### Výsledok

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Počítať v súradniciach:

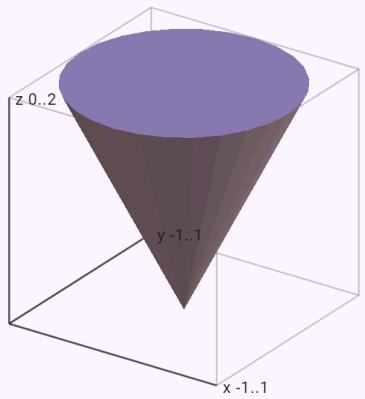
karteziánske | ✓ cylindrické

Upraviť vo formulári

### Postup

- Objem telesa je trojný integrál z jednotky: $V = \iiint_V dV$
- Cylindrické súradnice – J = r je jakobián transformácie (dV = r dr dφ dz); dosadenie a integrand
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- Teleso v cylindrických súradniciach:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný:
  $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{2r}^{2} r\,dz\,dr\,d\varphi$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty): $\int_{2r}^{2} r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- Prostredný integrál podľa $r$
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- Vonkajší integrál podľa $\varphi$
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

### Graf




Teleso V, cez ktoré sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

# Ťažisko polgule – hmotnosť a tri statické momenty.

Zadanie: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

### Výsledok

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Teleso alebo funkcia obsahuje x² + y² + z² – jednoduchšie bývajú sférické súradnice:

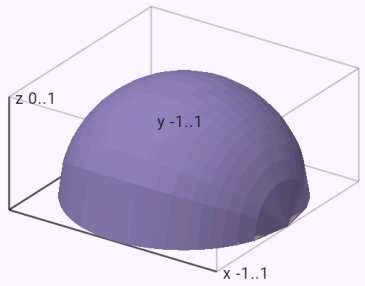
✓ karteziánske | cylindrické | sférické

Upraviť vo formulári

### Postup

- Ťažisko telesa: každá súradnica je statický moment (integrál súradnice krát hustota) delený hmotnosťou m, pre y a z obdobne: $x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$
- Teleso opíšeme ako normálnu oblasť – $z$ leží medzi dvoma plochami nad priemetom telesa
  $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný
  $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty)
  $$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- Prostredný integrál podľa $y$
  $$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\sqrt{}\right.}{2}\right.$$
- Vonkajší integrál podľa $x$
  $$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- Statický moment pre súradnicu $x$ – rovnaký postup s integrandom $x \cdot \rho$
  $$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Statický moment pre súradnicu $y$ – rovnaký postup s integrandom $y \cdot \rho$
  $$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Statický moment pre súradnicu $z$ – rovnaký postup s integrandom $z \cdot \rho$
  $$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- Súradnice ťažiska sú momenty delené hmotnosťou
  $$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
  $$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
  $$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

### Graf




Teleso V, cez ktoré sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

## Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na jeho os.

Zadanie: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

### Výsledok

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Počítať v súradniciach:

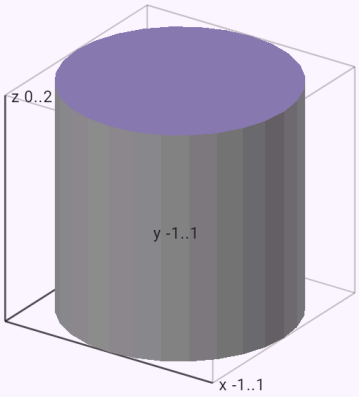
karteziánske | ✓ cylindrické

Upraviť vo formulári

### Postup

- Moment zotrvačnosti vzhľadom na os $z$ – hustota krát druhá mocnina vzdialenosti d od osi:
  $$I_z = \iiint_V d^2\,dV = \iiint_V (x^2 + y^2)\,dV$$
- Cylindrické súradnice – J = r je jakobián transformácie (dV = r dr dφ dz); dosadenie a integrand
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- Teleso v cylindrických súradniciach:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný:
  $$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{2} r^3\,dz\,dr\,d\varphi$$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty): $\int_0^2 r^3\,dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- Prostredný integrál podľa $r$: $\int_0^1 2r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$
- Vonkajší integrál podľa $\varphi$
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

### Graf




Teleso V, cez ktoré sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

# Tok von sférou – parametrizácia uhlami θ, φ a kontrola Gaussovou vetou.

Zadanie: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

### Výsledok

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 32\pi$$

Vypočítať:

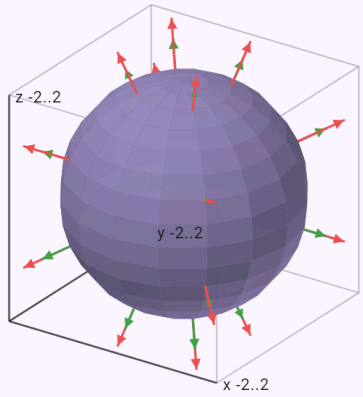
parametrizáciou | Gaussovou vetou

Upraviť vo formulári

### Postup

- Tok vektorového poľa plochou S – plošný integrál 2. druhu: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametrizácia sféry uhlami θ (od kladnej osi z) a φ (okolo osi z)
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Parciálne derivácie podľa parametrov – dotyčnicové vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Normálový vektor (vektorový súčin dotyčnicových vektorov) orientovaný von z telesa
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \mathrm{si}\right.$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a vynásobíme skalárne normálovým vektorom (F · n dS = F · N du dv):
  $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = 8\sin\theta$
- Dvojný integrál cez obdĺžnik parametrov
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\, d\theta = 32\pi$$
- Kontrola Gaussovou vetou: tok von uzavretou plochou je trojný integrál divergencie cez teleso vnútri
- Trojný integrál funkcie cez teleso V: $\iiint_V 3\, dV$
- Teleso opíšeme ako normálnu oblasť – $z$ leží medzi dvoma plochami nad priemetom telesa
  $-2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\, dz\, dy\, dx$$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty)
  $$\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\, dz = \left[3z\right]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$$
- Prostredný integrál podľa $y$
  $$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right) dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$$
- Vonkajší integrál podľa $x$
  $$\int_{-2}^{2} \left(\pi\left(12-3x^2\right)\right) dx = \left[-\pi x^3 + 12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- Gaussova veta dáva rovnakú hodnotu:
  $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 32\pi$

### Graf




Plocha S s normálami (nazeleno) a šípkami poľa (načerveno). Otáčajte ťahaním prsta.

# Obsah rotačného paraboloidu – plošný element grafu, dvojný integrál v polárnych súradniciach.

Zadanie: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

### Výsledok

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Upraviť vo formulári

### Postup

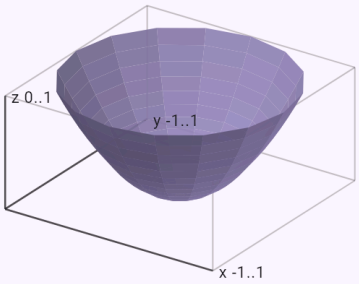
- Obsah plochy S je plošný integrál 1. druhu z jednotky:
  $\iint_S dS$
- Plocha je graf funkcie z = g(x, y) nad oblasťou D v rovine xy: $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \le 1$
- Parciálne derivácie funkcie g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- Plošný element grafu:
  $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Dosadíme parametrizáciu do f a vynásobíme plošným elementom:
  $f(x, y, g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- Plošný integrál cez graf je dvojný integrál cez jeho priemet D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Polárne súradnice: $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, kde r je jakobián transformácie. Integrand:
  $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- Oblasť v polárnych súradniciach:
  $0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako dvojnásobný:
  $\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- Vnútorný integrál podľa $r$ (druhá premenná je konštanta)

$$\int_0^1 \left( r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr = \left[ \frac{\sqrt{\left(4r^2 + 1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1 + 5\sqrt{}}{12}$$

- Vonkajší integrál podľa $\varphi$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{-1 + 5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[ \frac{\left(-1 + 5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{(-1 +}{}$$

### Graf




Plocha S, cez ktorú sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

## Tok uzavretým valcom Gaussovou vetou, kontrola po častiach – plášť a dve podstavy.

Zadanie: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

### Výsledok

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$$

Vypočítať:

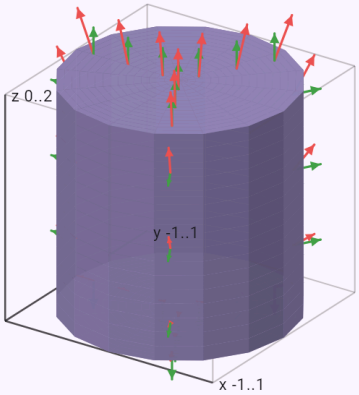
parametrizáciou | ✓ Gaussovou vetou

Upraviť vo formulári

### Postup

- Tok vektorového poľa plochou S – plošný integrál 2. druhu: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Podľa Gaussovej vety je tok uzavretou plochou von rovný trojnému integrálu divergencie cez teleso V vnútri
- Trojný integrál funkcie cez teleso V: $\iiint_V 3\, dV$
- Teleso opíšeme ako normálnu oblasť – $z$ leží medzi dvoma plochami nad priemetom telesa: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Podľa Fubiniho vety integrál zapíšeme ako trojnásobný: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} 3\, dz\, dy\, dx$
- Najvnútornejší integrál podľa $z$ (ostatné premenné sú konštanty): $\int_0^2 3\, dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- Prostredný integrál podľa $y$ $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$
- Vonkajší integrál podľa $x$ $\int_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$
- Kontrola parametrizáciou plochy dáva rovnakú hodnotu: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$

### Graf




Plocha S s normálami (nazeleno) a šípkami poľa (načerveno). Otáčajte ťahaním prsta.

# Tok rotácie polsférou – kontrola Stokesovou vetou po rovníku.

Zadanie: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

### Výsledok

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Vypočítať:

parametrizáciou | Stokesovou vetou

Upraviť vo formulári

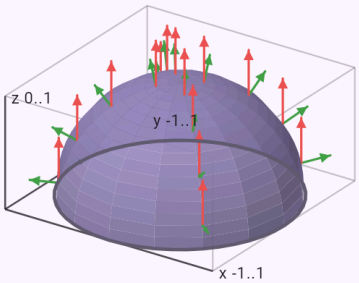
### Postup

- Tok rotácie poľa plochou S – plošný integrál 2. druhu, ktorý sa dá vypočítať aj Stokesovou vetou
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Vypočítame rotáciu poľa
  $$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Parametrizácia hornej polsféry – uhol θ len do π/2
  $$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Parciálne derivácie podľa parametrov – dotyčnicové vektory plochy
  $$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Normálový vektor (vektorový súčin dotyčnicových vektorov) orientovaný von z telesa
  $$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Dosadíme parametrizáciu do poľa a vynásobíme skalárne normálovým vektorom (F · n dS = F · N du dv):
  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$$
- Dvojný integrál cez obdĺžnik parametrov
  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Kontrola Stokesovou vetou: tok rotácie sa rovná cirkulácii poľa po hranici plochy (pravidlo pravej ruky)

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Okraje obdĺžnika parametrov, ktoré sa zobrazia do bodu alebo sa prejdú dvakrát proti sebe (šev), sa vyrušia – zostáva skutočná hranica plochy.
- Časť hranice
  $$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- Krivkový integrál po nej: $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1$, $\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$
- Stokesova veta dáva rovnakú hodnotu:
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

### Graf




Plocha S s normálami (nazeleno) a šípkami poľa (načerveno). Hranica plochy so šípkou obehu. Otáčajte ťahaním prsta.

# Plošný integrál 1. druhu cez polsféru zadanú rovnicou.

Zadanie: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

## Výsledok

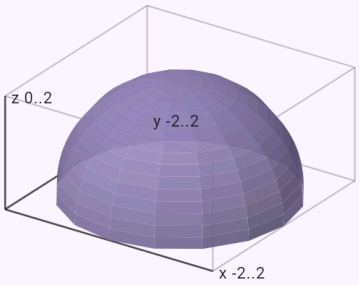
$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Upraviť vo formulári

## Postup

- Plošný integrál 1. druhu funkcie f cez plochu S: $\iint_S z \, dS$
- Parametrizácia hornej polsféry – uhol θ len do π/2
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Parciálne derivácie podľa parametrov – dotyčnicové vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Vektorový súčin dotyčnicových vektorov je normálový vektor, jeho veľkosť dáva plošný element dS = |r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Dosadíme parametrizáciu do f a vynásobíme plošným elementom: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- Dvojný integrál cez obdĺžnik parametrov
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$

## Graf




Plocha S, cez ktorú sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

### Moment zotrvačnosti guľovej škrupiny vzhľadom na os z.

Zadanie: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

**Výsledok**

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

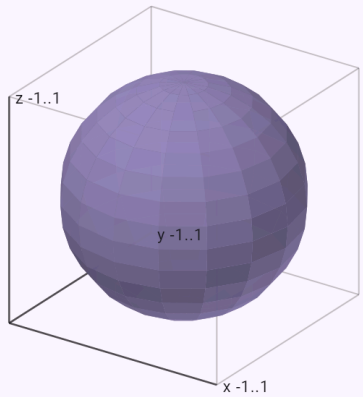
Upraviť vo formulári

**Postup**

- Plošný integrál 1. druhu funkcie f cez plochu S:
  $\oiint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- Moment zotrvačnosti škrupiny vzhľadom na os $z$ – hustota krát druhá mocnina vzdialenosti d od osi:
  $I_z = \oiint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Parametrizácia sféry uhlami θ (od kladnej osi z) a φ (okolo osi z)
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Parciálne derivácie podľa parametrov – dotyčnicové vektory plochy
  $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Vektorový súčin dotyčnicových vektorov je normálový vektor, jeho veľkosť dáva plošný element dS = |r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Dosadíme parametrizáciu do f a vynásobíme plošným elementom: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- Dvojný integrál cez obdĺžnik parametrov

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

**Graf**




Plocha S, cez ktorú sa integruje. Otáčajte ťahaním prsta.

## Mapa integrálnych viet

Všetky integrálne vety hovoria to isté: integrál derivácie cez oblasť sa rovná integrálu po jej hranici. Hranicou úsečky sú dva body, hranicou plochy krivka, hranicou telesa uzavretá plocha; súhrnne to vyjadruje zovšeobecnená Stokesova veta ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω. Aplikácia vety používa ako druhý spôsob výpočtu a ako kontrolu (čipy pod výsledkom); v glosári je tá istá mapa pod pojmom „Integrálne vety“.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `∫ f'(x) dx (a..b) = f(b) - f(a)` | Newtonova–Leibnizova formula – vnútri: derivácia na intervale ⟨a; b⟩, na hranici: hodnoty v krajných bodoch. |

| | |
|---|---|
| `∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)` | Gradientová veta (potenciál, nezávislosť od cesty) – vnútri: gradient pozdĺž krivky, na hranici: potenciál v koncových bodoch. |
| `∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy` | Greenova veta – vnútri: ∂Q/∂x − ∂P/∂y cez oblasť v rovine, na hranici: cirkulácia po uzavretej krivke. |
| `∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr` | Stokesova veta – vnútri: tok rotácie plochou, na hranici: cirkulácia po jej okrajovej krivke. |
| `∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS` | Gaussova veta – vnútri: divergencia cez teleso, na hranici: tok von uzavretou plochou. |

## Fyzikálne aplikácie integrálnych viet

V sekcii „Aplikácie“ (odbory Fyzika a Viacrozmerná analýza, elektrina aj v Elektrotechnike, prúdenie a teplo v Technike) sú modely s jednotkami: Gaussov zákon (guľa, priamka, rovina), Ampérov zákon a Biotov–Savartov zákon (vodič, solenoid, toroid, prúdová slučka), elektromagnetická indukcia (magnetický tok, premenné pole, generátor), kondenzátor (doskový, guľový, valcový), energia poľa, práca v silovom poli (gravitácia, pružina, Coulombova sila), prúdenie kvapaliny (prietok, parabolický profil, rovnica kontinuity, cirkulácia a rotácia), vedenie tepla (rovinná a valcová stena) a gravitačné pole z Gaussovho zákona.

Postup začne integrálnym zákonom, potom zdôvodní súmernosť (na zvolenej ploche alebo krivke je pole stále a smeruje pozdĺž normály či dotyčnice), ukáže vypočítaný integrál, uzavretý náboj, prúd alebo hmotnosť a vzorec, do ktorého dosadí. Pri elektromagnetických zákonoch pripojí ich diferenciálny tvar – pojem glosára „Maxwellove rovnice“ má oba tvary vedľa seba. Graf ukáže priebeh poľa so vzdialenosťou (E(r), B(r), g(r)), rýchlostný profil, teplotu v stene alebo napätie generátora.

