Mathtrace – manual

II. Álgebra linear e geometria

Índice

II. Álgebra linear e geometria

20. Cálculos em geometria

21. Matrizes

22. Vetores

23. Retas e planos

24. Problemas de construção

20. Cálculos em geometria

Perímetros e áreas de figuras, volumes e áreas de sólidos calculam-se com um formulário como as outras aplicações (Aplicações → Geometria): escolhe-se a figura e o que se procura e introduzem-se as medidas com as unidades. Figuras: quadrado, retângulo, triângulo (lado e altura, ou três lados – fórmula de Heron), paralelogramo, losango, trapézio, polígono regular, círculo, coroa circular, arco e setor, teorema de Pitágoras e triângulos semelhantes; sólidos: cubo, paralelepípedo, prisma, cilindro, pirâmide quadrangular, cone e esfera.

A resolução escreve a fórmula, substitui e calcula; quando é preciso um valor intermédio (a geratriz do cone, o apótema da pirâmide), vem primeiro. Também ao contrário – o raio a partir da área, a aresta a partir do volume, um cateto a partir da hipotenusa. O resultado é exato com π e raízes e aproximado (25π cm² ≈ 78,54 cm²). As unidades são convertidas (cm em dm, dm³ em litros).

Exemplos

Área do círculo – exata com π e aproximada.

Enunciado: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Resultado

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Passos

- A circunferência são os pontos à distância r do centro, o círculo a circunferência com o interior. Perímetro o = 2πr = πd, área S = πr². O número π ≈ 3,14159 é o perímetro a dividir pelo diâmetro – resultado exato (com π) e aproximado. Fórmulas
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Procuramos S; dados: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Substituímos: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Ao contrário: o raio a partir da área.

Enunciado: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Resultado

$$r \approx 3{,}989\,\text{cm}$$

Passos

- A circunferência são os pontos à distância r do centro, o círculo a circunferência com o interior. Perímetro o = 2πr = πd, área S = πr². O número π ≈ 3,14159 é o perímetro a dividir pelo diâmetro – resultado exato (com π) e aproximado. Fórmulas

  $o = \pi d$

  $d = 2r$

  $o = 2\pi r$

  $S = \pi r^2$

- Procuramos r; dados: $S = 50\,\text{cm}^2$
- Isolamos a grandeza procurada: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Substituímos: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\text{cm}$

Triângulo de três lados – fórmula de Heron.

Enunciado: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Resultado

$$S = 6\,\text{cm}^2$$

Passos

- A área do triângulo é metade de um lado vezes a sua altura: S = a·v_a/2. A partir dos três lados, pela fórmula de Heron S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), onde s = (a + b + c)/2 é o semiperímetro. Os lados têm de cumprir a desigualdade triangular. Fórmulas

  $o = a + b + c$

  $S = \frac{a v_a}{2}$

  $s = \frac{a + b + c}{2}$

  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- Procuramos S; dados: $a = 3\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 5\,\text{cm}$
- Substituímos: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\text{cm}$
- Substituímos: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\text{cm}^2$

Um cateto a partir da hipotenusa.

Enunciado: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Resultado

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Passos

- Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos: c² = a² + b². A hipotenusa c está oposta ao ângulo reto e é o lado maior; um cateto é b = √(c² − a²). Fórmulas
  $c^2 = a^2 + b^2$
- Procuramos b; dados: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Isolamos a grandeza procurada: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Substituímos: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Área do cone – primeiro a geratriz.

Enunciado: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Resultado

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Passos

- O cone tem base circular de raio r e altura v. O volume é um terço do cilindro: V = πr²v/3. A geratriz s é a hipotenusa de catetos r e v; a área lateral é um setor S_{pl} = πrs, área total S = πr² + πrs. Fórmulas
  $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$
  $s^2 = r^2 + v^2$
  $S_{pl} = \pi r s$
  $S = \pi r^2 + S_{pl}$
- Procuramos S; dados: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Isolamos a grandeza procurada: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Substituímos: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Substituímos: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Substituímos: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Volume do cubo em litros.

Enunciado: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Resultado

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Passos

- O cubo tem seis faces quadradas iguais de aresta a. Volume V = a³, área total S = 6a², diagonal espacial u = a√3. A aresta a partir do volume é a raiz cúbica: a = ∛V.
  Fórmulas
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Procuramos V; dados: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertemos as unidades: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Substituímos: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Convertemos as unidades: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Limitações conhecidas

- Ainda falta um esboço da figura com as medidas.

21. Matrizes

Escreva uma matriz entre colchetes como no Matlab: elementos separados por espaços, linhas por ponto e vírgula ou nova linha. Um elemento pode ser uma fração, uma raiz ou uma letra. A tecla com uma grade na aba f(x) abre uma tabela para preencher célula a célula – ou para colar da área de transferência (células copiadas do Excel ou do Planilhas Google) ou carregar de um arquivo CSV.

Para uma só matriz, um chip diz o que calcular: o determinante (2×2 pela fórmula, 3×3 pela regra de Sarrus, senão por expansão por uma linha ou coluna ou por triangulação – o método também é um chip), a inversa (2×2 pela fórmula, senão por Gauss–Jordan com a identidade ao lado), o posto (forma escalonada) ou a transposta.

Nomeie várias matrizes com maiúsculas, cada uma na sua linha, e escreva na última o que calcular: soma, diferença, múltiplo, produto (linha por coluna, com as dimensões verificadas), potência, transposta A^T, inversa A^-1, det(A), rank(A) – ou uma equação matricial AX = B ou XA = B, que o app resolve com a inversa. Um sistema de equações dado por uma matriz (matriz ampliada, Ax = b) é tratado no capítulo Sistemas de equações.

Se uma matriz contém um parâmetro (uma letra), a aplicação discute o seu posto segundo os seus valores como num sistema – redução à forma escalonada, os valores críticos substituídos. Para a inversa calcula primeiro o determinante e a condição para que valores do parâmetro não é zero (a inversa existe). A inversa de 3×3 ou maior é calculada por Gauss–Jordan ou – conforme o chip – pela matriz adjunta (complementos algébricos, $A^{-1} = \text{adj } A / \det A$).

Numa matriz quadrada também calculas os valores e vetores próprios: o polinómio característico $\det(A - \lambda E)$ é desenvolvido como um determinante, fatorizado, e as suas raízes são os valores próprios (um fator quadrático pelo discriminante, também complexos; um cúbico sem raiz racional, aproximadamente). Os vetores próprios são as soluções de $(A - \lambda E)v = o$ por operações nas linhas até à forma escalonada reduzida; para cada valor próprio a aplicação dá a multiplicidade algébrica e geométrica. O chip Diagonalização constrói ainda P e D ($A = PDP^{-1}$) ou explica porque a matriz não é diagonalizável. A decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^T$ (SVD) e a pseudoinversa A^+ servem para matrizes de qualquer tamanho: a SVD pelos valores próprios de A^TA (AA^T numa matriz larga), os vetores próprios normalizados e o outro lado calculado a partir deles; a pseudoinversa de uma matriz de posto máximo pela fórmula $(A^TA)^{-1}A^T$, caso contrário pela decomposição $A^+ = V\Sigma^+U^T$ – e, se os valores singulares fossem radicais aninhados, exatamente pela fatoração de posto $A = BC$ com $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Os valores próprios e a diagonalização a aplicação estuda também numa matriz com um parâmetro (até 3×3): fatoriza o polinómio característico com o parâmetro, escreve os valores próprios como funções dele e encontra os valores especiais do parâmetro – onde dois valores próprios coincidem (dois fatores

têm uma raiz comum, um fator quadrático o discriminante nulo) ou onde o cálculo geral dos vetores próprios dividiria por zero; indica também para que valores os valores próprios são complexos. O caso geral é resolvido com o parâmetro, os valores especiais são substituídos e tratados à parte. O chip Diagonalização responde depois para que valores do parâmetro a matriz é diagonalizável.

A forma de Jordan de uma matriz quadrada (o chip Forma de Jordan, escrito jordan(A)) vem dos postos das potências $(A - \lambda E)^k$: eles dão o número e os tamanhos dos blocos de Jordan, as cadeias de vetores próprios generalizados são montadas do vetor do topo até um vetor próprio e P, J são conferidas ($A = PJP^{-1}$). Pela forma de Jordan o app calcula também a potência A^n para um n geral (o chip Potência A^n, escrito A^n; a potência de um bloco pelo teorema binomial, o resultado como $2^{n-1}(n + 2)$) ou um número grande (A^10), e a exponencial e^{At} e e^A (o chip Exponencial da matriz, escrito e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – útil para sistemas de equações diferenciais $x' = Ax$; valores próprios complexos são reescritos com cossenos e senos. O polinómio mínimo (o chip Polinômio mínimo, escrito minpoly(A)) é encontrado testando os candidatos – os divisores do polinómio característico – a partir do menor grau; o app lembra o teorema de Cayley–Hamilton $p(A) = O$ e, para uma matriz invertível, obtém a inversa de $m(A) = O$.

Como introduzir

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Elementos com espaços, linhas com ponto e vírgula (ou em linhas dentro dos colchetes).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Matrizes com nome, uma por linha, o cálculo na última.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinante, inversa e transposta, posto.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Valores próprios, diagonalização, decomposição em valores singulares, pseudoinversa.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Forma de Jordan, potência geral, exponencial da matriz, polinómio mínimo.

Exemplos

Um determinante 3×3 pela regra de Sarrus.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinante

Resultado

$$\det A = -3$$

Passos

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8\\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10\\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80\\ &= -3\end{aligned}$$

Expansão pela coluna com mais zeros.

Enunciado: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Expansão

Resultado

$$\det A = 25$$

Passos

- Expansão pela coluna 2, cada elemento vezes o seu cofator com o sinal da posição

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot(-5)\\ &= 25\end{aligned}$$

A inversa por Gauss–Jordan.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Matriz inversa

Resultado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Passos

- Escrevemos a matriz identidade ao lado da matriz. Com operações com linhas transformamos a parte esquerda na identidade

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operações nas linhas $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operações nas linhas $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operações nas linhas $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- À esquerda a identidade, à direita a inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

O posto por operações com linhas.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Posto

Resultado

$$h(A) = 2$$

Passos

- Operações nas linhas

  $R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Operações nas linhas $R_3 \to R_3 - R_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz na forma escalonada

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- O posto é o número de linhas não nulas da forma escalonada: $h(A) = 2$

O posto de uma matriz com parâmetro.

Enunciado: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Posto

Resultado

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Passos

- A matriz contém o parâmetro a, um número real qualquer. O posto pode depender do seu valor, por isso analisamos os casos.
- Operações nas linhas $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Continuamos com o elemento $1 - a$, que pode ser zero; por isso supomos $a \neq 1$, e o caso $a = 1$ é analisado à parte.
- Operações nas linhas $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Operações nas linhas $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Continuamos com o elemento $a + 2$, que pode ser zero; por isso supomos $a \neq -2$, e o caso $a = -2$ é analisado à parte.
- A matriz na forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Para $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Para $a = 1$: $h(A) = 1$; a matriz após a substituição

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para $a = -2$: $h(A) = 2$; a matriz após a substituição

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A inversa com parâmetro pela matriz adjunta.

Enunciado: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Matriz adjunta

Resultado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Condições: $a \neq 1$

Passos

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$: a inversa existe exatamente quando o determinante não é zero, ou seja, para $a \neq 1$
- Os complementos algébricos dos elementos (com o sinal (−1)^(i+j))

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- A matriz adjunta é a transposta da matriz dos complementos algébricos; dividimo-la pelo determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Produto, transposta, múltiplo e diferença de matrizes.

Enunciado: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Resultado

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Passos

- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Transpomos, as linhas viram colunas
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Multiplicamos cada elemento pelo número
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Somamos (subtraímos) os elementos nas mesmas posições
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Uma equação matricial AX = B pela inversa.

Enunciado: `A = [1 2; 3 4]`
`B = [5; 6]`

AX = B

Resultado

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Passos

- Multiplicamos a equação pela inversa do lado da incógnita: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, a inversa existe.
- Numa matriz 2×2 trocamos os elementos da diagonal principal, mudamos o sinal dos outros dois e dividimos pelo determinante

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Valores e vetores próprios de uma matriz simétrica.

Enunciado: `[2 1; 1 2]` Valores próprios

Resultado

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$

- O polinómio característico fatorizado

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 3$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 3$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$

Valores próprios irracionais pelo discriminante.

Enunciado: `[1 2; 3 4]` Valores próprios

Resultado

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

  $A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)-$

- O polinómio característico fatorizado: $\det(A-\lambda E)=\lambda^2-5\lambda-2=0$

- As raízes do fator quadrático pelo discriminante

  $\lambda^2-5\lambda-2=0:\ D=33,\ \lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Os vetores próprios de $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $(A-\lambda_1 E)\mathbf{v}=\mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Os vetores próprios de $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

  $\mathbf{v}_1=t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

- Os vetores próprios de $\lambda_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $(A-\lambda_2 E)\mathbf{v}=\mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Os vetores próprios de $\lambda_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

  $\mathbf{v}_2=t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

A diagonalização A = PDP⁻¹.

Enunciado: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalização

Resultado

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 11$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 11$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- A matriz tem tantos vetores próprios linearmente independentes quantas linhas, por isso é diagonalizável: P tem os vetores próprios como colunas, D os valores próprios na diagonal pela mesma ordem, e $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz é simétrica: os seus valores próprios são reais e os vetores próprios de valores próprios diferentes são ortogonais. Normalizados, formam uma P ortogonal, $P^{-1} = P^T$

Uma matriz que não é diagonalizável.

Enunciado: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalização

Resultado

A matriz não é diagonalizável: não tem vetores próprios linearmente independentes suficientes.

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 2, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 2$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 1$ a multiplicidade geométrica 1 é menor do que a algébrica 2: a matriz não tem vetores próprios linearmente independentes suficientes, por isso não é diagonalizável.

Valores próprios de uma matriz com parâmetro – os valores especiais e os seus casos.

Enunciado: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Valores próprios

Resultado

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Valores especiais do parâmetro – neles coincidem dois valores próprios ou o cálculo dos vetores próprios dividiria por zero: $a = 1,\ a = 2$. Tratamo-los à parte ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- O caso geral $a \neq 1,\ a \neq 2$: os valores próprios são distintos, logo a matriz tem tantos vetores próprios linearmente independentes quantas linhas e é diagonalizável.
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = a$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = a$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- O caso $a = 1$ – substituído na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 2, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_3 = 2$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

  $$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 1$ a multiplicidade geométrica 1 é menor do que a algébrica 2: a matriz não tem vetores próprios linearmente independentes suficientes, por isso não é diagonalizável.
- O caso $a = 2$ – substituído na matriz

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- O polinómio característico fatorizado

  $$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidade algébrica 2, geométrica 2 – o número de incógnitas livres)

  $$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Para que valores do parâmetro a matriz é diagonalizável.

Enunciado: `[0 1; a 0]` Diagonalização

Resultado

A matriz é diagonalizável para: $a \neq 0$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- O polinómio característico fatorizado: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- As raízes do fator quadrático pelo discriminante

$$\lambda^2 - a = 0: \ D = 4a, \ \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \ \sqrt{a}$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \ \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Valores especiais do parâmetro – neles coincidem dois valores próprios ou o cálculo dos vetores próprios dividiria por zero: $a = 0$. Tratamo-los à parte ($a = 0: \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Para $a \in (-\infty, 0)$ o discriminante é negativo e os valores próprios são complexos conjugados (diagonalizável só sobre os números complexos).
- O caso geral $a \neq 0$: os valores próprios são distintos, logo a matriz tem tantos vetores próprios linearmente independentes quantas linhas e é diagonalizável.
- O caso $a = 0$ – substituído na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- O polinómio característico fatorizado: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 0$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 0$ (multiplicidade algébrica 2, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 0$ a multiplicidade geométrica 1 é menor do que a algébrica 2: a matriz não tem vetores próprios linearmente independentes suficientes, por isso não é diagonalizável.

A decomposição em valores singulares de uma matriz 2×3.

Enunciado: `[3 2 2; 2 3 -2]` Decomposição em valores singulares (SVD)

Resultado

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Passos

- A decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^T$: a matriz tem mais colunas do que linhas, por isso começamos pela menor AA^T – os seus valores próprios são os quadrados dos valores singulares e os seus vetores próprios formam U. Calculamos AA^T
- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)
$$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 & 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot (- \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 2 & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + (-2)\cdot \end{pmatrix}$$
- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal
$$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$
- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$
- O polinómio característico fatorizado
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$
- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 25$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida
$$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 25$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)
$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 9$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida
$$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 9$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 – o número de incógnitas livres)
$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Os valores singulares são as raízes quadradas dos valores próprios, por ordem decrescente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ tem o tamanho de A
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
- Os vetores próprios normalizados (divididos pela sua norma); os de um valor próprio múltiplo, antes ortogonalizados pelo processo de Gram-Schmidt. São as colunas de
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
- As colunas de V para os valores singulares não nulos, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$
- As colunas em falta de V completam uma base ortonormada – soluções normalizadas de $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonais às colunas anteriores
$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
- A decomposição em valores singulares
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

A pseudoinversa de uma matriz com colunas independentes.

Enunciado: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinversa

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Passos

- As colunas da matriz são linearmente independentes (posto 2 = número de colunas), por isso $A^T A$ é invertível e a pseudoinversa é dada pela fórmula:
- $A^{+} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$
- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $$\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

- $\det A^T A = 3 \neq 0$, a inversa existe.
- Numa matriz 2×2 trocamos os elementos da diagonal principal, mudamos o sinal dos outros dois e dividimos pelo determinante

  $$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$$

A pseudoinversa de uma matriz singular pela sua decomposição em valores singulares.

