Mathtrace – príručka

IV. Diferenciálne rovnice a pokročilá analýza

Obsah

IV. Diferenciálne rovnice a pokročilá analýza

34. Funkcionálna analýza

35. Funkcie komplexnej premennej

36. Diferenciálne rovnice

37. Variačný počet

38. Parciálne diferenciálne rovnice

39. Rekurencie a vytvárajúce funkcie

40. Numerické metódy

34. Funkcionálna analýza

> *„Lineárna funkcionálna analýza je vlastne lineárna algebra v nekonečnej dimenzii.“*
>
> – prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., na úvodnej prednáške

Výpočtová časť lineárnej funkcionálnej analýzy. Normu vektora zapíšete ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ alebo iné číslo; bez indexu aplikácia vypočíta všetky tri), normu postupnosti v priestore ℓ^p ||1/n||_2 – aplikácia sčíta rad $\Sigma|a_n|^p$, a keď diverguje, postupnosť v priestore neleží. Normu funkcie v L^p zapíšete ||x^2||_{L^2(0; 1)}: absolútnu hodnotu aplikácia odstráni rozdelením integrálu v nulových bodoch funkcie. Suprémová norma ||f||_{C⟨a; b⟩} je najväčšia hodnota |f| zo stacionárnych a krajných bodov. dist(f, g, ⟨a; b⟩) dá vzdialenosť dvoch funkcií v suprémovej norme aj v L^2, holder(...) a minkowski(...) overia Hölderovu a Minkowského nerovnosť na zadaných funkciách alebo vektoroch.

Postupnosť funkcií convergence(x^n, ⟨0; 1⟩) (aj konvergence(...), alebo f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) aplikácia rozoberie v troch krokoch: bodová limita po častiach intervalu (mocnina q^n ide k nule pre |q| < 1), rovnomerná konvergencia podľa $s_n = \sup |f_n - f|$ zo stacionárneho bodu x_n (nespojitá limita spojitých funkcií rovnomerná byť nemôže) a konvergencia v L^2 podľa $\int (f_n - f)^2$. Kde vzorec nejde, odhadne suprémum aj integrál numericky. Graf má posuvník cez členy f_1 až f_{20}.

Skalárny súčin v L^2 s váhou inner(f, g, ⟨a; b⟩) (voliteľne w = ...) dá aj normy a uhol funkcií. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) vykoná Gramov–Schmidtov proces a spozná klasické polynómy: Legendrove, Čebyševove s váhou $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ alebo $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerrove s e^(−x) na ⟨0; ∞⟩ a Hermitove s e^(−x²); funguje aj pre vektory. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) nájde najlepšiu aproximáciu polynómom stupňa n ako ortogonálny priemet, s chybou a Besselovou nerovnosťou. Parsevalovu rovnosť (a odvodenie $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) nájdete pri Fourierových radoch.

Normy matíc zapíšete ||[1 2; 3 4]||_1 (tiež _2, _oo a _F pre Frobeniovu; bez indexu aplikácia vypočíta všetky), číslo podmienenosti cond([1 2; 3 4]) (voliteľne p = 1). Normu integrálneho operátora s jadrom K(x, t) vypočíta opnorm(x t, ⟨0; 1⟩): na C⟨a; b⟩ ako maximum $\int |K|\, dt$, v L^2 presne pre degenerované jadro, inak odhadom Hilbertovou–Schmidtovou normou. fnorm(g, ⟨a; b⟩) dá normu funkcionálu $\varphi(u) = \int u \cdot g$ na C a na L^2 (Rieszova veta), s p = ... na L^p.

Integrálnu rovnicu 2. druhu napíšte tak, ako ju vidíte: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholmova) alebo u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterrova); ide to aj z fotky, prípadne príkazmi fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) a volterra(K; f; λ; a). Degenerované jadro aplikácia prevedie na sústavu lineárnych rovníc; s parametrom λ nájde charakteristické čísla, vlastné funkcie a rozhodne podľa Fredholmovej alternatívy. Iné jadro rieši Neumannovým radom a Nyströmovou metódou, Volterrovu rovnicu s jadrom k(x − t) Laplaceovou transformáciou.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) overí predpoklady Banachovej vety o pevnom bode (g zobrazuje interval do seba, q = max |g′| < 1), vypočíta apriórny počet krokov a iteruje s aposteriórnym odhadom chyby (voliteľne eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) to isté pre sústavu x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) dá Picardove postupné aproximácie s intervalom, kde je operátor kontrakciou, a odhadom chyby. Funkcionálne rovnice Cauchyho typu – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), Jensenovu a d'Alembertovu – aplikácia vyrieši aj s odvodením.

Ako zadať

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normy vektora, postupnosti (ℓ^p) a funkcie (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	Vzdialenosť dvoch funkcií v suprémovej norme a v L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Hölderova a Minkowského nerovnosť.
`konvergence(f_n, ⟨a; b⟩)`	Bodová, rovnomerná a L^2 konvergencia postupnosti funkcií.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Skalárny súčin, normy a uhol funkcií.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Gramov–Schmidtov proces pre funkcie aj vektory.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Najlepšia aproximácia polynómom stupňa n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normy matice 1, 2, ∞, Frobeniova a číslo podmienenosti.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	Norma integrálneho operátora a funkcionálu ∫u·g.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Fredholmova a Volterrova integrálna rovnica 2. druhu.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Banachova veta o pevnom bode a Picardove aproximácie.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Funkcionálne rovnice Cauchyho typu.

Ukážky

Normy 1, 2 a ∞ jedného vektora.

Zadanie: `||(1; -2; 3)||`

Výsledok

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Postup

- Tri najbežnejšie normy vektora $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: súčet absolútnych hodnôt zložiek ($\|\cdot\|_1$), euklidovská dĺžka ($\|\cdot\|_2$) a najväčšia absolútna hodnota zložky ($\|\cdot\|_\infty$)
  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$
  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$
  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

‖1/n‖₂ = π/√6 – Bazilejský problém.

Zadanie: `||1/n||_2`

Výsledok

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Postup

- Norma postupnosti $a_n = \frac{1}{n}$ v priestore ℓ² pre p = 2:
  sčítame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ a výsledok odmocníme
  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

Harmonický rad diverguje – 1/n v ℓ¹ neleží.

Zadanie: `||1/n||_1`

Výsledok

Postupnosť (funkcia) v tomto priestore neleží – jej norma je nekonečná.

Postup

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ – postupnosť $a_n = \frac{1}{n}$ nemá konečnú normu, v priestore ℓ² pre p = 1 neleží.

Absolútna hodnota odstránená rozdelením integrálu.

Zadanie: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Výsledok

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Postup

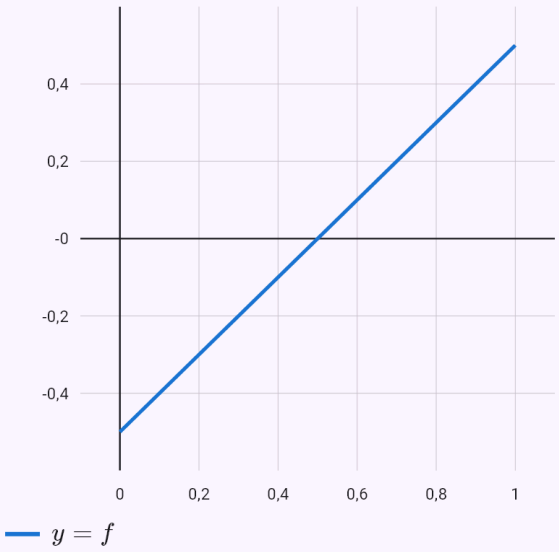
- Absolútnu hodnotu odstránime tak, že integrál rozdelíme v nulových bodoch funkcie $x = \frac{1}{2}$ – na každom úseku má funkcia stále znamienko

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- Norma v priestore L^p pre p = 3: integrál $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, a teda

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Graf



Funkcia na zadanom intervale.

Suprémová norma zo stacionárnych a krajných bodov.

Zadanie: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Výsledok

$$\|f\|_\infty = 18$$

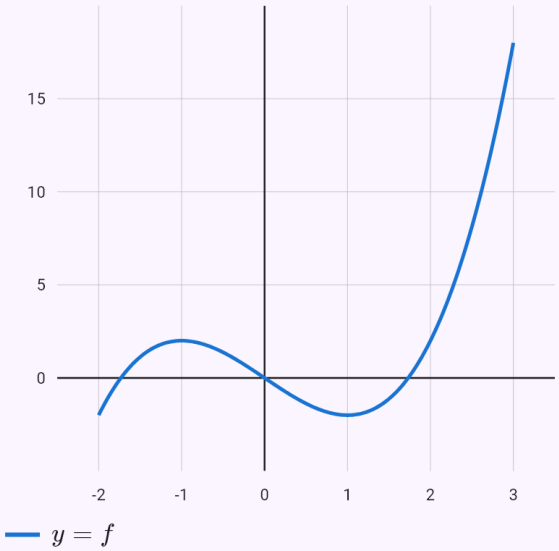
Postup

- Supremová norma spojitej funkcie na uzavretom intervale je najväčšia hodnota |f|. Hľadáme ju v krajných bodoch a v stacionárnych bodoch vnútri: derivácia $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, stacionárne body $x = -1,\ x = 1$
- Hodnoty |f| v týchto bodoch

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- Najväčšia z nich je supremová norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in \langle -2;\, 3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Graf



Funkcia na zadanom intervale.

Vzdialenosť v suprémovej norme a v L².

Zadanie: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Postup

- Vzdialenosť dvoch funkcií je norma ich rozdielu: $f - g = x(1-x)$
- Suprémová norma spojitej funkcie na uzavretom intervale je najväčšia hodnota |f|. Hľadáme ju v krajných bodoch a v stacionárnych bodoch vnútri: derivácia $(f-g)'(x) = 1 - 2x$, stacionárne body $x = \frac{1}{2}$
- Hodnoty |f| v týchto bodoch

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

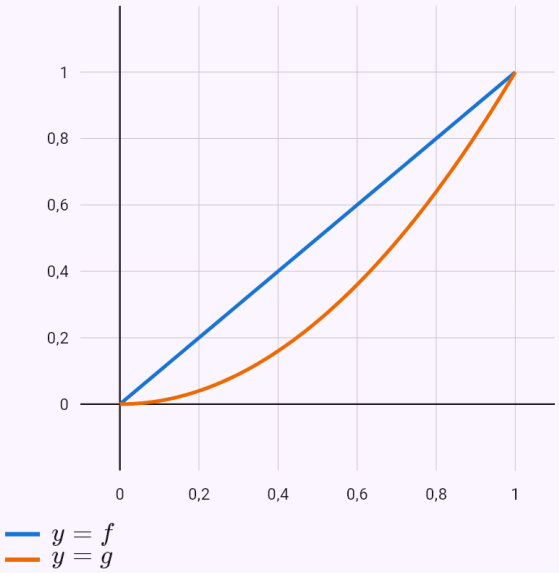
- Najväčšia z nich je suprémová norma

$$\|(f-g)\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

- Norma v priestore L² pre p = 2: integrál $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, a teda

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Graf



Obe funkcie na zadanom intervale.

Hölderova nerovnosť so združeným exponentom q = 3/2.

Zadanie: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

$$\left|\int_0^1 f\,g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Postup

- Hölderova nerovnosť pracuje so združeným exponentom q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- Norma v priestore L^3 pre p = 3: integrál $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, a teda
  $$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$$
- Norma v priestore $L^{\frac{3}{2}}$ pre p = $\frac{3}{2}$: integrál $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, a teda
  $$\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$$
- Ľavá strana $\left|\int_0^1 f\,g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, pravá strana $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – Hölderova nerovnosť platí.

x^n – bodovo áno, rovnomerne nie, v L^2 áno.

Zadanie: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

Postupnosť funkcií konverguje bodovo, ale nie rovnomerne.

Postup

- O limite rozhoduje mocnina q^n so základom $q = x$: pre $|q| < 1$ ide $q^n \to 0$ (rýchlejšie, ako rastie akákoľvek mocnina n), pre $|q| > 1$ rastie nad všetky medze. Body, kde $|q| = 1$, počítame zvlášť.
- Bodová limita: pre každé pevné x je $f_n(x) = x^n$ postupnosť čísel, vypočítame jej limitu pre $n \to \infty$

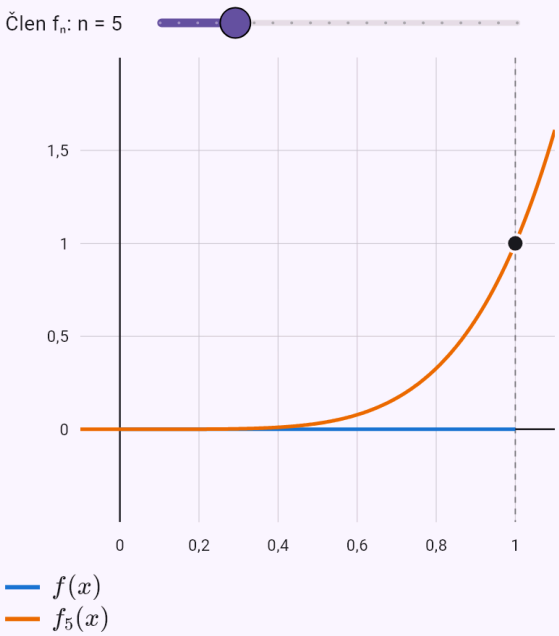
$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- Limitná funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Všetky funkcie f_n sú spojité, limitná funkcia v bode $x = 1$ spojitá nie je. Rovnomerná limita spojitých funkcií je spojitá – konvergencia preto rovnomerná nie je.
- Konvergencia v L^2: $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – postupnosť konverguje v L^2.

Graf



Limitná funkcia f a zvolený člen f_n – posuvníkom sledujte, ako sa f_n k f blíži.

Rovnomerná konvergencia: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Zadanie: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Výsledok

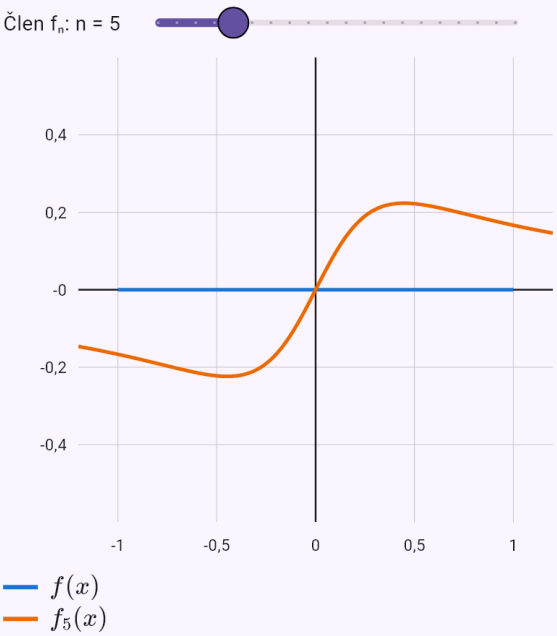
Postupnosť funkcií konverguje rovnomerne.

Postup

- Bodová limita: pre každé pevné x je $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ postupnosť čísel, vypočítame jej limitu pre n → ∞
  $x \in \langle -1;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Limitná funkcia: $f(x) = 0$
- Rovnomernosť posúdime podľa $s_n = \sup |f_n - f|$. Rozdiel $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ má deriváciu $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; kandidáti na najväčšiu hodnotu sú $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Keďže $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, konvergencia je rovnomerná.
- Konvergencia v L^2 – integrál $\|f_n - f\|_2^2$ vypočítame numericky. Hodnoty klesajú k nule – postupnosť konverguje v L^2.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Graf



Limitná funkcia f a zvolený člen f_n – posuvníkom sledujte, ako sa f_n k f blíži.

Putujúci hrb – bodovo k nule, s_n aj $\|f_n\|_2$ však rastú.

Zadanie: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

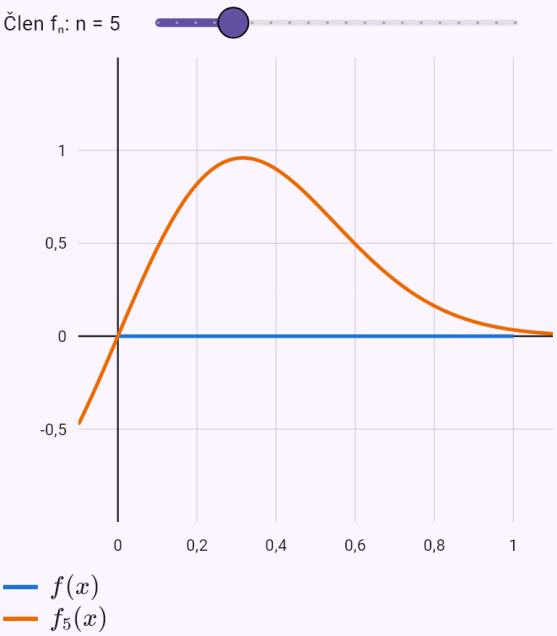
Postupnosť funkcií konverguje bodovo, ale nie rovnomerne.

Postup

- O limite rozhoduje mocnina q^n so základom $q = e^{-x^2}$: pre $|q| < 1$ ide $q^n \to 0$ (rýchlejšie, ako rastie akákoľvek mocnina n), pre $|q| > 1$ rastie nad všetky medze. Body, kde $|q| = 1$, počítame zvlášť.
- Bodová limita: pre každé pevné x je $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ postupnosť čísel, vypočítame jej limitu pre $n \to \infty$
  $x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Limitná funkcia: $f(x) = 0$
- Rovnomernosť posúdime podľa $s_n = \sup |f_n - f|$. Rozdiel $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ má deriváciu $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; kandidáti na najväčšiu hodnotu sú $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Keďže $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (nie 0), konvergencia rovnomerná nie je.
  $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$
- Konvergencia v L^2 – integrál $\|f_n - f\|_2^2$ vypočítame numericky. Hodnoty k nule neklesajú – postupnosť v L^2 nekonverguje.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Graf



Limitná funkcia f a zvolený člen f_n – posuvníkom sledujte, ako sa f_n k f blíži.

Skalárny súčin, normy a uhol dvoch funkcií.

Zadanie: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

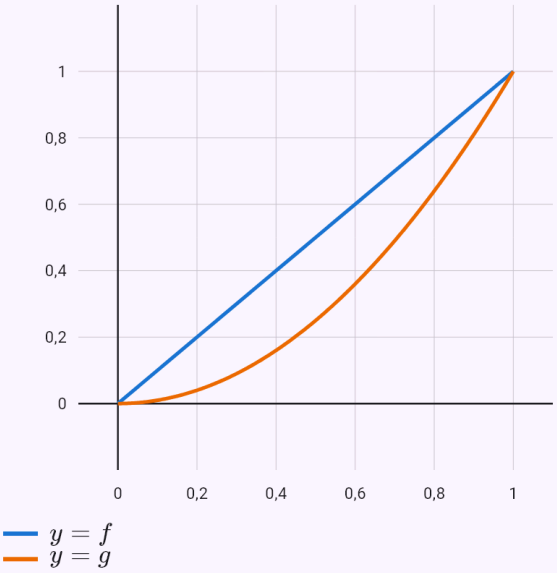
Postup

- Skalárny súčin v priestore L²: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$
- Normy oboch funkcií dané skalárnym súčinom

  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$
- Uhol medzi funkciami (Cauchyho–Schwarzova nerovnosť zaručuje |cos φ| ≤ 1)

  $\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$

Graf



Obe funkcie na zadanom intervale.

Legendrove polynómy z 1, x, x², x³.

Zadanie: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Výsledok

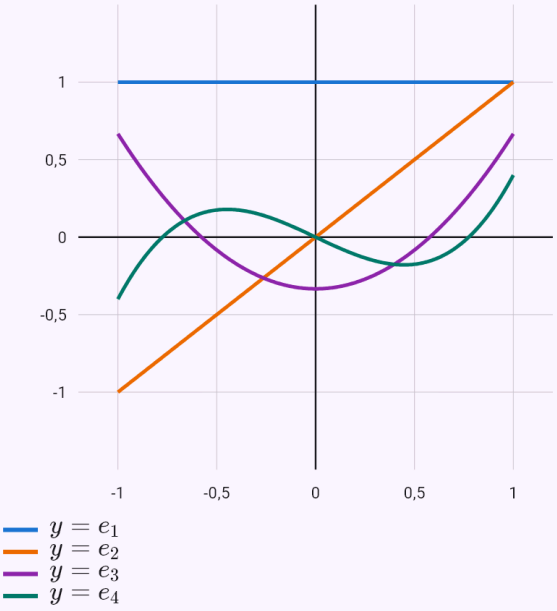
$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Postup

- Gramov–Schmidtov proces – prvú funkciu ponecháme: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Krok 2: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Potrebné skalárne súčiny: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Krok 3: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Potrebné skalárne súčiny: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Krok 4: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Potrebné skalárne súčiny $\langle f_4, e_1\rangle = 0$, $\langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5}$, $\langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Vydelením normami dostaneme ortonormálny systém $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$, $\hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$
- Ide o Legendreove polynómy – v obvyklom tvare s $P_k(1) = 1$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Graf



Ortogonálne funkcie na zadanom intervale.

Čebyševove polynómy – integrály z momentov váhy.

Zadanie: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Výsledok

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Postup

- Skalárne súčiny polynómov s váhou $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ vypočítame z momentov váhy $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$

  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$

- Gramov–Schmidtov proces – prvú funkciu ponecháme: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$

- Krok 2: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Potrebné skalárne súčiny: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$

- Krok 3: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Potrebné skalárne súčiny

  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$

- Krok 4: od funkcie odčítame jej priemety do predchádzajúcich: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Potrebné skalárne súčiny

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

- Vydelením normami dostaneme ortonormálny systém

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$

- Ide o Čebyševove polynómy 1. druhu, $T_k(\cos t) = \cos kt$

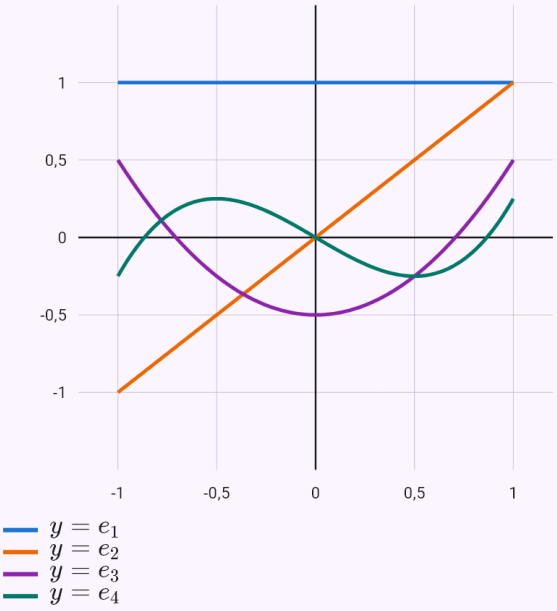
  $T_0(x) = 1$

  $T_1(x) = x$

  $T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$

  $T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$

Graf



Ortogonálne funkcie na zadanom intervale.

Najlepšia kvadratická aproximácia e^x na $\langle -1; 1 \rangle$.

Zadanie: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

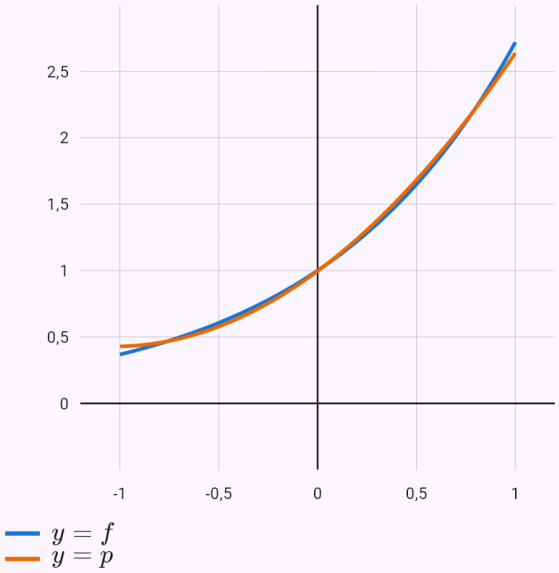
Výsledok

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Postup

- Najlepšia aproximácia v L^2 je ortogonálny priemet do polynómov stupňa najviac n. Ortogonálnu bázu dá Gramov–Schmidtov proces z 1, x, x^2, …:
  $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$;
  $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Koeficienty priemetu
  $$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$
  $$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$
  $$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$
- Najlepšia aproximácia
  $$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$
- Chyba podľa Pytagorovej vety: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Besselova nerovnosť: $\sum c_k^2 \|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Pre úplný systém (n → ∞) prejde na rovnosť – Parsevalovu rovnosť.
  $$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2 \|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Graf



Funkcia f a jej najlepšia aproximácia p.

Normy 1, 2, ∞ a Frobeniova jednej matice.

Zadanie: `||[1 2; 3 4]||`

Výsledok

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Postup

- Matica
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Stĺpcová norma je najväčší zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v stĺpcoch:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, teda
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- Spektrálna norma je odmocnina z najväčšieho vlastného čísla matice. Vlastné čísla teda
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- Riadková norma je najväčší zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v riadkoch:
  $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, teda
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- Frobeniova norma je odmocnina zo súčtu štvorcov všetkých prvkov
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Skoro singulárna matica – κ ≈ 4·10⁴.

Zadanie: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Výsledok

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Postup

- Matica
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- Spektrálna norma je odmocnina z najväčšieho vlastného čísla matice. Vlastné čísla teda
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- Číslo podmienenosti. Udáva, koľkokrát sa môže zväčšiť relatívna chyba vstupu; pri riešení sústavy sa môže stratiť asi $4{,}6$ platných číslic – matica je zle podmienená.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$

Jadro mení znamienko – integrál rozdelený v t = x.

Zadanie: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Postup

- Norma integrálneho operátora na priestore C⟨a; b⟩ je najväčšia hodnota funkcie φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Jadro $K(x,t) = x - t$ mení znamienko tam, kde K = 0 – integrál v tomto bode rozdelíme

  $$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- Supremová norma spojitej funkcie na uzavretom intervale je najväčšia hodnota |f|. Hľadáme ju v krajných bodoch a v stacionárnych bodoch vnútri: derivácia $\varphi'(x) = 2x - 1$, stacionárne body $x = \frac{1}{2}$

- Hodnoty |f| v týchto bodoch

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Najväčšia z nich je supremová norma

  $$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Jadro je degenerované, $K(x,t) = -t + x$. Normu v L² potom dajú Gramove matice funkcií a⃗(x) a b⃗(t). Na porovnanie Hilbertova–Schmidtova norma je vždy väčšia alebo rovná.

  $$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

  $$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

  $$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

Norma funkcionálu na C a na L² (Rieszova veta).

Zadanie: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

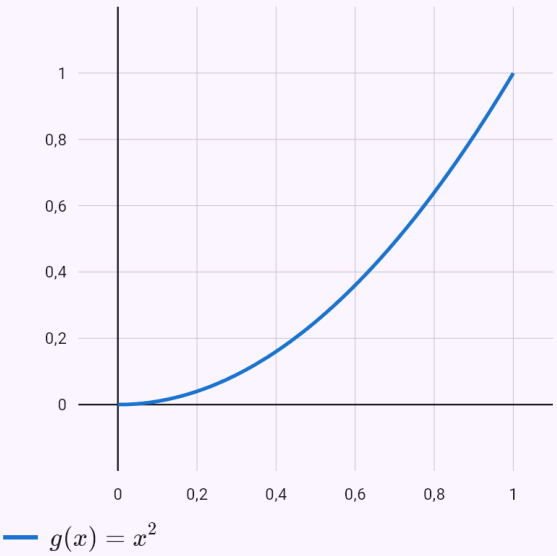
Výsledok

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Postup

- Funkcionál φ(u) = ∫u·g na priestore $C\langle 0;\,1\rangle$ so supremovou normou: jeho norma je integrál z |g|, hodnote sa blížia spojité funkcie u ≈ sgn g:
  $$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1}\left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_1$$
- Norma v priestore L¹ pre p = 1: integrál $\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$, a teda $\|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$
- Na priestore $L^2\langle 0;\,1\rangle$ je funkcionál φ(u) = ∫u·g skalárnym súčinom s funkciou g (Rieszova veta). Podľa Cauchyho–Schwarzovej nerovnosti je jeho norma ‖g‖₂, dosiahnutá pre u = g/‖g‖₂: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1}\left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_2$
- Norma v priestore L² pre p = 2: integrál $\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}$, a teda
  $$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Graf



Funkcia na zadanom intervale.

Degenerované jadro s parametrom λ.

Zadanie: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Výsledok

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Podmienky: $\lambda \neq 3$

Postup

- Fredholmova integrálna rovnica 2. druhu (hranice integrálu sú pevné): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\,u(t)\,dt$, jadro $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jadro je degenerované – súčin funkcie premennej x a funkcie premennej t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Integrály s neznámou funkciou sú čísla – označíme ich ako neznáme konštanty $c = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$. Riešenie má preto tvar $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Dosadením tohto tvaru do definícií konštánt dostaneme sústavu lineárnych rovníc s koeficientmi

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}$

  $c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$
- Sústava má jediné riešenie, ak je jej determinant nenulový: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Jeho korene sú charakteristické čísla jadra: $\lambda_1 = 3$
- Pre $\lambda \neq 3$ má sústava riešenie $c = \frac{1}{3-\lambda}$, a teda $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Pre $\lambda_1 = 3$ má homogénna rovnica nenulové riešenia – vlastné funkcie $\varphi_1(x) = x$
- Fredholmova alternatíva pre $\lambda_1 = 3$: sústava je neriešiteľná ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), rovnica pre toto λ riešenie nemá (vlastná funkcia $\varphi(x) = x$).

Charakteristické čísla a vlastné funkcie.

Zadanie: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Výsledok

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Postup

- Fredholmova integrálna rovnica 2. druhu (hranice integrálu sú pevné): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\,u(t)\,dt$, jadro $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jadro je degenerované – súčet 2 súčinov funkcie premennej x a funkcie premennej t: $K(x,t) = t + x$
- Integrály s neznámou funkciou sú čísla – označíme ich ako neznáme konštanty $c_1 = \int_0^1 t\,u(t)\,dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\,dt$. Riešenie má preto tvar $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Dosadením tohto tvaru do definícií konštánt dostaneme sústavu lineárnych rovníc s koeficientmi

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

  $c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$

  $c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$
- Sústava má jediné riešenie, ak je jej determinant nenulový: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Jeho korene sú charakteristické čísla jadra: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Pre $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ má homogénna rovnica nenulové riešenia – vlastné funkcie $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Pre $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ má homogénna rovnica nenulové riešenia – vlastné funkcie $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Nedegenerované jadro – Neumannov rad a Nyströmova metóda.

Zadanie: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Výsledok

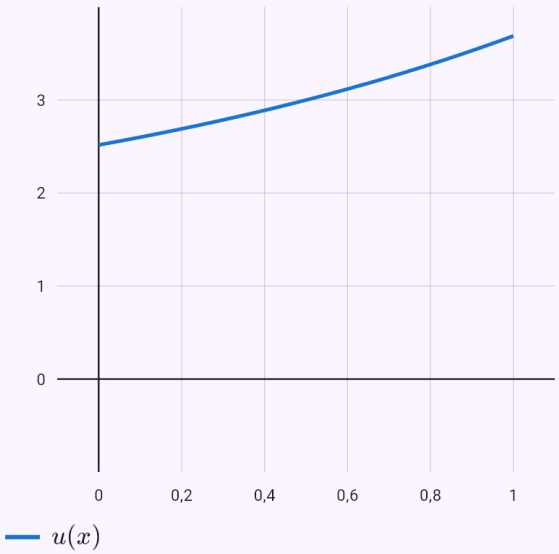
$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Postup

- Fredholmova integrálna rovnica 2. druhu (hranice integrálu sú pevné): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, jadro $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Jadro nie je degenerované. Neumannov rad – postupné aproximácie $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – konverguje, pretože $|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$
- Nyströmova metóda: integrál nahradíme Gaussovou kvadratúrou s 32 uzlami, rovnica v uzloch dá lineárnu sústavu a hodnoty medzi uzlami dopočítame zo samotnej rovnice. Porovnanie s polovičným počtom uzlov ukazuje presnosť asi 10^{-8}. Hodnoty riešenia

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$u(x)$	$2{,}517$	$2{,}7372$	$2{,}9997$	$3{,}3134$	$3{,}6894$

Graf



Riešenie integrálnej rovnice.

Volterrova rovnica Laplaceovou transformáciou – cos x.

Zadanie: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

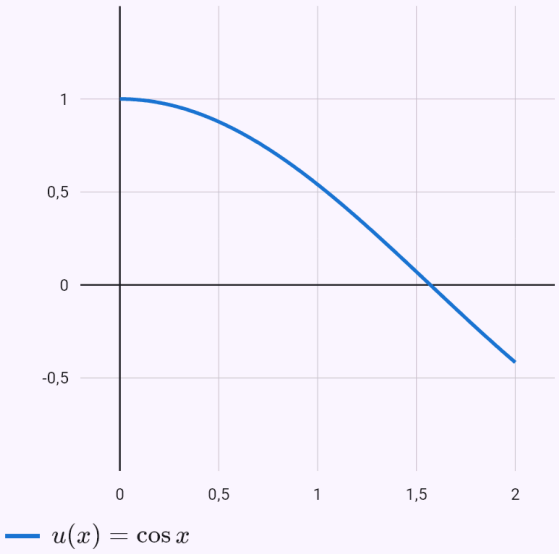
Výsledok

$$u(x) = \cos x$$

Postup

- Volterrova integrálna rovnica 2. druhu (horná hranica je x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, jadro $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Jadro závisí len od rozdielu x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – integrál je konvolúcia a Laplaceova transformácia z nej urobí súčin. Obrazy. Rovnica pre obrazy $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, odtiaľ $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Spätnou transformáciou $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$ $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$

Graf



Riešenie integrálnej rovnice.

Pevný bod cos x s apriórnym a aposteriórnym odhadom.

Zadanie: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Výsledok

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Postup

- Banachova veta o pevnom bode potrebuje, aby $g(x) = \cos x$ zobrazovala interval $I = \langle 0;\ 1\rangle$ do seba. Obor hodnôt (z krajných a stacionárnych bodov) je $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – leží v I.
- Supremová norma spojitej funkcie na uzavretom intervale je najväčšia hodnota |f|. Derivácia $g''(x) = -\cos x$ vnútri intervalu nulový bod nemá – stačia krajné body.
- Hodnoty |f| v týchto bodoch

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- Najväčšia z nich je supremová norma

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Podľa Lagrangeovej vety je |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, kde q je najväčšia hodnota |g'|: $q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g je kontrakcia.
- Apriórny odhad: začneme z $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. Zo vzťahu pre $\varepsilon = 10^{-6}$ a $q = \sin 1$ vychádza n ≥ 86 krokov.

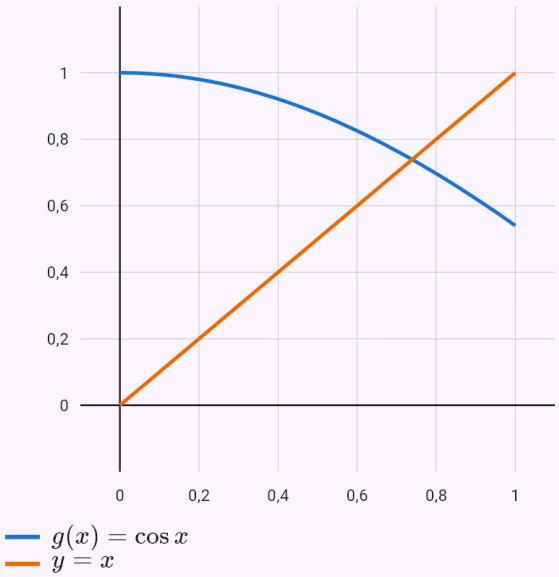
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\ln q}$$

- Iterujeme $x_{n+1} = g(x_n)$; posledný stĺpec je aposteriórny odhad chyby a výpočet končí, len čo klesne pod ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- Pevný bod: $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Stačilo 38 krokov namiesto 86 podľa apriórneho odhadu – aposteriórny odhad býva oveľa presnejší.

Graf



Funkcia g a priamka y = x – pevný bod je ich priesečník.

Sústava x = Ax + b, kontrakcia v norme ∞.

Zadanie: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Výsledok

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Postup

- Sústava v tvare na iteráciu

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- Stĺpcová norma je najväčší zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v stĺpcoch teda

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- Riadková norma je najväčší zo súčtov absolútnych hodnôt prvkov v riadkoch teda

  $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- Zobrazenie x ↦ Ax + b je kontrakcia, ak je niektorá norma matice A menšia ako 1. Volíme tú najmenšiu:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- Apriórny odhad: začneme z $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Zo vzťahu pre $\varepsilon = 10^{-6}$ a $q = 0{,}6$ vychádza n ≥ 31 krokov.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iterujeme $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; posledný stĺpec je aposteriórny odhad chyby a výpočet končí, len čo klesne pod ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Pevný bod. Stačilo 28 krokov namiesto 31 podľa apriórneho odhadu – aposteriórny odhad býva oveľa presnejší.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Na kontrolu presný pevný bod z lineárnej sústavy

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Picardove aproximácie a presné riešenie.