## Ukážky

### Pole vnútri rovnomerne nabitej gule – uzavretý náboj Q r³/R³, pole rastie lineárne.

Zadanie: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

**Výsledok**

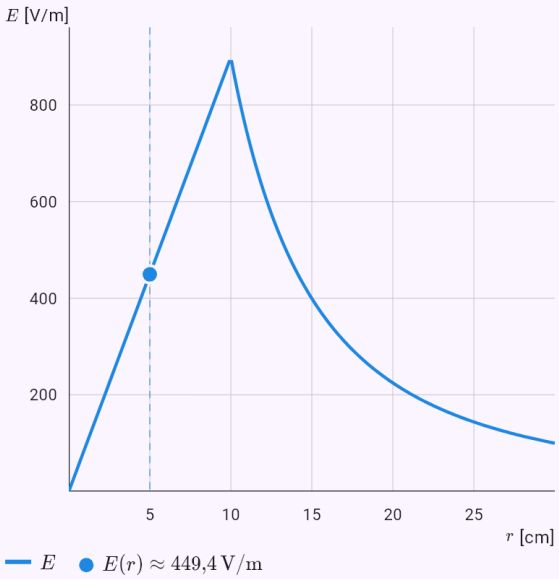
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

**Postup**

- Hľadáme $E$; zadané:
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Náboj Q rozložený súmerne okolo stredu – na povrchu gule (vodivá guľa, škrupina) alebo rovnomerne v celom objeme. Gaussovou plochou je sústredná sféra s polomerom r; mimo pôsobí náboj ako bodový. Rovnica modelu: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Súmernosť: pole mieri radiálne a na každej sústrednej sfére má rovnakú veľkosť. Gaussovou plochou zvolíme sféru s polomerom r – pole je na nej rovnobežné s normálou a stále.
- Výpočet integrálu: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\,dS = E \cdot 4\pi r^2$
- Uzavretý náboj
  $Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- Dosadíme
  $E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$

- Ten istý zákon v diferenciálnom tvare (Maxwellove rovnice): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

**Graf**




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Magnetické pole priameho vodiča Ampérovým zákonom po kružnici okolo osi.

Zadanie: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

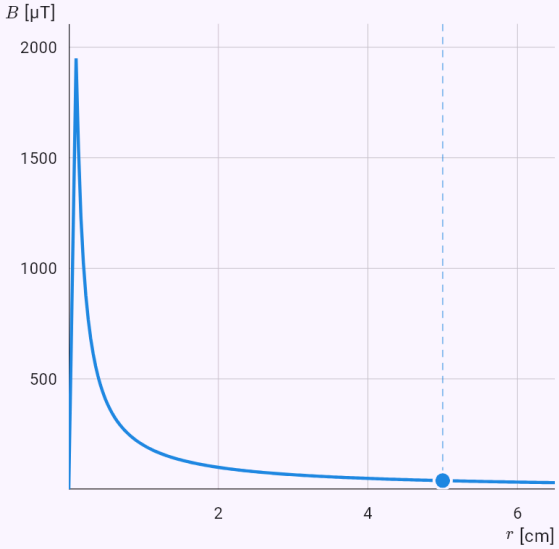
### Výsledok

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

### Postup

- Hľadáme $B$; zadané:
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Dlhý priamy vodič s polomerom R s prúdom I rovnomerne rozloženým v priereze. Integračnou krivkou je kružnica okolo osi vodiča; vnútri vodiča obopína len časť prúdu. Rovnica modelu: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Súmernosť: indukčné čiary sú kružnice okolo osi vodiča, B je k nim dotyčnicové a na kružnici s polomerom r stále.
- Výpočet integrálu: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- Obopnutý prúd: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Dosadíme
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Ten istý zákon v diferenciálnom tvare (Maxwellove rovnice): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Prevedieme jednotky: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

### Graf




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Pole na osi prúdovej slučky Biotovým–Savartovým zákonom.

Zadanie: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

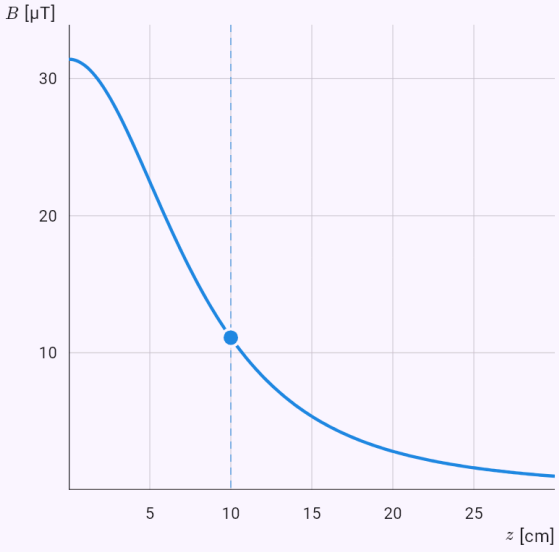
**Výsledok**

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

**Postup**

- Hľadáme $B$; zadané:
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Kruhová slučka s polomerom R s prúdom I. Pole na jej osi vo vzdialenosti z od stredu dá Biotov–Savartov zákon – kolmé zložky príspevkov sa vyrušia, pozdĺžne sa sčítajú. Rovnica modelu: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Každý kúsok slučky dl je od bodu na osi rovnako ďaleko, ρ = √(R² + z²), a je kolmý na spojnicu. Zložky kolmé na os sa po obvode vyrušia, sčítajú sa len pozdĺžne dB · R/ρ.
- Výpočet integrálu
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Dosadíme
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- V strede slučky (z = 0): $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Prevedieme jednotky: $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

**Graf**




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Amplitúda napätia generátora ε = NBAω a sínusový priebeh v grafe.

Zadanie: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

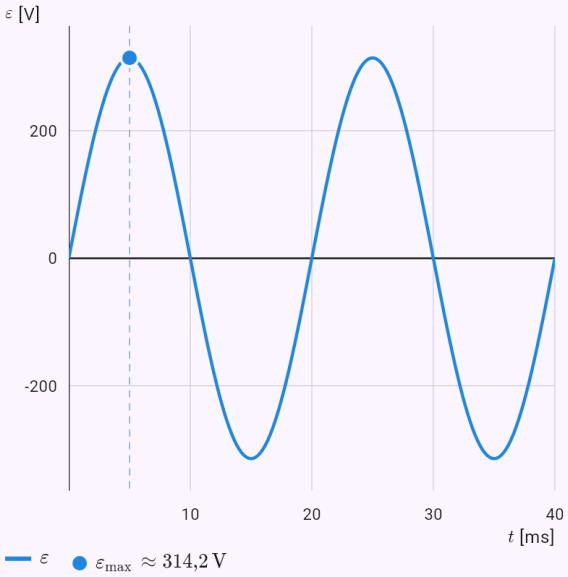
**Výsledok**

$$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$$

**Postup**

- Hľadáme $\varepsilon_{\max}$; zadané
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\,\mathrm{T}, \quad A = 500\,\mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\,\mathrm{rad}$
- Prevedieme jednotky: $A = 500\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$
- Slučka s N závitmi sa otáča uhlovou rýchlosťou ω v rovnomernom poli B – princíp generátora striedavého prúdu. Napätie je sínusové s amplitúdou NBAω. Rovnica modelu: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$
- Magnetický tok jedným závitom: $\Phi(t) = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- Výpočet integrálu: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Dosadíme: $\varepsilon_{\max} = 200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$
- Frekvencia: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\,\mathrm{Hz}$
- Ten istý zákon v diferenciálnom tvare (Maxwellove rovnice): $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

**Graf**




Veličiny modelu v čase vypočítané z riešenia rovnice; vyznačená je odpoveď.

## Kapacita metra koaxiálneho kábla – pole z Gaussovho zákona, napätie ako integrál poľa.

Zadanie: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

**Výsledok**

$$C \approx 102{,}1\,\mathrm{pF}$$

**Postup**

- Hľadáme $C$; zadané
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}, \quad L = 1\,\mathrm{m}$
- Prevedieme jednotky
  $R_1 = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm} = 0{,}0035\,\mathrm{m}$
- Dve súosové valcové elektródy s polomermi $R_1 < R_2$ a dĺžkou L – napríklad koaxiálny kábel. Rovnica modelu
  $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$
- Gaussovou plochou je súosový valec s polomerom r medzi elektródami a dĺžkou L; uzatvára náboj vnútornej elektródy Q, podstavami pole neprechádza.
- Pole medzi elektródami z Gaussovho zákona
  $E\cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$
- Napätie ako krivkový integrál poľa
  $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$
- Kapacita
  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$
- Prevedieme jednotky: $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 102{,}1\,\mathrm{pF}$

## Energia magnetického poľa 1 T v litri objemu.

Zadanie: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

**Výsledok**

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

**Postup**

- Hľadáme $W$; zadané: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Prevedieme jednotky: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- Hustota energie magnetického poľa vo vákuu w = B²/(2μ₀) – napríklad pole vnútri cievky. Rovnica modelu:
  $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Dosadíme
  $w = \frac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m^3}$
- V rovnomernom poli je hustota energie všade rovnaká, objemový integrál je hustota krát objem.
- Vyjadríme hľadanú veličinu: $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Dosadíme: $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- Takto je uložená energia cievky s prúdom: $W = \frac{1}{2}LI^2$

## Práca gravitácie pri zdvihnutí 1 kg z povrchu Zeme do výšky jedného polomeru.

Zadanie: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km]; mode=gravity)`

**Výsledok**

$$W \approx -31{,}28\,\mathrm{MJ}$$

**Postup**

- Hľadáme $W$; zadané
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 6371\,\mathrm{km}, \quad r_2$
- Prevedieme jednotky
  $r_1 = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\mathrm{km} = 1{,}27$
- Sila je konzervatívna (má potenciál): práca nezávisí od cesty, len od začiatočného a koncového bodu. Počítame ju preto po najjednoduchšej dráhe – pozdĺž spojnice.
- Gravitačná sila telesa s hmotnosťou M pôsobí na teleso m, ktoré sa presunie zo vzdialenosti $r_1$ do $r_2$ od stredu. Záporná práca poľa znamená, že teleso bolo treba dvíhať. Rovnica modelu:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- Výpočet integrálu

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$$

- Dosadíme
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- Potenciálna energia
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Práca konzervatívnej sily sa rovná úbytku potenciálnej energie: $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}$
- Prevedieme jednotky:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J} = -31{,}28\,\mathrm{MJ}$

## Prietok laminárneho prúdenia – integrál parabolického profilu v polárnych súradniciach.

Zadanie: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

**Výsledok**

$$Q \approx 7{,}8541/\mathrm{s}$$

**Postup**

- Hľadáme $Q$; zadané: $v_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}, \quad R = 5\,\mathrm{cm}$
- Prevedieme jednotky: $R = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Laminárne (Poiseuilleovo) prúdenie: pri stene kvapalina stojí, v osi tečie najrýchlejšie, rýchlostný profil je parabola v = v_max(1 − r²/R²). Rovnica modelu

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- Rýchlosť závisí len od vzdialenosti r od osi, prierez preto integrujeme v polárnych súradniciach (dS = r dr dφ).
- Výpočet integrálu

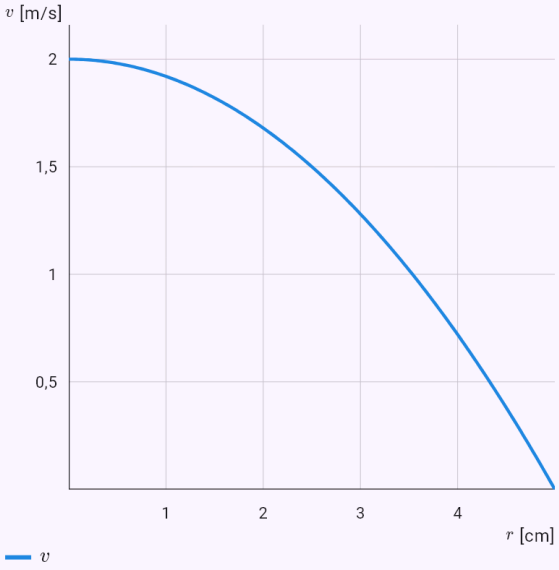
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$$

- Dosadíme

$$Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

- Priemerná rýchlosť v priereze: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\mathrm{m/s}$
- Prevedieme jednotky: $Q \approx 0{,}007854\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} = 7{,}8541/\mathrm{s}$

**Graf**




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Tepelné straty izolovanej rúry – logaritmický priebeh teploty v stene.

Zadanie: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC];`

`T2=20[degC]; mode=cylinder)`

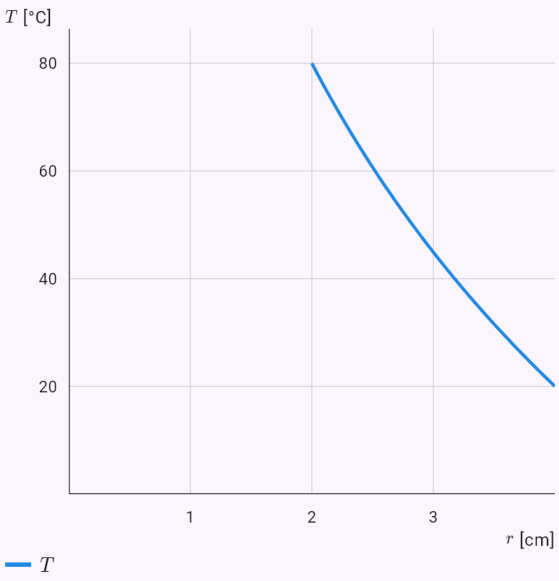
**Výsledok**

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

**Postup**

- Hľadáme $P$; zadané
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Prevedieme jednotky:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Valcová stena – izolácia rúrky s vnútorným polomerom $r_1$, vonkajším $r_2$ a dĺžkou L. Teplo prechádza valcovými plochami rastúceho obsahu, preto teplota klesá logaritmicky. Rovnica modelu:
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Ustálený stav bez zdrojov tepla – každou vrstvou prechádza rovnaký výkon: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- Výpočet integrálu
  $P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- Dosadíme
  $P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

**Graf**




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Gravitačné zrýchlenie v polovici cesty k stredu Zeme.

Zadanie: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

**Výsledok**

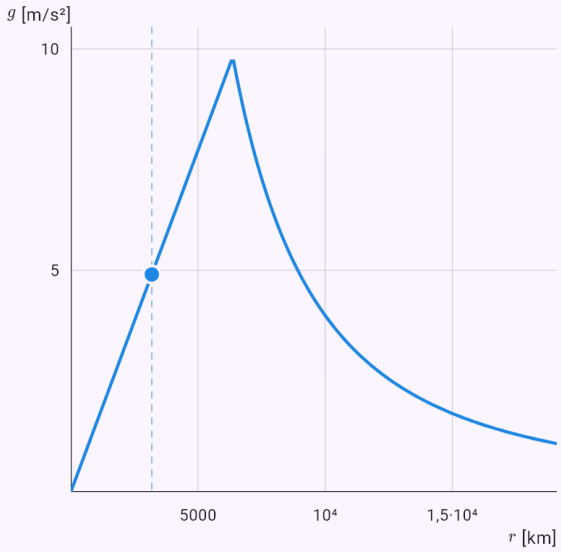
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

**Postup**

- Hľadáme $g$; zadané
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- Prevedieme jednotky
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Homogénna guľa (planéta so stálou hustotou). Vnútri gravitačné zrýchlenie rastie lineárne so vzdialenosťou od stredu. Rovnica modelu: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\mathrm{in}}$
- Súmernosť: pole mieri radiálne a na každej sústrednej sfére má rovnakú veľkosť. Gaussovou plochou zvolíme sféru s polomerom r – pole je na nej rovnobežné s normálou a stále.
- Výpočet integrálu: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- Uzavretá hmotnosť
  $M_{\mathrm{in}} = M\frac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Vyjadríme hľadanú veličinu:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\mathrm{in}} \Rightarrow g = \frac{G M_{\mathrm{in}}}{r^2}$
- Dosadíme
  $g = \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- Ten istý zákon v diferenciálnom tvare (z Gaussovej vety):
  $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

**Graf**




Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

## Známe obmedzenia

- Extrémy len pri funkcii dvoch premenných, viazané s jednou väzbou. Dvojný integrál len cez ohraničenú oblasť, ktorej hranica je v jednej premennej najviac kvadratická; plochu z = f(x, y) v 3D kreslí zatiaľ len pri dvojnom integráli. Vektorové polia len v premenných x, y (z), ostatné písmená sú konštanty; šípky kreslí len pri rovinnom poli. Potenciál hľadá integráciou zložiek – keď integrál nie je elementárny, nenájde ho. Krivkové integrály: Greenovu vetu overí len pri kružnici, elipse a konvexnom mnohouholníku, uzavretá krivka zložená z grafu a úsečky sa zadá len ako lomená čiara alebo parametricky po častiach. Trojný integrál len cez ohraničené teleso, ktoré je normálne vzhľadom na jednu premennú (jedna dolná a jedna horná plocha nad celým priemetom) a ktorého nerovnice sú v nej najviac kvadratické; sférické súradnice len pri telese, ktorého uhly θ a φ tvoria obdĺžnik.
- Plošné integrály: Gaussovu vetu overí len pri predvoľbách (sféra, uzavretá polsféra, valec, kužeľ), Stokesovu len pri toku rotácie zadanom ako curl alebo ∇ × F; graf z = g(x, y) len nad oblasťou, ktorú vie dvojný integrál; sféru s inou hranicou ako z ≥ 0 zadajte ako graf alebo parametricky.