Enunciado: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Passos

- A matriz não tem posto máximo (posto 1), por isso a pseudoinversa vem da decomposição em valores singulares: $A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T}$
- A decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^{T}$: os valores próprios de $A^{T}A$ são os quadrados dos valores singulares e os seus vetores próprios formam V. Calculamos $A^{T}A$
- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)

$$A^{T}A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A^{T}A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

$$\det\left(A^{T}A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det\left(A^{T}A - \lambda E\right) = \lambda^{2} - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 25$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$\left(A^{T}A - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_1 = 25$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 0$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo; a matriz na forma escalonada reduzida

$$\left(A^{T}A - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios de $\lambda_2 = 0$ (multiplicidade algébrica 1, geométrica 1 − o número de incógnitas livres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Os valores singulares são as raízes quadradas dos valores próprios, por ordem decrescente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ tem o tamanho de A

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Os vetores próprios normalizados (divididos pela sua norma); os de um valor próprio múltiplo, antes ortogonalizados pelo processo de Gram-Schmidt. São as colunas de

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- As colunas de U para os valores singulares não nulos, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- As colunas em falta de U completam uma base ortonormada − soluções normalizadas de $A^{T}\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonais às colunas anteriores

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- A decomposição em valores singulares

$$A = U\Sigma V^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

- Σ⁺ é Σ transposta, com os valores singulares não nulos invertidos

$$\Sigma^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A pseudoinversa

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{} \end{pmatrix}$$

A pseudoinversa pela fatoração de posto A = BC.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinversa

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Passos

- A matriz não tem posto completo (posto 2) e os seus valores singulares seriam radicais aninhados, por isso a pseudoinversa é calculada exatamente pela fatoração de posto A = BC – B são as colunas linearmente independentes de A e C as linhas não nulas da sua forma escalonada reduzida.
- Levamos a matriz à forma escalonada reduzida; os pivôs estão nas colunas $1, 2$, B é formada por essas colunas de A e C pelas linhas não nulas da matriz reduzida

  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $CC^{T} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (- \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$
- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6$
- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, a inversa existe.
- Numa matriz 2×2 trocamos os elementos da diagonal principal, mudamos o sinal dos outros dois e dividimos pelo determinante

  $\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- Multiplicamos linha por coluna (dimensões $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $B^{T}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$
- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66 \cdot 93 - 78 \cdot 78 = 54$
- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, a inversa existe.
- Numa matriz 2×2 trocamos os elementos da diagonal principal, mudamos o sinal dos outros dois e dividimos pelo determinante

  $\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
- A pseudoinversa

  $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Uma forma de Jordan com dois blocos de um mesmo valor próprio.

Enunciado: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Forma de Jordan

Resultado

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Para $\lambda = 2$ (multiplicidade algébrica 3) calculamos as potências de $A - \lambda E$ e seus postos h até o posto cair pela multiplicidade algébrica

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Há tantos blocos de Jordan para $\lambda = 2$ quantos vetores próprios independentes: $n - h(A - \lambda E)$ = 2. O número de blocos de tamanho pelo menos k é $h_{k-1} - h_k$, então os tamanhos dos blocos são $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Uma cadeia de comprimento 2 para $\lambda = 2$: escolhemos seu vetor do topo no núcleo de $(A - \lambda E)^k$ fora do núcleo da potência menor e do espaço gerado pelas cadeias anteriores, e o multiplicamos por $A - \lambda E$ até chegar a um vetor próprio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Um bloco de tamanho 1 para $\lambda = 2$ dá um vetor próprio

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A forma de Jordan: as colunas de P são os vetores das cadeias (cada uma do vetor próprio para cima), J tem os valores próprios na diagonal e uns logo acima dela dentro dos blocos; vale $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A potência A^n pela forma de Jordan.

Enunciado: `[3 1; -1 1]` Potência A^n

Resultado

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$$

- O polinómio característico fatorizado:
  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Para $\lambda = 2$ (multiplicidade algébrica 2) calculamos as potências de $A - \lambda E$ e seus postos h até o posto cair pela multiplicidade algébrica

  $$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

  $$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Há tantos blocos de Jordan para $\lambda = 2$ quantos vetores próprios independentes: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. O número de blocos de tamanho pelo menos k é $h_{k-1} - h_k$, então os tamanhos dos blocos são 2: $J_2(2)$
- Uma cadeia de comprimento 2 para $\lambda = 2$: escolhemos seu vetor do topo no núcleo de $(A - \lambda E)^k$ fora do núcleo da potência menor e do espaço gerado pelas cadeias anteriores, e o multiplicamos por $A - \lambda E$ até chegar a um vetor próprio

  $$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- A forma de Jordan: as colunas de P são os vetores das cadeias (cada uma do vetor próprio para cima), J tem os valores próprios na diagonal e uns logo acima dela dentro dos blocos; vale $A = PJP^{-1}$

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos a potência pela forma de Jordan:
  $A^n = PJ^nP^{-1}$. A potência de um bloco vem do teorema binomial – o elemento d posições acima da diagonal é $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

  $$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos as matrizes

  $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$$

A exponencial e^{At} – a solução do sistema x' = Ax.

Enunciado: `A = [0 1; -2 -3]`

`e^(At)`

Resultado

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$$

- Um determinante 2×2 é o produto da diagonal principal menos o da secundária

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$$

- O polinómio característico fatorizado

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Um bloco de tamanho 1 para $\lambda = -2$ dá um vetor próprio

  $$(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Um bloco de tamanho 1 para $\lambda = -1$ dá um vetor próprio

  $$(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Todos os blocos de Jordan têm tamanho 1, então J é diagonal e a matriz é diagonalizável. As colunas de P são os vetores próprios e vale $A = PJP^{-1}$

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos a exponencial pela forma de Jordan: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Num bloco, o elemento d posições acima da diagonal é $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos as matrizes

  $$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$$

- Para t = 1

  $$e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$$

O polinómio mínimo, o teorema de Cayley–Hamilton e a inversa a partir dele.

Enunciado: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Polinômio mínimo

Resultado

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Passos

- Os valores próprios são as raízes da equação característica det(A − λE) = 0 (E a matriz identidade). Subtraímos λ na diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- O polinómio característico fatorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Os valores próprios (uma raiz múltipla tem vários nomes): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- O polinómio mínimo divide o polinómio característico e tem todas as suas raízes. Os candidatos a partir do menor grau

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- Substituímos a matriz – não é a matriz nula, então este candidato não é o polinómio mínimo.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Substituímos a matriz – é a matriz nula; o menor candidato assim é o polinómio mínimo.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- O teorema de Cayley–Hamilton: toda matriz quadrada é raiz do seu polinómio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$$

- A matriz é invertível (o termo independente do polinómio mínimo não é zero), então de m(A) = O obtemos a inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Limitações conhecidas

- Matrizes até 6×6.
- Valores próprios, diagonalização, decomposição em valores singulares, forma de Jordan, potência A^n, exponencial e polinómio mínimo para matrizes até 4×4 e sem parâmetro; valores próprios e diagonalização com um parâmetro até 3×3 (sem fator cúbico com o parâmetro), os vetores próprios do caso geral só para valores próprios sem raiz do parâmetro.
- A forma de Jordan com os passos só para valores próprios racionais, senão só o resultado; uma potência geral A^n e e^{At} precisam de valores próprios exatos (um fator cúbico sem raiz racional: só e^A aproximada).

22. Vetores

Escreve um vetor com ponto e vírgula, cada um na sua linha: u = (1; 2; 3); o nome pode ter índice (F_1 = (3; 4)). Escreve um ponto com parênteses retos: A[1; 2; 3]. Os vetores do plano têm duas coordenadas, os do espaço três.

Um ponto sozinho no plano é colocado no seu quadrante (ou num eixo) pelos sinais das coordenadas e desenhado. Com dois pontos, ao lado da distância |AB| há o chip «Ponto médio» – as suas coordenadas são as médias das dos extremos. Também com palavras: «ponto médio AB, A[1; 2], B[5; 6]», «distância entre A[1; 2] e B[4; 6]», «quadrante A[3; −2]».

Sem outra linha, o chip escolhe o que calcular: a norma, a soma (a resultante de forças com a sua norma e direção), o produto escalar (zero significa vetores perpendiculares), o ângulo (pelo cosseno, exato nos valores da tabela, caso contrário em graus e minutos), o produto vetorial (pelo determinante com i, j, k), a área de um paralelogramo e de um triângulo, o volume de um paralelepípedo e de um tetraedro pelo produto misto, ou a dependência linear. Com pontos, a aplicação constrói primeiro os vetores AB, AC, AD a partir do primeiro: dois pontos dão a distância, três um triângulo, quatro um tetraedro.

Na última linha podes escrever uma expressão: u + 2v, u·v (ou u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| e o vetor AB de dois pontos. O gráfico mostra os vetores como setas – no plano com uma grelha, no espaço com eixos que rodas com o dedo; uma área aparece colorida e um ângulo marcado com um arco.

Como introduzir

`u = (1; 2; 3)`	Um vetor com ponto e vírgula, cada um na sua linha.
`A[1; 2; 3]`	Um ponto com parênteses retos.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Uma expressão com vetores na última linha.

Exemplos

O quadrante de um ponto.

Enunciado: `A[3; -2]`

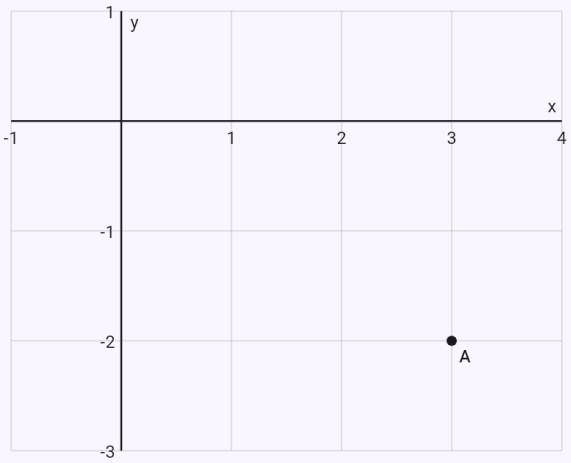
Resultado

$A \in \mathrm{IV}$

Passos

- O ponto $A[3;\ -2]$ tem x positivo e y negativo – está no 4.º quadrante (em baixo à direita).

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas.

O ponto médio de um segmento.

Enunciado: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Resultado

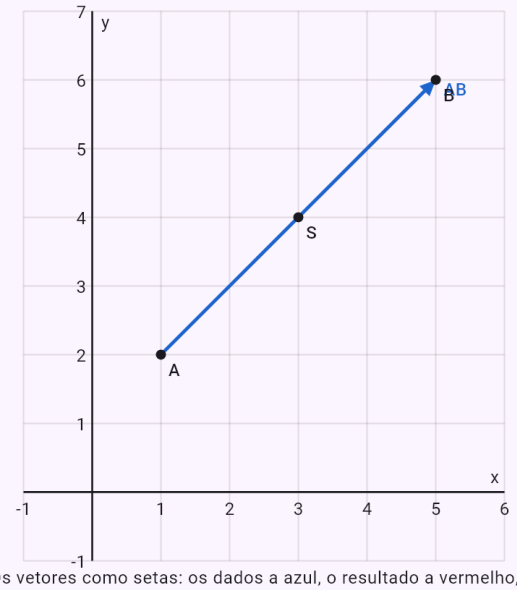
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Passos

- As coordenadas do ponto médio são as médias das dos extremos

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas.

A norma de um vetor.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`

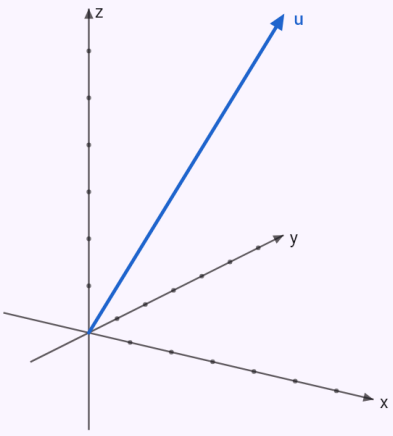
Resultado

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Passos

- A norma do vetor:
  $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

O ângulo de dois vetores.

Enunciado: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

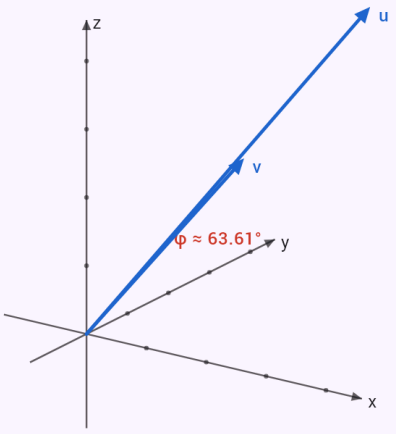
Resultado

$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Passos

- O produto escalar é a soma dos produtos das coordenadas correspondentes:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- A norma do vetor: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- A norma do vetor: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- O ângulo dos vetores a partir do produto escalar ou seja $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$
  $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

Soma e múltiplo de vetores.

Enunciado: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

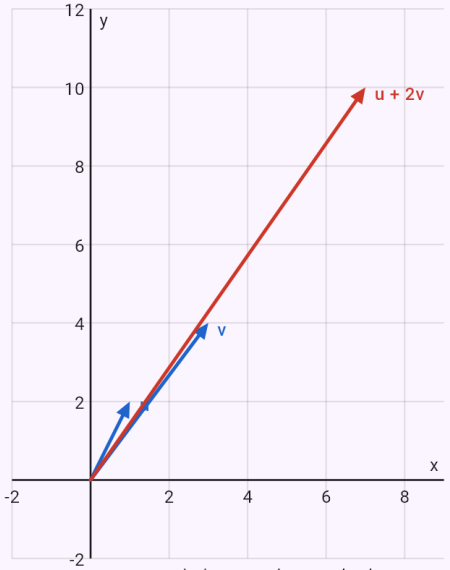
Resultado

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Passos

- Um múltiplo de um vetor – cada coordenada vezes o número: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Os vetores somam-se (subtraem-se) coordenada a coordenada: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas.

O produto vetorial.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Produto vetorial

Resultado

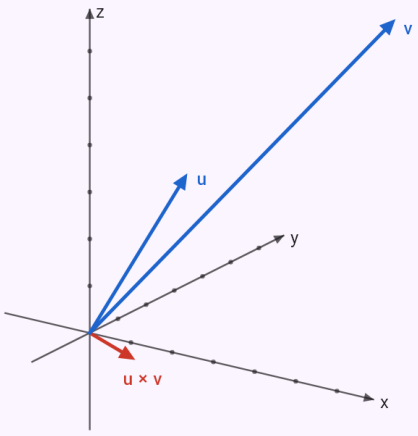
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Passos

- O produto vetorial desenvolvendo o determinante pela primeira linha

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

A área de um triângulo a partir de três pontos.

Enunciado: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Resultado

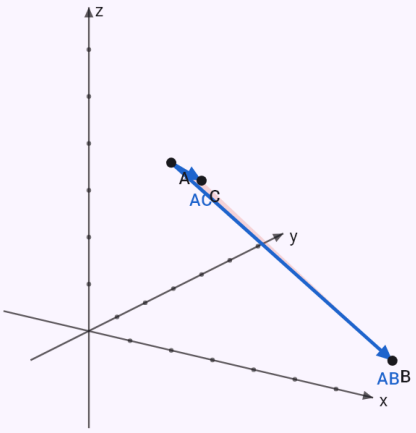
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Passos

- Um vetor a partir de dois pontos – coordenadas da extremidade menos as da origem
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$
- Um vetor a partir de dois pontos – coordenadas da extremidade menos as da origem
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$
- O produto vetorial desenvolvendo o determinante pela primeira linha
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- A norma do vetor
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- A área do paralelogramo é a norma do produto vetorial (no plano, o valor absoluto do determinante):
  $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- O triângulo é metade do paralelogramo:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

O volume de um paralelepípedo e de um tetraedro pelo produto misto.

Enunciado: `u = (1; 0; 2)`

`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Resultado

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Passos

- O produto misto como determinante das coordenadas dos vetores

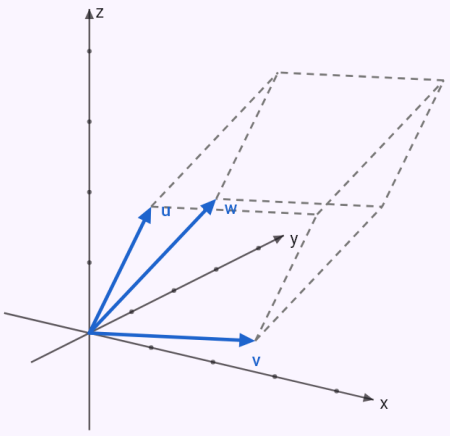
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$- 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0$$
$$= 13$$

- O volume do paralelepípedo é o valor absoluto do produto misto: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- O tetraedro tem um sexto do volume do paralelepípedo: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

A resultante de duas forças.

Enunciado: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Soma (resultante)

Resultado

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Passos

- Os vetores somam-se (subtraem-se) coordenada a coordenada

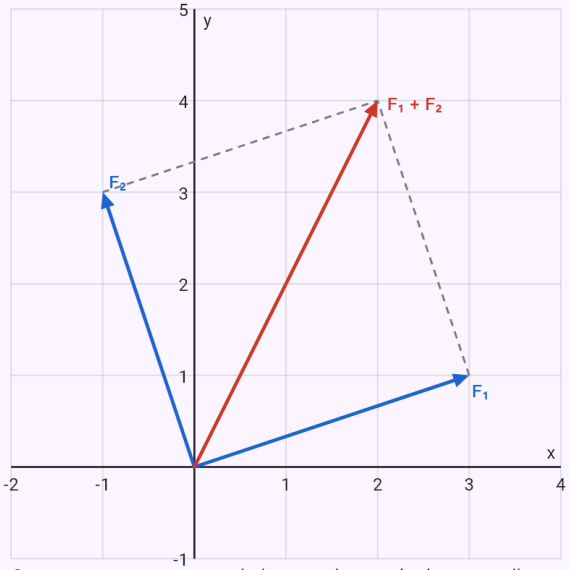
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

- A norma do vetor

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- A direção da resultante – o seu ângulo com o semieixo positivo dos x: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2}, \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas.

A dependência linear de três vetores.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Dependência linear

Resultado

Os vetores são linearmente dependentes.

Passos

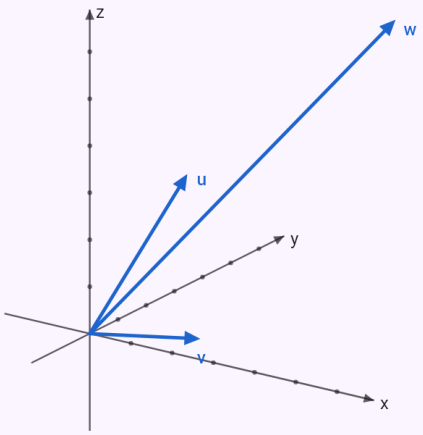
- Regra de Sarrus, os produtos na direção da diagonal principal menos os na direção da secundária

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ &= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- O determinante das coordenadas dos vetores: $D = 0$. Se não for nulo, os vetores são linearmente independentes; se for nulo, dependentes.

Gráfico



Os vetores como setas: os dados a azul, o resultado a vermelho, as linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

Limitações conhecidas

- As coordenadas são números (sem parâmetro), no máximo seis; o gráfico só no plano e no espaço.

