# Mathtrace – manual

VI. Aplicações: física e engenharia

## Índice

VI. Aplicações: física e engenharia

42. Aplicações de equações diferenciais

43. Física

44. Estática e resistência dos materiais

45. Astronomia e astrofísica

46. Aplicações da análise complexa

# 42. Aplicações de equações diferenciais

As aplicações estão na secção «Aplicações» do ecrã inicial: os mosaicos das áreas escolhidas nas definições (a roda dentada, «As minhas áreas») e aplicações isoladas fixadas com o pionés na lista ou no formulário; «Todas as aplicações» mostra-as por áreas (uma aplicação pode pertencer a várias, um circuito RC à física e à engenharia eletrotécnica, por exemplo). As equações diferenciais usam um formulário com 23 modelos: radiocarbono, decaimento e meia-vida, crescimento exponencial, cadeia de decaimento, resfriamento de Newton (também a hora da morte a partir de duas medições), cinética química de ordem 0–2, medicamento no sangue, álcool no sangue, poupança e empréstimo, circuitos RC, RL e RLC, mola, queda com resistência do ar, esvaziamento de um tanque, mistura, crescimento logístico e de Gompertz, população com captura, epidemia SIR, predador e presa, competição de duas espécies e quimiostato.

Escolhe o modelo, a variante e o que procura; as constantes vêm preenchidas e podem ser alteradas. Cada grandeza e o resultado têm a unidade à escolha: a aplicação converte os valores (a conversão é um passo). O «?» junto ao modelo explica de onde vem a sua equação.

Os passos montam o modelo, resolvem a equação (separação de variáveis, fator integrante, equação característica), aplicam as condições, isolam a grandeza procurada e substituem os números. Os sistemas resolvem-se numericamente por Runge–Kutta; os equilíbrios e a estabilidade, exatamente. O gráfico mostra as grandezas no tempo e, nos sistemas, o plano de fase.

# Exemplos

## Idade de um achado com 35 % de ¹⁴C restante.

Enunciado: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

**Resultado**

$$t \approx 8700 \text{ anos}$$

**Passos**

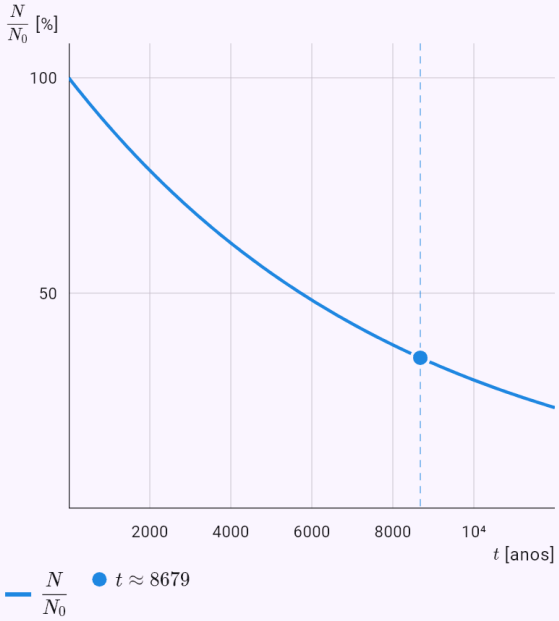
- Procuramos $t$; dados: $T_{1/2} = 5730 \text{ anos}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Convertemos as unidades: $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Os seres vivos absorvem carbono do ar e por isso contêm a mesma proporção do isótopo radioativo ¹⁴C que a atmosfera. Após a morte a absorção cessa e o ¹⁴C decai. O número de decaimentos por unidade de tempo é proporcional ao número de núcleos restantes: dN/dt = −λN, sendo λ a constante de decaimento. A solução é N = N₀·e^(−λt); após a meia-vida T½ = 5730 anos resta metade, logo λ = ln 2 / T½. Da proporção de ¹⁴C restante (ou da atividade medida comparada à de uma amostra viva) obtém-se a idade. Equação do modelo: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separamos as variáveis: $\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$
- Integramos ambos os lados: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante ±e^C chama-se de novo C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Substituímos a condição inicial $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- A solução da condição inicial (solução particular): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- Numa meia-vida a quantidade cai para metade – constante de decaimento