- Fyzikálne aplikácie integrálnych viet počítajú len súmerné prípady (guľa, nekonečná priamka a rovina, dlhá cievka, rovnomerné pole), kde sa integrál zmení na súčin; všeobecné rozloženie náboja alebo prúdu zadajte ako krivkový či plošný integrál. Posuvný prúd v Ampérovom–Maxwellovom zákone zanedbávajú, materiály uvažujú len relatívnou permitivitou kondenzátora.

# 29. Taylorov polynóm

Aplikácia zostaví Taylorov (pre bod 0 Maclaurinov) polynóm zadaného stupňa: tabuľku derivácií v bode, dosadenie do vzorca a zvyšok v Lagrangeovom tvare. Stupeň vie nájsť aj sama – najmenší, pri ktorom chyba v zadanom bode alebo na intervale neprekročí zadanú hranicu. V grafe je funkcia a polynóm; posuvníkom meníte stupeň a vidíte, ako sa aproximácia zlepšuje.

Vysoké stupne (až okolo 1000) počíta presne a v postupe aj grafe ich skracuje; posuvník stupňa je potom logaritmický. Funkcie, ktorých derivácie rýchlo napučiavajú (tg x), počíta delením radov a chybu odhadne Cauchyho odhadom v komplexnej rovine, prípadne odhadom alternujúceho radu. Keď ani to nejde, vysvetlí prečo a poradí.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `taylor(sin x, 0, 5)` | Funkcia, bod a stupeň. |
| `maclaurin(e^x, 4)` | Maclaurinov polynóm – bod je 0. |
| `taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)` | Stupeň podľa chyby v bode x (na intervale namiesto x zadajte r=…). |
| `ln(1 + x)` | Funkcia s čipom „Taylorov polynóm“ – bod, stupeň alebo presnosť vyplníte tam. |

# Ukážky

## Polynóm 4. stupňa so zvyškom.

Zadanie: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

### Výsledok

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

### Postup

- Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm v bode 0):

  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$

- Derivácie funkcie a ich hodnoty v bode a

  $f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$

  $f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$

  $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$

  $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$

  $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$

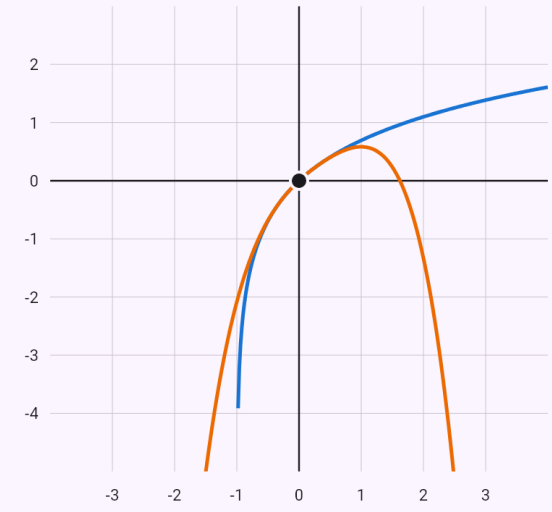
- Dosadíme hodnoty derivácií

  $$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
  $$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- Zvyšok (chyba aproximácie) v Lagrangeovom tvare, ξ leží medzi a a x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

### Graf

Stupeň: 4




$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

**Bod, v ktorého okolí polynóm funkciu aproximuje:**

- $[0; 0]$

Posuvníkom nad grafom zvolíš stupeň polynómu – s vyšším stupňom polynóm funkciu v okolí bodu aproximuje lepšie a na širšom okolí.

## Stupeň podľa požadovanej presnosti – približná hodnota e^0,5.

Zadanie: `taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)`

### Výsledok

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

### Postup

- Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm v bode 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Derivácie funkcie a ich hodnoty v bode a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Dosadíme hodnoty derivácií

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Zvyšok (chyba aproximácie) v Lagrangeovom tvare, ξ leží medzi a a x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!}x^5$

- Hľadáme najmenší stupeň n, pre ktorý odhad zvyšku v bode x neprekročí zadanú chybu

$$M_k = \max_{t \in \langle 0;\, 0{,}5 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

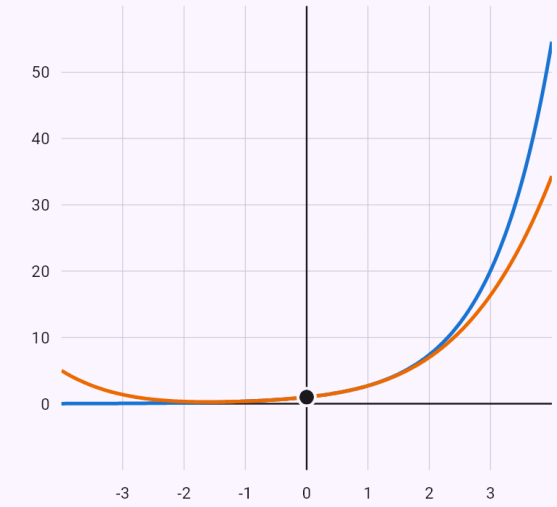
$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- Približná hodnota: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

### Graf

Stupeň: 4




$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

**Bod, v ktorého okolí polynóm funkciu aproximuje:**

- $[0; 1]$

Posuvníkom nad grafom zvolíš stupeň polynómu – s vyšším stupňom polynóm funkciu v okolí bodu aproximuje lepšie a na širšom okolí.

## Stupeň 999 – vysoký stupeň sa v postupe skráti.

Zadanie: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

### Výsledok

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

### Postup

- Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm v bode 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Derivácie funkcie a ich hodnoty v bode a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\
&\vdots \\
f^{(998)}(x) &= -\frac{997!}{(x+1)^{998}} & f^{(998)}(0) &= -997! \\
f^{(999)}(x) &= \frac{998!}{(x+1)^{999}} & f^{(999)}(0) &= 998!
\end{aligned}$$

- Zvyšok (chyba aproximácie) v Lagrangeovom tvare, ξ leží medzi a a x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

- Hľadáme najmenší stupeň n, pre ktorý odhad zvyšku v bode x neprekročí zadanú chybu

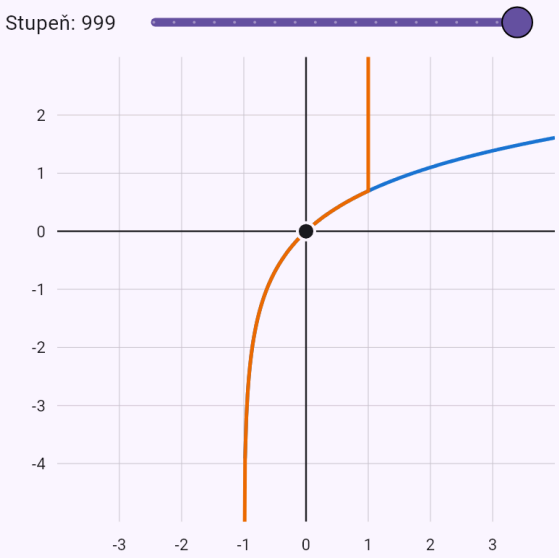
$$M_k = \max_{t \in \langle 0;1 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3} \\
n = 1: &\quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3} \\
&\dots \\
n = 998: &\quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3} \\
n = 999: &\quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}
\end{aligned}$$

- Približná hodnota: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

### Graf

Stupeň: 999




$y = \ln(1+x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$

**Bod, v ktorého okolí polynóm funkciu aproximuje:**

- $[0;0]$

Posuvníkom nad grafom zvolíš stupeň polynómu – s vyšším stupňom polynóm funkciu v okolí bodu aproximuje lepšie a na širšom okolí.

**Tangens – koeficienty z radov, chyba Cauchyho odhadom.**

Zadanie: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Výsledok

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Postup

- Maclaurinov polynóm (Taylorov polynóm v bode 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Derivácie funkcie a ich hodnoty v bode a

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Koeficienty počítame aritmetikou radov, vzorce vyšších derivácií by boli obrovské

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Derivácie sú príliš veľké, preto použijeme Cauchyho odhad na kružnici v komplexnej rovine

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- Približná hodnota: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

## Známe obmedzenia

- Stupeň nad 1000 aplikácia nepočíta; bod na hranici oboru konvergencie alebo za ňou sa Cauchyho odhadom odhadnúť nedá.

# 30. Neurčitý integrál

Aplikácia integruje metódami, ktoré sa učia v škole, a pri každom kroku povie, čo robí. Výsledok overí skúškou – derivuje ho člen po člene podľa pravidiel a súčet upraví na integrovanú funkciu (spoločný menovateľ, vzorce ako sin²x + cos²x = 1) – a nakreslí integrovanú funkciu a primitívnu funkciu.

Odmocniny z mocnín premennej (∛(x⁴), √(x³)) prepíše na mocniny s racionálnym exponentom; absolútnu hodnotu (|cos x|, √(1 − sin²x)) zapíše pomocou znamienka sgn.

Ak integrál nemá elementárnu primitívnu funkciu (napríklad e^(−x²)), aplikácia to povie a uvedie ju pomocou vyššej funkcie (erf, Si, …).

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `int(x e^x, x)` | Integrál s premennou – hranice alebo aplikáciu (plocha, objem, …) môžete doplniť do polí pod zadaním. |
| `int(x^2 sin x)` | Bez premennej, keď je len jedna. |
| `∫ x^2 dx` | So znakom integrálu, aj z fotky. |
| `x e^x` | Funkcia s čipom „Integrovať“. |

## Základné integrály a substitúcia

Integrál súčtu po členoch, konštanta pred integrál, tabuľkové integrály (aj s lineárnou vnútornou funkciou) a substitúcia, keď je v integráli funkcia aj derivácia jej vnútra.

## Ukážky

### Po členoch podľa tabuľky.

Zadanie: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

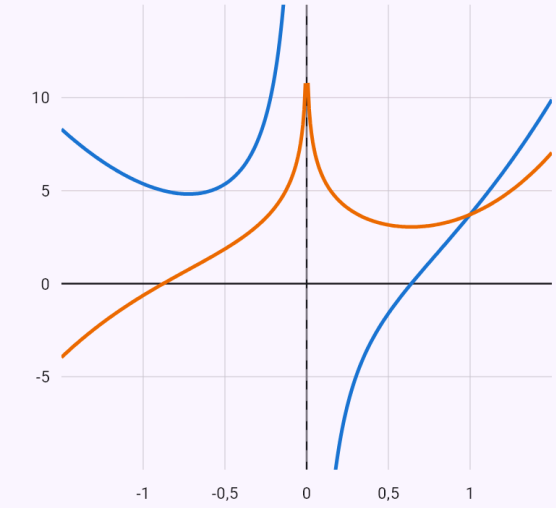
**Výsledok**

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

**Postup**

- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int e^x\,dx = e^x$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia:
  $$\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

**Graf**




$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

## Substitúcia t = x².

Zadanie: `int(2x cos(x^2))`

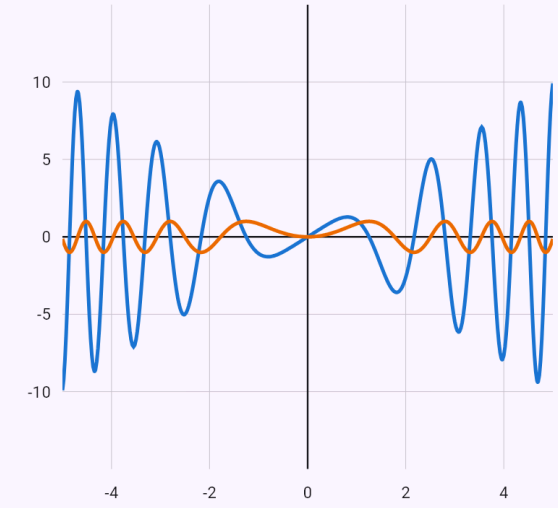
**Výsledok**

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

**Postup**

- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Substitúcia $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

**Graf**




Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

## Integrál s konštantami a, b.

Zadanie: `int(1/(a - bx)^3)`

**Výsledok**

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Podmienky: $b \neq 0$

**Postup**

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

## Per partes

Súčin polynómu a exponenciály, goniometrickej funkcie alebo logaritmu aplikácia integruje per partes, podľa potreby opakovane; integrály typu $e^x \sin x$ cyklickým per partes.

### Ukážky

#### Per partes dvakrát po sebe.

Zadanie: `int(x^2 e^x)`

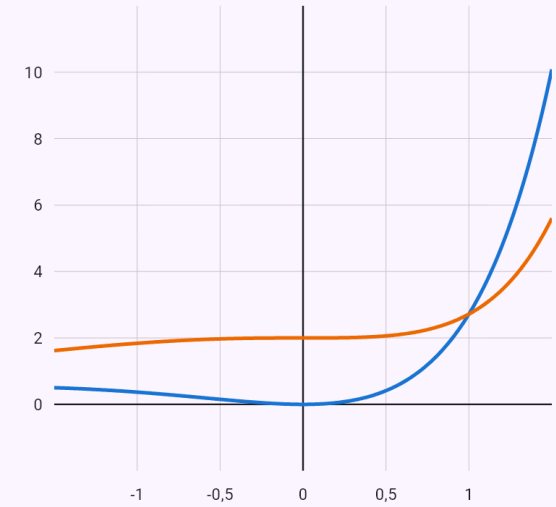
Výsledok

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Postup

- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, teda $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, teda $u' = 1$, $v = e^x$: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int e^x \, dx = e^x$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia: $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $(-2xe^x)' = -2 \cdot (e^x \cdot x + e^x) = -2xe^x - 2e^x$
- Sčítame a upravíme $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Graf




$f(x) = x^2e^x$

$F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

## Racionálne funkcie

Racionálnu funkciu aplikácia prípadne vydelí, menovateľa rozloží a funkciu rozloží na parciálne zlomky, ktoré integruje na logaritmy a arkustangensy.

Menovateľa, ktorého nad racionálnymi číslami rozložiť nemožno ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), rozloží nad reálnymi číslami – každá dvojica komplexne združených koreňov dá kvadratický činiteľ bez reálnych koreňov.