23. Retas e planos

Geometria analítica no plano e no espaço. Um ponto escreve-se como nos vetores: A[1; 2]. Dê um nome a uma reta ou a um plano e escreva a sua equação depois de dois pontos, cada uma na sua linha: geral (p: 2x + 3y − 5 = 0), reduzida (p: y = 2x + 1), paramétrica (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) ou vetorial (p: X = A + t·u). No espaço, uma equação em x, y, z é um plano (ρ: x + y + z = 1), tal como umas paramétricas com dois parâmetros; uma reta no espaço escreve-se em paramétricas ou como interseção de dois planos (p: x + y + z = 1, x − y = 0). As teclas p:, q: e ρ: estão no teclado de funções.

O que calcular escolhe-se com um chip – a oferta segue o que escrever: uma reta ou um plano recebem todas as formas da sua equação, dois a posição relativa com a interseção, o ângulo e a distância, um ponto e uma reta (plano) a distância, a perpendicular e a paralela pelo ponto, a projeção e o ponto simétrico. Dois ou três pontos sozinhos acrescentam aos chips dos vetores a reta AB, a mediatriz e o baricentro com as alturas do triângulo (no espaço o plano ABC).

A distância calcula-se pela fórmula ou – com o chip «Pela projeção» – como nas aulas: a perpendicular pelo ponto, o seu pé e o comprimento do segmento. Para retas reversas encontra também a perpendicular comum. Os ângulos são exatos nos valores de tabela, caso contrário em graus e minutos. A tarefa também se pode escrever na última linha: angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). O gráfico mostra as retas e os planos; no espaço roda-se com o dedo.

Transformações no plano: translação por um vetor, rotação de centro e ângulo (em graus, positivo no sentido anti-horário), homotetia de centro e razão, e simetrias central e axial. Pode transformar um ponto, um polígono (pontos seguidos: translation(A, B, C, u) é um triângulo), uma reta e uma circunferência (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Escreva a tarefa na última linha ou escolha o chip «Translação», «Rotação», «Homotetia» ou «Simetria» – o ângulo e a razão ficam então numa linha própria (φ = 90, κ = 2) e o centro é o ponto S. Os passos mostram a transformação em coordenadas e a imagem de cada ponto, de dois pontos numa reta e do centro e raio numa circunferência; o gráfico, a figura e a imagem.

Cónicas em posição paralela aos eixos (sem termo xy): completando quadrados, a equação reduzida ou do vértice; da circunferência o centro e o raio, da elipse e da hipérbole o centro, os semieixos, a excentricidade e os focos (da hipérbole também as assíntotas), da parábola o vértice, o parâmetro, o foco e a diretriz; o gráfico mostra a curva com os seus pontos.

A tangente num ponto de uma cónica escreve-se por palavras – «tangente à circunferência x^2 + y^2 = 25 no ponto [3; 4]» – e a app encontra-a por desdobramento da equação. A posição de uma cónica e de uma reta («posição relativa de x^2/9 + y^2/4 = 1 e y = x + 1») resulta da substituição e do discriminante:

secante, tangente ou exterior, com os pontos de interseção. Uma esfera (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) completa-se em quadrados: centro e raio. Entre as formas da reta está também a segmentária x/p + y/q = 1. As tangentes a partir de um ponto exterior («tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]», em inglês «… from the point …») procuram-se entre as retas pelo ponto com declive k – é tangente aquela cujo discriminante é nulo; a reta vertical verifica-se à parte. As tangentes paralelas ou perpendiculares a uma reta têm o mesmo vetor normal e um termo independente c desconhecido. Uma superfície esférica escreve-se com nome e, na linha seguinte, um plano, uma reta ou um ponto: com um plano compara-se a distância do centro com o raio (a circunferência da secção com centro e raio, o ponto de tangência ou nada), numa reta substituem-se as equações paramétricas e decide o discriminante, num ponto da esfera obtém-se o plano tangente.

Como introduzir

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Uma reta pela equação geral, reduzida ou paramétrica, cada uma na sua linha.
`p: X = A + t·u`	Uma reta pela equação vetorial com um ponto e um vetor.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Um plano pela equação geral (no espaço).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Uma reta no espaço como interseção de dois planos.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	A tarefa na última linha.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Uma transformação: as figuras, depois o vetor, o centro e o ângulo ou a razão, ou o centro ou eixo de simetria.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Uma cónica – uma equação do segundo grau em x e y.

Exemplos

Todas as formas da equação de uma reta a partir das paramétricas.

Enunciado: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

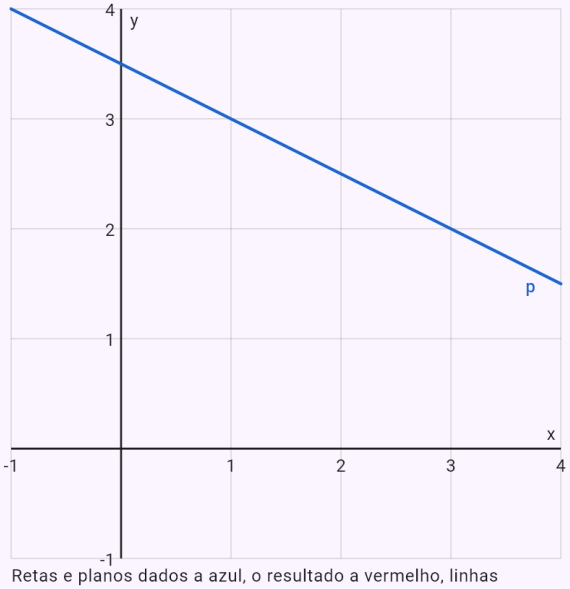
Resultado

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Passos

- As equações paramétricas dão um ponto (os termos independentes) e o vetor diretor (os coeficientes do parâmetro): $P_p[1;\ 3],\ \vec{u}_p = (2;\ -1)$
- O vetor normal é perpendicular ao diretor – trocam-se as coordenadas e muda-se um sinal: $\vec{u}_p = (2;\ -1) \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ 2)$
- A equação geral: os coeficientes são as coordenadas do vetor normal, o termo independente vem do ponto $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\ 3] : \ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \ \Rightarrow \ c =$
- A equação reduzida – a equação geral resolvida em ordem a y: $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Forma segmentária – nos denominadores estão os pontos em que a reta corta os eixos x e y: $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

O ponto de interseção de duas retas.

Enunciado: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Resultado

As retas são concorrentes em:

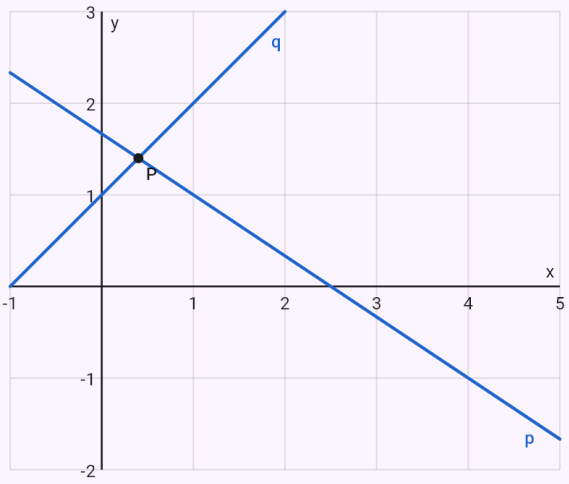
$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Nenhum vetor é múltiplo do outro – não são paralelos $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- O ponto de interseção resolve o sistema das duas retas (regra de Cramer)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \ D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow \ $$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

A distância de um ponto a uma reta pela fórmula.

Enunciado: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

Resultado

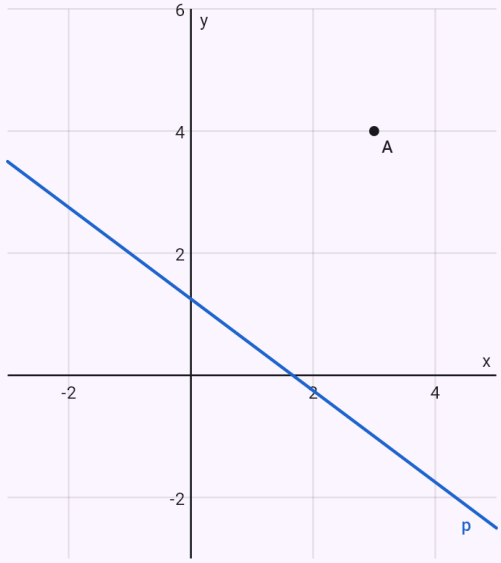
$$v(A, p) = 4$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- A distância do ponto à reta

$$v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

A mesma distância pela projeção.

Enunciado: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Pela projeção

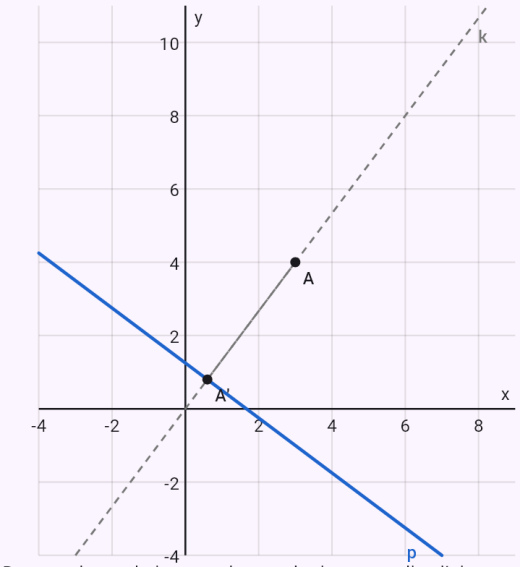
Resultado

$$v(A,p) = 4$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $p : 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\,4)$
- A perpendicular por A à reta p – o diretor de uma é o normal da outra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\,4),\; k : x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- O pé da perpendicular A' é onde ela intersecta p – substitui-se e calcula-se t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- A distância do ponto à reta
  $v(A,p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

Baricentro, alturas e ortocentro de um triângulo.

Enunciado: `A[1; 2]`

`B[5; 2]`

`C[3; 6]` Baricentro e alturas

Resultado

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Passos

- O baricentro – a média das coordenadas dos vértices

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- A altura a partir de A é perpendicular ao lado oposto – o vetor do lado é o seu normal, o comprimento a distância do vértice ao lado

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$$

- A altura a partir de B é perpendicular ao lado oposto – o vetor do lado é o seu normal, o comprimento a distância do vértice ao lado

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

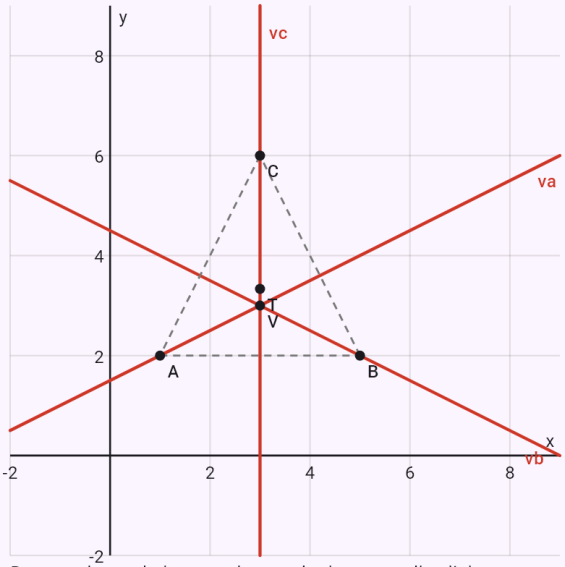
- A altura a partir de C é perpendicular ao lado oposto – o vetor do lado é o seu normal, o comprimento a distância do vértice ao lado

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- O ortocentro – a interseção de duas alturas

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

O simétrico de um ponto em relação a uma reta.

Enunciado: `A[1; 2]`

`p: x - y = 0` Simetria

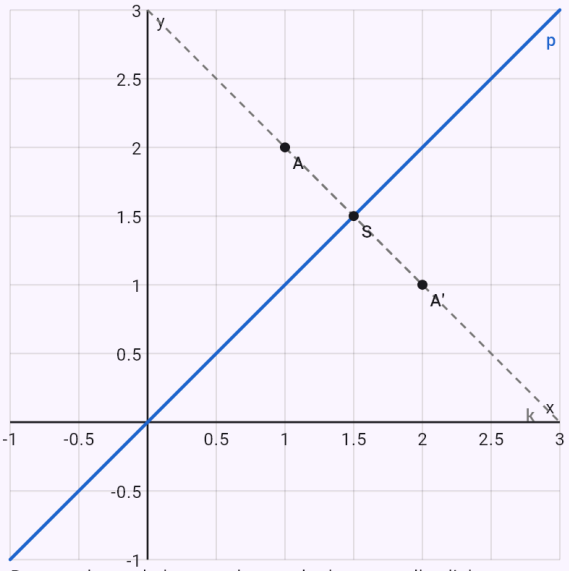
Resultado

$$A'[2;\ 1]$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- A perpendicular por A à reta p – o diretor de uma é o normal da outra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- O pé da perpendicular S é onde ela intersecta p – substitui-se e calcula-se t
  $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- O ponto simétrico: o centro (o pé da perpendicular) é o ponto médio entre o ponto e a sua imagem
  $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

Um triângulo transladado por um vetor.

Enunciado: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`translation(A, B, C, u)`

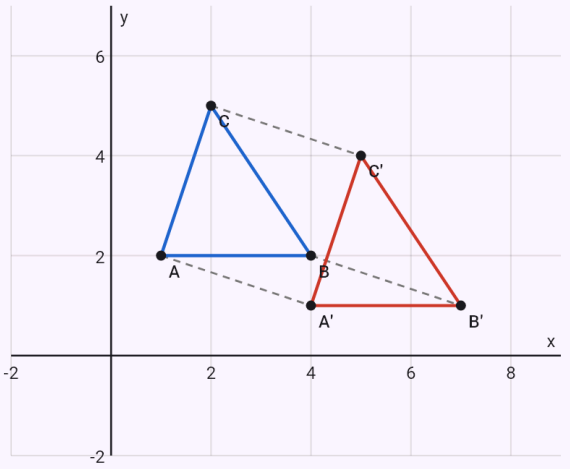
Resultado

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Passos

- Translação por um vetor: cada ponto X desloca-se pelo mesmo vetor, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- A imagem de um ponto: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- A imagem de um ponto: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- A imagem de um ponto: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

Um triângulo rodado 90° em torno de S.

Enunciado: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

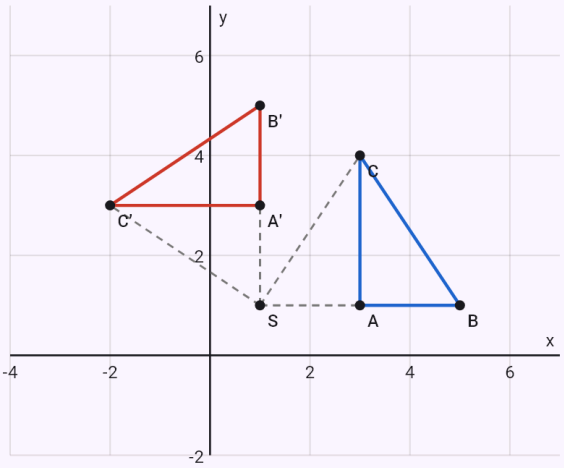
Resultado

$$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$$
$$C'[-2;\ 3]$$

Passos

- Rotação de centro S e ângulo φ (positivo no sentido anti-horário): o vetor X − S roda φ e soma-se ao centro
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- A imagem de um ponto
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- A imagem de um ponto
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- A imagem de um ponto
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

Uma reta e uma circunferência por uma homotetia de razão 2.