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

- Isolamos a grandeza procurada: $t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$
- Substituímos: $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0{,}35} \approx 8679 \text{ anos}$

- Os laboratórios indicam a «idade radiocarbono» com a meia-vida de Libby de 5568 anos e convertem-na com uma curva de calibração (o ¹⁴C da atmosfera nem sempre foi o mesmo); a idade real pode diferir um pouco.

**Gráfico**




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Hora da morte: 30 °C ao ser encontrado, 28 °C uma hora depois, sala a 20 °C.

Enunciado: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

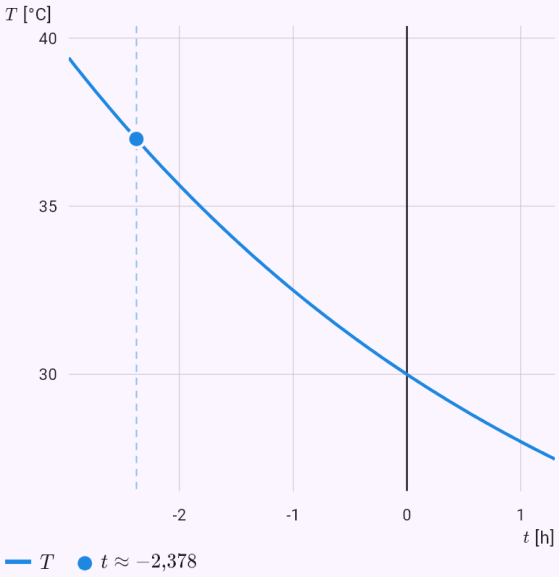
**Resultado**

$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$

**Passos**

- Procuramos $t$; dados $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad t_1 = 1\,\mathrm{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Um corpo perde calor tanto mais depressa quanto maior a diferença de temperaturas: dT/dt = −k(T − Tₐ), sendo Tₐ a temperatura ambiente e k dependente do corpo. A solução é T = Tₐ + (T₀ − Tₐ)·e^(−kt). k obtém-se de duas medições. É assim que a medicina legal estima a hora da morte: mede a temperatura do corpo ao encontrá-lo e um pouco depois e calcula quando estava a 37 °C.
  Equação do modelo: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separamos as variáveis: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Integramos ambos os lados: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Aplicamos a exponencial − a constante ±e^C chama-se de novo C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Substituímos a condição inicial $T(0) = T_0$: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- A solução da condição inicial (solução particular): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k a partir da segunda medição $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Isolamos a grandeza procurada $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Substituímos: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Um tempo negativo significa antes da primeira medição (na hora da morte, tantas horas antes do achado).

**Gráfico**




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## 500 mg a cada 8 horas: o nível estacionário.