## Ukážky

### Rozklad na parciálne zlomky.

Zadanie: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

**Výsledok**

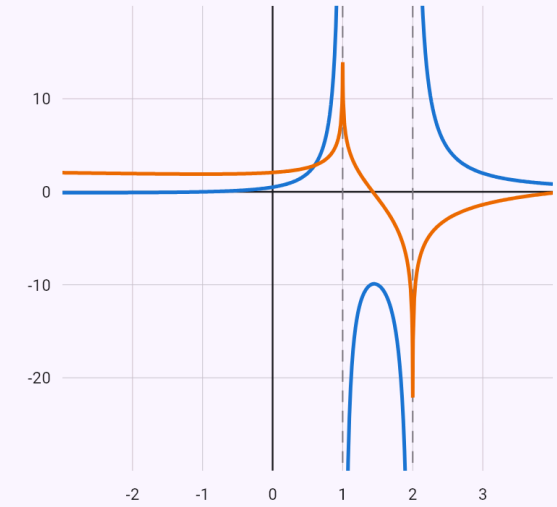
$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

**Postup**

- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky: $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$
- Integrál súčtu je súčet integrálov $\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia: $(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$
- Sčítame a upravíme

$$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

**Graf**




$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

## Rozklad menovateľa x⁴ + 1 nad reálnymi číslami.

Zadanie: `int(1/(x^4 + 1))`

### Výsledok

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \text{-}\right.\right.$$

### Postup

- Menovateľa rozložíme na súčin nad $\mathbb{R}$: jeho komplexné korene tvoria komplexne združené dvojice r, r̄ a každá dvojica dáva kvadratický činiteľ $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2\cdot\mathrm{Re}\, r\cdot x + |r|^2$, ktorý už reálne korene nemá:
$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

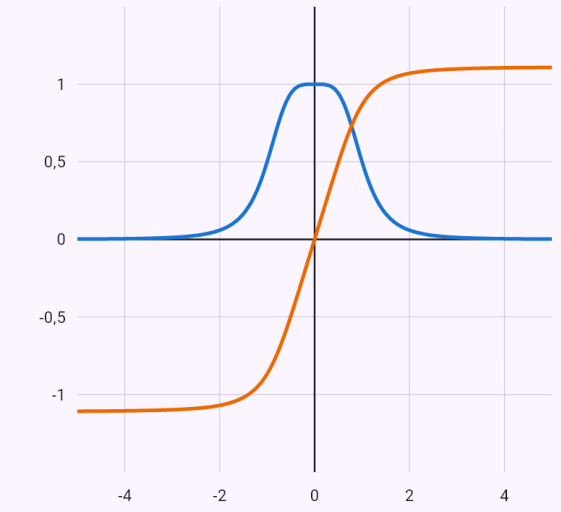
- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$

- Integrál súčtu je súčet integrálov
$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int \text{-}$$

- Menovateľ nemá reálne korene: z čitateľa oddelíme násobok derivácie menovateľa (vedie na ln), zvyšok po doplnení menovateľa na štvorec vedie na arctg
$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \text{-}$$

- Menovateľ nemá reálne korene: z čitateľa oddelíme násobok derivácie menovateľa (vedie na ln), zvyšok po doplnení menovateľa na štvorec vedie na arctg
$$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

### Graf




$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{arc}}{}$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

**Skúška parciálnych zlomkov cez spoločného menovateľa.**

Zadanie: `int(1/(x^3 + 1))`

Výsledok

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1}{3}\right.$$

Postup

- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right) dx$$

- Integrál súčtu je súčet integrálov

$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right) dx = \int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

$$\int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

- Menovateľ nemá reálne korene: z čitateľa oddelíme násobok derivácie menovateľa (vedie na ln), zvyšok po doplnení menovateľa na štvorec vedie na arctg

$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Podľa tabuľky základných integrálov:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{}}{3}$$

- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(-\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$

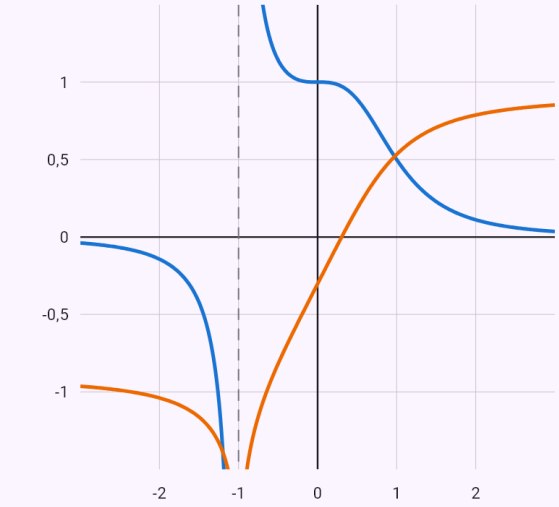
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$

- Sčítame a upravíme

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

Graf




$f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \dfrac{\ln\left(x^2-\right.}{6}$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

## Goniometrické funkcie

Prednostne vzorce (sin²x = (1 − cos 2x)/2, súčiny na súčty), pri nepárnej mocnine substitúcia t = sin x alebo t = cos x, pri racionálnej funkcii sínusu a kosínusu substitúcia podľa parity, univerzálna substitúcia t = tg(x/2) až nakoniec.

## Ukážky

### Nepárna mocnina sínusu – substitúcia t = cos x.

Zadanie: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

**Výsledok**

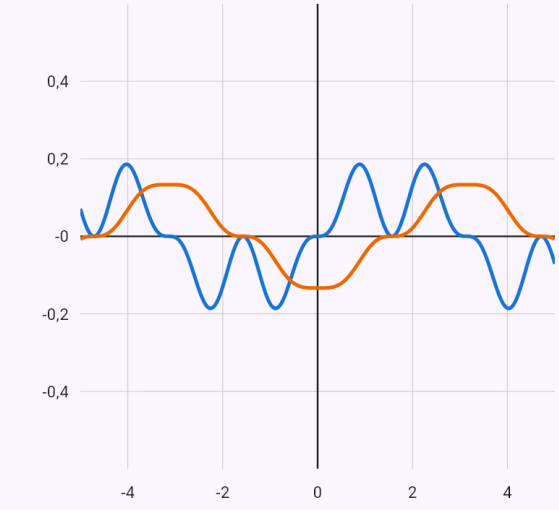
$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \, .$$

**Postup**

- Nepárna mocnina – substitúcia $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- Integrál súčtu je súčet integrálov:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej:
  $t = \cos x$ : $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia:
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$

- Sčítame a upravíme podľa vzorca $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

**Graf**




$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

**Skúška: derivácia po členoch a úprava vzorcom 1 + tg²x = 1/cos²x.**

Zadanie: `int(1/cos(x)^4)`

Výsledok

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Postup

- Funkcia sa nezmení pri súčasnej zmene znamienka sínusu aj kosínusu – substitúcia $t = \operatorname{tg} x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- Integrál súčtu je súčet integrálov:
  $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 1\,dt = t$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej:
  $t = \operatorname{tg} x:\quad \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$

- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia
  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel
  $\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$
- Sčítame a upravíme podľa vzorca $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos}$

## Hyperbolické funkcie

Tabuľkové integrály (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tgh x + C, …), ∫tgh x dx cez logaritmus derivácie, per partes (x sinh x, argsinh x), druhé mocniny vzorcami sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tgh²x = 1 − 1/cosh²x; ostatné z definície cez exponenciály.

### Ukážky

#### Vzorec sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Zadanie: `int(sinh(x)^2)`

Výsledok

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Postup

- Použijeme vzorec $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left( \frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$

- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia: $\left( -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel
  $\left( \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- Sčítame a upravíme podľa vzorca $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $\left( -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

## Odmocniny

Integrály s odmocninou z lineárnej lomenej funkcie substitúciou, s odmocninou z kvadratického trojčlena Eulerovou substitúciou a binomické integrály podľa Čebyševových podmienok – keď žiadna neplatí, aplikácia povie, že integrál nie je elementárny.

## Ukážky

### Eulerova substitúcia.

Zadanie: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Výsledok

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Postup

- Eulerova substitúcia (1. typu) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – integrál prejde na racionálnu funkciu premennej t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Konštantu vyberieme pred integrál

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt$$

- Integrál súčtu je súčet integrálov

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Skúška – derivácia výsledku (primitívnej funkcie) je integrovaná funkcia

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

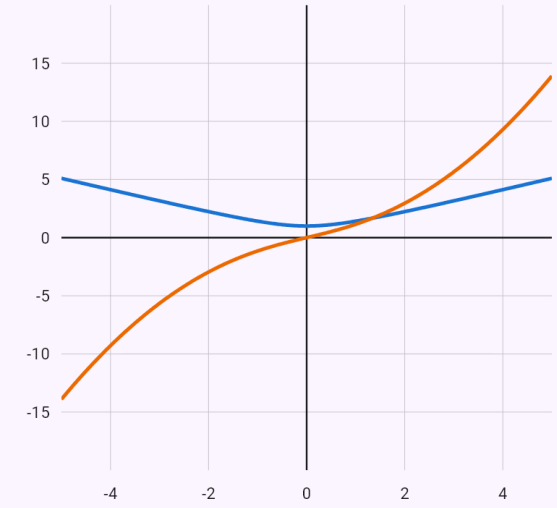
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Sčítame a upravíme

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Graf




$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

Integrovaná funkcia f a primitívna funkcia F pre C = 0 (iné C ju posunie nahor alebo nadol). Kde je f kladná, F rastie; kde je záporná, F klesá.

# Známe obmedzenia

- Pri niektorých integráloch nájdeme výsledok bez postupu – aplikácia to v postupe uvedie.

- Výpočet bez postupu, ktorý trvá príliš dlho, aplikácia preruší a povie to.
- Skúšku pri dlhých výsledkoch, kde by úprava na integrovanú funkciu nebola čitateľná (niekoľko členov s odmocninami čísel, napríklad $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), aplikácia vynechá.

# 31. Určitý integrál a jeho aplikácie

Určitý integrál aplikácia vypočíta Newtonovou–Leibnizovou formulou a nakreslí plochu pod grafom – časť nad osou x inou farbou ako pod ňou. Vie aj nevlastné integrály a aplikácie: plochu, dĺžku krivky, objem a plášť rotačného telesa, aj pre krivky zadané parametricky a v polárnych súradniciach.

## Určitý integrál

Primitívnu funkciu aplikácia nájde rovnako ako pri neurčitom integráli a dosadí hranice. Pri substitúcii hranice rovno prepočíta. Na intervale súmernom podľa nuly využije symetriu: nepárna časť integrálu je nula bez hľadania primitívnej funkcie a $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ spozná ako plochu polkruhu. Ak integrál nemá elementárnu primitívnu funkciu, dá presný tvar s vyššou funkciou (napríklad $2\,\mathrm{Si}(\pi)$) a číslo k nemu vypočíta z mocninového radu s odhadom chyby; keď presný tvar nenájde, vypočíta hodnotu numericky a povie ktorou metódou.

Písmená v zadaní ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ od $-r$ do $r$) berie ako kladné parametre: výsledok je vzorec ($\pi r^2/2$), overený numericky pre rôzne hodnoty parametrov, a graf má posuvník pre každé písmeno.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `int(x^2, x, 0, 3)` | Integrál s premennou a hranicami. |
| `\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx` | Z fotky alebo v zápise LaTeX. |
| `x^2` | Funkcia s čipom „Integrovať“ – hranice vyplníte do polí. |

## Ukážky

### Substitúcia s prepočtom hraníc.

Zadanie: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

**Výsledok**

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

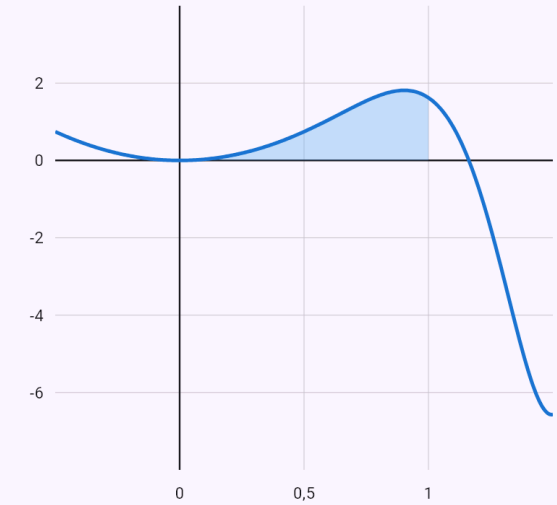
Riešiť numerickou metódou:

Σ Simpson | Σ Lichobežník | Σ Romberg

**Postup**

- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Substitúcia $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

**Graf**




$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Nepárna časť na súmernom intervale je nula, zvyšok je plocha polkruhu – výsledok π.

Zadanie: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

### Výsledok

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx =$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Simpson | Σ Lichobežník | Σ Romberg

### Postup

- Interval je súmerný podľa nuly, integrál rozdelíme na nepárnu časť a zvyšok

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

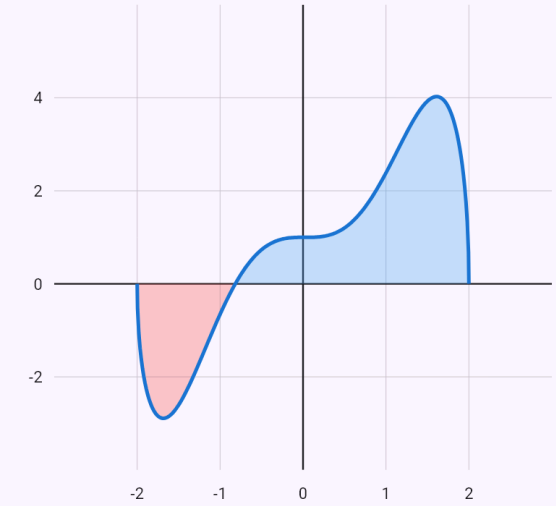
- Funkcia $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ je nepárna (f(−x) = −f(x)): na intervale ⟨−2; 2⟩ sa plocha nad osou a pod osou odčítajú, integrál je nula bez hľadania primitívnej funkcie:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$$

- Graf √(r² − x²) je horná polkružnica s polomerom r = 2, integrál je plocha polkruhu πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

### Graf




$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Primitívna funkcia nie je elementárna: presne 2 Si(π), hodnota z mocninového radu.

Zadanie: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

### Výsledok

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

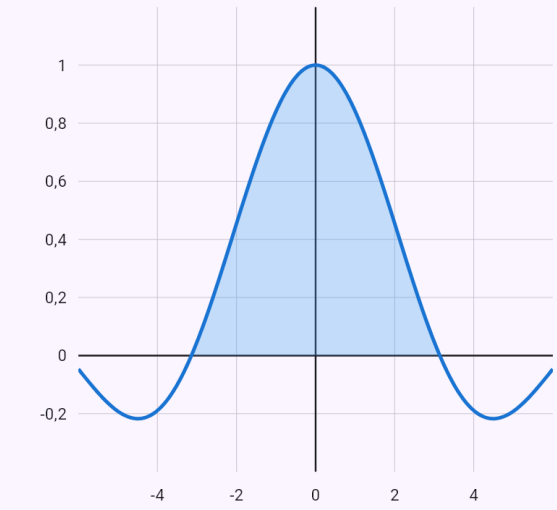
Číslo k presnému tvaru vypočíta aj numerická metóda:

Σ Simpson | Σ Lichobežník | Σ Romberg

### Postup

- Funkcia $\frac{\sin x}{x}$ je párna (f(−x) = f(x)), graf je súmerný podľa osi y, takže integrál cez $\langle -\pi;\,\pi\rangle$ je dvojnásobok integrálu cez $\langle 0;\,\pi\rangle$: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$
- Primitívna funkcia nie je elementárna, je to vyššia funkcia – presný výsledok zapíšeme pomocou nej $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$
- Číslo k presnému tvaru vypočítame z mocninového radu vyššej funkcie: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Pre t = $\pi$ sčítame 6 členov. Rad je alternujúci, chyba je menšia ako prvý vynechaný člen, $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ (odhad alternujúceho radu): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

### Graf




$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

**Integrál s parametrom r – plocha polkruhu, πr²/2; posuvníkom v grafe meníte r.**

Zadanie: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

**Výsledok**

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

**Postup**

- Písmená iné ako premenná berieme ako kladné parametre: $r > 0$
- Odmocnina z rozdielu štvorcov – goniometrická substitúcia $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, odmocnina $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Integrál súčtu je súčet integrálov $\int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

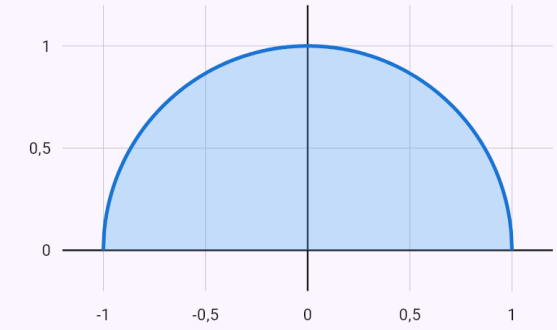
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[ r^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

**Hodnoty parametrov**

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

**Graf**




Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Nevlastný integrál

Nekonečnú hranicu alebo neohraničenú funkciu aplikácia rieši limitou primitívnej funkcie a povie, či integrál konverguje, alebo diverguje. Keď limitu primitívnej funkcie nemožno vypočítať, rozhodne porovnávacím kritériom.

Integrály ∫₀^∞ x^(s − 1) lnᵏx/(xⁿ + aⁿ)^m dx (0 < s < mn, k = 0 až 3) vypočíta presne aj bez primitívnej funkcie: ako k-tu deriváciu integrálu s parametrom I(s) podľa s. I(s) nájde substitúciou t = xⁿ/(xⁿ + aⁿ) cez beta funkciu a vetu o doplnku (čip „Beta funkcia“), alebo po kľúčovej dierke okolo kladnej polosi cez rezíduá (čip „Rezíduá“). Kde primitívna funkcia existuje, zostáva predvolená Newtonova–Leibnizova formula (čip „Primitívna funkcia“). Hodnotu vždy overí numericky.