Zadanie: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Výsledok

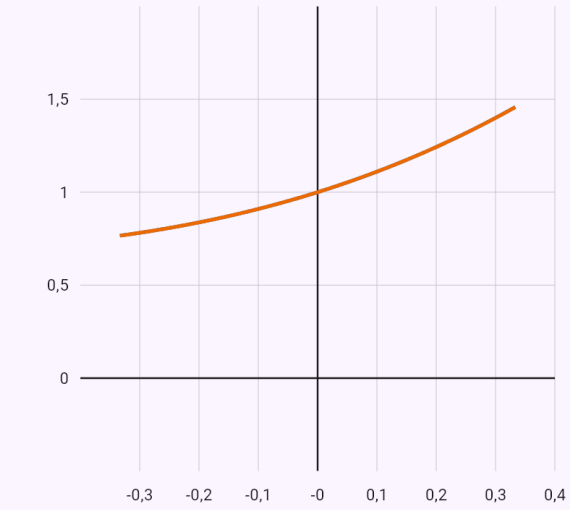
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Postup

- Úlohu $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ prepíšeme na integrálnu rovnicu y = T(y); Picardove postupné aproximácie sú iterácie operátora T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- 1. aproximácia:
  $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- 2. aproximácia
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- 3. aproximácia
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2$
- Kde je T kontrakciou (Picardova–Lindelöfova veta): na obdĺžniku $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ je $M = \max_R |f| \doteq 3$ a. Na intervale s $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ zostávajú aproximácie v obdĺžniku a $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- Odhad chyby poslednej aproximácie pre $|x| \le 0{,}3333$:
  $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$
- Presné riešenie na porovnanie: $y(x) = -x + 2e^x - 1$;

skutočná chyba na kraji intervalu
$|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Graf



Picardova aproximácia a presné riešenie (ak je známe).

Cauchyho rovnica – f(x) = cx.

Zadanie: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Výsledok

$$f(x) = c\,x$$

Postup

- Cauchyho funkcionálna rovnica pre aditívnu funkciu:
  $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Predpokladáme, že funkcia f je spojitá. Bez tohto predpokladu má Cauchyho rovnica aj nespojité „patologické“ riešenia (zostrojené pomocou Hamelovej bázy).
- Dosadenie: $x = y = 0:\quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Dosadenie y = −x ukáže, že funkcia je nepárna:
  $y = -x:\quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Indukciou pre prirodzené n:
  $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Pre racionálne čísla r = m/n
  $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Racionálne čísla sú husté a funkcia je spojitá, vzťah preto platí pre všetky reálne x:
  $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Všetky spojité riešenia (a, b, c sú ľubovoľné konštanty):
  $f(x) = c\,x$
- Skúška dosadením: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

d'Alembertova rovnica – cos a cosh.

Zadanie: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Výsledok

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Postup

- d'Alembertova funkcionálna rovnica:
  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y),\ x, y \in \mathbb{R}$
- Predpokladáme, že funkcia f je spojitá. Bez tohto predpokladu má Cauchyho rovnica aj nespojité „patologické" riešenia (zostrojené pomocou Hamelovej bázy).
- Dosadenie
  $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \ \Rightarrow\ f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- Dosadenie x = 0 ukáže, že funkcia je párna:
  $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \ \Rightarrow\ f(-y) = f(y)$
- Spojité riešenia sú hladké; dvojitým derivovaním podľa y v bode y = 0 dostaneme diferenciálnu rovnicu
  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \ \Rightarrow\ f'' = k\,f,\ f(0)$
- Podľa znamienka konštanty k:
  $k = -c^2: \ \cos(cx), \qquad k = 0: \ 1, \qquad k = c^2: \ \cosh(cx)$
- Všetky spojité riešenia (a, b, c sú ľubovoľné konštanty):
  $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Skúška dosadením:
  $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Známe obmedzenia

- Bodovú limitu aplikácia hľadá pri postupnostiach, kde o limite rozhoduje mocnina q^n alebo racionálny výraz v n; pri zložitejších (sin nx bez delenia n) môže úlohu odmietnuť.
- Konvergenciu skúma na uzavretom ohraničenom intervale; nekonečný interval zatiaľ nie.
- Gramov–Schmidtov proces najviac pre 6 funkcií, aproximácia polynómom najviac 5. stupňa.
- Degenerované jadro najviac so 4 členmi; s parametrom λ len degenerované, nedegenerované rieši numericky pre číselné λ. Volterrovu rovnicu presne len s jadrom k(x − t) od nuly alebo a(x)·b(t), inak postupnými aproximáciami a numericky.
- Matice najviac 6 × 6, Picardových aproximácií najviac 6. Funkcionálne rovnice len uvedených typov (a Cauchyho s polynomiálnym členom navyše), vždy so spojitými riešeniami.

35. Funkcie komplexnej premennej

Cauchyho–Riemannove podmienky funkcie f(z) overíte zápisom cr(z^2 + 3z); funkciu môžete napísať v z, z̄ (conj(z)), |z|, Re z, Im z alebo priamo v x a y. Aplikácia rozpíše f = u + iv, vypočíta parciálne derivácie a dosadí do u_x = v_y, u_y = −v_x. Ak platia všade, je funkcia analytická a výsledkom je derivácia f'(z) zapísaná v z; inak aplikácia vypíše, kde podmienky platia (body alebo krivku), a funkcia analytická nie je. K harmonickej funkcii harmonic(u = x^2 - y^2) dopočíta harmonicky združenú funkciu integráciou z podmienok a celú funkciu f(z) dosadením x = z, y = 0; zadať sa dá aj imaginárna časť, harmonic(v = 2xy).

Hodnoty elementárnych funkcií v $\mathbb{C}$: hlavná hodnota logaritmu ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w so všetkými hodnotami líšiacimi sa o 2kπi, mocnina s komplexným exponentom i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh a cosh komplexného čísla súčtovými vzorcami. Argument je v rovnakom intervale ako pri komplexných číslach (čip „Hlavná hodnota argumentu“). Rovnice sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 aplikácia rieši substitúciou w = e^(iz) (e^z) a kvadratickou rovnicou, e^z = 1 + i zlogaritmovaním; výsledkom je všeobecné riešenie s k ∈ $\mathbb{Z}$ a niekoľko riešení v Gaussovej rovine. Rovnica v x s reálnym oborom bez riešenia (sin x = 2) ponúkne tlačidlo komplexného riešenia.

Singularity a rezíduá: singularities(f) nájde korene menovateľa a podstatné singularity (e^(1/z), sin(1/z)), určí ich typ – odstrániteľná, pól rádu m, podstatná – a vypočíta rezíduá: v jednoduchom póle g(a)/q'(a), v póle vyššieho rádu deriváciou (z − a)^m f(z), v podstatnej singularite z Laurentovho radu. Res(f, z = a) vypočíta jedno rezíduum. Laurentov rad racionálnej funkcie v medzikruží laurent(f, 1 < |z| < 2) (alebo |z| > 1, 0 < |z − a| < r, okolo bodu laurent(f, z = a)) aplikácia zostaví z parciálnych zlomkov nad $\mathbb{C}$ a geometrického radu každého zlomku – podľa toho, či jeho pól leží vnútri, alebo mimo medzikružia. Integrál po kružnici oint(f, |z − a| = r) (z fotky \oint_{|z−a|=r}) počíta rezíduovou vetou; bez singularít vnútri je nulový, singularitu na kružnici aplikácia ohlási.

Rezíduá v reálnej analýze: nevlastný integrál racionálnej funkcie cez celú os, s cos ax alebo sin ax (Jordanova lema) a od 0 do ∞ pri párnej funkcii; integrál racionálnej funkcie cos t a sin t cez ⟨0; 2π⟩ substitúciou z = e^(it). Integrály s kosínusom a sínusom a cez ⟨0; 2π⟩ idú rovno cez rezíduá, pri ostatných vyberiete čip „Cez rezíduá“ (späť „Obvyklý výpočet“). Rovnako čipom pri rade sčítate Σ R(n) od 1 (od 0 alebo iného celého čísla) jadrom π cotg πz, alternujúci rad jadrom π/sin πz; súčet cez všetky celé čísla od −∞ ide rovno. Inverznú Laplaceovu transformáciu racionálnej funkcie invlaplace(F) (z fotky \mathcal{L}^{-1}\{F\}) aplikácia vypočíta ako súčet rezíduí F(s)e^(st).

Rouchého veta rouche(p, |z| < r) určí počet koreňov polynómu v kruhu podľa člena, ktorý na kružnici prevažuje nad súčtom ostatných, v medzikruží r < |z| < R ako rozdiel dvoch kruhov; korene ukáže v Gaussovej rovine. Konformné zobrazenie w = f(z) rozpíše na u a v, určí, kde je konformné (f' ≠ 0), pri Möbiovej transformácii (αz + β)/(γz + δ) nájde samodružné body a obrazy reálnej a imaginárnej osi a jednotkovej kružnice. Graf ukáže obraz mriežky priamok x = c a y = c.

Fourierovu transformáciu racionálnej funkcie ftransform(1/(1 + t^2)) (z fotky \mathcal{F}\{f\}) aplikácia vypočíta cez rezíduá – pre ω > 0 uzavrie cestu v dolnej polrovine, pre ω < 0 v hornej – a výsledok pri párnej (nepárnej) funkcii zapíše cez |ω|. Pre hustotu v x dá charakteristickú funkciu rozdelenia až na znamienko ω, pri súmernom Cauchyho rozdelení priamo e^(−|t|). Inverznú Z-transformáciu invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) vypočíta ako súčet rezíduí $F(z)z^{n-1}$ so začiatočnou hodnotou x[0] = lim F(z) pre z → ∞. Použitie vo filtroch, regulácii a optike ukazuje kapitola Aplikácie komplexnej analýzy.

Ako zadať

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Cauchyho–Riemannove podmienky a derivácia.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	Harmonicky združená funkcia k reálnej (imaginárnej) časti.
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logaritmus, mocnina, goniometrické funkcie a rovnice v $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Rezíduum v bode, všetky singularity.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Laurentov rad v medzikruží alebo okolo bodu.
`oint(f, |z - a| = r)`	Integrál po kružnici rezíduovou vetou.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Reálne integrály cez rezíduá.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	Súčet radu cez rezíduá.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Počet koreňov polynómu v kruhu alebo medzikruží.
`w = (z - i)/(z + i)`	Konformné zobrazenie, Möbiova transformácia.
`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	Inverzná Laplaceova transformácia cez rezíduá.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Fourierova transformácia cez rezíduá.
`invz(z/(z - 1/2))`	Inverzná Z-transformácia cez rezíduá.

Ukážky

Analytická funkcia – podmienky platia všade, derivácia v z.

Zadanie: `cr(z^2 + 3z)`

Výsledok

$$f'(z) = 2z + 3$$

Postup

- Funkciu rozpíšeme na reálnu a imaginárnu časť, f = u + iv, kde z = x + iy: $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Parciálne derivácie u a v podľa x a y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Dosadíme do Cauchyho–Riemannových podmienok $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Obe podmienky platia v celej rovine a parciálne derivácie sú spojité – funkcia je analytická v celom $\mathbb{C}$.
- Derivácia analytickej funkcie, zapísaná v z:
  $f'(z) = u_x + i\, v_x = 2z + 3$

Podmienky platia len na priamke y = x – funkcia nie je analytická.

Zadanie: `cr(x^2 + i y^2)`

Výsledok

Funkcia nie je analytická – Cauchyho–Riemannove podmienky neplatia na žiadnej oblasti.

Postup

- Funkciu rozpíšeme na reálnu a imaginárnu časť, f = u + iv, kde z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Parciálne derivácie u a v podľa x a y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Dosadíme do Cauchyho–Riemannových podmienok $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Obe podmienky platia len tam, kde $2(x - y) = 0$. Tam má funkcia deriváciu, žiadne okolie bodu však celé nespĺňa podmienky – funkcia nie je analytická nikde.

Harmonicky združená funkcia a f(z) = z² + z.

Zadanie: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Výsledok

$$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$$

Postup

- Zadaná je reálna časť u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Overíme, že je harmonická – jej Laplaceov operátor je nulový: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Z prvej Cauchyho–Riemannovej podmienky $v_y = u_x$ dostaneme v integráciou podľa y – „konštanta“ môže závisieť od x:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \;\Rightarrow\; v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- Funkciu C(x) určíme z druhej podmienky $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \;\Rightarrow\; C'(x) = 0,\; C(x) = 0 + C$
- Harmonicky združená funkcia: $v = 2xy + y + C$
- Funkciu f(z) = u + iv zapíšeme v z – stačí dosadiť x = z a y = 0: $f = u + i\,v,\; x = z,\; y = 0 :\; f(z) = z^2 + z + iC$

Hlavná hodnota logaritmu a všetky jeho hodnoty.

Zadanie: `ln(1 + i)`

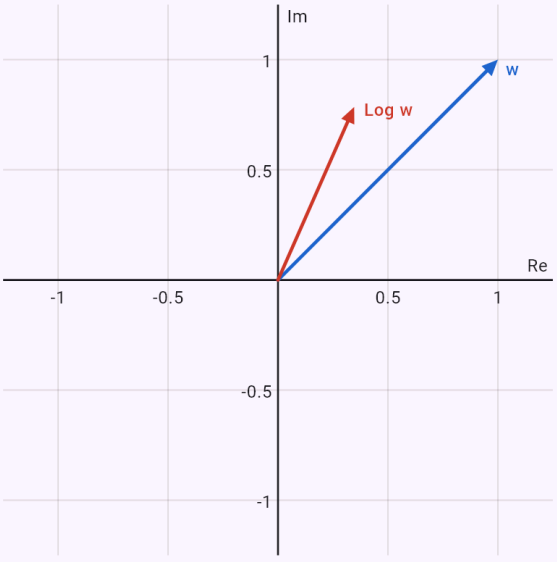
Výsledok

$$\mathrm{Log}\,(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Postup

- Hlavná hodnota logaritmu je $\mathrm{Log}\, w = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w$, argument v intervale $\langle 0; 2\pi)$: $\mathrm{Log}\, w = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w$
- Absolútna hodnota a hlavný argument čísla:
  $|1+i| = \sqrt{2},\; \mathrm{Arg}\,(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Exponenciála je periodická s periódou 2πi, preto má logaritmus nekonečne veľa hodnôt – líšia sa o násobky 2πi
  $\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\; k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

i^i je reálne číslo e^(−π/2).

Zadanie: `i^i`

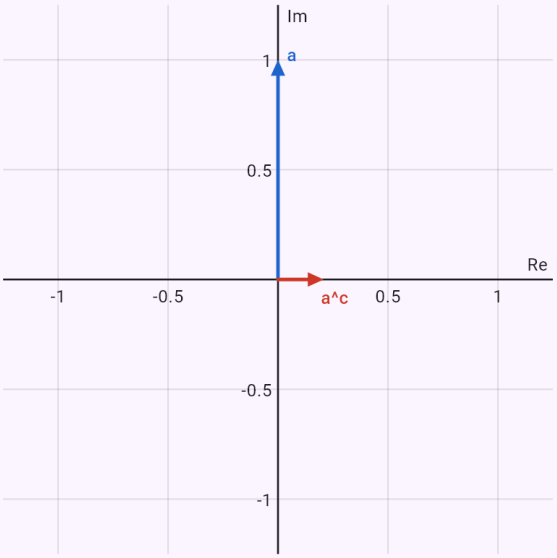
Výsledok

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

Postup

- Mocninu s komplexným exponentom definujeme cez hlavnú hodnotu logaritmu (argument v intervale $\langle 0; 2\pi)$)
  $a^c = e^{c\,\mathrm{Log}\,a}, \quad \mathrm{Log}\,(i) = \frac{\pi}{2}i$
- Exponent rozpíšeme na reálnu a imaginárnu časť:
  $c\,\mathrm{Log}\,a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Hlavná hodnota mocniny, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i\sin Y)$:
  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- S ostatnými hodnotami logaritmu dostaneme všetky hodnoty mocniny: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – zadané čísla namodro, výsledok načerveno, argument φ oblúkom od kladnej reálnej polosi.

Rovnica sin z = 2 – substitúcia w = e^(iz) a kvadratická rovnica.

Zadanie: `sin z = 2`

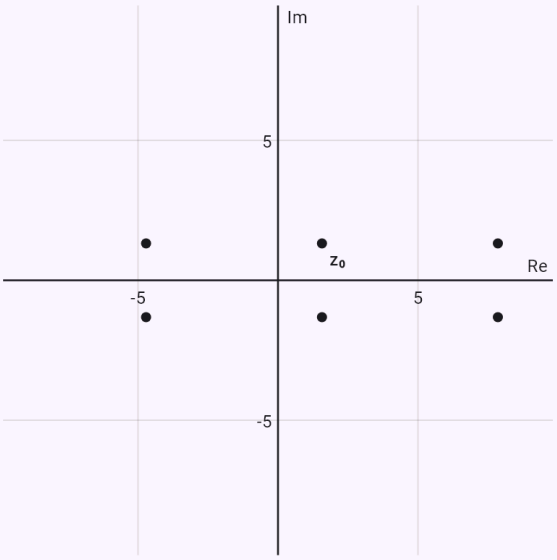
Výsledok

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Funkciu vyjadríme exponenciálami a zavedieme substitúciu: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Rovnicu vynásobíme w a dostaneme kvadratickú rovnicu:
  $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Jej korene:
  $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Vrátime sa k z: $iz = \log w$, teda
  $z = -i\log w = \mathrm{Arg}\,w + 2k\pi - i\ln|w|$ (argument v intervale $\langle 0; 2\pi)$):
  $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Graf



Gaussova rovina – riešenia rovnice ako body: na vodorovnej osi reálna časť, na zvislej imaginárna.

Pól nižšieho rádu vďaka nule čitateľa a jednoduchý pól.

Zadanie: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

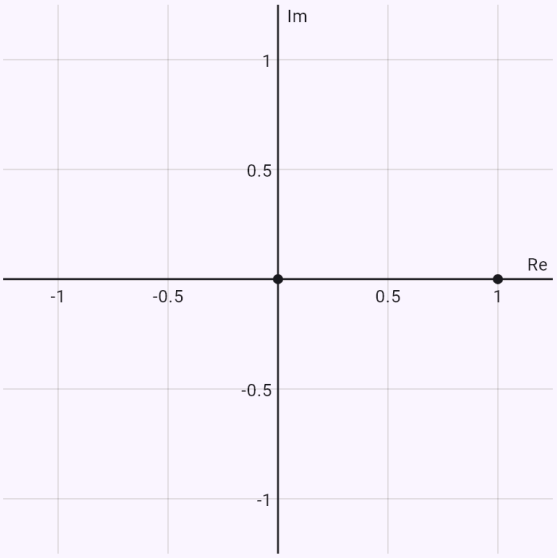
Výsledok

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, f = 0, \quad \mathrm{Res}_{z=1}\, f = \sin 1$$

Postup

- Singulárne body – korene menovateľa:
  $z^4 - z^3 = 0 : \; z_1 = 0, \; z_2 = 1$
- V bode 0 má menovateľ koreň násobnosti 3, čitateľ násobnosti 1 – je to pól rádu 2
- Reziduum v póle rádu 2
  $\mathrm{Res}_{z=0}\, f = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 f(z) \right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)}, \; \mathrm{I}$
- V bode 1 má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q
  $\mathrm{Res}_{z=1}\, f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z, \; q' = 4z^$

Graf



Gaussova rovina – singulárne body funkcie.

Podstatná singularita – rezíduum z Laurentovho radu.

Zadanie: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

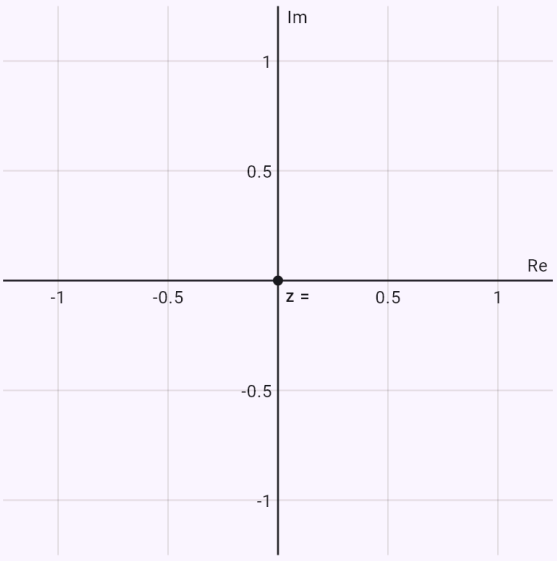
Výsledok

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, f = \frac{1}{6}$$

Postup

- V bode 0 je podstatná singularita – exponent (argument) má v bode pól a hlavná časť Laurentovho radu je nekonečná.
- Reziduum je koeficient c_{-1} pri $\frac{1}{z-a}$ v Laurentovom rade okolo bodu 0
  $f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$

Graf



Gaussova rovina – singulárne body funkcie.

Laurentov rad v medzikruží 1 < |z| < 2 – jeden zlomok v mocninách 1/z, druhý v mocninách z.

Zadanie: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

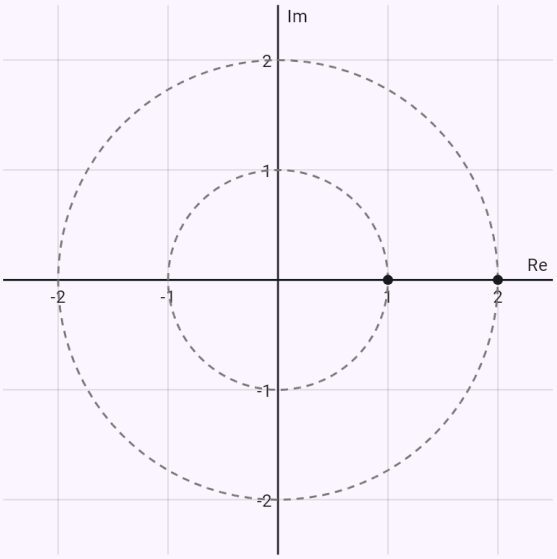
Výsledok

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Postup

- Singulárne body: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Laurentov rad hľadáme v medzikruží $1 < |z| < 2$ – žiadny singulárny bod v ňom neleží.
- Funkciu rozložíme na parciálne zlomky (nad $\mathbb{C}$):
  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Pól zlomku leží vnútri vnútornej kružnice – vyberieme $\frac{1}{z-c}$ a použijeme geometrický rad v mocninách $\frac{1}{z-c}$
  $$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
- Pól zlomku leží mimo medzikružia – vyberieme konštantu a použijeme geometrický rad v mocninách z – c
  $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
- Sčítame rady člen po člene
  $f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$
- Všeobecný člen: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$

Graf



Gaussova rovina – medzikružie Laurentovho radu (čiarkovane) a singulárne body.

Rezíduová veta pri póle 2. rádu.

Zadanie: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Výsledok

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

Postup

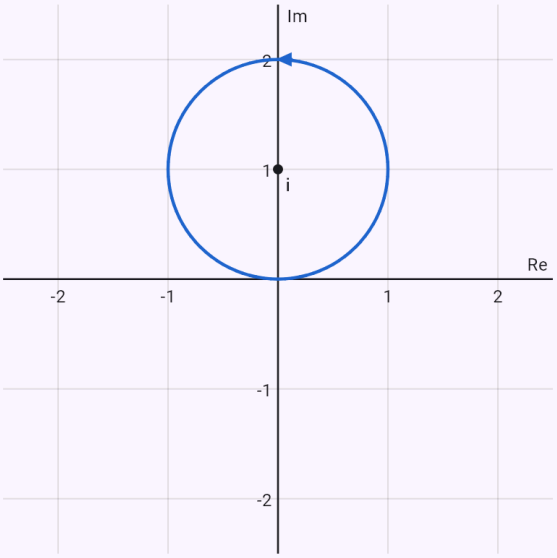
- Integrujeme po kružnici so stredom i a polomerom 1, proti smeru hodinových ručičiek: $|z-i|=1$
- Vnútri kružnice ležia singulárne body $z_0 = i$, mimo nej $\emptyset$
- V bode i má menovateľ koreň násobnosti 2, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 2
- Reziduum v póle rádu 2

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2 f(z)\Big], \quad (z-i)^2 f(z) = \,$$

- Podľa rezíduovej vety

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\big(e^i\big) = 2\pi i\, e^i$$

Graf



Gaussova rovina – kružnica, po ktorej integrujeme (šípka ukazuje smer), a singulárne body.

Nevlastný integrál s kosínusom – Jordanova lema.

Zadanie: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Výsledok

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

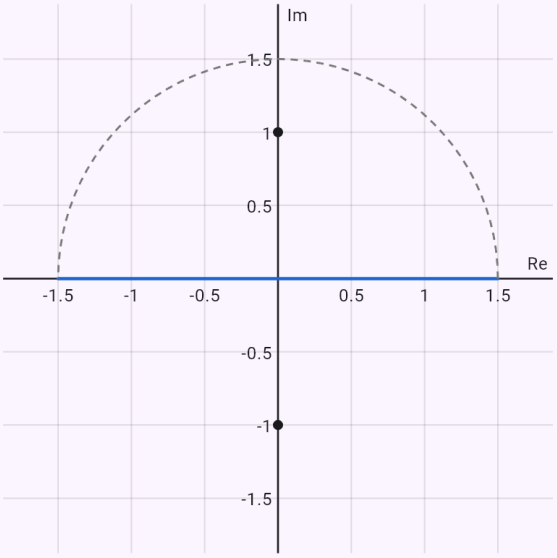
Postup

- Pre integrál s kosínusom alebo sínusom stačí $\deg Q \geq \deg P + 1$ a Q bez reálnych koreňov – integrál po polkružnici potom ide k nule podľa Jordanovej lemy: $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Kosínus je reálna časť e^{iax}
- Uzavrieme reálnu os veľkou polkružnicou v hornej polrovine. Vnútri ležia póly $z_0 = i$, integrál po polkružnici ide k nule.
- V bode i má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$$

- Podľa rezíduovej vety je integrál 2πi krát súčet rezíduí v hornej polrovine: $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Graf



Gaussova rovina – reálna os uzavretá polkružnicou v hornej polrovine (čiarkovane) a póly integrandu.

Integrál cez ⟨0; 2π⟩ ako integrál po jednotkovej kružnici.

Zadanie: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Výsledok

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Postup

- Integrál cez ⟨0; 2π⟩ prevedieme na integrál po jednotkovej kružnici substitúciou

  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$

- Po dosadení a úprave dostaneme integrál racionálnej funkcie po kružnici |z| = 1: $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$

- Vnútri kružnice ležia singulárne body $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, mimo nej $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- V bode $-2 + \sqrt{3}$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1

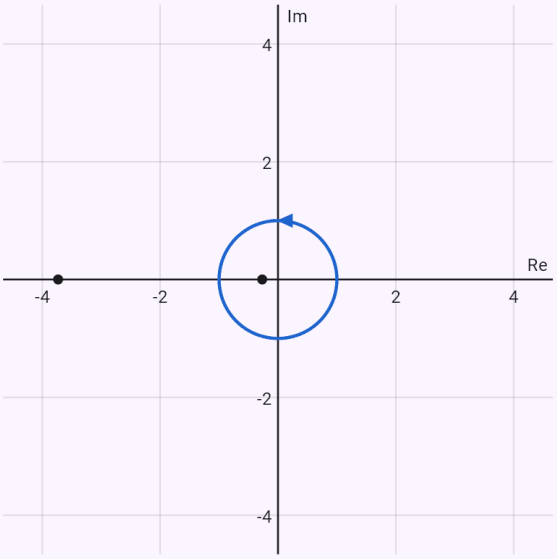
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3}, \quad g =$

- Podľa rezíduovej vety

  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Graf



Gaussova rovina – jednotková kružnica z = e^(it) a póly integrandu.

Σ 1/n² = π²/6 – rezíduum v nule, kde má pól aj jadro.

Zadanie: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Cez rezíduá

Výsledok

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Výpočet integrálu alebo súčtu

Obvyklý výpočet ✓ Cez rezíduá

Postup

- Funkcia π cotg πz má v každom celom čísle n jednoduchý pól s rezíduom 1. Integrál po veľkom štvorci ide k nule, preto súčet radu je mínus súčet rezíduí v póloch R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- Podmienka $\deg Q \geq \deg P + 2$ platí: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Singulárne body – korene menovateľa: $z^2 = 0 : \ z_0 = 0$
- V bode 0 má pól aj R, aj jadro – reziduum je koeficient pri 1/z ich súčinu

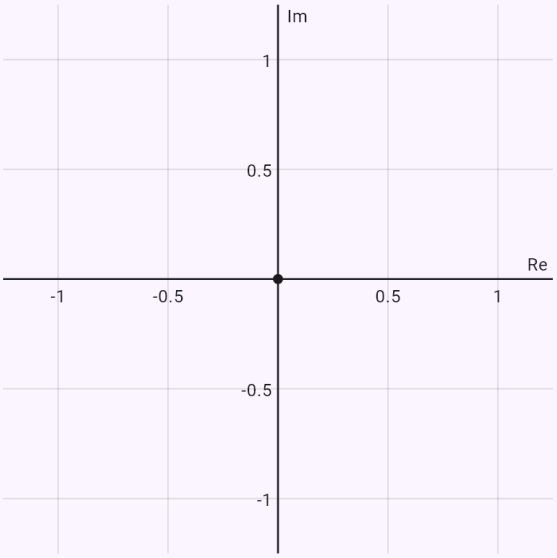
$$\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- Súčet cez všetky celé čísla:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R je párna, R(−n) = R(n), preto súčet od 1 je polovica (bez člena n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Graf



Gaussova rovina – póly R(z); jadro π cotg πz má navyše póly vo všetkých celých číslach.

Rouchého veta – štyri korene v medzikruží 1 < |z| < 2.

Zadanie: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

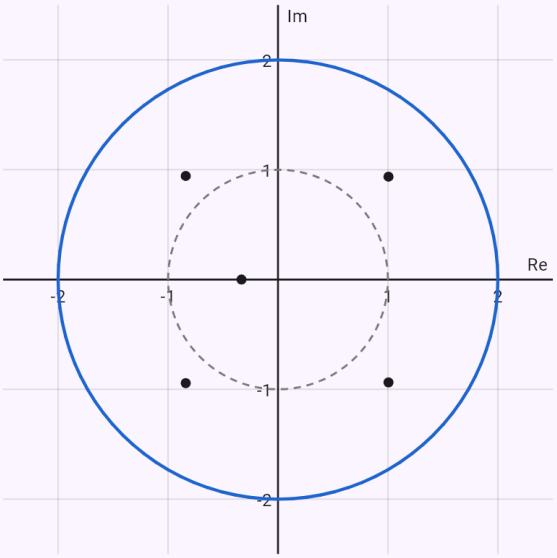
Výsledok

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Postup

- Na kružnici |z| = 2 prevažuje člen z^5 nad súčtom ostatných – podľa Rouchého vety má polynóm v kruhu toľko koreňov ako z^5, teda 5:
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32, \quad 32 > 7$
- Na kružnici |z| = 1 prevažuje člen $3z$ nad súčtom ostatných – podľa Rouchého vety má polynóm v kruhu toľko koreňov ako $3z$, teda 1:
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1, \quad 3 > 2$
- V medzikruží je rozdiel počtov koreňov vo väčšom a menšom kruhu: $5 - 1 = 4$
- Na kontrolu korene numericky
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Graf



Gaussova rovina – kružnica a korene polynómu (vypočítané numericky).

Möbiova transformácia – horná polrovina na jednotkový kruh.

Zadanie: `w = (z - i)/(z + i)`

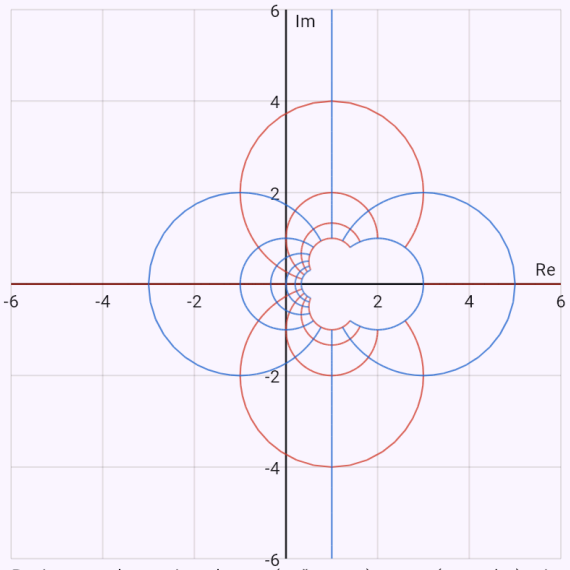
Výsledok

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Postup

- Zobrazenie zapíšeme po zložkách
  $w = u + iv, \quad u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\frac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- Zobrazenie je konformné všade okrem pólu $z_0 = -i$:
  $f'(z) = \frac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- Je to Möbiova transformácia $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Samodružné body riešime z rovnice f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0 :\ z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- Reálna os sa zobrazí na $|w| = 1$
- Imaginárna os sa zobrazí na $\mathrm{Im}\, w = 0$
- Jednotková kružnica sa zobrazí na $\mathrm{Re}\, w = 0$
- V grafe je obraz mriežky – priamok x = c (načerveno) a y = c (namodro) pre |c| ≤ 2 s krokom $0{,}5$

Graf



Rovina w – obraz priamok x = c (načerveno) a y = c (namodro) pri zobrazení w = f(z).

Inverzná Laplaceova transformácia ako súčet rezíduí.

Zadanie: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Výsledok

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Postup

- Inverzná Laplaceova transformácia racionálnej funkcie je súčet rezíduí $F(s)\,e^{st}$ vo všetkých póloch F

  $$f(t) = \sum \mathrm{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Singulárne body – korene menovateľa:
  $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0: \; s_1 = -1, \; s_2 = -2i, \; s_3 = 2i$
- V bode -1 má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- V bode $-2i$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

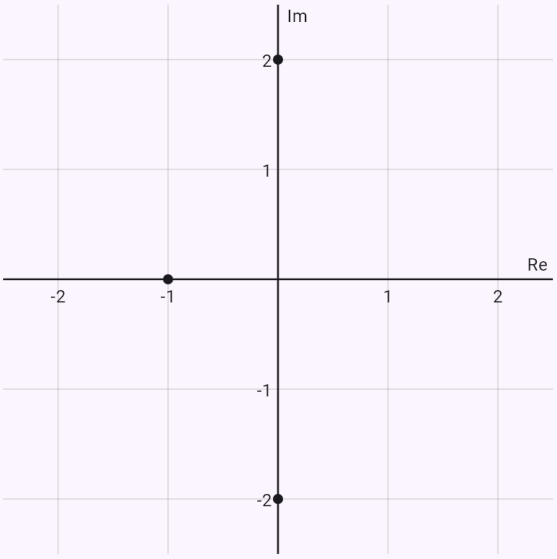
  $$\mathrm{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- V bode $2i$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Sčítame rezíduá a upravíme na reálny tvar:
  $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Fourierova transformácia Lorentzovej funkcie: π·e^(−|ω|).

Zadanie: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Výsledok

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Postup

- Fourierova transformácia racionálnej funkcie: integrál uzavrieme veľkou polkružnicou (Jordanova lema) a sčítame rezíduá

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Singulárne body – korene menovateľa:
$t^2 + 1 = 0 : \; t_1 = -i, \; t_2 = i$
- V bode $-i$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' =$$

- V bode i má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' = 2t$$

- Pre ω > 0 uzavrieme cestu v dolnej polrovine (záporný smer, −2πi)

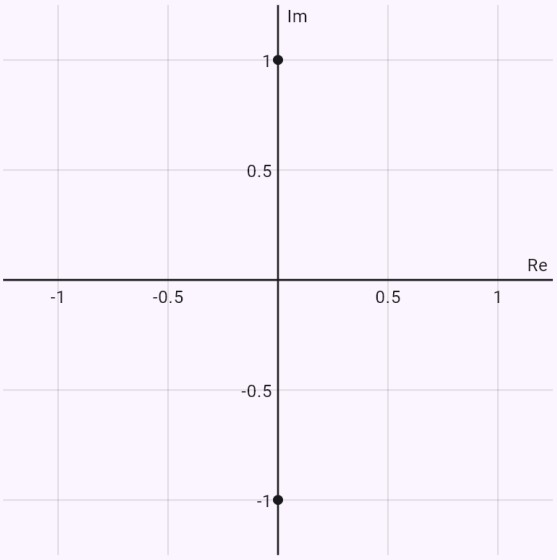
$$\omega > 0 : \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Pre ω < 0 uzavrieme cestu v hornej polrovine (+2πi)

$$\omega < 0 : \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Výsledok – Fourierova transformácia: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Charakteristická funkcia Cauchyho rozdelenia e^(−|t|).

Zadanie: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Výsledok

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Postup

- Fourierova transformácia racionálnej funkcie: integrál uzavrieme veľkou polkružnicou (Jordanova lema) a sčítame rezíduá

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Singulárne body – korene menovateľa:
$\pi x^2 + \pi = 0: \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- V bode $-i$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- V bode i má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Pre ω > 0 uzavrieme cestu v dolnej polrovine (záporný smer, −2πi)

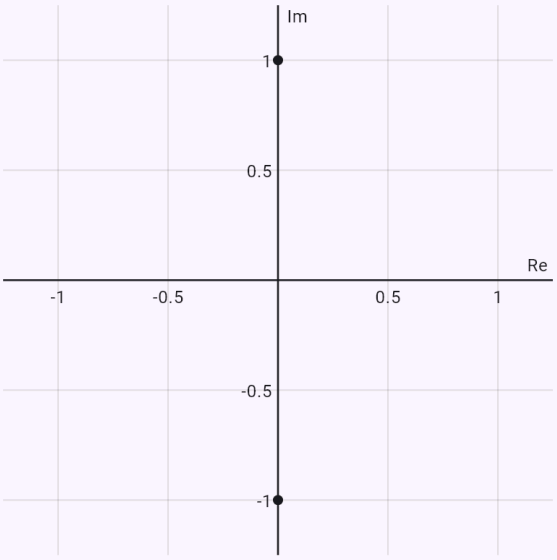
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k < 0} \mathrm{Res} = e^{-\omega}$$

- Pre ω < 0 uzavrieme cestu v hornej polrovine (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k > 0} \mathrm{Res} = e^{\omega}$$

- Výsledok – Fourierova transformácia: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Inverzná Z-transformácia s dvoma pólmi: x[n] = 2 − 2⁻ⁿ.