Enunciado: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

`mode=repeated)`

**Resultado**

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

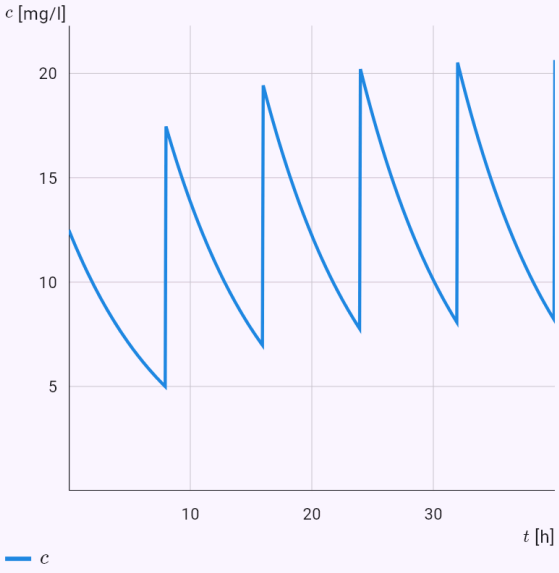
**Passos**

- Procuramos $c_{max}$; dados $D = 500\,\mathrm{mg}, \quad V = 40\,\mathrm{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}, \quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Um medicamento distribui-se no volume de distribuição V; rins e fígado eliminam-no a uma velocidade proporcional à concentração: dc/dt = −kc, com k = ln 2 / T½. Após uma dose D, c = (D/V)·e^(−kt). Com doses repetidas a cada τ, os restos somam-se (série geométrica) e o nível estabiliza entre c_min e c_max. Com uma infusão de taxa R, dc/dt = R/V − kc e a concentração tende a R/(kV). Equação do modelo: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Concentração inicial após a dose: $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Constante de eliminação a partir da meia-vida biológica: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h^{-1}}$
- Separamos as variáveis: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Integramos ambos os lados: $\ln|c| = -kt + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante ±e^C chama-se de novo C: $c = Ce^{-kt}$
- Substituímos a condição inicial $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- A solução da condição inicial (solução particular): $c = c_0 e^{-kt}$
- Parte do medicamento que resta até à dose seguinte: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Isolamos a grandeza procurada

$$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$$

- Substituímos: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Substituímos: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Fator de acumulação (quantas vezes o nível estacionário supera o de uma dose): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

**Gráfico**




Como as grandezas variam no tempo.

## Prestação mensal de um empréstimo de 1 000 000 CZK por 20 anos a 5 %.

Enunciado: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr];`

```
B=0[CZK]; kind=loan)
```

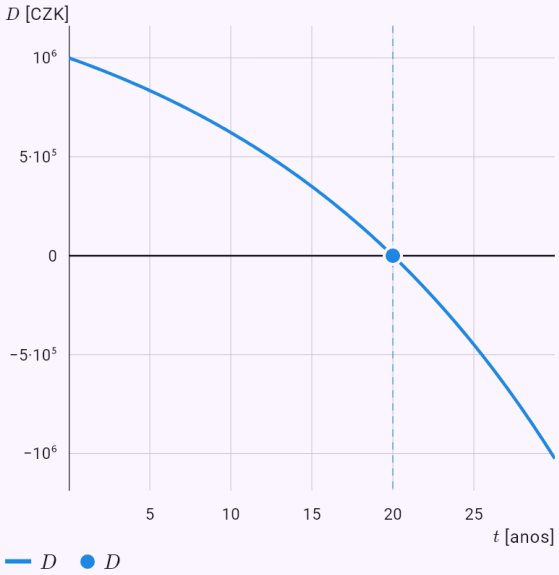
### Resultado

$$a \approx 6\,592\,\mathrm{CZK/mês}$$

### Passos

- Procuramos $a$; dados
  $D_0 = 1\,000\,000\,\mathrm{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{ao ano}, \quad t = 20\,\text{anos},$
- Convertemos as unidades:
  $r = 5\,\%\ \text{ao ano} = 0{,}05\,\text{ano}^{-1}$
- Com juros contínuos, os juros acumulam-se a cada instante em proporção ao saldo: dB/dt = rB, sendo r a taxa anual. Depósitos regulares a aumentam o saldo (dB/dt = rB + a), as prestações de um empréstimo reduzem a dívida (dD/dt = rD − a). Resolve-se separando variáveis; a solução dá o saldo, o prazo ou a prestação (anuidade contínua). Equação do modelo:
  $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Separamos as variáveis: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Integramos ambos os lados: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Aplicamos a exponencial − a constante ±e^C chama-se de novo C: $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Substituímos a condição inicial $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- A solução da condição inicial (solução particular):
  $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Os juros contínuos são um modelo: os bancos capitalizam mensal ou anualmente e a diferença é pequena.
- Isolamos a grandeza procurada: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Substituímos
  $a = \frac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79\,100\,\mathrm{CZK/ano}$
- Total pago: $a\,t = 1\,582\,000\,\mathrm{CZK}$
- Convertemos as unidades:
  $a \approx 79\,100\,\mathrm{CZK/ano} = 6\,592\,\mathrm{CZK/mês}$

### Gráfico




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Quanto tempo um capacitor leva a carregar até metade da tensão.