Iný nevlastný integrál bez primitívnej funkcie aplikácia na každom konci (pri nekonečnej hranici aj pri bode, kde funkcia rastie nad všetky medze) porovná s 1/x^α limitným porovnávacím kritériom. Až keď na všetkých koncoch konverguje, vypočíta hodnotu numericky (≈); divergentný integrál ohlási ako divergentný.

## Ukážky

### Nekonečná horná hranica.

Zadanie: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

**Výsledok**

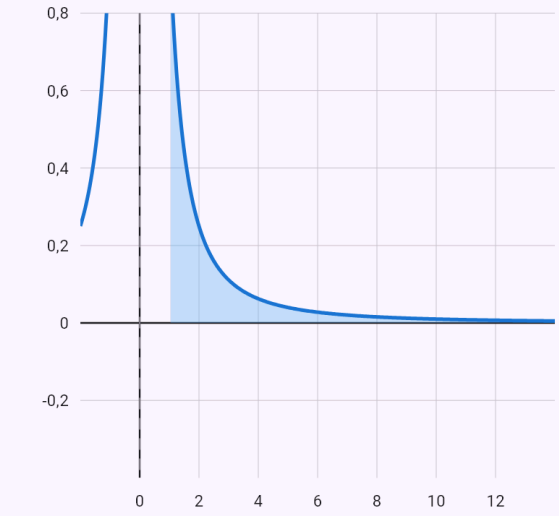
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

**Postup**

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Nevlastný integrál – v nekonečnej hranici a v bode, kde funkcia nie je ohraničená, berieme limitu primitívnej funkcie. Limity sú konečné, integrál konverguje

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

**Graf**




Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Funkcia neohraničená pri dolnej hranici.

Zadanie: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

### Výsledok

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Riešiť numerickou metódou:

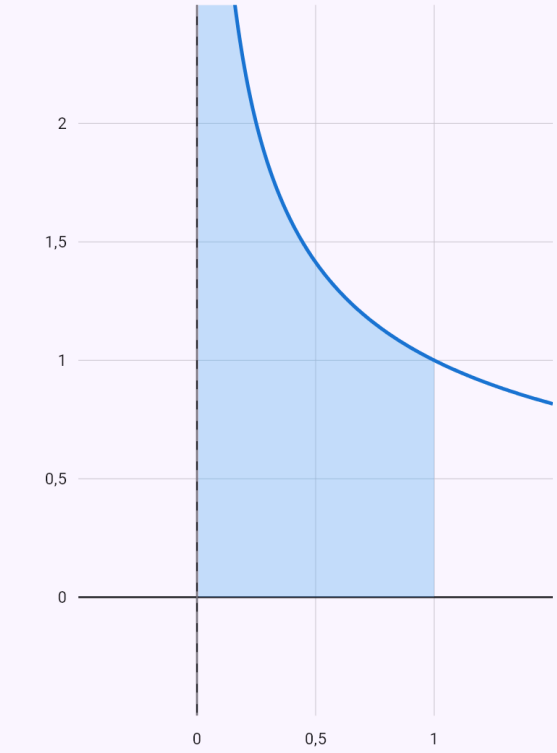
Σ Simpson | Σ Lichobežník | Σ Romberg

### Postup

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Nevlastný integrál – v nekonečnej hranici a v bode, kde funkcia nie je ohraničená, berieme limitu primitívnej funkcie. Limity sú konečné, integrál konverguje

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

### Graf




$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

# ∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I″(4) cez beta funkciu – 5√3π³/972.

Zadanie: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

### Výsledok

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

### Postup

- Logaritmus vznikne derivovaním podľa parametra s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2} x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Zadaný integrál je preto derivácia integrálu s parametrom $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, ktorý konverguje pre $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. I(s) vypočítame pre všeobecné s, zderivujeme a dosadíme.
- Substitúciou prejde integrál na ⟨0; 1⟩ a vyjde Eulerova beta funkcia B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Beta funkciu vyjadríme gama funkciou, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), a použijeme vetu o doplnku Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

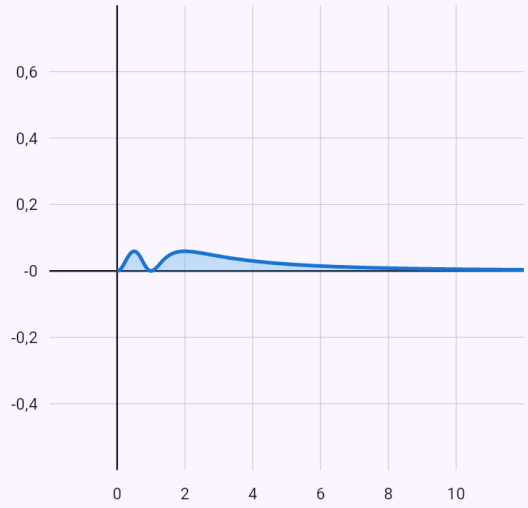
- Derivácia podľa parametra s (rádu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Dosadíme $s_0$

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

### Graf




$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Ten istý integrál po kľúčovej dierke cez rezíduá.

Zadanie: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Rezíduá

### Výsledok

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

### Postup

- Logaritmus vznikne derivovaním podľa parametra s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Zadaný integrál je preto derivácia integrálu s parametrom $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, ktorý konverguje pre $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. I(s) vypočítame pre všeobecné s, zderivujeme a dosadíme.
- Mocninu z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) berieme s argumentom z v intervale (0; 2π) a integrujeme po kľúčovej dierke C okolo kladnej reálnej polosi. Na hornom brehu je z^(s − 1) = x^(s − 1), na dolnom x^(s − 1)·e^(2πis); veľká aj malá kružnica v limite neprispievajú, pretože $0 < s < 6$. Vnútri ležia póly $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ rádu 1 a podľa rezíduovej vety (pre s, ktoré nie je celé číslo)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Póly sú jednoduché, reziduum je podiel čitateľa a derivácie menovateľa v póle; použijeme z$^n$ = −a$^n$

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Dosadíme mocniny pólov, sčítame geometrický rad a výsledok zjednodušíme. Vzorec sme odvodili pre s, ktoré nie je celé číslo (inak je 1 − e^(2πis) = 0). Obe strany sú však v s spojité, takže platí aj pre s = 4 − limitou s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

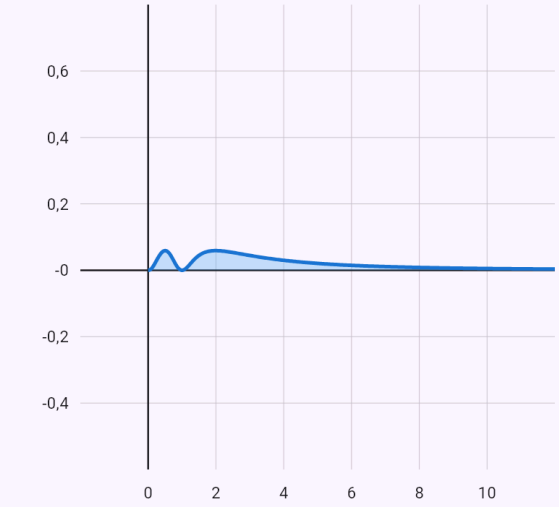
- Derivácia podľa parametra s (rádu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Dosadíme $s_0$

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

### Graf




$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osou x (+) pod osou x (−)

Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

**Bez primitívnej funkcie: konvergencia porovnaním s 1/x³, potom hodnota numericky.**

Zadanie: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

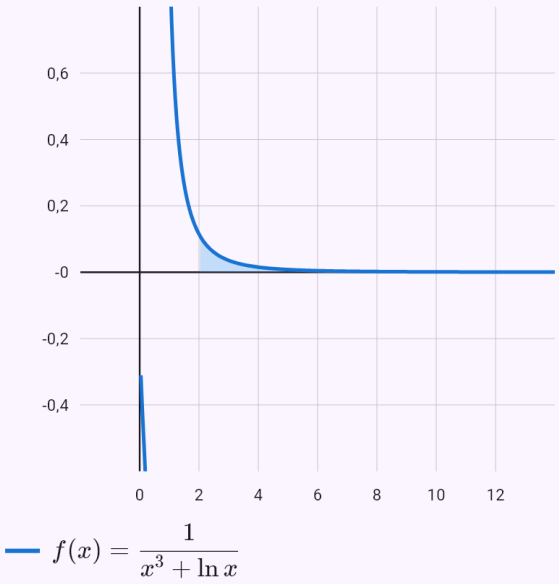
Výsledok

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$$

Postup

- Pre $x \to \infty$ porovnáme integrand s $\frac{1}{x^3}$ (limitné porovnávacie kritérium): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. Limita je kladné číslo, integrál sa tam teda správa rovnako ako integrál z $\frac{1}{x^3}$, a ten pre $\alpha = 3 > 1$ konverguje.
- Integrál na všetkých koncoch konverguje, jeho hodnota: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$
- Presný tvar sa nepodarilo nájsť, hodnotu nevlastného integrálu sme vypočítali numericky adaptívnou Gaussovou–Kronrodovou kvadratúrou.

Graf




Určitý integrál je obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x – časť nad osou sa počíta kladne, časť pod osou záporne.

## Plocha pod krivkou a medzi krivkami

Plochu medzi grafom a osou x alebo medzi dvoma krivkami aplikácia počíta ako integrál absolútnej hodnoty rozdielu – časti nad aj pod sa sčítavajú kladne. Hranice nemusíte zadávať: nájde ich ako priesečníky kriviek.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `plocha(x^2, x)` | Plocha medzi dvoma krivkami, hranice z priesečníkov. |
| `plocha(sin x, 0, pi)` | Plocha medzi krivkou a osou x na intervale. |
| `x^2` | Funkcia s čipom „Integrovať“ → „Plocha medzi krivkami“; druhú krivku a hranice vyplníte do polí. |

### Ukážky

### Plocha medzi parabolou a priamkou.

Zadanie: `x^2` Plocha medzi krivkami, druhá krivka x

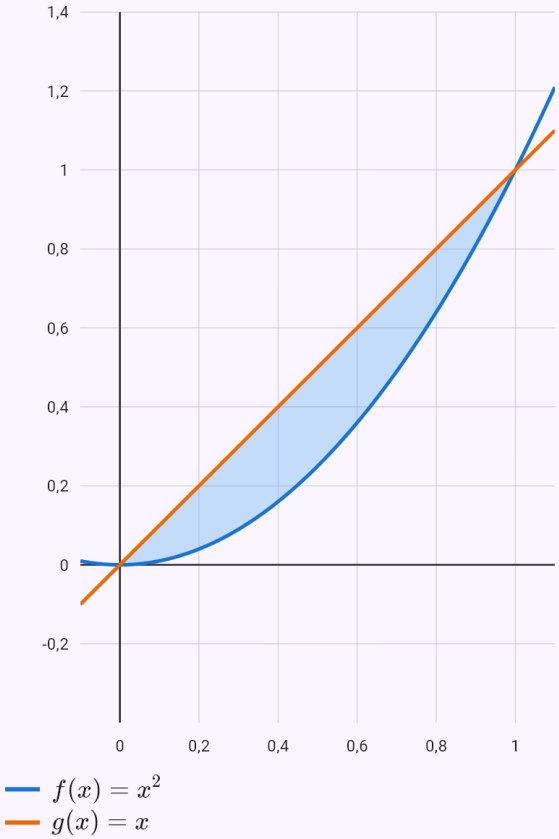
**Výsledok**

$$S = \frac{1}{6}$$

**Postup**

- Hranice sú priesečníky kriviek: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- Obsah plochy medzi krivkami (časti nad aj pod sa počítajú kladne), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$:
  $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- Výraz v absolútnej hodnote na intervale nemení znamienko – absolútnu hodnotu odstránime podľa neho:
  $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- Integrál súčtu je súčet integrálov:
  $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

**Graf**




Vyfarbená plocha – jej obsah je výsledok (časti nad aj pod osou sa počítajú kladne).

## Dĺžka krivky

Dĺžku grafu funkcie na intervale aplikácia počíta vzorcom l = ∫√(1 + f′²) dx. Odmocninu sa snaží zjednodušiť (pri polkružnici vyjde arkussínus); kde integrál nemá elementárnu primitívnu funkciu, je výsledok numerický.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `delka(x^(3/2), 0, 4)` | Dĺžka krivky na intervale (aj „dĺžka“, „délka“). |

### Ukážky

#### Dĺžka polkružnice.

Zadanie: `sqrt(1 - x^2)` Dĺžka krivky, hranice −1 a 1

**Výsledok**

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

**Postup**

- Dĺžka krivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

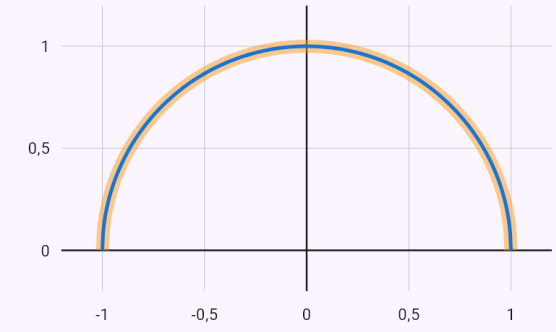
- Podľa tabuľky základných integrálov:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Nevlastný integrál – v nekonečnej hranici a v bode, kde funkcia nie je ohraničená, berieme limitu primitívnej funkcie. Limity sú konečné, integrál konverguje

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

**Graf**




$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Zvýraznený oblúk – jeho dĺžka je výsledok.

## Objem rotačného telesa

Objem telesa vzniknutého rotáciou okolo osi x aplikácia počíta vzorcom V = π∫f² dx (medzi dvoma krivkami ako medzikružie), okolo osi y metódou valcových šupiek. Teleso ukáže aj v 3D – otáčate ním prstom.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `objem(sqrt(x), 0, 4)` | Objem telesa rotáciou okolo osi x. |
| `objem(x^2, 0, 2, y)` | Rotácia okolo osi y. |

### Ukážky

#### Rotačný paraboloid.

Zadanie: `sqrt(x)` Objem telesa, hranice 0 a 4

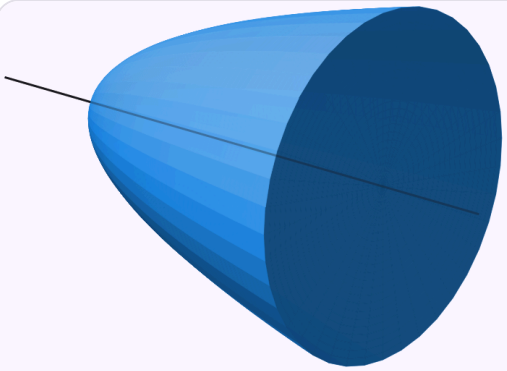
**Výsledok**

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

**Postup**

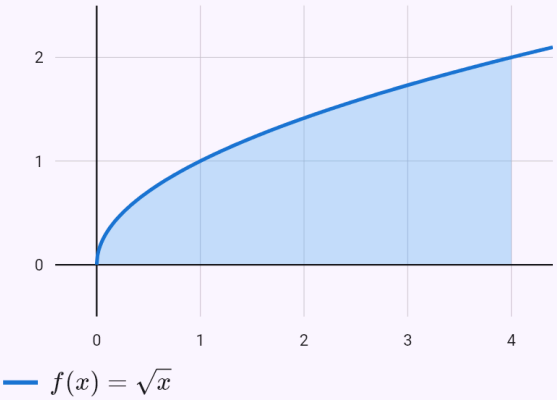
- Objem rotačného telesa okolo osi x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$:
  $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a):
  $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním:
  $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

**Rotačné teleso**



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi x – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

**Graf**




## Plášť rotačného telesa

Obsah plášťa aplikácia počíta vzorcom S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; súčin pod odmocninou sa často zjednoduší (pri guli vyjde konštanta).