Zadanie: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Výsledok

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Postup

- Inverzná Z-transformácia je súčet rezíduí $F(z)z^{n-1}$ v póloch F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Singulárne body – korene menovateľa:
$2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- V bode $\frac{1}{2}$ má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

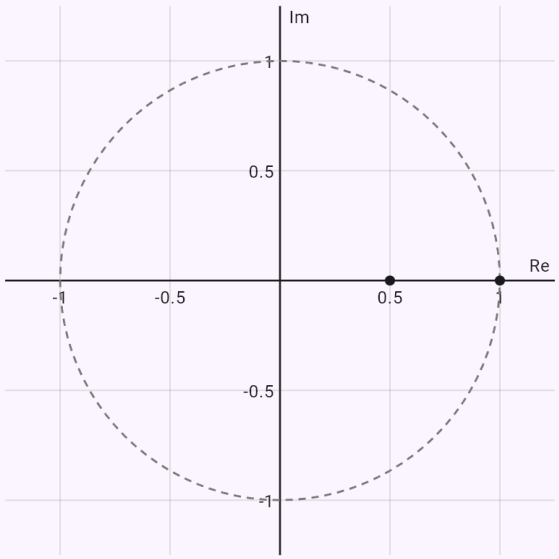
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- V bode 1 má menovateľ koreň násobnosti 1, čitateľ násobnosti 0 – je to pól rádu 1
- Reziduum v jednoduchom póle, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- Začiatočnú hodnotu dá limita pre z → ∞:
$x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Sčítame rezíduá: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Graf



Gaussova rovina – póly F(s).

Známe obmedzenia

- Singularity aplikácia hľadá pri funkciách s polynómom v menovateli (a pri podstatných singularitách e^h, sin h, cos h); menovateľ ako sin z (nekonečne veľa pólov) zatiaľ nevie.
- Laurentov rad v medzikruží vie pri racionálnych funkciách, pri podstatnej singularite len okolo bodu, keď funkcia inú singularitu nemá.
- Integrály po iných krivkách ako kružnica (štvorec, elipsa), hlavnú hodnotu integrálu s pólom na osi a všeobecný argumentový princíp zatiaľ nevie.
- Súčet radu od 1 cez rezíduá ide len pre párnu racionálnu funkciu R; póly R v celých číslach okrem nuly aplikácia nepripustí.
- Konformné zobrazenie ukáže obraz mriežky; obraz zadanej oblasti (polrovina, pás) zatiaľ len pri osiach a jednotkovej kružnici Möbiovej transformácie.
- Fourierovu transformáciu vie pri racionálnych funkciách bez pólov na reálnej osi, inverznú Z-transformáciu pri racionálnych funkciách bez pólu v nule.

36. Diferenciálne rovnice

Aplikácia rieši obyčajné diferenciálne rovnice 1. rádu: separovateľné, lineárne, exaktné, homogénne ($y' = f(y/x)$), Bernoulliho a rovnice $y' = f(ax + by + c)$. Typ spozná sama a postup ukáže tak, ako sa počíta v škole – separácia premenných, variácia konštanty alebo integračný faktor, substitúcia, kmeňová funkcia exaktnej rovnice. Integrály v postupe majú vlastné kroky. Riešenie overí skúškou: riešenie a jeho deriváciu dosadí do rovnice a obe strany upraví na rovnaký tvar.

Rovnice vyšších rádov: lineárne s konštantnými koeficientmi ľubovoľného rádu cez charakteristickú rovnicu (aj násobné a komplexné korene), partikulárne riešenie podľa špeciálnej pravej strany (aj rezonancia a súčet pravých strán) alebo variáciou konštánt, začiatočnú úlohu v nule aj Laplaceovou transformáciou (voľba čipom „Metóda“). Ďalej Eulerovu rovnicu substitúciou $x = e^t$, rovnicu $y^{(n)} = f(x)$ postupnou integráciou a zníženie rádu – keď v rovnici chýba y ($p = y'$) alebo x ($y' = p(y)$).

Rovnicu $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ prevedie substitúciou $z = \ln y$ na lineárnu. Lineárnu rovnicu 2. rádu s nekonštantnými koeficientmi vyrieši, keď jedno riešenie uhádne (x^k, e^{cx}, …): druhé nájde znížením rádu (d'Alembert), pravú stranu variáciou konštánt. Rád zníži aj o viac ako jeden ($p = y^{(m)}$ s rovnicou 2. rádu pre p). Pri rovnici s parametrami rozlíši prípady – tlmený oscilátor podľa znamienka $\delta^2 - \omega^2$ (nadkritické, kritické a podkritické tlmenie), rezonanciu ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ pre $\omega = 2$) a znamienko konštanty, od ktorého závisí integrál ($y'' = 2yy'$). Laplaceovou transformáciou rieši aj začiatočnú úlohu v inom bode ako 0 (posunutím $\tau = t - t_0$) a s parametrami.

Riccatiho rovnicu $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ vyrieši, keď pozná jedno partikulárne riešenie y_1: zadané na ďalšom riadku (y1 = 1/x), alebo uhádnuté v jednoduchom tvare (konštanta, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a). Substitúcia $y = y_1 + 1/z$ ju potom prevedie na lineárnu. Rovnice, ktoré nie sú lineárne v y': Clairautovu $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – priamky $y = Cx + \psi(C)$ a singulárne riešenie (ich obálku) – a Lagrangeovu $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ s parametrickým riešením (parameter $p = y'$).

Výsledkom je všeobecné riešenie s konštantou C, pri vyšších rádoch s konštantami C_1, C_2, … (explicitne, a kde to nejde, implicitne), s podmienkami riešenie, ktoré ich spĺňa – začiatočné aj okrajové, vrátane prípadov „žiadne riešenie“ a „nekonečne veľa riešení“. Konštantné riešenia stratené delením aplikácia dohľadá. Každé riešenie overí dosadením do rovnice. Graf pri 1. ráde ukáže smerové pole a riešenia pre rôzne C, pri vyšších rádoch riešenia pre rôzne konštanty; pri autonómnej rovnici 2. rádu (bez x) prepínač ukáže aj fázovú rovinu (y, y'). Pod grafom môžete zadať vlastné hodnoty konštánt a pridať k nim krivku; prepínač „Predvolené krivky“ skryje tie, ktoré vybrala aplikácia. Ťuknutím do grafu sa dokreslí riešenie, ktoré prechádza tým bodom – pri lineárnej rovnici 2. rádu navyše posuvníkom nastavíte smernicu dotyčnice v bode.

Sústavu dvoch lineárnych rovníc s konštantnými koeficientmi ($x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$, aj dx/dt) vyrieši cez vlastné čísla a vlastné vektory matice – reálne, komplexné aj dvojnásobné – so začiatočnými

podmienkami x(0), y(0). Stacionárny bod [0; 0] zaradí (uzol, sedlo, ohnisko, stred) a ukáže fázovú rovinu.

Osciláciu lineárnej rovnice 2. rádu (každé riešenie má nekonečne veľa nulových bodov) skúma príkaz oscillation(y" + x y = 0) (aj oscilace(...)), aj pre rovnicu v samoadjungovanom tvare (x y')' + y/x = 0 alebo s y′ (aplikácia ju do tohto tvaru prevedie). Postup: presne pre konštantné q a Eulerovu rovnicu y″ + (k/x²)y = 0 s hranicou k = 1/4, Leightonovo–Wintnerovo a Kneserovo kritérium (v kritickom prípade aj porovnanie s Riemannovou–Weberovou rovnicou), Riccatiho substitúcia w = r y′/y, Prüferova transformácia a numerický počet nulových bodov na intervale (zadajte ho za bodkočiarkou: ; ⟨1; 50⟩) so Sturmovým odhadom ich vzdialenosti. Polovične lineárnu rovnicu (|y'| y')' + q |y| y = 0 (všeobecne exponent |y'|^(p−2)) posúdi s kritickou konštantou ((p − 1)/p)^p, diskrétnu obdobu Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (aj Δ(r_n Δy_n)) podľa zovšeobecnených nulových bodov. Graf ukáže riešenie s nulovými bodmi a Prüferov uhol φ.

Asymptotiku riešení nelineárnej rovnice s p-Laplaciánom (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y s kladnými a, b skúma príkaz asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (aj asymptotika(...)); |y'|^k y' a |y|^k y sa dá písať aj so sgn, nepárnou mocninou (y')³, y³ a pre α = 1 ako (a y')' alebo y". Riešenia rozdelí do tried M^+ (|y| rastie) a M^- (|y| klesá) podľa limít y a kvaziderivácie y^[1] = a|y′|^α sgn y′. Pri polovične lineárnej rovnici (β = α) vypočíta integrály J_1, J_2, Y_1, Y_2 (Symjou, inak porovnaním mocninového a logaritmického správania), určí jeden z prípadov C1–C8 a neprázdne triedy podľa Vety 3.1 z práce Z. Došlej a M. Mariniho Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020) a ukáže recipročnú rovnicu. Pri rovnici Emdenovho–Fowlerovho typu s β ≠ α použije vety z článku M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): superlineárny a sublineárny prípad, silne a slabo rastúce a regulárne klesajúce riešenia. Graf ukáže numerické riešenia neprázdnych tried (M^- streľbou) a pod nimi ich kvaziderivácie. Začiatok intervalu zadajte za bodkočiarkou (; x ≥ 1). Pri rovnici so záporným q ponúkne oscilácia čip Asymptotika riešení a asymptotika naopak čip Oscilácia rovnice.

Ako zadať

`y' = x*y`	Derivácia čiarkou.
`dy/dx = x y^2`	Leibnizov zápis – určí aj premennú (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Zápis z fotky.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	Tvar M dx + N dy = 0 (exaktná rovnica).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Začiatočná podmienka za čiarkou alebo na ďalšom riadku.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	Funkcia a premenná môžu mať ľubovoľné písmená.

`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Známe partikulárne riešenie Riccatiho rovnice na ďalšom riadku (alebo za bodkočiarkou).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Rovnica vyššieho rádu – derivácie viacerými čiarkami.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Vyššie derivácie zápisom y^{(4)} (aj z fotky).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Začiatočné podmienky y(0), y′(0) – alebo okrajové v rôznych bodoch.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Newtonove bodky (derivácia podľa času t) a grécke parametre.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Sústava dvoch lineárnych rovníc – za čiarkou alebo na riadkoch, s podmienkami x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscilácia rovnice 2. rádu, voliteľne s intervalom pre nulové body.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Polovične lineárna rovnica (tu p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	Diskrétna obdoba – lineárna rekurencia 2. rádu.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asymptotika riešení rovnice s p-Laplaciánom, voliteľne so začiatkom intervalu.

Ukážky

Separovateľná rovnica – všeobecné riešenie a smerové pole.

Zadanie: `y' = x*y`

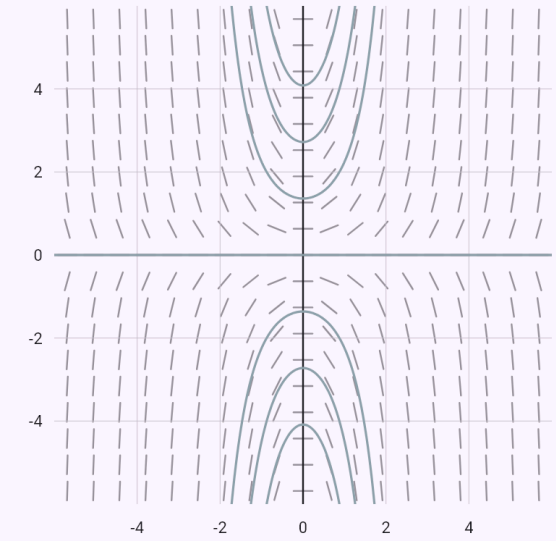
Výsledok

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Rovnica so separovateľnými premennými – pravá strana je súčin funkcie nezávislej premennej a funkcie neznámej: $y' = xy$
- Separujeme premenné (delíme za predpokladu $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Integrujeme obe strany: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- Konštantné riešenie $y = 0$, ktoré sme delením vylúčili, je vo všeobecnom riešení obsiahnuté pre C = 0
- Skúška – derivácia riešenia $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Graf



riešenia pre rôzne C

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Začiatočná podmienka určí konštantu C.

Zadanie: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Výsledok

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Riešiť numerickou metódou:

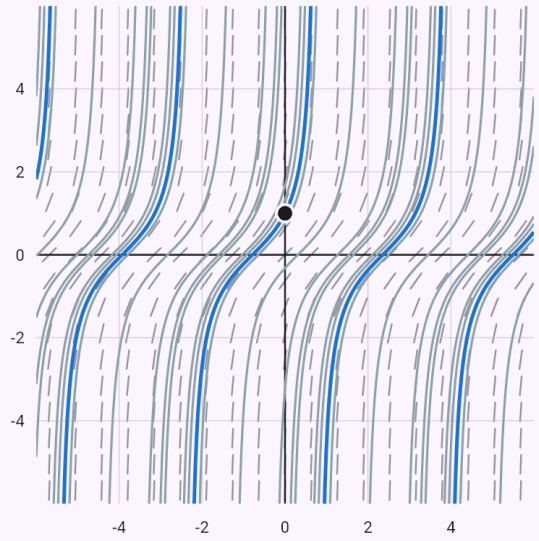
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Postup

- Rovnica so separovateľnými premennými – pravá strana je súčin funkcie nezávislej premennej a funkcie neznámej: $y' = y^2 + 1$
- Separujeme premenné (delíme za predpokladu $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Integrujeme obe strany: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg} y$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 1\,dx = x$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $\operatorname{arctg} y = x + C$
- Vyjadríme riešenie: $y = \operatorname{tg}(x + C)$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $y(0) = 1$: $1 = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel $\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice a upravíme podľa vzorca obe strany sa rovnajú $1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 +$$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú. Zvýraznené je riešenie so začiatočnou podmienkou, bod je začiatočná podmienka.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Lineárna rovnica variáciou konštanty.

Zadanie: `y' + 2y = e^x` Variácia konštanty

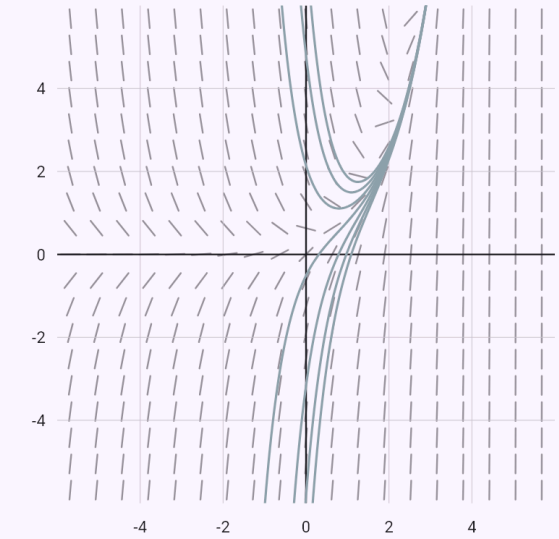
Výsledok

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineárna rovnica 1. rádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y' + 2y = 0$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 2\,dx = 2x$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variácia konštanty – riešenie hľadáme v tvare $y = C(x)\,e^{-2x}$; dosadením do rovnice dostaneme $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Odtiaľ $C'(x) = e^{3x}$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Všeobecné riešenie: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graf



riešenia pre rôzne C

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Tá istá rovnica integračným faktorom.

Zadanie: `y' + 2y = e^x` Integračný faktor

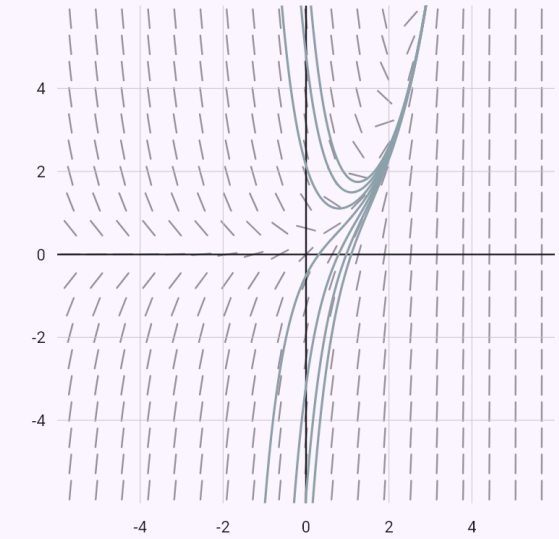
Výsledok

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineárna rovnica 1. rádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 2\,dx = 2x$
- Integračný faktor: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Rovnicu vynásobíme integračným faktorom – ľavá strana je potom derivácia súčinu: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme obe strany: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Všeobecné riešenie: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graf



riešenia pre rôzne C

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Homogénna rovnica – substitúcia u = y/x.

Zadanie: `y' = (x - y)/(x + y)`

Výsledok

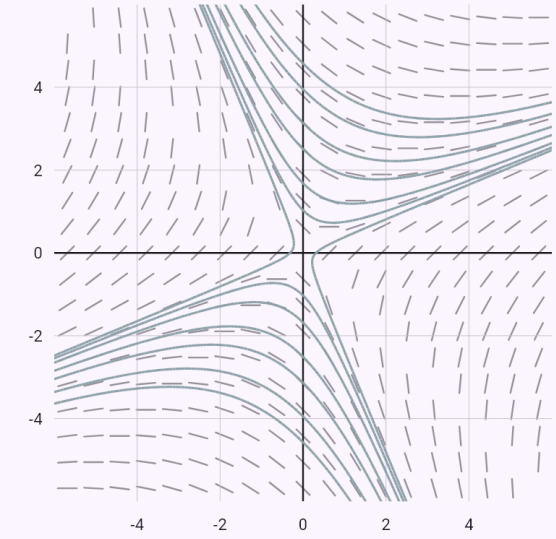
$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Homogénna rovnica – pravá strana závisí len od podielu y/x: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- Substitúcia $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ prevedie rovnicu na $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Separujeme premenné (delíme za predpokladu $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Integrujeme obe strany: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- V čitateli je derivácia menovateľa (prípadne jej násobok), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, podľa vzorca $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$ $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{\ln}{}$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Odlogaritmujeme – konštantu ±e^C označíme opäť C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- Konštantné riešenie $u = -1 - \sqrt{2}$, ktoré sme delením vylúčili, je vo všeobecnom riešení obsiahnuté pre C = 0
- Konštantné riešenie $u = -1 + \sqrt{2}$, ktoré sme delením vylúčili, je vo všeobecnom riešení obsiahnuté pre C = 0
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$

- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graf



riešenia pre rôzne C

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Bernoulliho rovnica – substitúcia z = y^(1−n) a konštantné riešenie y = 0.

Zadanie: `xy' - y = -xy^2`

Výsledok

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Postup

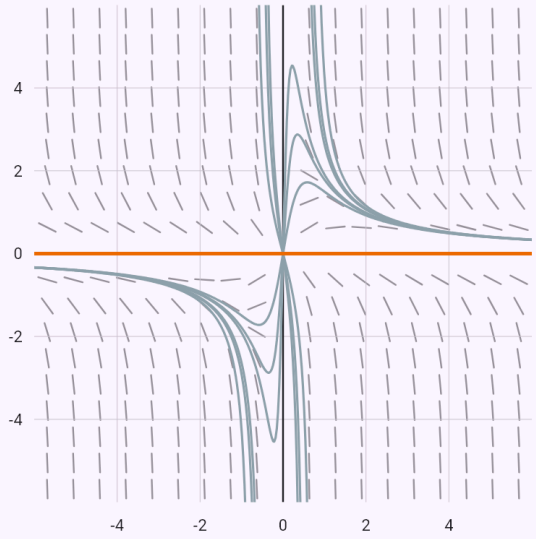
- Bernoulliho rovnica tvaru y' + p(x)·y = q(x)·y^n: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- Substitúcia $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ prevedie rovnicu na $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Riešenie homogénnej rovnice: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variácia konštanty – riešenie hľadáme v tvare $z = C(x)\cdot\frac{1}{x}$; dosadením do rovnice dostaneme $C'(x)\cdot\frac{1}{x} = 1$
- Odtiaľ $C'(x) = x$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- Všeobecné riešenie: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Vyjadríme riešenie: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Delením sme vylúčili konštantné riešenie $y = 0$ – to je ďalšie riešenie rovnice.
- Konštantu preznačíme (násobok ľubovoľnej konštanty je opäť ľubovoľná konštanta): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2\cdot\frac{x^2 + C - x\cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = 0$

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Exaktná rovnica – kmeňová funkcia F(x, y) = C.

Zadanie: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

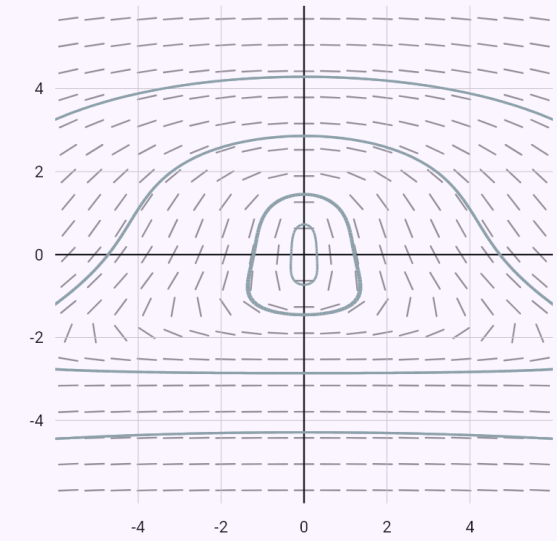
Výsledok

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Rovnica tvaru M dx + N dy = 0 – overíme, či je exaktná (ľavá strana je totálny diferenciál): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; rovnica je exaktná, pretože $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- Integrál súčtu je súčet integrálov: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Kmeňovú funkciu F nájdeme integráciou M podľa x: $F(x,y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- Z podmienky ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Graf



riešenia pre rôzne C

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Substitúcia z = x − y; Symja by tu stratila dvojku, aplikácia výsledok overí.

Zadanie: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Výsledok

$$y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1)$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Postup

- Pravá strana je funkciou výrazu ax + by + c – zavedieme ho ako novú neznámu: $y' = \cos(x-y)$
- Substitúcia $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ prevedie rovnicu na $z' = 1 - \cos z$
- Separujeme premenné (delíme za predpokladu $1-\cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Integrujeme obe strany: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Žiadna jednoduchšia substitúcia nesedí – univerzálna substitúcia $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej

  $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$: $\quad -\mathrm{cotg}\left(\frac{z}{2}\right)$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $-\mathrm{cotg}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Vyjadríme riešenie: $z = 2\,\mathrm{arccotg}\,(C-x)$
- Delením sme vylúčili konštantné riešenie $z = 0$ – to je ďalšie riešenie rovnice.
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $y = x - 2\,\mathrm{arccotg}\,(C-x)$
- Konštantu preznačíme (násobok ľubovoľnej konštanty je opäť ľubovoľná konštanta): $y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+C)$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arccotg}\,C \Rightarrow C = 1$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1)$
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

  $$(2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{}{x^2+}$$
- Sčítame a upravíme

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos\left(x - (x + 2\,\mathrm{arccotg}\,(x+1))\right)$$

Riccatiho rovnica – partikulárne riešenie $y_1 = -2/x$ uhádnuté, substitúcia $y = y_1 + 1/z$.

Zadanie: `y' = y^2 - 2/x^2`

Výsledok

$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Postup

- Riccatiho rovnica tvaru y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Bez partikulárneho riešenia Riccatiho rovnicu vyriešiť nevieme. Skúsime ho uhádnuť v jednoduchom tvare (konštanta, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) – rovnicu spĺňa $y_1 = -\frac{2}{x}$: $y_1' = \frac{2}{x^2}$ a po dosadení do pravej strany vyjde to isté.
- Substitúcia $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ prevedie rovnicu na $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Riešenie homogénnej rovnice: $z_h = Cx^4$
- Variácia konštanty – riešenie hľadáme v tvare $z = C(x)\cdot x^4$; dosadením do rovnice dostaneme $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Odtiaľ $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- Všeobecné riešenie: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- Samotné riešenie $y = -\frac{2}{x}$ substitúcia y = y₁ + 1/z vynecháva (zodpovedá z → ∞) – pridáme ho k výsledku.
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.

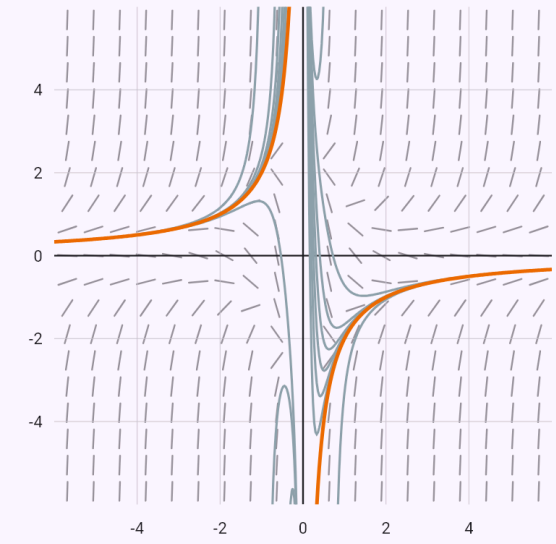
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$$

- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú

$$\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = -\frac{2}{x}$

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Tá istá rovnica so zadaným partikulárnym riešením $y_1 = 1/x$.

Zadanie: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Výsledok

$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Postup

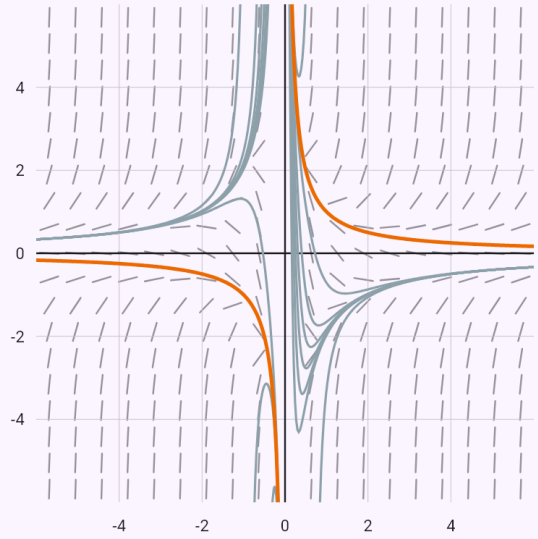
- Riccatiho rovnica tvaru y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Zadané partikulárne riešenie $y_1 = \frac{1}{x}$ rovnicu spĺňa: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$ a po dosadení do pravej strany vyjde to isté.
- Substitúcia $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ prevedie rovnicu na $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Riešenie homogénnej rovnice: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variácia konštanty – riešenie hľadáme v tvare $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; dosadením do rovnice dostaneme $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Odtiaľ $C'(x) = -x^2$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- Všeobecné riešenie: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- Samotné riešenie $y = \frac{1}{x}$ substitúcia y = y₁ + 1/z vynecháva (zodpovedá z → ∞) – pridáme ho k výsledku.
- Skúška – derivácia riešenia $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ dosadená do rovnice dáva rovnosť.
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel

$$\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$$

- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú

$$\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = \frac{1}{x}$

Krátke úsečky ukazujú v každom bode smer, ktorý rovnica predpisuje (smerové pole). Sivé krivky sú riešenia pre rôzne C – všade sa úsečiek dotýkajú.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C

+ Pridať krivku

Ťuknite do grafu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom.

Clairautova rovnica – priamky y = Cx + C² a ich obálka y = −x²/4.

Zadanie: `y = xy' + y'^2`

Výsledok

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Postup

- Clairautova rovnica tvaru y = x·y' + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Rovnicu zderivujeme podľa x (p = y' závisí od x, p' = y"): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Ak je p' = 0, je p konštantné a všeobecné riešenie tvoria priamky: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Druhý činiteľ x + ψ'(p) = 0 dáva singulárne riešenie – obálku všetkých tých priamok. Parametricky $x = -2p,\; y = -p^2$, po vylúčení p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Sivé priamky sú riešenia pre rôzne hodnoty C, farebne je singulárne riešenie – ich obálka, ktorej sa každá priamka dotýka.

Bodom [2; −1] na obálke prechádza jediná priamka y = 1 − x – a obálka sama.

Zadanie: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Výsledok

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Postup

- Clairautova rovnica tvaru y = x·y' + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Rovnicu zderivujeme podľa x (p = y' závisí od x, p' = y"): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Ak je p' = 0, je p konštantné a všeobecné riešenie tvoria priamky: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Druhý činiteľ x + ψ'(p) = 0 dáva singulárne riešenie – obálku všetkých tých priamok. Parametricky $x = -2p,\; y = -p^2$, po vylúčení p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Graf



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

Farebne sú riešenia prechádzajúce zadaným bodom – priamky, prípadne aj obálka.

Lagrangeova rovnica – riešenie v parametrickom tvare a priamka y = 0.

Zadanie: `y = 2xy' + y'^2`

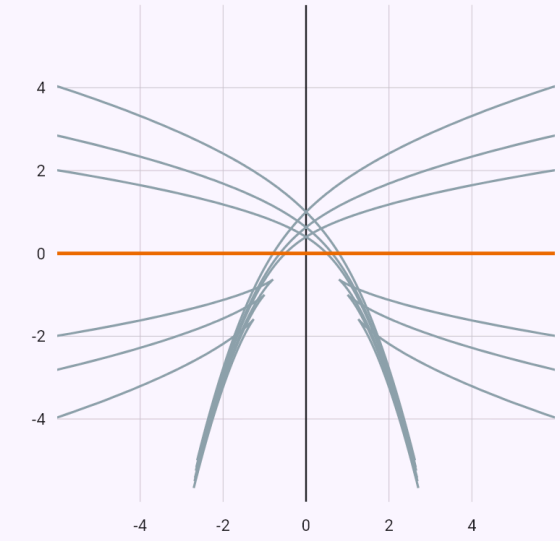
Výsledok

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lagrangeova rovnica tvaru y = x·φ(y') + ψ(y'). Označíme $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Rovnicu zderivujeme podľa x (p = y' závisí od x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Hľadáme x ako funkciu p: z rovnice vyjadríme dx/dp – v neznámej x je lineárna: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Lineárna rovnica 1. rádu tvaru y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Riešenie homogénnej rovnice: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variácia konštanty – riešenie hľadáme v tvare $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; dosadením do rovnice dostaneme $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- Odtiaľ $C'(p) = -2p^2$
- Konštantu vyberieme pred integrál: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Zintegrujeme: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- Všeobecné riešenie: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Konštantu preznačíme (násobok ľubovoľnej konštanty je opäť ľubovoľná konštanta): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Dosadením x do zadanej rovnice dostaneme všeobecné riešenie v parametrickom tvare (parameter p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Výrazom p − φ(p) sme delili, vynechali sme teda hodnoty, pre ktoré $p = 2p$. Každá z nich dáva priamku, ktorá rovnicu tiež spĺňa: $y = 0$

Graf



riešenia pre rôzne C

$y = 0$

Sivé krivky sú riešenia pre rôzne hodnoty konštánt.

Charakteristická rovnica s komplexnými koreňmi −2 ± 3i.

Zadanie: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Výsledok

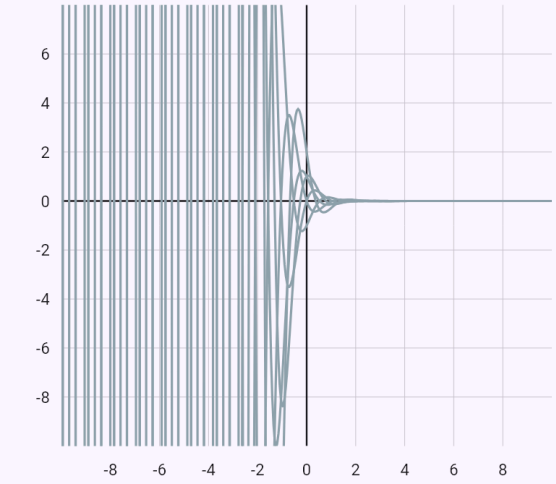
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Diskriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; korene: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- Všeobecné riešenie: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graf

Riešenia | Fázová rovina



riešenia pre rôzne C

Sivé krivky sú riešenia pre rôzne hodnoty konštánt.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C_1 | C_2 | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Špeciálna pravá strana pri rezonancii – 2 je koreňom charakteristickej rovnice.

Zadanie: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Špeciálna pravá strana

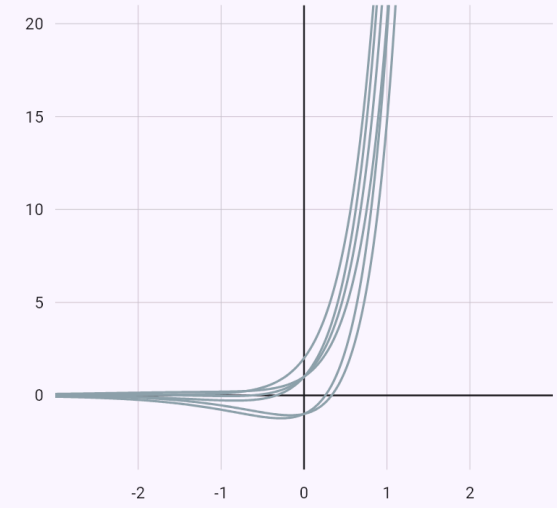
Výsledok

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; korene: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Pravá strana $3e^{2x}$ má špeciálny tvar; číslo 2 je koreňom charakteristickej rovnice (násobnosti 1), tvar preto vynásobíme x: $y_p = A x e^{2x}$
- Derivácie: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydelíme exponenciálou) a zlúčime členy: $A = 3$
- Partikulárne riešenie: $y_p = 3x e^{2x}$
- Všeobecné riešenie: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}$

Graf



riešenia pre rôzne C

Sivé krivky sú riešenia pre rôzne hodnoty konštánt.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C₁ C₂ + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Pravá strana tg x nie je špeciálna – variácia konštánt a wronskián.

Zadanie: `y'' + y = tan x`

Výsledok

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + y = \operatorname{tg} x$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y'' + y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variácia konštánt – riešenie hľadáme v tvare $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, derivácie funkcií C_k spĺňajú sústavu
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$
- Determinant sústavy (wronskián)
$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$
- Odtiaľ $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$
- Odtiaľ $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Konštantu vyberieme pred integrál
$$\int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$
- Funkcia je nepárna vzhľadom na kosínus – substitúcia $t = \sin x$
$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int -1 \, dt = -t$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
$$\int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} \, dt$$
- Podľa tabuľky základných integrálov:
$$\int \frac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
$$\int \frac{1}{2(t+1)} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} \, dt$$
- Podľa tabuľky základných integrálov:
$$\int \frac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej
$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Zintegrujeme (integračné konštanty už obsahuje riešenie homogénnej rovnice)
$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- Podľa tabuľky základných integrálov:
$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$
- Zintegrujeme (integračné konštanty už obsahuje riešenie homogénnej rovnice): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Partikulárne riešenie: $y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$
- Všeobecné riešenie
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrály variácie konštánt, ktoré nemožno vyjadriť elementárnymi funkciami – riešenie s integrálom.

Zadanie: `y'' + y' + y = tan x`

Výsledok

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y'' + y' + y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Diskriminant $D = 1^2 - 4 = -3$; korene: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- Riešenie homogénnej rovnice $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Variácia konštánt – riešenie hľadáme v tvare derivácie funkcií C_k spĺňajú sústavu $y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- Determinant sústavy (wronskián)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- Odtiaľ $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Odtiaľ $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Zintegrujeme (integračné konštanty už obsahuje riešenie homogénnej rovnice) $C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx$
- Zintegrujeme (integračné konštanty už obsahuje riešenie homogénnej rovnice) $C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx$
- Tieto integrály sa nedajú vyjadriť elementárnymi funkciami (vedú na vyššie, neelementárne funkcie), preto ich v riešení necháme v integrálnom tvare $\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$
- Všeobecné riešenie $y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$

Začiatočná úloha – sústava pre konštanty C_1, C_2.

Zadanie: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Výsledok

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

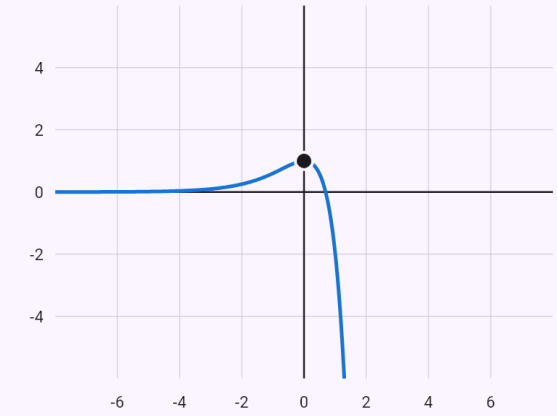
Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; korene: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- Pravá strana e^{2x} má špeciálny tvar; číslo 2 nie je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie preto hľadáme v tvare $y_p = Ae^{2x}$
- Derivácie: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydelíme exponenciálou) a zlúčime členy: $-A = 1$
- Odtiaľ $A = -1$
- Partikulárne riešenie: $y_p = -e^{2x}$
- Všeobecné riešenie: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Derivácie všeobecného riešenia: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Dosadením podmienok dostaneme sústavu odtiaľ $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Graf



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Zvýraznené je riešenie spĺňajúce podmienky, body sú zadané hodnoty.

Vlastné hodnoty konštánt

C₁ | C₂ | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Tá istá úloha Laplaceovou transformáciou.