Enunciado: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

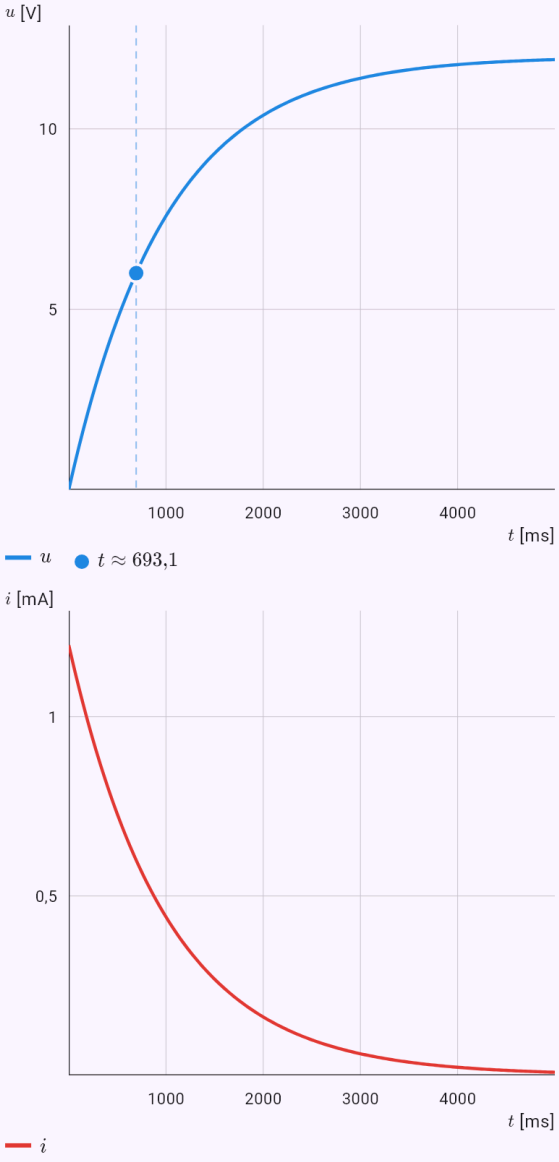
### Resultado

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

### Passos

- Procuramos $t$; dados $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Ao carregar um capacitor através de um resistor, a lei de Kirchhoff dá U = Ri + u e a corrente carrega o capacitor: i = C·du/dt. Juntas, RC·du/dt + u = U. A tensão aproxima-se da da fonte: u = U(1 − e^(−t/τ)), sendo τ = RC a constante de tempo; a corrente i = (U/R)·e^(−t/τ) diminui. Na descarga, u = U₀·e^(−t/τ). Equação do modelo: $RC\dfrac{du}{dt} + u = U$
- Constante de tempo: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Separamos as variáveis: $\dfrac{du}{u - U} = -\dfrac{dt}{\tau}$
- Integramos ambos os lados: $\ln|u - U| = -\dfrac{t}{\tau} + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante ±e^C chama-se de novo C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Substituímos a condição inicial $u(0) = 0$: $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- A solução da condição inicial (solução particular): $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Isolamos a grandeza procurada: $t = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{u}{U}\right)$
- Substituímos: $t = -1000 \ln\left(1 - \dfrac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

### Gráfico




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Mola amortecida: deslocamento em 1 s.