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `povrch(sqrt(4 - x^2), -2, 2)` | Plášť telesa rotáciou okolo osi x. |

### Ukážky

#### Povrch gule s polomerom 2.

Zadanie: `sqrt(4 - x^2)` Povrch telesa, hranice −2 a 2

Výsledok

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Postup

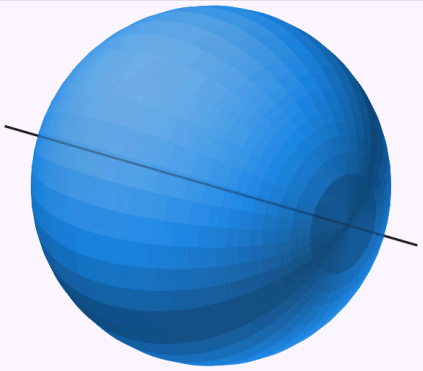
- Obsah plášťa rotačného telesa okolo osi x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

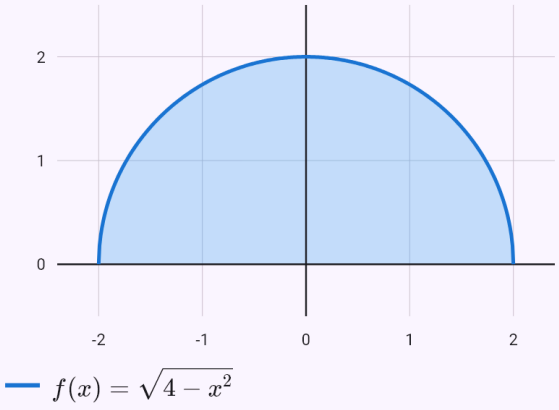
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 2\,dx = 2x$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a):
  $\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním:
  $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Rotačné teleso



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi x – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

Graf




## Aplikácie s parametrami

Každé písmeno okrem x je kladný parameter a výsledok je vzorec, napríklad objem gule 4πr³/3. Číselné kontroly bežia s dosadenými hodnotami. Graf a 3D teleso majú posuvník každého parametra.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)` | Objem gule s polomerom r. |

## Ukážky

### Objem gule s polomerom r.

Zadanie: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

**Výsledok**

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

**Postup**

- Písmená iné ako premenná berieme ako kladné parametre: $r > 0$
- Objem rotačného telesa okolo osi x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

  $$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

- Integrál súčtu je súčet integrálov:

  $$\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $$\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$$

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

  $$\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním:

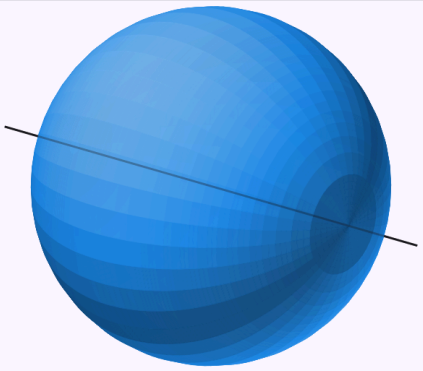
  $$V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

**Hodnoty parametrov**

$r = 1$

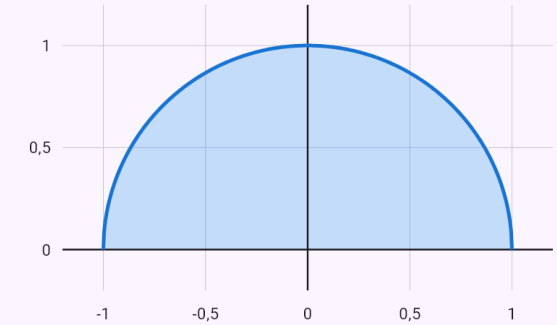
$V \approx 4{,}189$

**Rotačné teleso**



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi x – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

**Graf**




$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

**Zrezaný kužeľ s polomermi a, b a výškou h.**

Zadanie: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Výsledok

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Postup

- Písmená iné ako premenná berieme ako kladné parametre: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Objem rotačného telesa okolo osi x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Hodnoty parametrov

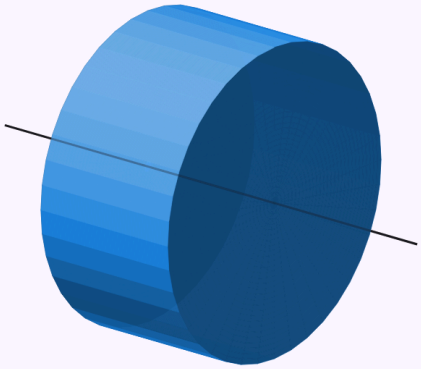
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

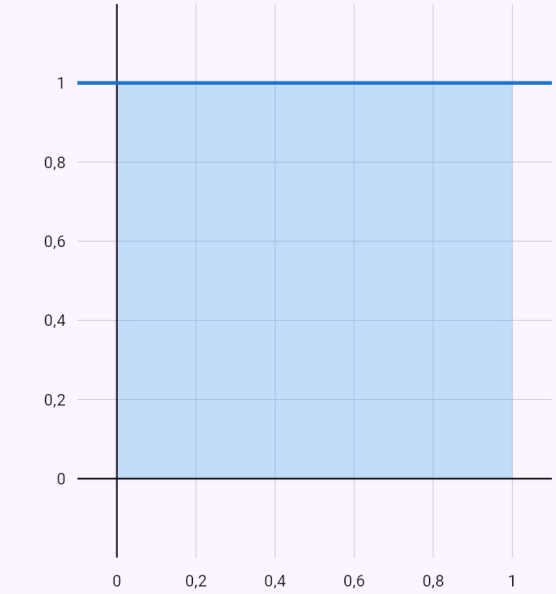
$V \approx 3{,}142$

Rotačné teleso



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi x – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

Graf




$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

# Ťažisko

Ťažisko oblasti pod krivkou alebo medzi dvoma krivkami, oblúka a rotačného telesa počíta z integrálov s celým postupom; výsledok vyznačí v grafe. Písmená fungujú ako parametre.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `teziste(x^2, 0, 1)` | Oblasť pod krivkou; zadajte aj druhú funkciu pre oblasť medzi krivkami. |

| | |
|---|---|
| `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)` | Posledné slovo oblouk alebo teleso volí oblúk alebo rotačné teleso. |

## Ukážky

### Ťažisko polkruhu 4r/(3π).

Zadanie: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

**Výsledok**

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

**Postup**

- Písmená iné ako premenná berieme ako kladné parametre: $r > 0$
- Ťažisko počítame z integrálov
  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$
  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$
- Vypočítame integrál: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Odmocnina z rozdielu štvorcov – goniometrická substitúcia $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, odmocnina $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Vypočítame integrál: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Substitúcia $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:
  $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme:
  $x = -r \Rightarrow t = 0, \quad x = r \Rightarrow t = 0$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^0 = 0-0=0$$

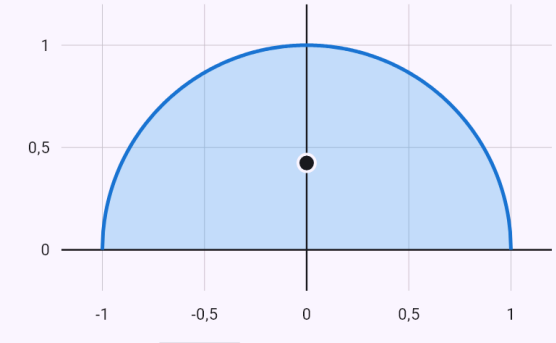
- Vypočítame integrál: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- Integrál súčtu je súčet integrálov:
  $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int r^2\,dx = r^2x$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) – F(a)
  $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3}-\left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Súradnice ťažiska sú podiely integrálov
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

### Hodnoty parametrov

$r = 1$

$T \approx [0;\,0{,}424]$

### Graf




$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

Bod T je ťažisko.

# Ťažisko kužeľa v 3/4 výšky od vrcholu.

Zadanie: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

### Výsledok

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

### Postup

- Písmená iné ako premenná berieme ako kladné parametre: $h > 0,\ r > 0$
- Ťažisko počítame z integrálov

  $x_T = \dfrac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$

  $y_T = 0$

- Vypočítame integrál: $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$
- Vypočítame integrál: $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$
- Súradnice ťažiska sú podiely integrálov

  $x_T = \dfrac{M_y}{J} = \dfrac{3h}{4}$

  $y_T = 0$

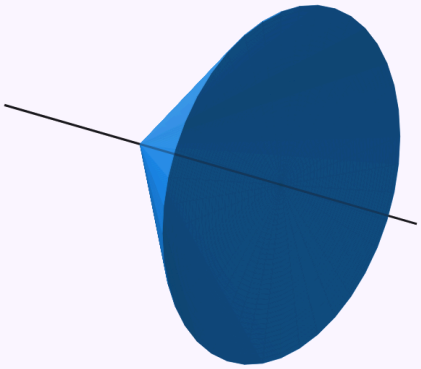
### Hodnoty parametrov

$h = 1$

$r = 1$

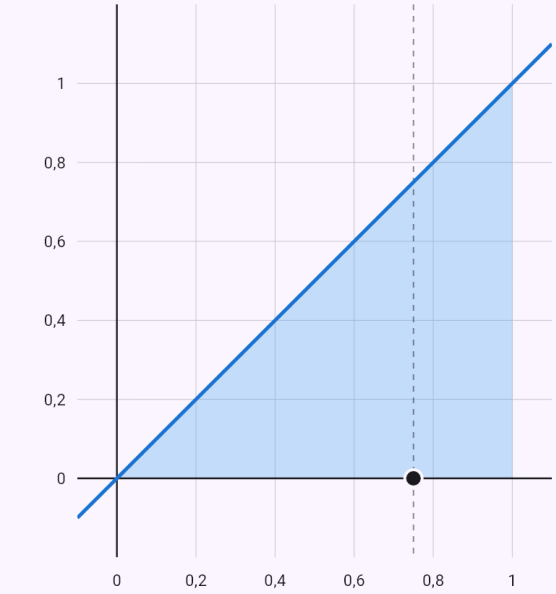
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

### Rotačné teleso



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi x – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

### Graf




$f(x) = \dfrac{rx}{h}$

Bod T je ťažisko.

# Krivky zadané parametricky a v polárnych súradniciach

Krivku x = φ(t), y = ψ(t) napíšte na dva riadky, krivku v polárnych súradniciach ako r = ρ(φ). Aplikácia potom pri čipe „Integrovať“ ponúkne plochu, dĺžku, objem a plášť; hranice parametra sú nepovinné (bez nich od 0 do 2π). Graf vyfarbí plochu a objem a plášť ukáže ako 3D teleso. Rotovať možno okolo osi x aj y, pri osi y pridajte posledný argument y.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `x = t - sin(t)`<br>`y = 1 - cos(t)` | Parametrická krivka na dva riadky. |
| `r = 1 + cos(phi)` | Krivka v polárnych súradniciach (aj r^2 = … pre lemniskátu). |
| `delka(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)` | Písaný zápis s parametrom a hranicami. |

### Ukážky

**Plocha pod oblúkom cykloidy.**

Zadanie: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Plocha

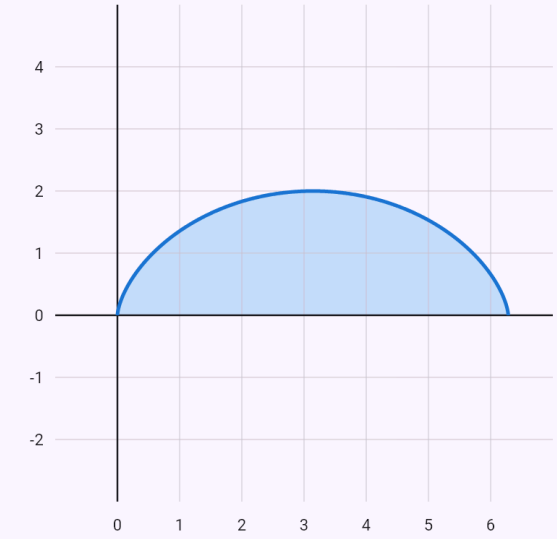
### Výsledok

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

### Postup

- Derivácie podľa parametra:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- Obsah plochy pod parametricky zadanou krivkou (pri uzavretej krivke obsah vnútri) pre $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$:
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt \right|$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 1\, dt = t$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -2\cos t\, dt = -2 \int \cos t\, dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) - F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[ \frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4} \right.$

### Graf




$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

Krivka zadaná parametricky (alebo v polárnych súradniciach) nakreslená pre zvolené hranice parametra.

## Dĺžka kardioidy.

Zadanie: `r = 1 + cos(phi)` Dĺžka krivky

**Výsledok**

$$l = 8$$

**Postup**

- Derivácie podľa parametra: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- Dĺžka krivky v polárnych súradniciach pre $\varphi \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi$$

- Interval rozdelíme v nulových bodoch výrazov v absolútnej hodnote ($\pi$) a v každej časti absolútnu hodnotu odstránime podľa znamienka

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

- Konštantu vyberieme pred integrál

$$\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

$$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

$$\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- Konštantu vyberieme pred integrál

$$\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

$$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

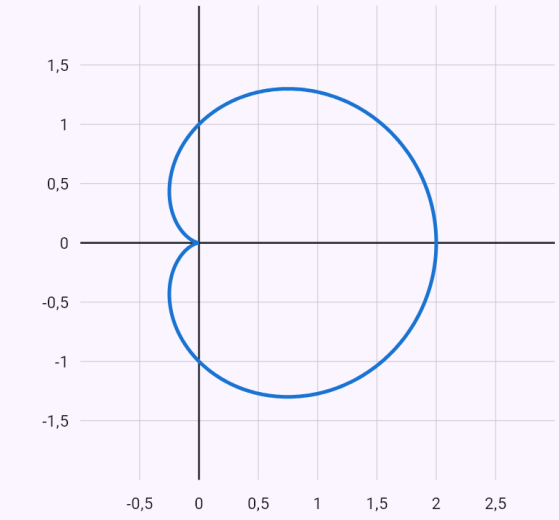
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)

$$\int_\pi^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_\pi^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- Hodnoty častí sčítame:

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

**Graf**




$r = \cos\varphi + 1$

Krivka zadaná parametricky (alebo v polárnych súradniciach) nakreslená pre zvolené hranice parametra.

## Asteroida otočená okolo osi y.

Zadanie: `x = cos(t)^3`

`y = sin(t)^3`

### Výsledok

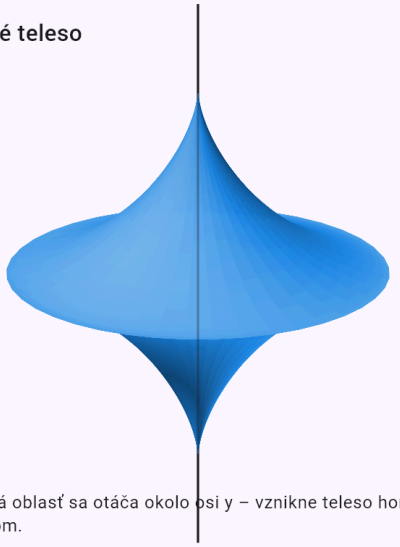
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

### Postup

- Derivácie podľa parametra:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Teleso vytvorí rotáciou časť krivky napravo od osi y (x ≥ 0)
  $t \in \left\langle 0;\ \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2};\ 2\pi \right\rangle$
- Objem rotačného telesa okolo osi y pre $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left( \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Nepárna mocnina – substitúcia $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) - F(a)
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[ 3\left( -\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3} \right) \right.$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Nepárna mocnina – substitúcia $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$

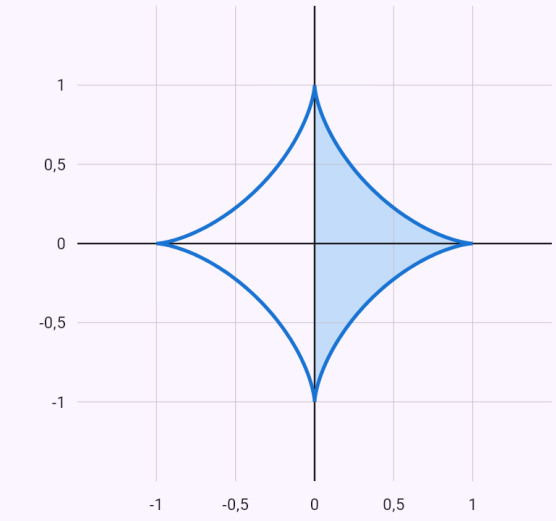
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int 3w^6\,dw = 3\int w^6\,dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Pri substitúcii prepočítame aj hranice – k pôvodnej premennej sa vracať nemusíme:
  $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním:
  $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

**Rotačné teleso**



Vyfarbená oblasť sa otáča okolo osi y – vznikne teleso hore; otoč ním prstom.

**Graf**




$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

Krivka zadaná parametricky (alebo v polárnych súradniciach) nakreslená pre zvolené hranice parametra.

## Krivky zadané rovnicou

Pri rovnici s x a y (x³ + y³ = 3xy) ponúkne čip „Integrovať“ plochu, dĺžku, objem a plášť. Bez hraníc počíta s celou uzavretou krivkou: kružnicu a elipsu zapíše parametricky cez cos a sin, slučku prechádzajúcu začiatkom (Descartov list) pomocou priamok y = tx – plochu slučky potom vypočíta presne z výsekov, dĺžku, objem a plášť numericky. S hranicami v x použije hornú vetvu y = f(x).