Enunciado: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
homothety(p, k, S, 2)
```

Resultado

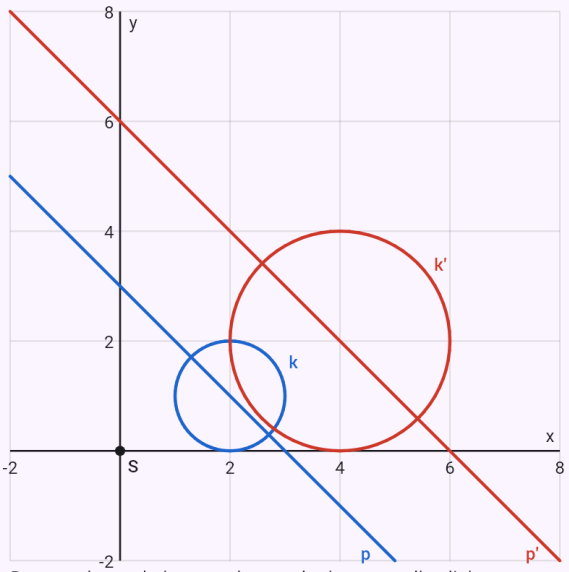
$$p' : x + y - 6 = 0$$

$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- A circunferência k – centro e raio da forma reduzida (completando quadrados)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Homotetia de centro S e razão κ: o vetor X − S multiplica-se por κ (um κ negativo leva a imagem para o outro lado do centro): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- A imagem da reta p: transformam-se dois dos seus pontos e a imagem é a reta pelas suas imagens – paralela à original
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- O vetor normal é perpendicular ao diretor – trocam-se as coordenadas e muda-se um sinal:
  $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- A equação geral: os coeficientes são as coordenadas do vetor normal, o termo independente vem do ponto
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- A imagem da circunferência k: transforma-se o centro e o raio multiplica-se por |κ|
  $S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

Uma circunferência simétrica em relação a uma reta – o eixo escolhido pelo chip.

Enunciado: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Simetria

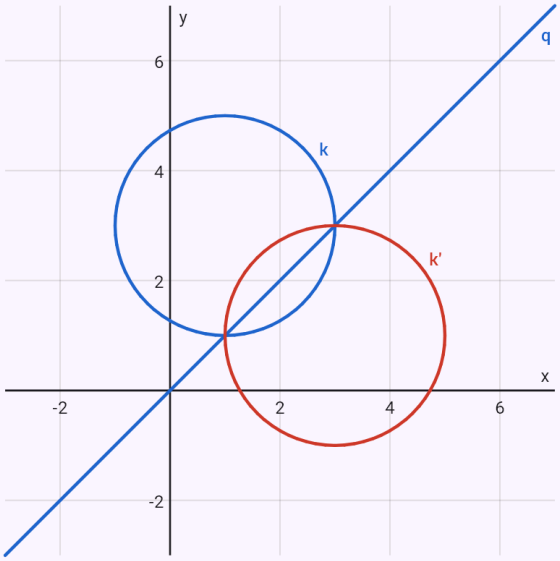
Resultado

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Passos

- A circunferência k – centro e raio da forma reduzida (completando quadrados)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- A equação reduzida escrita como equação geral dá o vetor normal: $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Simetria axial: a imagem está na perpendicular ao eixo, que divide XX' ao meio – o ponto desloca-se o dobro da sua distância ao eixo segundo o vetor normal (a; b):
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- A imagem da circunferência k: transforma-se o centro e o raio mantém-se (a transformação é uma isometria):
  $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S'_k[3;\,1],\; r' = r = 2$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas.

A reta de interseção de dois planos.

Enunciado: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Resultado

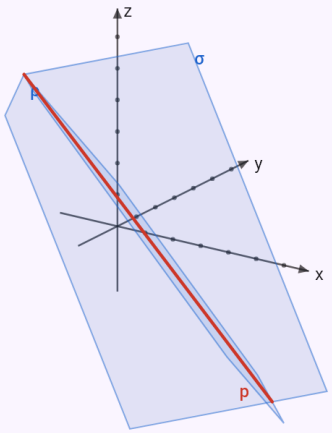
Os planos intersectam-se na reta:

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Passos

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Nenhum vetor é múltiplo do outro – não são paralelos
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- O diretor da reta de interseção é perpendicular a ambos os normais – o seu produto vetorial
  $\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$
- Um ponto de p: escolhem-se coordenadas e calcula-se a restante pela equação
  $z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$
- A reta de interseção – o seu ponto e vetor diretor:
  $p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

O ângulo de uma reta e um plano.

Enunciado: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Ângulo

Resultado

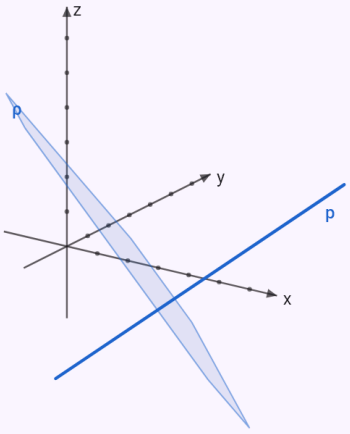
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Passos

- As equações paramétricas dão um ponto (os termos independentes) e o vetor diretor (os coeficientes do parâmetro): $P_p[1;\ 0;\ -1],\ \vec{u}_p = (1;\ 2;\ 1)$
- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- O ângulo de reta e plano: o ângulo do diretor e do normal completa-o até 90°, daí o seno logo
  $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

A distância e a perpendicular comum de duas retas reversas.

Enunciado: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Distância

Resultado

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Passos

- As equações paramétricas dão um ponto (os termos independentes) e o vetor diretor (os coeficientes do parâmetro): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- As equações paramétricas dão um ponto (os termos independentes) e o vetor diretor (os coeficientes do parâmetro): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- A distância das retas reversas

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- A perpendicular comum: X na primeira reta e Y na segunda com XY perpendicular a ambos os diretores – um sistema em t e s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

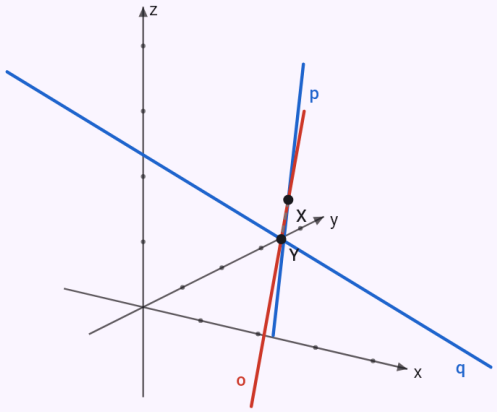
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- As equações paramétricas – um ponto mais o parâmetro vezes o vetor diretor:

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

Uma circunferência – completar quadrados, centro e raio.

Enunciado: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Resultado

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

Passos

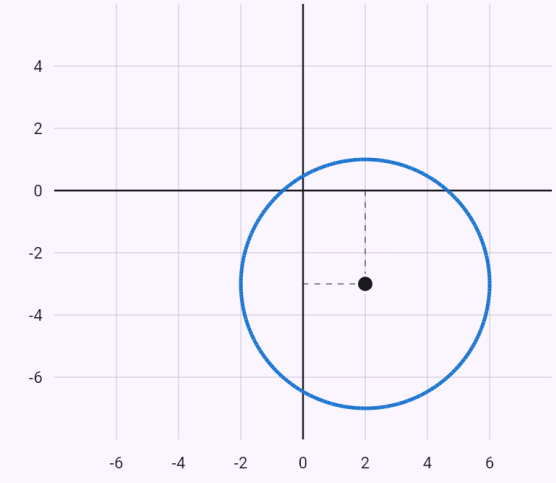
- Completamos os quadrados

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- A equação reduzida da circunferência: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Centro $S = [2;\ -3]$, raio $r = 4$

Gráfico



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

A curva dada pela equação no plano x, y.

Uma elipse – semieixos, excentricidade e focos.

Enunciado: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

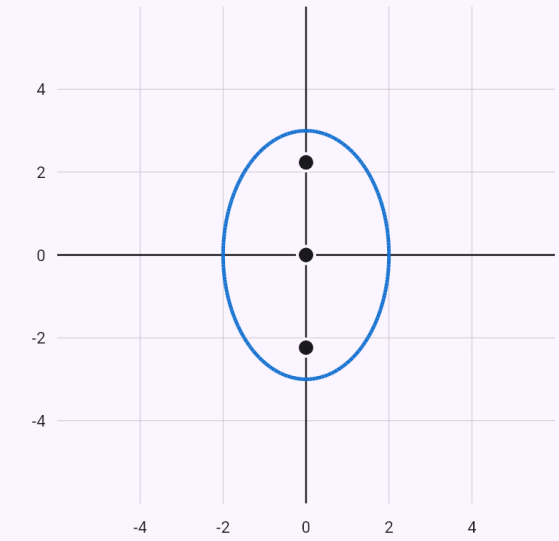
Resultado

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Passos

- A equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semieixos $a = 3,\ b = 2$ (eixo maior paralelo ao eixo y), distância focal $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, excentricidade $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, focos $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Gráfico



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A curva dada pela equação no plano x, y.

Uma hipérbole – focos e assíntotas.

Enunciado: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

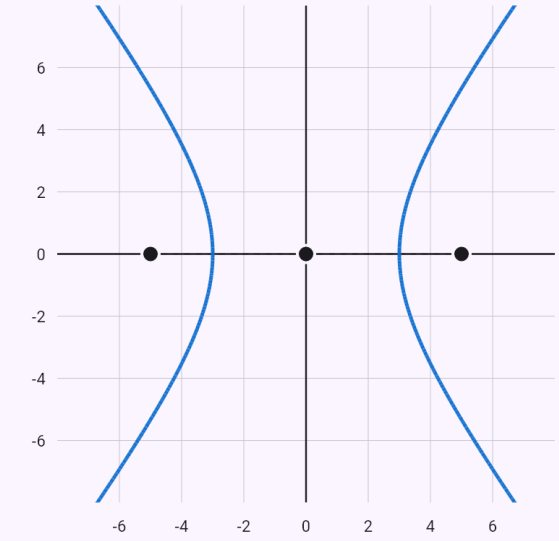
Resultado

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Passos

- A equação reduzida da hipérbole: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semieixos $a = 3,\ b = 4$ (eixo principal paralelo ao eixo x), distância focal $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, excentricidade $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, focos $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, assíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

Gráfico



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

A curva dada pela equação no plano x, y.

Uma parábola – vértice, foco e diretriz.

Enunciado: `y^2 = 8x`

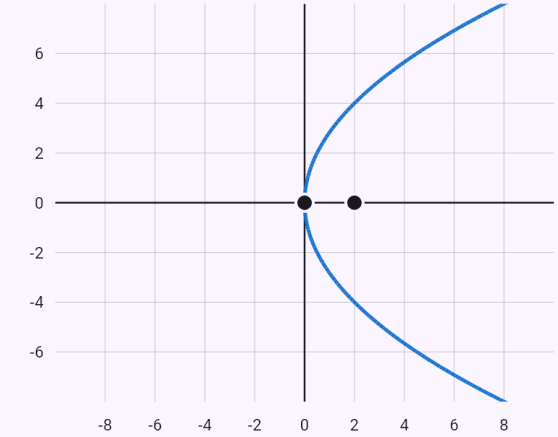
Resultado

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Passos

- A equação da parábola a partir do vértice: $y^2 = 8x$
- Vértice $V = [0;\ 0]$, parâmetro $p = 4$, eixo paralelo ao eixo x, foco $F = [2;\ 0]$, diretriz $x = -2$

Gráfico



A curva dada pela equação no plano x, y.

A tangente a uma circunferência num ponto dela.

Enunciado: `tangente à circunferência x^2 + y^2 = 25 no ponto [3; 4]`

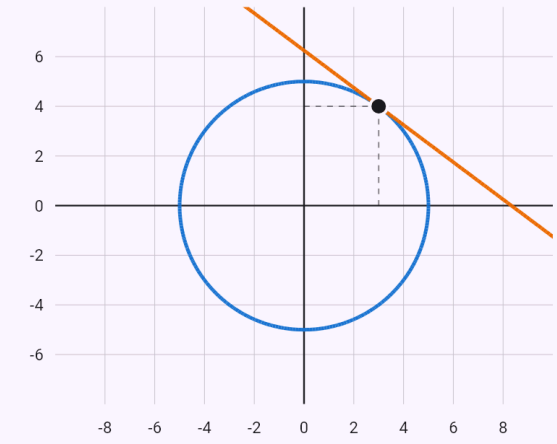
Resultado

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Passos

- O ponto $T = [3;\ 4]$ está na cónica – substituindo: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- A tangente no ponto $[x_0; y_0]$ da cónica por desdobramento: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \dfrac{x + x_0}{2}$, $y \to \dfrac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- A tangente: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Gráfico



A cónica e as retas; os pontos marcados são os de tangência, as interseções e o ponto dado.

Tangentes a partir de um ponto exterior – discriminante nulo para o declive k.

Enunciado: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

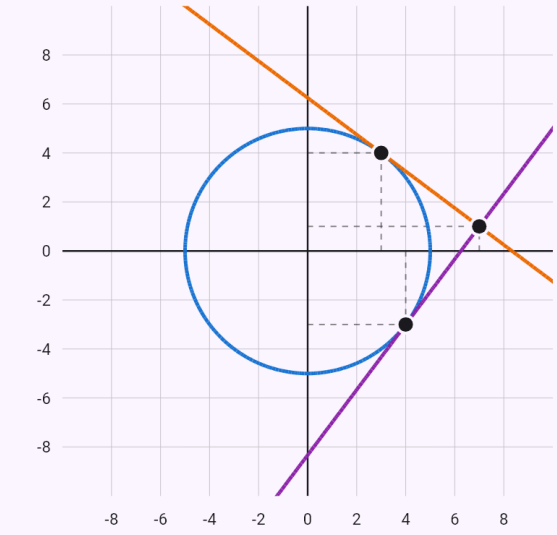
Resultado

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Passos

- O ponto $M = [7;\ 1]$ não está na cónica – substituindo: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, não 0.
- Procuramos as tangentes entre as retas por M com declive k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Substituímos y na equação da cónica: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- A reta é tangente exatamente quando a equação tem uma única raiz (dupla) – o discriminante é nulo: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- As tangentes: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; os pontos de tangência: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Gráfico



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

A cónica e as retas; os pontos marcados são os de tangência, as interseções e o ponto dado.

Tangentes paralelas a uma reta.

Enunciado: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

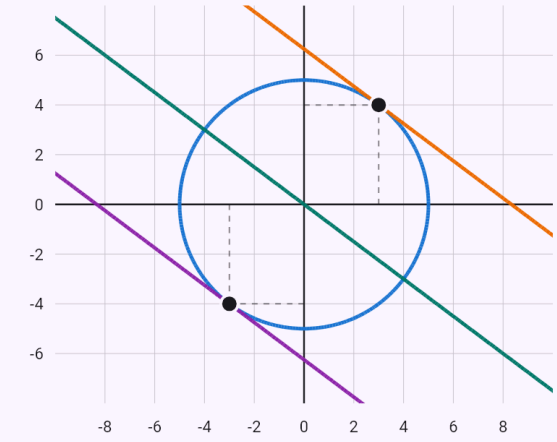
Resultado

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Passos

- As tangentes paralelas à reta têm o seu vetor normal e diferem só no termo independente c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Substituímos y na equação da cónica: $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- A reta é tangente exatamente quando a equação tem uma única raiz (dupla) – o discriminante é nulo: $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- As tangentes: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; os pontos de tangência: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Gráfico



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

A cónica e as retas; os pontos marcados são os de tangência, as interseções e o ponto dado.

A posição de uma elipse e de uma reta.

Enunciado: `posição relativa de x^2/9 + y^2/4 = 1 e y = x + 1`

Resultado

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right]$$

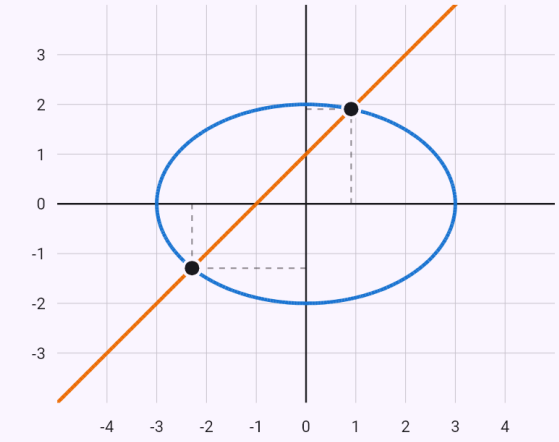
$$P_2 = \left[\frac{3(-3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1+3\sqrt{3})}{13}\right]$$

Passos

- Da equação da reta isolamos y e substituímos na cónica: $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- O discriminante $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ é positivo – a reta é secante, com dois pontos comuns.
- Os pontos de interseção

$$P_1 = \left[-\frac{3(3+4\sqrt{3})}{13};\ \frac{4(1-3\sqrt{3})}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3(-3+4}{13}\right.$$

Gráfico



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

A cónica e as retas; os pontos marcados são os de tangência, as interseções e o ponto dado.

Uma esfera – centro e raio.

Enunciado: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Resultado

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Passos

- Completamos os quadrados

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- A equação da esfera com o seu centro: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Centro $S = [1;\ -2;\ 3]$, raio $r = 4$

Esfera e plano – a circunferência da secção.

Enunciado: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

`ρ: x + y + z = 1`

Resultado

O plano corta a esfera numa circunferência de centro e raio:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Passos

- Completando quadrados, a equação da superfície esférica k passa à forma reduzida – o centro e o raio

  $$k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow\ S[1;\ -2;\ 3$$

- A equação geral dá o vetor normal – os coeficientes de x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$

- A distância do ponto ao plano

  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

- A distância do centro ao plano ρ é menor do que o raio – o plano corta a esfera numa circunferência:

  $$v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$$

- A perpendicular por S ao plano ρ segue o seu vetor normal: $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$

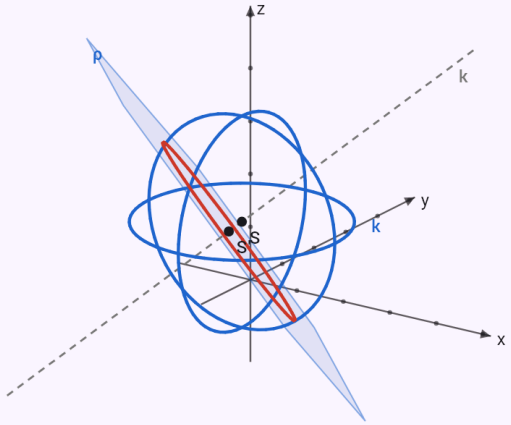
- O pé da perpendicular S' é onde ela intersecta ρ – substitui-se e calcula-se t

  $$(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow\ t = -\frac{1}{3},\ S'\Big[$$

- O centro da circunferência é o pé da perpendicular a partir do centro, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; o raio pelo teorema de Pitágoras

  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

Esfera e reta – os pontos de interseção.

Enunciado: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Resultado

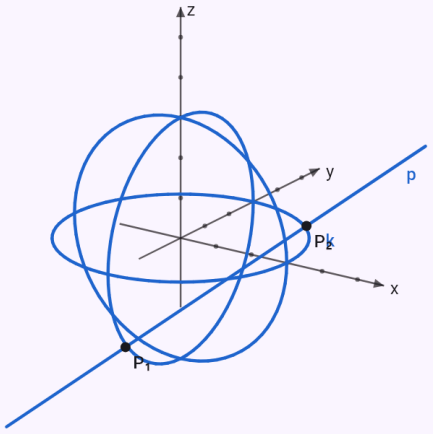
A reta corta a esfera em dois pontos:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Passos

- Completando quadrados, a equação da superfície esférica k passa à forma reduzida – o centro e o raio: $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- As equações paramétricas dão um ponto (os termos independentes) e o vetor diretor (os coeficientes do parâmetro): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- Substituímos as equações paramétricas da reta p na equação da esfera
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- O discriminante $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ é positivo – a reta é secante, com dois pontos comuns.
- Os pontos de interseção
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Gráfico



Retas e planos dados a azul, o resultado a vermelho, linhas auxiliares tracejadas. Vetores no espaço: roda o gráfico com o dedo.

Limitações conhecidas

- As coordenadas e os coeficientes são números (sem parâmetro); as cónicas só em posição axial (sem termo xy).
- Transformações só no plano; uma circunferência por enquanto só se transforma (sem distância, posição nem tangentes).
- As alturas de um triângulo no espaço só pelo comprimento, sem equações nem ortocentro.
- O nome de uma reta ou de um plano é uma letra (também com índice) – por isso «a: 2x + 3 = 5» lê-se como reta, não como equação.

24. Problemas de construção

Os problemas de construção introduzem-se num formulário – na secção «Aplicações» do ecrã inicial, área Geometria (formulário «Problemas de construção»). A tarefa básica é um triângulo ABC a partir de três elementos: três lados (LLL), dois lados e o ângulo por eles formado (LAL), um lado e dois ângulos (ALA – o terceiro ângulo obtém-se da soma de 180°) ou dois lados e o ângulo oposto a um deles (LLA). Comprimentos em centímetros, ângulos em graus.

A solução segue a prática escolar: análise (esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados), passos da construção em notação simbólica (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) e discussão do número de soluções. A figura sob o resultado percorre a construção passo a passo com as setas – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados a cores. O resultado indica também os lados e ângulos calculados, para verificar o seu desenho.

A discussão explica porque é que um problema não tem solução (desigualdade triangular, soma dos ângulos, circunferência que não alcança a semirreta) ou porque tem duas (LLA com o ângulo oposto ao lado menor).