Enunciado: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

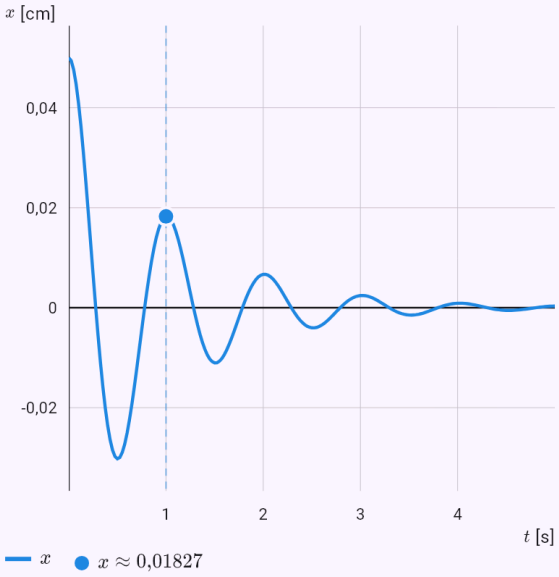
### Resultado

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

### Passos

- Procuramos $x$; dados
  $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Convertemos as unidades: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Sobre um corpo preso a uma mola atuam a força elástica −kx (Hooke), o amortecimento −b·v e eventualmente uma força externa $F_0$·cos ωt. Pela 2.ª lei de Newton m·x'' + b·x' + kx = $F_0$·cos ωt, uma equação linear de 2.ª ordem com coeficientes constantes. As raízes da equação característica indicam se o corpo oscila ou apenas volta ao equilíbrio. Uma excitação perto da frequência natural $\omega_0$ = √(k/m) provoca ressonância. Equação do modelo:
  $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$
- Frequência angular natural (sem amortecimento):
  $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Coeficiente de amortecimento δ:
  $\delta = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Procuramos soluções x = e^(λt); substituindo e dividindo por e^(λt), obtemos a equação característica:
  $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Amortecimento subcrítico (δ < $\omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): raízes complexas, oscilações amortecidas.
- Solução da equação homogénea:
  $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Substituímos as condições na solução geral:
  $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, donde
  $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- A solução da condição inicial (solução particular):
  $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Substituímos: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Convertemos as unidades: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

### Gráfico




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Epidemia com $R_0$ = 2,5: pico e total de infectados.

Enunciado: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

**Resultado**

$$I_{max} \approx 2340\,\text{ind.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{ind.}$$

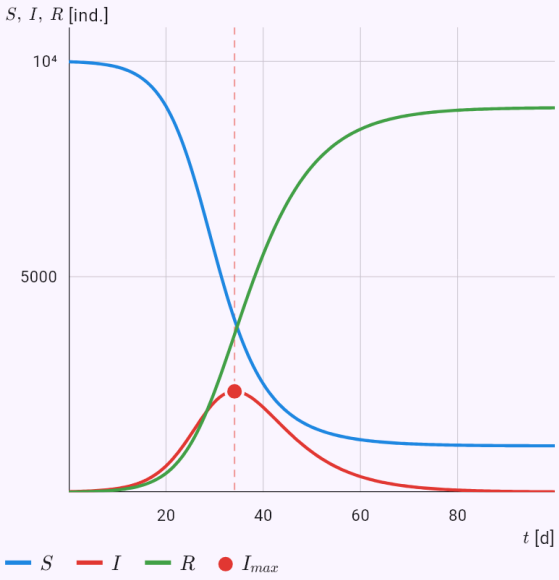
**Passos**

- Procuramos $t_{max}$; dados $N = 10\,000\,\text{ind.}, \quad I_0 = 10\,\text{ind.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7$ c
- A população N divide-se em suscetíveis S, infectados I e recuperados R. As infecções são proporcionais aos encontros: β·S·I/N; os infectados recuperam com taxa γ = 1/D (D, a duração da doença). O sistema S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI não tem solução elementar e é resolvido numericamente. Exatamente obtêm-se o número básico de reprodução $R_0$ = β/γ, o pico, o total de infectados e o limiar de imunidade de grupo 1 − 1/$R_0$.
  Equação do modelo
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Taxa de recuperação: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Taxa de transmissão: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- A soma S + I + R = N é constante (as equações somam zero).
- Limiar de imunidade de grupo (proporção de imunes com a qual a doença deixa de se propagar):
  $$1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$$
- A epidemia arranca porque no início vale
  $$I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$$
- O pico ocorre com S = N/$R_0$; da equação para dI/dS
  $$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$
- Resolvemos a equação numericamente (bisseção)
  $$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{ind.}$$