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `x^3 + y^3 = 3xy` | Uzavretá krivka – čip „Integrovať“ bez hraníc. |
| `y^2 = x^3` | Neuzavretá krivka – čip „Integrovať“ s hranicami v x (horná vetva y = x^(3/2)). |

## Ukážky

### Plocha slučky Descartovho listu – cez priamky y = tx a výseky, S = 3/2.

Zadanie: `x^3 + y^3 = 3xy` Integrovať → Plocha

**Výsledok**

$$S = \frac{3}{2}$$

**Postup**

- Slučku prechádzajúcu začiatkom zapíšeme parametricky pomocou priamok y = tx – dosadíme do rovnice a vyjadríme x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- Obsah slučky sčítame z výsekov od začiatku: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, a na priamke y = tx je x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Konštantu vyberieme pred integrál

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Substitúcia $u = t^3+1,\ du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

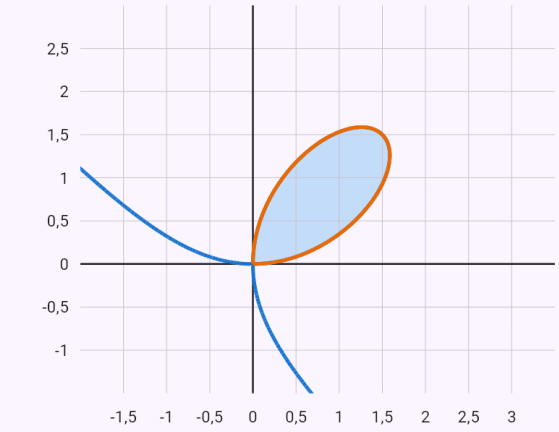
- Konštantu vyberieme pred integrál:

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Nevlastný integrál – v nekonečnej hranici a v bode, kde funkcia nie je ohraničená, berieme limitu primitívnej funkcie. Limity sú konečné, integrál konverguje

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

**Graf**




$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Celá krivka zadaná rovnicou; zvýraznená je časť, s ktorou sa počíta.

## Plocha lemniskáty – cez polárne súradnice.

Zadanie: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

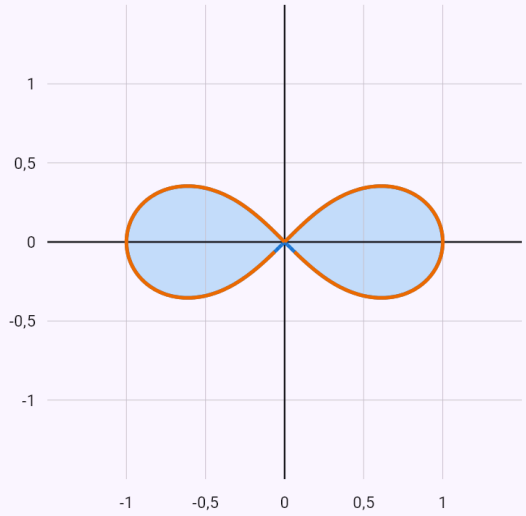
### Výsledok

$$S = 1$$

### Postup

- Krivku prevedieme do polárnych súradníc
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- Obsah plochy ohraničenej krivkou v polárnych súradniciach (sčítame výseky zo začiatku) pre
  $\varphi \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle, S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- Krivka má zhodné slučky (2), hodnotu jednej vynásobíme ich počtom: $2 \cdot 1$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konštantou pred ním:
  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

### Graf




$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Celá krivka zadaná rovnicou; zvýraznená je časť, s ktorou sa počíta.

## Pootočená elipsa s členom xy.

Zadanie: `x^2+x*y+y^2 = 1`

### Výsledok

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

### Postup

- Krivka je pootočená elipsa – osi nájdeme z uhla otočenia a zapíšeme ju parametricky

  $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{B}{A-C}, \quad x = \dfrac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \dfrac{\sqrt{3}\cos t$

- Derivácie podľa parametra:

  $x'(t) = -\cos t - \dfrac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \dfrac{\sqrt{3}\sin t}{3}$

- Obsah plochy pod parametricky zadanou krivkou (pri uzavretej krivke obsah vnútri) pre $t \in \langle 0;\, 2\pi \rangle$,

  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$

  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left( -\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \dfrac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \dfrac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) d$

- Integrál súčtu je súčet integrálov

  $\int \left( -\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \dfrac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \dfrac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) dt = \int -$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int -\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \int \cos^2 t\, dt$

- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left( \dfrac{\cos(2t)}{2} + \dfrac{1}{2} \right) dt$

- Integrál súčtu je súčet integrálov

  $\int \left( \dfrac{\cos(2t)}{2} + \dfrac{1}{2} \right) dt = \int \dfrac{1}{2}\, dt + \int \dfrac{\cos(2t)}{2}\, dt$

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \dfrac{1}{2}\, dt = \dfrac{t}{2}$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int \dfrac{\cos(2t)}{2}\, dt = \dfrac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

  $\int \cos(2t)\, dt = \dfrac{\sin(2t)}{2}$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int -\dfrac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\dfrac{4}{3} \int \cos t \cdot \sin t\, dt$

- Použijeme vzorec $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$:

  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \dfrac{\sin(2t)}{2}\, dt$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int \dfrac{\sin(2t)}{2}\, dt = \dfrac{1}{2} \int \sin(2t)\, dt$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

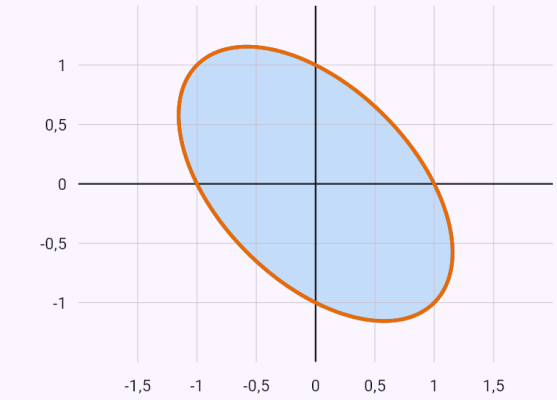
  $\int \sin(2t)\, dt = -\dfrac{\cos(2t)}{2}$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int -\dfrac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \int \sin^2 t\, dt$

- Použijeme vzorec $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\,dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\,dt$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{2}\,dt = \frac{t}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $$\int \cos(2t)\,dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- Newtonova–Leibnizova formula, F(b) − F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- Integrál vyšiel záporný (krivka sa prechádza sprava doľava) – vezmeme jeho absolútnu hodnotu:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

**Graf**




$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Celá krivka zadaná rovnicou; zvýraznená je časť, s ktorou sa počíta.

## Známe obmedzenia

- Dĺžku krivky y = ∛x (a podobných) vieme len numericky – vedie na eliptický integrál, ktorý nemá elementárnu primitívnu funkciu.
- Rotácia okolo osi y len pre oblasť na jednej strane osi.
- Vzorec s parametrami je len tam, kde výsledok nezávisí od vzťahu medzi parametrami; keď sa znamienko funkcie mení podľa ich hodnôt, aplikácia vzorec nedá.
- Pri implicitných krivkách bez hraníc vieme kužeľosečky (aj s členom xy), slučku začiatkom a krivky s dvoma homogénnymi časťami (lemniskáta).
- Určitý integrál s parametrom zatiaľ len s konečnými hranicami.
- Keď limitné porovnávacie kritérium nerozhodne (integrand v nekonečne osciluje, napríklad cos x/(x + ln x)), aplikácia hodnotu bez dôkazu konvergencie nedá a integrál ohlási ako zatiaľ nevyriešený.

# 32. Nekonečné rady

Pri číselnom rade aplikácia najprv overí nutnú podmienku konvergencie a potom zvolí jedno kritérium podľa tvaru radu – geometrický rad, $\Sigma\ 1/n^p$, podielové, odmocninové, limitné porovnávacie, integrálne alebo Leibnizovo kritérium; pri rade so striedavými znamienkami rozlíši absolútnu a neabsolútnu konvergenciu. Kde to ide, rad sčíta. V grafe sú členy a čiastočné súčty.

## Číselné rady

Súčet aplikácia nájde pri geometrickom a teleskopickom rade, pri radoch $\Sigma\ P(n)q^n$ a pri známych radoch ($\Sigma\ 1/n^2 = \pi^2/6$); inak ho vypočíta numericky. Konečný súčet sčíta ako v škole – teleskopický, aritmetický, geometrický, inak člen po člene. Vyrieši aj rovnicu so súčtom geometrického radu a overí podmienku konvergencie $|q| < 1$.

Súčet s premennou hornou hranicou (suma(k^2, k, 1, n)) sčíta podľa vzorcov pre súčty mocnín, geometrický súčet vzorcom a racionálny člen rozkladom na parciálne zlomky (teleskopicky); výsledok overí na prvých členoch.

**Ako zadať**

| | |
|---|---|
| `suma(1/n^2)` | Všeobecný člen; index n od 1 (aj sum, řada). |
| `suma(1/n^2, n, 1, oo)` | S indexom a začiatočným členom. |
| `\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}` | Z fotky alebo v zápise LaTeX. |
| `1/n^2` | Všeobecný člen s čipom „Rad“ – začiatočný index vyplníte do poľa. |
| `suma(2k+1, k, 1, 100)` | Konečný súčet – s indexom, dolnou a hornou hranicou. |
| `suma(k^2, k, 1, n)` | Súčet do n – vzorec pre súčet. |

## Ukážky

### Rad Σ 1/n² – konverguje, súčet π²/6.

Zadanie: `sum(1/n^2)`

**Výsledok**

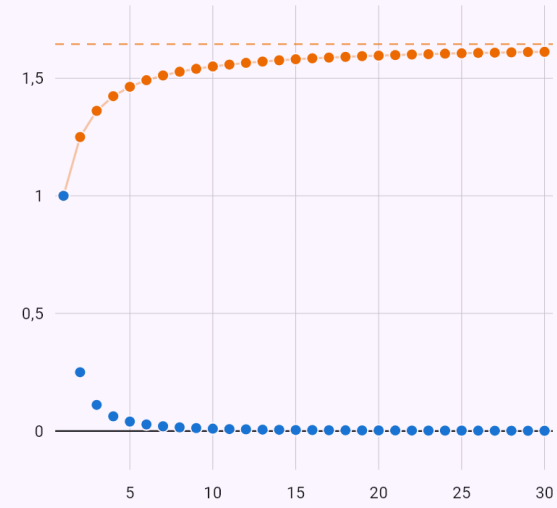
Rad konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

**Postup**

- Nutná podmienka konvergencie je splnená (sama o konvergencii nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je typu Σ 1/n^p s p = 2 > 1 – konverguje.
- Súčet známeho radu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Graf**




Body sú členy radu a_n a čiastočné súčty s_n = a_1 + … + a_n. Ak rad konverguje, členy sa blížia k nule a čiastočné súčty k jeho súčtu.

## Leibnizovo kritérium – konverguje neabsolútne.

Zadanie: `sum((-1)^(n+1)/n)`

### Výsledok

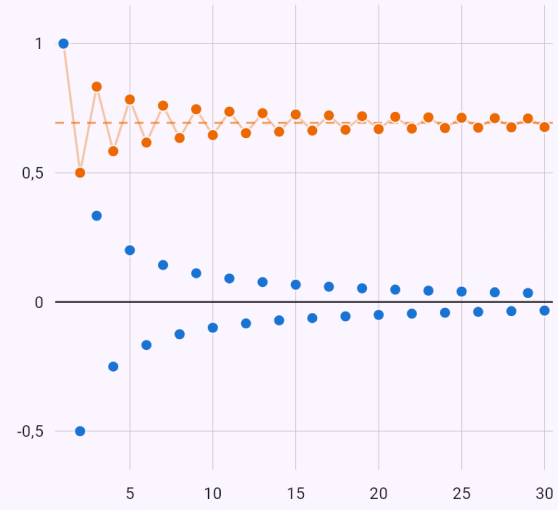
Rad konverguje, ale nie absolútne.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

### Postup

- Nutná podmienka konvergencie je splnená (sama o konvergencii nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Rad má členy rôznych znamienok – najprv vyšetríme absolútnu konvergenciu
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
- Harmonický rad diverguje – členy zoskupíme po mocninách dvoch, každá skupina je aspoň 1/2
  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$
- Leibnizovo kritérium: |a_n| = $\frac{1}{n}$ klesá a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – rad konverguje.
- Záver: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale nie absolútne (podľa Leibnizovho kritéria).
- Súčet známeho radu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

### Graf




Body sú členy radu a_n a čiastočné súčty s_n = a_1 + … + a_n. Ak rad konverguje, členy sa blížia k nule a čiastočné súčty k jeho súčtu.

## Podielové kritérium a súčet.

Zadanie: `sum(n/2^n)`

**Výsledok**

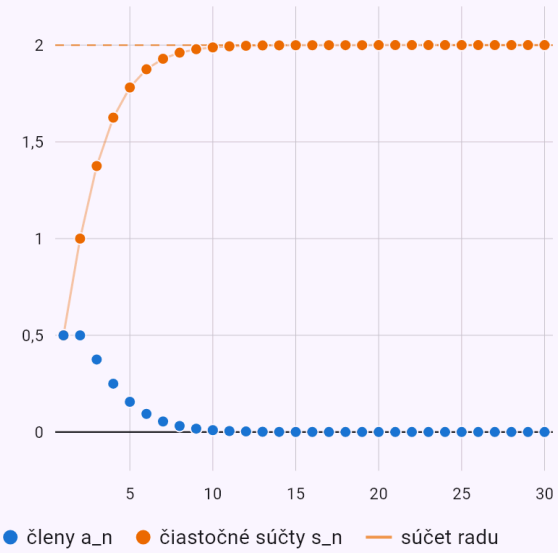
Rad konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

**Postup**

- Nutná podmienka konvergencie je splnená (sama o konvergencii nerozhoduje): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Podielové (d'Alembertovo) kritérium – rad konverguje.
  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Rad typu Σ P(n)·qⁿ sčítame derivovaním geometrického radu: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

**Graf**




Body sú členy radu a_n a čiastočné súčty s_n = a_1 + … + a_n. Ak rad konverguje, členy sa blížia k nule a čiastočné súčty k jeho súčtu.

## Nie je splnená nutná podmienka – rad diverguje.

Zadanie: `sum(n/(n+1))`

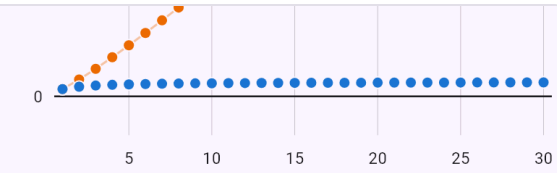
**Výsledok**

Rad diverguje.

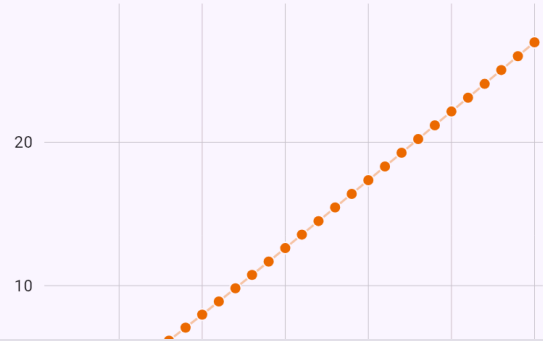
**Postup**

- Nutná podmienka konvergencie nie je splnená: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

**Graf**




Body sú členy radu a_n a čiastočné súčty s_n = a_1 + … + a_n. Ak rad konverguje, členy sa blížia k nule a čiastočné súčty k jeho súčtu.



## Teleskopický súčet – zostane prvý a posledný člen.

Zadanie: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

**Výsledok**

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

**Postup**

- Teleskopický súčet – susedné členy sa navzájom odčítajú, zostane len prvý a posledný: $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

## Rovnica so súčtom geometrického radu.

Zadanie: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

**Výsledok**

$$x = -1$$

**Postup**

- Rad je geometrický s kvocientom q = $2^x$ a konverguje pre $|2^x| < 1$; jeho súčet: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Vyriešime: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \;\Rightarrow\; x = -1$
- $x = -1$ spĺňa podmienku konvergencie: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

## Súčet druhých mocnín podľa vzorca.

Zadanie: `sum(k^2, k, 1, n)`

**Výsledok**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Postup**

- Použijeme vzorce pre súčty mocnín: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Súčet: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Teleskopický súčet do n – parciálne zlomky.**

Zadanie: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Výsledok

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Postup

- Člen rozložíme na parciálne zlomky – ich časti sa v súčte postupne odčítajú (teleskopický súčet): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- Súčet: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

## Mocninové rady

Pri mocninovom rade aplikácia nájde polomer konvergencie podielovým kritériom, krajné body vyšetrí ako číselné rady a uvedie obor konvergencie; kde to ide, aj súčet. Graf ukáže čiastočné súčty s posuvníkom počtu členov.