Um triângulo também pode ser dado por uma altura, uma mediana, o raio da circunferência circunscrita ou inscrita. Primeiro traça-se um lado e o terceiro vértice está onde se intersetam dois lugares geométricos: uma paralela à distância da altura, uma circunferência centrada no ponto médio do lado com a mediana como raio, uma circunferência centrada num extremo, o lado de um ângulo, o arco capaz sobre o lado ou as circunferências circunscritas. Com dois lados e a altura a partir do seu vértice comum começa-se pela altura; com o raio inscrito, um lado e um ângulo adjacente constroem-se a circunferência inscrita e a sua tangente.

Quadriláteros: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio (AB ∥ CD) a partir dos lados a, b, c, d, das diagonais e, f, dos ângulos α, β e da altura v – os elementos escolhem-se em linhas como no triângulo. Normalmente constrói-se primeiro o triângulo ABC ou ABD e completa-se o quarto vértice; senão, ajudam as diagonais que se bissetam (no losango também perpendiculares), a paralela à distância da altura ou, no trapézio, um triângulo auxiliar obtido transladando o lado AD ou a diagonal BD pelo vetor DC.

Os lugares geométricos estão no mesmo formulário: a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, a circunferência de Tales e o arco capaz, de onde um segmento é visto sob um ângulo dado (dois arcos simétricos em relação ao segmento). Cada um constrói-se com compasso e régua passo a passo; a análise explica porque é que os pontos estão exatamente ali.

Circunferências e tangentes: as tangentes de um ponto a uma circunferência (os pontos de tangência numa circunferência de Tales), as tangentes comuns a duas circunferências (com circunferências auxiliares de raio igual à diferença e à soma dos raios), a circunferência de raio dado tangente aos lados

de um ângulo, as circunferências por um ponto tangentes a uma reta e as circunferências por dois pontos. A discussão conta as soluções pela posição – duas circunferências têm, por exemplo, quatro, três, duas, uma ou nenhuma tangente comum.

Problemas com relações: uma figura dada (um segmento AB, uma circunferência k e um ponto A, uma reta p e um ponto A, uma circunferência k e uma reta p, duas retas concorrentes p, q) e duas relações que o ponto procurado deve satisfazer – sobre um segmento o vértice C do triângulo ABC, senão um ponto X. As relações escolhem-se em linhas: o segmento é visto do ponto sob um ângulo (90° = circunferência de Tales), à mesma distância de dois pontos ou duas retas, distância a um ponto ou a uma reta, razão das distâncias a A e B (circunferência de Apolónio), está numa reta ou circunferência, a reta AX é tangente a k, centro de uma circunferência de raio ϱ tangente a k, e A é o ponto médio de XY com Y em k ou p (simetria central). Cada relação torna-se um lugar geométrico, o ponto procurado está na sua interseção; a discussão conta as soluções (sobre um segmento num semiplano, o outro dá imagens simétricas congruentes). Sob o resultado estão as distâncias do ponto aos pontos e retas dados como verificação.

Relações gerais entre vários pontos (com circunferência k ou sem ela): os pontos A a H indicam-se com linhas de relações – ponto em k, ponto médio, tangente a k, comprimento, razão de comprimentos, perpendiculares, paralelas, ponto numa reta, ângulo e triângulo (só o que desenhar). As relações tornam-se equações em coordenadas (o centro S na origem, o primeiro ponto no eixo x) e resolvem-se exatamente, com raízes. O resultado dá os comprimentos entre os pontos (com circunferência também como múltiplos de r), a verificação e o número de soluções a menos de congruência. Quando possível segue-se uma construção escolar: cada ponto em dois lugares – a circunferência dada, uma distância, uma reta, uma tangente, um ponto médio, uma simetria central – e os comprimentos calculados construídos como hipotenusa ou cateto de um triângulo retângulo ou pelo teorema da altura; a solução mostra também a potência de um ponto e o ângulo de segmento quando se verificam. Caso contrário, honestamente, só o cálculo e a figura.

Secções de sólidos: um cubo, um paralelepípedo, um prisma e uma pirâmide regulares com base de 3 a 6 lados (vértices ABC… e A'B'C'…, o vértice da pirâmide V) e o tetraedro regular ABCD. O plano de corte é dado pelos pontos X, Y, Z, um por linha: AE=2 é o ponto do segmento AE a 2 cm de A – o segmento pode ser uma aresta, uma diagonal de uma face ou do sólido ou o eixo SS' (S, S' os centros das bases), e uma distância maior do que o seu comprimento dá um ponto no prolongamento; X: AB = 1:2 é o ponto X que divide AB na razão 1 : 2. Os pontos auxiliares podem ser usados noutras linhas. O sólido está em perspetiva cavaleira com as arestas ocultas a tracejado; um triângulo, pentágono ou hexágono regular na base é primeiro desenhado ao lado em verdadeira grandeza e levado para a perspetiva. A secção constrói-se lado a lado pelas regras escolares: os pontos da mesma face unem-se, as faces paralelas são cortadas em paralelas, a reta de um lado interseta a reta de uma aresta num ponto auxiliar T que está também na face vizinha, e a reta de um ponto interior é levada à base por um plano vertical auxiliar. Sob a figura, a secção terminada no espaço pode ser rodada com o dedo.

Exemplos

Triângulo a partir de três lados (LLL).

Enunciado: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

Resultado

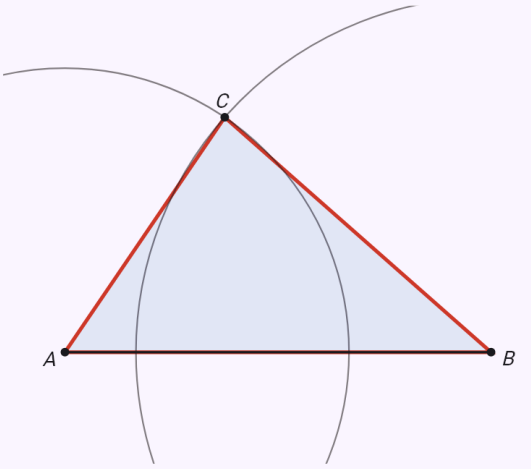
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – a circunferência l de centro B e raio a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – o terceiro vértice é a interseção.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos os vértices.
- Discussão: a desigualdade triangular $a + b > c$ verifica-se, as circunferências intersetam-se. Num semiplano definido pelo primeiro lado o problema tem uma solução (no outro está a sua imagem simétrica, congruente).

Gráfico



Passo 5 de 5
5. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Dois lados e o ângulo por eles formado (LAL).

Enunciado: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

Resultado

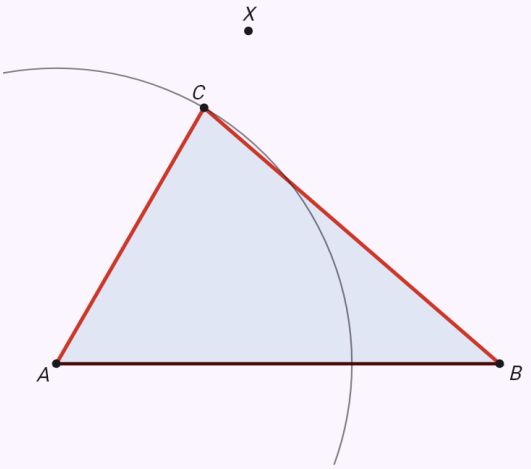
$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – construímos o ângulo α; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – o terceiro vértice é a interseção.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos os vértices.
- Discussão: num semiplano definido pelo primeiro lado o problema tem uma solução (no outro semiplano está a sua imagem simétrica, congruente).

Gráfico



Passo 5 de 5
5. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um lado e dois ângulos, um deles não adjacente ao lado – calcula-se o terceiro ângulo (ALA).

Enunciado: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

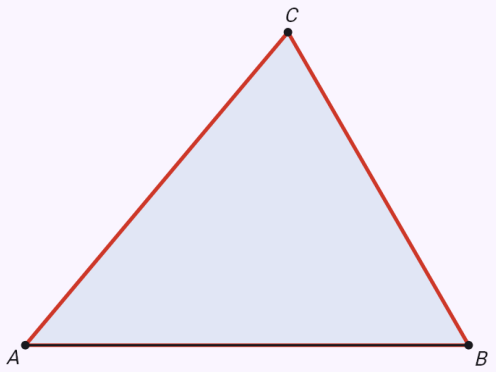
Resultado

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- O terceiro ângulo obtém-se da soma dos ângulos de um triângulo: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 50^\circ$ – construímos o ângulo α; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 60^\circ$ – construímos o ângulo β; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{BY}$
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – o terceiro vértice é a interseção.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos os vértices.
- Discussão: num semiplano definido pelo primeiro lado o problema tem uma solução (no outro semiplano está a sua imagem simétrica, congruente).

Gráfico



Passo 5 de 5
5. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

O ângulo oposto ao menor de dois lados – duas soluções (LLA).

Enunciado: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

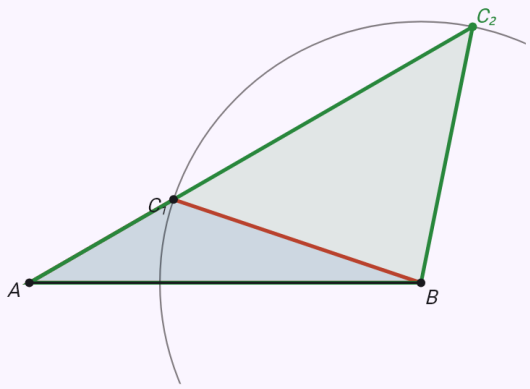
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – construímos o ângulo α; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro B e raio a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – há duas interseções, cada uma é o terceiro vértice de um triângulo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: a circunferência interseta a semirreta em dois pontos – num semiplano definido pelo primeiro lado o problema tem duas soluções, dois triângulos diferentes.

Gráfico



Passo 5 de 5
5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Lados que não verificam a desigualdade triangular.

Enunciado: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

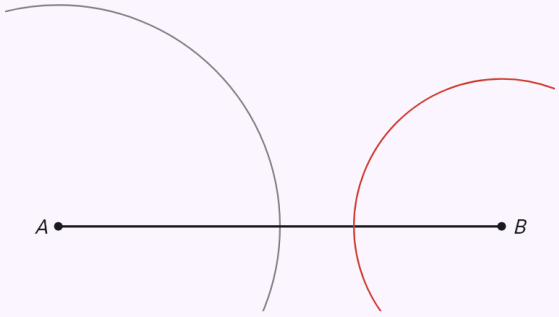
Resultado

Não é possível construir uma figura com os elementos dados.

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – a circunferência l de centro B e raio a
- Discussão: a desigualdade triangular não se verifica ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – as circunferências não se intersetam e o triângulo não existe.

Gráfico



Passo 3 de 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

O lado c, a altura e a mediana relativas – duas soluções.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

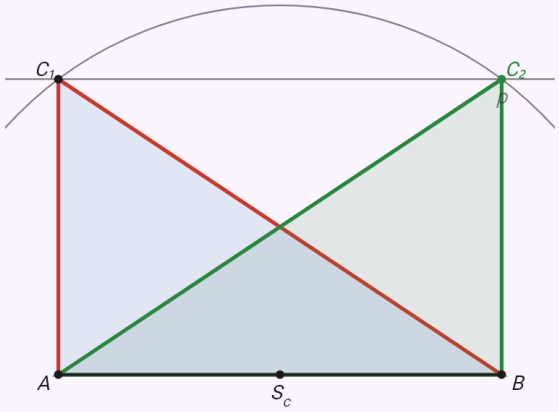
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – a paralela p a AB à distância v_c
- 3. S_c; $S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – o ponto médio S_c do segmento AB (onde a sua mediatriz o interseta).
- 4. k; $k(S_c; 5\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro S_c e raio t_c
- 5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – há duas interseções, cada uma é o terceiro vértice de um triângulo.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: no semiplano sobre o primeiro lado os lugares geométricos têm 2 pontos comuns – o problema tem outras tantas soluções (no outro semiplano estão as suas imagens simétricas).

Gráfico



Passo 6 de 6
6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

O lado c, a altura relativa e o ângulo oposto – o arco capaz.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

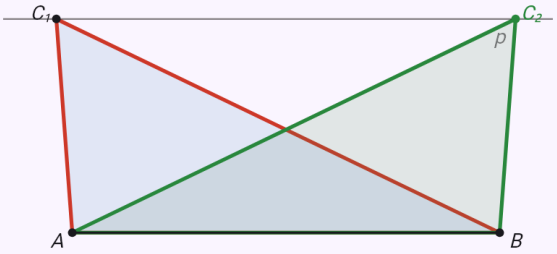
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – a paralela p a AB à distância v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – o arco k de onde o segmento AB é visto sob o ângulo γ (construído como em «Arco capaz»).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – há duas interseções, cada uma é o terceiro vértice de um triângulo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: no semiplano sobre o primeiro lado os lugares geométricos têm 2 pontos comuns – o problema tem outras tantas soluções (no outro semiplano estão as suas imagens simétricas).

Gráfico



Passo 5 de 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um lado, o raio circunscrito e outro lado – duas circunferências circunscritas.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

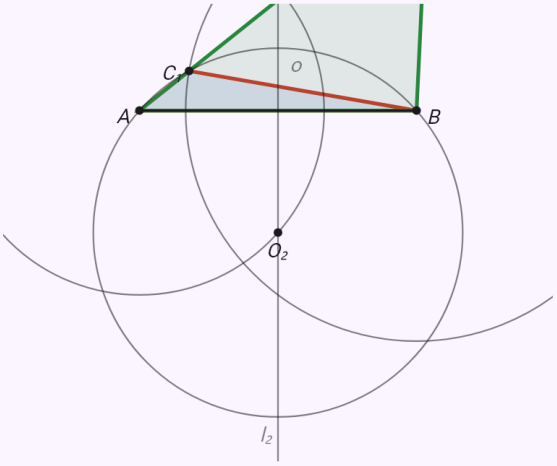
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – a mediatriz o do segmento AB, construída como em «Mediatriz».
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – as interseções O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – a circunferência circunscrita l_1, l_2 de centro O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – a circunferência m de centro B e raio a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – há duas interseções, cada uma é o terceiro vértice de um triângulo.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: no semiplano sobre o primeiro lado os lugares geométricos têm 2 pontos comuns – o problema tem outras tantas soluções (no outro semiplano estão as suas imagens simétricas).

Gráfico



Passo 8 de 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Dois lados e a altura a partir do seu vértice comum – primeiro a altura.

Enunciado: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Resultado

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

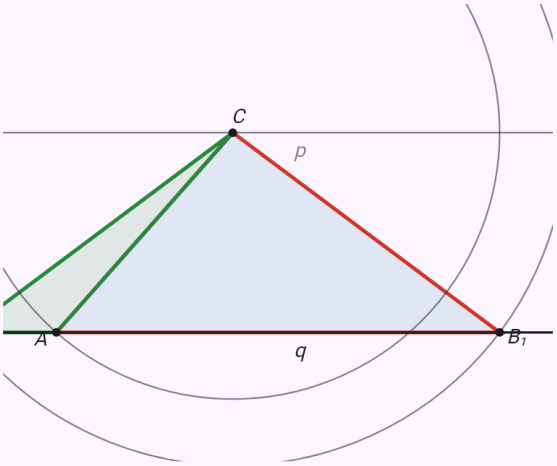
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – uma reta qualquer q onde ficará o lado AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – a paralela p a q à distância v_c
- 3. C; $C \in p$ – um ponto qualquer C da reta p
- 4. k; $k(C;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro C e raio b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – uma das interseções, A (a outra dá um triângulo congruente).
- 6. l; $l(C;\ 5\,\text{cm})$ – a circunferência l de centro C e raio a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – há duas interseções, cada uma é o terceiro vértice de um triângulo.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – unimos os vértices.
- Discussão: a circunferência l interseta a reta q em dois pontos – o problema tem duas soluções, dois triângulos diferentes (a outra interseção da circunferência k dá apenas triângulos congruentes).

Gráfico



Passo 8 de 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um lado, um ângulo adjacente e o raio inscrito – a tangente por uma circunferência de Tales.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

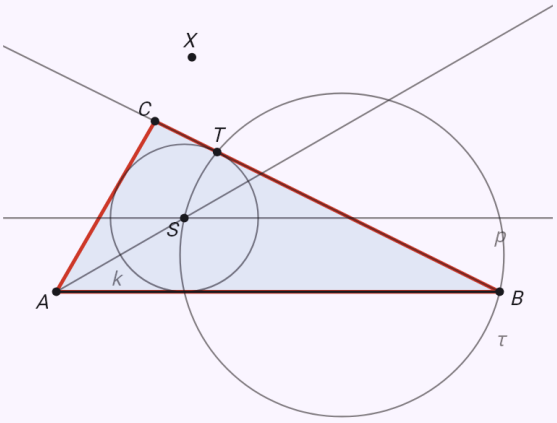
Resultado

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Passos

- Análise: esboço do triângulo terminado com os elementos dados realçados – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – construímos o ângulo α; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{AX}$
- 3. o; $o = \overrightarrow{AY}$, $|\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – a bissetriz o do ângulo α (construída como em «Bissetriz»); nela está o incentro.
- 4. p; $p \parallel AB$, $|p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – a paralela p a AB à distância ϱ
- 5. S; $S \in o \cap p$ – a interseção S
- 6. k; $k(S;\ \varrho)$ – a circunferência inscrita k de centro S
- 7. τ; $\tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – a circunferência de Tales τ sobre o segmento BS
- 8. T; $T \in \tau \cap k$ – o ponto de tangência T da tangente a partir de B (a outra interseção é o ponto de tangência no primeiro lado).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – a tangente do ponto B à circunferência inscrita.
- 10. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – o terceiro vértice é a interseção.
- 11. $\triangle ABC$ – unimos os vértices.
- Discussão: num semiplano definido pelo primeiro lado o problema tem uma solução (no outro semiplano está a sua imagem simétrica, congruente).

Gráfico



Passo 11 de 11
11. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um retângulo a partir de um lado e da diagonal – o ângulo reto em B.

Enunciado: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

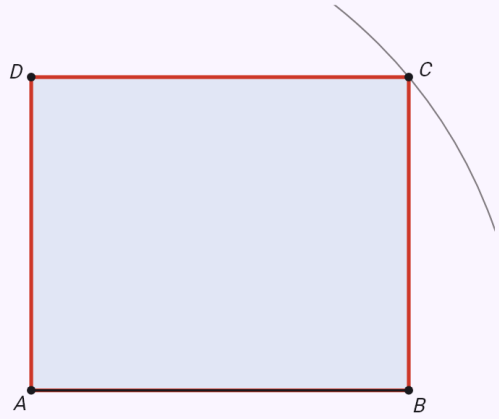
Resultado

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): o lado AB com os restantes elementos dados determina o triângulo ABC ou ABD, construído como um problema de triângulos. O quarto vértice completa-o – os lados opostos de um paralelogramo são iguais e paralelos.
- 1. AB; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – traçamos o lado a
- 2. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 90^\circ$ – construímos o ângulo β; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{BY}$
- 3. k; $k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio e
- 4. C; $C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – a interseção C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – o quarto vértice D: os lados opostos são iguais, por isso está nas circunferências de centros C, A e raios $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – unimos os vértices.
- Discussão: o problema tem uma solução – qualquer outro quadrilátero assim é congruente com ele.

Gráfico



Passo 6 de 6
6. $ABCD$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um losango a partir das diagonais – os vértices na mediatriz de AC.

Enunciado: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

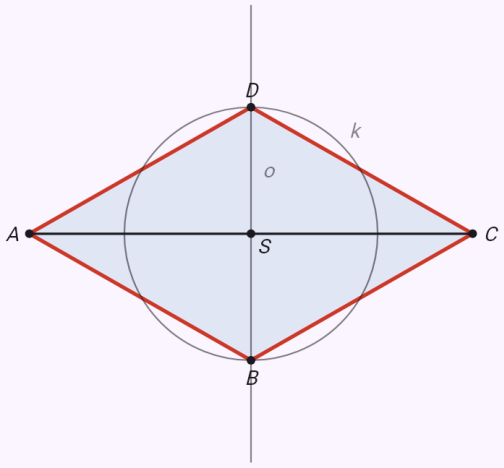
Resultado

$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$
$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$
$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): as diagonais do quadrado e do losango são perpendiculares e bissetam-se. Os vértices B e D estão por isso na mediatriz de AC, a meia diagonal do seu ponto médio S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – traçamos a diagonal AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – a mediatriz o do segmento AC, construída como em «Mediatriz».
- 3. k; $k(S;\ 2\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro S e raio $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – as interseções B, D
- 5. $ABCD$ – unimos os vértices.
- Discussão: o problema tem uma solução – qualquer outro quadrilátero assim é congruente com ele.

Gráfico



Passo 5 de 5
5. $ABCD$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um paralelogramo a partir de dois lados e uma diagonal – primeiro o triângulo ABC.

Enunciado: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

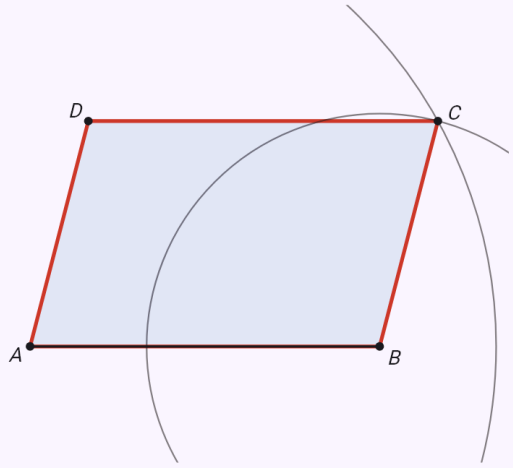
Resultado

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): o lado AB com os restantes elementos dados determina o triângulo ABC ou ABD, construído como um problema de triângulos. O quarto vértice completa-o – os lados opostos de um paralelogramo são iguais e paralelos.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o lado a
- 2. $k;\ k(A;\ 8\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro A e raio e
- 3. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência l de centro B e raio b
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – a interseção C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – o quarto vértice D: os lados opostos são iguais, por isso está nas circunferências de centros C, A e raios $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – unimos os vértices.
- Discussão: o problema tem uma solução – qualquer outro quadrilátero assim é congruente com ele.

Gráfico



Passo 6 de 6
6. $ABCD$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um trapézio a partir de quatro lados – o triângulo auxiliar EBC.

Enunciado: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

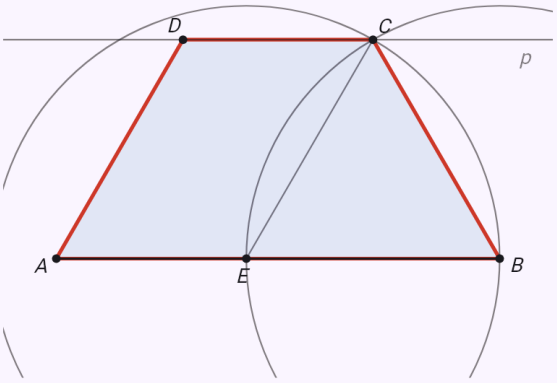
Resultado

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): transladando o lado AD pelo vetor DC obtém-se o triângulo EBC com E em AB e |AE| = c. Os seus lados são |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d e os ângulos em E e B são α e β. Constrói-se primeiro e D completa-se na paralela a AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – traçamos o lado a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – o ponto E à distância $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro E e raio d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – a circunferência l de centro B e raio b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – a interseção C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – o vértice D na paralela a AB por C, à distância $3\,\text{cm}$ dele.
- 7. $ABCD$ – unimos os vértices.
- Discussão: o problema tem uma solução – qualquer outro quadrilátero assim é congruente com ele.

Gráfico



Passo 7 de 7
7. $ABCD$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Um trapézio a partir de três lados e um ângulo – duas soluções.

Enunciado: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Resultado

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

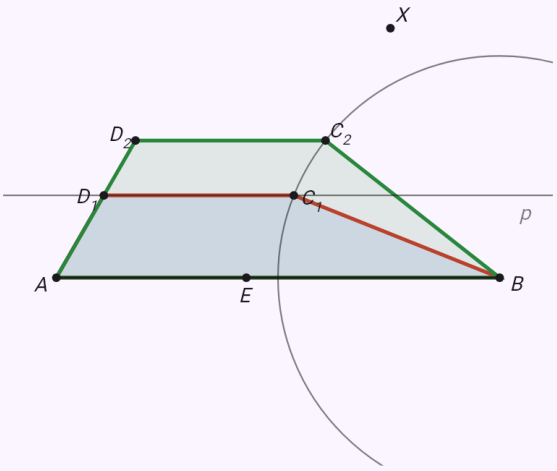
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): transladando o lado AD pelo vetor DC obtém-se o triângulo EBC com E em AB e |AE| = c. Os seus lados são |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d e os ângulos em E e B são α e β. Constrói-se primeiro e D completa-se na paralela a AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – traçamos o lado a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – o ponto E à distância $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – construímos o ângulo α; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro B e raio b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – as interseções C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – o vértice D_1 na paralela a AB por C_1, à distância $3\,\text{cm}$ dele.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – o vértice D_2 na paralela a AB por C_2, à distância $3\,\text{cm}$ dele.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: há duas interseções – o problema tem duas soluções, dois quadriláteros diferentes.

Gráfico



Passo 8 de 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A mediatriz de um segmento AB de 6 cm.

Enunciado: `construction(segment_bisector; d=6)`

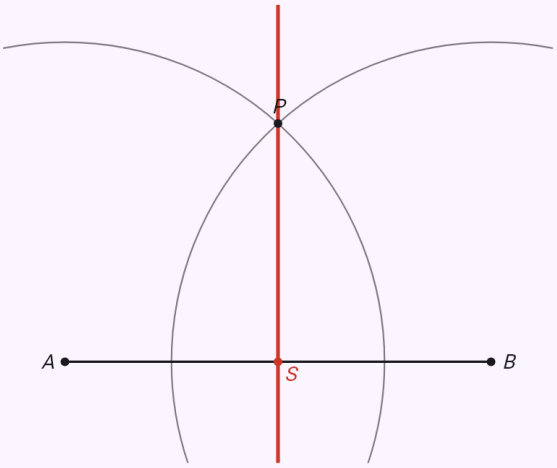
Resultado

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($|AB| = 6\,\text{cm}$): um ponto X equidistante de A e B é o vértice de um triângulo isósceles ABX – está na perpendicular a AB pelo seu ponto médio, a mediatriz.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o segmento AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – a circunferência k de centro A e raio $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – a circunferência l de centro B e o mesmo raio.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – as interseções P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – a reta o é a mediatriz: o conjunto de todos os pontos equidistantes de A e B.

Gráfico



Passo 5 de 5

5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A bissetriz de um ângulo de 70°.

Enunciado: `construction(angle_bisector; phi=70)`

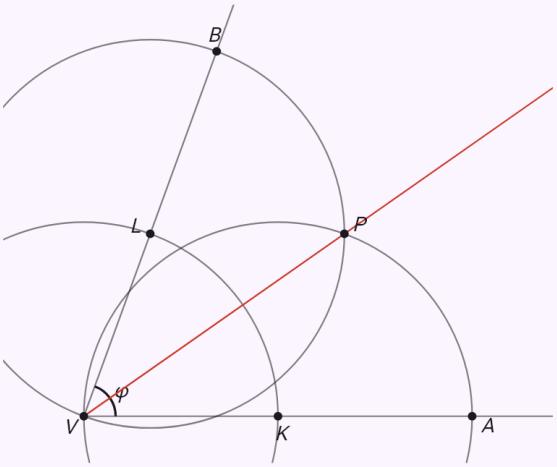
Resultado

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Passos

- Análise ($|\angle AVB| = 70^\circ$): um ponto interior ao ângulo equidistante dos dois lados está na semirreta que divide o ângulo ao meio – a bissetriz.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – traçamos o ângulo $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro V e raio qualquer.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – as interseções K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – a circunferência m de centro K e raio $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – a circunferência n de centro L e o mesmo raio.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – a interseção P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – a semirreta o é a bissetriz: divide o ângulo ao meio e os seus pontos são equidistantes dos dois lados.

Gráfico



Passo 7 de 7

7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A circunferência de Tales sobre um segmento de 5 cm.

Enunciado: `construction(thales; d=5)`

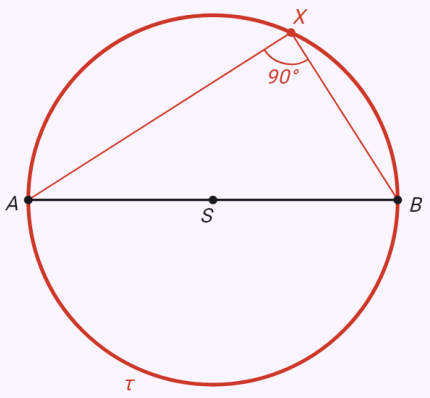
Resultado

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Passos

- Análise ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): pelo teorema de Tales, o ângulo AXB é reto exatamente quando X está na circunferência de diâmetro AB (exceto A e B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – traçamos o segmento AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – o ponto médio S do segmento AB (onde a sua mediatriz o interseta).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – a circunferência de Tales τ de centro S e raio $\dfrac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; sem A e B é o conjunto procurado.

Gráfico



Passo 3 de 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Os pontos de onde um segmento de 6 cm é visto sob 60°.

Enunciado: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

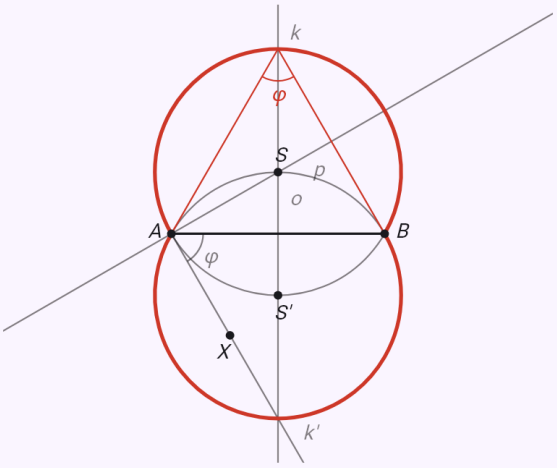
Resultado

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60^\circ$): os pontos X de onde AB é visto sob o ângulo φ estão em dois arcos simétricos em relação a AB. O ângulo inscrito sobre a corda AB é igual ao ângulo entre AB e a tangente em A – o centro do arco está na mediatriz de AB e na perpendicular à tangente em A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o segmento AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – a mediatriz o do segmento AB, construída como em «Mediatriz».
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – construímos o ângulo φ; o seu lado é a semirreta $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – a perpendicular p à semirreta $\overrightarrow{AX}$ no ponto A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – a interseção S
- 6. k; $k(S;\ |SA|)$ – a circunferência k de centro S e raio $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – a circunferência k', simétrica de k em relação à reta AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – os arcos sobre o segmento AB (sem A e B) são o conjunto procurado: de cada um dos seus pontos AB é visto sob o ângulo φ

Gráfico



Passo 8 de 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

As tangentes de um ponto a 5 cm a uma circunferência de raio 3 cm.

Enunciado: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Resultado

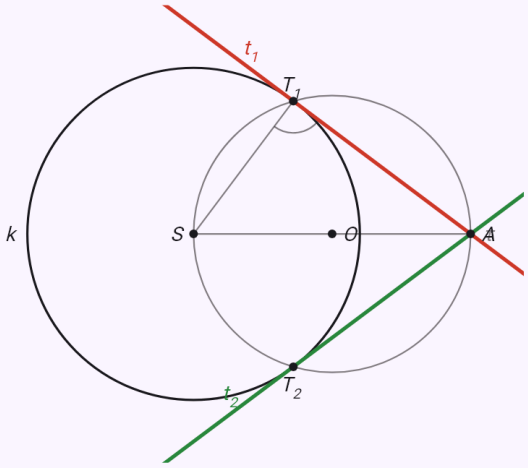
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\text{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Passos

- Análise ($r = 3\,\text{cm},\ |SA| = 5\,\text{cm}$): a tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência T, logo o ângulo STA é reto. Os pontos de tangência estão por isso na circunferência de Tales sobre SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\text{cm})$ – a circunferência k de centro S e raio $3\,\text{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – o ponto A à distância $5\,\text{cm}$ de S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – o ponto médio O do segmento SA (onde a sua mediatriz o interseta).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – a circunferência de Tales τ sobre o segmento SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – os pontos de tangência T_1, T_2 são as interseções das circunferências k e τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – as tangentes t_1, t_2 a partir do ponto A
- Discussão: o ponto A está fora da circunferência – passam por ele duas tangentes, simétricas em relação à reta SA.

Gráfico



Passo 6 de 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Quatro tangentes comuns a duas circunferências exteriores.

Enunciado: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

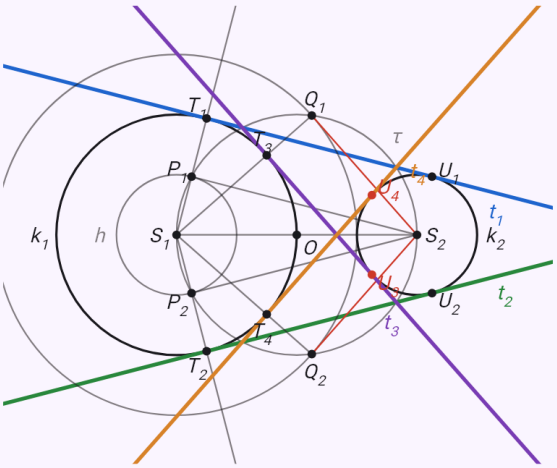
Resultado

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): deslocando uma tangente exterior paralelamente para os centros pelo raio menor, ela toca uma circunferência auxiliar centrada no centro da maior com raio $|r_1 - r_2|$ e passa pelo centro da menor. Para uma tangente interior o raio auxiliar é $r_1 + r_2$. As tangentes do centro à circunferência auxiliar obtêm-se com a circunferência de Tales sobre a linha dos centros.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – a circunferência k_1 de centro S_1 e raio $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – a circunferência k_2 de centro S_2 e raio $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – o ponto médio O do segmento S_1S_2 (onde a sua mediatriz o interseta).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – a circunferência de Tales τ sobre o segmento S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – a circunferência auxiliar h de centro S_1 e raio igual à diferença dos raios, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – as interseções P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – os pontos de tangência T_1, T_2 são as interseções de $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ com a circunferência k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – as tangentes comuns exteriores t_1, t_2 pelos pontos T_1, T_2, paralelas a S_2P_1, S_2P_2; também tocam a outra circunferência.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – a circunferência auxiliar h' de centro S_1 e raio igual à soma dos raios, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – as interseções Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – os pontos de tangência T_3, T_4 são as interseções de S_1Q_1, S_1Q_2 com a circunferência k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – as tangentes comuns interiores t_3, t_4 pelos pontos T_3, T_4, paralelas a S_2Q_1, S_2Q_2
- Discussão: as circunferências são exteriores ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – têm duas tangentes comuns exteriores e duas interiores.

Gráfico



Passo 12 de 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Uma circunferência de raio 2 cm tangente aos lados de um ângulo de 60°.

Enunciado: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Resultado

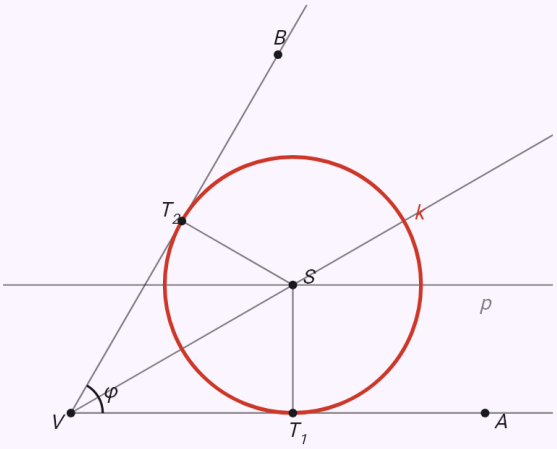
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\mathrm{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\tan\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\mathrm{cm}$$

Passos

- Análise ($\varphi = 60^\circ,\ r = 2\,\mathrm{cm}$): o centro dista r de ambos os lados – está na bissetriz e na paralela a um lado à distância r. Os pontos de tangência são os pés das perpendiculares do centro aos lados.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60^\circ$ – traçamos o ângulo $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – a bissetriz o do ângulo $\angle AVB$ (construída como em «Bissetriz»); os seus pontos estão à mesma distância de ambos os lados.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\mathrm{cm}$ – a paralela p a VA à distância r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – a interseção S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – os pontos de tangência T_1, T_2 são os pés das perpendiculares do centro S a VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\mathrm{cm})$ – a circunferência procurada k de centro S e raio $2\,\mathrm{cm}$
- Discussão: a bissetriz e a paralela intersetam-se sempre num único ponto – o problema tem uma solução.

Gráфico