- No total adoecem: $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{ind.}\ (89{,}3\,\%)$
- O sistema não tem solução em funções elementares: resolvemos numericamente pelo método de Runge–Kutta de ordem 4, passo $0{,}05$, em $[0,\ 100]$
- › O método: método de Runge–Kutta de 4.ª ordem, 2000 passos
- Da solução numérica: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

**Gráfico**

No tempo | Plano de fase




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Predador e presa: equilíbrio, estabilidade e período.

Enunciado: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

`c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

**Resultado**

$[x^*,\ y^*] \approx [80,\ 50]$

$T \approx 14{,}9\ \text{meses}$

**Passos**

- Procuramos $T$; dados $a = 0{,}5\,\text{mês}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{ind.}\cdot\text{mês})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{mê}$
- As presas x multiplicam-se sem predadores (ax) e os predadores y morrem sem presas (−cy). Os encontros, proporcionais a xy, reduzem as presas (−bxy) e alimentam os predadores (+dxy). O sistema x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) tem o equilíbrio [c/d; a/b], com autovalores imaginários puros: as populações oscilam periodicamente, os predadores com atraso. Resolve-se numericamente; equilíbrios e integral primeira, exatamente. Equação do modelo

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Equilíbrios – todas as derivadas são nulas $x(a - by) = 0,\ y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0,\ 0],\ \left[\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}\right] \approx [80,$
- Estabilidade por linearização – matriz jacobiana do sistema

  $J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$

- Em $[0,\ 0]$ autovalores $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – sela (instável).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- Em $[80,\ 50]$ autovalores $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – centro (oscilações em torno do equilíbrio).

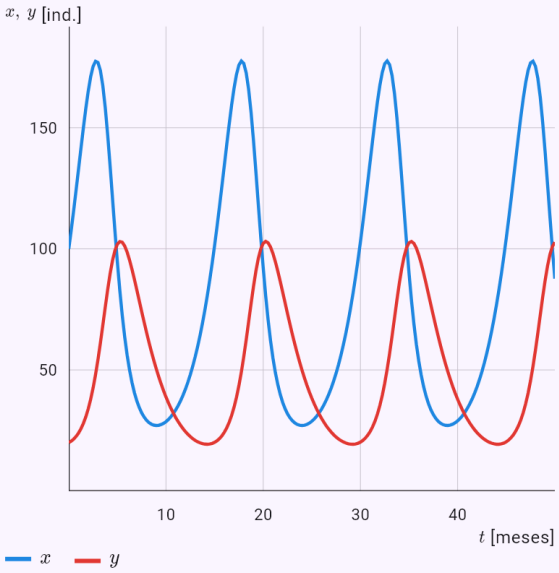
  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Dividindo as equações e separando obtém-se uma integral primeira, constante ao longo da trajetória: $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$
- Como V não muda ao longo de uma trajetória, as trajetórias são curvas fechadas: as populações oscilam periodicamente.

- Período das pequenas oscilações em torno do equilíbrio (dos autovalores): $T \approx \dfrac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\ \text{meses}$
- O sistema não tem solução em funções elementares: resolvemos numericamente pelo método de Runge–Kutta de ordem 4, passo $0{,}0125$, em $[0,\ 50]$
- › O método: método de Runge–Kutta de 4.ª ordem, 4000 passos
- Da solução numérica: $T \approx 14{,}95\ \text{meses}$

**Gráfico**

No tempo | Plano de fase




Como as grandezas variam no tempo.