Zadanie: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Laplaceova transformácia

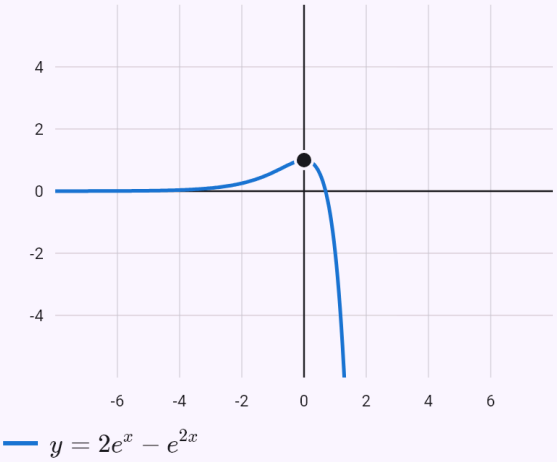
Výsledok

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Laplaceova transformácia oboch strán: $\mathcal{L}$(y) = Y, $\mathcal{L}$(y') = sY − y(0), $\mathcal{L}$(y'') = s²Y − s·y(0) − y'(0); dosadíme začiatočné podmienky: $\left(s^2Y - s\right) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Vyjadríme obraz Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Rozložíme na parciálne zlomky: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- Spätnou transformáciou (podľa slovníka obrazov) dostaneme riešenie: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Graf



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Zvýraznené je riešenie spĺňajúce podmienky, body sú zadané hodnoty.

Okrajová úloha s nekonečne veľa riešeniami.

Zadanie: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Výsledok

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Všeobecné riešenie: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- Konštanta C_2 zostáva ľubovoľná – úloha má nekonečne veľa riešení.
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $y = C_2 \sin x$

Eulerova rovnica – substitúcia x = eᵗ.

Zadanie: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

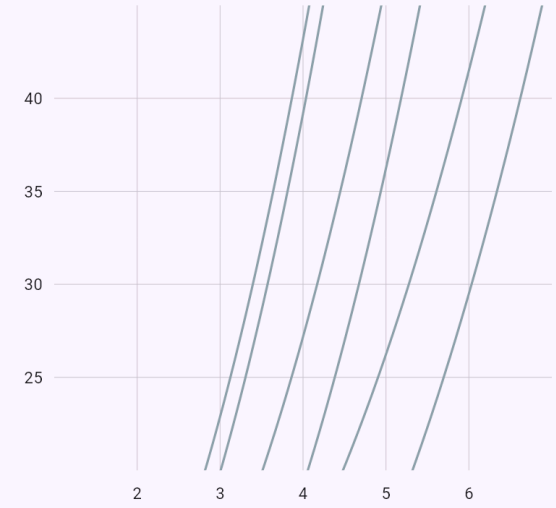
Výsledok

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Postup

- Eulerova rovnica – pri každej derivácii y^(k) stojí x^k; substitúciou x = e^t z nej bude rovnica s konštantnými koeficientmi: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Substitúcia $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ prevedie rovnicu na $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λt); po dosadení a vydelení e^(λt) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; korene: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Pravú stranu rozdelíme na časti špeciálneho tvaru – partikulárne riešenie nájdeme pre každú zvlášť a sčítame ich: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Pravá strana 2 má špeciálny tvar; číslo 0 nie je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie preto hľadáme v tvare $y_{p_1} = A$
- Derivácie: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Dosadíme do rovnice (vydelíme exponenciálou) a zlúčime členy: $2A = 2$
- Odtiaľ $A = 1$
- Partikulárne riešenie: $y_{p_1} = 1$
- Pravá strana e^{2t} má špeciálny tvar; číslo 2 je koreňom charakteristickej rovnice (násobnosti 1), tvar preto vynásobíme x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Derivácie: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Dosadíme do rovnice (vydelíme exponenciálou) a zlúčime členy: $A = 1$
- Partikulárne riešenie: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Partikulárne riešenie: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- Všeobecné riešenie: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Vrátime sa k pôvodnej premennej (t = ln x, pre $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graf



riešenia pre rôzne C

Sivé krivky sú riešenia pre rôzne hodnoty konštánt.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C₁ | C₂ | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Zníženie rádu y' = p(y), konštanty zo začiatočných podmienok postupne.

Zadanie: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Výsledok

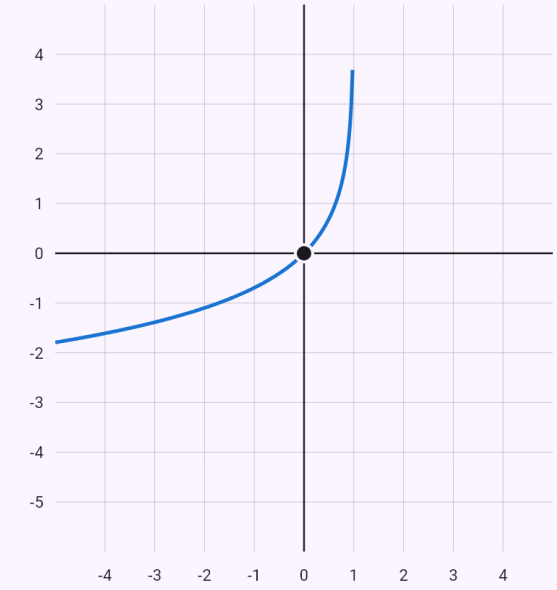
$$y = -\ln(1-x)$$

Postup

- V rovnici chýba nezávislá premenná – deriváciu y' vezmeme ako funkciu y: $y'' = e^{2y}$
- Substitúcia $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ prevedie rovnicu na $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; zo začiatočných podmienok vyplýva $p(0) = 1$
- Rovnica so separovateľnými premennými – pravá strana je súčin funkcie nezávislej premennej a funkcie neznámej: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Separujeme premenné: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Integrujeme obe strany: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Vyjadríme riešenie: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $p = e^{y}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú: $e^{y}e^{y} - e^{2y} = 0$
- Vrátime sa k pôvodnej neznámej: $y' = e^{y}$
- Rovnica so separovateľnými premennými – pravá strana je súčin funkcie nezávislej premennej a funkcie neznámej: $y' = e^{y}$
- Separujeme premenné (delíme za predpokladu $e^{y} \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^{y}} = dx$
- Integrujeme obe strany: $\int \dfrac{dy}{e^{y}} = \int dx$
- Podľa tabuľky – vnútorná funkcia je lineárna, výsledok preto vydelíme jej koeficientom pri premennej: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int 1\,dx = x$
- Všeobecné riešenie v implicitnom tvare: $-e^{-y} = x + C_2$
- Vyjadríme riešenie: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Dosadíme začiatočnú podmienku $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- Riešenie so začiatočnou podmienkou (partikulárne riešenie): $y = -\ln(1-x)$
- Člen derivujeme podľa pravidiel pre zloženú funkciu, súčin a podiel: $(-\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{1-x}$
- Dosadíme riešenie a jeho deriváciu do rovnice, obe strany sa rovnajú: $\dfrac{1}{1-x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Graf

Riešenia | Fázová rovina



$y = -\ln(1-x)$

Zvýraznené je riešenie spĺňajúce podmienky, body sú zadané hodnoty.

Tlmený oscilátor – tri prípady podľa δ a ω.

Zadanie: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Výsledok

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x)e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Pre $\delta > \omega$ teda

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2-\omega^2}-\delta)x}$
- Pre $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, teda $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\delta x}$
- Pre $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, teda

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}x\right)\right.$

Rezonancia – pre ω = 2 má riešenie iný tvar.

Zadanie: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Výsledok

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Postup

- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Najprv vyriešime homogénnu rovnicu (pravá strana nulová): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λt); po dosadení a vydelení e^(λt) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Riešenie homogénnej rovnice: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Pravá strana $\cos(2t)$ má špeciálny tvar; číslo $2i$ nie je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie preto hľadáme v tvare $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Derivácie $y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$
- Dosadíme do rovnice (vydelíme exponenciálou) a zlúčime členy $(A\omega^2 - 4A)\cos(2t) + (B\omega^2 - 4B)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Porovnáme koeficienty pri rovnakých členoch na oboch stranách odtiaľ $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Partikulárne riešenie: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Všeobecné riešenie

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Pre $\omega = 2$ je číslo z pravej strany koreňom charakteristickej rovnice (rezonancia) – tvar riešenia je iný: $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Uhádnuté riešenie $y_1 = x$ a zníženie rádu (d'Alembert).

Zadanie: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

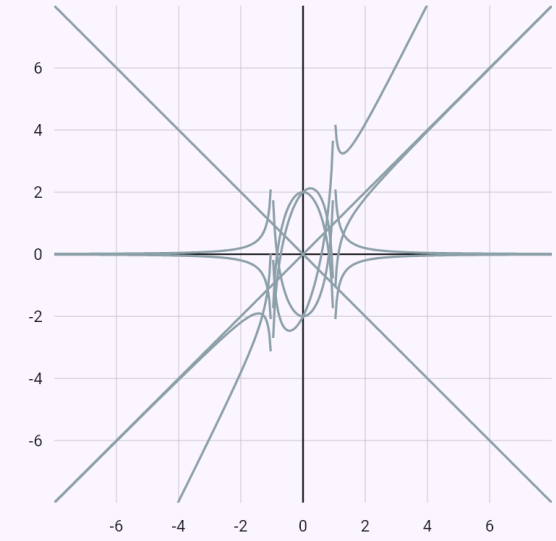
Výsledok

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Postup

- Lineárna rovnica 2. rádu s nekonštantnými koeficientmi:
  $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$
- Jedno riešenie uhádneme a dosadením overíme: $y_1 = x$. Druhé nájdeme znížením rádu (d'Alembert, y = $y_1 \cdot u$)
  $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$
- Racionálnu funkciu rozložíme na polynóm a parciálne zlomky
  $$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$
- Integrál súčtu je súčet integrálov
  $$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov:
  $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov:
  $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$
- Konštantu vyberieme pred integrál:
  $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$
- Podľa tabuľky základných integrálov: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Všeobecné riešenie:
  $y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$

Graf



riešenia pre rôzne C

Sivé krivky sú riešenia pre rôzne hodnoty konštánt.

Predvolené krivky

Vlastné hodnoty konštánt

C_1 | C_2 | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu – dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Sústava – vlastné čísla opačných znamienok, sedlo.

Zadanie: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Výsledok

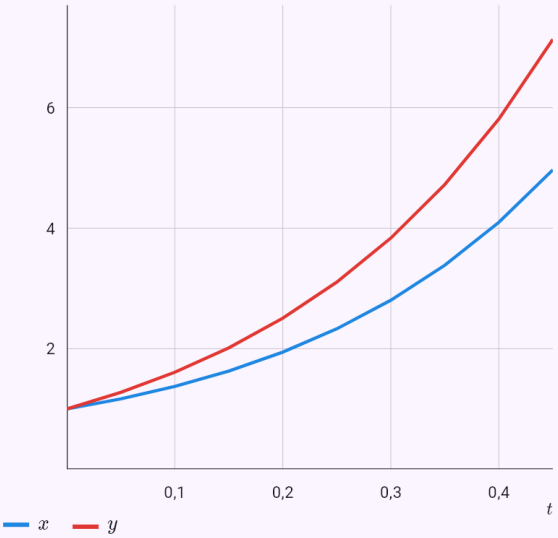
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Postup

- Sústavu zapíšeme maticovo
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Vlastné čísla matice z charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – dve rôzne reálne.
- Vlastné vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Všeobecné riešenie
  $x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$
  $y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$
- Stacionárny bod $[0;\ 0]$ je sedlo – vlastné čísla majú opačné znamienka, bod je nestabilný.

Graf

Priebeh v čase | Fázová rovina



Riešenie sústavy v čase pre zadané začiatočné podmienky (bez nich pre x(0) = y(0) = 1).

Komplexné vlastné čísla – nestabilné ohnisko.

Zadanie: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Výsledok

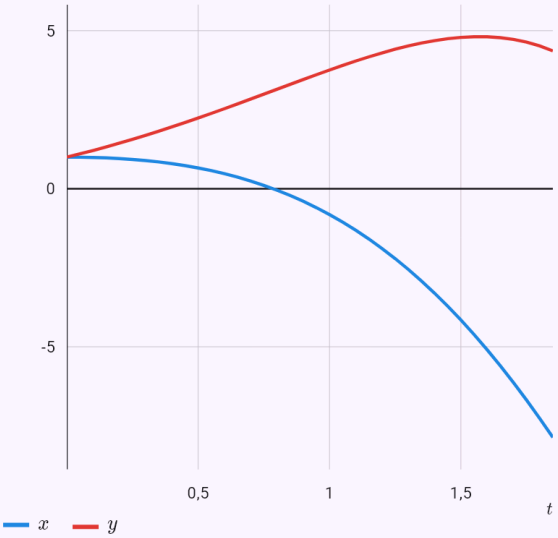
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Postup

- Sústavu zapíšeme maticovo
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Vlastné čísla matice z charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – komplexne združené.
- Vlastné vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Všeobecné riešenie
  $x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$
  $y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$
- Stacionárny bod $[0;\ 0]$ je nestabilné ohnisko – reálna časť vlastných čísel je kladná, trajektórie sa od neho špirálovito vzďaľujú.

Graf

Priebeh v čase | Fázová rovina



Riešenie sústavy v čase pre zadané začiatočné podmienky (bez nich pre x(0) = y(0) = 1).

Sústava so začiatočnými podmienkami – stred.

Zadanie: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Výsledok

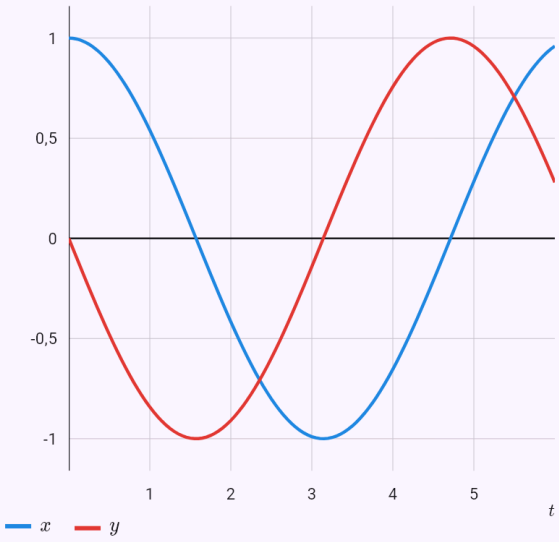
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Postup

- Sústavu zapíšeme maticovo
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Vlastné čísla matice z charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – komplexne združené.
- Vlastné vektory, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Všeobecné riešenie
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Konštanty zo začiatočných podmienok odtiaľ
  $$C_1 = 1,\ C_2 = 0$$
  $$C_1 = 1$$
  $$C_2 = 0$$
- Stacionárny bod $[0;\ 0]$ je stred – vlastné čísla sú rýdzo imaginárne, trajektórie sú uzavreté krivky okolo neho.

Graf

Priebeh v čase | Fázová rovina



Riešenie sústavy v čase pre zadané začiatočné podmienky (bez nich pre x(0) = y(0) = 1).

Airyho rovnica – Leightonovo–Wintnerovo kritérium a 12 nulových bodov.

Zadanie: `oscillation(y'' + x y = 0)`

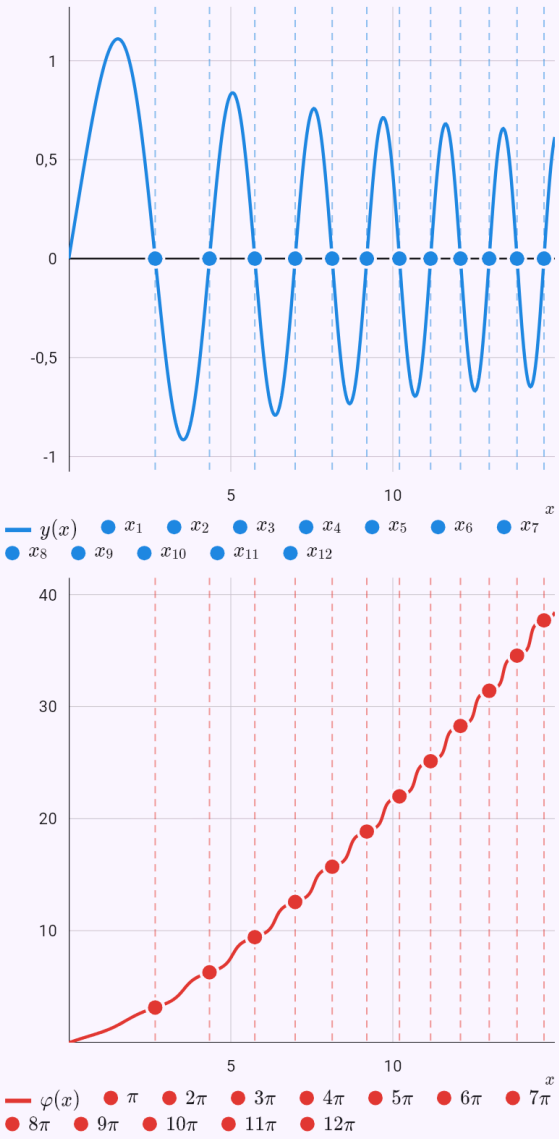
Výsledok

Rovnica je oscilatorická.

Postup

- Skúmame rovnicu $y'' + xy = 0$ na intervale $\langle 0;\ \infty)$, teda y" + q(x)y = 0 s q = x
- Rovnica je oscilatorická, keď každé jej netriviálne riešenie má na intervale nekonečne veľa nulových bodov. Podľa Sturmovej separačnej vety sa nulové body dvoch nezávislých riešení striedajú, takže stačí skúmať jedno riešenie: buď oscilujú všetky riešenia, alebo žiadne.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: keď ∫ 1/r = ∞ a zároveň ∫ q = ∞, je rovnica oscilatorická. Tu $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ a $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, rovnica je teda oscilatorická.
- Kneserovo kritérium s kritickou konštantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, rovnica je oscilatorická.
- Riccatiho technika: substitúcia $w = \frac{y'}{y}$ prevedie rovnicu na Riccatiho rovnicu $w' + w^2 + x = 0$. Rovnica nie je oscilatorická práve vtedy, keď má Riccatiho rovnica riešenie na celom intervale ⟨T; ∞) pre nejaké T. Pri oscilatorickej rovnici také riešenie nie je: w v každom nulovom bode y „utečie“ do −∞.
- Prüferova transformácia $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ prevedie rovnicu na rovnicu pre uhol φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. V nulovom bode y je φ násobkom π a φ' > 0, uhol teda cez násobky π len rastie. Počet nulových bodov na intervale (a; b⟩ je preto ⌊φ(b)/π⌋. Počítame numericky metódou Runge–Kutta (RK4) zo začiatočných hodnôt $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Na intervale $(0;\ 15\rangle$ má riešenie toľko nulových bodov: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Susedné nulové body sú od seba vzdialené $0{,}8322$ až $1{,}6761$. Nulové body $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,$ ⋯
- Sturmova porovnávacia veta: na intervale $\langle 0;\ 15\rangle$ je $q \in \langle 0;\ 15\rangle$. q tam nie je všade kladné, máme preto len dolný odhad vzdialenosti susedných nulových bodov: $0{,}8112 \le \Delta$
- Záver: rovnica je oscilatorická – každé jej netriviálne riešenie má nekonečne veľa nulových bodov.

Graf



Riešenie s vyznačenými nulovými bodmi; pod ním Prüferov uhol φ, ktorý v nulových bodoch prechádza násobkami π.

Eulerova rovnica na hranici k = 1/4 – ešte neosciluje.

Zadanie: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

Výsledok

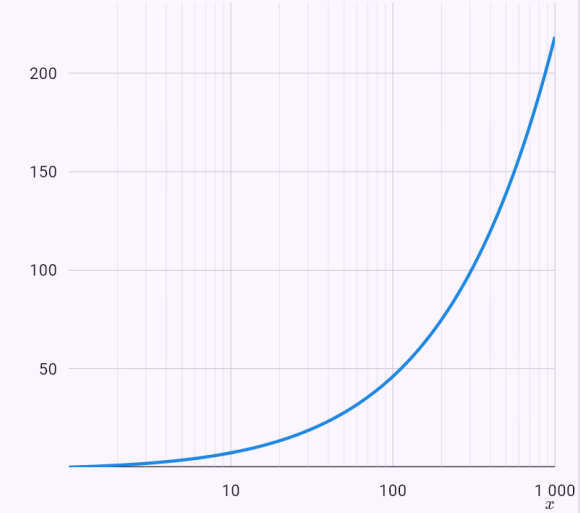
Rovnica nie je oscilatorická.

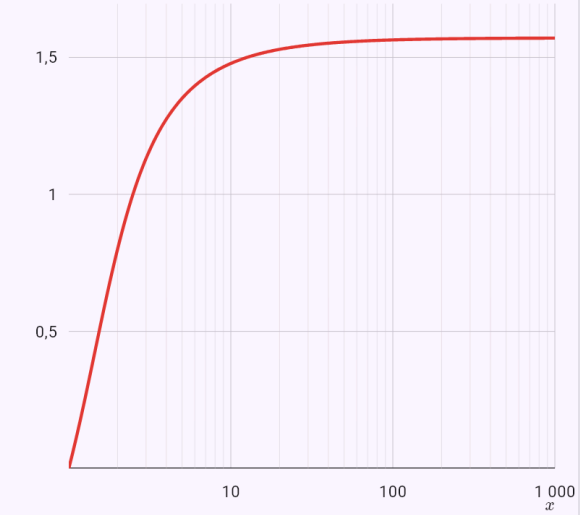
Postup

- Skúmame rovnicu $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ na intervale $\langle 1;\, \infty)$, teda y" + q(x)y = 0 s q = $\frac{1}{4x^2}$
- Rovnica je oscilatorická, keď každé jej netriviálne riešenie má na intervale nekonečne veľa nulových bodov. Podľa Sturmovej separačnej vety sa nulové body dvoch nezávislých riešení striedajú, takže stačí skúmať jedno riešenie: buď oscilujú všetky riešenia, alebo žiadne.
- Ide o Eulerovu rovnicu y" + (k/x²)y = 0 s hraničnou hodnotou k = $\frac{1}{4}$. Charakteristická rovnica $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{4}=0$ má dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}$, riešenie $y=\sqrt{x}(C_1+C_2\ln x)$ má najviac jeden nulový bod. Rovnica ešte nie je oscilatorická.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: keď ∫ 1/r = ∞ a ∫ q = ∞, je rovnica oscilatorická. Tu $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x=\infty$, ale $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$, takže kritérium nerozhodne.
- Kneserovo kritérium: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{4}$ sa rovná kritickej konštante $\frac{1}{4}$, takže samo nerozhodne. Rozhodne až ďalší člen.
- V kritickom prípade porovnáme rovnicu s Riemannovou–Weberovou rovnicou y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, ktorá osciluje práve pre μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)\ln^2 x=0<\frac{1}{4}$, rovnica nie je oscilatorická.
- Riccatiho technika: substitúcia $w=\frac{y'}{y}$ prevedie rovnicu na Riccatiho rovnicu $w'+w^2+\frac{1}{4x^2}=0$. Tá má riešenie $w=\frac{1}{2x}$ na celom intervale – zodpovedá riešeniu y bez nulových bodov, rovnica teda nie je oscilatorická.
- Prüferova transformácia $y=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho\cos\varphi$ prevedie rovnicu na rovnicu pre uhol φ: $\varphi'=\cos^2\varphi+\frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. V nulovom bode y je φ násobkom π a φ' > 0, uhol teda cez násobky π len rastie. Počet nulových bodov na intervale (a; b⟩ je preto ⌊φ(b)/π⌋. Počítame numericky metódou Runge–Kutta (RK4) zo začiatočných hodnôt $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ \varphi(1)=0$
- Na intervale $(1;\,1000\rangle$ nemá riešenie žiadny nulový bod: $\varphi(1000)\doteq 1{,}5702\doteq 0{,}4998\pi$, uhol nedosiahol π.

- Záver: rovnica nie je oscilatorická – každé jej netriviálne riešenie má len konečne veľa nulových bodov.

Graf





Riešenie na zvolenom intervale nemá nulový bod; Prüferov uhol φ pod ním nedosiahne π.

Kneserovo kritérium: x²q → 1 > 1/4, nuly rastú geometricky.

Zadanie: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

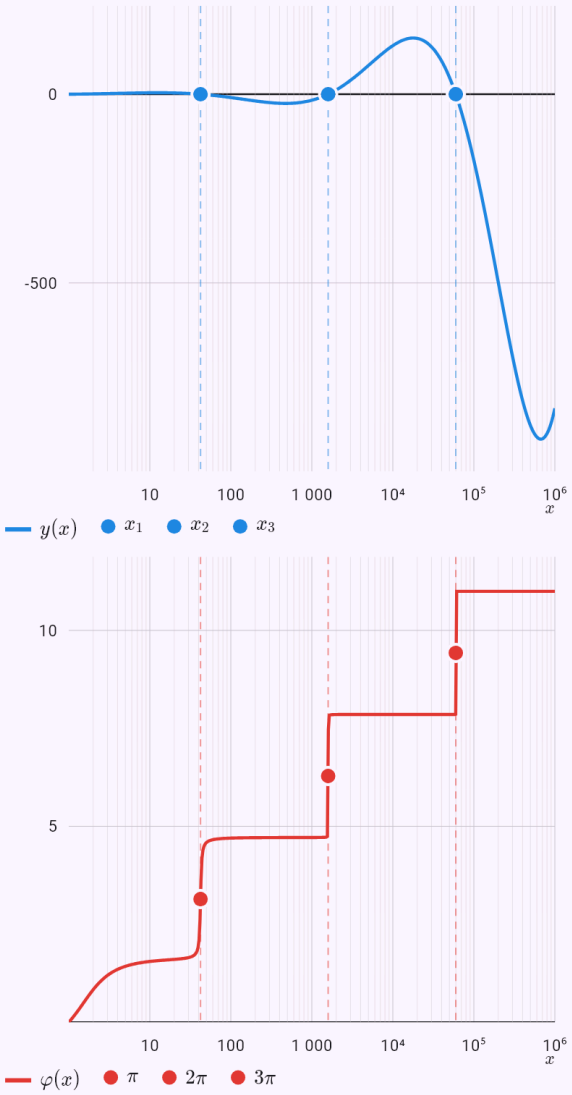
Výsledok

Rovnica je oscilatorická.

Postup

- Skúmame rovnicu $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ na intervale $\langle 0;\, \infty)$, teda y" + q(x)y = 0 s q = $\frac{1}{x^2+1}$
- Rovnica je oscilatorická, keď každé jej netriviálne riešenie má na intervale nekonečne veľa nulových bodov. Podľa Sturmovej separačnej vety sa nulové body dvoch nezávislých riešení striedajú, takže stačí skúmať jedno riešenie: buď oscilujú všetky riešenia, alebo žiadne.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium: keď ∫ 1/r = ∞ a ∫ q = ∞, je rovnica oscilatorická. Tu $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, ale $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, takže kritérium nerozhodne.
- Kneserovo kritérium s kritickou konštantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, rovnica je oscilatorická.
- Riccatiho technika: substitúcia $w = \frac{y'}{y}$ prevedie rovnicu na Riccatiho rovnicu $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. Rovnica nie je oscilatorická práve vtedy, keď má Riccatiho rovnica riešenie na celom intervale ⟨T; ∞) pre nejaké T. Pri oscilatorickej rovnici také riešenie nie je: w v každom nulovom bode y „utečie“ do −∞.
- Prüferova transformácia $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ prevedie rovnicu na rovnicu pre uhol φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. V nulovom bode y je φ násobkom π a φ' > 0, uhol teda cez násobky π len rastie. Počet nulových bodov na intervale (a; b⟩ je preto ⌊φ(b)/π⌋. Počítame numericky metódou Runge–Kutta (RK4) zo začiatočných hodnôt $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Na intervale $(1;\, 1\,000\,000\rangle$ má riešenie toľko nulových bodov: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Susedné nulové body sú od seba vzdialené $1548{,}7974$ až $58269{,}3046$. Nulové body: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Záver: rovnica je oscilatorická – každé jej netriviálne riešenie má nekonečne veľa nulových bodov.

Graf



Riešenie s vyznačenými nulovými bodmi; pod ním Prüferov uhol φ, ktorý v nulových bodoch prechádza násobkami π.

Polovične lineárna Eulerova rovnica, k = 1 > (2/3)³.

Zadanie: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Výsledok

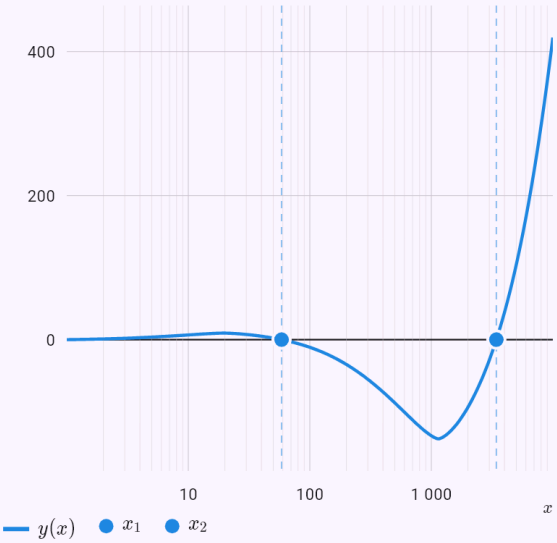
Rovnica je oscilatorická.

Postup

- Skúmame polovične lineárnu rovnicu $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ s p = 3 na intervale $\langle 1; \infty)$, kde $\Phi(s) = |s|^{1}s$. Násobok riešenia je opäť riešenie, súčet dvoch riešení však vo všeobecnosti nie. Pre p = 2 dostaneme lineárnu rovnicu y" + q(x)y = 0.
- Rovnica je oscilatorická, keď každé jej netriviálne riešenie má na intervale nekonečne veľa nulových bodov. Sturmova separačná veta platí aj pre polovične lineárne rovnice: buď oscilujú všetky riešenia, alebo žiadne.
- Ide o polovične lineárnu Eulerovu rovnicu s k = 1. Po dosadení y = x^λ s 0 < λ < 1 dostaneme k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ pre p = 3. Funkcia G má najväčšiu hodnotu, kritickú konštantu $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, v bode λ = (p − 1)/p. Tu je k väčšie, riešenie tvaru x^λ neexistuje a rovnica je oscilatorická.
- Leightonovo–Wintnerovo kritérium (keď ∫ q = ∞, je rovnica oscilatorická) tu nerozhodne: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Kneserovo kritérium pre polovične lineárne rovnice s kritickou konštantou $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ je väčšie, rovnica je oscilatorická.
- Riccatiho technika pre polovične lineárnu rovnicu: substitúcia $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ vedie na Riccatiho rovnicu $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. Rovnica nie je oscilatorická práve vtedy, keď má táto rovnica riešenie na celom intervale ⟨T; ∞).

- Numericky (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) má riešenie na intervale $(1;\ 10\,000\rangle$ toľko nulových bodov: 2, od seba vzdialených $3369{,}2413$. Nulové body: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Záver: rovnica je oscilatorická – každé jej netriviálne riešenie má nekonečne veľa nulových bodov.

Graf



Riešenie s vyznačenými nulovými bodmi.

Diskrétne Kneserovo kritérium: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Zadanie: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

Výsledok

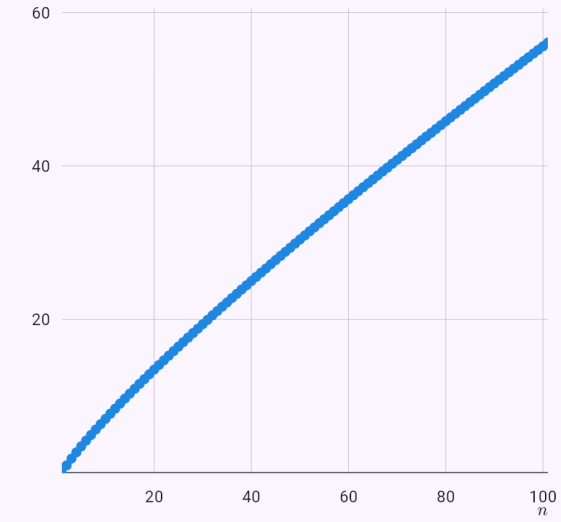
Rovnica nie je oscilatorická.

Postup

- Skúmame diskrétnu obdobu rovnice (r y')' + q y = 0, lineárnu rekurenciu $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ pre $n \geq 1$, kde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Ako rekurencia: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Pri postupnosti počítame zovšeobecnené nulové body: $y_n = 0$ alebo zmenu znamienka medzi y_n a y_{n+1}. Rovnica je oscilatorická, keď má každé netriviálne riešenie nekonečne veľa zovšeobecnených nulových bodov. Aj tu platí Sturmova separačná veta.
- Diskrétne Leightonovo–Wintnerovo kritérium: keď $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ a $\Sigma\, q_n = \infty$, je rovnica oscilatorická. Tu $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, takže kritérium nerozhodne.
- Diskrétne Kneserovo kritérium s kritickou konštantou $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8}$ < 1/4, rovnica nie je oscilatorická.
- Diskrétna Riccatiho technika: substitúcia $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ vedie na rovnicu $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. Rovnica nie je oscilatorická práve vtedy, keď má táto rovnica od istého n riešenie s $w_n + r_n > 0$.
- Riešenie s $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ nemá pre n v intervale $(1;\, 101\rangle$ žiadny zovšeobecnený nulový bod.

- Záver: rovnica nie je oscilatorická – každé jej netriviálne riešenie má len konečne veľa nulových bodov.

Graf



Riešenie na zvolenom intervale nemá nulový bod.

Príklad 4.2 Došlej a Mariniho – prípad C5: regulárne rastúce a silne klesajúce riešenia.

Zadanie: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Výsledok

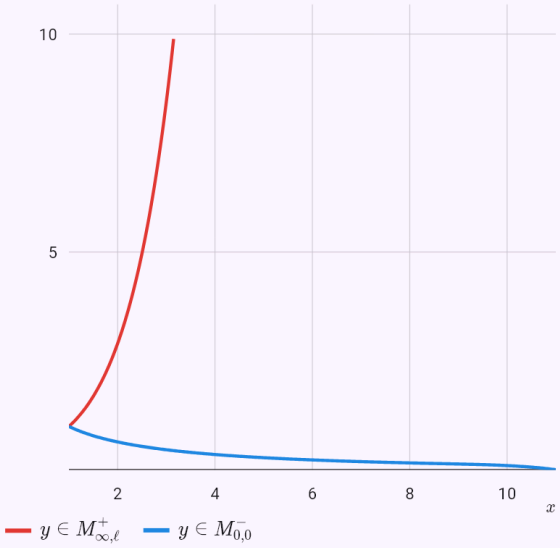
$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

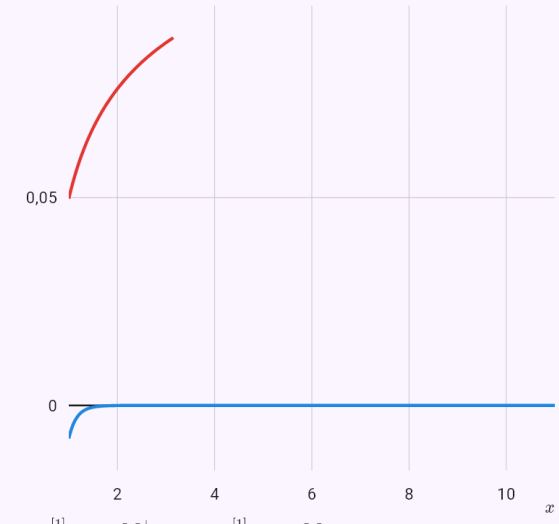
Postup

- Skúmame polovične lineárnu rovnicu $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ na intervale $\langle 1;\,\infty)$ s α = 3, a = e^{-3x} > 0 a b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. Ide o rovnicu s p-Laplaciánom pre p = α + 1 so „záporným potenciálom“ – neosciluje. Všeobecný tvar rovnice je $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- Správanie riešenia opisuje spolu s y aj kvaziderivácia $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3\operatorname{sgn} y'$. Každé netriviálne riešenie patrí do jednej z dvoch tried: M^+ – od istého x je y·y' > 0 a |y| rastie – alebo M^- – y·y' < 0 na celom intervale a |y| klesá. Triedy sa delia podľa limít |y| a $|y^{[1]}|$ pre x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová), napríklad $M^+_{\infty,\ell}$
- Podľa Vety 2.1 (Došlá–Marini) je každé riešenie definované na celom intervale a obe triedy M^+ aj M^- sú neprázdne. Do M^+ patrí napríklad riešenie s $y(x_0) > 0$ a $y'(x_0) \geq 0$.
- Integrál A: integrand sa pre x → ∞ správa ako e^x (až na kladnú konštantu). Rozhoduje exponenciála, preto $\displaystyle\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál B $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- Integrál J_1: integrand sa pre x → ∞ správa ako e^x (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Rozhoduje exponenciála, preto $\displaystyle\int_1^\infty e^x\left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál J_2: integrand sa pre x → ∞ správa ako $x^{-\frac{2}{3}}$ (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\displaystyle\int_1^\infty e^x\left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál Y_1 diverguje, pretože diverguje už vnútorný integrál $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál Y_2: integrand sa pre x → ∞ správa ako x^{-2} (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x < \infty$
- Lema 2.1 (zovšeobecnenie Fubiniho vety): pre α = 3 ≥ 1 vyplýva z $Y_2 = \infty$, že $J_2 = \infty$, a z $Y_1 = \infty$, že $J_1 = \infty$.
- Integrály vyšli $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – to je prípad C_5 klasifikácie (Veta 3.1).
- Reciproká rovnica $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a a b si vymenia úlohy a α prejde na 1/α) má za riešenia kvaziderivácie riešení zadanej rovnice. Integrály J_1, J_2 sa v nej čítajú ako Y_2, Y_1, takže nastáva prípad C_8. Triedy si zodpovedajú s vymenenými indexmi: $M^+_{\infty,\ell}$ zadanej rovnice zodpovedá $M^+_{\ell,\infty}$ recipročnej.

- $M^{+}_{\infty,\ell} \neq \emptyset$: regulárne rastúce riešenia – $|y| \to \infty$, ale kvaziderivácia má konečnú nenulovú limitu, y rastie ako $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (Veta 3.1).
- $M^{-}_{0,0} \neq \emptyset$: silne klesajúce riešenia – $y \to 0$ aj $y^{[1]} \to 0$ (Veta 3.1).
- Riešenie z M^{-} v grafe je nájdené numericky streľbou: hľadáme začiatočnú hodnotu kvaziderivácie, pre ktorú riešenie s $y(1) = 1$ na dlhom intervale neklesne na nulu ani nezačne rásť – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Taká hodnota je jediná, pretože $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Veta 4).

Graf





Hore numerické riešenia y(x) z neprázdnych tried (M^{+} z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} streľbou), dole ich kvaziderivácie y^[1](x). Krivka končí, kde |y| prerastie 10.

Prípad C4 – ohraničené rastúce riešenia a celý interval klesajúcich.

Zadanie: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Výsledok

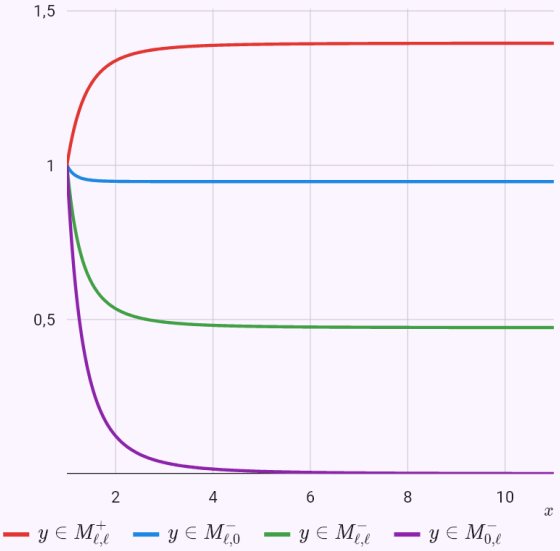
$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

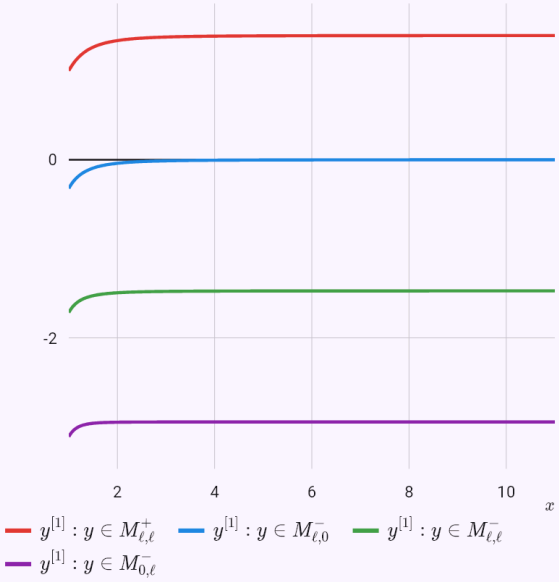
Oscilácia rovnice

Postup

- Skúmame lineárnu rovnicu $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ na intervale $\langle 1;\ \infty)$, teda (a(x)y')' = b(x)y s a = x^4 > 0 a b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. V zápise (a y')' + q y = 0 je q = −b záporné, takže rovnica nie je oscilatorická – každé riešenie má najviac jeden nulový bod.
- Správanie riešenia opisuje spolu s y aj kvaziderivácia $y^{[1]} = x^4 y'$. Každé netriviálne riešenie patrí do jednej z dvoch tried: M^+ – od istého x je y·y' > 0 a |y| rastie – alebo M^- – y·y' < 0 na celom intervale a |y| klesá. Triedy sa delia podľa limít |y| a $|y^{[1]}|$ pre x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová), napríklad $M^+_{\infty,\ell}$
- Podľa Vety 2.1 (Došlá–Marini) je každé riešenie definované na celom intervale a obe triedy M^+ aj M^- sú neprázdne. Do M^+ patrí napríklad riešenie s y(x₀) > 0 a y'(x₀) ≥ 0.
- Integrál A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Integrál B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Integrál J_1: integrand sa pre x → ∞ správa ako x^{-4} (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$
- Integrál J_2: integrand sa pre x → ∞ správa ako x^{-7} (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$
- Integrály vyšli $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – to je prípad C_4 klasifikácie (Veta 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: rastúce riešenia s konečnou limitou y aj kvaziderivácie (Veta 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: klesajúce riešenia, kde y aj kvaziderivácia majú nenulové limity (Veta 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: riešenia klesajúce k nenulovej limite, kvaziderivácia → 0 (Veta 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: regulárne klesajúce riešenia – y → 0, ale kvaziderivácia má nenulovú limitu, y klesá ako $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (Veta 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – žiadne riešenie tohto typu (Veta 3.1).
- Riešenia z M^- v grafe sú nájdené numericky streľbou: s $y(1) = 1$ zostanú kladné a klesajúce pre celý interval začiatočných hodnôt kvaziderivácie $y^{[1]}(1) \in \langle -3{,}1103;\ -0{,}3215\rangle$, pretože $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (Veta 4). Krajné body a stred intervalu dávajú riešenia rôznych tried.

Graf





Hore numerické riešenia y(x) z neprázdnych tried (M^+ z y(x₀) = 1, y'(x₀) = 1, M^- streľbou), dole ich kvaziderivácie y^[1](x). Krivka končí, kde |y| prerastie 10.

Superlineárna rovnica – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (riešenie $\sqrt{2}/(x+\sqrt{2})$).

Zadanie: `asymptotics(y'' = y^3)`

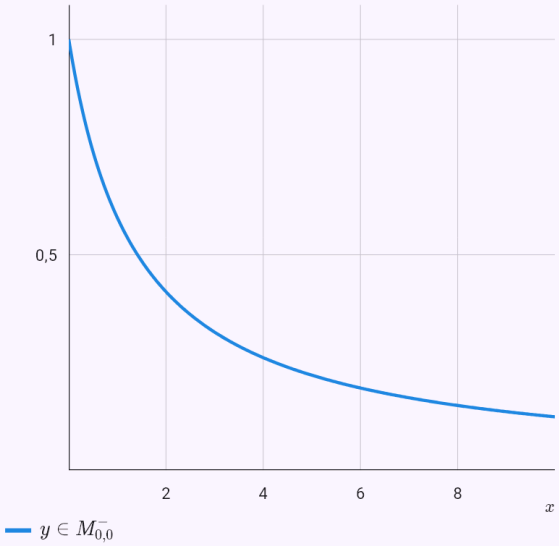
Výsledok

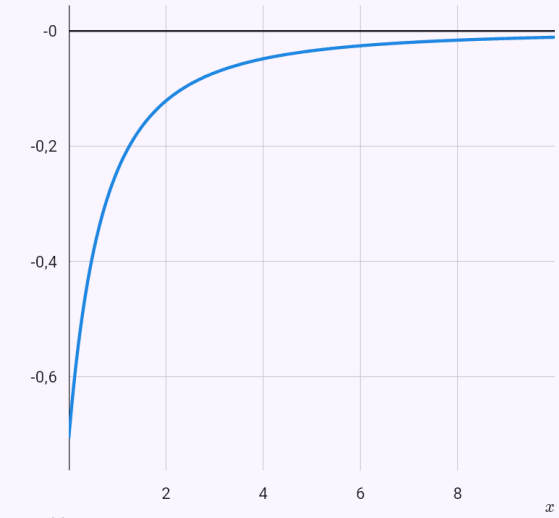
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

Postup

- Skúmame rovnicu Emdenovho–Fowlerovho typu $y'' = |y|^2 y$ na intervale $\langle 0;\infty)$ s α = 1, β = 3, a = 1 > 0 a b = 1 > 0. Keďže β > α, je rovnica superlineárna. Všeobecný tvar rovnice je $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Správanie riešenia opisuje spolu s y aj kvaziderivácia $y^{[1]} = y'$. Každé netriviálne riešenie definované až do nekonečna patrí do jednej z dvoch tried: M^+ – od istého x je y·y' > 0 a |y| rastie – alebo M^- – y·y' < 0 a |y| klesá. Triedy sa delia podľa limít |y| a $|y^{[1]}|$ pre x → ∞: index ∞ (nekonečná), ℓ (konečná nenulová) a 0 (nulová).
- Podľa Vety 1 (Cecchi–Došlá–Marini) je pre β > α trieda M^- neprázdna. Niektoré riešenia však „vybuchnú“: |y| → ∞ už v konečnom bode, takže nie sú definované až do nekonečna. Trieda M^+ môže byť prázdna.
- Integrál A: integrand sa pre x → ∞ správa ako 1 (až na kladnú konštantu). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál B: integrand sa pre x → ∞ správa ako 1 (až na kladnú konštantu). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Integrál J_1: integrand sa pre x → ∞ správa ako x (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- Integrál $Y_2^{(\beta)}$: integrand sa pre x → ∞ správa ako x^3 (až na kladnú konštantu, vnútorný integrál nahradený svojím asymptotickým správaním). Podľa porovnávacieho kritéria s $\int x^\mu\,dx$, ktorý konverguje práve pre μ < −1, je $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- Integrál $Y_1^{(\beta)}$ diverguje, pretože diverguje už vnútorný integrál: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \emptyset$ – žiadne riešenie tohto typu (Kiguradze, citované v Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \emptyset$ – žiadne riešenie tohto typu (Lema 1).
- $M^-_{\ell,0} = \emptyset$ – žiadne riešenie tohto typu (Lema 2).
- $M^-_{0,\ell} = \emptyset$ – žiadne riešenie tohto typu (Lema 1).
- $M^-_{0,0} \neq \emptyset$: silne klesajúce riešenia – y → 0 aj $y^{[1]} \to 0$ (Veta 1).
- Riešenie z M^- v grafe je nájdené numericky streľbou: hľadáme začiatočnú hodnotu kvaziderivácie, pre ktorú riešenie s $y(0) = 1$ na dlhom intervale neklesne na nulu ani nezačne rásť – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Taká hodnota je jediná, pretože $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Veta 4).

Graf





Hore numerické riešenia y(x) z neprázdnych tried (M^+ z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- streľbou), dole ich kvaziderivácie y^[1](x). Krivka končí, kde |y| prerastie 10.

Známe obmedzenia

- Rovnicu, ktorú treba upraviť nápovedou zo zadania (inou ako $z = \ln y$), zatiaľ nevyrieši.
- Pri rovnici s parametrom (k, λ, ω) aplikácia nekreslí graf a parametre berie ako kladné.
- Kde riešenie nemožno vyjadriť explicitne, zostane v implicitnom tvare.
- Laplaceova transformácia zatiaľ nepozná Heavisideovu funkciu, posunutie a periodické pravé strany.
- Keď integrály variácie konštánt nemožno vyjadriť elementárnymi funkciami ($y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$), riešenie ich obsahuje v integrálnom tvare; graf sa potom nekreslí a začiatočné podmienky sa nedosadzujú.
- Sústavy len dvoch lineárnych rovníc s konštantnými koeficientmi bez pravej strany; nelineárne sústavy len v aplikáciách (modely).
- Riccatiho rovnicu bez zadaného partikulárneho riešenia vyrieši, len keď ho uhádne v jednoduchom tvare – inak povie, že je potrebné.
- Lagrangeovu rovnicu len bez začiatočnej podmienky; pri Clairautovej rovnici podmienka vyberie priamky (a obálku) bodom.
- Osciláciu posudzuje len pri rovniciach s číselnými koeficientmi (k musí byť číslo); polovične lineárnu rovnicu len s $r = 1$. Nulové body počíta numericky na konečnom intervale – o nekonečne rozhodujú len kritériá.
- Asymptotiku rovnice Emdenovho–Fowlerovho typu ($\beta \neq \alpha$) rozhodne len tam, kde to hovoria citované vety – ostatné triedy označí ako nerozhodnuté. Koeficienty a, b musia byť kladné; ich správanie v nekonečne rozpozná pri súčinoch mocnín, logaritmov a exponenciál, inak len presné integrály Symjou.

37. Variačný počet

Aplikácia hľadá extremálu funkcionálu J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx s okrajovými podmienkami y(a), y(b): zostaví Eulerovu–Lagrangeovu rovnicu ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (s parciálnymi deriváciami v postupe), pri integrande bez y ukáže prvý integrál a vzniknutú diferenciálnu rovnicu vyrieši riešičom ODR s okrajovými podmienkami a skúškou. Úlohu nájdete aj ako formulár v odboroch Analýza a Fyzika (Aplikácie).

Keď rovnica nemá riešenie v uzavretom tvare a F nezávisí od x, použije Beltramiho identitu a rozpozná známe extremály: brachistochronu (cykloida, s porovnaním s priamkou a časom kĺzania), reťazovku a minimálnu rotačnú plochu (dve, jedna, alebo žiadna reťazovka – Goldschmidtovo riešenie), izoperimetrickú úlohu s Lagrangeovým multiplikátorom (kruhový oblúk danej dĺžky, visiaca reťaz). Konštanty dopočíta numericky. Princíp najmenšieho účinku dáva z lagranžiánu pohybovú rovnicu, pri kyvadle s priblížením sin θ ≈ θ. Interaktívnu ukážku – preteky guličiek po brachistochrone – nájdete na mathtrace.app v časti „Vyskúšaj si“.

Ako zadať

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	Integrand a okrajové podmienky, oddelené bodkočiarkou.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	Väzba ∫ G dx = L ako posledná položka.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Lagranžián L = T − V a slovo action – pohybová rovnica.

Ukážky

Najkratšia spojnica dvoch bodov je úsečka.

Zadanie: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Výsledok

$$y = 2x$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, okrajové podmienky $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$

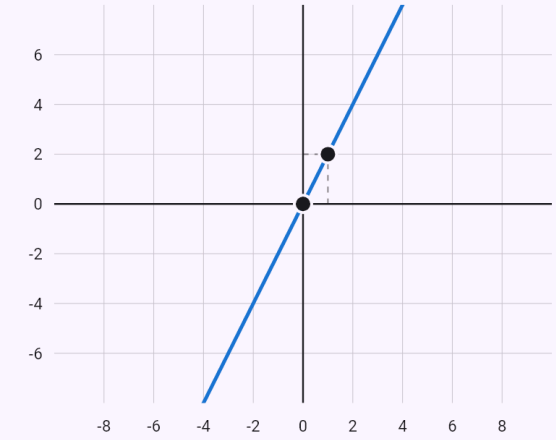
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- Integrand nezávisí od y − Eulerova–Lagrangeova rovnica má prvý integrál: $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Diferenciálnu rovnicu vyriešime:
- Na pravej strane je len funkcia nezávislej premennej − rovnicu postupne zintegrujeme: $y'' = 0$
- Integrujeme obe strany: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Integrujeme obe strany: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = 2, \; C_2 = 0$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $y = 2x$

Graf

Riešenia | Fázová rovina



$y = 2x$

Zvýraznené je riešenie spĺňajúce podmienky, body sú zadané hodnoty.

Vlastné hodnoty konštánt

C₁ | C₂ | + Pridať krivku

Ťuknite do grafu a posuvníkom nastavte smernicu − dokreslí sa riešenie, ktoré prechádza tým bodom s danou smernicou dotyčnice.

Eulerova–Lagrangeova rovnica y'' = y s okrajovými podmienkami.

Zadanie: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Výsledok

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, okrajové podmienky $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Diferenciálnu rovnicu vyriešime:
- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi: $y'' - y = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare y = e^(λx); po dosadení a vydelení e^(λx) dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^{x}$
- Všeobecné riešenie: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

Brachistochrona – cykloida z A [0; 0] do B [2; 1], kĺzanie 0,806 s oproti 1,010 s po priamke.

Zadanie: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

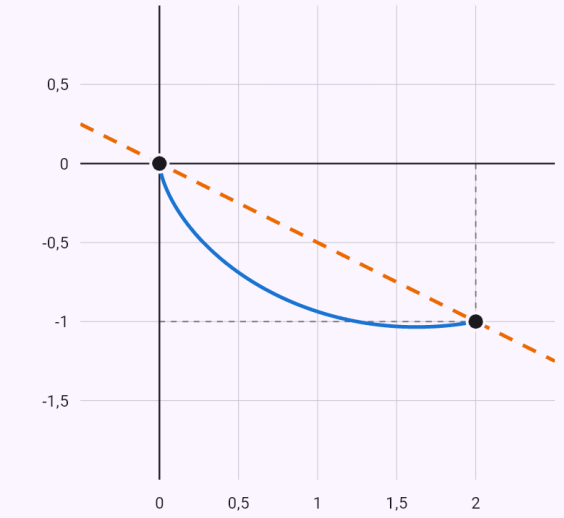
Výsledok

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, okrajové podmienky $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762\,y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762\,yy'' - 0{,}112881\,y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde y·(1 + y'²) = konšt. Riešením je cykloida – krivka, ktorú opisuje bod na kotúľajúcej sa kružnici (os y mieri nadol, štart v pokoji v A): $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Konštanty z koncového bodu B (θ_B numericky polením intervalu)
$$\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$$
- Hodnota funkcionálu: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; po priamke $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Pre J = ∫ ds/v s v = √(2gy) je J doba šmyku: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s
- θ_B > π – najrýchlejšia dráha klesne pod úroveň B a k bodu B potom vystúpi.

Graf



Os y mieri nadol – dráha vedie pod bodom A. Plne cykloida (najrýchlejší šmyk), čiarkovane priamka na porovnanie.

Minimálna rotačná plocha medzi dvoma kruhmi – dve reťazovky, minimum dáva plytšia.

Zadanie: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

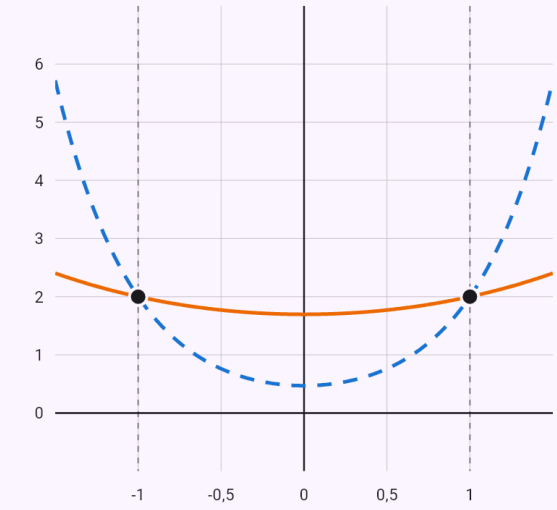
Výsledok

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697}; \quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, okrajové podmienky $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde reťazovka (hyperbolický kosínus): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Okrajovým podmienkam vyhovujú dve reťazovky (numericky). Minimum dáva tá s menšou hodnotou J – plytšia; hlbšia je len stacionárna. $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358; \quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Graf



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

Extremála medzi zadanými bodmi; čiarkovane druhé riešenie alebo krivka na porovnanie.

Kruhy ďaleko od seba – žiadna reťazovka (Goldschmidtovo riešenie).

Zadanie: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Výsledok

Nemá žiadne riešenie.

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2 + 1} \right) dx$, okrajové podmienky $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2 + 1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2 + 1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity vyjde reťazovka (hyperbolický kosínus): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Žiadna reťazovka oboma bodmi neprechádza – kruhy sú na svoju vzdialenosť príliš malé. Minimálnu plochu potom tvoria len dva kruhy a spojnica osí (Goldschmidtovo riešenie), hladká extremála neexistuje.

Najväčšia plocha pod krivkou dĺžky π – polkružnica.

Zadanie: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

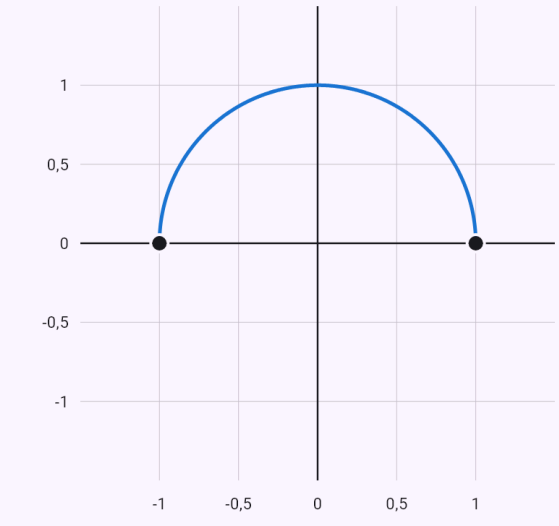
Výsledok

$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, okrajové podmienky $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Izoperimetrická úloha s väzbou $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: väzbu pripojíme Lagrangeovým multiplikátorom λ a hľadáme extrém funkcionálu s integrandom $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity pre F + λG vyjde kružnica – oblúk s polomerom |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Konštanty z dĺžky oblúka a tetivy, stredový uhol 2α (numericky) $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$

Graf



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

Extremála medzi zadanými bodmi; čiarkovane druhé riešenie alebo krivka na porovnanie.

Visiaca reťaz dĺžky 3 – reťazovka s Lagrangeovým multiplikátorom.

Zadanie: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Výsledok

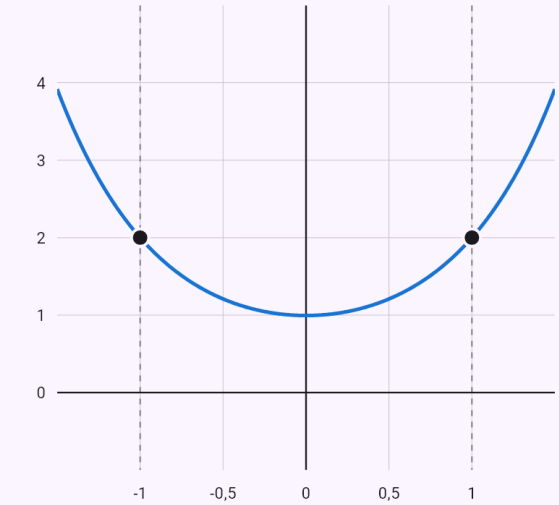
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$$

Postup

- Hľadáme funkciu, pre ktorú má funkcionál extrém: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, okrajové podmienky $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Izoperimetrická úloha s väzbou $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2+1}\right) dx = 3$: väzbu pripojíme Lagrangeovým multiplikátorom λ a hľadáme extrém funkcionálu s integrandom $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Z Beltramiho identity pre F + λG vyjde reťazovka posunutá o λ: $y = c + C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Konštanty z dĺžky reťaze a okrajových podmienok (numericky)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Graf



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$

Extremála medzi zadanými bodmi; čiarkovane druhé riešenie alebo krivka na porovnanie.

Princíp najmenšieho účinku – pružina, pohybová rovnica m x″ + k x = 0.

Zadanie: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Výsledok

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Postup

- Princíp najmenšej akcie: pohyb prebieha tak, aby akcia bola stacionárna: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica lagranžiánu je pohybová rovnica: $-kx - mx'' = 0$
- Diferenciálnu rovnicu vyriešime:
- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi:
  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare x = e^(λt); po dosadení a vydelení e^(λt) dostaneme charakteristickú rovnicu:
  $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- Všeobecné riešenie
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Kyvadlo – pre malé výchylky sin θ ≈ θ.

Zadanie: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Výsledok

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Postup

- Princíp najmenšej akcie: pohyb prebieha tak, aby akcia bola stacionárna: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Parciálne derivácie integrandu podľa y a y' a úplná derivácia podľa x (y aj y' závisia od x)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- Eulerova–Lagrangeova rovnica lagranžiánu je pohybová rovnica: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- Integrand nezávisí od x – platí Beltramiho identita F − y'·∂F/∂y' = C₁: $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- Rovnica so sin θ nemá elementárne riešenie. Pre malé výchylky sin θ ≈ θ dostaneme rovnicu harmonických kmitov: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Diferenciálnu rovnicu vyriešime:
- Lineárna rovnica s konštantnými koeficientmi:
  $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare \theta = e^(λt); po dosadení a vydelení e^(λt) dostaneme charakteristickú rovnicu:
  $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Každý koreň λ dáva riešenie e^(λx), k-násobný ešte x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx) a dvojica α ± βi riešenia e^(αx)·cos βx a e^(αx)·sin βx. Fundamentálny systém
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- Všeobecné riešenie
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Známe obmedzenia

- Jedna neznáma funkcia a najviac prvá derivácia v integrande; funkcionály s viacerými funkciami alebo s y'' zatiaľ nie.
- Známe extremály (cykloida, reťazovka, kruhový oblúk) rozpozná podľa tvaru integrandu; iné nelineárne rovnice zostanú v tvare Eulerovej–Lagrangeovej rovnice.
- Brachistochrona štartuje v pokoji – začiatočný bod musí mať $y(a) = 0$ a os y smeruje nadol.

38. Parciálne diferenciálne rovnice

Rovnicu zapíšte priamo s indexmi u_t, u_xx, u_xy (z fotky aplikácia prečíta aj ∂u/∂t a ∂²u/∂x²), Laplaceov operátor ako Δu; podmienky a oblasť oddeľte bodkočiarkou. Bez podmienok aplikácia určí typ lineárnej rovnice 2. rádu (eliptická, parabolická, hyperbolická – pri premenných koeficientoch podľa oblasti), rovnicu charakteristík, kanonický tvar a pri rovniciach bez nižších členov všeobecné riešenie. Rovnice 1. rádu a·u_x + b·u_y + c·u = f rieši metódou charakteristík so skúškou.

S okrajovými a začiatočnými podmienkami rieši separáciou premenných rovnicu vedenia tepla u_t = k·u_xx a vlnovú rovnicu u_tt = c²·u_xx na intervale (konce s danou teplotou aj izolované, nenulové hodnoty cez ustálený stav) a Laplaceovu rovnicu na obdĺžniku a v kruhu (aj mimo neho). Koeficienty Fourierovho radu vypočíta všeobecne pre n, a keď je začiatočná funkcia súčtom vlastných funkcií, vyjde konečný súčet. Na celej priamke použije d'Alembertov vzorec a Fourierovu transformáciu (tepelné jadro), na polpriamke x > 0 Laplaceovu transformáciu v čase. Zvládne aj zdroj f(x, t) (Duhamelov princíp), tepelný tok na konci, okrajové hodnoty premenné v čase a pri Laplaceovej rovnici deriváciu na stranách. Z nelineárnych rovníc rieši Burgersovu – charakteristikami do vzniku rázovej vlny, s viskozitou Coleovou–Hopfovou transformáciou; vlnovú rovnicu na priamke ukáže aj Fourierovou transformáciou. Poissonovu rovnicu Δu = f na obdĺžniku rieši dvojným Fourierovým radom (zdroj ako súčet súčinov p(x)·q(y)), so všetkými štyrmi stranami s deriváciou overí podmienku riešiteľnosti a vráti riešenie až na konštantu. Rovnice s premennými koeficientmi αx²u_xx + βxu_x prevedie na Sturmovu–Liouvillovu úlohu s váhou.

Numericky metódou sietí so schémou v hlavičke ako pri ostatných numerických metódach: rovnicu vedenia tepla explicitne (ftcs), implicitne (btcs), Crankovou–Nicolsonovej schémou (cranknicolson) a θ-metódou (theta) – implicitné sústavy Thomasovým algoritmom, s von Neumannovou analýzou stability; transportnú rovnicu schémami upwind, laxwendroff a leapfrog s podmienkou CFL, vlnovú rovnicu leapfrog; Laplaceovu (Poissonovu) rovnicu päťbodovou schémou a iteráciami jacobi, gaussseidel a sor s porovnaním počtu iterácií. Pomenované hodnoty: h krok v priestore, k krok v čase, to konečný čas, theta, omega, tol, max. Rovnica vedenia tepla je aj formulár v odbore Numerické metódy. Vedenie tepla v 2D na obdĺžniku rieši schémami ftcs a adi (metóda striedavých smerov), Laplaceovu rovnicu aj metódou združených gradientov (cg), multigridom (multigrid) a metódou konečných prvkov s trojuholníkmi (fem); Burgersovu rovnicu Godunovovou schémou (upwind). Transportná a Laplaceova rovnica sú tiež formuláre v odbore Numerické metódy, aplikácie (tyč, struna, bubon, difúzia) vo formulároch fyziky a chémie. Pre zákony zachovania pribudli schémy laxfriedrichs a muscl (s limiterom minmod) – pre transportnú aj Burgersovu rovnicu, tú aj s viskozitou (porovnanie s Coleovou–Hopfovou transformáciou). Metóda konečných prvkov (fem) počíta aj na všeobecnom mnohouholníku zadanom vrcholmi, polygon = (0,0), (2,0), …, s hodnotou na hranici u = …; sieť vznikne orezávaním uší a delením trojuholníkov. Vedenie tepla v doske je formulár vo fyzike.

Výsledkom je graf riešenia u(x, t): krivka v čase s posuvníkom a tlačidlom prehrať a otočná 3D plocha; pri numerickom riešení je presné riešenie čiarkovane. Ustálené riešenie u(x, y) Laplaceovej rovnice je 3D

plocha.

Ako zadať

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	Rovnica, okrajové a začiatočné podmienky; derivácia v podmienke ako u_t(x,0) alebo u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Oblasť: x ∈ ℝ, x > 0 alebo 0 < x < π; bez okrajových podmienok sa berie celá priamka.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	Laplaceova rovnica v kruhu: Δu, polomer r a uhol φ (alebo θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numericky: schéma v hlavičke, kroky h a k a konečný čas to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Vedenie tepla v 2D: u(x,y,t), podmienky ako u(x,y,0) = … a u(0,y,t) = …; strany bez podmienky majú hodnotu 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Konečné prvky na mnohouholníku: vrcholy za polygon =, hodnota na hranici u = …, najdlhšia hrana h.

Ukážky

Hyperbolická rovnica – charakteristiky, kanonický tvar u_ξη = 0 a všeobecné riešenie.

Zadanie: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Výsledok

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Koeficienty pri druhých deriváciách v tvare $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Diskriminant: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, rovnica je hyperbolická (ako vlnová rovnica): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- Rovnica charakteristík: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Dve reálne sústavy charakteristík: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nové premenné pozdĺž charakteristík: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Po zámene premenných (reťazové pravidlo) dostaneme kanonický tvar: $u_{\xi\eta} = 0$
- Rovnica u_ξη = 0 sa dvakrát zintegruje – všeobecné riešenie s dvoma ľubovoľnými funkciami $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

Tricomiho rovnica – typ podľa oblasti.

Zadanie: `y u_xx + u_yy = 0`

Výsledok

$$D = -y$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Koeficienty pri druhých deriváciách v tvare $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Diskriminant závisí od polohy: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Typ podľa oblasti – hyperbolická pre $y < 0$, parabolická pre $y = 0$, eliptická pre $y > 0$
- Rovnica charakteristík: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

Transportná rovnica metódou charakteristík – vlna sa posúva rýchlosťou 2.

Zadanie: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledok

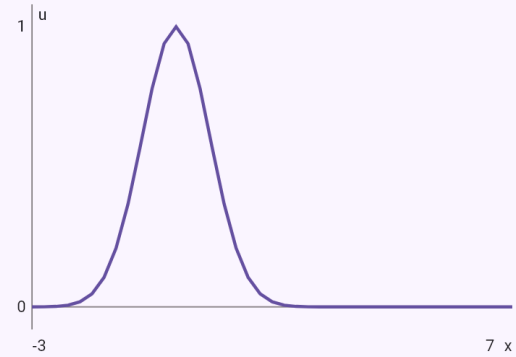
$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t + 2u_x = 0$
- Podmienky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Metóda charakteristík: pozdĺž kriviek, ktoré spĺňajú sústavu sa rovnica zmení na obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre u.
  $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$
- Charakteristiky sú krivky, na ktorých je $x - 2t = \xi$ konštantné.
- Pozdĺž charakteristiky riešime obyčajnú rovnicu, začiatočnú hodnotu vezmeme z podmienky:
  $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$
- Skúška: po dosadení do rovnice vyjde ľavá strana rovná pravej.
- Riešenie: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



t = 0

Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Vedenie tepla v tyči s chladenými koncami – Fourierov rad.

Zadanie: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Výsledok

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \, e^{-4n^2 t} \, \sin(n$$

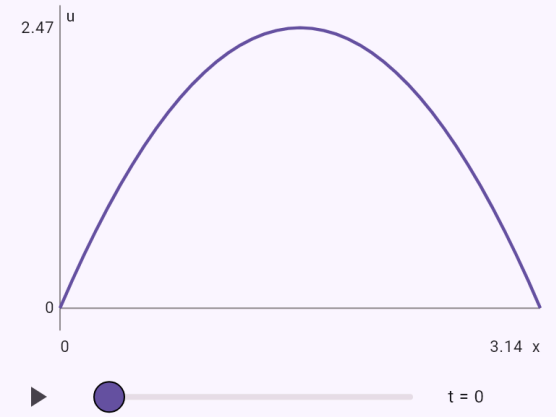
Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = 4u_{xx}$
- Podmienky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu, po dosadení a vydelení sa premenné oddelia – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie:
  $T_n' = -4n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-4n^2 t} \, \sin(nx)$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \, \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$
- Riešenie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \, e^{-4n^2 t} \, \sin(nx)$$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Konce s rôznymi teplotami – ustálený stav a odchýlka od neho.

Zadanie: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Výsledok

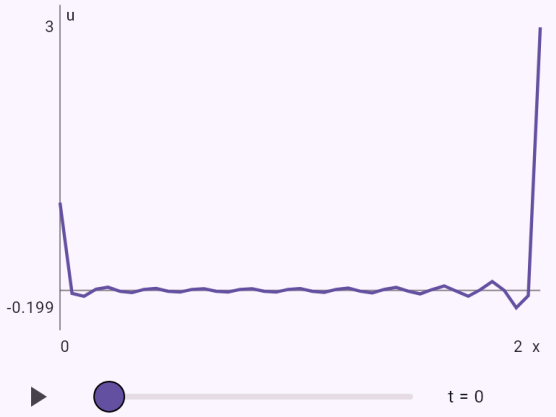
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = 2u_{xx}$
- Podmienky: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Konce majú predpísané nenulové hodnoty. Najprv nájdeme ustálený stav $w(x) = x + 1$ (rovnica bez času, w" = 0) a hľadáme $u = w(x) + v(x,t)$; odchýlka v má na koncoch nulové podmienky.
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu, po dosadení a vydelení sa premenné oddelia – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie:
  $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\, T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- Riešenie
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



t = 0

Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Brnknutá struna – stojaté vlny.

Zadanie: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Výsledok

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t) \; s$$

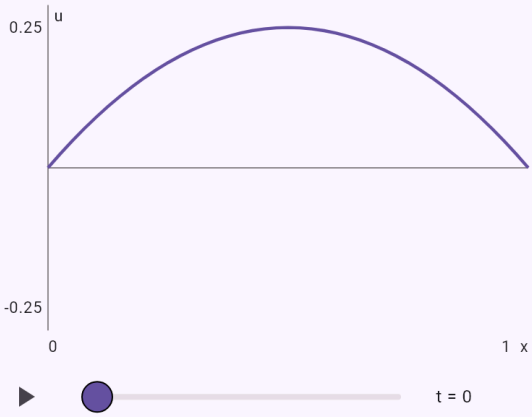
Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Podmienky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnica je hyperbolická (ako vlnová rovnica):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu – stojaté vlny; obe strany sa rovnajú rovnakej konštante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – kmity s vlastnou frekvenciou:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície)
  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$
- Riešenie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Laplaceova rovnica na obdĺžniku s jednou ohriatou stranou.

Zadanie: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Výsledok

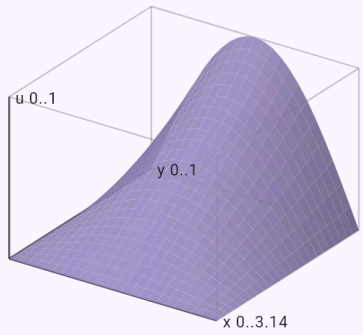
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmienky: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, rovnica je eliptická (ako Laplaceova rovnica): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatné strany majú u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Druhá rovnica Y" = λY s nulovou hodnotou na protiľahlej strane, normovaná tak, aby na danej strane bola 1: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- Začiatočná (okrajová) funkcia je už súčtom vlastných funkcií, preto je nenulových len niekoľko koeficientov $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatné sú nulové.

- Riešenie: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Laplaceova rovnica v kruhu – konečný súčet harmonických.

Zadanie: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

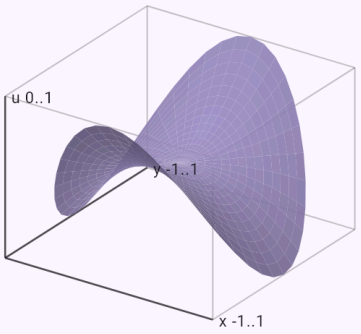
Výsledok

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Podmienky: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, rovnica je eliptická (ako Laplaceova rovnica):
  $\Delta u = 0$
- Separácia premenných v polárnych súradniciach:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi):\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- Uhol sa po obídení kruhu vracia, Φ musí byť periodická:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – riešenia
  $\lambda_n = n^2,\quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi,\quad n = 0,1,2,\ldots$
- Radiálna časť je Eulerova rovnica; vnútri kruhu musí byť riešenie ohraničené (r^{-n} a ln r vypadnú):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Fourierove koeficienty okrajovej funkcie:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- Začiatočná (okrajová) funkcia je už súčtom vlastných funkcií, preto je nenulových len niekoľko koeficientov $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$: $a_2 = -\frac{1}{2}$, ostatné sú nulové.
- Všetky koeficienty sú nulové:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- Riešenie: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

d’Alembertov vzorec – začiatočný impulz sa rozdelí na dve vlny.

Zadanie: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Výsledok

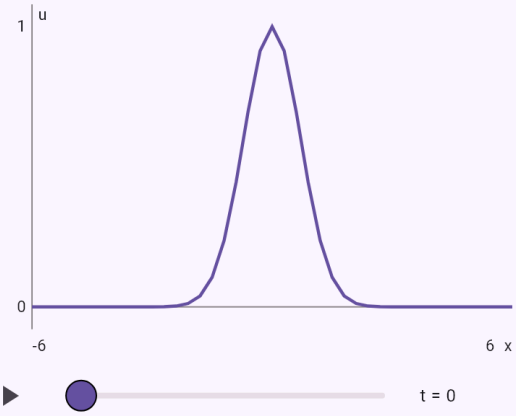
$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{tt} = u_{xx}$
- Podmienky: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnica je hyperbolická (ako vlnová rovnica): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Všeobecné riešenie vlnovej rovnice sú dve vlny, ktoré sa pohybujú rýchlosťou c doľava a doprava: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- To isté Fourierovou transformáciou v x: každá frekvencia ω kmitá zvlášť. Násobenie e^(±icωt) znamená posun o ∓ct, takže spätná transformácia dá – d’Alembertov vzorec.
- Zo začiatočných podmienok u = f a u_t = g dostaneme d’Alembertov vzorec: $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Skúška: po dosadení do rovnice vyjde ľavá strana rovná pravej.
- Riešenie: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



t = 0

Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Fourierova transformácia na celej priamke – Gaussov profil sa rozširuje.

Zadanie: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledok

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

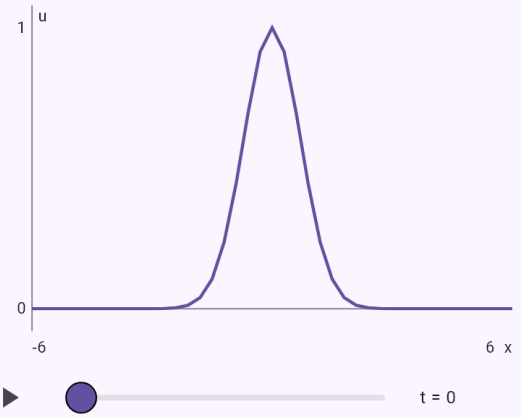
Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = u_{xx}$
- Podmienky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na celej priamke použijeme Fourierovu transformáciu v x – derivácia u_xx sa zmení na násobenie −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Pre každé ω zostane obyčajná rovnica v čase $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- Spätná transformácia súčinu je konvolúcia s tepelným jadrom (Gaussovou funkciou, ktorá sa s časom rozširuje) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- Konvolúcia dvoch Gaussových funkcií je opäť Gaussova funkcia, len širšia a nižšia $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Skúška: po dosadení do rovnice vyjde ľavá strana rovná pravej.

- Riešenie: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Laplaceova transformácia – ohrev polpriestoru, funkcia erfc.

Zadanie: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

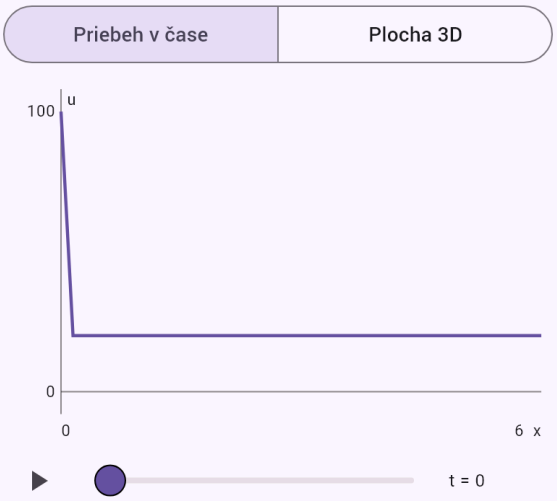
Výsledok

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = 4u_{xx}$
- Podmienky: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na polpriamke použijeme Laplaceovu transformáciu v čase $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – derivácia u_t sa zmení na sU − u(x, 0) a zostane obyčajná rovnica v x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Pre x → ∞ musí U zostať ohraničená, rastúca exponenciála vypadne: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; konštanta z okrajovej podmienky: $U(0,s) = \frac{100}{s} \;\Rightarrow\; A(s) = \frac{80}{s}$
- Spätná transformácia podľa slovníka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- Riešenie: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Graf



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Explicitná schéma s r = 0,7 > 1/2 – nestabilita podľa von Neumanna.

Zadanie: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Sieť: 11 uzlov v x, 143 časových krokov až do t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r je pomer časového kroku a štvorca priestorového kroku).
- Explicitná schéma (dopredná diferencia v čase, centrálna v priestore) – každá nová hodnota priamo z troch starých: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), každá sa za krok vynásobí zosilnením G: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. Stabilita vyžaduje $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – tu neplatí, chyby budú exponenciálne rásť.
- Prvá časová vrstva

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

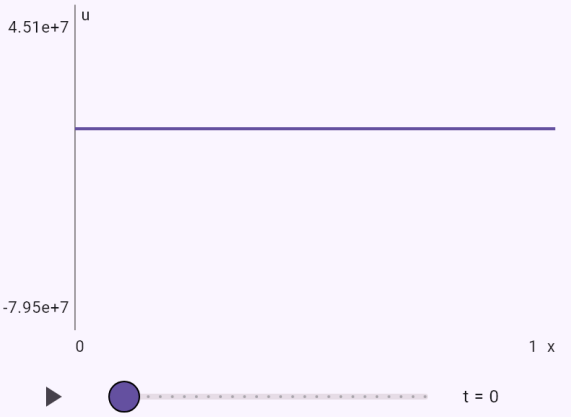
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- Vo vrstve level.50 hodnoty prerástli všetky medze – schéma je nestabilná, výpočet sme zastavili.
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Crankova–Nicolsonovej schéma s Thomasovým algoritmom.

Zadanie: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Sieť: 11 uzlov v x, 10 časových krokov až do t = 0,1; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r je pomer časového kroku a štvorca priestorového kroku).
- Crankova–Nicolsonovej schéma – priemer explicitnej a implicitnej, druhý rád presnosti aj v čase $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), zosilnenie za krok je $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; vždy $|G| \le 1$, schéma je stabilná pre ľubovoľný krok (bezpodmienečne).
- Pre každú časovú vrstvu treba vyriešiť trojdiagonálnu sústavu a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (okrajové hodnoty prevedené na pravú stranu). Prvá vrstva

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Sústavu riešime Thomasovým algoritmom – dopredný chod a spätné dosadenie $c_i' = \dfrac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \dfrac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

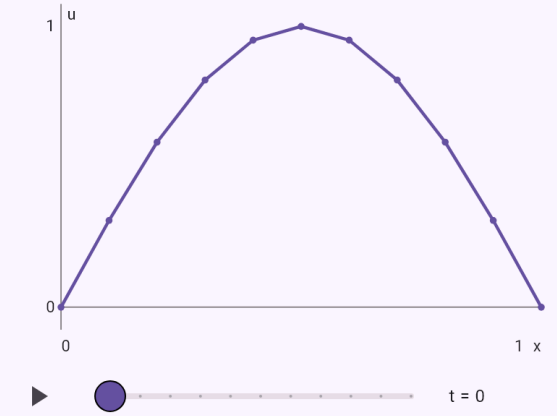
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,(
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,(
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,(

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (presne v strede $0{,}372708$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Body: numerické riešenie v uzloch siete; čiarkovane presné riešenie. Posuvníkom sa volí časová vrstva.

Laxova–Wendroffova schéma pre transportnú rovnicu, podmienka CFL.

Zadanie: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =`

```
0.016; to = 0.4)
```

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Sieť na $0 \le x \le 1$: 51 uzlov, 25 časových krokov až do t = $0{,}4$; $h = 0{,}02$, $\quad k = 0{,}016$, $\quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ je Courantovo číslo.
- Presné riešenie je prenášané po charakteristikách $x - t = C$ rýchlosťou a = 1
- Laxova–Wendroffova schéma – Taylorov rozvoj do druhého rádu, u_{tt} nahradené $a^2 u_{xx}$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- Podmienka CFL (numerická oblasť závislosti obsahuje charakteristiku): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Von Neumannova analýza: chybu rozložíme na vlny e^(iβx), každá sa za krok vynásobí zosilnením G. Schéma je stabilná, keď |G| ≤ 1 pre všetky β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; to platí, pretože $|\nu| \le 1$
- Prvá časová vrstva

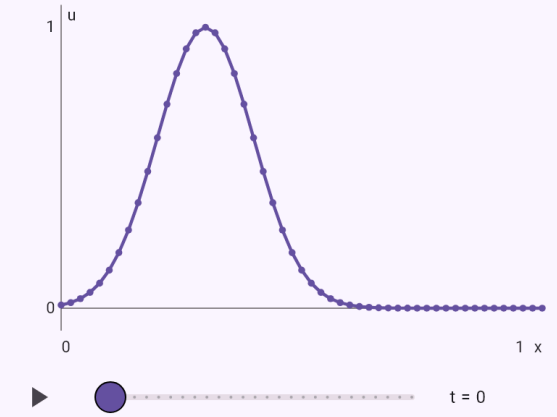
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (presne v strede $0{,}135335$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Graf



Body: numerické riešenie v uzloch siete; čiarkovane presné riešenie. Posuvníkom sa volí časová vrstva.

Päťbodová schéma a superrelaxácia SOR s optimálnym ω – porovnanie s Jacobim a Gaussom–Seidelom.

Zadanie: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Štvorcová sieť: $h = 0{,}1$, spolu 121 uzlov, z toho 81 vnútorných neznámych.
- Päťbodová schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferenciami, v každom uzle vznikne jedna rovnica: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Superrelaxácia (SOR) – Gaussov–Seidelov krok „pretiahneme“ faktorom ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Optimálny relaxačný faktor zo spektrálneho polomeru Jacobiho iterácie $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Iterácie od nulového odhadu vnútri (vybrané uzly a najväčšia zmena)

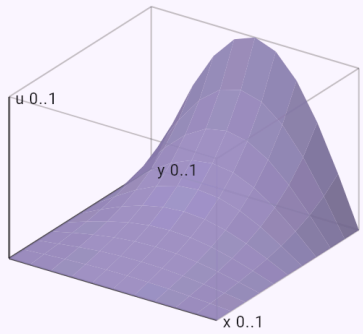
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- Iterácia sa zastavila po 20 krokoch, keď najväčšia zmena klesla pod 10^{-4}
- Porovnanie metód na rovnakej sieti a s rovnakou toleranciou: Jacobi 102 iterácií, Gauss–Seidel 61, SOR s ω = $1{,}528$ len 20
- Rýchlejšie metódy pre rovnakú sústavu (81 neznámych): združené gradienty 10 iterácií, multigrid 5 V-cyklov. Počet V-cyklov multigridu od jemnosti siete takmer nezávisí.
- Hodnoty v uzloch siete

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}0028$ (presne v strede $0{,}199268$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Zdroj tepla, ktorý s časom slabne – Duhamelov princíp.

Zadanie: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Výsledok

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Postup

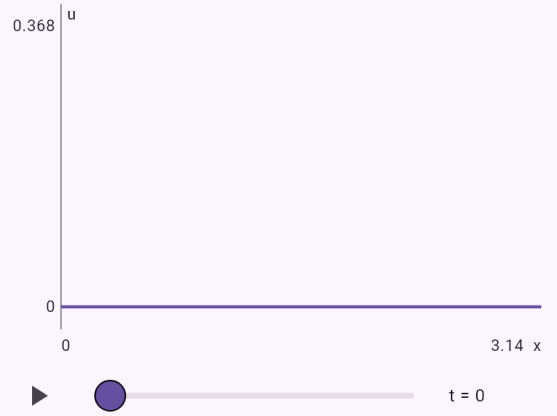
- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Podmienky: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu, po dosadení a vydelení sa premenné oddelia – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Všetky koeficienty sú nulové: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Zdroj $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ rozložíme do vlastných funkcií rovnako ako začiatočnú podmienku: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, koeficienty vypočítame integrálom.
- Začiatočná (okrajová) funkcia je už súčtom vlastných funkcií, preto je nenulových len niekoľko koeficientov $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$: $f_1 = 1$, ostatné sú nulové.
- Duhamelov princíp: každý koeficient radu spĺňa obyčajnú lineárnu rovnicu so zdrojom; riešenie je voľný útlm plus konvolúcia zdroja s útlmom

$$T_n' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- Zdroj má len konečne veľa nenulových koeficientov, ich príspevky vyjdú presne: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- Riešenie: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Stály zdroj tepla v tyči – ustálený stav je parabola.

Zadanie: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Výsledok

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = u_{xx} + 1$
- Podmienky: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Zdroj ani okrajové hodnoty nezávisia od času. Najprv nájdeme ustálený stav – riešenie rovnice bez časovej derivácie $w'' + 1 = 0$ s okrajovými podmienkami: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Hľadáme $u = w(x) + v(x,t)$; odchýlka v má nulové okrajové podmienky a žiadny zdroj.
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu, po dosadení a vydelení sa premenné oddelia – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)

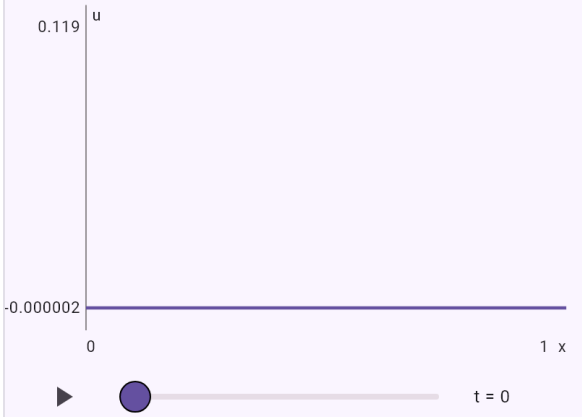
$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- Riešenie

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi$$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Izolovaná tyč, do ktorej tečie teplo jedným koncom – stredná teplota rastie lineárne.

Zadanie: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Výsledok

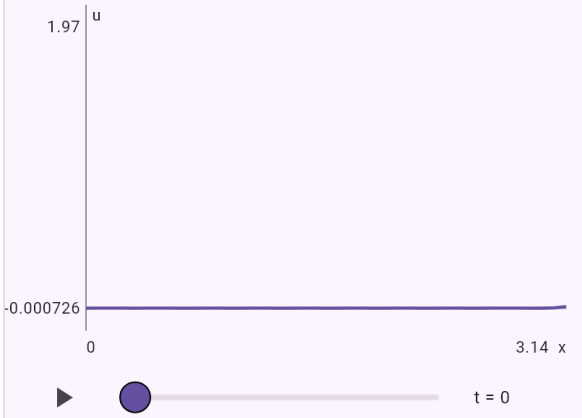
$$u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = u_{xx}$
- Podmienky: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, rovnica je parabolická (ako rovnica vedenia tepla): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Oba konce sú izolované, ale do tyče prúdi teplo (tok na koncoch alebo zdroj). Ustálený stav neexistuje – stredná teplota rastie rýchlosťou $R = \frac{1}{\pi}$. Hľadáme $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, kde W spĺňa rovnicu bez časovej derivácie: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu, po dosadení a vydelení sa premenné oddelia – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X' = 0 na oboch koncoch (izolované konce) má riešenia $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0,1,2,\ldots$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície): $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\cos(nx)$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes): $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Riešenie $u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\cos(nx)$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Struna rozkmitávaná na konci jej vlastnou frekvenciou – rezonancia, amplitúda rastie s t.

Zadanie: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Výsledok

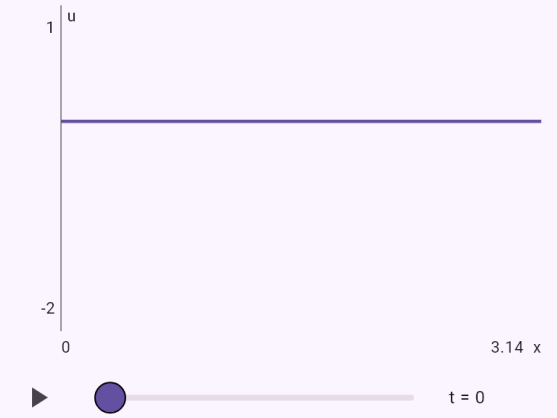
$$u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin\left(nt\right.$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{tt} = u_{xx}$
- Podmienky:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, rovnica je hyperbolická (ako vlnová rovnica):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Okrajové hodnoty sa menia s časom. Zvolíme funkciu $w(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$, ktorá okrajové podmienky spĺňa, a hľadáme $u = w + v$. Odchýlka v má nulové okrajové podmienky, ale v rovnici pribudne zdroj:
  $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x\sin t}{\pi}$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu – stojaté vlny; obe strany sa rovnajú rovnakej konštante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Časová časť pre každé n – kmity s vlastnou frekvenciou:
  $T_n'' + n^2 T_n = 0 \ \Rightarrow\ T_n = a_n\cos nt + b_n \sin nt$
- Rovnica je lineárna – súčet riešení je zase riešenie (princíp superpozície): $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Všetky koeficienty sú nulové: $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi}\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Zdroj $F(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ rozložíme do vlastných funkcií rovnako ako začiatočnú podmienku: $F_n(t) = f_n\,\sin t$, koeficienty vypočítame integrálom.
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Duhamelov princíp: každý koeficient radu je vynútený kmit – oscilátor s vlastnou frekvenciou a vonkajšou silou F_n(t). Riešenie je voľný kmit plus konvolúcia sily s odozvou na impulz sin(ω_n t)/ω_n
  $T_n'' + n^2\,T_n = F_n(t) \ \Rightarrow\ T_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(n$
- Integrál vypočítame všeobecne pre každé n (K_n je jadro z predchádzajúceho kroku); kde by všeobecný vzorec delil nulou (rezonancia), počítame zvlášť
  $\int_0^t K_n(t-s)\,\sin s\,\mathrm{d}s = \frac{n\sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- Riešenie
  $u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\,\sin(nt)\,\sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Laplaceova rovnica s izolovanou dolnou stranou (u_y = 0) – cosh namiesto sinh.

Zadanie: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Výsledok

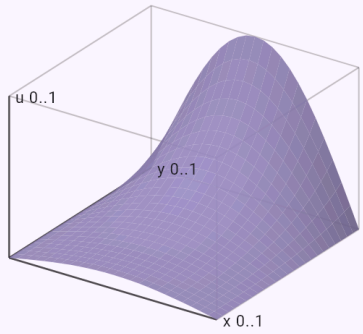
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmienky: $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, rovnica je eliptická (ako Laplaceova rovnica): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatné strany majú u = 0): $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X = 0 na oboch koncoch má nenulové riešenia len pre $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Druhá rovnica Y" = λY s nulovou deriváciou na protiľahlej (izolovanej) strane – preto cosh –, normovaná tak, aby na danej strane bola 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- Začiatočná (okrajová) funkcia je už súčtom vlastných funkcií, preto je nenulových len niekoľko koeficientov $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatné sú nulové.

- Riešenie: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Burgersova rovnica – charakteristiky sa pretnú a vznikne rázová vlna.

Zadanie: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Výsledok

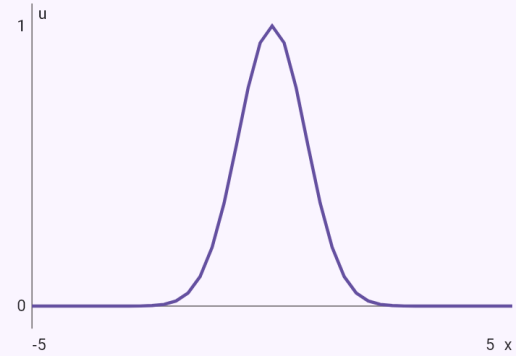
$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t + uu_x = 0$
- Podmienky: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Burgersova rovnica je nelineárna – rýchlosť šírenia je samo u. Pozdĺž charakteristík je u konštantné, takže charakteristiky sú priamky
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$$
- Riešenie je dané implicitne rovnicou $u = f(x - ut)$ – pre každý bod sa hľadá x_0, z ktorého doň vedie charakteristika.
- Kde f klesá, rýchlejšia časť vlny dobieha pomalšiu a charakteristiky sa pretnú. Prvý priesečník nastane v čase $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ – vznikne rázová vlna a hladké riešenie prestane existovať.
- Riešenie (implicitne, do vzniku rázovej vlny): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



t = 0

Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Burgersova rovnica s viskozitou – Coleova–Hopfova transformácia na vedenie tepla.

Zadanie: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Výsledok

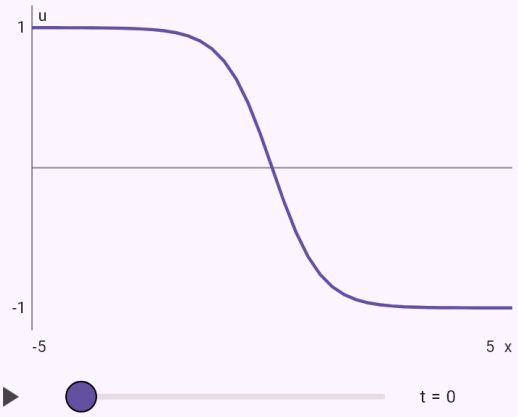
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Podmienky: $u(x,0) = -\operatorname{tgh} x$
- S viskozitou v > 0 rovnicu linearizuje Coleova–Hopfova transformácia: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – z Burgersovej rovnice sa stane rovnica vedenia tepla.
- Začiatočná podmienka pre φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- Rovnicu vedenia tepla rieši konvolúcia s tepelným jadrom; po dosadení je u podielom dvoch integrálov, ktoré pre graf počítame numericky $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}}{\int K}$
- Integrál nemá elementárne vyjadrenie – riešenie zostáva v tvare konvolúcie, graf je vypočítaný numericky: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Godunovova schéma – rázová vlna sa posúva rýchlosťou 1/2.

Zadanie: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Výsledok

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1 - \operatorname{tgh}(10x)}{2}$
- Sieť: 61 uzlov, 25 časových krokov; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Rázovú vlnu zvládne konzervatívna Godunovova schéma – tok F medzi bunkami z presného riešenia Riemannovej úlohy (skoku)

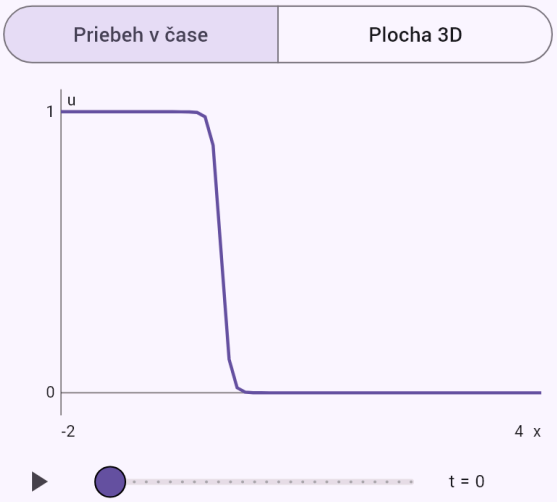
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

- Podmienka CFL (numerická oblasť závislosti obsahuje charakteristiku): $\dfrac{k}{h} \max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- Pokles z u_L na u_R < u_L sa šíri ako rázová vlna rýchlosťou z Rankinovej–Hugoniotovej podmienky: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = -2$	$x = -1{,}4$	$x = -0{,}8$	$x = -0{,}$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Výsledok v prostrednom uzle: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Graf



Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Vedenie tepla v štvorcovej doske metódou ADI – stabilné aj pre veľký krok.

Zadanie: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Sieť: 121 uzlov, 10 časových krokov (pomery časového kroku a štvorcov priestorových krokov).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- Metóda striedavých smerov (ADI) Peacemana a Rachforda: polovica kroku je implicitná v smere x a explicitná v y, druhá polovica naopak

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Von Neumannova analýza: obe polovice kroku majú spolu zosilnenie pre ľubovoľný krok – ADI je bezpodmienečne stabilná.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- V prvej polovici kroku riešime 9 trojdiagonálnych sústav pozdĺž riadkov siete, v druhej 9 pozdĺž stĺpcov – každú Thomasovým algoritmom. To je oveľa lacnejšie ako jedna veľká sústava pre celú sieť.
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

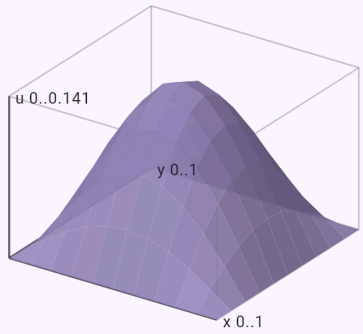
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	$1{,}000000$	$1{,}000000$
$0{,}01$	$0{,}822069$	$0{,}822069$
$0{,}02$	$0{,}675798$	$0{,}675798$
$0{,}03$	$0{,}555553$	$0{,}555553$
$0{,}04$	$0{,}456703$	$0{,}456703$
$0{,}05$	$0{,}375442$	$0{,}375442$
$0{,}06$	$0{,}308639$	$0{,}308639$
$0{,}07$	$0{,}253723$	$0{,}253723$
$0{,}08$	$0{,}208578$	$0{,}208578$
$0{,}09$	$0{,}171465$	$0{,}171465$
$0{,}1$	$0{,}140956$	$0{,}140956$

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve (presne v strede $0{,}138911$).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Laplaceova rovnica metódou združených gradientov – porovnanie s SOR a multigridom.

Zadanie: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

```
0.125)
```

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Štvorcová sieť: $h = 0{,}125$, spolu 81 uzlov, z toho 49 vnútorných neznámych.
- Päťbodová schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferenciami, v každom uzle vznikne jedna rovnica: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Metóda združených gradientov – sústava $-\Delta_h u = -f$ je symetrická a pozitívne definitná; každý krok zmenší chybu v novom smere p_k, združenom s predchádzajúcimi

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$$

- Iterácie od nulového odhadu vnútri (vybrané uzly a najväčšia zmena)

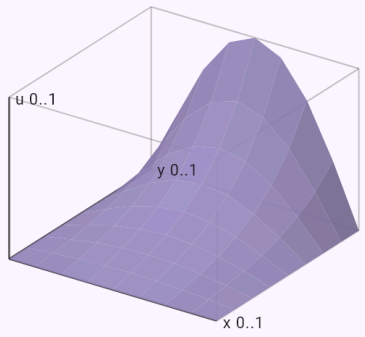
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- Iterácia sa zastavila po 8 krokoch, keď najväčšia zmena klesla pod 10^{-4}
- Porovnanie metód na rovnakej sieti a s rovnakou toleranciou: Jacobi 71 iterácií, Gauss–Seidel 42, SOR s ω = $1{,}446$ len 16
- Rýchlejšie metódy pre rovnakú sústavu (49 neznámych): združené gradienty 8 iterácií, multigrid 5 V-cyklov. Počet V-cyklov multigridu od jemnosti siete takmer nezávisí.
- Hodnoty v uzloch siete

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00432$ (presne v strede $0{,}199268$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Poissonova rovnica multigridom – pár V-cyklov na jemnej sieti.

Zadanie: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Štvorcová sieť: $h = 0{,}0625$, spolu 289 uzlov, z toho 225 vnútorných neznámych.
- Päťbodová schéma – u_xx + u_yy nahradíme diferenciami, v každom uzle vznikne jedna rovnica

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Multigrid (V-cyklus): Gaussova–Seidelova iterácia rýchlo utlmí len rýchlo sa meniacu časť chyby (S^2 – dva kroky). Hladký zvyšok r prevedieme na hrubšiu sieť 2h, tam ho opravíme (opäť multigridom) a opravu interpolujeme späť

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Iterácie od nulového odhadu vnútri (vybrané uzly a najväčšia zmena)

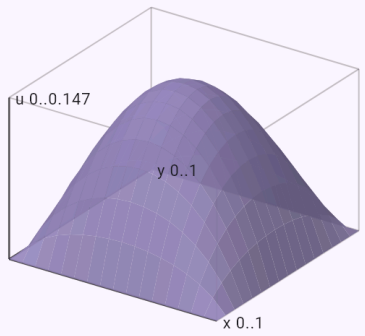
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- Iterácia sa zastavila po 4 krokoch, keď najväčšia zmena klesla pod 10^{-4}
- Porovnanie metód na rovnakej sieti a s rovnakou toleranciou: Jacobi 179 iterácií, Gauss–Seidel 108, SOR s $\omega = 1{,}674$ len 25
- Rýchlejšie metódy pre rovnakú sústavu (225 neznámych): združené gradienty 15 iterácií, multigrid 4 V-cyklov. Počet V-cyklov multigridu od jemnosti siete takmer nezávisí.
- Hodnoty v uzloch siete

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (presne v strede $0{,}147342$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Metóda konečných prvkov s trojuholníkmi – matica tuhosti a rovnaká sústava ako päťbodová schéma.

Zadanie: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Štvorcová sieť: $h = 0{,}25$, spolu 25 uzlov, z toho 9 vnútorných neznámych.
- Metóda konečných prvkov: rovnicu vynásobíme testovacou funkciou v a zintegrujeme per partes (slabá formulácia); riešenie hľadáme ako kombináciu „striešok“ φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Sieť prvkov: každú bunku rozdelíme uhlopriečkou na dva pravouhlé trojuholníky – 32 trojuholníkov, 25 uzlov, z toho 9 neznámych.
- Matica tuhosti jedného trojuholníka (gradienty lineárnych funkcií sú na ňom konštantné)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\, \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0, \\ -0, \end{pmatrix}$$

- Sčítaním príspevkov šiestich trojuholníkov okolo vnútorného uzla dostaneme jeho rovnicu – na pravidelnej sieti je to päťbodová schéma vynásobená h_x·h_y

$$4{,}0000\, u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + u$$

- Metóda združených gradientov – sústava $-\Delta_h u = -f$ je symetrická a pozitívne definitná; každý krok zmenší chybu v novom smere p_k, združenom s predchádzajúcimi

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_j$$

- Iterácie od nulového odhadu vnútri (vybrané uzly a najväčšia zmena)

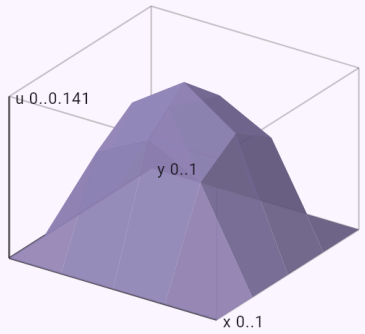
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- Iterácia sa zastavila po 4 krokoch, keď najväčšia zmena klesla pod 10^{-4}
- Porovnanie metód na rovnakej sieti a s rovnakou toleranciou: Jacobi 19 iterácií, Gauss–Seidel 11, SOR s ω = $1{,}172$ len 8
- Rýchlejšie metódy pre rovnakú sústavu (9 neznámych): združené gradienty 4 iterácií, multigrid 3 V-cyklov. Počet V-cyklov multigridu od jemnosti siete takmer nezávisí.
- Hodnoty v uzloch siete

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (presne v strede $0{,}147342$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Poissonova rovnica na štvorci – dvojný Fourierov rad, porovnajte so schémou sor.

Zadanie: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Výsledok

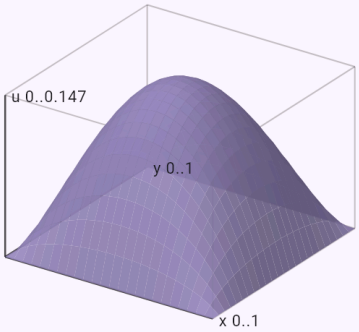
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$
$$\frac{}{mn\pi^4\left(m^2 +\right.}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Podmienky:
  $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, rovnica je eliptická (ako Laplaceova rovnica):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Časť so zdrojom hľadáme ako dvojný rad z vlastných funkcií oboch smerov – každý súčin X_m·Y_n spĺňa podmienky na stranách a Laplaceov operátor ho len násobí číslom: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, kde
  $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Zdroj rozložíme do rovnakého dvojného radu. Dosadením do Δv = f a porovnaním koeficientov dostaneme
  $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, teda
  $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$
  $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- Riešenie

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Derivácia na všetkých štyroch stranách – podmienka riešiteľnosti a riešenie až na konštantu.

Zadanie: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

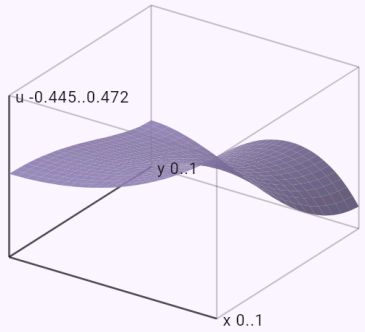
Výsledok

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi}$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Podmienky $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, rovnica je eliptická (ako Laplaceova rovnica): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Na všetkých štyroch stranách je predpísaná derivácia (tok). Podľa Gaussovej vety musí celkový tok hranicou zodpovedať zdroju vnútri ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – podmienka riešiteľnosti. Podmienka platí, riešenie existuje, ale len až na pripočítanú konštantu. Tok hranicou $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Kvadratický polynóm P prevezme priemerné toky strán; zvyšok v má na každej strane tok s nulovým priemerom, a tak ho možno sčítať stranu po strane ako predtým: $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; priemerné toky $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Strana s nenulovou hodnotou (ostatné strany majú u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Separácia premenných: hľadáme riešenie v tvare súčinu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Úloha na vlastné čísla $X'' + \lambda X = 0$ s podmienkami X' = 0 na oboch koncoch (izolované konce) má riešenia $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Na danej strane je predpísaná derivácia a protiľahlá strana je izolovaná: cosh, normovaný tak, aby jeho derivácia na danej strane bola 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- Začiatočná (okrajová) funkcia je už súčtom vlastných funkcií, preto je nenulových len niekoľko koeficientov $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$: $c_1 = 1$, ostatné sú nulové.
- Riešenie (C je ľubovoľná konštanta – s deriváciami na všetkých stranách je u určené len až na posun) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Premenné koeficienty – Sturmova–Liouvillova úloha s váhou 1/x, vlastné funkcie sin(n ln x).

Zadanie: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Výsledok

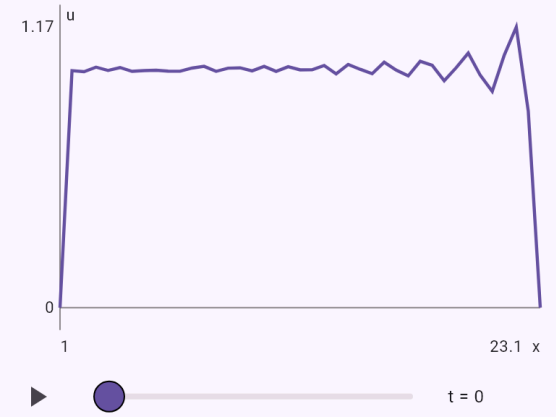
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Postup

- Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Podmienky: $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Separácia premenných pri rovnici s premennými koeficientmi – obe strany sa musia rovnať rovnakej konštante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Rovnicu pre X vynásobíme vhodnou funkciou a dostaneme Sturmovu–Liouvillovu úlohu $(xX')' + \lambda \dfrac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ s p = x a váhou w = $\dfrac{1}{x}$. Jej vlastné funkcie sú ortogonálne s váhou w.
- Rovnica pre X je Eulerova, hľadáme X = x^r: $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0.$ Nenulové riešenie s X = 0 na oboch koncoch existuje len pre komplexné korene: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Podmienky na koncoch dávajú
  $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Ortogonalita vlastných funkcií s váhou w: $\int_1^{e^\pi} X_m X_n \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; ich norma $\int_1^{e^\pi} X_n^2 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$
- Časová časť pre každé n – exponenciálny útlm, vyššie frekvencie tlmí rýchlejšie: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Koeficienty začiatočnej funkcie f sú jej priemety s váhou w: $c_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2} \int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Po substitúcii sa z nich stanú koeficienty obyčajného sínusového radu funkcie $\xi = \ln x$: 1
- Koeficienty zo začiatočnej (okrajovej) funkcie vďaka ortogonalite vlastných funkcií (integrácia per partes)
  $c_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \dfrac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- Riešenie
  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



t = 0

Riešenie u v čase t zvolenom posuvníkom; tlačidlom sa priebeh prehrá.

Schéma MUSCL s limiterom – porovnajte chybu s Laxovou–Wendroffovou a Laxovou–Friedrichsovou schémou.

Zadanie: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to`

= 0.4)

Výsledok

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Sieť na $0 \le x \le 1$: 51 uzlov, 25 časových krokov až do t = 0,4; $h = 0{,}02$, $k = 0{,}016$, $\nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ je Courantovo číslo.
- Presné riešenie je prenášané po charakteristikách $x - t = C$ rýchlosťou a = 1
- Schéma MUSCL – v každej bunke lineárny priebeh so sklonom σ_i obmedzeným limiterom; tok sa berie z bunky proti prúdu posunutej o pol kroku. Kde je riešenie hladké, má druhý rád, pri skokoch nevznikajú zákmity

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\iota}{2}$$

- Sklon v bunke obmedzí funkcia minmod – pri extréme je nulový, inak menšia z oboch jednostranných diferencií

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- Podmienka CFL (numerická oblasť závislosti obsahuje charakteristiku): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Schéma s limiterom je nelineárna; namiesto von Neumannovej analýzy platí, že nezväčšuje celkovú variáciu (TVD – nevzniknú nové zákmity): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n)$, $TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, ak $|\nu| \le 1$
- Prvá časová vrstva

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

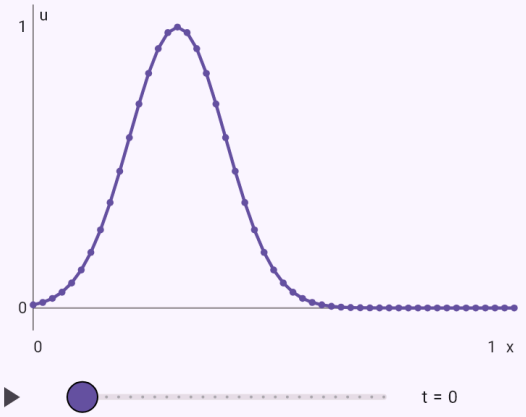
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0326$ (presne v strede $0{,}135335$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Body: numerické riešenie v uzloch siete; čiarkovane presné riešenie. Posuvníkom sa volí časová vrstva.

Burgersova rovnica s viskozitou schémou MUSCL – porovnanie s Coleovou–Hopfovou transformáciou.

Zadanie: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Výsledok

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1 - \operatorname{tgh} x}{2}$
- Sieť: 41 uzlov, 10 časových krokov; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Schéma MUSCL pre Burgersovu rovnicu: z obmedzených sklonov σ_i (limiter) dopočítame hodnoty na hraniciach buniek, tok medzi nimi z Godunovovho riešenia skoku a v čase krokujeme Heunovou metódou (dva kroky)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- Sklon v bunke obmedzí funkcia minmod – pri extréme je nulový, inak menšia z oboch jednostranných diferencií

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

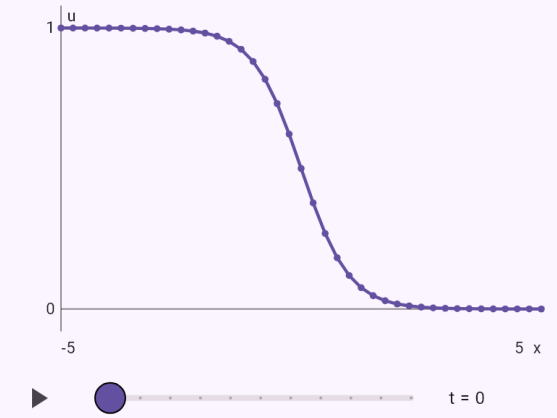
- Podmienka CFL (numerická oblasť závislosti obsahuje charakteristiku): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Viskózny člen ν·u_xx pripočítame centrálnou diferenciou: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$. Explicitný krok je stabilný, pretože $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- Pokles z u_L na u_R < u_L sa šíri ako rázová vlna rýchlosťou z Rankinovej–Hugoniotovej podmienky: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54 \cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- Riešenie na vybraných časových vrstvách

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- Najväčšia chyba oproti presnému riešeniu v poslednej vrstve: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (presne v strede $0{,}811680$).
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Graf

Priebeh v čase | Plocha 3D



Body: numerické riešenie v uzloch siete; čiarkovane presné riešenie. Posuvníkom sa volí časová vrstva.

Konečné prvky na oblasti tvaru L – triangulácia orezávaním uší, 3D plocha len nad oblasťou.

Zadanie: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Výsledok

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Postup

- Riešime numericky metódou sietí: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \ \ (\partial\Omega)$
- Oblasť je mnohouholník s vrcholmi $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, obsah $|\Omega| = 3{,}0000$
- Metóda konečných prvkov: rovnicu vynásobíme testovacou funkciou v a zintegrujeme per partes (slabá formulácia); riešenie hľadáme ako kombináciu „striešok“ φ_j

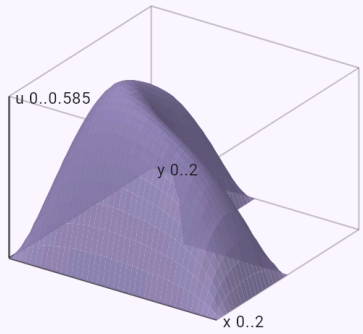
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulácia: orezávaním „uší“ (konvexný vrchol, v ktorého trojuholníku neleží iný vrchol) vznikne 4 trojuholníkov; $4\times$ ich rozdelíme stredmi strán na štyri menšie – 1024 trojuholníkov, 561 uzlov, z toho 465 vnútorných (neznámych), najdlhšia hrana $h = 0{,}1398$
- Matica tuhosti jedného trojuholníka (gradienty lineárnych funkcií sú na ňom konštantné)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - x$$

- Hodnoty v uzloch na hranici sú dané, ich príspevky prevedieme na pravú stranu: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Riedku sústavu K·U = F pre 465 neznámych vyrieši metóda združených gradientov za 128 iterácií. Najväčšia hodnota: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- Výsledok v prostrednom uzle: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Graf



Riešenie u ako plocha nad oblasťou. Otáčajte ťahaním prsta.

Známe obmedzenia

- Analyticky len lineárne rovnice s jednou neznámou funkciou dvoch premenných a Burgersova rovnica; iné nelineárne rovnice a sústavy nie.
- Separáciou premenných rovnica vedenia tepla a vlnová rovnica na intervale; zdroj len ako súčet súčinov p(x)·q(t), pri Poissonovej rovnici najviac tri súčiny p(x)·q(y). Premenné koeficienty len eulerovského typu αx²u_xx + βxu_x s nulovými hodnotami na koncoch.
- Fourierova transformácia v uzavretom tvare pre Gaussovu funkciu, polynóm a funkcie s f″ = λf; inak zostane konvolúcia a graf sa vypočíta numericky.
- Numericky v 2D vedenie tepla a Laplaceova rovnica na obdĺžniku s pravidelnou sieťou; na mnohouholníku len metóda konečných prvkov s lineárnymi trojuholníkmi a hodnotou na hranici (nie deriváciou), bez otvorov a najviac so 40 vrcholmi.

39. Rekurencie a vytvárajúce funkcie

Aplikácia rieši lineárne rekurencie s konštantnými koeficientmi ľubovoľného rádu cez charakteristickú rovnicu – aj násobné a komplexné korene (komplexný tvar riešenia a jeho prevod na reálny podľa Moivreovej vety) – a s pravou stranou v tvare $P(n)\cdot q^n$ (aj cos nφ, sin nφ, rezonancia a súčet pravých strán). Začiatočné podmienky určia konštanty; ako kontrolu aplikácia vypočíta ďalšie členy z rekurencie a porovná ich so vzorcom.

Čipom „Metóda“ sa dá zvoliť aj vytvárajúca funkcia ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, parciálne zlomky, geometrické rady), mocniny matice (diagonalizácia) alebo pri 1. ráde sčítanie. Rekurenciu 1. rádu s premenným koeficientom ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) vyrieši súčinom (faktoriály), prevoditeľné nelineárne rekurencie substitúciou $b_n = 1/a_n$ alebo $b_n = \ln a_n$. Sústavu dvoch rekurencií vyrieši vylúčením jednej postupnosti alebo maticou, rekurenciu „rozdeľuj a panuj“ $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ substitúciou $n = b^k$ – aj s odhadom podľa majstrovskej vety.

S operáciou „Vytvárajúca funkcia“ aplikácia nájde vytvárajúcu funkciu postupnosti zadanej vzorcom ($n^2 + 2^n$) alebo prvými členmi (1, 0, 1, 0, …), a obrátene z funkcie $A(x)$ vzorec pre a_n. Počet celočíselných nezáporných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (aj s hranicami alebo koeficientmi – platenie mincami) vypočíta ako koeficient vytvárajúcej funkcie.

Graf ukáže členy postupnosti ako body (pri sústave obe postupnosti).

Diferencia $\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n)$ („Δ(n^3)“) a diferenčná rovnica $\Delta y_n = n$ ako rekurencia y_{n+1} − y_n = n. Aritmetickú alebo geometrickú postupnosť dopočíta z dvoch zadaných údajov (zatiaľ po česky: „a_3 = 7, a_7 = 19“, „geometrická posloupnost a_2 = 6, a_5 = 162“) – a_1, d alebo q, vzorec pre n-tý člen a hľadané členy a súčty (s_{10}, a_{20} = ?).

Postupnosť zadanú vzorcom pre n-tý člen (a_n = (n+1)/n) aplikácia vyšetrí: prvých päť členov, monotónnosť podľa rozdielu susedných členov, ohraničenosť a limitu.

Ako zadať

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Zápis so zátvorkami, podmienky za čiarkou.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Zápis s indexmi (aj z fotky). Bez podmienok vyjde všeobecné riešenie s konštantami C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	Index môže klesať (a_{n-1}, a_{n-2}); rovnakú hodnotu možno zadať viacerým členom.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Sústava – rovnice na riadkoch, podmienky na poslednom.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Rozdeľuj a panuj – člen v n/b.
`n^2 + 2^n`	Vzorec postupnosti s operáciou „Vytvárajúca funkcia“ (aj a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Prvé členy postupnosti oddelené čiarkou.
`1/(1 - x - x^2)`	Vytvárajúca funkcia v x (aj A(x) = …) – vzorec pre a_n.
`počet řešení x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Počet nezáporných celočíselných riešení s hranicami (zápis zatiaľ po česky).
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Diferencia a diferenčná rovnica.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Postupnosť zo zadaných členov – bez slova aritmetická, so slovom „geometrická“ geometrická.

Ukážky

Dva rôzne reálne korene, kontrola ďalšími členmi.

Zadanie: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Výsledok

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

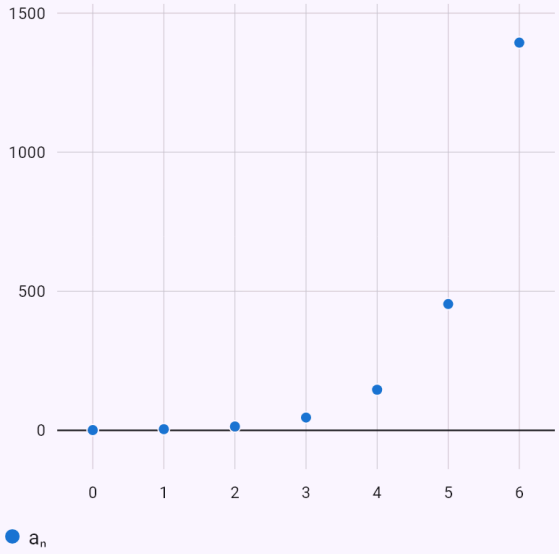
Postup

- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Riešenie hľadáme v tvare $a_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Diskriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; korene: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Všeobecné riešenie: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

  $C_1 + C_2 = 1$

  $2C_1 + 3C_2 = 4$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Fibonacciho postupnosť – Binetov vzorec.

Zadanie: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Výsledok

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

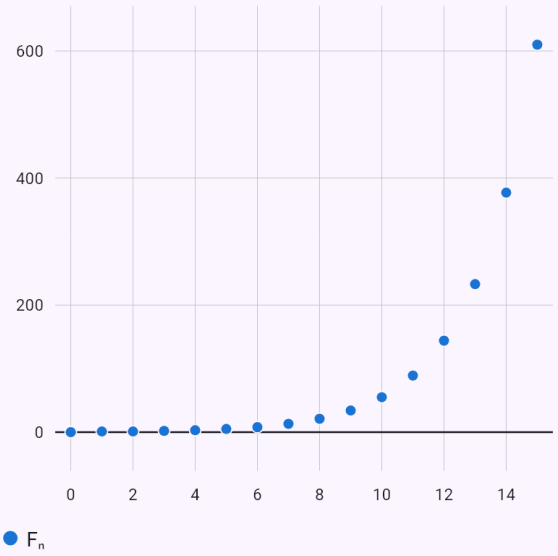
Postup

- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Riešenie hľadáme v tvare $F_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^{n-2} dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Diskriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; korene: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Všeobecné riešenie $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Komplexné korene 1 ± i – komplexný tvar a Moivreova veta.

Zadanie: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Výsledok

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Postup

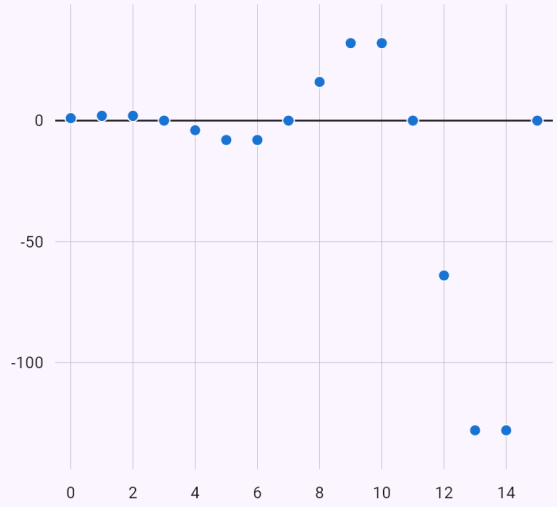
- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Riešenie hľadáme v tvare $a_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; korene: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Komplexné korene $1 \pm i$ zapíšeme v goniometrickom tvare: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, teda $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Podľa Moivreovej vety $\lambda^n =$ $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Všeobecné riešenie v komplexnom tvare (komplexné konštanty): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Združené členy sčítame a s novými reálnymi konštantami dostaneme reálny tvar $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = 1,\ C_2 = 1$

  $C_1 = 1$

  $C_1 + C_2 = 2$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$

- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Pravá strana n, dvojnásobný koreň 2.

Zadanie: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Výsledok

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Postup

- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Najprv vyriešime homogénnu rekurenciu (pravá strana 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare $a_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; korene: $\lambda_{1,2} = 2$
- Všeobecné riešenie homogénnej rekurencie: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Pravá strana n má špeciálny tvar; číslo 1 nie je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie preto hľadáme v tvare $a_n^{(p)} = An + B$
- Dosadíme do rekurencie a zlúčime členy: $An + B - 2A = n$
- Porovnáme koeficienty pri rovnakých členoch na oboch stranách odtiaľ $A = 1,\ B = 2$

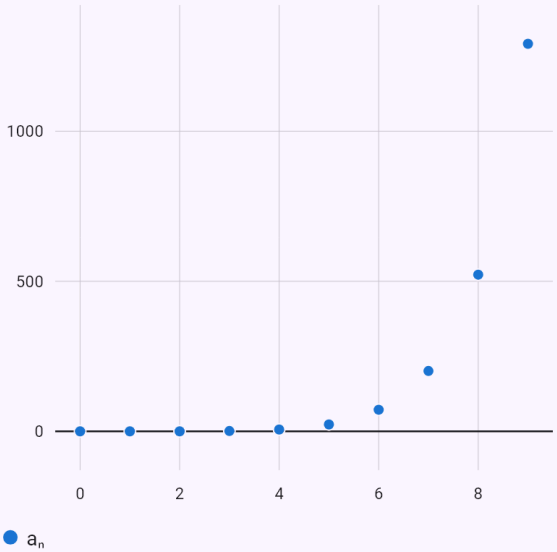
$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \end{aligned}$$

- Partikulárne riešenie: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Všeobecné riešenie: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_1 + 2 &= 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Tá istá rekurencia vytvárajúcou funkciou.

Zadanie: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Vytvárajúca funkcia

Výsledok

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Zavedieme vytvárajúcu funkciu $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Rekurenciu vynásobíme x^{n+2} a sčítame pre všetky n ≥ 0

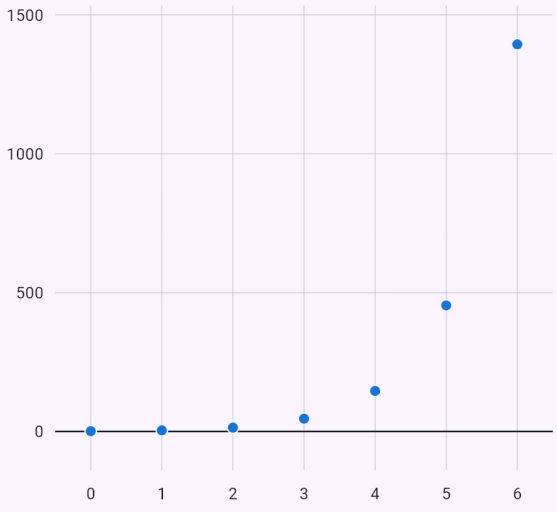
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Súčty vyjadríme pomocou vytvárajúcej funkcie a začiatočných hodnôt: $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Vyjadríme vytvárajúcu funkciu a rozložíme menovateľa: $A(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Rozklad na parciálne zlomky: $A(x) = -\frac{1}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x}$
- Zlomky rozvinieme do geometrických radov

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Koeficient pri x^n je hľadaný člen: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Tá istá rekurencia mocninami matice.

Zadanie: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Mocniny matice

Výsledok

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineárna rekurencia 2. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Rekurenciu zapíšeme maticovo teda $v_{n+1} = M \cdot v_n$ s maticou

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Opakovaným dosadením $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vlastné čísla matice: $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, odtiaľ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Vlastné vektory – riešenia $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Maticu diagonalizujeme, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

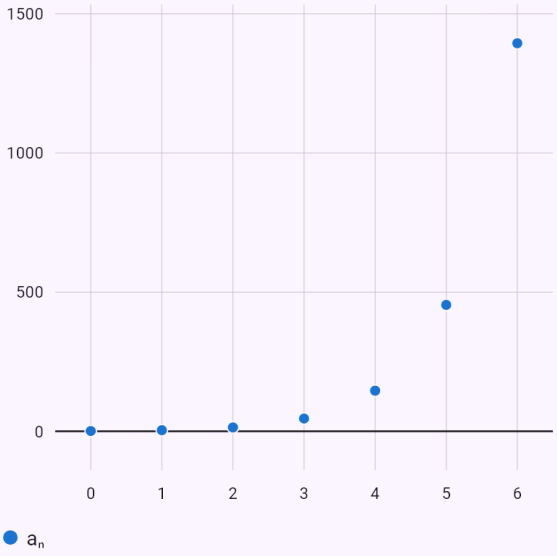
- Mocnina matice koeficienty takže $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Rekurencia 1. rádu sčítaním.

Zadanie: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Sčítanie

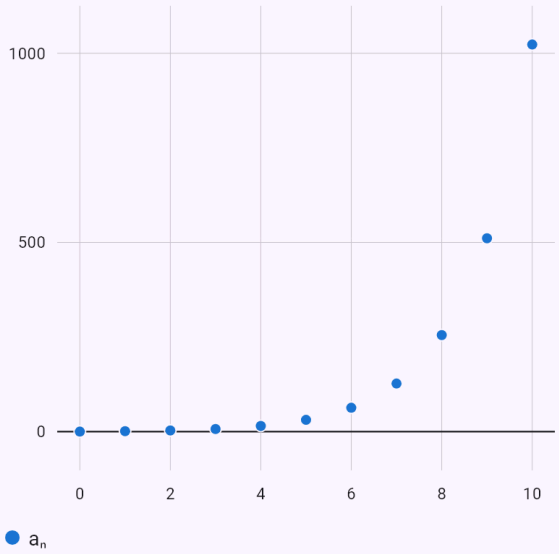
Výsledok

$$a_n = 2^n - 1$$

Postup

- Lineárna rekurencia 1. rádu s konštantnými koeficientmi: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Rekurenciu opakovane dosadíme do seba: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, všeobecne $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Súčet sčítame: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $a_n = 2^n - 1$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Premenný koeficient – súčin vedie na faktoriál.

Zadanie: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Výsledok

$$a_n = n!$$

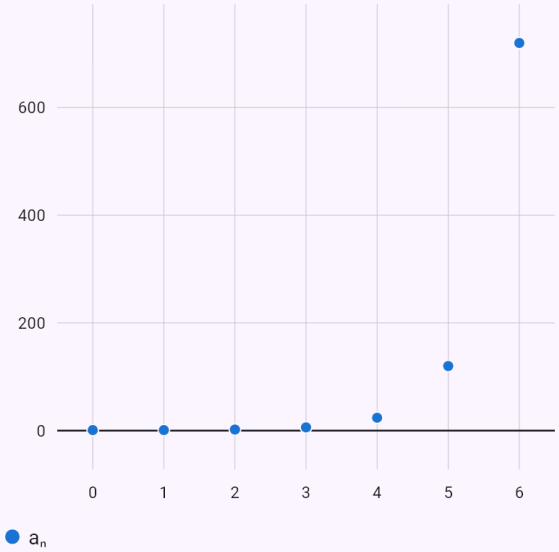
Postup

- Lineárna rekurencia 1. rádu s premenným koeficientom: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Rekurenciu opakovane dosadíme do seba – člen je súčinom

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- Súčin zjednodušíme (faktoriály sa skrátia): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $a_n = n!$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – rovnako ako zo vzorca.

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Nelineárna rekurencia – substitúcia $b_n = 1/a_n$.

Zadanie: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

Výsledok

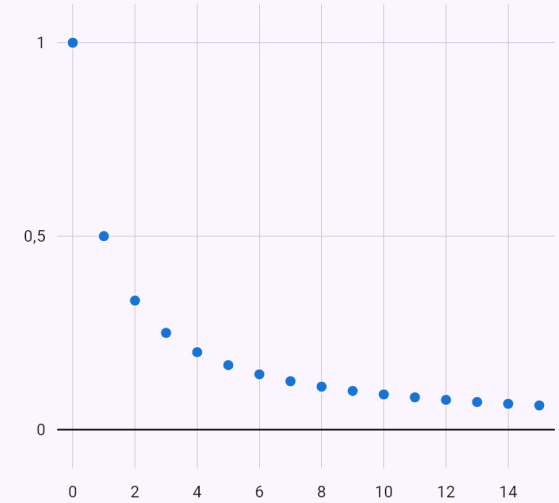
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Postup

- Nelineárna rekurencia – prevrátené hodnoty členov ju prevedú na lineárnu: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Obe strany prevrátime: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; substitúcia $b_n = \frac{1}{a_n}$ tak prevedie rekurenciu na lineárnu: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Začiatočné podmienky pre novú postupnosť: $b_0 = 1$
- Najprv vyriešime homogénnu rekurenciu (pravá strana 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare $b_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda - 1 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_1 = 1$
- Všeobecné riešenie homogénnej rekurencie: $b_n^{(h)} = C_1$
- Pravá strana 1 má špeciálny tvar; číslo 1 je koreňom charakteristickej rovnice (násobnosti 1), tvar preto vynásobíme n: $b_n^{(p)} = An$
- Dosadíme do rekurencie a zlúčime členy: $A = 1$
- Partikulárne riešenie: $b_n^{(p)} = n$
- Všeobecné riešenie: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ
  $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $b_n = 1 + n$

- Kontrola: z rekurencie vychádza $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – rovnako ako zo vzorca.
- Vrátime sa k pôvodnej postupnosti: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Sústava dvoch rekurencií vylúčením postupnosti b_n.

Zadanie: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Výsledok

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Postup

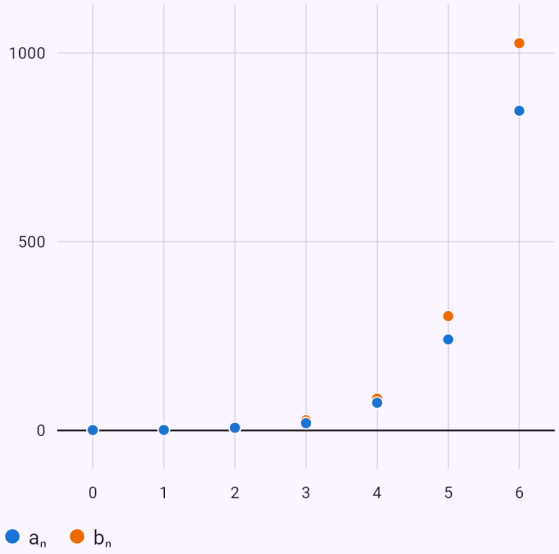
- Sústava dvoch lineárnych rekurencií
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$
- Z prvej rovnice vyjadríme $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, teda aj $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; dosadením do druhej rovnice dostaneme rekurenciu pre jedinú postupnosť:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$
- Druhú začiatočnú podmienku dostaneme z prvej rovnice:
  $a_1 = 1 + 0 = 1$
- Riešenie hľadáme v tvare $a_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu:
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$
- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; korene:
  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$
- Všeobecné riešenie:
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ
  $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$

- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$
- Kontrola: z rekurencie vychádza
  $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – rovnako ako zo vzorca.
- Druhú postupnosť dopočítame z vyjadrenia
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Rozdeľuj a panuj (merge sort) – substitúcia n = 2ᵏ a majstrovská veta.

Zadanie: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Výsledok

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Podmienky: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Postup

- Rekurencia typu „rozdeľuj a panuj“: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Pre n mocninu základu: substitúcia $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ dáva lineárnu rekurenciu 1. rádu: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Začiatočné podmienky pre novú postupnosť: $S_0 = 1$
- Najprv vyriešime homogénnu rekurenciu (pravá strana 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare $S_k = \lambda^k$; po dosadení a vydelení λ^k dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda - 2 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_1 = 2$
- Všeobecné riešenie homogénnej rekurencie: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Pravá strana 2^{k+1} má špeciálny tvar; číslo 2 je koreňom charakteristickej rovnice (násobnosti 1), tvar preto vynásobíme k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Dosadíme do rekurencie, vydelíme 2^k a zlúčime členy: $2A = 2$
- Odtiaľ $A = 1$
- Partikulárne riešenie: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- Všeobecné riešenie: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Dosadíme podmienky do všeobecného riešenia odtiaľ $C_1 = 1$ $C_1 = 1$
- Riešenie spĺňajúce zadané podmienky: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Kontrola: z rekurencie vychádza $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – rovnako ako zo vzorca.
- Vrátime sa k n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- Majstrovská veta (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, preto T(n) = $\Theta(n \log n)$

Vytvárajúca funkcia postupnosti n² + 2ⁿ.

Zadanie: `n^2 + 2^n` Vytvárajúca funkcia

Výsledok

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Postup

- Zavedieme vytvárajúcu funkciu $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + 2^n\right)x^n$
- Rad rozdelíme podľa linearity: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Známy rad: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Známy rad: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Vynásobenie členov n zodpovedá derivácii vynásobenej x $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Vynásobenie členov n zodpovedá derivácii vynásobenej x $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- Vytvárajúca funkcia: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Kontrola – rozvoj funkcie začína členmi postupnosti: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

Z vytvárajúcej funkcie vzorec pre a_n – parciálne zlomky cez iracionálne korene.

Zadanie: `1/(1 - x - x^2)` Vytvárajúca funkcia

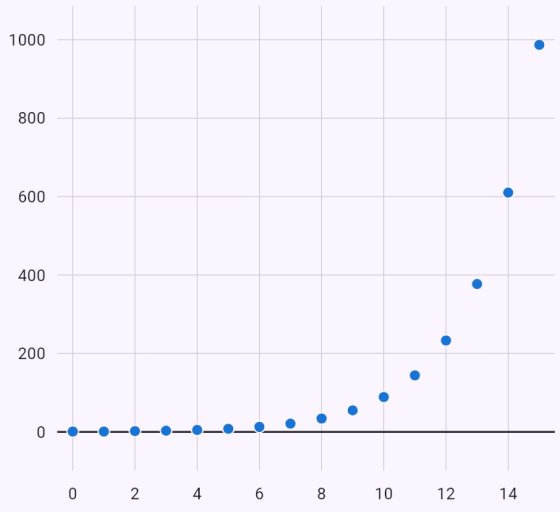
Výsledok

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Postup

- Vyjadríme vytvárajúcu funkciu a rozložíme menovateľa
  $$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$
- Rozklad na parciálne zlomky
  $$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$
- Zlomky rozvinieme do geometrických radov
  $$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$
- Koeficient pri x^n je hľadaný člen
  $$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
- Kontrola – rozvoj funkcie začína členmi postupnosti:
  $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Graf



Body sú členy postupnosti vypočítané zo vzorca – rovnaké hodnoty dáva aj samotná rekurencia.

Počet riešení $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ s podmienkou $x_1 \le 3$.

Zadanie: `počet řešení x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Výsledok

$$38$$

Postup

- Neznáma x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ prispieva radom
  $$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$$
- Neznáma x_2 $(x_2 \ge 0)$ prispieva radom
  $$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
- Neznáma x_3 $(x_3 \ge 0)$ prispieva radom
  $$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
- Vytvárajúca funkcia je ich súčin – koeficient pri x^N udáva počet riešení: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- Počet riešení je koeficient pri x^{10}: 38

Diferencia funkcie.

Zadanie: `Δ(n^3)`

Výsledok

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Postup

- Diferencia – prírastok funkcie, keď n zväčšíme o 1

  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Diferenčná rovnica ako rekurencia.

Zadanie: `\Delta y_n = n`

Výsledok

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineárna rekurencia 1. rádu s konštantnými koeficientmi: $y_{n+1} - y_n = n$
- Najprv vyriešime homogénnu rekurenciu (pravá strana 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Riešenie hľadáme v tvare $y_n = \lambda^n$; po dosadení a vydelení λ^n dostaneme charakteristickú rovnicu: $\lambda - 1 = 0$
- Korene charakteristickej rovnice: $\lambda_1 = 1$
- Všeobecné riešenie homogénnej rekurencie: $y_n^{(h)} = C_1$
- Pravá strana n má špeciálny tvar; číslo 1 je koreňom charakteristickej rovnice (násobnosti 1), tvar preto vynásobíme n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Dosadíme do rekurencie a zlúčime členy:

  $2An + A + B = n$
- Porovnáme koeficienty pri rovnakých členoch na oboch stranách odtiaľ $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $2A = 1$

  $A + B = 0$
- Partikulárne riešenie: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- Všeobecné riešenie: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Aritmetická postupnosť z dvoch členov a súčet desiatich členov.

Zadanie: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Výsledok

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Postup

- Aritmetická postupnosť: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Zadané údaje dávajú sústavu
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- Riešenie sústavy: $a_1 = 1,\ d = 3$
- Vzorec pre n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Hľadané hodnoty: $s_{10} = 145$

Geometrická postupnosť z dvoch členov.

Zadanie: `geometrická posloupnost a_2 = 6, a_5 = 162`

Výsledok

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Postup

- Geometrická postupnosť: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Zadané údaje dávajú sústavu
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- Riešenie sústavy: $a_1 = 2,\ q = 3$
- Vzorec pre n-tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Vlastnosti postupnosti zadanej vzorcom.

Zadanie: `a_n = (n+1)/n`

Výsledok

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Postup

- Prvých päť členov
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- Rozdiel susedných členov $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ je pre všetky $n \geq 1$ záporný – postupnosť je klesajúca.
- Limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – postupnosť je konvergentná.
- Postupnosť je ohraničená: $1 < a_n \leq 2$

Známe obmedzenia

- Zatiaľ nevie: lineárne rekurencie s premennými koeficientmi vyššieho rádu, sústavy troch a viacerých rekurencií, rozdeľuj a panuj s viacerými členmi (T(n/2) a T(n/3)) a nelineárne rekurencie, ktoré uvedené substitúcie neprevedú na lineárne.
- Postupnosť zo zadaných členov potrebuje práve dva údaje (členy, súčty, d alebo q).

40. Numerické metódy

Numerické metódy nájdete na úvodnej obrazovke v sekcii „Aplikácie“, odbor Numerické metódy: korene rovníc (bisekcia, metóda dotyčníc, sečníc, regula falsi, prostá iterácia), numerický integrál (lichobežníková, Simpsonova a Rombergova metóda), numerická derivácia pomernými diferenciami, diferenciálne rovnice (Eulerova, Heunova a Rungeho–Kuttova metóda), sústavy lineárnych rovníc (Jacobiho a Gaussova–Seidelova metóda, LU rozklad), interpolácia (Lagrangeov a Newtonov polynóm, kubický splajn) a metóda najmenších štvorcov. Integrál a deriváciu možno počítať aj z tabuľky nameraných hodnôt.

Diferenciálne rovnice ďalej viackrokovými metódami – Adamsovou–Bashforthovou a prediktorom–korektorom Adams–Bashforth–Moulton (rozbeh cez Rungeho–Kuttovu metódu) –, adaptívnou metódou RK45 (Dormandova–Princeova, tabuľka prijatých a odmietnutých krokov podľa odhadu chyby, zápis tol=…) a implicitnými metódami pre tuhé rovnice: implicitnou Eulerovou a lichobežníkovou (Crankova–Nicolsonovej) s Newtonovou metódou v každom kroku. Pri rovnici s $\partial f/\partial y < 0$ postup ukáže stabilitu metódy: $h\lambda$ a rastový faktor $|R(h\lambda)|$; keď je väčší ako 1, explicitná metóda diverguje a výpočet to oznámi.

Okrajové úlohy $y'' = f(x, y, y')$ s podmienkami $y(a)$, $y(b)$: metódou streľby (začiatočný sklon hľadá metóda sečníc, každú strelu rieši Runge–Kutta) a diferenčnou metódou (lineárna rovnica ako trojdiagonálna sústava, riešená Thomasovým algoritmom s tabuľkami dopredného chodu aj spätného dosadenia); kde presné riešenie nájde riešič diferenciálnych rovníc, porovná ho v uzloch. Pohybovú rovnicu $x'' = a(x)$ rieši symplektická Verletova metóda popri RK4 a ukáže, ako sa im vyvíja chyba celkovej energie.

Postup ukazuje vzorec metódy, tabuľku iterácií alebo hodnôt v uzloch, podmienku zastavenia (predvolená presnosť $\varepsilon = 10^{-4}$, najviac 50 iterácií) a odhad chyby; kde presnú hodnotu poznáme, porovná s ňou výsledok. Podmienky konvergencie sa overia: zmena znamienka na intervale, Fourierova podmienka pre štart metódy dotyčníc, $|g'(x)| < 1$ pri prostej iterácii, diagonálna dominancia a spektrálny polomer pri sústavách. Graf ukáže dotyčnice alebo sečnice, lichobežníky či paraboly, numerické riešenie diferenciálnej rovnice oproti presnému a preložený polynóm s bodmi.

Pri bežnej úlohe – rovnici o jednej neznámej, určitom integráli, diferenciálnej rovnici so začiatočnou podmienkou – ponúkne aplikácia pod výsledkom čipy „Riešiť numerickou metódou“; formulár sa predvyplní zadaním. Kde presný postup nejde alebo vyjde zbytočne zložito ($x = \cos x$, Cardanove vzorce), je ponuka zvýraznená a rovnicu, ktorú nemožno riešiť algebraicky, rovno vyrieši metódou dotyčníc. Aplikácie, ktoré počítajú číslo potichu (vnútorné výnosové percento, RPMN, výnos dlhopisu, pH viacsýtnej kyseliny, Rungeho–Kuttova metóda v modeloch), majú pod výsledkom zbalený riadok „Postup metódy“ s krátkou tabuľkou iterácií.

Ako zadať

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	Metóda – anglický názov – a za bodkočiarkami rovnica, začiatočný odhad x0, presnosť tol, prípadne max (iterácií) a stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Funkcia f(x) (rieši sa f(x) = 0) a interval a, b. Bez intervalu aj odhadu sa korene oddelia automaticky.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	Integrál funkcie v hraniciach a, b s n dielikmi; tiež trapezoid a romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	Integrál nameraných hodnôt – x a y oddelené medzerami.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	Derivácia v bode at s krokom h; z tabuľky x=…; y=… (at nepovinné).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Diferenciálna rovnica 1. rádu so začiatočnou podmienkou, krok h a koniec intervalu to; tiež euler a heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Sústava – rovnice za bodkočiarkami alebo na riadkoch; tiež jacobi a lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Body x, y a bod at; tiež newtonpoly a spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Polynóm najmenších štvorcov stupňa degree.

Ukážky

Rovnicu nemožno riešiť algebraicky – aplikácia ju vyrieši metódou dotyčníc a ponúkne ďalšie metódy.

Zadanie: `x = cos x`

Výsledok

$$x \approx 0{,}7391$$

Riešiť numerickou metódou:

Σ Bisekcia | Σ Sečnice | Σ Regula falsi | Σ Prostá iterácia

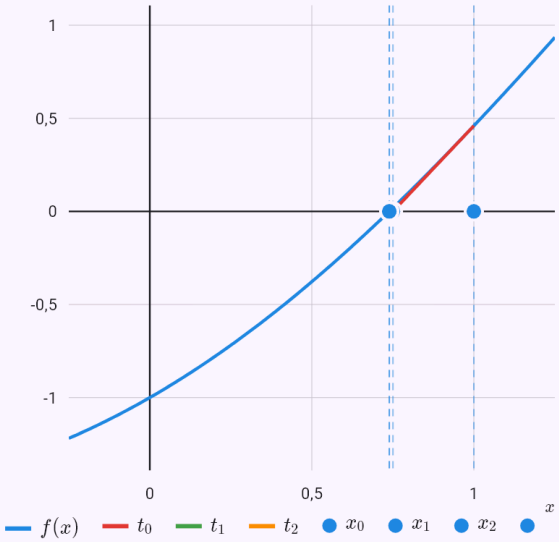
Postup

- Hľadáme koreň rovnice $x = \cos x$, t. j. nulový bod funkcie $f(x) = x - \cos x$
- Korene oddelíme z tabuľky hodnôt: funkcia mení znamienko v intervaloch $\langle 0;\, 1\rangle$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Spojitá funkcia má v každom takom intervale koreň.
- Metóda dotyčníc potrebuje deriváciu: $f'(x) = \sin x + 1$
- Začiatočný odhad $x_0 = 1$ zvolíme podľa Fourierovej podmienky – v krajnom bode, kde $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); odtiaľ dotyčnice ku koreňu konvergujú monotónne.
- Metóda dotyčníc: z bodu x_n ideme po dotyčnici k priesečníku s osou x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- Podmienka zastavenia $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ je splnená po 3 iteráciách.
- Odhad chyby z vety o strednej hodnote, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 1$ na intervale $\langle 0;\, 1\rangle$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Výsledok metódy: $x \approx 0{,}7391$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Metóda dotyčníc s automatickým oddelením koreňa a začiatočným odhadom podľa Fourierovej

podmienky.

Zadanie: `newton(x^3 - x - 2)`

Výsledok

$$x \approx 1{,}5214$$

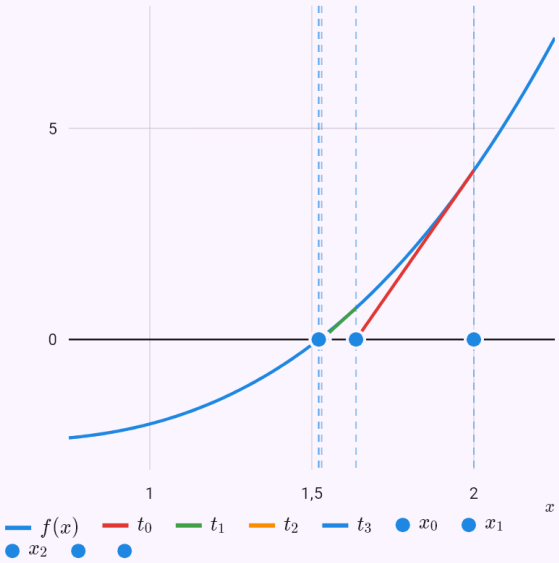
Postup

- Hľadáme koreň rovnice $x^3 - x - 2 = 0$, t. j. nulový bod funkcie $f(x) = x^3 - x - 2$
- Korene oddelíme z tabuľky hodnôt: funkcia mení znamienko v intervaloch $\langle 1;\ 2\rangle$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Spojitá funkcia má v každom takom intervale koreň.
- Metóda dotyčníc potrebuje deriváciu: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Začiatočný odhad $x_0 = 2$ zvolíme podľa Fourierovej podmienky – v krajnom bode, kde $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); odtiaľ dotyčnice ku koreňu konvergujú monotónne.
- Metóda dotyčníc: z bodu x_n ideme po dotyčnici k priesečníku s osou x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- Podmienka zastavenia $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splnená po 4 iteráciách.
- Odhad chyby z vety o strednej hodnote, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 2$ na intervale $\langle 1;\ 2\rangle$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$
- Výsledok metódy: $x \approx 1{,}5214$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Bisekcia na zadanom intervale s odhadom chyby.

Zadanie: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Výsledok

$$x \approx 1{,}5214$$

Postup

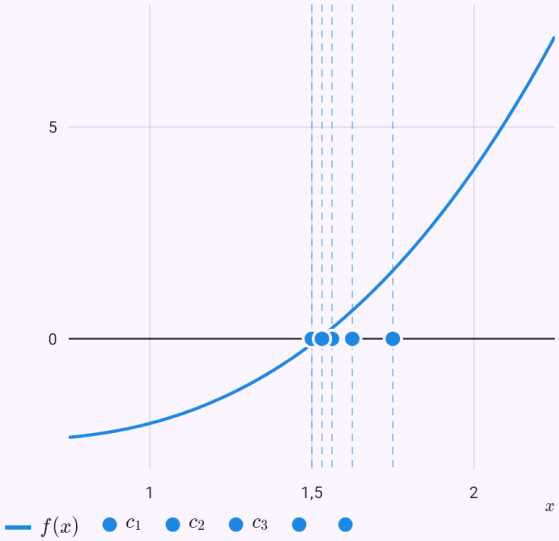
- Hľadáme koreň rovnice $x^3 - x - 2 = 0$, t. j. nulový bod funkcie $f(x) = x^3 - x - 2$
- V intervale $\langle 1;\ 2\rangle$ je $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – opačné znamienka, spojitá funkcia tu má koreň.
- Bisekcia: stred intervalu $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, ponecháme polovicu, na ktorej f mení znamienko.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- Podmienka zastavenia $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ je splnená po 14 iteráciách.
- Odhad chyby: koreň ξ leží v poslednom intervale, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Výsledok metódy: $x \approx 1{,}5214$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Metóda sečníc z dvoch odhadov.

Zadanie: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Výsledok

$$x \approx 2{,}0946$$

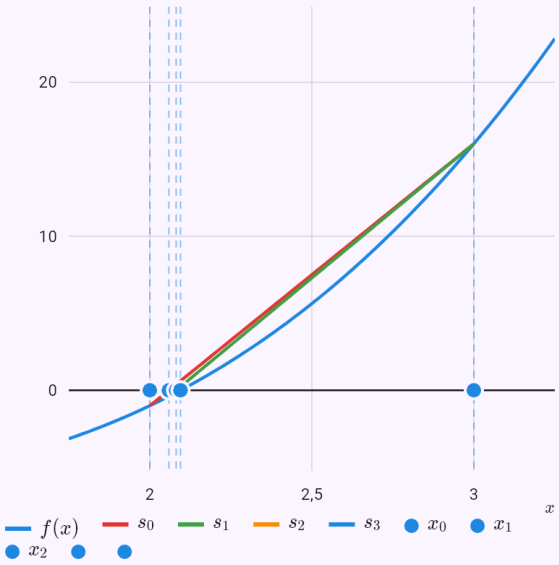
Postup

- Hľadáme koreň rovnice $x^3 - 2x - 5 = 0$, t. j. nulový bod funkcie $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Metóda sečníc: dotyčnicu nahradí sečnica posledných dvoch bodov, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	−1,000000	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	−0,390800	0,941176
3	2,081264	−0,147204	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	−0,000023	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- Podmienka zastavenia $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splnená po 6 iteráciách.
- Odhad chyby z vety o strednej hodnote, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ na intervale $\langle 2;\, 3\rangle$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Výsledok metódy: $x \approx 2{,}0946$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prostá iterácia s overením podmienky konvergencie |g'(x)| < 1.

Zadanie: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Výsledok

$$x \approx 0{,}7391$$

Postup

- Rovnicu $x = \cos x$ zapíšeme v tvare x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Podmienka konvergencie: $g'(x) = -\sin x$, na intervale $\langle 0;\ 1\rangle$ je $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 – g je kontrakcia a iterácia konverguje.
- Prostá iterácia: $x_{n+1} = g(x_n)$.

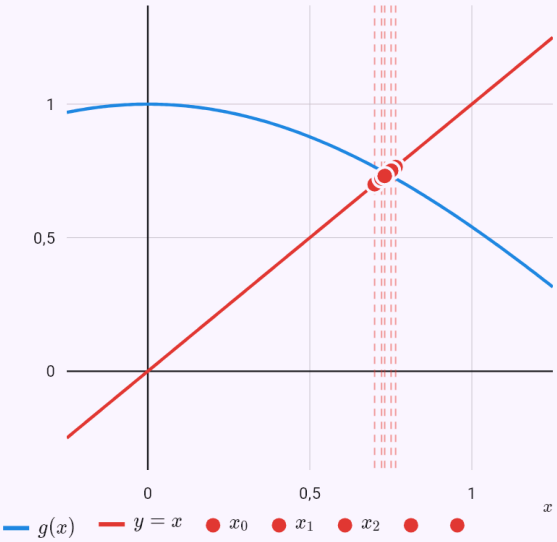
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- Podmienka zastavenia $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ je splnená po 18 iteráciách.
- Odhad chyby prostej iterácie

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Výsledok metódy: $x \approx 0{,}7391$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Simpsonova metóda, Rungeho odhad chyby a porovnanie s presnou hodnotou.

Zadanie: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Výsledok

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Postup

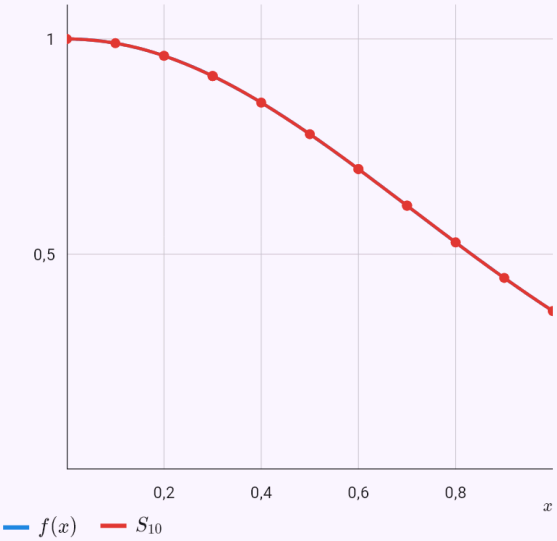
- Integrál $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ vypočítame numericky.
- Krok: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Hodnoty v uzloch a ich koeficienty

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Simpsonova metóda
  $S_n = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \dfrac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Na porovnanie presná hodnota
  $I = \dfrac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, chyba metódy
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Výsledok metódy: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Rombergova tabuľka pre integrál bez elementárnej primitívnej funkcie.

Zadanie: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Výsledok

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

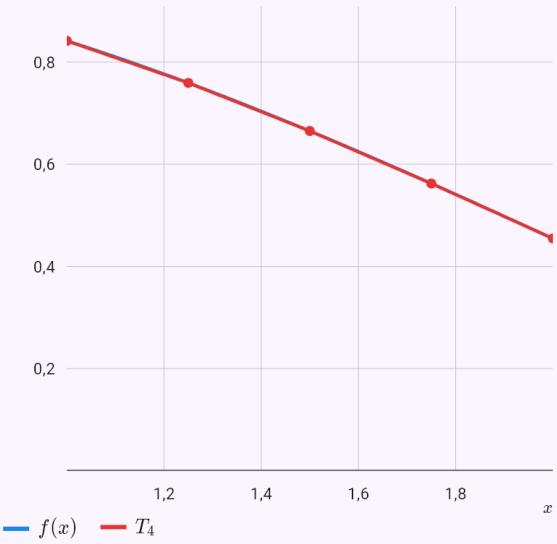
Postup

- Integrál $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ vypočítame numericky.
- Rombergova metóda: prvý stĺpec sú lichobežníky s krokom h, h/2, h/4, …, ďalšie stĺpce ich Richardsonovou extrapoláciou spresňujú,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- Podmienka zastavenia $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ je splnená po 2 iteráciách.
- Na porovnanie presná hodnota chyba metódy
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Výsledok metódy: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Dráha z nameranej rýchlosti lichobežníkovou metódou.

Zadanie: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Výsledok

$$\int_{0}^{60} y \,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

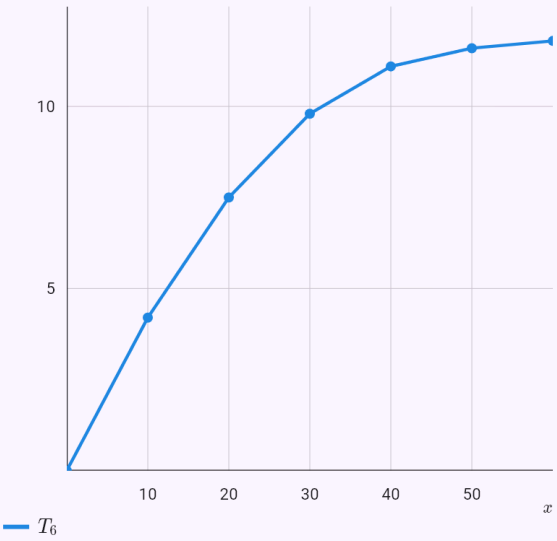
Postup

- Integrujeme tabuľku 6 dielikov na intervale $\langle 0;\ 60 \rangle$
- Krok: $h = 10$
- Hodnoty v uzloch a ich koeficienty

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Lichobežníková metóda $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Odhad chyby Rungeho pravidlom (výpočet s dvojnásobným krokom):
  $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Výsledok metódy: $\int_{0}^{60} y \,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Dopredná, spätná a centrálna diferencia pre tri kroky.

Zadanie: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Výsledok

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$

$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

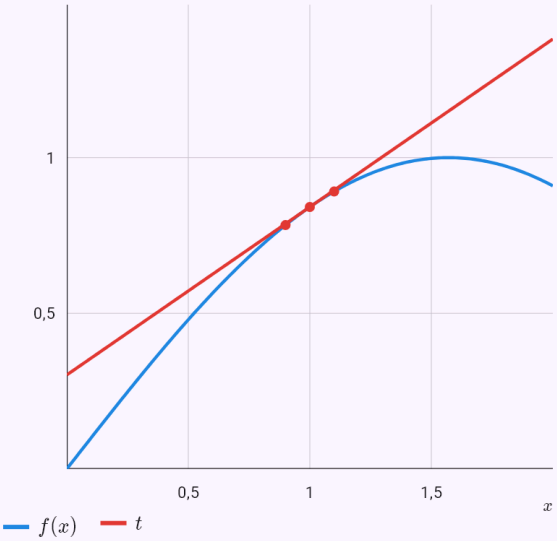
Postup

- Deriváciu funkcie $f(x) = \sin x$ v bode $x_0 = 1$ odhadneme pomernými diferenciami.
- Dopredná diferencia $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ má chybu úmernú h, spätná $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ tiež; centrálna $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ len h². Druhá derivácia: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
0,1	0,497364	0,581441	0,539402	−0,840770
0,05	0,519045	0,561110	0,540077	−0,841296
0,025	0,529728	0,550764	0,540246	−0,841427

- Presne: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. Chyba doprednej diferencie s prvým krokom je $0{,}0429$, centrálnej len $9 \cdot 10^{-4}$
- Výsledok metódy: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Metóda Runge–Kutta 4. rádu s tabuľkou sklonov a porovnaním s presným riešením.

Zadanie: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Výsledok

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Postup

- Začiatočná úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 krokov).
- Rungeho–Kuttova metóda 4. rádu – vážený priemer štyroch sklonov

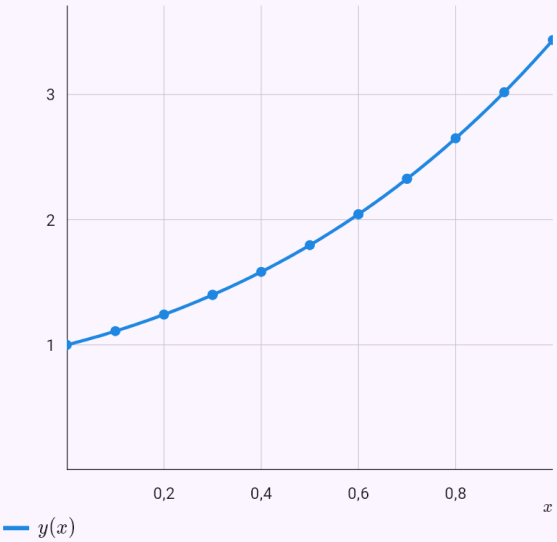
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Na porovnanie presné riešenie: $y = -x + 2e^x - 1$
- Výpočet krok za krokom

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- Na konci intervalu presne $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Výsledok metódy: $y(1) \approx 3{,}436559$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Eulerova metóda pre rovnicu bez elementárneho riešenia.

Zadanie: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Výsledok

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

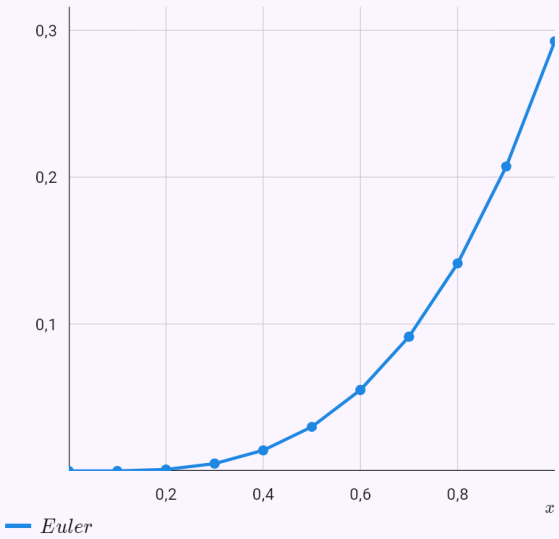
Postup

- Začiatočná úloha $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ na intervale $\langle 0;\ 1 \rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 krokov).
- Eulerova metóda – krok po dotyčnici: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Výpočet krok za krokom

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Výsledok metódy: $y(1) \approx 0{,}292542$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prediktor–korektor ABM – presnejší ako samotná Adamsova–Bashforthova metóda.

Zadanie: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Výsledok

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Postup

- Začiatočná úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 krokov).
- Prediktor–korektor: Adamsova–Bashforthova metóda odhadne nový bod, Adamsova–Moultonova ho opraví sklonom v odhadnutom bode. Rozbeh cez Rungeho–Kuttovu metódu

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

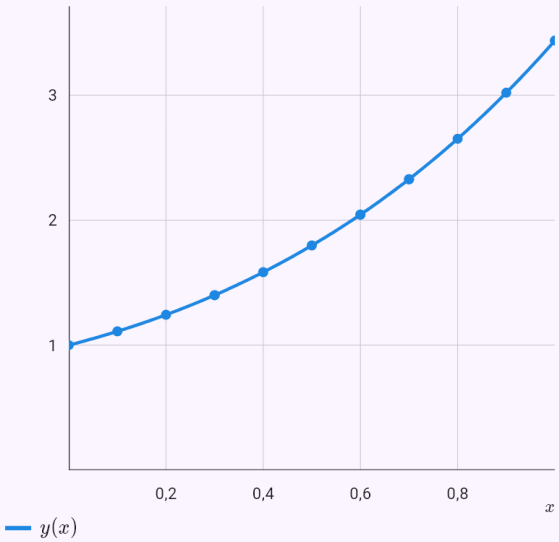
- Na porovnanie presné riešenie: $y = -x + 2e^{x} - 1$
- Výpočet krok za krokom

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + $
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + $
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + $
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + $
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + $
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + $
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + $
10	1	3,436567	4,436567		

- Na konci intervalu presne $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Výsledok metódy: $y(1) \approx 3{,}436567$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Adaptívna RK45 – prvý krok sa odmietne a zmenší, ďalej si krok riadi sama.

Zadanie: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Výsledok

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Postup

- Začiatočná úloha $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na intervale $\langle 0;\ 2\rangle$, krok $h = 0{,}5$ (4 krokov).
- Adaptívny krok: v každom kroku dve metódy (5. a 4. rádu) z rovnakých sklonov – ich rozdiel odhadne chybu. Krok sa prijme, ak je chyba pod toleranciou, a podľa nej sa zväčší alebo zmenší

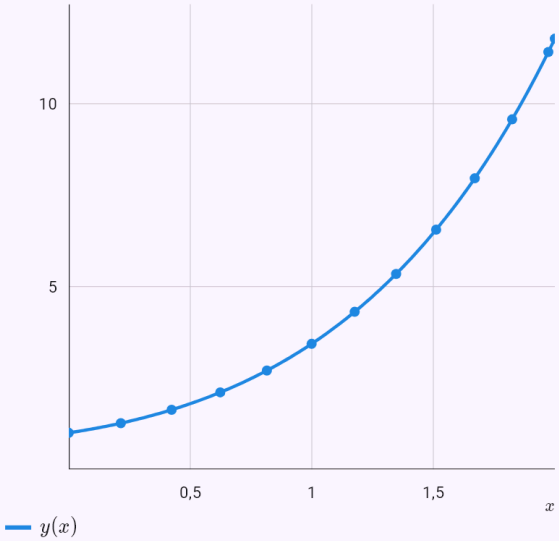
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Na porovnanie presné riešenie: $y = -x + 2e^x - 1$
- Kroky s toleranciou $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ prijatý krok, × odmietnutý (krok sa zmenšil a výpočet sa opakoval). Prijatých 12, odmietnutých 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- Na konci intervalu presne $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Výsledok metódy: $y(2) \approx 11{,}778114$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Tuhá rovnica – explicitný Euler s krokom 0,05 je nestabilný (|1 + hλ| = 1,5) a diverguje.

Zadanie: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Výsledok

Numerické riešenie s týmto krokom diverguje (pozri postup).

Postup

- Začiatočná úloha $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na intervale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 krokov).
- Eulerova metóda – krok po dotyčnici:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Na porovnanie presné riešenie:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilita: rovnica sa správa ako y' = λy s $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$.
  Metóda chybu v každom kroku zväčší:
  $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – s týmto krokom je nestabilná, hodnoty budú kmitať a rásť. Pomôže menší krok alebo implicitná metóda.
- Výpočet krok za krokom

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Hodnoty rastú nad všetky medze (pri $x \approx 0{,}6000$) – metóda je s týmto krokom nestabilná. Skúste menší krok alebo implicitnú metódu.

Tá istá rovnica implicitnou Eulerovou metódou – stabilná aj s veľkým krokom.

Zadanie: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Výsledok

$$y(1) \approx 0{,}556616$$

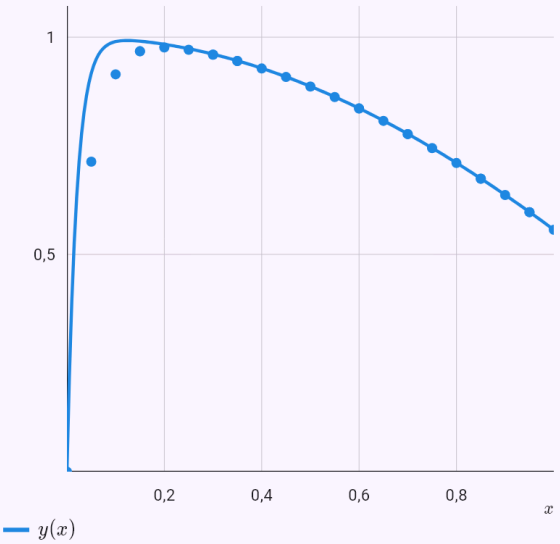
Postup

- Začiatočná úloha $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na intervale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 krokov).
- Implicitná Eulerova metóda – sklon na konci kroku, takže y_{n+1} je v rovnici na oboch stranách. Riešime ju v každom kroku Newtonovou metódou:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Na porovnanie presné riešenie:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilita: rovnica sa správa ako y' = λy s $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$.
  Metóda zmenšuje chybu v každom kroku:
  $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – výpočet je stabilný.
- Výpočet krok za krokom

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- Na konci intervalu presne
  $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Výsledok metódy: $y(1) \approx 0{,}556616$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Nelineárna okrajová úloha metódou streľby – sklon opraví päť sečníc.

Zadanie: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Výsledok

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}05$ (20 dielikov).
- Metóda streľby: zvolíme začiatočný sklon s = y'(a), úlohu vyriešime ako začiatočnú (Runge–Kutta) a zistíme, ako minula pravý koniec. Sklon opravujeme metódou sečníc

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_k}$$

- Strely – každá je jedna začiatočná úloha; opravujeme, kým F(s) nie je pod toleranciou.

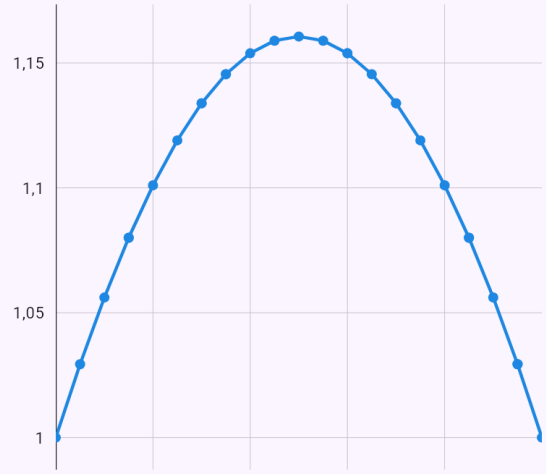
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

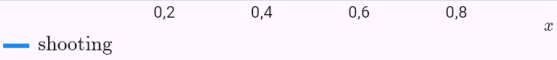
- Začiatočný sklon, s ktorým riešenie zasiahne okrajovú podmienku: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- Riešenie v uzloch

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Výsledok metódy: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Graf





Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Diferenčná metóda a Thomasov algoritmus – pre y = x³ presne v uzloch.

Zadanie: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Výsledok

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}25$ (4 dielikov).
- Diferenčná metóda: v uzloch x_i nahradíme y" a y' centrálnymi diferenciami

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Trojdiagonálna sústava a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; okrajové hodnoty sme previedli na pravú stranu

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- Thomasov algoritmus – Gaussova eliminácia pre trojdiagonálnu maticu: dopredný chod a potom spätné dosadenie od konca

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

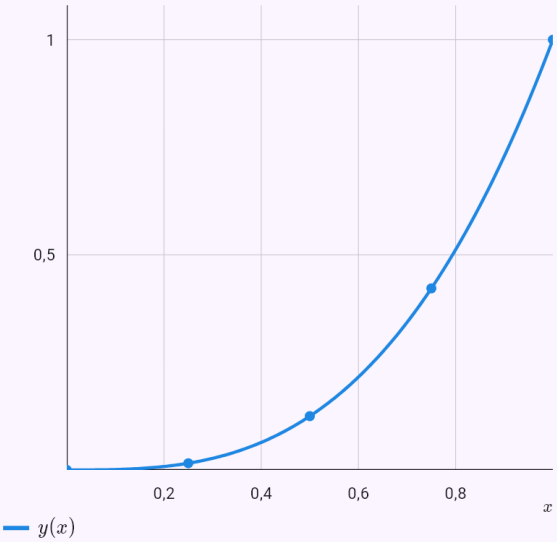
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Na porovnanie presné riešenie: $y = x^3$
- Riešenie v uzloch

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- Najväčšia chyba v uzloch oproti presnému riešeniu: $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Výsledok metódy: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Okrajová úloha metódou konečných prvkov – v uzloch presne.

Zadanie: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Výsledok

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Postup

- Okrajová úloha $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, krok $h = 0{,}25$ (4 dielikov).
- Metóda konečných prvkov: rovnicu vynásobíme „strieškou“ φ_i (po častiach lineárnou funkciou, v uzle i rovnou 1, v ostatných 0) a zintegrujeme per partes. Riešenie hľadáme ako kombináciu striešok, integrály po prvkoch počítame Gaussovým pravidlom

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Zostavená sústava – jeden riadok pre každý vnútorný uzol (matica tuhosti K je trojdiagonálna, okrajové hodnoty sú prevedené na pravú stranu)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- Thomasov algoritmus – Gaussova eliminácia pre trojdiagonálnu maticu: dopredný chod a potom spätné dosadenie od konca

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+}$$

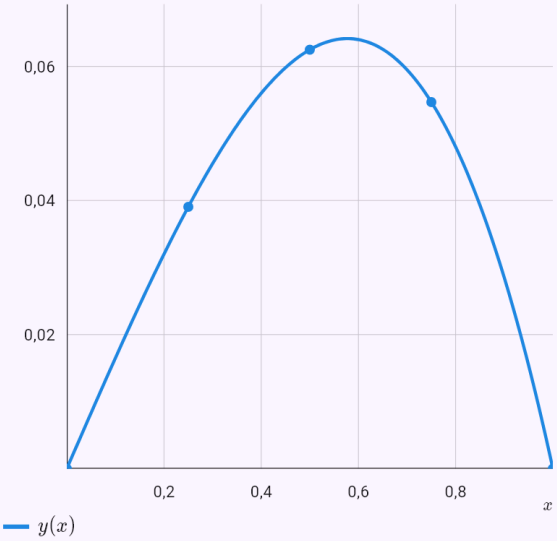
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Na porovnanie presné riešenie: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- Riešenie v uzloch

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- Najväčšia chyba v uzloch oproti presnému riešeniu: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Výsledok metódy: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Kyvadlo Verletovou metódou – chyba energie sa nemení, pri RK4 rastie desaťkrát.

Zadanie: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Výsledok

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx$$

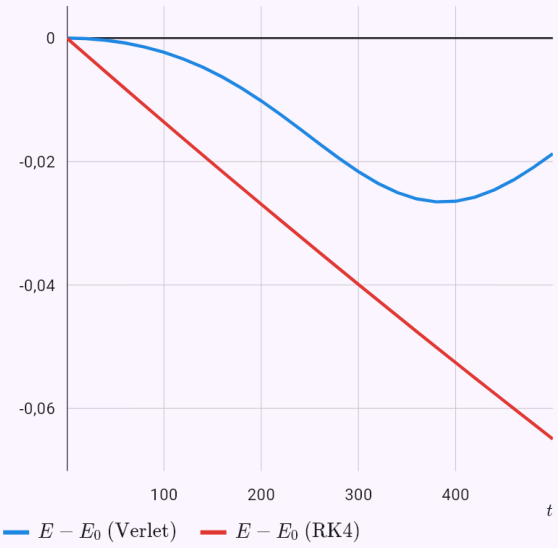
Postup

- Pohybová rovnica
  $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, krok $h = 0{,}5$ (1000 krokov).
- Rýchlostná Verletova metóda – nová poloha z rýchlosti a zrýchlenia, rýchlosť z priemeru zrýchlenia na začiatku a na konci kroku. Celková energia
  $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ sa počíta pre obe metódy
  $x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \frac{h^2}{2}a(x_n)$
  $v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$
- Verlet oproti RK4 s rovnakým krokom (vybrané riadky)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^F
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

- Pri Verletovej metóde chyba energie zostáva rovnaká, pri RK4 s časom rastie – pri dlhom výpočte je Verlet vernejší. Najväčšia chyba na začiatku a na konci, hore Verlet, dole RK4
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$
- Výsledok metódy:
  $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Graf



Odchýlka celkovej energie od začiatočnej: Verlet kolíše okolo nuly, RK4 sa pozvoľna vzďaľuje.

Gaussova–Seidelova metóda – rovnice prehodené kvôli diagonálnej dominancii.

Zadanie: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Výsledok

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Postup

- Sústavu zapíšeme maticovo
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Vymeníme rovnice, aby matica bola diagonálne dominantná ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- Iteračná matica jej spektrálny polomer $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – metóda konverguje.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Gaussova–Seidelova metóda – nové hodnoty dosadzujeme hneď, ako ich vypočítame

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Iterácie

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- Podmienka zastavenia $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ je splnená po 6 iteráciách.
- Výsledok metódy: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

LU rozklad v presných zlomkoch, dopredná a spätná substitúcia.

Zadanie: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Výsledok

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Postup

- Sústavu zapíšeme maticovo
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Gaussova eliminácia – násobky riadkov tvoria maticu L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- LU rozklad A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Dopredná substitúcia Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$
- Spätná substitúcia Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$
- Výsledok metódy: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Lagrangeov interpolačný polynóm a jeho hodnota v bode.

Zadanie: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Výsledok

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Lagrangeove základné polynómy $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

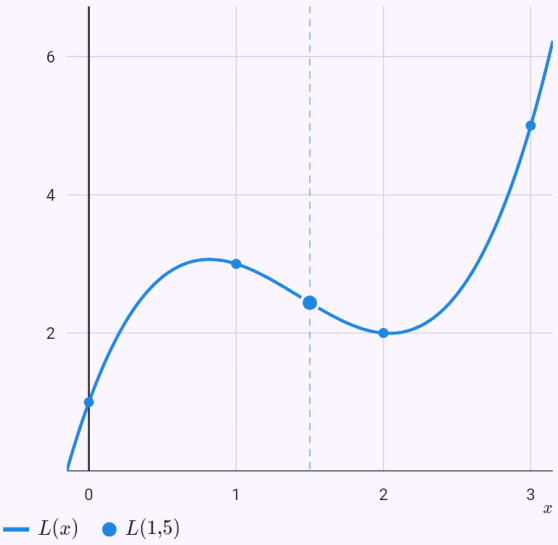
- Lagrangeov interpolačný polynóm

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^{3}$$

- Hodnota v zadanom bode: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$
- Výsledok metódy

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Newtonov polynóm z tabuľky pomerných diferencií.

Zadanie: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Výsledok

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Tabuľka pomerných diferencií

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

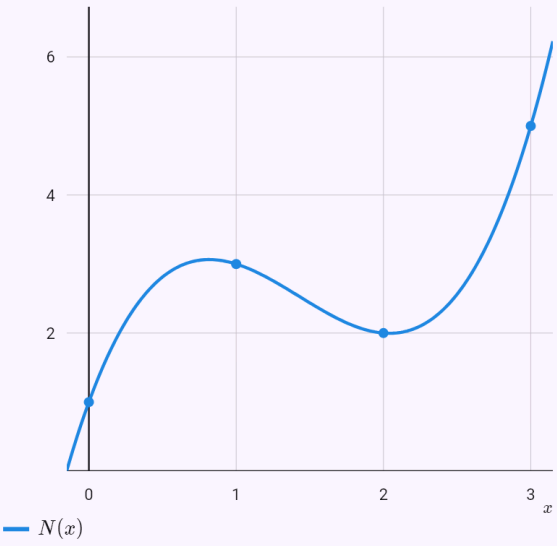
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- Newtonov interpolačný polynóm (koeficienty z hornej uhlopriečky tabuľky)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Výsledok metódy: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Prirodzený kubický splajn – sústava pre momenty a čiastkové polynómy.

Zadanie: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Výsledok

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Postup

- Zadané body (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Prirodzený kubický splajn: druhé derivácie M v uzloch spĺňajú pritom $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

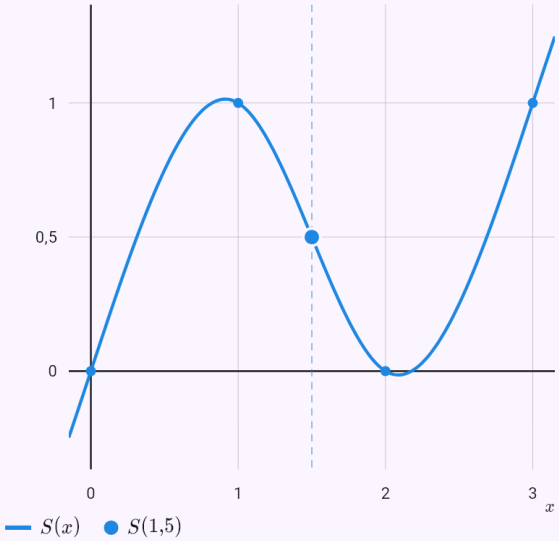
- Riešenie sústavy:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Na každom dieliku

$$S_i(x) = y_i + b_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- Hodnota v zadanom bode: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Výsledok metódy: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Kvadratická aproximácia metódou najmenších štvorcov.

Zadanie: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Výsledok

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Postup

- Zadané body (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Hľadáme polynóm, pre ktorý $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Potrebné súčty

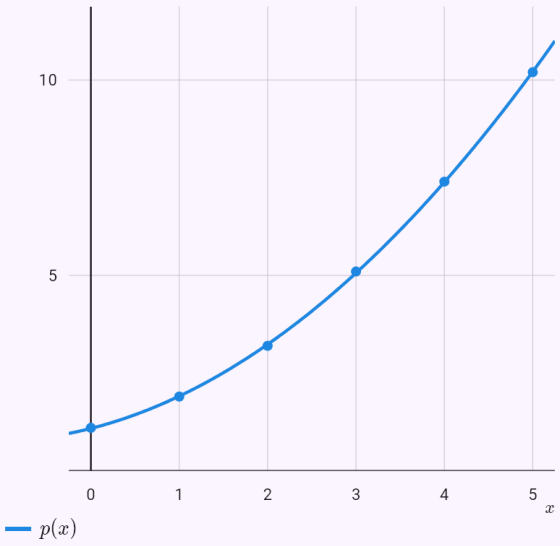
$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- Normálne rovnice pre koeficienty $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- Riešenie: $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- Súčet štvorcov odchýlok: $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Výsledok metódy: $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Vnútorné výnosové percento – pod výsledkom zbalený postup bisekcie.

Zadanie: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

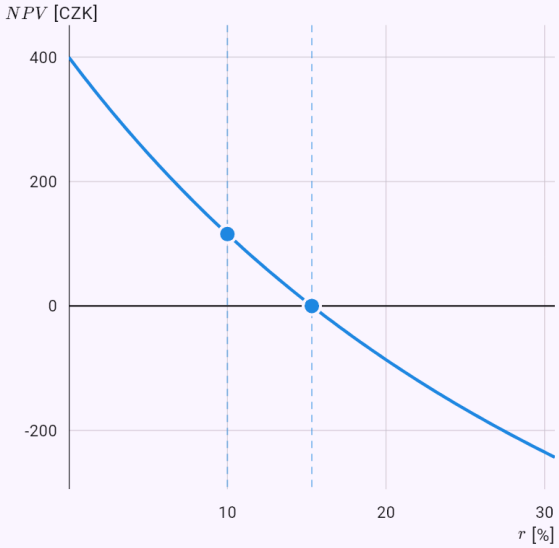
Výsledok

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Postup

- Zadané:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Prevedieme jednotky: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Čistá súčasná hodnota NPV sčíta peňažné toky projektu CF_0, CF_1, … diskontované požadovanou výnosnosťou r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt s NPV > 0 zarobí viac, ako je požadovaný výnos. Vnútorné výnosové percento IRR je sadzba, pri ktorej NPV = 0 – koreň polynomickej rovnice, hľadá sa numericky. Doba návratnosti udáva, kedy súčet tokov (prostý alebo diskontovaný) prestane byť záporný.
  Rovnica modelu: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Čistá súčasná hodnota
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt vynesie aspoň požadovaný výnos.
- Rovnicu vyriešime numericky (polením intervalu):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Postup metódy: bisekcia, 14 iterácií

Graf



Graf vypočítaný z riešenia modelu; bodky sú zadané hodnoty alebo odpoveď.

Známe obmedzenia

- Korene: jedna rovnica o jednej neznámej, reálne korene; automaticky sa oddelia najviac tri korene v intervale ⟨−50; 50⟩.
- Diferenciálne rovnice: len jedna rovnica 1. rádu y′ = f(x, y), najviac 2 000 krokov; sústavy a vyššie rády zatiaľ nie.
- Sústavy: 2 až 6 rovníc; interpolácia najviac 12 bodov, polynóm najmenších štvorcov najviac 5. stupňa.
- Simpsonova a Rombergova metóda z tabuľky potrebujú rovnako dlhé kroky (Romberg 2, 4, 8, … dielikov).
- Okrajové úlohy len 2. rádu s hodnotami y(a), y(b) (nie s deriváciou na kraji); diferenčná metóda len pre rovnicu lineárnu v y a y′. Verletova metóda len pre pohyb x″ = a(x) v jednej súradnici – dráha planéty v rovine zatiaľ nie.

Vygenerované z aplikácie Mathtrace