Passo 6 de 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\mathrm{cm})$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Circunferências por um ponto tangentes a uma reta – duas soluções.

Enunciado: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Resultado

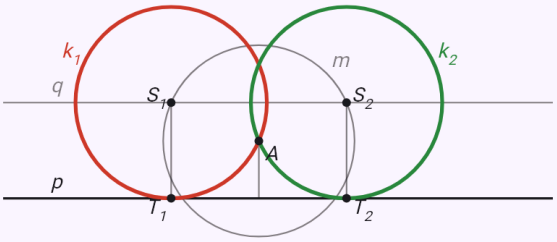
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): o centro dista r da reta p, logo está na paralela q a p à distância r do lado de A. Também dista r de A, logo está ainda na circunferência m(A; r).
- 1. p – uma reta qualquer p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – o ponto A à distância $1{,}5\,\text{cm}$ de p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – a paralela q a p à distância r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – a circunferência m de centro A e raio $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – as interseções S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – os pontos de tangência T_1, T_2 são os pés das perpendiculares do centro S_1, S_2 a p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – as circunferências procuradas k_1, k_2 de centros S_1, S_2 e raio $2{,}5\,\text{cm}$
- Discussão: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – a circunferência m interseta a paralela q em dois pontos, o problema tem duas soluções.

Gráfico



Passo 7 de 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Circunferências de raio dado por dois pontos – duas soluções simétricas em relação a AB.

Enunciado: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Resultado

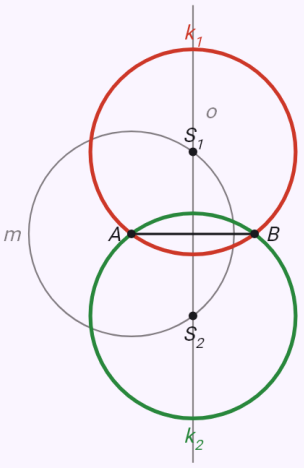
$$k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($|AB| = 6\,\text{cm},\ r = 5\,\text{cm}$): o centro dista r de A e de B – está na mediatriz de AB e na circunferência m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o segmento AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – a mediatriz o do segmento AB, construída como em «Mediatriz».
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\text{cm})$ – a circunferência m de centro A e raio $5\,\text{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – as interseções S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$ – as circunferências procuradas k_1, k_2 de centros S_1, S_2 e raio $5\,\text{cm}$
- Discussão: $|AB| = 6\,\text{cm} < 2r = 10\,\text{cm}$ – a circunferência m interseta a mediatriz em dois pontos, o problema tem duas soluções simétricas em relação a AB.

Gráfico



Passo 5 de 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

O vértice C de onde AB é visto sob 60°, à altura 3 cm – arcos e paralelas.

Enunciado: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

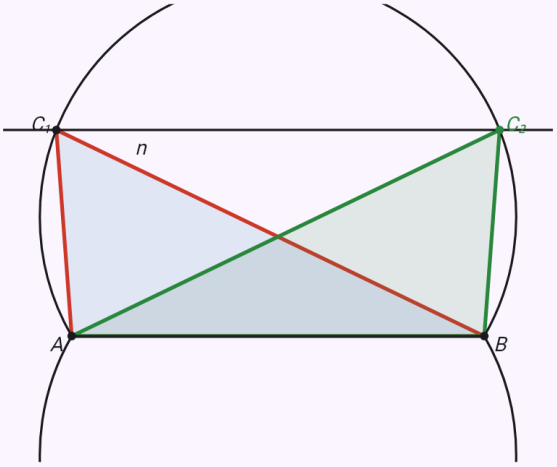
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Passos

- Análise ($|AB| = 6\,\text{cm}$): esboço do triângulo ABC terminado com as relações dadas realçadas. Cada uma das duas relações dá um lugar geométrico onde está o vértice C – C está portanto na sua interseção.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o segmento AB dado.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – os pontos de onde o segmento AB é visto sob o ângulo 60° estão em dois arcos m, m' simétricos em relação a AB (construídos como em «Arco capaz»).
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – os pontos à distância $3\,\text{cm}$ da reta AB estão em duas paralelas n, n' a ela, uma de cada lado.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – os pontos procurados são as interseções dos dois lugares.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos os vértices.
- Discussão: no semiplano acima de AB os lugares têm 2 pontos comuns – o problema tem 2 soluções (no semiplano oposto as suas imagens simétricas, congruentes).

Gráfico



Passo 5 de 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A razão |AC| : |BC| = 2 e |BC| = 3 cm – a circunferência de Apolónio.

Enunciado: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

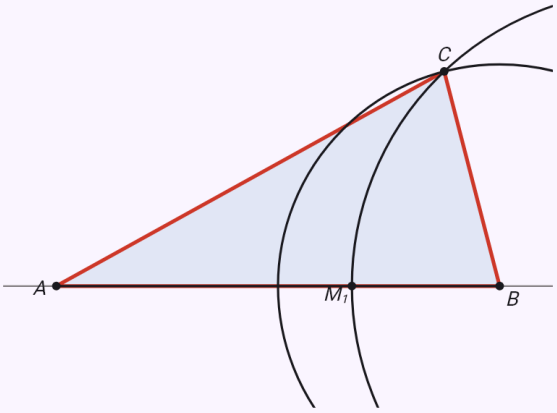
Resultado

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Passos

- Análise ($|AB| = 6\,\text{cm}$): esboço do triângulo ABC terminado com as relações dadas realçadas. Cada uma das duas relações dá um lugar geométrico onde está o vértice C – C está portanto na sua interseção.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – traçamos o segmento AB dado.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – os pontos cujas distâncias aos extremos do segmento AB estão na razão 2 estão na circunferência de Apolónio. Primeiro os pontos M_1 (dentro do segmento) e M_2 (no seu prolongamento) que dividem AB nessa razão.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – a circunferência de Apolónio m é a de Tales de diâmetro M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – os pontos à distância $3\,\text{cm}$ do ponto B estão na circunferência n de centro B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – o ponto procurado é a interseção dos dois lugares.
- 6. $\triangle ABC$ – unimos os vértices.
- Discussão: no semiplano acima de AB os lugares têm um ponto comum – o problema tem uma solução (no semiplano oposto a sua imagem simétrica, congruente).

Gráfico



Passo 6 de 6
6. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Os pontos de tangência das tangentes a partir de A – AX tangente e X na circunferência.

Enunciado: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

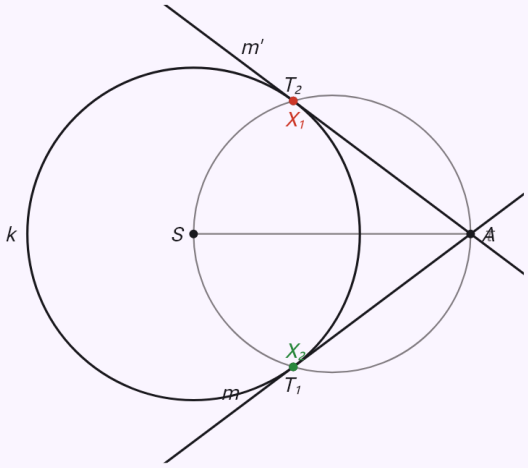
Resultado

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm}, \ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm}, \ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Passos

- Análise $(k(S;\,3\,\text{cm}), \ |SA| = 5\,\text{cm})$: esboço com a circunferência k dada, o ponto A e o ponto X procurado, as relações dadas realçadas. Cada uma das duas relações dá um lugar geométrico – X está na sua interseção.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}), \ |SA| = 5\,\text{cm}$ – traçamos a circunferência k dada e o ponto A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – a reta AX deve ser tangente a k: os pontos de tangência estão na circunferência de Tales τ de diâmetro SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1}, \ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ corta k nos pontos de tangência T_1, T_2, por onde passam as tangentes m, m'
- O ponto X deve estar na circunferência k – o lugar é a própria circunferência k, já traçada.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – os pontos procurados são as interseções dos dois lugares.
- Discussão: os lugares têm 2 pontos comuns – o problema tem 2 soluções.

Gráfico



Passo 4 de 4

$4.\ X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Os centros das circunferências de raio 1 cm tangentes à circunferência k e à reta p.

Enunciado: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

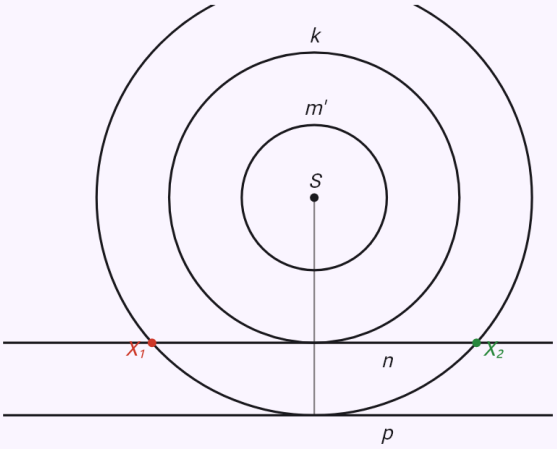
Resultado

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Passos

- Análise $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: esboço com a circunferência k dada, a reta p e o ponto X procurado, as relações dadas realçadas. Cada uma das duas relações dá um lugar geométrico – X está na sua interseção.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – traçamos a circunferência k dada e a reta p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – uma circunferência de raio $1\,\text{cm}$ é tangente exterior a k quando o seu centro está a r + ϱ de S, e interior a |r − ϱ|: os centros estão nas circunferências m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – os pontos à distância $1\,\text{cm}$ da reta p estão em duas paralelas n, n' a ela, uma de cada lado.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – os pontos procurados são as interseções dos dois lugares.
- Discussão: os lugares têm 2 pontos comuns – o problema tem 2 soluções.

Gráfico



Passo 4 de 4

$4.\ X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Os centros das circunferências de raio 1,5 cm tangentes a duas retas concorrentes – quatro soluções.

Enunciado: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

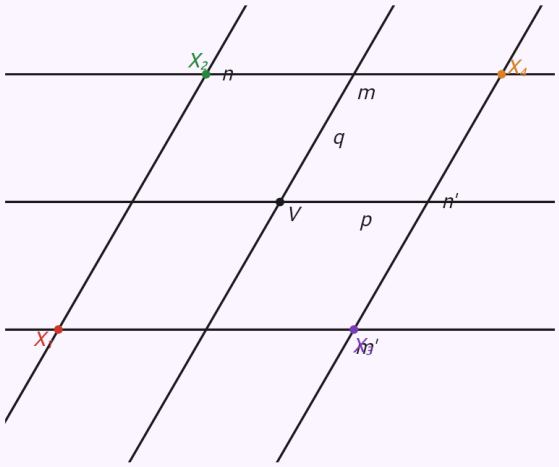
Resultado

$$X_1 : \ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3 : \ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4 : \ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($|\angle(p,q)| = 60°$): esboço com as retas p, q dadas e o ponto X procurado, as relações dadas realçadas. Cada uma das duas relações dá um lugar geométrico – X está na sua interseção.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60°$ – traçamos as retas p, q dadas, que se cortam em V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – os pontos à distância $1{,}5\,\text{cm}$ da reta p estão em duas paralelas m, m' a ela, uma de cada lado.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – os pontos à distância $1{,}5\,\text{cm}$ da reta q estão em duas paralelas n, n' a ela, uma de cada lado.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – os pontos procurados são as interseções dos dois lugares.
- Discussão: os lugares têm 4 pontos comuns – o problema tem 4 soluções.

Gráfico



Passo 4 de 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Circunferência k(S; 2 cm), AC tangente, k circunscrita a ABD, D ponto médio de BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Enunciado: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1;`

`tangent_AC=1; ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)`

Resultado

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

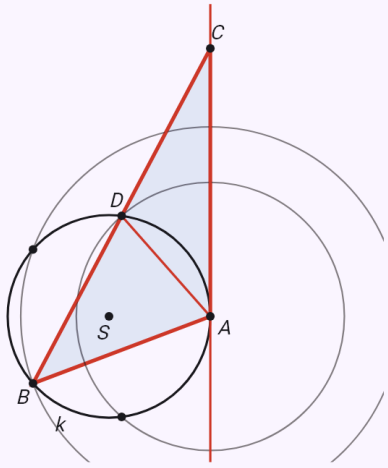
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Passos

- Análise ($k(S;\,2\,\text{cm})$): escrevemos as relações em coordenadas. O centro S na origem e o ponto A no semieixo x positivo, A = [r; 0] – qualquer solução pode ser rodada para esta posição. As incógnitas são as coordenadas dos outros pontos.
- O ponto está na circunferência k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- O ponto está na circunferência k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- O ponto está na circunferência k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- O ponto médio ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$
- A reta $\overleftrightarrow{AC}$ é tangente a k – a sua distância ao centro S é r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- A razão de comprimentos ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ é a figura procurada – os seus vértices não podem ser colineares.
- Resolvemos o sistema exatamente (sem arredondar). Tem 2 posições diferentes dos pontos (nenhum coincidente), 1 a menos de congruência.
- Verificação: substituindo a solução, todas as relações se verificam.
- Da solução: a potência do ponto C em relação a k – o quadrado da tangente é igual ao produto dos segmentos da secante: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Da solução: o ângulo de segmento da corda AD é igual ao ângulo inscrito sobre ela: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41^\circ$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – traçamos a circunferência k dada.
- 2. A; $A \in k$ – um ponto qualquer A da circunferência k.
- O comprimento $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ constrói-se como cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa dada: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – o ponto B é uma das interseções dos dois lugares (o seu número: 2).
- O comprimento $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ constrói-se como cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa dada: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – o ponto D é uma das interseções dos dois lugares (o seu número: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – o ponto C simétrico de B em relação ao centro D (simetria central).
- 6. $\triangle ABC$ – a figura terminada.
- Discussão: 2 posições dos pontos satisfazem as relações, todas congruentes (simétricas) – a menos de congruência o problema tem uma solução.

Gráfico



Passo 6 de 6
6. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

Triângulo retângulo sem circunferência: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, ângulo reto em C.

Enunciado: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

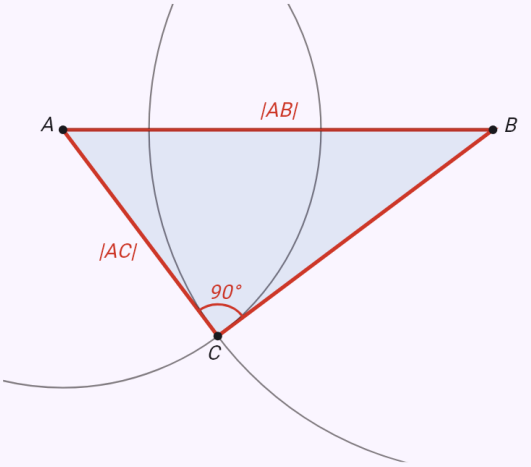
Resultado

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Passos

- Análise: escrevemos as relações em coordenadas. O ponto A na origem e o ponto B no semieixo x positivo – qualquer solução pode ser deslocada e rodada para esta posição. As incógnitas são as coordenadas dos outros pontos.
- O comprimento ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- O comprimento ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- O ângulo ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ é a figura procurada – os seus vértices não podem ser colineares.
- Resolvemos o sistema exatamente (sem arredondar). Tem 2 posições diferentes dos pontos (nenhum coincidente), 1 a menos de congruência.
- Verificação: substituindo a solução, todas as relações se verificam.
- 1. A – um ponto qualquer A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – o ponto B à distância calculada de A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – o ponto C é uma das interseções dos dois lugares (o seu número: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – a figura terminada.
- Discussão: 2 posições dos pontos satisfazem as relações, todas congruentes (simétricas) – a menos de congruência o problema tem uma solução.

Gráfico



Passo 4 de 4
4. $\triangle ABC$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção de um cubo – as faces opostas em paralelas.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

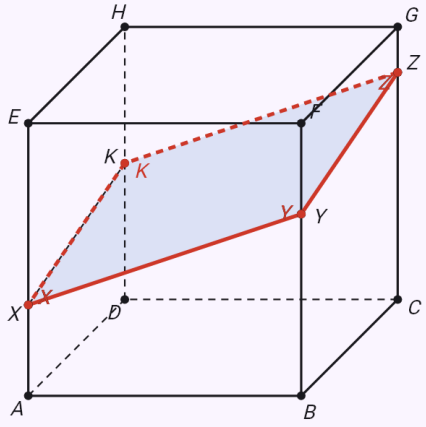
Resultado

$$XYZK$$
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$
$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado com três regras: dois pontos da secção na mesma face unem-se; faces paralelas são cortadas em segmentos paralelos; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – desenhamos o cubo $ABCDEFGH$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AE à distância $2\,\text{cm}$ do vértice A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta BF à distância $4\,\text{cm}$ do vértice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta CG à distância $5\,\text{cm}$ do vértice C
- 5. XY – os pontos X, Y estão na face $ABFE$, unimo-los.
- 6. YZ – os pontos Y, Z estão na face $BCGF$, unimo-los.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – a face $CDHG$ é paralela à face $ABFE$, por isso a secção corta-a na paralela a YX por Z; esta interseta a aresta DH em K
- 8. XK – os pontos X, K estão na face $ADHE$, unimo-los.
- 9. $XYZK$ – a secção é o quadrilátero $XYZK$

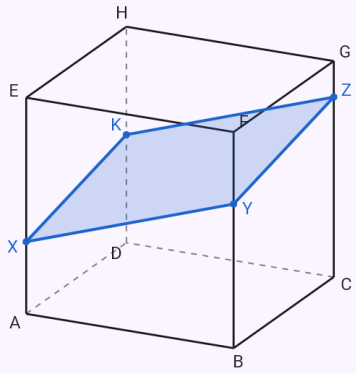
Gráfico



Passo 9 de 9