### Ukážky

#### Obor konvergencie ⟨−1; 1).

Zadanie: `sum(x^n/n)`

**Výsledok**

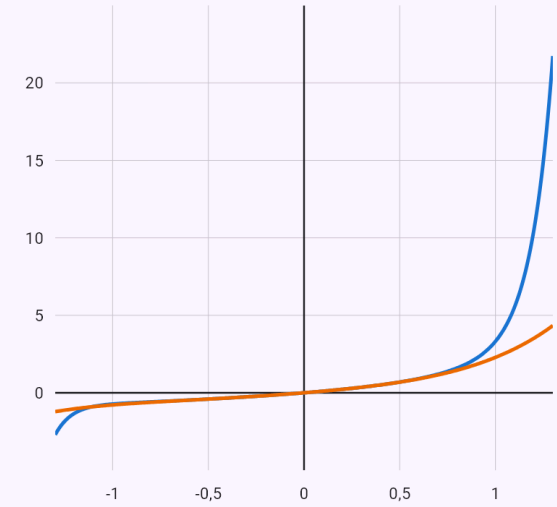
$$x \in \langle -1;\ 1)$$

**Postup**

- Polomer konvergencie R = 1 podielovým kritériom
  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$
- Krajný bod $x = -1$: rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale nie absolútne (podľa Leibnizovho kritéria).
- Krajný bod $x = 1$: rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje podľa zoskupenia členov harmonického radu.
- Obor konvergencie: $x \in \langle -1;\ 1)$

**Graf**

Členov: 5




$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Posuvníkom zvolíš počet sčítaných členov – čiastočné súčty sa k súčtu radu blížia len vnútri oboru konvergencie.

## Taylorov rad

Taylorov rad funkcie aplikácia odvodí zo známych rozvojov ($e^x$, sin x, ln(1 + x), …) dosadením a určí jeho obor konvergencie.

### Ako zadať

| | |
|---|---|
| `taylor(e^x, 0, oo)` | Funkcia, bod a oo namiesto stupňa; alebo čip „Taylorov polynóm“ → „Rad“. |

## Ukážky

### Rad ln(1 + x) a jeho obor konvergencie.

Zadanie: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

**Výsledok**

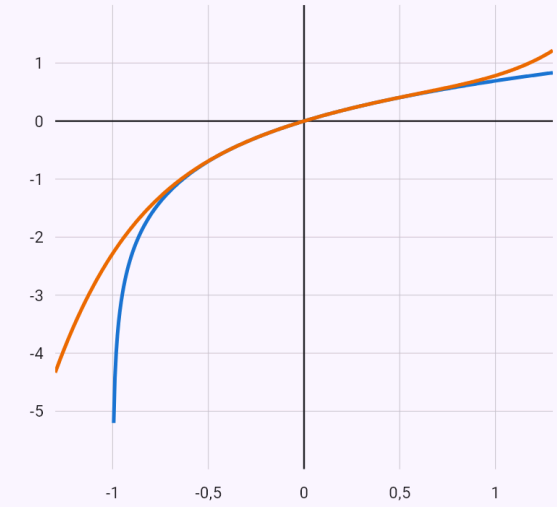
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

**Postup**

- Zo známeho rozvoja $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ dosadením $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Polomer konvergencie R = 1 podielovým kritériom $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- Krajný bod $x = -1$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverguje podľa zoskupenia členov harmonického radu.
- Krajný bod $x = 1$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale nie absolútne (podľa Leibnizovho kritéria).
- Obor konvergencie: $x \in (-1;\ 1\rangle$

**Graf**

Členov: 5




$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Posuvníkom zvoliš počet sčítaných členov – čiastočné súčty sa k súčtu radu blížia len vnútri oboru konvergencie.

# 33. Fourierove rady

Aplikácia zostaví Fourierov rad funkcie na intervale ako jednej periódе (bez zadania na $\langle -\pi; \pi \rangle$), alebo sínusový či kosínusový rad funkcie na $\langle 0; L \rangle$. Funkciu možno zadať aj po častiach.

Koeficienty počíta integrálmi s celým postupom (per partes s parametrom n), dosadí $\sin n\pi = 0$ a $\cos n\pi = (-1)^n$, pri párnej a nepárnej funkcii využije symetriu. V bodoch nespojitosti určí súčet radu podľa Dirichletovej vety a dosadením bodu a Parsevalovou rovnosťou z radu odvodí súčty číselných radov (napríklad $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$). Graf ukáže periodické rozšírenie funkcie a čiastočné súčty s posuvníkom.

Čipom „Komplexný“ (alebo zápisom fourierc) ukáže rad aj v komplexnom tvare: koeficienty $c_n$, ich vzťah k $a_n$ a $b_n$ a amplitúdové a fázové spektrum.

## Ako zadať

| | |
|---|---|
| `fourier(x^2, -pi, pi)` | Funkcia a interval. |
| `fouriersin(x, 0, pi)` | Sínusový rad (fouriercos – kosínusový). |
| `-1, -pi < x < 0`<br>`1, 0 < x < pi` | Funkcia po častiach po riadkoch, s čipom „Fourierov rad“. |
| `x^2` | Funkcia s čipom „Fourierov rad“ – druh radu a interval vyberiete tam. |

# Ukážky

## Párna funkcia – len kosínusy; súčty Σ 1/n² a Σ 1/n⁴.

Zadanie: `fourier(x^2)`

**Výsledok**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

**Postup**

- Interval $\langle -\pi;\ \pi \rangle$ berieme ako jednu periódu: $T = 2\pi$, polovica periódy $l = \pi$. Hľadáme rad s koeficientmi

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Funkcia je párna, $f(-x) = x^2 = f(x)$, takže koeficienty pri sínusoch sú nulové a zvyšné stačí počítať cez polovicu intervalu

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Koeficient $a_0$: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$

- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$

- Dosadíme hranice: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

- Koeficient $a_n$: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x^2$, v' = $\cos(nx)$, teda u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x$, v' = $\sin(nx)$, teda u' = $1$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pre celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Dosadíme hranice

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Dosadíme koeficienty do radu

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Periodické rozšírenie funkcie je spojité, takže podľa Dirichletovej vety je súčet radu rovný f(x) pre $x \in \langle -\pi;\, \pi \rangle$
- Dosadením $x = 0$ dostaneme súčet číselného radu

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Dosadením $x = \pi$ dostaneme súčet číselného radu

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

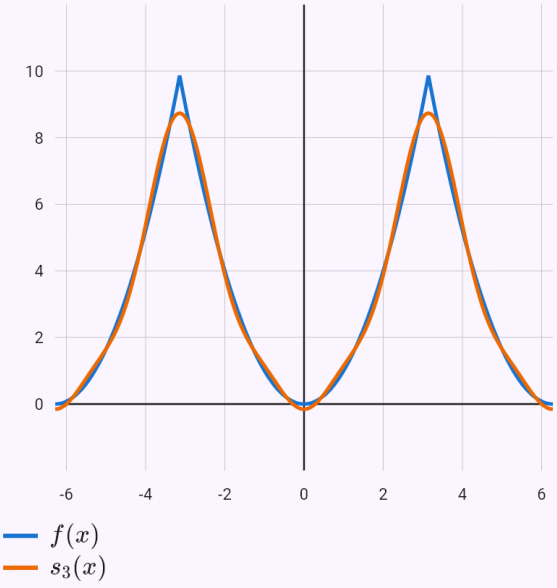
- Z Parsevalovej rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

**Graf**

Členy do n = 3




Funkcia je rozšírená periodicky. Posuvníkom pridávaš členy radu – čiastočné súčty sa k funkcii blížia; pri skoku prekmitávajú (Gibbsov jav) a prechádzajú priemerom oboch strán, vyznačeným bodom.

## Funkcia po častiach – skoky a Gibbsov jav.

Zadanie: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Fourierov rad

### Výsledok

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

### Postup

- Interval $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ berieme ako jednu periódu: $T = 2\pi$, polovica periódy $l = \pi$. Hľadáme rad s koeficientmi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkcia je nepárna, $f(-x) = -f(x)$, takže absolútny člen aj koeficienty pri kosínusoch sú nulové a koeficienty pri sínusoch stačí počítať cez polovicu intervalu

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Koeficient $b_n$: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Pre celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Dosadíme hranice

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Dosadíme koeficienty do radu:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Členy s párnym n sú nulové, sčítame len nepárne n = 2k – 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Podľa Dirichletovej vety je súčet radu rovný f(x) pre $x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi)$; v bode nespojitosti je priemerom jednostranných limít

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Dosadením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme súčet číselného radu

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

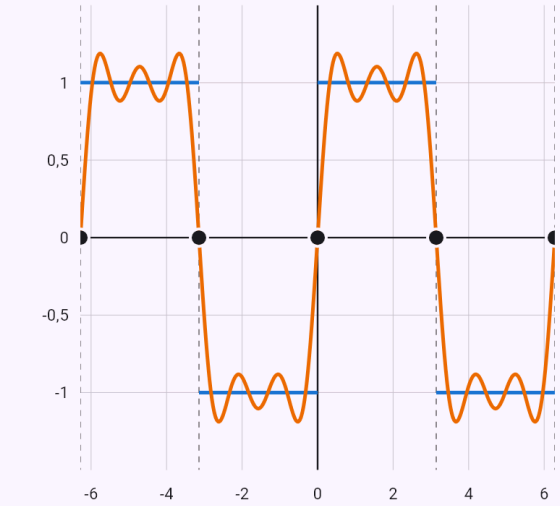
- Z Parsevalovej rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

### Graf

Členy do n = 5




Funkcia je rozšírená periodicky. Posuvníkom pridávaš členy radu – čiastočné súčty sa k funkcii blížia; pri skoku prekmitávajú (Gibbsov jav) a prechádzajú priemerom oboch strán, vyznačeným bodom.

# Sínusový rad a súčet 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Zadanie: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

### Výsledok

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

### Postup

- Funkciu z intervalu $\langle 0;\ \pi\rangle$ rozšírime nepárne a potom periodicky ($T = 2\pi$) – vznikne sínusový rad

  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, kde

  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

- Koeficient $b_n$: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, teda u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$

- Konštantu vyberieme pred integrál

  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, teda u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$

- Konštantu vyberieme pred integrál:

  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:

  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$

- Pre celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Dosadíme hranice

  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$

- Dosadíme koeficienty do radu:

  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$

- Členy s párnym n sú nulové, sčítame len nepárne n = 2k − 1

  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right.$

- Periodické rozšírenie funkcie je spojité, takže podľa Dirichletovej vety je súčet radu rovný f(x) pre $x \in \langle 0;\ \pi\rangle$

- Dosadením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme súčet číselného radu

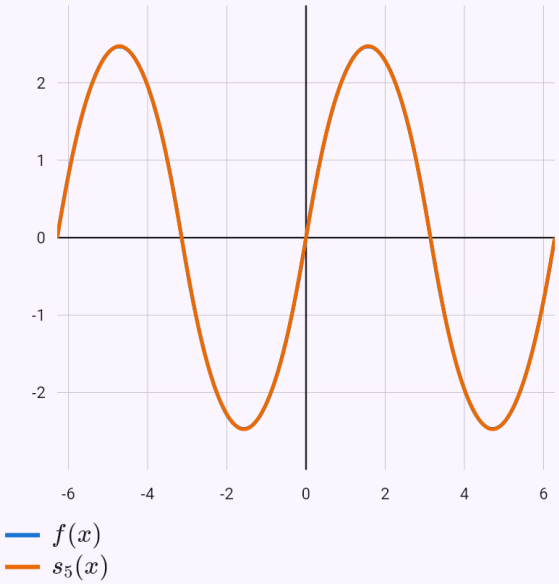
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

- Z Parsevalovej rovnosti $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ dostaneme

  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

### Graf

Členy do n = 5




Funkcia je rozšírená periodicky. Posuvníkom pridávaš členy radu – čiastočné súčty sa k funkcii blížia; pri skoku prekmitávajú (Gibbsov jav) a prechádzajú priemerom oboch strán, vyznačeným bodom.

## Komplexný tvar so spektrom.

Zadanie: `fourierc(x, -pi, pi)`

### Výsledok

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

### Postup

- Interval $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ berieme ako jednu periódu: $T = 2\pi$, polovica periódy $l = \pi$. Hľadáme rad s koeficientmi

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkcia je nepárna, $f(-x) = -x = -f(x)$, takže absolútny člen aj koeficienty pri kosínusoch sú nulové a koeficienty pri sínusoch stačí počítať cez polovicu intervalu

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Koeficient $b_n$: $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Per partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x$, v' = $\sin(nx)$, teda u' = $1$, v = $-\dfrac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\displaystyle\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej:
  $\displaystyle\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Pre celé n platí $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Dosadíme hranice

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Dosadíme koeficienty do radu:
  $\displaystyle s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

- Podľa Dirichletovej vety je súčet radu rovný f(x) pre $x \in (-\pi;\ \pi)$; v bode nespojitosti je priemerom jednostranných limít:
  $\displaystyle s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$

- Dosadením $x = \dfrac{\pi}{2}$ dostaneme súčet číselného radu

  $$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Z Parsevalovej rovnosti dostaneme

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Komplexný tvar radu: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$, kde
  $c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-inx}\,dx$. Vzťah k reálnemu tvaru

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Dosadíme koeficienty reálneho tvaru

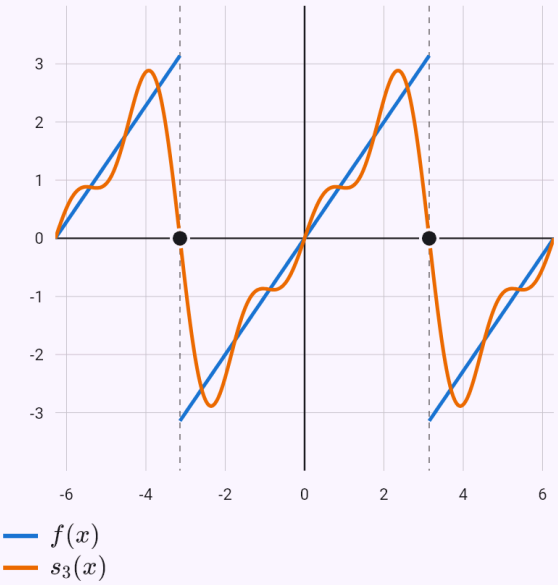
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

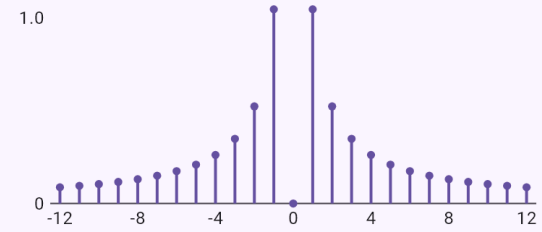
**Graf**

Členy do n = 3

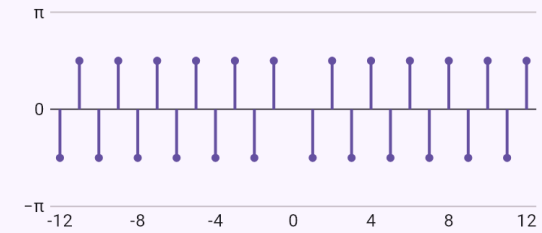



Funkcia je rozšírená periodicky. Posuvníkom pridávaš členy radu – čiastočné súčty sa k funkcii blížia; pri skoku prekmitávajú (Gibbsov jav) a prechádzajú priemerom oboch strán, vyznačeným bodom.

**Amplitúdové spektrum $|c_n|$**




**Fázové spektrum arg $c_n$**




Na vodorovnej osi je n. Výška ukazuje veľkosť, respektíve uhol koeficientu $c_n$; nulové koeficienty fázu nemajú.

## Známe obmedzenia

- Funkciu neohraničenú pri kraji intervalu (ln x na ⟨0; 2π⟩) rozvinieme s numericky vypočítanými koeficientmi; v bode, kde rastie nad všetky medze, Dirichletova veta neplatí. Funkciu s pólom (1/x) nerozvinieme – nie je integrovateľná.
- Keď koeficienty vedú na integrál bez elementárnej primitívnej funkcie (ln x na ⟨1; 3⟩), sú vyjadrené pomocou integrálneho sínusu a kosínusu.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace