Mathtrace – manual

I. Equações, inequações e expressões

Índice

I. Equações, inequações e expressões

1. Equações e inequações do 1.º grau
2. Equações do 2.º grau
3. Equações de grau superior
4. Equações fracionárias
5. Equações irracionais
6. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas
7. Módulo
8. Equações e inequações trigonométricas
9. Inequações e sistemas de inequações
10. Sistemas de equações
11. Equações e inequações com parâmetro
12. Isolar uma letra de uma fórmula
13. Cálculo com expressões
14. Divisibilidade e números primos
15. Ângulos em graus, minutos e segundos
16. Percentagens, razões e regra de três
17. Conversão de unidades
18. Lógica e conjuntos
19. Números complexos

1. Equações e inequações do 1.º grau

A aplicação transforma uma equação do 1.º grau como se faz na escola – desembaraça de parênteses, passa a incógnita para um lado e divide. Numa inequação, tem em conta a mudança de sentido ao multiplicar por um número negativo e escreve o resultado como intervalo; o gráfico mostra os dois membros como retas e marca a solução no eixo x.

Com o chip «Detalhada» (ou de forma permanente com o interruptor «Resolução detalhada de equações» no ecrã inicial) a resolução segue a forma como as equações se aprendem no ensino básico: a mesma operação em ambos os lados (/ −4x, / :2), por baixo a linha intermédia e o resultado. A incógnita passa para o lado onde o seu coeficiente fica positivo.

Exemplos

Uma equação com parênteses.

Enunciado: `3(x - 2) = 2x + 5`

Resultado

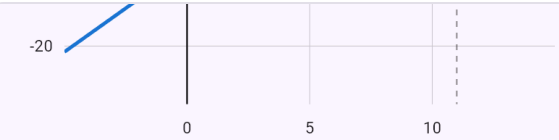
$x = 11$

Passos

- Passamos tudo para um lado: $x - 11 = 0$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $x = 11$

Gráfico





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Interseções dos gráficos:

- $(11; 27)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Uma inequação – dividir por um número negativo muda o sentido.

Enunciado: `2x - 3 < 5x + 6`

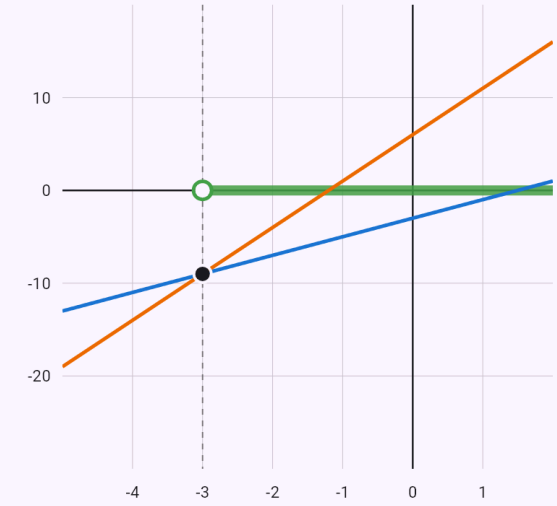
Resultado

$$x \in (-3, \infty)$$

Passos

- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $-3x < 9$
- Dividimos pelo número negativo -3; o sinal da desigualdade se inverte: $x > -3$

Gráfico



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $(-3; -9)$

Resolução detalhada – a mesma operação em ambos os lados, escrita como na escola.

Enunciado: `4x + 3 = 6x + 7` Detalhada

Resultado

$$x = -2$$

Passos

- Subtraímos $4x$ a ambos os lados

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

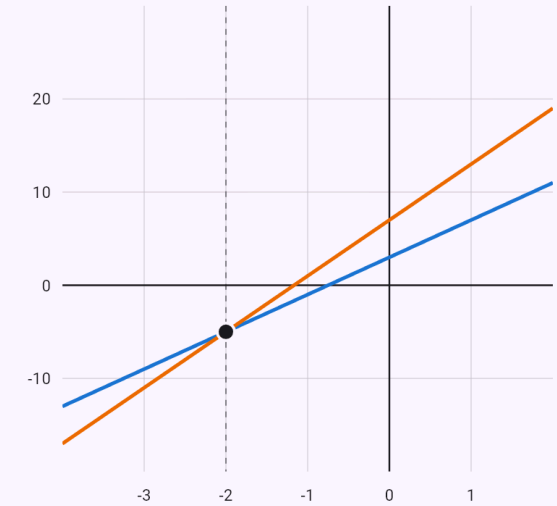
- Subtraímos 7 a ambos os lados

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Dividimos ambos os lados por 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Gráfico



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Interseções dos gráficos:

- $(-2; -5)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Frações – ambos os lados multiplicados pelo denominador comum.

Enunciado: `x/2 + x/3 = 10` Detalhada

Resultado

$$x = 12$$

Passos

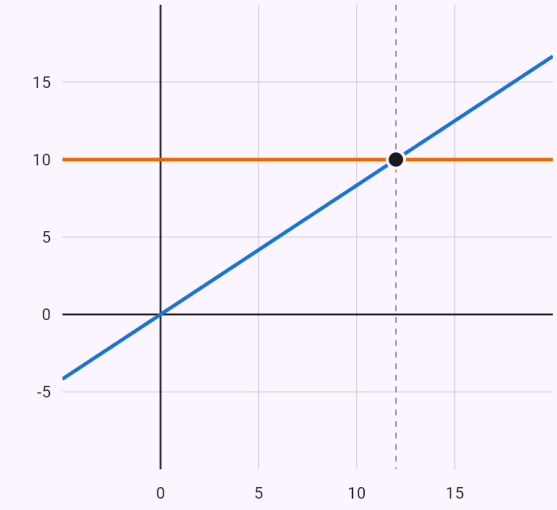
- Multiplicamos ambos os lados por 6

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 10 \quad / \cdot 6 \\ 6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} &= 6 \cdot 10 \\ 3x + 2x &= 60 \\ 5x &= 60 \end{aligned}$$

- Dividimos ambos os lados por 5

$$\begin{aligned} 5x &= 60 \quad / : 5 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{60}{5} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Gráfico



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Interseções dos gráficos:

- $(12; 10)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

2. Equações do 2.º grau

A aplicação escreve uma equação do 2.º grau na forma ax² + bx + c = 0 e resolve-a com o binómio discriminante e a fórmula resolvente; também reconhece uma raiz dupla. Se a equação não tiver solução real, di-lo, e o botão «Mostrar solução complexa» mostra as raízes complexas.

Exemplos

Duas raízes reais.

Enunciado: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Resultado

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

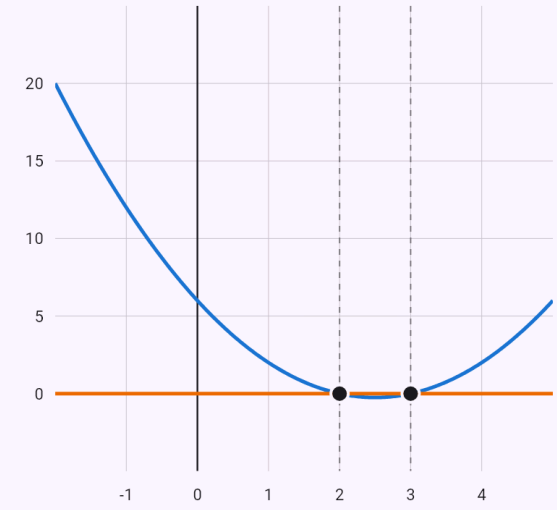
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Gráfico



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Interseções dos gráficos:

● $(2; 0)$ ● $(3; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Discriminante negativo – raízes complexas.

Enunciado: `x^2 + 2x + 5 = 0` Mostrar solução complexa

Resultado

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

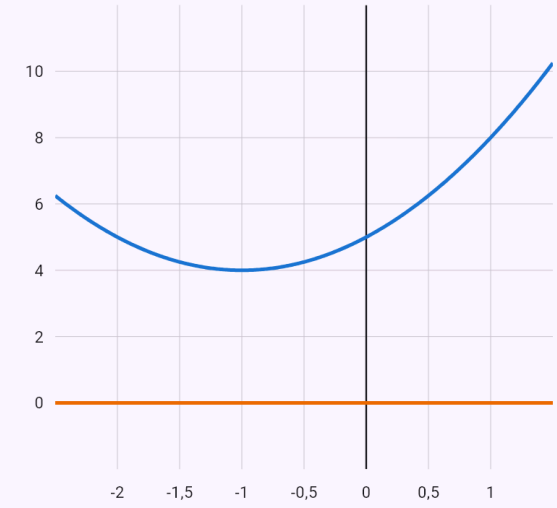
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) Σ Bissecção Σ Secante Σ Regula falsi Σ Ponto fixo

Passos

- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- O discriminante é negativo – nos números complexos:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Gráfico



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Os gráficos não se cruzam: a equação não tem solução real.

3. Equações de grau superior

Uma equação biquadrada é transformada numa do 2.º grau por mudança de variável. Uma equação geral de grau superior é fatorizada com a regra de Ruffini: as raízes são procuradas entre os divisores do termo independente e cada raiz encontrada é posta em evidência até restar uma equação do 2.º grau.

Exemplos

Uma equação biquadrada com a mudança y = x².

Enunciado: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Resultado

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

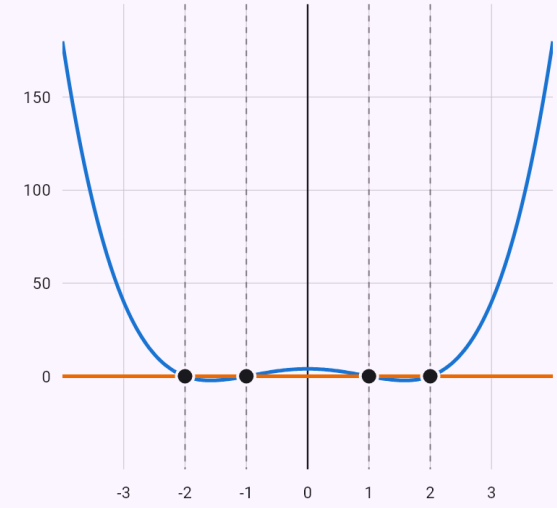
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- A substituição $u = x^2$ a transforma em uma equação do segundo grau: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Voltamos à incógnita original: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Voltamos à incógnita original: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Gráfico



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Interseções dos gráficos:

● $(-2; 0)$ ● $(-1; 0)$ ● $(1; 0)$ ● $(2; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Regra de Ruffini – raízes entre os divisores do termo independente.

Enunciado: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Resultado

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

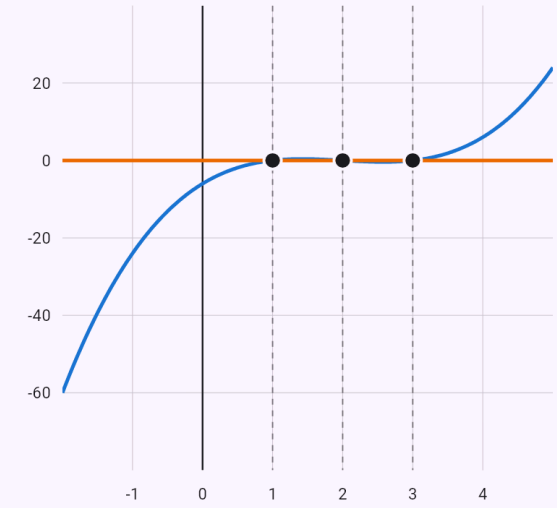
- As raízes racionais só podem ser divisores do termo independente -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz $x = 1$ e dividimos o polinômio:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Calculamos o discriminante:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

Gráfico



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Interseções dos gráficos:

● $(1;0)$ ● $(2;0)$ ● $(3;0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

4. Equações fracionárias

Numa equação com a incógnita num denominador, a aplicação começa por indicar as condições, depois multiplica pelo denominador comum e resolve. Compara as raízes com as condições e exclui as que não as verificam.

Exemplos

Condições, denominador comum, equação do 2.º grau.

Enunciado: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Resultado

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Condições: $x \neq 1$

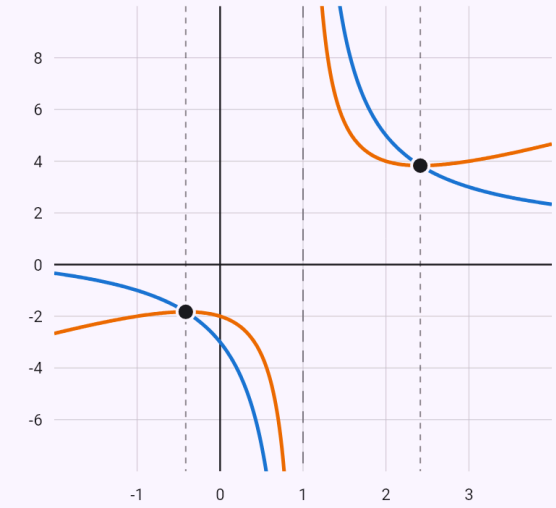
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero: $x \neq 1$
- Multiplicamos ambos os lados pelo denominador $x - 1$: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Passamos tudo para um lado: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- A raiz $x = 1 - \sqrt{2}$ satisfaz as condições.
- A raiz $x = 1 + \sqrt{2}$ satisfaz as condições.

Gráfico



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Interseções dos gráficos:

- $\left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

5. Equações irracionais

Uma equação com a incógnita sob uma raiz é resolvida isolando a raiz e elevando ao quadrado. Elevar ao quadrado pode acrescentar raízes que não verificam a equação – por isso segue-se sempre uma verificação e as raízes que falham são excluídas.

Exemplos

Elevar ao quadrado e verificar – uma das raízes não verifica a equação.

Enunciado: `sqrt(x+5) = x - 1`

Resultado

$x = 4$

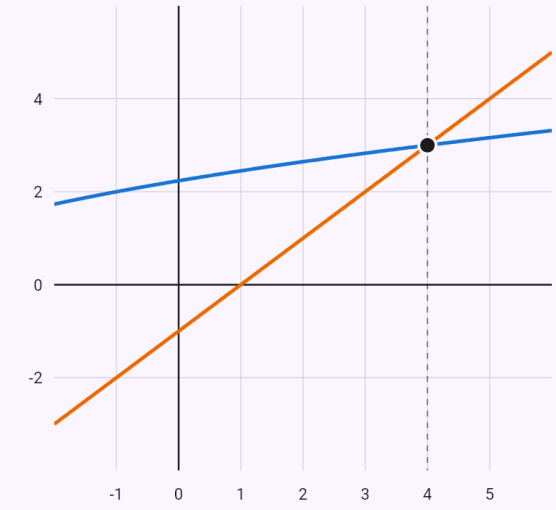
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Elevamos ambos os lados ao quadrado (não é uma transformação equivalente, por isso verificamos as raízes): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Passamos tudo para um lado: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Verificação para $x = -1$: 1.º membro = 2, 2.º membro = -2, são diferentes – a raiz não serve.
- Verificação para $x = 4$: 1.º membro = 3, 2.º membro = 3, são iguais – a raiz serve.

Gráfico



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Interseções dos gráficos:

- $(4; 3)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Limitações conhecidas

- As inequações irracionais ainda não são resolvidas.

6. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas

Uma equação exponencial é resolvida passando à mesma base, aplicando logaritmos ou por mudança de variável; uma logarítmica, juntando os logaritmos pelas suas propriedades e eliminando o logaritmo, sempre com as condições. As inequações são resolvidas pela monotonia – para uma base menor do que 1, o sentido muda. O logaritmo de um quociente cujo numerador ou denominador não pode ser negativo (uma raiz) é escrito como diferença de logaritmos, como na escola.

Equações com bases diferentes: $a^x + b^x = c^x$ com bases de dois primos ($25^x + 10^x = 4^x$) são divididas por uma potência e com $t = (5/2)^x$ tornam-se quadráticas; os logaritmos de bases diferentes passam a uma só ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logaritmos cujas bases são potências de um mesmo número ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) são convertidos para uma só base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), a equação é multiplicada e os logaritmos agrupados. Um logaritmo com a incógnita na base ($\log_x 8 = 3$) é eliminado pela definição ($x^3 = 8$) com as condições $x > 0$, $x \neq 1$. Uma equação com a incógnita na base e no expoente ($x^{(\log x)} = 100$) é resolvida aplicando logaritmos e a substituição $t = \log x$. Inequações com a substituição $t = \log(x + 1)$ e sistemas de inequações logarítmicas e exponenciais são resolvidos como inequações isoladas – pela monotonia.

Equações e inequações com funções hiperbólicas são reescritas pela definição ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) como exponenciais e resolvidas pela substituição $t = e^x$; $\operatorname{arsinh} x = c$ pela função inversa ($x = \sinh c$).

Exemplos

A mudança de variável t = 2ˣ.

Enunciado: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Resultado

$$x = 2$$

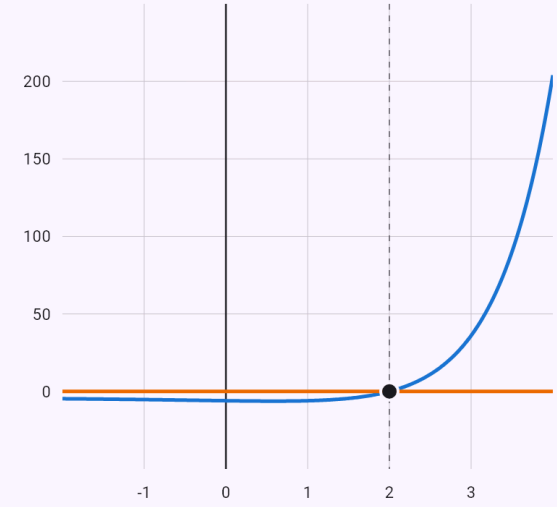
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Fazemos a substituição $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- A equação $2^x = -1$ não tem solução real.
- Voltamos à incógnita original: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Gráfico



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Interseções dos gráficos:

- $(2; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Juntar logaritmos, condições.

Enunciado: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Resultado

$$x = 3$$

Condições: $x > 1$

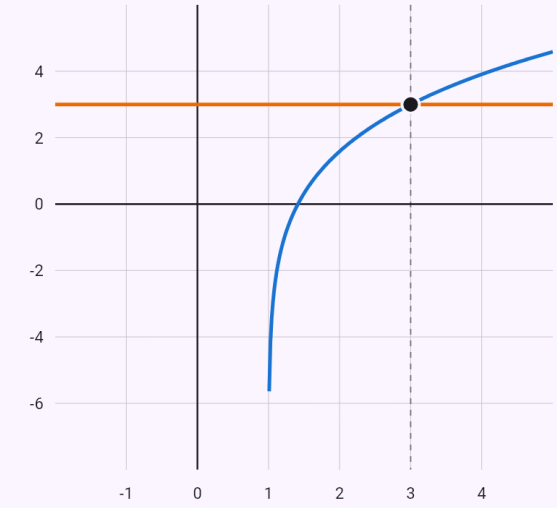
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Domínio – condições: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Juntamos os logaritmos pelas suas propriedades: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Eliminamos o logaritmo: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Passamos tudo para um lado: $x^2 - 9 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 6}{2}$
- A raiz $x = -3$ não satisfaz a condição $x > 1$, portanto não é solução.
- A raiz $x = 3$ satisfaz as condições.

Gráfico



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Interseções dos gráficos:

- $(3; 3)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Bases diferentes: dividimos por 4^d e substituímos $t = (5/2)^d$.

Enunciado: `25^d + 10^d = 4^d`

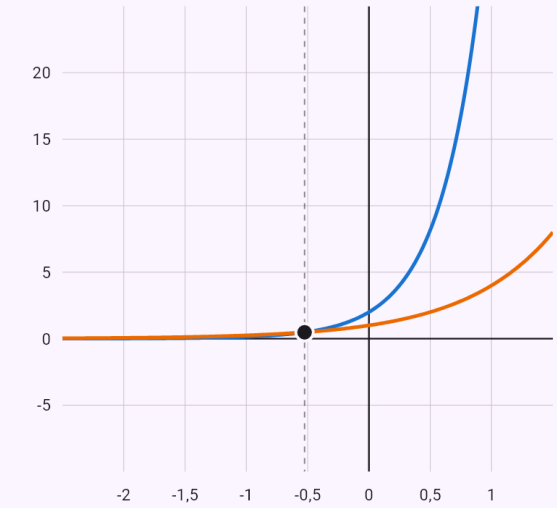
Resultado

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Passos

- Dividimos a equação pela expressão positiva 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Fazemos a substituição $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- A equação $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ não tem solução real.
- Voltamos à incógnita original
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Gráfico



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Interseções dos gráficos:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de d.

Base menor do que 1 – o sentido da desigualdade muda.

Enunciado: `(1/2)^x > 8`

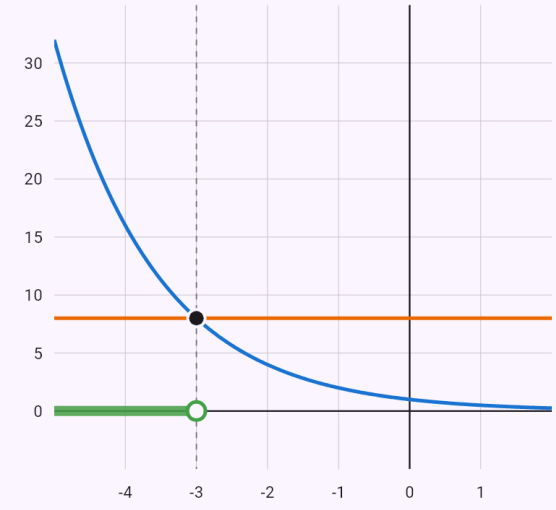
Resultado

$$x \in (-\infty,\ -3)$$

Passos

- Escrevemos ambos os lados como potências da mesma base: $2^{-x} > 2^3$
- A função exponencial de base 2 é crescente – os expoentes satisfazem a desigualdade com o mesmo sinal: $-x > 3$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $-x > 3$
- Dividimos pelo número negativo -1; o sinal da desigualdade se inverte: $x < -3$
- A solução desta inequação é $x \in (-\infty,\ -3)$

Gráfico



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $(-3; 8)$

Tangente hiperbólica pela definição – substituição t = e²ˣ.

Enunciado: `tanh x = 1/2`

Resultado

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Substituímos as definições

$$\tanh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Fazemos a substituição $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Resolvemos: $t = 3$
- Voltamos à incógnita original: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

A incógnita na base – pela definição; a raiz −1 não satisfaz as condições.

Enunciado: `log_x (2x+3) = 2`

Resultado

$$x = 3$$

Condições: $x > 0,\ x \neq 1$

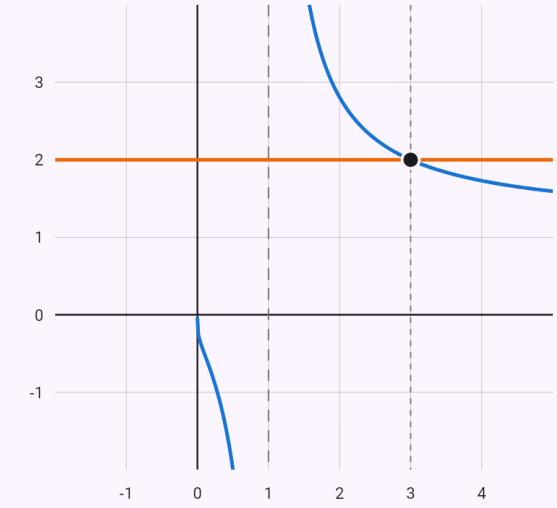
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Domínio – condições: $x > 0,\ x \neq 1$
- Eliminamos o logaritmo: $x^2 = 2x + 3$
- Passamos tudo para um lado: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$
- A raiz $x = -1$ não satisfaz a condição $x > 0,\ x \neq 1$, portanto não é solução.
- A raiz $x = 3$ satisfaz as condições.

Gráfico



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Interseções dos gráficos:

- $(3; 2)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

A incógnita na base e no expoente – aplicamos logaritmos, substituição t = log x.

Enunciado: `x^(log x) = 100`

Resultado

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Condições: $x > 0$

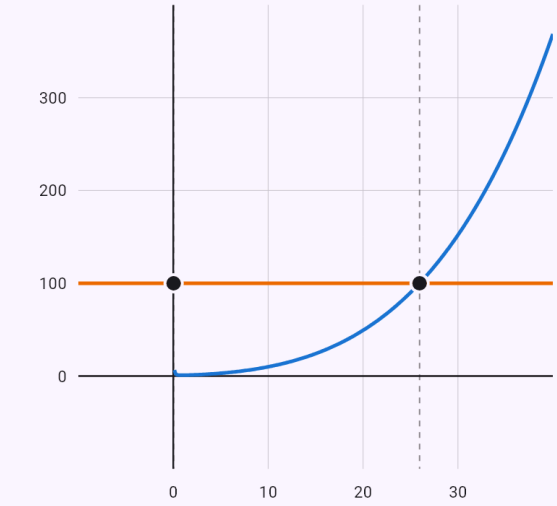
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Aplicamos o logaritmo a ambos os lados:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Domínio – condições: $x > 0$
- Fazemos a substituição $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Calculamos o discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:
  $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Voltamos à incógnita original:
  $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Voltamos à incógnita original:
  $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- A raiz $x = 10^{-\sqrt{2}}$ satisfaz as condições.
- A raiz $x = 10^{\sqrt{2}}$ satisfaz as condições.

Gráfico



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Interseções dos gráficos:

- $\left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Logaritmo de um quociente com raiz – como diferença de logaritmos.

Enunciado: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Resultado

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

Condições: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

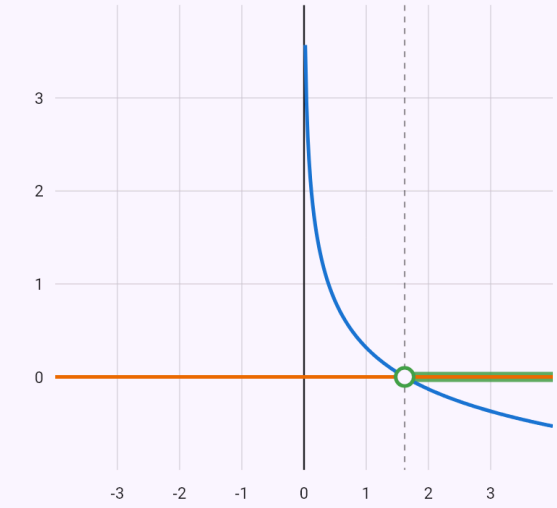
Passos

- Uma parte do quociente não pode ser negativa, então o quociente é positivo exatamente quando ambas são – por isso escrevemos o logaritmo do quociente como diferença de logaritmos e passamos o subtraendo para o outro lado: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Domínio – condições: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- O logaritmo de base 3 é crescente – eliminamo-lo e o sinal da desigualdade mantém-se: $\sqrt{x+1} < x$
- Passamos tudo para um lado: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Domínio – condições: $x \geq -1$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	×	+	−

- A solução desta inequação é $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

Gráfico



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Limitações conhecidas

- Logaritmos de bases diferentes que não são potências de um mesmo número ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$) são resolvidos apenas numericamente.
- Equações hiperbólicas que levam a uma equação do 4.º grau em e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$) só são resolvidas numericamente; inequações com funções hiperbólicas inversas ainda não são suportadas.

7. Módulo

A aplicação resolve equações e inequações com módulos de duas maneiras, que escolhe com um chip: «Pela definição» – um atalho que desdobra |a| = b ou |a| < b – e «Método dos zeros» – dividindo a reta numérica em intervalos em que cada módulo tem sinal fixo. Sem escolha, ela própria escolhe a mais adequada.

Módulos encaixados (||x| − 2| = 1) resolvem-se da mesma forma: pela definição passo a passo de fora para dentro, pelo método dos zeros de dentro para fora – primeiro os zeros dos módulos interiores e depois, em cada intervalo, o módulo que resta.

Uma inequação |f| < |g| (apenas um módulo de cada lado) também pode ser resolvida com o chip «Elevando ao quadrado»: ambos os lados são não negativos, por isso é elevada ao quadrado e resolvida como quadrática. Uma expressão com módulos sozinha (|x − 1| + |x + 2|) é simplificada por troços – zeros, tabela de sinais e, em cada intervalo, a expressão sem módulos. Depois de uma vírgula pode indicar-se um intervalo (|x| − 2, x < 0): a expressão é então simplificada só nele.

Exemplos

Um módulo – desdobrado pela definição.

Enunciado: `|2x - 1| = 5`

Resultado

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

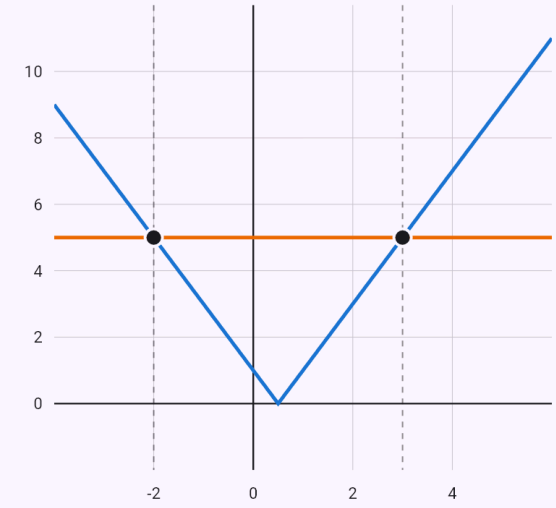
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Há um só valor absoluto e um número do outro lado – basta aplicar a definição.
- Pela definição, $|2x - 1| = 5$ vale se e só se $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5$
- Resolvemos: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Resolvemos: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Gráfico



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Interseções dos gráficos:

● $(-2; 5)$ ● $(3; 5)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Dois módulos – o método dos zeros.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Resultado

$$x \in (-3,\ 2)$$

Passos

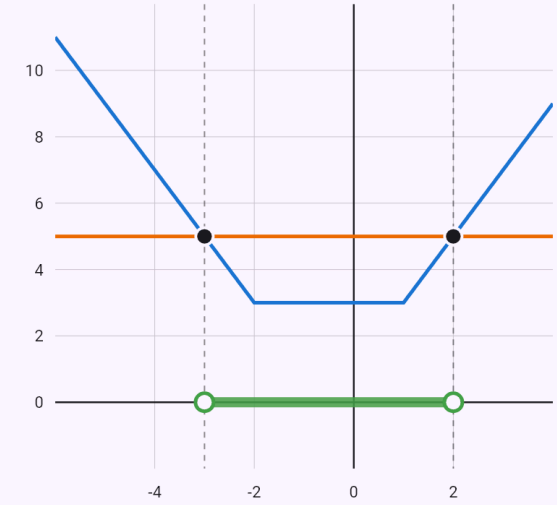
- Eliminamos os valores absolutos pelo método dos zeros: eles dividem a reta numérica em intervalos e em cada um as expressões de dentro mantêm o sinal.
- Zeros das expressões dentro dos valores absolutos: $x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1, \quad x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = -2$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty,\ -2)$	$[-2,\ 1)$	$[1,\ \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- No intervalo $(-\infty,\ -2)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Resolvemos: $-2x - 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $-2x < 6$
- Dividimos pelo número negativo -2; o sinal da desigualdade se inverte: $x > -3$
- A solução desta inequação é $x \in (-3,\ \infty)$
- Interseção com o intervalo $(-\infty,\ -2)$: $x \in (-3,\ -2)$
- No intervalo $[-2,\ 1)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- A incógnita desapareceu e ficou a afirmação verdadeira $3 < 5$ – todo o intervalo $[-2,\ 1)$ é solução.
- No intervalo $[1,\ \infty)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Resolvemos: $2x + 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $2x < 4$
- Dividimos pelo número positivo 2; o sinal da desigualdade se mantém: $x < 2$

- A solução desta inequação é $x \in (-\infty,\ 2)$
- Interseção com o intervalo $[1,\ \infty)$: $x \in [1,\ 2)$
- A solução é a união dos resultados: $x \in (-3,\ 2)$

Gráfico



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

● $(-3; 5)$ ● $(2; 5)$

Módulo encaixado – pela definição, de fora para dentro.

Enunciado: `||x| - 2| = 1`

Resultado

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

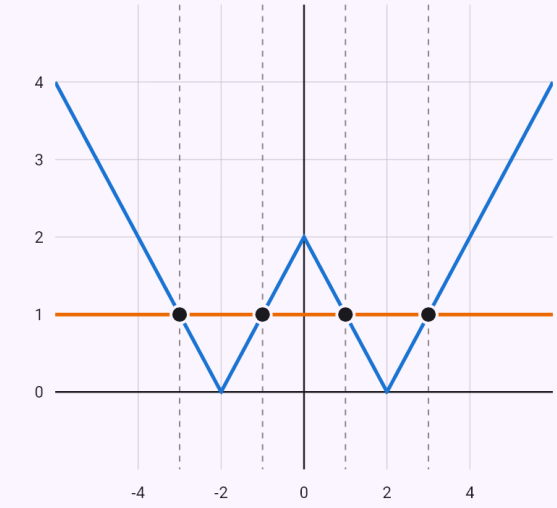
Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

- Há um só valor absoluto e um número do outro lado – basta aplicar a definição.
- Pela definição, $||x| - 2| = 1$ vale se e só se $|x| - 2 = 1$ ou $|x| - 2 = -1$
- Isolamos o valor absoluto: $|x| = 3$
- Pela definição, $|x| = 3$ vale se e só se $x = 3$ ou $x = -3$
- Isolamos o valor absoluto: $|x| = 1$
- Pela definição, $|x| = 1$ vale se e só se $x = 1$ ou $x = -1$

Gráfico



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Interseções dos gráficos:

● $(-3; 1)$ ● $(-1; 1)$ ● $(1; 1)$ ● $(3; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Módulos em ambos os lados – elevar ao quadrado.

Enunciado: `|x - 1| < |2x + 3|` Elevando ao quadrado

Resultado

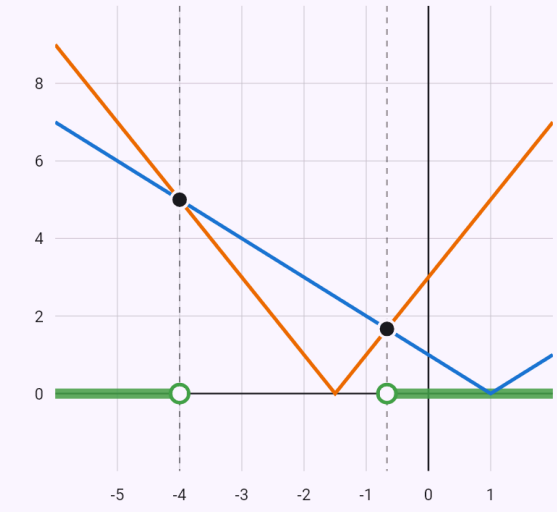
$$x \in (-\infty, -4) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Passos

- Em ambos os lados há apenas um valor absoluto – ambos são não negativos, por isso podemos elevar a inequação ao quadrado (é uma transformação equivalente).
- Elevamos ambos os lados ao quadrado: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Passamos tudo para um lado: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Fatoramos: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Gráfico



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $(-4; 5)$
- $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Expressão com módulos – por troços nos intervalos.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2|`

Resultado

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty, -2) \\ 3, & x \in [-2, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Passos

- Eliminamos os valores absolutos pelo método dos zeros: eles dividem a reta numérica em intervalos e em cada um as expressões de dentro mantêm o sinal.
- Zeros das expressões dentro dos valores absolutos: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$[-2, 1)$	$[1, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- No intervalo $(-\infty, -2)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- No intervalo $[-2, 1)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- No intervalo $[1, \infty)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Expressão com módulos num intervalo dado – por troços só aí.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Resultado

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Passos

- Simplificamos a expressão apenas para valores do intervalo $(-1, \infty)$: retiramos os módulos de acordo com o sinal das expressões dentro deles.
- Zeros das expressões dentro dos valores absolutos: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-1, 1)$	$[1, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- No intervalo $(-1, 1)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- No intervalo $[1, \infty)$ eliminamos os valores absolutos pelos sinais: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Limitações conhecidas

- Elevar ao quadrado só é oferecido numa inequação com um único módulo de cada lado.

8. Equações e inequações trigonométricas

O aplicativo reduz a equação a equações básicas como sin x = a e as resolve no círculo trigonométrico: encontra os ângulos de uma volta e soma múltiplos do período (x = π/6 + 2kπ, k ∈ ℤ). O círculo aparece desenhado na resolução.

Dá preferência às fórmulas conhecidas – arco duplo e metade, sin²x + cos²x = 1, soma em produto –, depois à fatoração, à substituição t = sin x, à divisão de uma equação homogênea por $\cos^n x$ e ao ângulo auxiliar em a·sin x + b·cos x = c. O resultado ainda é verificado numericamente em um período inteiro.

Uma incógnita com letra latina (x, t) está em radianos, com letra grega (alpha, β, …) em graus – assim como uma entrada com o sinal ° (sin(x + 30°)). Para obter as raízes em um intervalo, escreva-o depois de uma vírgula ou na linha seguinte.

Uma inequação é resolvida por um arco do círculo trigonométrico, uma mais complexa pelos zeros em um período; o resultado são intervalos com o período.

Exemplos

Dois ramos de soluções, os ângulos no círculo trigonométrico.

Enunciado: `sin x = 1/2`

Resultado

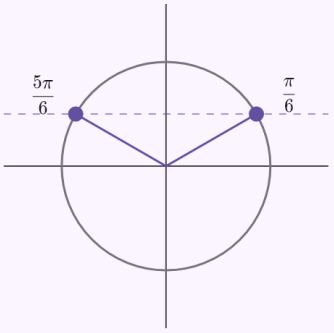
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

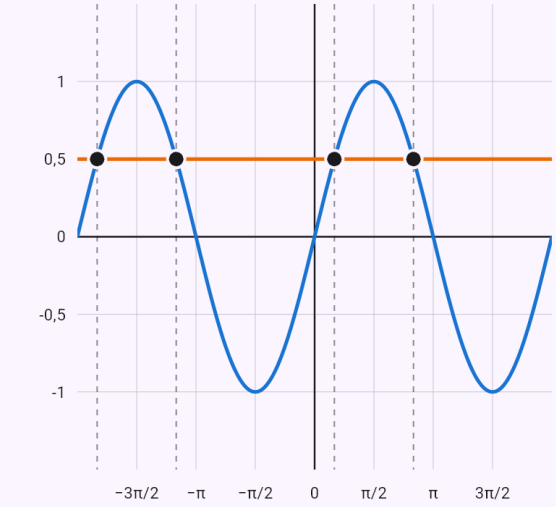
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passos

- Equação básica $\sin x = \frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfico



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Interseções dos gráficos:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

A substituição t = sin x e uma equação do segundo grau.

Enunciado: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

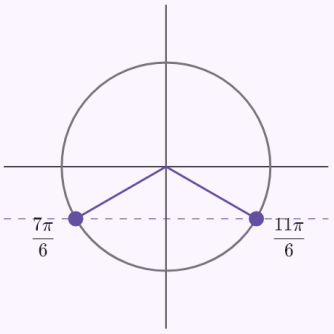
$$k \in \mathbb{Z}$$

Não há forma exata – de onde vem o "≈", mostra-o um método numérico:

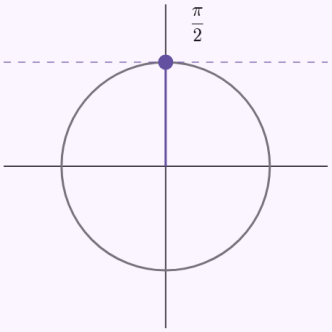
Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

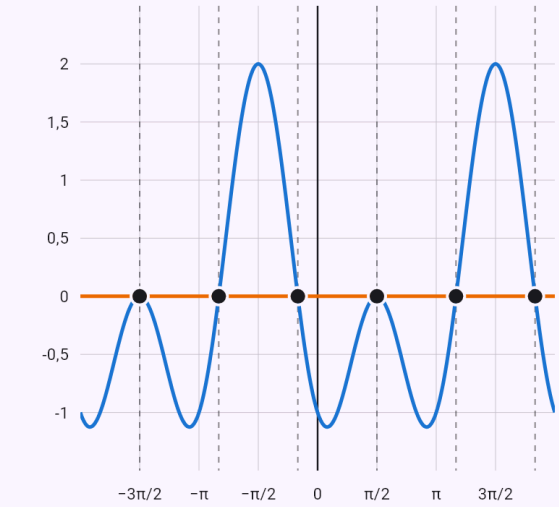
- Fazemos a substituição $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Equação básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Equação básica $\sin x = 1$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{2}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Gráfico



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Interseções dos gráficos:

- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

A fórmula de sin 2x e a fatoração.

Enunciado: `sin 2x = cos x`

Resultado

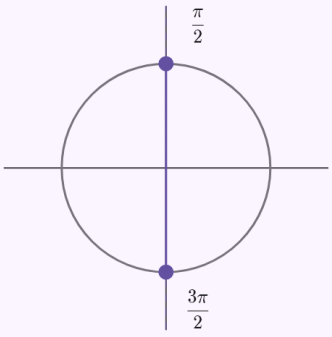
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Não há forma exata – de onde vem o "≈", mostra-o um método numérico:

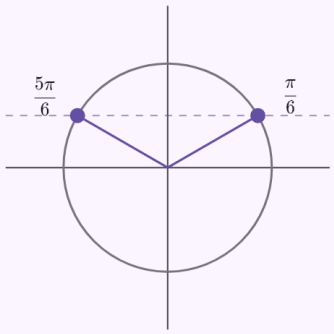
Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

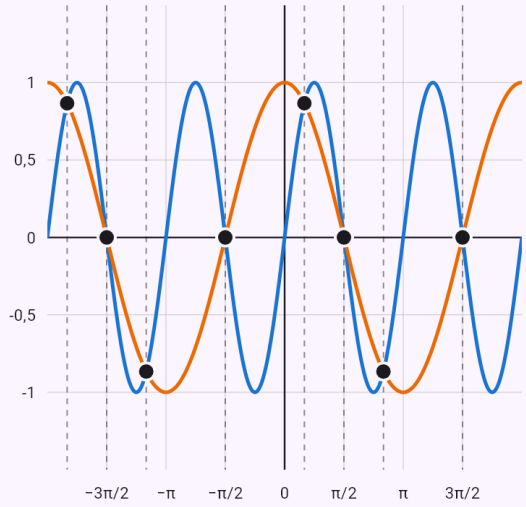
- Passamos tudo para um lado: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Usamos a fórmula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Fatoramos: um produto é zero se e somente se um dos fatores for zero: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Resolvemos a equação $\cos x = 0$
- Equação básica $\cos x = 0$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Resolvemos a equação $2\sin x - 1 = 0$
- Isolamos a função trigonométrica: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Equação básica $\sin x = \frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfico



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Interseções dos gráficos:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

O ângulo auxiliar: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

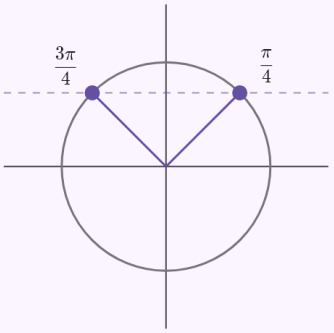
Enunciado: `sin x + cos x = 1`

Resultado

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passos

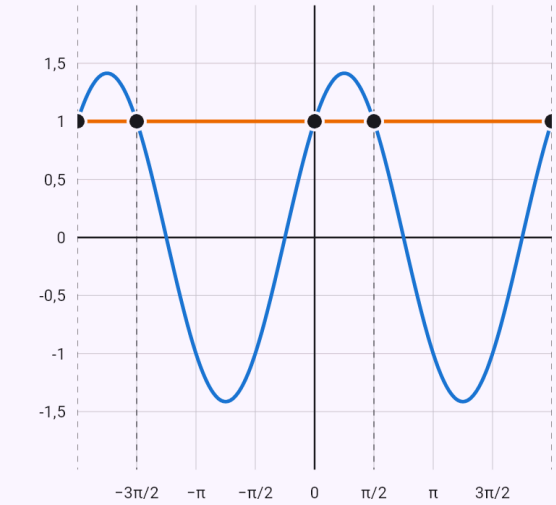
- Passamos tudo para um lado: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Introduzimos um ângulo auxiliar φ:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, onde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Isolamos a função trigonométrica: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Equação básica $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Isolamos a incógnita

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Gráfico



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Interseções dos gráficos:

- $(-2\pi; 1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$
- $(0; 1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Uma letra grega – o resultado em graus.

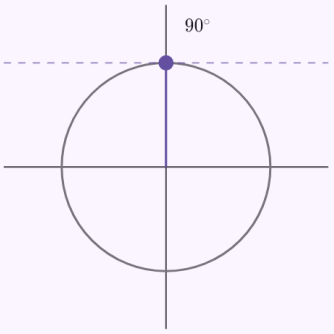
Enunciado: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Resultado

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

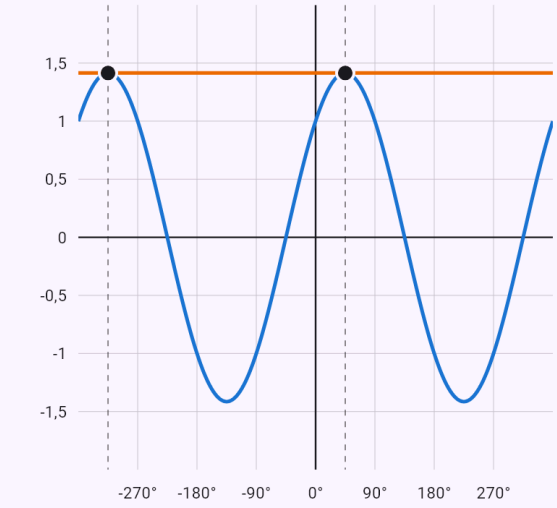
Passos

- Passamos tudo para um lado: $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Introduzimos um ângulo auxiliar φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, onde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Isolamos a função trigonométrica: $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Equação básica $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são 90°; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Isolamos a incógnita
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Gráfico



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Interseções dos gráficos:

- $(-315^\circ; \sqrt{2})$
- $(45^\circ; \sqrt{2})$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Só as raízes no intervalo dado.

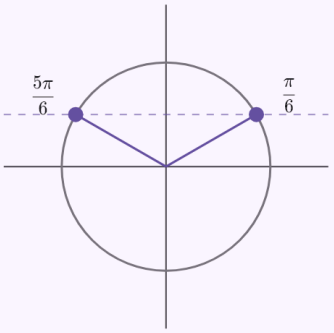
Enunciado: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

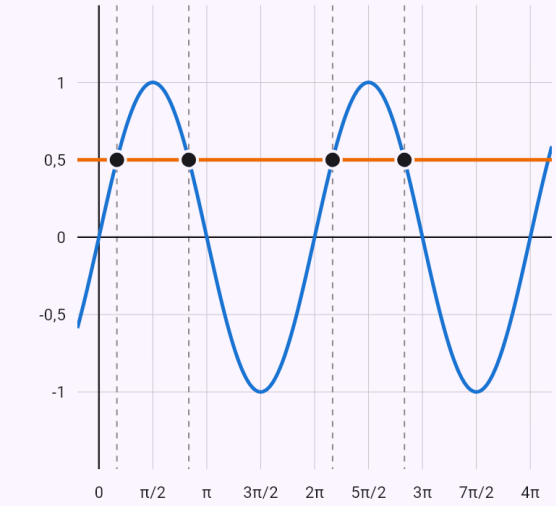
Passos

- Equação básica $\sin x = \frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- As soluções no intervalo $x \in [0,\, 4\pi)$
  $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{13\pi}{6}$, $x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Gráfico



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Interseções dos gráficos:

- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

Um arco do círculo trigonométrico, um intervalo em torno de zero.

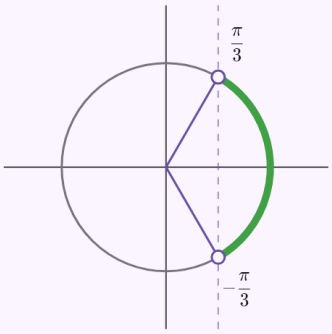
Enunciado: `cos x > 1/2`

Resultado

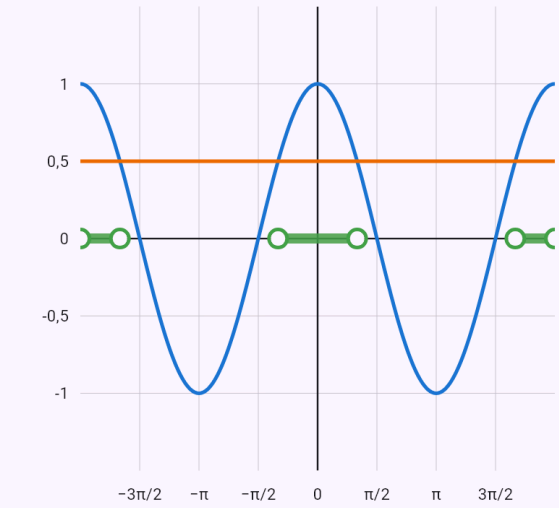
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passos

- Inequação básica $\cos x > \frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, ela vale no arco destacado; com o período: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Gráfico



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Os zeros em um período e o sinal entre eles.

Enunciado: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

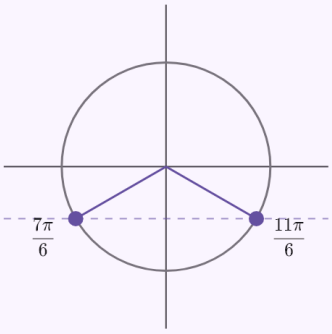
Resultado

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

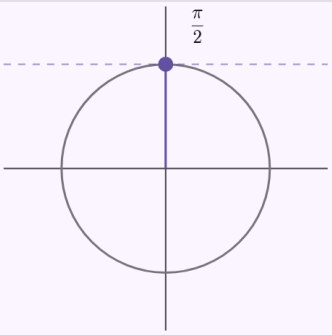
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passos

- Primeiro resolvemos a equação $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Fazemos a substituição $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Equação básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

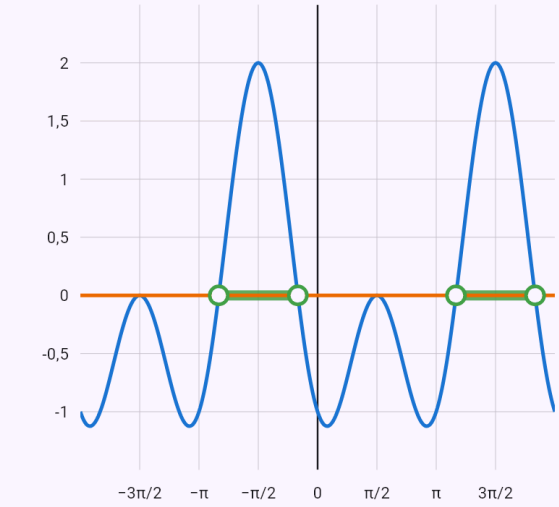


- Equação básica $\sin x = 1$: no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são $\frac{\pi}{2}$; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- A função tem período 2π. Seus zeros (e os pontos onde não está definida) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ dividem um período em intervalos; pelo sinal neles, a inequação vale para: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Gráfico



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$

$y = 0$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Limitações conhecidas

- As equações com a incógnita também fora da função trigonométrica (x = cos x) resolvem-se só numericamente – pelo método de Newton com a tabela de iterações (ver Métodos numéricos), sem o período.
- Inequações trigonométricas duplas (−1/2 < sin x < 1/2) e funções trigonométricas dentro de um módulo ainda não são suportadas.

9. Inequações e sistemas de inequações

As inequações do 2.º grau e fracionárias são resolvidas com os zeros e um quadro de sinais. Uma inequação dupla e um sistema de inequações são resolvidos como a interseção das soluções de cada inequação, mostrada na reta numérica. Um sistema de inequações com duas incógnitas é resolvido como uma região do plano, colorida no gráfico.

Num sistema de inequações com duas incógnitas a aplicação indica também os vértices da região – as interseções das fronteiras com coordenadas exatas. Um sistema de uma equação e inequações com uma incógnita é resolvido resolvendo a equação e substituindo as suas raízes nas inequações; com duas incógnitas a solução é a parte da curva da equação que está na região das inequações – destacada no gráfico, com os extremos calculados exatamente. Um sistema também pode ser escrito numa linha, separado por ponto e vírgula ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Um sistema de duas ou mais equações com inequações é resolvido como sistema de equações e as suas soluções são substituídas nas inequações; com duas incógnitas o gráfico mostra as curvas na região das inequações e as interseções que não as satisfazem como círculos vazios.

Exemplos

Uma inequação do 2.º grau – zeros e sinais.

Enunciado: `x^2 - x - 6 > 0`

Resultado

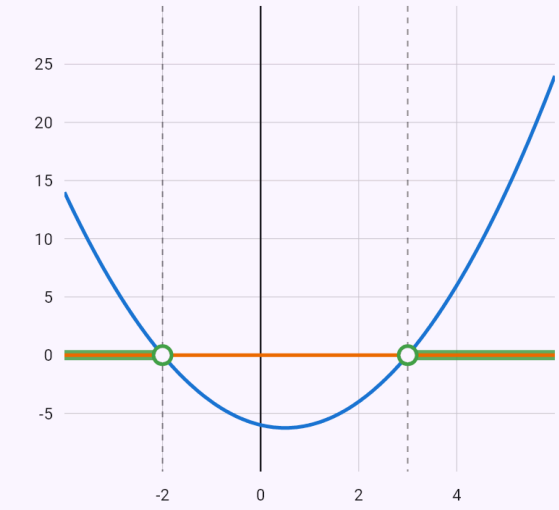
$$x \in (-\infty,\ -2) \cup (3,\ \infty)$$

Passos

- Fatoramos: $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(x - 3)(x + 2)$	$+$	$-$	$+$

Gráfico



$y = x^2 - x - 6$

$y = 0$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

● $(-2; 0)$ ● $(3; 0)$

Uma inequação fracionária – o denominador não pode ser zero.

Enunciado: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Resultado

$$x \in [-1,\ 3)$$

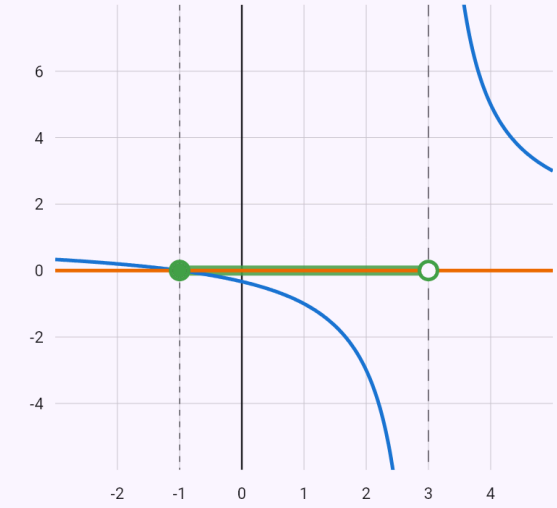
Condições: $x \neq 3$

Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero: $x \neq 3$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 3)$	$(3,\ \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Gráfico



$y = \dfrac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $(-1; 0)$

Uma inequação dupla.

Enunciado: `-1 <= 2x + 1 < 5`

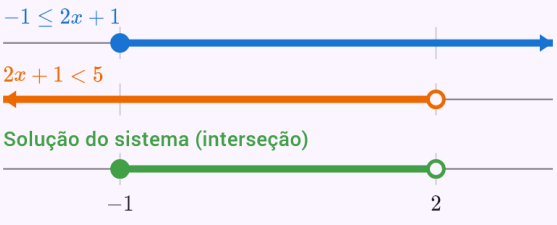
Resultado

$$x \in [-1,\ 2)$$

Passos

- Inequação 1: $-1 \leq 2x + 1$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $-2x \leq 2$
- Dividimos pelo número negativo -2; o sinal da desigualdade se inverte: $x \geq -1$
- A solução desta inequação é $x \in [-1,\ \infty)$
- Inequação 2: $2x + 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $2x < 4$
- Dividimos pelo número positivo 2; o sinal da desigualdade se mantém: $x < 2$
- A solução desta inequação é $x \in (-\infty,\ 2)$
- A solução do sistema é a interseção das soluções das inequações: $x \in [-1,\ 2)$

Gráfico



Cada inequação tem a sua linha na reta numérica; a interseção está a verde. Um ponto cheio pertence à solução, um vazio não.

Sistema de inequações com duas incógnitas – uma região do plano e os seus vértices.

Enunciado: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

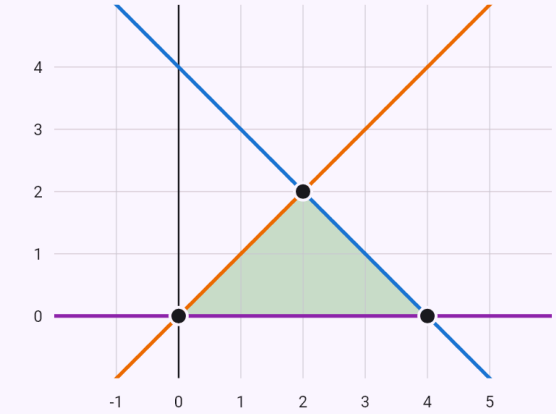
Resultado

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in [0,\, \infty)$$

Passos

- Inequação 1: $x + y \leq 4$
- A fronteira é a curva $x + y = 4$: traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- Inequação 2: $x - y \geq 0$
- A fronteira é a curva $x - y = 0$: traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- Inequação 3: $y \geq 0$
- A fronteira é a curva $y = 0$: traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- A solução do sistema é a parte comum dessas regiões, sombreada no gráfico.
- Vértices da região (interseções das fronteiras): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Gráfico



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0,\, \infty)$

A solução é a região sombreada. Uma fronteira contínua pertence a ela, uma tracejada não.

Vértices da região:

- $(0; 0)$
- $(2; 2)$
- $(4; 0)$

Uma inequação nos inteiros – listam-se os inteiros do intervalo.

Enunciado: `x^2 < 10`

Resultado

$$x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

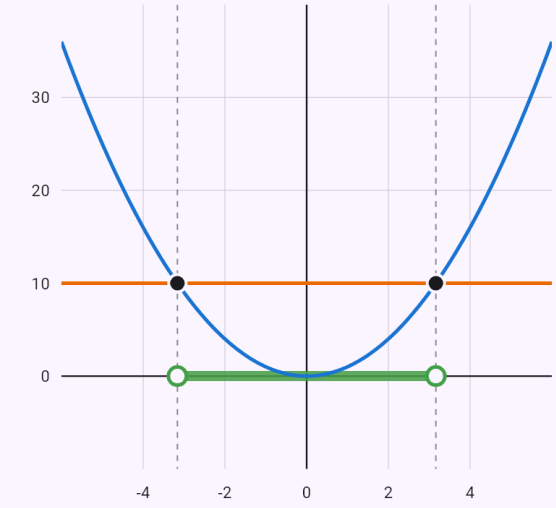
Passos

- Passamos tudo para um lado: $x^2 - 10 < 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Sinais em cada intervalo:

	$(-\infty,\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10},\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- Nos reais $x \in \left(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\right)$; em $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

Gráfico



$y = x^2$
$y = 10$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $\left(-\sqrt{10}; 10\right)$
- $\left(\sqrt{10}; 10\right)$

Equação e inequação – as raízes da equação substituídas na inequação.

Enunciado: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Resultado

$$x = 3$$

Passos

- Primeiro resolvemos a equação $x^2 - x - 6 = 0$ e depois substituímos as suas raízes nas inequações.
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- A raiz $x = -2$ não satisfaz a condição $x > 0$, portanto não é solução.
- A raiz $x = 3$ satisfaz as condições.

Circunferência e semiplano – a solução é um arco; os seus extremos não lhe pertencem.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

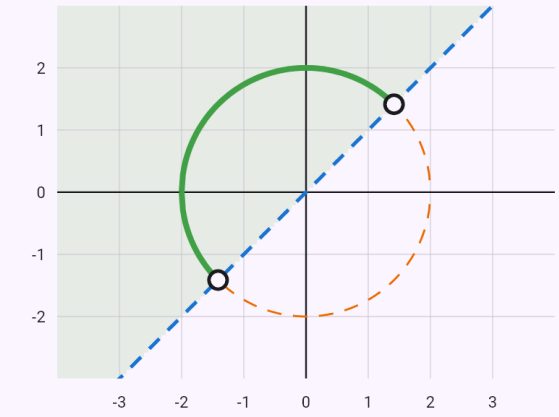
Resultado

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y > x$$

Passos

- A solução são os pontos da curva $x^2 + y^2 = 4$ que estão na região dada pelas inequações. Primeiro encontramos essa região:
- A fronteira é a curva $y = x$: traçada tracejada, seus pontos não pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[1;\ 0]$: $0 > 1$ é falsa; a solução é a parte do plano que não contém o ponto.
- Extremos do troço da curva: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – numa fronteira tracejada, não pertencem à solução.

Gráfico



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

A solução é a parte da curva destacada a verde – a que está na região sombreada. Um extremo cheio pertence à solução, um vazio não.

Extremos:

○ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

Circunferência e reta com uma inequação – a interseção abaixo do eixo x não a satisfaz.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`

`x - y = 1`

`y > 0`

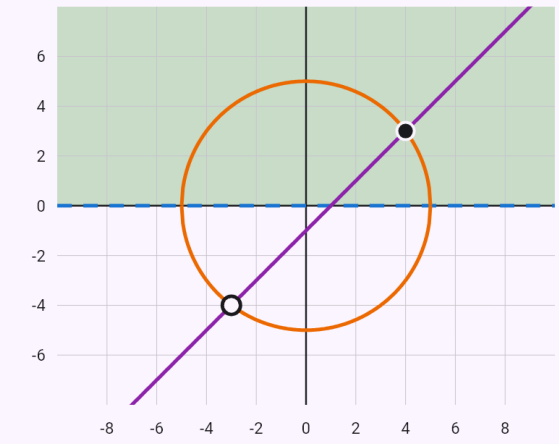
Resultado

$$x = 4$$
$$y = 3$$

Passos

- Primeiro resolvemos o sistema de equações e depois substituímos as suas soluções nas inequações.
- A solução $x = -3,\ y = -4$ não satisfaz a inequação $y > 0$, portanto não é solução do sistema.
- A solução $x = 4,\ y = 3$ satisfaz as inequações.

Gráfico



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0,\ \infty)$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

As soluções são as interseções das curvas na região colorida (ponto cheio); um ponto vazio não satisfaz as inequações.

Interseções dos gráficos:

○ $(-3; -4)$ ● $(4; 3)$

10. Sistemas de equações

A aplicação resolve um sistema de equações lineares com duas incógnitas pelo método da adição ou da substituição, e sistemas maiores pela eliminação de Gauss – em equações ou na matriz (a matriz ampliada e operações nas linhas). Um sistema quadrado também pode ser resolvido pela regra de Cramer (determinantes). O método escolhe-se com um chip. Um sistema de duas equações com duas incógnitas tem também um gráfico em que as soluções são as interseções das retas ou curvas.

O número de equações e o de incógnitas não têm de coincidir. A eliminação de Gauss deteta quando um sistema não tem solução (surge uma equação como 0 = 1) e quando tem infinitas: as incógnitas que as equações não determinam passam a parâmetros t, s, … (escolhidos para que a solução não tenha frações), e a solução é também escrita na forma vetorial. Na forma matricial, o teorema de Rouché–Capelli (Frobenius) decide o número de soluções – compara o posto da matriz, o da matriz ampliada e o número de incógnitas. Num sistema homogêneo (todos os termos independentes 0), a aplicação mostra uma base do espaço de soluções.

As incógnitas podem ter índice: x_1, x_1 ou x1. Um sistema também pode ser dado por matrizes – a matriz ampliada com os termos independentes depois de uma barra vertical, ou uma matriz A, um vetor de termos independentes b e a equação Ax = b; as incógnitas são então x_1, x_2, … e o método por omissão é a eliminação de Gauss na matriz.

Um sistema pode conter um ou dois parâmetros – letras que não são incógnitas (as incógnitas são x, y, z, u, v, w, t e x_1, x_2, …). A aplicação discute então a resolubilidade segundo os valores dos parâmetros: com o chip «Gauss – matriz» (por omissão com três ou mais equações) reduz a matriz ampliada; onde multiplicaria por uma expressão no parâmetro que pode ser zero, supõe que não é e resolve os seus zeros à parte por substituição – em cada caso decide o teorema de Rouché–Capelli (Frobenius). Com o chip «Regra de Cramer» calcula os determinantes como expressões no parâmetro: fórmulas para D ≠ 0 e os zeros de D substituídos. Com dois parâmetros surgem casos como «b = 4, a ≠ 2» ou «a = b».

Um sistema não linear (por exemplo, uma circunferência e uma reta) é resolvido e desenhado, por enquanto sem a resolução.

Como introduzir

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Incógnitas com índice – x_1, x_1 e x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	A matriz ampliada – os termos independentes depois de uma barra vertical.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	A matriz do sistema, o vetor de termos independentes e a equação Ax = b.

Exemplos

O método da adição.

Enunciado: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Adição

Resultado

$x = 2$
$y = 1$

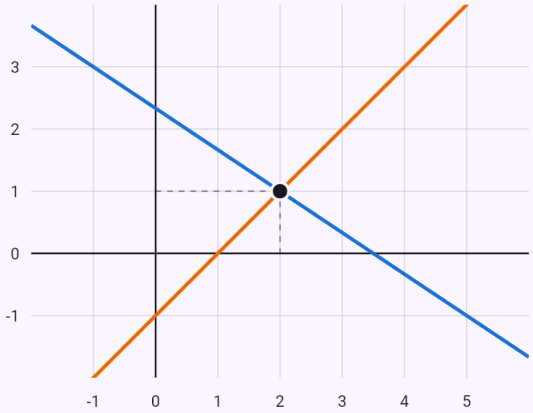
Passos

- Multiplicamos a primeira equação por 1 e a segunda por -2 para que x se anule ao somá-las

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Somamos as equações, x se anula: $5y = 5$
- Resolvemos: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Substituímos na equação 2: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Gráfico



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Interseções dos gráficos:

- $(2; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução do sistema: suas coordenadas são os valores de x e y.

Três equações – eliminação de Gauss.

Enunciado: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Eliminação de Gauss

Resultado

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Passos

- Eliminamos x das equações seguintes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Eliminamos y das equações seguintes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Resolvemos: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Substituímos na equação 2: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Substituímos na equação 1: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Regra de Cramer – os determinantes D, D_x, D_y.

Enunciado: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Regra de Cramer

Resultado

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Passos

- Calculamos o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Calculamos o determinante

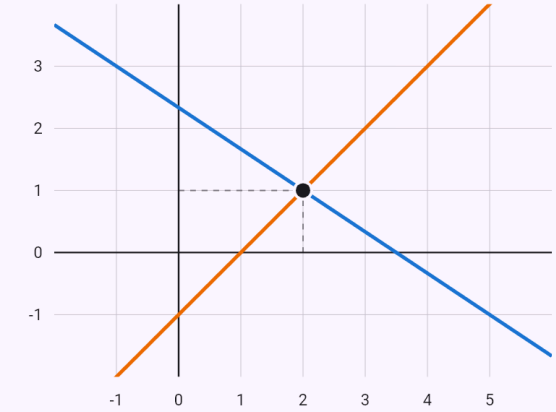
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Calculamos o determinante

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Pela regra de Cramer: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Pela regra de Cramer: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Gráfico



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Interseções dos gráficos:

- $(2; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução do sistema: suas coordenadas são os valores de x e y.

Infinitas soluções – o teorema de Frobenius, um parâmetro e a forma vetorial.

Enunciado: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matriz

Resultado

Há infinitas soluções.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Passos

- A matriz aumentada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas
$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_3 \to R_3 - R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- A equação 0 = 0 é sempre verdadeira, por isso a omitimos
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Teorema de Rouché–Capelli (Frobenius):
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – os postos são iguais, mas menores que o número de incógnitas, portanto o sistema tem infinitas soluções.
- Reescrevemos a matriz escalonada (triangular) como equações
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$
- As incógnitas que as equações não determinam são escolhidas como parâmetros: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Resolvemos: $z = 1$
- Substituímos na equação 1:
$x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- A solução na forma vetorial
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um sistema sem solução – surge uma equação que nunca é verdadeira.

Enunciado: `x + y + z = 2`
`x - y + z = 0`
`2x + 2z = 3`

Resultado

Não há solução.

Passos

- Eliminamos x das equações seguintes
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$
- Eliminamos y das equações seguintes
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$
- Obtemos a equação $0 = 1$, que não tem solução, portanto o sistema não tem solução.

Um sistema homogêneo – uma base do espaço de soluções.

Enunciado: `x + 2y - z = 0`
`2x + 4y - 2z = 0`
`x - y + z = 0` Gauss – matriz

Resultado

Há infinitas soluções.

$x = -t$
$y = 2t$
$z = 3t$
$t \in \mathbb{R}$

Passos

- O sistema é homogêneo (todos os termos independentes são 0): tem sempre a solução trivial (só zeros); tem uma solução não trivial exatamente quando o posto da sua matriz é menor que o número de incógnitas.
- A matriz aumentada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Trocamos as equações 2 e 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- A equação 0 = 0 é sempre verdadeira, por isso a omitimos
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

- Teorema de Rouché–Capelli (Frobenius): $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – os postos são iguais, mas menores que o número de incógnitas, portanto o sistema tem infinitas soluções.
- Reescrevemos a matriz escalonada (triangular) como equações
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- As incógnitas que as equações não determinam são escolhidas como parâmetros: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Substituímos na equação 2: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Substituímos na equação 1: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- A solução na forma vetorial
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Uma base do espaço de soluções (dimensão 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Um sistema dado pela sua matriz ampliada.

Enunciado: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Resultado

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Passos

- A matriz aumentada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

- Teorema de Rouché–Capelli (Frobenius): $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – o posto da matriz é igual ao da matriz ampliada e ao número de incógnitas, portanto o sistema tem exatamente uma solução.
- Reescrevemos a matriz escalonada (triangular) como equações
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Resolvemos: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow\ x_3 = 3$
- Substituímos na equação 2: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow\ x_2 = 2$
- Substituímos na equação 1: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow\ x_1 = 1$

Um sistema com parâmetro – matriz ampliada, os casos a = 1 e a = −2.

Enunciado: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matriz

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Passos

- As incógnitas são $x,\ y,\ z$, o parâmetro a é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os vários casos (discussão da solução).
- A matriz aumentada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Trocamos as equações 1 e 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Continuamos com o elemento $1 - a$, que pode ser zero; por isso supomos $a \neq 1$, e o caso $a = 1$ é analisado à parte.
- Trocamos as equações 2 e 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Continuamos com o elemento $-a - 2$, que pode ser zero; por isso supomos $a \neq -2$, e o caso $a = -2$ é analisado à parte.
- Para $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: o sistema tem uma única solução:
$x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Para $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$: o sistema tem infinitas soluções:
$x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Para $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: o sistema não tem solução. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dois parâmetros – discussão segundo a e b.

Enunciado: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Passos

- As incógnitas são $x,\ y,\ z$; os parâmetros $a,\ b$ são números reais quaisquer. A solução depende dos seus valores, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- A matriz aumentada do sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Operações nas linhas $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Continuamos com o elemento $(a-2)(a-1)$, que pode ser zero; por isso supomos $a \neq 1,\ a \neq 2$, e o caso $a = 2,\ a = 1$ é analisado à parte.
- Para $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: o sistema tem uma única solução
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Para $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: o sistema não tem solução. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Para $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: o sistema tem infinitas soluções:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Para $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: o sistema não tem solução. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Para $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: o sistema tem infinitas soluções:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. A matriz após a substituição
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Uma circunferência e uma reta.

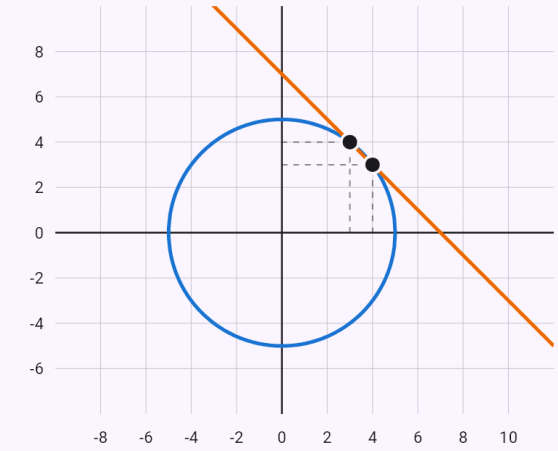
Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Resultado

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Gráfico



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Interseções dos gráficos:

● $(3; 4)$ ● $(4; 3)$

Cada interseção corresponde a uma solução do sistema: suas coordenadas são os valores de x e y.

Limitações conhecidas

- Os sistemas não lineares aparecem por agora sem resolução.

11. Equações e inequações com parâmetro

Uma letra na equação além da incógnita é um parâmetro – um número real qualquer de que depende a solução. A aplicação leva a equação à forma A·x = B (uma quadrática a A·x² + B·x + C = 0) e discute a solução consoante os valores do parâmetro: onde o coeficiente da incógnita é zero, onde o discriminante é positivo, zero ou negativo, onde as condições excluem uma raiz e para que valores o problema não faz sentido. O resultado resume os casos.

A aplicação escolhe a incógnita pela ordem x, y, z, u, v, w, t; as outras letras são parâmetros. Escolhe outra incógnita com a etiqueta «Incógnita» ou escreve-a depois de uma vírgula. O gráfico mostra todas as soluções como uma curva (uma região numa inequação) no plano parâmetro–incógnita; escolhe o valor do parâmetro com o controlo deslizante e lê as soluções na reta vertical.

Depois de uma vírgula também pode perguntar pelas raízes: «x^2 + px + 4 = 0, x > 0» – para que p todas as raízes são positivas (a etiqueta «A condição vale para» passa a pelo menos uma raiz), «…, x = 3» – para que p 3 é raiz. Numa equação linear a raiz é substituída na condição; numa quadrática usam-se as fórmulas de Viète. Um sistema de duas equações lineares com parâmetro é resolvido por determinantes (regra de Cramer), com os casos de uma, nenhuma e infinitas soluções. Uma inequação quadrática ou racional é discutida pela ordem dos seus zeros. O cursor do gráfico para exatamente nos valores críticos do parâmetro, que também aparecem por baixo do gráfico. Um sistema com parâmetro de mais equações, com dois parâmetros ou pelo método matricial está no capítulo Sistemas de equações.

Num integral indefinido, as outras letras são constantes – a aplicação indica quais não podem ser zero (∫ dx/(a − bx)³ para b ≠ 0). Num limite e num integral definido as letras também são parâmetros – ver os capítulos Limites e Integral definido.

Como introduzir

`2ax + a = 4x`	Cada letra adicional é um parâmetro; a incógnita é x (ou y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, incógnita q`	Podes indicar a incógnita ou o parâmetro depois de uma vírgula («a é parâmetro», «incógnita q»).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Uma pergunta sobre as raízes depois de uma vírgula: para que p todas as raízes (ou pelo menos uma) têm a propriedade.

Exemplos

Equação linear – sem solução para a = 2.

Enunciado: `2ax + a = 4x`

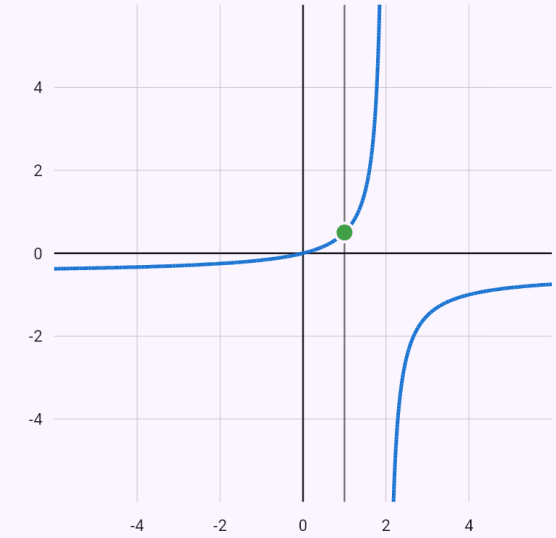
Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Passos

- A incógnita é x, o parâmetro a é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica: $2(a-2)x = -a$
- Para $a \neq 2$, $2(a-2)$ é diferente de zero e podemos dividir: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Para $a = 2$, o coeficiente da incógnita é zero: $0 \cdot x = -2$, logo $x \in \emptyset$

Gráfico



$2ax + a = 4x$

Cada ponto [a; x] da curva é uma solução. Para um valor escolhido de a, as soluções estão na reta vertical – move-a com o controlo deslizante.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Equação quadrática – discussão pelo discriminante.

Enunciado: `x^2 + 6x + p = 0`

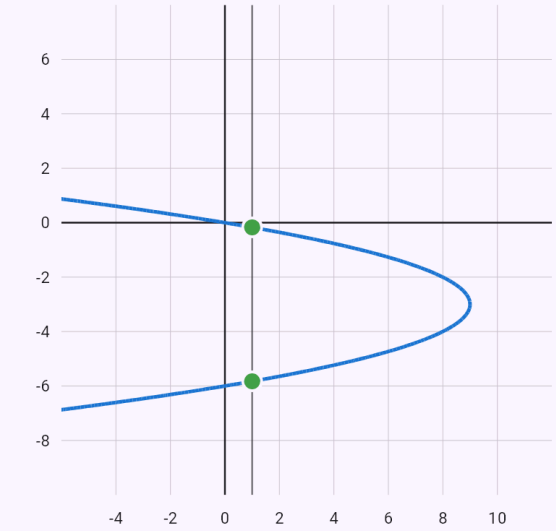
Resultado

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Passos

- A incógnita é x, o parâmetro p é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica: $x^2 + 6x + p = 0$
- O discriminante em função do parâmetro: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Para $p < 9$, D > 0 e a equação tem duas raízes distintas: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Para $p > 9$, D < 0 e a equação não tem solução real.
- Para $p = 9$, D = 0 e a equação tem uma raiz dupla: $x = -3$

Gráfico



$x^2 + 6x + p = 0$

Cada ponto [p; x] da curva é uma solução. Para um valor escolhido de p, as soluções estão na reta vertical – move-a com o controlo deslizante.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Inequação – o sinal do coeficiente decide o sentido.

Enunciado: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

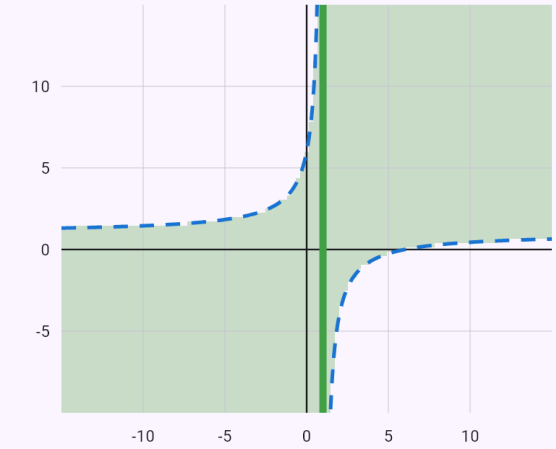
Resultado

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Passos

- A incógnita é x, o parâmetro p é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Para $p < 1$, $2(1-p)$ é positivo: ao dividir, o sinal da desigualdade mantém-se: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Para $p > 1$, $2(1-p)$ é negativo: ao dividir, o sinal da desigualdade inverte-se: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Para $p = 1$, o coeficiente da incógnita é zero: $0 \cdot x < 10$, logo $x \in \mathbb{R}$

Gráfico



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{p-6}{p-1}$

A região sombreada contém todas as soluções [p; x]. Para um valor escolhido de p, a solução é a parte destacada da reta vertical – move-a com o controlo deslizante.

p = 1

$p = 1$

As duas raízes maiores que 1 – discriminante e fórmulas de Viète.

Enunciado: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

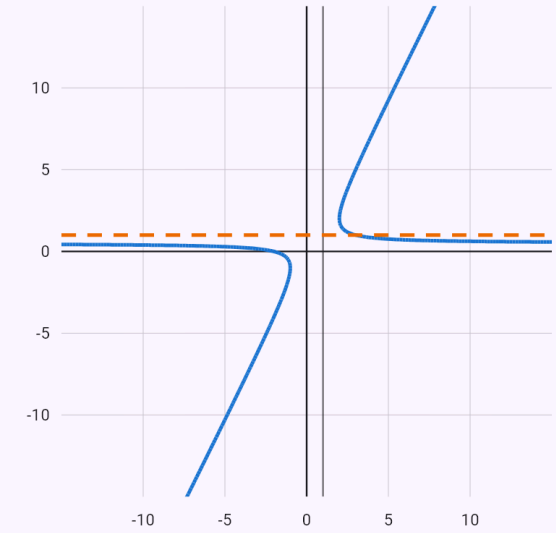
Resultado

$$2 \leq p < 3$$

Passos

- A incógnita é x, o parâmetro p é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- O discriminante em função do parâmetro $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p - 2$
- Para $p \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ \infty)$, D > 0 e a equação tem duas raízes distintas: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Para $-1 < p < 2$, D < 0 e a equação não tem solução real.
- Para $p = -1$, D = 0 e a equação tem uma raiz dupla: $x = -1$
- Para $p = 2$, D = 0 e a equação tem uma raiz dupla: $x = 2$
- Procuramos os valores do parâmetro para os quais todas as raízes da equação satisfazem $x > 1$ (e existe alguma raiz).
- Pelas fórmulas de Viète: $x_1 + x_2 = 2p, \quad x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- A equação tem de ter raízes reais: $D \geq 0$, portanto $p \in (-\infty,\ -1] \cup [2,\ \infty)$
- A condição sobre a soma: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p - 1) > 0$, portanto $p > 1$
- A condição sobre o produto: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, portanto $p < 3$
- A condição vale para $2 \leq p < 3$

Gráfico



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Cada ponto [p; x] da curva é uma solução. Para um valor escolhido de p, as soluções estão na reta vertical – move-a com o controlo deslizante.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1: \quad x \in \emptyset$

Um sistema com parâmetro – determinantes; as retas intersetam-se, são paralelas ou coincidem.

Enunciado: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Passos

- As incógnitas são $x,\ y$, o parâmetro a é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os vários casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Resolvemos o sistema com determinantes (regra de Cramer)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Para $a \neq -1,\ a \neq 1$, D ≠ 0 – o sistema tem uma única solução (as retas intersetam-se):

  $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$

- Para $a = -1$, D = 0 e o sistema não tem solução (as retas são paralelas).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Para $a = 1$, D = 0 e as duas equações de descrevem a mesma reta – infinitas soluções: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Uma inequação racional – pela ordem do zero p e do ponto 1.

Enunciado: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Resultado

$$\begin{cases} x \in (-\infty,\ p) \cup (1,\ \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty,\ 1) \cup (1,\ \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty,\ 1) \cup (p,\ \infty), & p > 1 \end{cases}$$

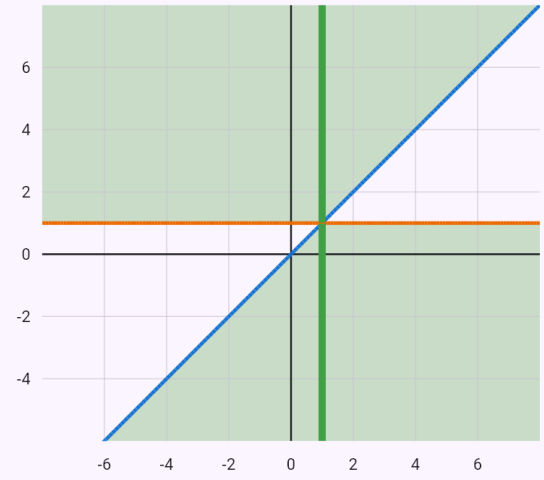
Condições: $x \neq 1$

Passos

- A incógnita é x, o parâmetro p é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Condições – o denominador não pode ser zero: $x \neq 1$
- Passamos à forma básica: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Os zeros do numerador: p; o denominador anula-se em 1
- Para $p < 1$ – pela ordem dos zeros e pelos sinais nos intervalos: $x \in (-\infty,\ p) \cup (1,\ \infty)$
- Para $p > 1$ – pela ordem dos zeros e pelos sinais nos intervalos: $x \in (-\infty,\ 1) \cup (p,\ \infty)$
- Para $p = 1$ resolvemos $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$:

  $x \in (-\infty,\ 1) \cup (1,\ \infty)$

Gráfico



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

A região sombreada contém todas as soluções [p; x]. Para um valor escolhido de p, a solução é a parte destacada da reta vertical – move-a com o controlo deslizante.

p = 1

$p = 1$

Limitações conhecidas

- A discussão completa por intervalos só com um parâmetro, com vários os casos gerais.
- Perguntas sobre as raízes só em equações lineares e quadráticas; sistemas com parâmetro só de duas equações lineares; um parâmetro dentro de uma raiz ou de um logaritmo, ainda não.

12. Isolar uma letra de uma fórmula

Uma fórmula de matemática, física ou química (m = ρV, S = πr², v = s/t) é transformada para que a letra escolhida fique sozinha num dos lados. As outras letras são grandezas dadas – a aplicação trabalha com elas como com números conhecidos. Os passos são transformações equivalentes como na escola: passar termos para o outro lado, multiplicar por um denominador, dividir, pôr em evidência, extrair a raiz, inversos.

A letra a isolar escolhe-se com o chip «Isolar»; sem escolha, a aplicação isola a primeira letra do lado da fórmula. O resultado é a fórmula com as suas condições – aquilo por que se divide não pode ser zero (V = m/ρ para ρ ≠ 0). As grandezas de uma fórmula são positivas, por isso uma raiz tem só o seu valor positivo: r = √(S/π).

Uma equação em x e y é resolvida em ordem a y (a reta 2x + y = x + 2y é y = x); as outras equações em x e y têm «Isolar y» e «Isolar x» entre os chips da derivada, do integral e do gráfico. Aqui a raiz dá os dois sinais: x² + y² = 25 é y = ±√(25 − x²).

As equações com parâmetro (2ax + a = 4x, incógnita x) não se isolam como fórmula, mas resolvem-se com a discussão – ver o capítulo anterior.

Como introduzir

`m = ρV`	Uma fórmula – uma grandeza sozinha num lado, letras maiúsculas e minúsculas (E, I, V são grandezas).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Índices com sublinhado (R_1, v_0), letras gregas (ρ, rho, \rho), π é a constante.
`2x + y = x + 2y`	Uma equação em x e y – isola-se y.

Exemplos

Massa volúmica – divisão por uma grandeza com a condição ρ ≠ 0.

Enunciado: `m = ρV`

Resultado

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Condições: $\rho \neq 0$

Passos

- Isolamos V. Com as outras letras ($m,\ \rho$) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até V ficar sozinho num dos lados.
- Trocamos os lados da equação: $\rho V = m$
- Dividimos ambos os lados por ρ, que não pode ser zero ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Área de um trapézio – multiplicar por dois, dividir pela altura, passar a para o outro lado.

Enunciado: `S = (a + c)/2 · v`

Resultado

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Condições: $v \neq 0$

Passos

- Isolamos c. Com as outras letras ($S,\ a,\ v$) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até c ficar sozinho num dos lados.
- Trocamos os lados da equação: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Multiplicamos ambos os lados por 2: $v(a+c) = 2S$
- Dividimos ambos os lados por v, que não pode ser zero ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Subtraímos a a ambos os lados: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Reduzimos ao mesmo denominador: $c = \frac{2S - av}{v}$

Área de um círculo – extrair a raiz, o raio é positivo.

Enunciado: `S = πr^2`

Resultado

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Passos

- Isolamos r. Com as outras letras (S) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até r ficar sozinho num dos lados.
- Trocamos os lados da equação: $\pi r^2 = S$
- Dividimos ambos os lados por π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Extraímos a raiz de ambos os lados. r é uma grandeza, e as grandezas são positivas – vale só a raiz positiva: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Resistências em paralelo – denominador comum e inversos.

Enunciado: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Resultado

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Condições: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Passos

- Isolamos R_1. Com as outras letras ($R,\ R_2$) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até R_1 ficar sozinho num dos lados.
- Condições – o denominador não pode ser zero: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Trocamos os lados da equação: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Subtraímos $\frac{1}{R_2}$ a ambos os lados: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Reduzimos ao mesmo denominador: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Se duas expressões são iguais, também os seus inversos o são: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Uma reta – os termos com y à esquerda, os outros à direita.

Enunciado: `2x + y = x + 2y`

Resultado

$$y = x$$

Passos

- Isolamos y. Com as outras letras (x) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até y ficar sozinho num dos lados.
- Passamos os termos com y para o lado esquerdo e os outros para o direito (com o sinal trocado) e somamos

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Multiplicamos ambos os lados por (-1): $y = x$

Uma circunferência em ordem a y – a raiz com ±.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`

Resultado

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Passos

- Isolamos y. Com as outras letras (x) trabalhamos como com números conhecidos e transformamos a equação por transformações equivalentes até y ficar sozinho num dos lados.
- Subtraímos x^2 a ambos os lados: $y^2 = 25 - x^2$
- Extraímos a raiz quadrada de ambos os lados; um número e o seu simétrico têm o mesmo quadrado, daí o ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Limitações conhecidas

- A letra só em potências, frações e raízes; ainda não em funções (sin, log, um expoente) nem ao quadrado juntamente consigo própria (s = v_0t + ½at² em ordem a t).

13. Cálculo com expressões

Uma expressão sem sinal de igual é transformada segundo o chip escolhido: é simplificada (uma fração algébrica reduzida ao mesmo denominador e simplificada, com condições), desenvolvida, fatorizada (pondo em evidência, com casos notáveis e com a regra de Ruffini) ou decomposta em frações parciais – como no papel, com equações para os coeficientes desconhecidos. A fatoração é nos inteiros; se a expressão se puder fatorar mais nos reais (com raízes irracionais), o passo seguinte mostra-o. A raiz de um monómio é extraída em parte – com raiz par em valor absoluto onde a base pode ser negativa. Também funcionam os números complexos – a divisão multiplicando pelo conjugado.

As expressões numéricas com frações calculam-se passo a passo como na escola: primeiro os parênteses mais interiores (curvos, retos e chavetas), numa fração composta o numerador e o denominador separadamente, depois potências, multiplicações e divisões (por uma fração multiplicando pelo inverso, também com dois pontos ou ÷) e no fim a soma com denominador comum. Um número misto escreve-se com um espaço – 2 1/3 (de uma fotografia também 2⅓) – e a aplicação passa-o primeiro a fração; o produto de dois números escreva-o sempre com ponto. Um resultado maior do que 1 aparece também como número misto.

Um polinómio dividido por outro escreve-se com dois pontos: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). A aplicação faz a divisão longa como no papel – divide os termos de maior grau, multiplica o divisor pelo resultado e subtrai – e mostra o quociente, o resto e a verificação; com um divisor x − a oferece também a regra de Ruffini. Uma fração p/q é simplificada como antes; a divisão escolhe-se com o chip «Divisão de polinómios».

O binómio de Newton: o termo de ordem k de um desenvolvimento («5. termo (2x - 1/x)^8») e o termo sem x («termo sem x de (x + 1/x)^10») a partir do termo geral. As permutações P(5) e com repetição P′(2, 3, 1) calculam-se como fatoriais.

A combinatória também se pode pedir com uma frase curta: «De quantas maneiras podemos escolher 3 de 7?» (com «a ordem importa», «com repetição»), «De quantas maneiras se podem ordenar 5 pessoas?» (também à volta de uma mesa redonda), números pares de três algarismos com algarismos dados e palavras com as letras de uma palavra. E dois problemas clássicos de probabilidade: o dos aniversários (pelo menos duas de n pessoas fazem anos no mesmo dia) e o do bengaleiro que perde as senhas (ninguém recebe o seu casaco – também cartas em envelopes).

Exemplos

Uma expressão numérica com frações – primeiro a multiplicação, depois o denominador comum.

Enunciado: `2/3 - 1/6*2` Simplificar

Resultado

$$\frac{1}{3}$$

Passos

- Primeiro a multiplicação e a divisão: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Parênteses encaixados a partir do mais interior.

Enunciado: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Resultado

$$7$$

Passos

- Primeiro o parêntese mais interior: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Substituímos: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Primeiro o parêntese mais interior: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Substituímos: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Primeiro o parêntese mais interior: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Substituímos: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Multiplicamos – numerador por numerador, denominador por denominador – e simplificamos: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Uma fração composta – numerador e denominador separadamente, depois vezes o inverso.

Enunciado: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Resultado

$$\frac{10}{21}$$

Passos

- Primeiro o numerador e o denominador da fração composta separadamente: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Primeiro o numerador e o denominador da fração composta separadamente: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Substituímos: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Uma fração composta: o numerador vezes o inverso do denominador

  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Números mistos – passados a frações e o resultado também como número misto.

Enunciado: `2 1/3 + 1 1/2`

Resultado

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Passos

- Passamos os números mistos a frações – a parte inteira vezes o denominador mais o numerador

  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Substituímos: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Reduzimos ao mesmo denominador: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- O resultado como número misto: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Simplificar uma fração algébrica.

Enunciado: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Simplificar

Resultado

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Condições: $x \neq -1$

Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero: $x \neq -1$
- Fatoramos o numerador e o denominador: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Cancelamos o fator comum $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Desenvolver.

Enunciado: `(x + 2)^3` Desenvolver

Resultado

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Passos

- Desenvolvemos os parênteses e agrupamos os termos semelhantes: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Fatorizar com a regra de Ruffini.

Enunciado: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Fatorar

Resultado

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Passos

- As raízes racionais só podem ser divisores do termo independente -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz $x = 1$ e dividimos o polinômio:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Substituindo, vemos que estes candidatos não são raízes: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz $x = 2$ e dividimos o polinômio:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Decomposição em frações parciais.

Enunciado: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Frações parciais

Resultado

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Condições: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Fatoramos o denominador: $(x-1)(x+2)$
- Procuramos a decomposição na forma: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Multiplicamos ambos os lados pelo denominador $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Substituímos $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Substituímos $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Extração parcial da raiz com valor absoluto.

Enunciado: `sqrt(8a^5 b^2)` Simplificar

Resultado

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Passos

- Extraímos da raiz o que for possível – as potências saem para fora (com raiz par em valor absoluto onde a base pode ser negativa): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Divisão de números complexos.

Enunciado: `(3+4i)/(1-2i)` Forma algébrica

Resultado

$$-1+2i$$

Passos

- Multiplicamos a fração pelo conjugado do denominador, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Uma equação com fatoriais – condições, simplificação e verificação das raízes.

Enunciado: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Resultado

$$x = 5$$

Passos

- Condições: fatoriais e números combinatórios só existem para inteiros não negativos – cada argumento (num número combinatório n, k e n − k) tem de ser inteiro ≥ 0: $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Os fatoriais escritos pelo menor, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), e simplificados; um número combinatório como produto: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2+x = 30$
- Resta uma equação sem fatoriais, tudo num só membro: $x^2+x-30 = 0$
- As raízes da equação são $x = -6,\ x = 5$; satisfaz as condições $x = 5$

Divisão longa – quociente, resto e verificação.

Enunciado: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Resultado

$$\left(2x^3 + 3x^2 - x + 5\right) : \left(x^2 + 1\right)$$
$$= 2x + 3 - \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

Passos

- Passo 1 – dividimos os termos de maior grau $2x^3 : x^2 = 2x$, multiplicamos o divisor pelo resultado $2x \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x^3 + 2x$ e subtraímos, fica $3x^2 - 3x + 5$
- Passo 2 – dividimos os termos de maior grau $3x^2 : x^2 = 3$, multiplicamos o divisor pelo resultado $3 \cdot \left(x^2 + 1\right) = 3x^2 + 3$ e subtraímos, fica $-3x + 2$
- Divisão longa $\left(2x^3 + 3x^2 - x + 5\right) : \left(x^2 + 1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- O quociente é $2x + 3$, o resto $-3x + 2$
- Verificação – o quociente vezes o divisor mais o resto dá o dividendo: $(2x + 3)\left(x^2 + 1\right) + (-3x + 2) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$

Divisão por x − 1 com a regra de Ruffini.

Enunciado: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Regra de Ruffini

Resultado

$$\left(x^3 - 2x + 1\right) : (x - 1)$$
$$= x^2 + x - 1$$

Passos

- Regra de Ruffini para $x = 1$ – em cima os coeficientes do dividendo, em baixo as suas somas sucessivas; o último número é o resto

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- O quociente é $x^2 + x - 1$, o resto 0
- Verificação – o quociente vezes o divisor mais o resto dá o dividendo: $\left(x^2 + x - 1\right)(x - 1) = x^3 - 2x + 1$

Uma equação com um número combinatório C(n, 2) – também V(n, k), C', V' com repetição.

Enunciado: `C(n, 2) = 45`

Resultado

$$n = 10$$

Passos

- Condições: fatoriais e números combinatórios só existem para inteiros não negativos – cada argumento (num número combinatório n, k e n − k) tem de ser inteiro ≥ 0: $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Os fatoriais escritos pelo menor, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), e simplificados; um número combinatório como produto: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Resta uma equação sem fatoriais, tudo num só membro: $n^2 - n - 90 = 0$
- As raízes da equação são $n = -9,\ n = 10$; satisfaz as condições $n = 10$

Escolher k de n numa frase – combinações.

Enunciado: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Resultado

$$120$$

Passos

- Escolhemos 3 de 10, a ordem não importa e sem repetição – o número de combinações:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Números pares de três algarismos – dois casos pelo último algarismo.

Enunciado: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Resultado

52

Passos

- Os números têm 3 algarismos tirados de $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. O zero não pode ficar à frente. Os algarismos não se podem repetir. Um número é par exatamente quando o último algarismo é par.
- O último algarismo é 0 – para as outras posições ficam todos os outros algarismos: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- O último algarismo é outro adequado diferente de 0 – então nem o zero nem ele podem ficar à frente: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Somamos os dois casos: $20 + 32 = 52$

Palavras com as letras de uma palavra – permutações com repetição.

Enunciado: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Resultado

151200

Passos

- A palavra tem 10 letras; contamos quantas vezes aparece cada uma: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- As palavras são permutações com repetição – trocar letras iguais dá a mesma palavra: $P'(2,3,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{3628800}{24} = 151200$

O problema dos aniversários pelo acontecimento contrário.

Enunciado: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Resultado

$P(A) \approx 0{,}5073$

Passos

- É mais fácil o acontecimento contrário A': as 23 pessoas fazem anos em dias diferentes (365 dias, todos igualmente prováveis).
- A probabilidade de todos os aniversários serem diferentes $P(A') = \dfrac{V(365,23)}{365^{23}} = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- A probabilidade pedida é o complemento para um: $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

As senhas perdidas do bengaleiro – desarranjos.

Enunciado: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Resultado

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Passos

- As distribuições em que ninguém recebe o seu são os desarranjos – o seu número por inclusão-exclusão
  $D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$
- Há n! distribuições ao todo, a probabilidade é o quociente: $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Com mais pessoas a probabilidade quase não muda: $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

O termo sem x de um desenvolvimento do binómio.

Enunciado: `termo sem x de (x + 1/x)^10`

Resultado

$$T_6 = 252$$

Passos

- O termo geral de ordem $k+1$ do desenvolvimento do binómio: $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- O termo sem x tem o expoente de x igual a zero: $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- O termo procurado, de ordem 6: $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Divisibilidade e números primos

Um número inteiro sozinho é decomposto em fatores primos – a aplicação divide-o sucessivamente pelos menores primos e escreve 360 = 2³·3²·5; num primo mostra que nenhum primo até à sua raiz o divide. O teste também se pode escrever isprime(97).

O máximo divisor comum mdc(60, 90) e o mínimo múltiplo comum mmc(18, 30) calculam-se a partir das decomposições em primos ou, com o chip «Algoritmo de Euclides», por divisões com resto. O algoritmo de Euclides estendido com a sua tabela dá a identidade de Bézout bezout(240, 46): mdc(240, 46) = 240·u + 46·v.

Os divisores de um número divisores(36) procuram-se aos pares 1·36, 2·18, … até à raiz, e o seu número confirma-se pela decomposição. Os critérios de divisibilidade divisibilidade(1236) formam uma tabela para 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 25 (o último algarismo, a soma dos algarismos, a soma alternada…); um divisor escreve-se divisibilidade(1236, 7), como a frase «1236 é divisível por 7» ou 7 | 1236 – sem critério escolar, divide-se com resto. Os primos até 200 vêm do crivo de Eratóstenes («primos até 50»). Uma equação linear ax + by = c nos inteiros («3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ» ou o chip ℤ) resolve-se pela identidade de Bézout – todas as soluções $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Aritmética modular: o resto 17 mod 5, o inverso 3^(-1) mod 11 (pelo algoritmo de Euclides estendido, com verificação) e a potência 7^13 mod 13 por quadrados sucessivos. O RSA assenta neles – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) calcula n, φ(n), a chave privada d e cifra e decifra a mensagem; e e m podem ser omitidos.

Como introduzir

`360, factor(360), isprime(97)`	Decomposição em primos, teste de primalidade.
`mdc(60, 90), mmc(18, 30)`	Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.
`divisores(36), divisibilidade(1236), divisibilidade(1236, 7)`	Os divisores de um número e os critérios de divisibilidade – todos, ou um divisor (também a frase «1236 é divisível por 7», 7 | 1236).
`primos até 50`	Os primos até n (no máximo 200) pelo crivo de Eratóstenes; também primos(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Uma equação linear nos inteiros (diofantina); também diofant(3, 5, 1).

`bezout(240, 46)`	Identidade de Bézout.
`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Resto, inverso e potência módulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA com números pequenos.

Exemplos

Decomposição em primos por divisões sucessivas.

Enunciado: `360`

Resultado

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Passos

- Dividimos 360 sucessivamente pelos menores primos até restar 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Decomposição em fatores primos: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Um primo – nenhum divisor até à raiz.

Enunciado: `97`

Resultado

O número é primo.

Passos

- Basta experimentar os primos até $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – nenhum divide 97, portanto é primo.

O mdc a partir das decomposições em primos.

Enunciado: `mdc(60, 90)`

Resultado

$$\operatorname{mdc}(60, 90) = 30$$

Passos

- Decomposição em fatores primos: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Decomposição em fatores primos: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- O máximo divisor comum é o produto dos fatores primos comuns com os menores expoentes: $\operatorname{mdc}(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

O mmc através do mdc pelo algoritmo de Euclides.

Enunciado: `mmc(60, 90)` Algoritmo de Euclides

Resultado

$$\operatorname{mmc}(60, 90) = 180$$

Passos

- Algoritmo de Euclides – dividimos o número maior pelo menor com resto, depois o divisor pelo resto, até o resto ser 0; o último resto não nulo é o máximo divisor comum

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{mdc}(60, 90) = 30$$

- O mínimo múltiplo comum é o produto dos números dividido pelo seu máximo divisor comum

$$\operatorname{mmc}(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\operatorname{mdc}(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Os divisores aos pares, o seu número pela decomposição.

Enunciado: `dělitelé(36)`

Resultado

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Passos

- Procuramos os divisores aos pares d · 36/d – basta experimentar d até 6, o outro divisor do par obtém-se

  $36 = 1 \cdot 36$
  $36 = 2 \cdot 18$
  $36 = 3 \cdot 12$
  $36 = 4 \cdot 9$
  $36 = 6 \cdot 6$

- Verificação do número de divisores pela decomposição – os expoentes aumentados de 1 multiplicados: $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

A tabela dos critérios de divisibilidade.

Enunciado: `dělitelnost(1236)`

Resultado

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Passos

- Critérios de divisibilidade: 2, 5, 10 – o último algarismo; 4, 25 – os dois últimos; 8 – os três últimos; 3, 9 – a soma dos algarismos; 6 = 2 · 3 e 12 = 3 · 4 – ambos ao mesmo tempo; 7 – separar o último algarismo e subtrair o seu dobro ao resto; 11 – a soma alternada dos algarismos

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Divisibilidade por sete – separar o último algarismo.

Enunciado: `dělitelnost(1309, 7)`

Resultado

$$7 \mid 1309$$

Passos

- Divisibilidade por 7: separamos o último algarismo, subtraímos o seu dobro ao resto e repetimos até restarem no máximo dois algarismos – esse número é divisível por 7 exatamente quando o original o é (com números grandes, dividir costuma ser mais rápido): $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

O crivo de Eratóstenes.

Enunciado: `prvočísla do 50`

Resultado

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Passos

- 2 é primo – riscamos todos os seus múltiplos; os menores já estão riscados, começamos em $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 é primo – riscamos todos os seus múltiplos; os menores já estão riscados, começamos em $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 é primo – riscamos todos os seus múltiplos; os menores já estão riscados, começamos em $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 é primo – riscamos todos os seus múltiplos; os menores já estão riscados, começamos em $7^2 = 49$: 49
- O crivo de Eratóstenes: basta riscar os múltiplos dos primos até à raiz de 50. Os números que restam são os primos – são 15

1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$	8	9	10
$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$	14	15	16	$\boxed{17}$	18	$\boxed{19}$	20
21	22	$\boxed{23}$	24	25	26	27	28	$\boxed{29}$	30
$\boxed{31}$	32	33	34	35	36	$\boxed{37}$	38	39	40
$\boxed{41}$	42	$\boxed{43}$	44	45	46	$\boxed{47}$	48	49	50

Identidade de Bézout pelo algoritmo de Euclides estendido.

Enunciado: `bezout(240, 46)`

Resultado

$$\mathrm{mdc}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot$$

Passos

- Algoritmo de Euclides estendido – cada resto r escreve-se como r = 240·u + 46·v; uma linha nova é a penúltima menos q vezes a última

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- Da última linha não nula da tabela resulta a identidade de Bézout: $\mathrm{mdc}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Uma equação diofantina pela identidade de Bézout.

Enunciado: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Resultado

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Passos

- Resolvemos $3x + 5y = 1$ nos inteiros. Tem solução exatamente quando o máximo divisor comum de 3 e 5 divide o segundo membro.
- Algoritmo de Euclides estendido – cada resto r escreve-se como r = 5·u + 3·v; uma linha nova é a penúltima menos q vezes a última

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- Da última linha não nula da tabela resulta a identidade de Bézout: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- A identidade de Bézout multiplicada por 1 dá uma solução: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, ou seja, $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Todas as soluções: somar a x múltiplos de 5 e ao mesmo tempo a y múltiplos de -3 (o primeiro membro não muda); deslocado para o menor não negativo $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Verificação: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Uma potência módulo n por quadrados sucessivos.

Enunciado: `7^13 mod 13`

Resultado

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Passos

- Escrevemos o expoente como soma de potências de 2:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Elevamos ao quadrado repetidamente tomando os restos módulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Multiplicamos as potências necessárias tomando os restos módulo 13 pelo caminho
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – chaves, cifragem e decifragem.

Enunciado: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Resultado

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Passos

- O módulo: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- A função φ de Euler:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Algoritmo de Euclides – dividimos o número maior pelo menor com resto, depois o divisor pelo resto, até o resto ser 0; o último resto não nulo é o máximo divisor comum

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{mdc}\,(120, 7) = 1$$

- O expoente público e tem de ser primo com φ(n):
  $\mathrm{mdc}\,(7, 120) = 1$ – é.
- Algoritmo de Euclides estendido – cada resto r escreve-se como r = 120·u + 7·v; uma linha nova é a penúltima menos q vezes a última

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- O expoente privado d é o inverso de e módulo φ(n):
  $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Chave pública $(n, e) = (143, 7)$, chave privada $(n, d) = (143, 103)$
- Cifragem da mensagem m:
  $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Escrevemos o expoente como soma de potências de 2:
  $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Elevamos ao quadrado repetidamente tomando os restos módulo 143
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Multiplicamos as potências necessárias tomando os restos módulo 143 pelo caminho
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Decifragem – sai a mensagem original:
  $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Escrevemos o expoente como soma de potências de 2:
  $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Elevamos ao quadrado repetidamente tomando os restos módulo 143
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Multiplicamos as potências necessárias tomando os restos módulo 143 pelo caminho
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Limitações conhecidas

- A decomposição em primos funciona para números até 10^{18}; um primo maior só é confirmado por um teste.
- O RSA é um exemplo escolar com números pequenos (n = p·q até cerca de um bilião), não uma cifragem real.

15. Ângulos em graus, minutos e segundos

Um ângulo sozinho é convertido em todas as formas: graus, minutos e segundos (5,5° = 5°30′), graus decimais, minutos, segundos e radianos – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Só uma forma com «= ?′», «= ?°», «= ?″» ou «= ? rad». De radianos para graus: «π/6 rad».

Os ângulos somam-se e subtraem-se como na escola – graus, minutos e segundos separadamente; 60′ passam a 1°, e quando não há minutos suficientes, um grau troca-se por 60′. Multiplicam-se e dividem-se por um número: 100° : 3 divide-se por partes, o resto dos graus passa a minutos e o dos minutos a segundos.

Os minutos e segundos escrevem-se com ′ e ″ (no teclado da aplicação) ou com apóstrofo e aspas: 25°30'15". Os graus dentro de uma função (sin 30°) estão no capítulo Equações trigonométricas.

Como introduzir

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Um ângulo – graus, minutos, segundos, também graus decimais.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Soma, diferença, múltiplo e quociente por um número.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Uma só forma da conversão, radianos para graus.

Exemplos

Graus decimais em todas as formas.

Enunciado: `5,5°`

Resultado

$$5^\circ 30' = 330' = 19800'' = \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}$$

Passos

- A parte decimal do grau passa a minutos (1° = 60'), a do minuto a segundos (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- Para minutos: os graus vezes 60 (1° = 60') mais os minutos: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- Para segundos: os minutos vezes 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- Para radianos: 180° = π rad, logo os graus vezes π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}$

Soma – 60' passam a 1°.

Enunciado: `25°30′ + 18°45′`

Resultado

$$44^\circ 15'$$

Passos

- Somamos separadamente graus, minutos e segundos: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Cada 60" dá 1' e cada 60' dá 1° – passamos: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Diferença – um grau troca-se por 60′.

Enunciado: `25°15′ - 18°45′`

Resultado

$$6^\circ 30'$$

Passos

- Há menos minutos (segundos) do que se subtrai – um grau (minuto) troca-se por 60′ (60″): $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Subtraímos separadamente graus, minutos e segundos: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Divisão por um número, o resto em minutos.

Enunciado: `100° : 3`

Resultado

$$33^\circ 20'$$

Passos

- Dividimos por partes: os graus, o resto em minutos somado; os minutos, o resto em segundos; os segundos

$$\begin{aligned} 100^\circ : 3 &= 33^\circ,\ 1^\circ = 60' \\ 60' : 3 &= 20' \\ \Rightarrow\ 100^\circ : 3 &= 33^\circ 20' \end{aligned}$$

Radianos para graus.

Enunciado: `π/6 rad`

Resultado

$$\begin{aligned} &30^\circ \\ &= 1800' \\ &= 108000'' \end{aligned}$$

Passos

- De radianos para graus: π rad = 180°, logo vezes 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- Para minutos: os graus vezes 60 (1° = 60′) mais os minutos: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- Para segundos: os minutos vezes 60 (1′ = 60″): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Limitações conhecidas

- Equações com ângulos em minutos (x + 25°30′ = 90°) ainda não.

16. Percentagens, razões e regra de três

As percentagens introduzem-se de forma breve, sem problema de texto: a parte «20 % de 480», a base «15 % = 45», a taxa «96 de 480 = ? %», um aumento e um desconto «480 + 15 %», «480 − 20 %» e o valor original «x − 20 % = 384». A aplicação calcula pelo 1 % como hoje na escola (1 % = 480 : 100 = 4,8); o chip «Fórmula» muda para parte = base · taxa com a taxa em decimal (480 · 0,2).

Uma razão «12 : 18» simplifica-se para 2 : 3, um todo divide-se numa razão («300 na razão 2 : 3 : 5» – a soma das partes, uma parte, cada parte) e uma proporção «3 : 4 = x : 20» resolve-se pelo produto dos extremos e dos meios. Uma razão de frações («2/3 : 4/9») multiplica-se primeiro pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores; dentro de uma expressão mais longa os dois pontos dividem.

A regra de três escreve-se como na escola – duas linhas com três pontos (ou …, →): «10 kg … 250 €, 12 kg … x», as unidades são opcionais. Por defeito é direta; com o chip «Inversa» (ou a palavra «inversa» depois de uma vírgula), inversa. Juro simples: juros(capital, taxa %, anos, imposto %) – o imposto é opcional. Juros compostos: juros compostos(capital, taxa %, anos, imposto %, frequência) – o imposto e a frequência (anual, semestral, trimestral, mensal, continuamente) são opcionais; mais tarefas (poupança, empréstimos, juros por dias) estão em Aplicações, capítulo Economia.

Como introduzir

`20 % de 480, 15 % = 45, 96 de 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Percentagens – parte, base, taxa, variação, valor original.
`12 : 18, 300 na razão 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Simplificar uma razão, dividir numa razão, uma proporção.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	A regra de três – proporcionalidade direta e inversa.
`juros(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Juro simples com imposto.
`juros compostos(10000, 3 %, 5, 15 %, mensal)`	Juros compostos com imposto e frequência de crédito.

Exemplos

Uma parte pelo 1 %.

Enunciado: `20 % z 480`

Resultado

96

Passos

- Primeiro 1 % – a base (o todo, 100 %) a dividir por 100:
  $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- As percentagens pedidas são tantas vezes 1 %:
  $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Um desconto pela fórmula.

Enunciado: `480 - 20 %` Fórmula parte = base · taxa

Resultado

384

Passos

- Valor reduzido = base · (1 − taxa), $20\,\% = 0{,}2$:
  $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

O preço original antes do desconto.

Enunciado: `x - 20 % = 384`

Resultado

$x = 480$

Passos

- O valor original é 100 %; depois da redução restam menos por cento – o valor conhecido:
  $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % é o valor conhecido a dividir pelo seu número de por cento: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- A base é 100 %, cem vezes 1 %:
  $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Divisão numa razão.

Enunciado: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Resultado

$$60,\ 90,\ 150$$

Passos

- O todo divide-se em tantas partes quanto a soma dos termos: $2 + 3 + 5 = 10$
- Uma parte é: $300 : 10 = 30$
- Cada parte tem tantas partes quanto diz o seu termo: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; verificação $60 + 90 + 150 = 300$

Uma razão de frações.

Enunciado: `2/3 : 4/9`

Resultado

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Passos

- Eliminamos as frações – todos os termos da razão vezes o mínimo múltiplo comum dos denominadores, 9
  $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$
- Simplificamos a razão – todos os termos a dividir pelo seu máximo divisor comum 2:
  $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Proporcionalidade inversa.

Enunciado: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Inversa

Resultado

$$x = 8\,\text{dní}$$

Passos

- A regra de três. Proporcionalidade inversa – tantas vezes mais de uma, tantas vezes menos da outra, as setas opostas
  $$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$
- Pelas setas, uma proporção – a segunda razão invertida:
  $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Juro simples com imposto de 15 %.

Enunciado: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Resultado

$$10000 + 510 = 10510$$

Passos

- Juro = capital · p/100 · tempo em anos:
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Do juro paga-se o imposto de $15\,\%$, fica o juro líquido:
  $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- No fim, o capital com o juro: $10000 + 510 = 10510$

Juros compostos com imposto de 15 % e crédito mensal.

Enunciado: `juros compostos(10000, 3 %, 5, 15 %, mensal)`

Resultado

$$K_n \approx 11\,358{,}31$$

Passos

- Dados: $K_0 = 10\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Convertemos as unidades:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Com juros simples, os juros calculam-se sempre sobre o capital inicial: K_n = K₀(1 + pn). Com juros compostos, são capitalizados e rendem também: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), sendo m o número de capitalizações por ano (anual, semestral, trimestral, mensal). A capitalização contínua é o limite m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Um imposto d sobre os juros reduz a taxa para p(1 − d). A taxa anual efetiva compara as frequências. Atualizar é o cálculo inverso – quanto depositar hoje. Com inflação π, o valor real é K_n/(1 + π)^n. Os juros mistos (como os bancos creditam juros uma vez por ano) capitalizam os anos inteiros e aplicam juros simples ao resto do último: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Equação do modelo:
  $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Capitalizações por ano: $m = 12$
- Taxa após imposto:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Taxa anual efetiva: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Substituímos:
  $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11\,358{,}31$
- Juros no total: $K_n - K_0 \approx 1\,358{,}31$

Limitações conhecidas

- Ainda sem problemas de texto – o enunciado tem de ser escrito de forma breve; os juros compostos com depósitos regulares e mais tarefas financeiras estão nos formulários das Aplicações.

17. Conversão de unidades

Uma conversão escreve-se «5 m² = ? cm²» (ou «5 m2 em cm2»). A aplicação escreve a relação de conversão e multiplica (para uma unidade menor) ou divide (para uma maior); nas unidades decimais acrescenta quantas casas a vírgula se desloca. Nas áreas e volumes explica porque o número é uma potência: 1 m = 100 cm, logo 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Comprimento de mm a km, área de mm² a km² e are e hectare, volume de mm³ a m³ e ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), massa de mg a t, tempo s, min, h, d – também composto «1 h 30 min» e o resultado em horas e minutos –, velocidade km/h e m/s (1 m/s = 3,6 km/h) e temperatura °C, K, °F pelas suas fórmulas.

Como introduzir

`5 m² = ? cm², 3,5 l em m³, 1 h 30 min = ? min`	Um valor com a unidade, «= ?» (ou «em») e a unidade pretendida.

Exemplos

Uma área – o número é um quadrado.

Enunciado: `5 m² = ? cm²`

Resultado

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Passos

- Nas áreas e volumes convertem-se as duas (três) dimensões – o número das comprimentos eleva-se à potência
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Para uma unidade menor – dá mais, por isso multiplicamos: $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Multiplicar por um 1 seguido de zeros (aqui 4) desloca a vírgula para a direita tantas casas quantos os zeros; as que faltam ficam zeros.

Litros para metros cúbicos.

Enunciado: `3,5 l = ? m³`

Resultado

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Passos

- A relação de conversão: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- Para uma unidade maior – dá menos, por isso dividimos: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Dividir por um 1 seguido de zeros (aqui 3) desloca a vírgula para a esquerda tantas casas quantos os zeros; as que faltam ficam zeros.

Minutos para horas, também em horas e minutos.

Enunciado: `150 min = ? h`

Resultado

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Passos

- A relação de conversão: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- Para uma unidade maior – dá menos, por isso dividimos: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- Em horas e minutos: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Velocidade – a dividir por 3,6.

Enunciado: `72 km/h = ? m/s`

Resultado

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Passos

- A relação de conversão: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- Para uma unidade maior – dá menos, por isso dividimos: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Temperatura pela fórmula.

Enunciado: `20 °C = ? K`

Resultado

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Passos

- As temperaturas não se convertem por um fator mas por uma fórmula (as escalas têm zeros diferentes):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Lógica e conjuntos

Uma proposição com os conectivos ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ é avaliada por uma tabela de verdade – uma coluna para cada conectivo, uns para verdadeiro – e a aplicação diz se é uma tautologia, uma contradição ou apenas satisfazível; para uma satisfazível acrescenta as formas normais disjuntiva e conjuntiva e uma forma simplificada.

Com o chip «Negação» a aplicação nega a proposição passo a passo pelas leis de De Morgan e as negações da implicação e da equivalência. Uma proposição com quantificadores (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) é negada diretamente – o quantificador universal passa a existencial e uma desigualdade à oposta. Para uma implicação oferece também a contrarrecíproca e a recíproca.

Os conjuntos dados pelos seus elementos ({1, 2, 3}) ou como intervalos ((1; 5), ⟨3; 7)) e a sua união, interseção, diferença, complementar no universo U e diferença simétrica são calculados operação a operação. Os conjuntos enumerados têm um diagrama de Venn com os elementos nas suas regiões, os intervalos o resultado na reta numérica.

Sem elementos (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) a aplicação verifica uma igualdade de expressões de conjuntos com uma tabela de pertença e diagramas de Venn dos dois lados; uma expressão sozinha, (A \ B) ∪ (B \ C), é sombreada num diagrama de Venn. Também decide se se verifica 3 ∈ A ou A ⊆ B.

Como introduzir

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Os conectivos do teclado da aplicação (separador ∧∪) ou de uma foto (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	A implicação e a equivalência como setas de um teclado normal. &, | e ! não são lidos como conectivos – são o valor absoluto e o fatorial.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Quantificadores com um domínio (∈ ℝ) ou uma condição (> 0), a proposição depois de dois pontos.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	A tarefa como palavra – a negação, a contrarrecíproca e a recíproca (negation, contrapositive, converse).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Um conjunto pelos seus elementos (separados por vírgulas, por ponto e vírgula com vírgula decimal), um

	intervalo, o universo U; cada definição na sua linha ou depois de uma vírgula.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	A união, interseção, diferença (também \), complementar A', diferença simétrica; a interseção vem primeiro.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Um elemento de um conjunto e um subconjunto – verifica-se ou não.

Exemplos

Uma tautologia – uma implicação é equivalente à sua contrarrecíproca.

Enunciado: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Resultado

A proposição é uma tautologia – verdadeira para toda a valoração.

Passos

- A tabela de verdade (1 – verdadeiro, 0 – falso), uma coluna para cada conectivo

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- Na última coluna só há uns – a proposição é verdadeira para toda a valoração, uma tautologia.

Uma proposição satisfazível com as suas formas normais.

Enunciado: `(p ∨ q) ⇒ r`

Resultado

A proposição é satisfazível – verdadeira apenas para algumas valorações. Uma forma equivalente simplificada:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Passos

- A tabela de verdade (1 – verdadeiro, 0 – falso), uma coluna para cada conectivo

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- Na última coluna há uns e zeros – a proposição é satisfazível, mas não é uma tautologia.
- Uma forma simplificada: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; a forma normal disjuntiva completa – a disjunção das linhas em que é verdadeira
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- A forma normal conjuntiva – a partir das linhas em que é falsa
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Uma negação pelas leis de De Morgan passo a passo.

Enunciado: `p ∧ (q ⇒ r)` Negação

Resultado

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Passos

- A negação: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Lei de De Morgan, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$:
  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- A negação de uma implicação, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$:
  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

A negação de uma proposição com quantificador.

Enunciado: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Resultado

$$\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$$

Passos

- A negação: $\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 > 0\right)$
- «Para todo … verifica-se» passa a «existe um para o qual não se verifica»: $\exists x \in \mathbb{R}:\ \neg\left(x^2 + 1 > 0\right)$
- A negação de uma igualdade ou desigualdade é a relação oposta ($<$ para $\geq$, $=$ para $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$

A contrarrecíproca.

Enunciado: `p ⇒ ¬q` Contrarrecíproca

Resultado

$$q \Rightarrow \neg p$$

Passos

- A contrarrecíproca de $A \Rightarrow B$ é $\neg B \Rightarrow \neg A$ – equivalente a ela: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, com as negações simplificadas $q \Rightarrow \neg p$

O complementar de uma união com diagrama de Venn.

Enunciado: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

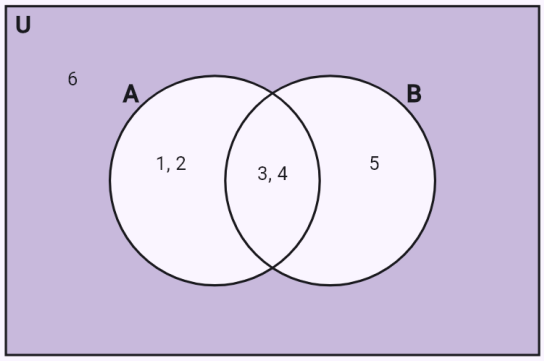
Resultado

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Passos

- Dado: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Dado: $B = \{3, 4, 5\}$
- Dado: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A união – os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- O complementar – os elementos do universo que não estão no conjunto: $(A \cup B)' = \{6\}$

Gráfico



A interseção de intervalos na reta numérica.

Enunciado: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

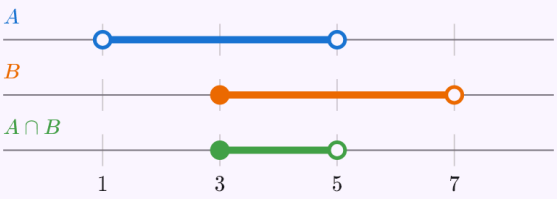
Resultado

$$A \cap B = [3,\ 5)$$

Passos

- Dado: $A = (1,\ 5)$
- Dado: $B = [3,\ 7)$
- A interseção – os elementos que estão em ambos os conjuntos: $A \cap B = [3,\ 5)$

Gráfico



Cada conjunto dado tem a sua própria linha no eixo, o resultado está a verde. Um ponto cheio pertence ao conjunto, um vazio não.

A lei distributiva com uma tabela de pertença.

Enunciado: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Resultado

A igualdade verifica-se – os dois lados são o mesmo conjunto.

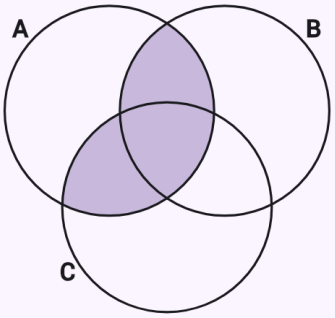
Passos

- A tabela de pertença – para cada forma de um elemento pertencer aos conjuntos (1 – pertence), comparam-se os dois lados

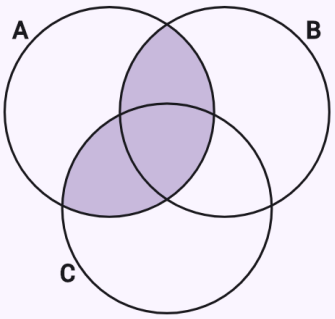
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Gráfico

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



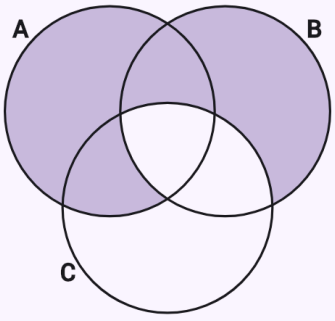
Uma expressão de conjuntos num diagrama de Venn.

Enunciado: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Resultado

$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Gráfico



Limitações conhecidas

- Uma tabela de verdade para 5 variáveis no máximo (32 linhas), um diagrama de Venn para 4 conjuntos no máximo.
- Os conjuntos dados por uma propriedade ({x ∈ ℝ: x² < 4}) ainda não são lidos – escreva-os como intervalos.

19. Números complexos

Escreva um número complexo com a unidade imaginária i: 1 - i√3 (ou 1 - i*sqrt(3)), na forma trigonométrica 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) ou cis(pi/3), na forma exponencial 3e^(i pi/4); os ângulos também em graus (cos 60° + i sin 60°). Os números podem ter nome, cada um na sua linha (z_1 = 1 + i), com uma expressão nos seus nomes na última linha (z_1/z_2, z^8).

Para um único número, a aplicação calcula o módulo $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ e o argumento φ – a partir dos valores da tabela do cosseno e do seno ou, caso contrário, do ângulo agudo de $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ e do quadrante (exatamente com arctg e aproximadamente em radianos e em graus) – e escreve as formas trigonométrica e exponencial. Um número na forma trigonométrica passa para a forma algébrica. O argumento está em ⟨0; 2π); o chip «Argumento principal» muda-o para (−π; π⟩. O gráfico mostra o número no plano complexo como um vetor com o arco do argumento.

Uma potência como (1 + i)^10 calcula-se pela fórmula de De Moivre, com o argumento reduzido de múltiplos de 2π; o produto e o quociente, pelos módulos e argumentos. Os chips escolhem «Forma trigonométrica» (numa potência «Fórmula de De Moivre») ou «Forma algébrica»; a divisão de números algébricos multiplicando pelo conjugado está no capítulo Cálculo com expressões. Uma raiz root(3, 8i) e uma equação binómia $z^3 = 8i$ dão as n raízes por $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\,\mathrm{sen}((\varphi + 2k\pi)/n))$; no gráfico são os vértices de um polígono regular de n lados. Uma equação na incógnita z resolve-se diretamente nos complexos; o chip «Resolver em:» muda-a para $\mathbb{R}$. Uma equação do segundo grau com coeficientes complexos ($z^2 + i = 2z$) resolve-se completando o quadrado, $(z - 1)^2 = 1 - i$, e a raiz quadrada complexa procura-se como a + bi comparando as partes real e imaginária.

Uma equação com o conjugado $\bar{z}$ (a tecla $\bar{z}$ escreve conj(z), uma foto dá \bar{z}), com |z|, Re z e Im z é resolvida substituindo z = x + yi: a aplicação escreve ambos os membros na forma a + bi, iguala as partes reais e as imaginárias e resolve o sistema de duas equações em x e y que resulta – isola uma variável numa equação e substitui-a na outra, e se a equação se fatorar (y(2x + 1) = 0), separa a solução em casos. As soluções são mostradas como pontos do plano complexo. Se as partes imaginárias coincidirem por si (|z − 1| = 2, Re z ≥ 1, |z − i| < |z + 1|), o resultado é um conjunto de pontos: a aplicação eleva os módulos ao quadrado, completa os quadrados e descreve a circunferência (o círculo, o exterior de uma circunferência), a reta, o semiplano ou a mediatriz. Várias condições, cada uma na sua linha ou separadas por vírgulas (|z| ≤ 2, Re z > 0), e uma dupla desigualdade (1 < |z − 1| ≤ 2) são desenhadas como a sua interseção – uma região sombreada; a fronteira contínua pertence ao conjunto, a tracejada não.

Como introduzir

`1 - i*sqrt(3)`	A forma algébrica com a unidade imaginária i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	A forma trigonométrica, abreviada cis φ.
`3e^(i pi/4)`	A forma exponencial.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Números com nome, cada um na sua linha, e uma expressão com eles.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Todas as raízes de índice n, uma equação binómia.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	O conjugado, a parte real e a imaginária.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Um conjunto de pontos do plano complexo, várias condições linha a linha.

Exemplos

Módulo, argumento a partir de valores da tabela, formas trigonométrica e exponencial.

Enunciado: `1 - i*sqrt(3)`

Resultado

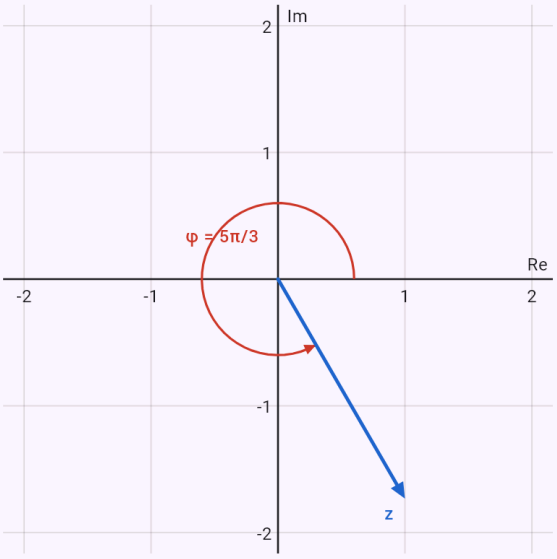
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Passos

- O módulo |z| = √(a² + b²):
  $$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- O argumento φ a partir de cos φ = a/|z| e sen φ = b/|z| – valores da tabela
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- A forma trigonométrica z = |z|(cos φ + i sen φ):
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- A forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

Um argumento fora da tabela – ângulo agudo e quadrante.

Enunciado: `-3 + 4i`

Resultado

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$$

$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

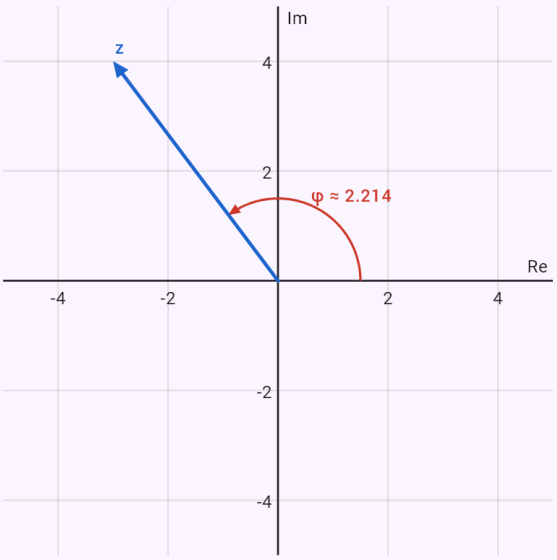
$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Passos

- O módulo |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- O ângulo agudo α a partir de tg α = |b/a|. O número está no 2.º quadrante, logo o argumento é
  $\tan\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$

  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- A forma trigonométrica z = |z|(cos φ + i sen φ):
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$
- A forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

Da forma trigonométrica para a algébrica.

Enunciado: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Resultado

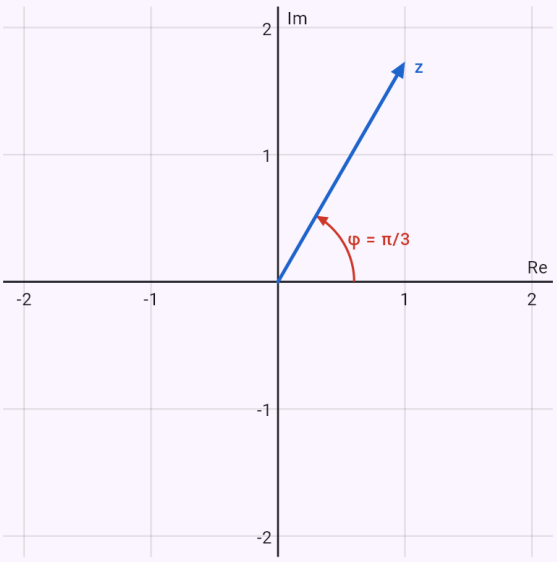
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Passos

- O número é dado na forma trigonométrica (exponencial) – o módulo e o argumento leem-se diretamente
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- A forma algébrica – substituem-se os valores do cosseno e do seno e multiplica-se
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- A forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

A fórmula de De Moivre.

Enunciado: `(1 + i)^10` Fórmula de De Moivre

Resultado

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

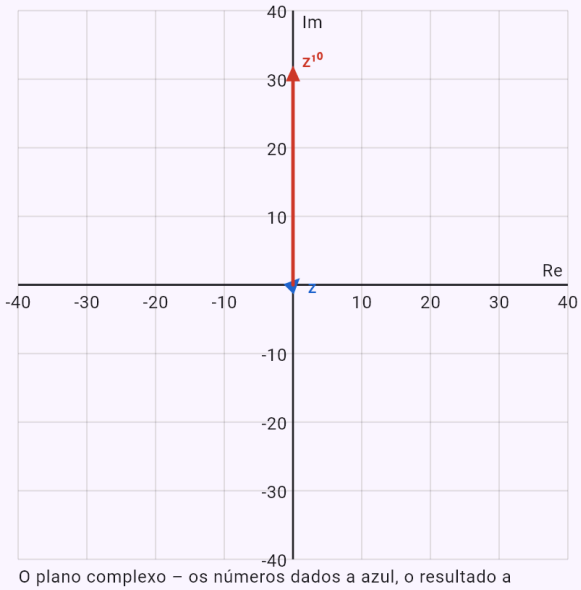
Passos

- O módulo |z| = √(a² + b²): $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- O argumento φ a partir de cos φ = a/|z| e sen φ = b/|z| – valores da tabela

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- A fórmula de De Moivre $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- O argumento é levado ao intervalo $\langle 0; 2\pi)$ com um múltiplo do ângulo giro: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- A forma algébrica – substituem-se os valores do cosseno e do seno e multiplica-se:
  $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

Um quociente na forma trigonométrica.

Enunciado: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Forma trigonométrica

Resultado

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Passos

- O módulo |z| = √(a² + b²): $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- O argumento φ a partir de cos φ = a/|z| e sen φ = b/|z| – valores da tabela

  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- O módulo |z| = √(a² + b²):

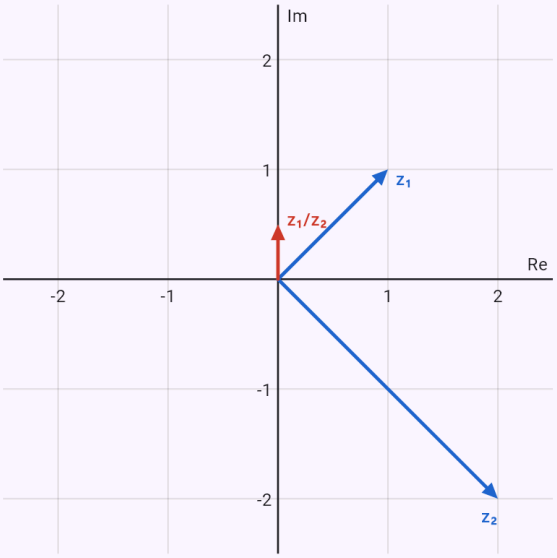
  $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- O argumento φ a partir de cos φ = a/|z| e sen φ = b/|z| – valores da tabela

  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Na divisão, os módulos dividem-se e os argumentos subtraem-se

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- O argumento é levado ao intervalo $\langle 0; 2\pi)$ com um múltiplo do ângulo giro: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- A forma algébrica – substituem-se os valores do cosseno e do seno e multiplica-se

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

Uma equação binómia – três raízes nos vértices de um triângulo.

Enunciado: `z^3 = 8i`

Resultado

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

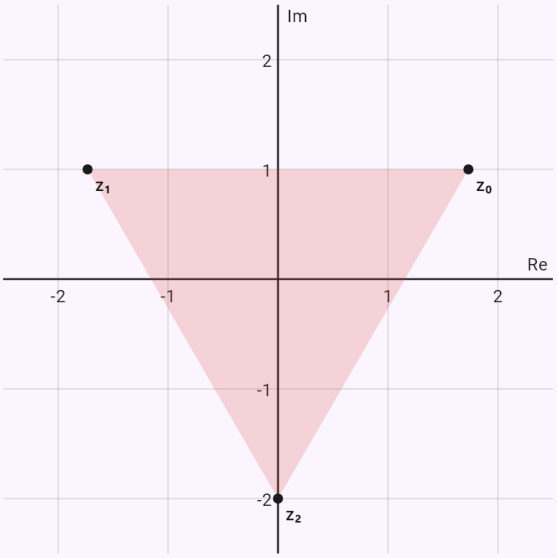
Passos

- Uma equação binómia $z^n = a$ – as suas raízes são todas as raízes de índice n de a: $z^3 = 8i$
- O módulo |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- O número está sobre um eixo – o seu argumento diretamente: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- As 3 raízes pela fórmula $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\,\mathrm{sen}((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Para k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Para k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Para k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- No plano complexo, as raízes são os vértices de um polígono regular de 3 lados inscrito na circunferência de centro 0 e raio 2

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

Equação com o conjugado – igualam-se as partes reais e as imaginárias.

Enunciado: `z + 2conj(z) = 3 - i`

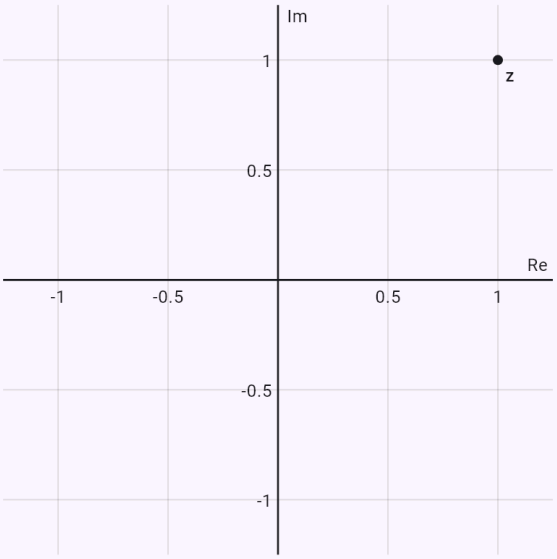
Resultado

$$z = 1 + i$$

Passos

- Substituímos z = x + yi com x e y reais: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Escrevemos ambos os membros na forma a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Dois números complexos são iguais quando as partes reais e as partes imaginárias são iguais: $3x = 3$ e $-y = -1$
- Substituímos $y = 1$ na outra equação: $3x = 3$
- Passamos tudo para um lado: $3x - 3 = 0$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita: $3x = 3$
- Dividimos pelo coeficiente 3: $x = 1$

Gráfico



Plano complexo (de Gauss) – as soluções como pontos: no eixo horizontal a parte real, no vertical a imaginária.

A equação z² = z̄ – fatoração e casos, quatro pontos.

Enunciado: `z^2 = conj(z)`

Resultado

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

Resolver por um método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

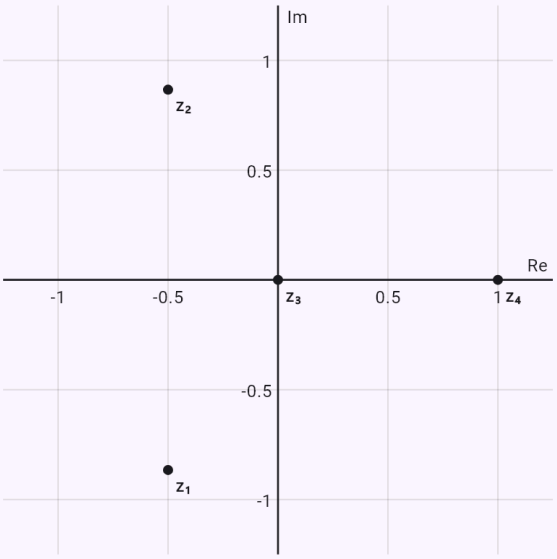
Passos

- Substituímos z = x + yi com x e y reais: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Escrevemos ambos os membros na forma a + bi: $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Dois números complexos são iguais quando as partes reais e as partes imaginárias são iguais: $x^2 - y^2 = x$ e $2xy = -y$
- Fatoramos a equação – um produto é zero quando algum dos fatores é zero

  $$2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$$

- Substituímos $x = -\frac{1}{2}$ na outra equação: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Passamos tudo para um lado: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Substituímos $y = 0$ na outra equação: $x^2 = x$
- Passamos tudo para um lado: $x^2 - x = 0$
- Calculamos o discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Gráfico



Plano complexo (de Gauss) – as soluções como pontos: no eixo horizontal a parte real, no vertical a imaginária.

Interseção de um círculo e de um semiplano – região sombreada, a fronteira tracejada não lhe pertence.

Enunciado: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

Resultado

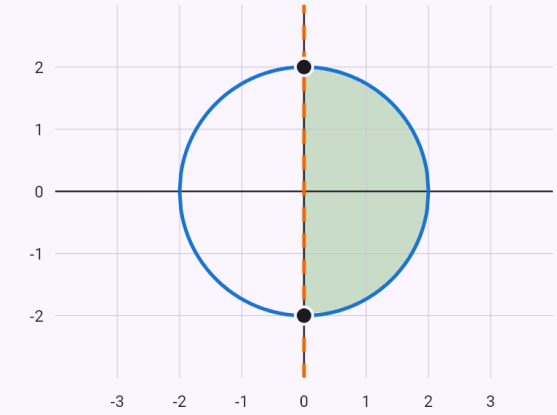
$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Passos

- Substituímos z = x + yi com x e y reais: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{Re} z = x$
- Condição 1 para x e y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Ambos os membros são não negativos, elevamo-los ao quadrado: $x^2 + y^2 \leq 4$
- É o círculo de centro 0 e raio 2, com a circunferência.
- Condição 2 para x e y: $x > 0$
- É o semiplano à direita da reta $x = 0$, sem a reta fronteira.
- Inequação 1: $x^2 + y^2 \leq 4$
- A fronteira é a curva $x^2 + y^2 = 4$: traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- Inequação 2: $x > 0$
- A fronteira é a curva $x = 0$: traçada tracejada, seus pontos não pertencem à solução.
- Substituímos o ponto $[1;\ 0]$: $1 > 0$ é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- A solução do sistema é a parte comum dessas regiões, sombreada no gráfico.

- Vértices da região (interseções das fronteiras): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Gráfico



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
$\operatorname{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Plano complexo (de Gauss) – no eixo horizontal x = Re z, no vertical y = Im z. O conjunto de pontos é a região sombreada. A fronteira contínua pertence a ela, a tracejada não.

Os pontos equidistantes de i e de −1 – uma mediatriz.

Enunciado: `|z - i| = |z + 1|`

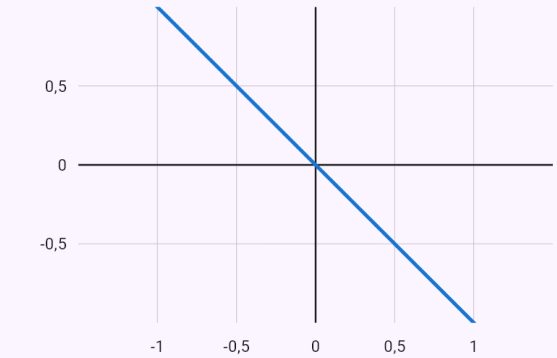
Resultado

$$y = -x$$

Passos

- Substituímos z = x + yi com x e y reais: $z = x + yi$
- A condição para x e y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Ambos os membros são não negativos, elevamo-los ao quadrado: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- São os pontos equidistantes de i e -1 – a mediatriz do segmento de extremos i e -1: $y = -x$

Gráfico



$|z - i| = |z + 1|$

Plano complexo (de Gauss) – no eixo horizontal x = Re z, no vertical y = Im z. O conjunto de pontos é a linha desenhada.

Limitações conhecidas

- As raízes cujo argumento não é um valor da tabela são dadas na forma trigonométrica e aproximadamente na forma algébrica.
- Um conjunto de pontos é descrito quando é uma circunferência (círculo), uma reta (semiplano) ou uma mediatriz; outras cónicas (Im $z^2 = 2$) apenas são desenhadas e uma soma de módulos ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, uma elipse) ainda não é suportada.
- Um sistema em x e y que não se resolve isolando uma incógnita é resolvido sem passos.

Gerado a partir da aplicação Mathtrace