9. $XYZK$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



O hexágono regular pelos pontos médios de arestas – o ponto auxiliar T_1.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Resultado

$$XYMZKL$$

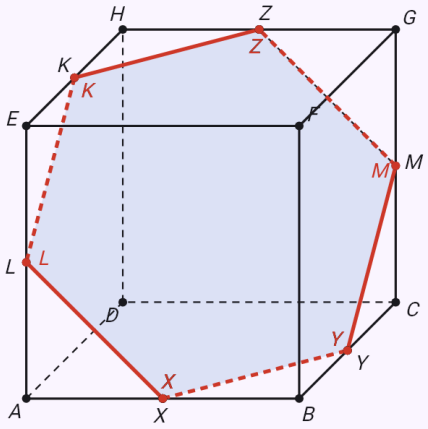
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado com três regras: dois pontos da secção na mesma face unem-se; faces paralelas são cortadas em segmentos paralelos; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – desenhamos o cubo $ABCDEFGH$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AB à distância $3\,\text{cm}$ do vértice A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta BC à distância $3\,\text{cm}$ do vértice B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta GH à distância $3\,\text{cm}$ do vértice G
- 5. XY – os pontos X, Y estão na face $ABCD$, unimo-los.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – a face $EFGH$ é paralela à face $ABCD$, por isso a secção corta-a na paralela a XY por Z; esta interseta a aresta EH em K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – prolongamos o lado ZK e a aresta EF; o seu ponto comum T_1 está no plano da face $EFGH$ e da face $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – a reta XT_1 está no plano da face $ABFE$; interseta a aresta AE em L
- 9. KL – os pontos K, L estão na face $ADHE$, unimo-los.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – a face $CDHG$ é paralela à face $ABFE$, por isso a secção corta-a na paralela a XL por Z; esta interseta a aresta CG em M
- 11. YM – os pontos Y, M estão na face $BCGF$, unimo-los.

- 12. $XYMZKL$ – a secção é o hexágono $XYMZKL$

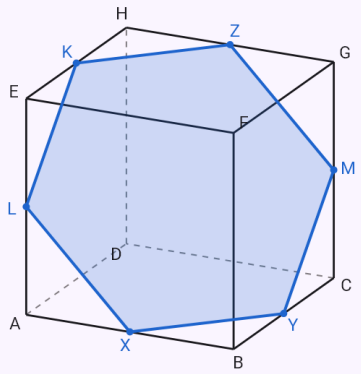
Gráfico



Passo 12 de 12
12. $XYMZKL$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



A secção de uma pirâmide pelos pontos médios de duas arestas laterais e de uma aresta da base.

Enunciado: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Resultado

$XYKZL$

$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

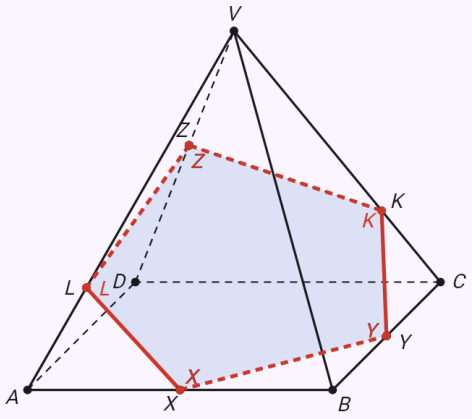
$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$

$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado: dois pontos da secção na mesma face unem-se; se um lado é paralelo a uma aresta de outra face, o plano corta essa face numa paralela a ela; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDV$; $a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – desenhamos a pirâmide quadrangular regular $ABCDV$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. X; $X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AB à distância $3\,\text{cm}$ do vértice A
- 3. Y; $Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta BC à distância $3\,\text{cm}$ do vértice B
- 4. Z; $Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta DV à distância $4\,\text{cm}$ do vértice D
- 5. XY – os pontos X, Y estão na face $ABCD$, unimo-los.
- 6. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – prolongamos o lado XY e a aresta CD; o seu ponto comum T_1 está no plano da face $ABCD$ e da face CDV
- 7. ZK; $K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – a reta ZT_1 está no plano da face CDV; interseta a aresta CV em K
- 8. YK – os pontos Y, K estão na face BCV, unimo-los.
- 9. T_2; $T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – prolongamos o lado YK e a aresta BV; o seu ponto comum T_2 está no plano da face BCV e da face ABV
- 10. XL; $L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – a reta XT_2 está no plano da face ABV; interseta a aresta AV em L
- 11. ZL – os pontos Z, L estão na face DAV, unimo-los.
- 12. $XYKZL$ – a secção é o pentágono $XYKZL$

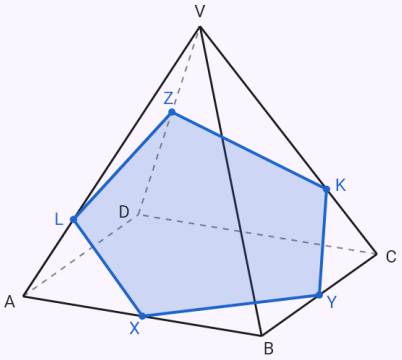
Gráfico



Passo 12 de 12
12. $XYKZL$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



Um ponto no prolongamento de uma aresta – Y a 2 cm para além do vértice B.

Enunciado: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Resultado

$XLKZM$

$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

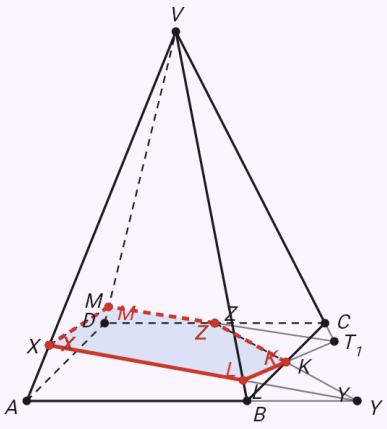
$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado: dois pontos da secção na mesma face unem-se; se um lado é paralelo a uma aresta de outra face, o plano corta essa face numa paralela a ela; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDV$; $a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – desenhamos a pirâmide quadrangular regular $ABCDV$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. X; $X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AV à distância $1\,\text{cm}$ do vértice A
- 3. Y; $Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – o ponto Y na semirreta AB à distância $6\,\text{cm}$ do vértice A, para além do vértice B – fora do sólido.
- 4. Z; $Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta CD à distância $2\,\text{cm}$ do vértice C
- 5. ZK; $ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – os pontos YZ estão no plano da face $ABCD$; a sua reta corta a face no segmento ZK
- 6. XL; $XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – os pontos XY estão no plano da face ABV; a sua reta corta a face no segmento XL
- 7. KL – os pontos K, L estão na face BCV, unimo-los.
- 8. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – prolongamos o lado KL e a aresta CV; o seu ponto comum T_1 está no plano da face BCV e da face CDV
- 9. ZM; $M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – a reta ZT_1 está no plano da face CDV; interseta a aresta DV em M
- 10. XM – os pontos X, M estão na face DAV, unimo-los.

- 11. $XLKZM$ – a secção é o pentágono $XLKZM$

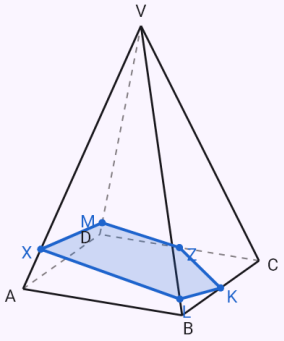
Gráfico



Passo 11 de 11
11. $XLKZM$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



Um ponto interior na diagonal do sólido – um plano vertical auxiliar.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Resultado

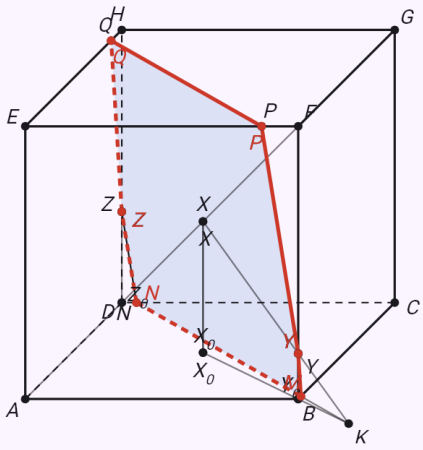
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado com três regras: dois pontos da secção na mesma face unem-se; faces paralelas são cortadas em segmentos paralelos; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – desenhamos o cubo $ABCDEFGH$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – o ponto X no segmento AG à distância $5\,\text{cm}$ do ponto A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta BF à distância $1\,\text{cm}$ do vértice B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta DH à distância $2\,\text{cm}$ do vértice D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – o ponto X está dentro do sólido, por isso usamos o plano vertical auxiliar da reta XY: projetamos os pontos na base (X_0Y_0) e as retas XY e X_0Y_0 intersetam-se em K, onde a reta XY fura o plano da base $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – o ponto X está dentro do sólido, por isso usamos o plano vertical auxiliar da reta XZ: projetamos os pontos na base (X_0Z_0) e as retas XZ e X_0Z_0 intersetam-se em L, onde a reta XZ fura o plano da base $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – os pontos KL estão no plano da face $ABCD$; a sua reta corta a face no segmento MN
- 8. ZN – os pontos Z, N estão na face $CDHG$, unimo-los.
- 9. YM – os pontos Y, M estão na face $BCGF$, unimo-los.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – a face $ABFE$ é paralela à face $CDHG$, por isso a secção corta-a na paralela a NZ por Y; esta interseta a aresta EF em P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – a face $EFGH$ é paralela à face $ABCD$, por isso a secção corta-a na paralela a MN por P; esta interseta a aresta EH em Q
- 12. ZQ – os pontos Z, Q estão na face $ADHE$, unimo-los.
- 13. $QPYMNZ$ – a secção é o hexágono $QPYMNZ$

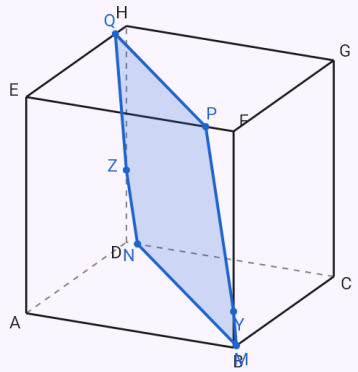
Gráfico



Passo 13 de 13
13. $QPYMNZ$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



O ponto X divide a aresta AB na razão 1 : 2.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Resultado

$XYZK$

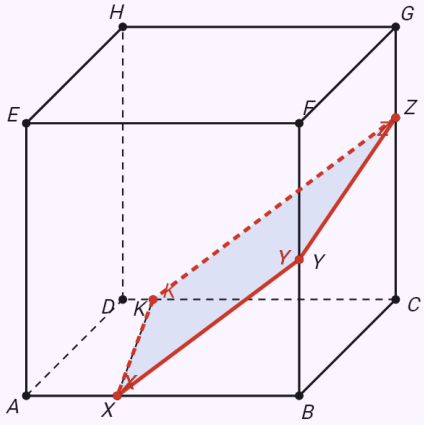
$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$

$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($a = 6\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado com três regras: dois pontos da secção na mesma face unem-se; faces paralelas são cortadas em segmentos paralelos; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – desenhamos o cubo $ABCDEFGH$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – o ponto X divide o segmento AB na razão $1 : 2$; assim fica dado o ponto X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta BF à distância $3\,\text{cm}$ do vértice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta CG à distância $4\,\text{cm}$ do vértice C
- 5. XY – os pontos X, Y estão na face $ABFE$, unimo-los.
- 6. YZ – os pontos Y, Z estão na face $BCGF$, unimo-los.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – a face $CDHG$ é paralela à face $ABFE$, por isso a secção corta-a na paralela a XY por Z; esta interseta a aresta CD em K
- 8. XK – os pontos X, K estão na face $ABCD$, unimo-los.
- 9. $XYZK$ – a secção é o quadrilátero $XYZK$

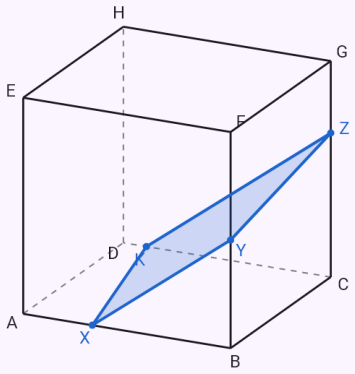
Gráfico



Passo 9 de 9
9. $XYZK$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



Secção de um prisma hexagonal regular – a base primeiro em verdadeira grandeza.

Enunciado: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

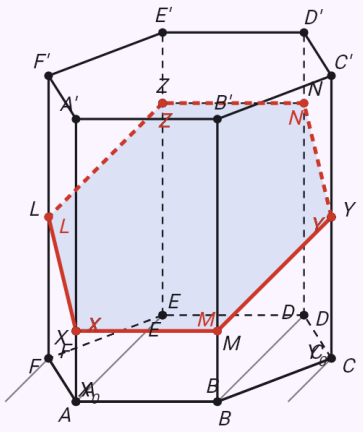
Resultado

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Passos

- Análise ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado com três regras: dois pontos da secção na mesma face unem-se; faces paralelas são cortadas em segmentos paralelos; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. $ABCDEF$; $a = 2\,\text{cm}$ – ao lado desenhamos a base $ABCDEF$ em verdadeira grandeza: o hexágono regular de lado a, com o lado AB no eixo x (pontos A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF$; $y' = \frac{1}{2}\,y$ – dos vértices C, D, E, F traçamos as perpendiculares à reta AB; levamos os seus pés ao eixo x sem alteração e a partir deles marcamos a 45° metade do comprimento da perpendicular (a profundidade) – a base $ABCDEF$ em perspetiva cavaleira.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; $a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – desenhamos o prisma hexagonal regular $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 4. X; $X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AA' à distância $1\,\text{cm}$ do vértice A
- 5. Y; $Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta CC' à distância $2\,\text{cm}$ do vértice C
- 6. Z; $Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta EE' à distância $3\,\text{cm}$ do vértice E
- 7. K; $K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – os pontos XY não estão na mesma face, por isso usamos o plano vertical auxiliar da reta XY: projetamos os pontos na base (X_0Y_0) e as retas XY e X_0Y_0 intersetam-se em K, onde a reta XY fura o plano da base $ABCDEF$
- 8. ZL; $ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – os pontos ZK estão no plano da face $EFF'E'$; a sua reta corta a face no segmento ZL
- 9. XL – os pontos X, L estão na face $FAA'F'$, unimo-los.
- 10. YM; $YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – a face $BCC'B'$ é paralela à face $EFF'E'$, por isso a secção corta-a na paralela a LZ por Y; esta interseta a aresta BB' em M
- 11. XM – os pontos X, M estão na face $ABB'A'$, unimo-los.
- 12. YN; $YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – a face $CDD'C'$ é paralela à face $FAA'F'$, por isso a secção corta-a na paralela a XL por Y; esta interseta a aresta DD' em N
- 13. ZN – os pontos Z, N estão na face $DEE'D'$, unimo-los.
- 14. $XMYNZL$ – a secção é o hexágono $XMYNZL$

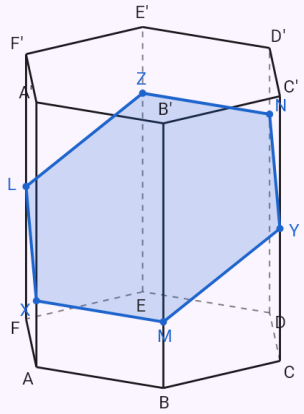
Gráfico



Passo 14 de 14
14. $XMYNZL$

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



Secção do tetraedro regular pelos pontos médios de três arestas.

Enunciado: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Resultado

XYZ

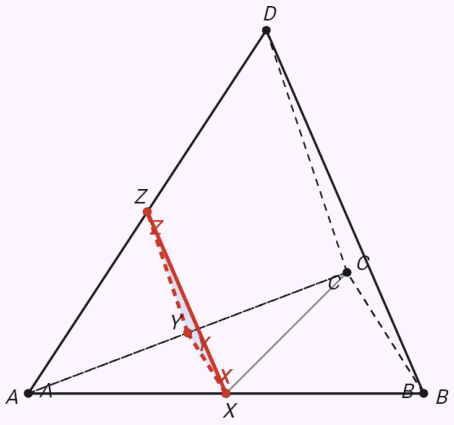
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Passos

- Análise ($a = 4\,\text{cm}$): o plano de corte é determinado pelos pontos X, Y, Z. A secção constrói-se lado a lado: dois pontos da secção na mesma face unem-se; se um lado é paralelo a uma aresta de outra face, o plano corta essa face numa paralela a ela; a reta de um lado prolongada interseta a reta de uma aresta num ponto que está nos planos das duas faces dessa aresta.
- 1. ABC; $a = 4\,\text{cm}$ – ao lado desenhamos a base ABC em verdadeira grandeza: o triângulo regular de lado a, com o lado AB no eixo x (pontos A_0, B_0, …).
- 2. ABC; $y' = \frac{1}{2}\,y$ – dos vértices C traçamos as perpendiculares à reta AB; levamos os seus pés ao eixo x sem alteração e a partir deles marcamos a 45° metade do comprimento da perpendicular (a profundidade) – a base ABC em perspetiva cavaleira.
- 3. $ABCD$; $a = 4\,\text{cm}$ – desenhamos o tetraedro regular $ABCD$ em perspetiva cavaleira (profundidade a 45°, reduzida a metade), as arestas ocultas a tracejado.
- 4. X; $X \in AB$, $|AX| = 2\,\text{cm}$ – o ponto X na aresta AB à distância $2\,\text{cm}$ do vértice A
- 5. Y; $Y \in AC$, $|AY| = 2\,\text{cm}$ – o ponto Y na aresta AC à distância $2\,\text{cm}$ do vértice A
- 6. Z; $Z \in AD$, $|AZ| = 2\,\text{cm}$ – o ponto Z na aresta AD à distância $2\,\text{cm}$ do vértice A
- 7. XY – os pontos X, Y estão na face ABC, unimo-los.
- 8. XZ – os pontos X, Z estão na face ABD, unimo-los.
- 9. YZ – os pontos Y, Z estão na face CAD, unimo-los.
- 10. XYZ – a secção é o triângulo XYZ

Gráfico

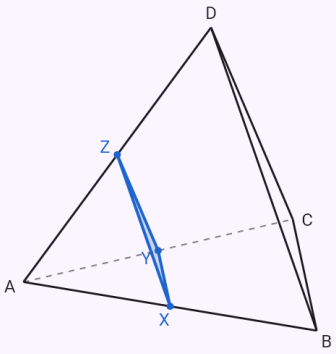


Passo 10 de 10

10. XYZ

A análise mostra um esboço da construção terminada com os elementos dados. Com as setas percorre depois a construção passo a passo – os elementos acrescentados em cada passo aparecem realçados.

A secção no espaço – rode-a com o dedo



Limitações conhecidas

- Por enquanto um triângulo (lados, ângulos, altura e mediana relativas ao lado dado, os raios r e ϱ nas combinações indicadas), quatro lugares geométricos básicos, cinco problemas de circunferências e tangentes, quadriláteros nas combinações da ajuda do formulário e secções de um cubo, de um paralelepípedo, de prismas e pirâmides regulares (base de 3 a 6 lados) e do tetraedro regular; o quadrilátero geral, alturas e medianas relativas a outros lados e outros sólidos virão depois.

- Os problemas com relações aceitam exatamente duas relações com uma das cinco figuras dadas; as relações entre vários pontos indicam-se como relações gerais.
- Relações gerais: no máximo 8 pontos e 10 relações, uma construção só a partir do catálogo de procedimentos; uma análise do tipo «triângulos semelhantes» não está automatizada.
- Apenas pelo formulário – não por palavras nem a partir de uma fotografia.

Gerado a partir da aplicação Mathtrace