## Recipiente cónico: tempo de esvaziamento.

Enunciado: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

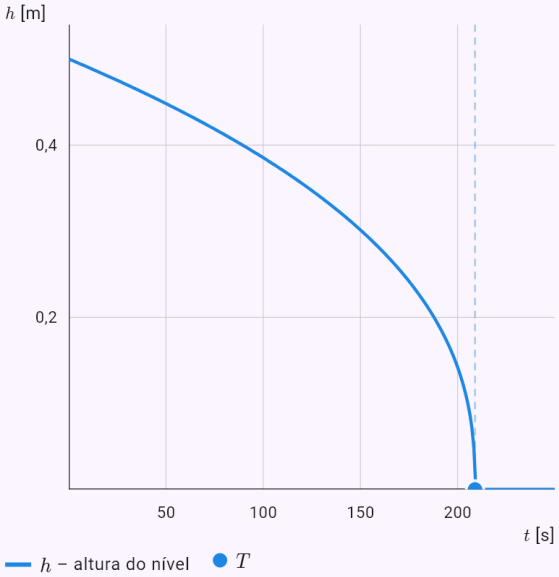
### Resultado

$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

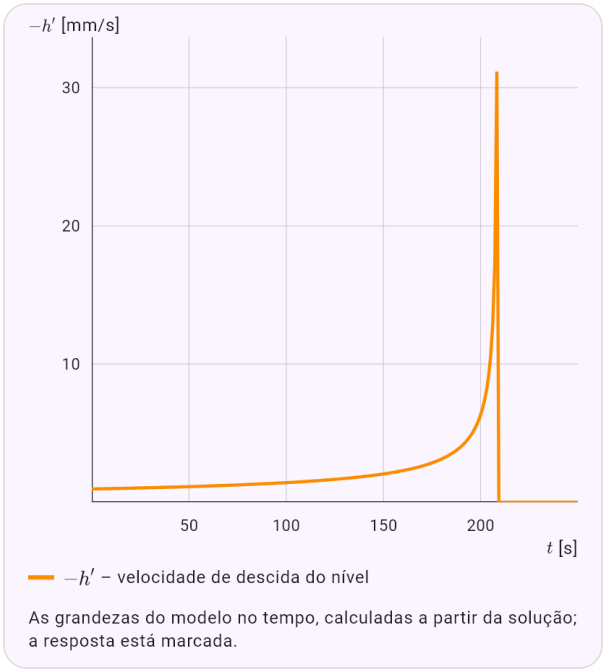
### Passos

- Procuramos $T$; dados
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Convertemos as unidades
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Um recipiente de revolução da forma escolhida tem um orifício no fundo. O líquido sai à velocidade dada pelo balanço de energia: a de Torricelli v = μ√(2gh), corrigida por um orifício grande (termo s²/S²), por um tubo de saída de comprimento L (acrescenta a altura L, mas também atrito conforme a viscosidade, laminar ou turbulento) e, num recipiente fechado, pela depressão do ar acima do nível, que trava o caudal até parar. Em dt sai s·v·dt e o nível desce dh, logo dt = −S(h)/(s·v) dh e o tempo obtém-se integrando. O gráfico mostra o nível, a velocidade do jato e o caudal. Para r = R·(h/H)^p sem tubo nem tampa mostra-se também a fórmula. Com r = k·h^(1/4) o nível desce uniformemente, assim funcionavam os relógios de água. Equação do modelo
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Secção do recipiente à altura h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Água a 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Líquida à pressão normal de 0 a 100 °C.
- Separamos as variáveis: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- A velocidade do jato depende do nível de forma complicada, por isso o integral é calculado numericamente.
- Para comparar, Torricelli sem a correção de orifício grande: $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Isolamos a grandeza procurada: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Substituímos: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Convertemos as unidades: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

### Gráfico






As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

**Óleo de um recipiente esférico por um tubo: nível, velocidade de saída pelo orifício, caudal e velocidade de descida do nível.**

Enunciado: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

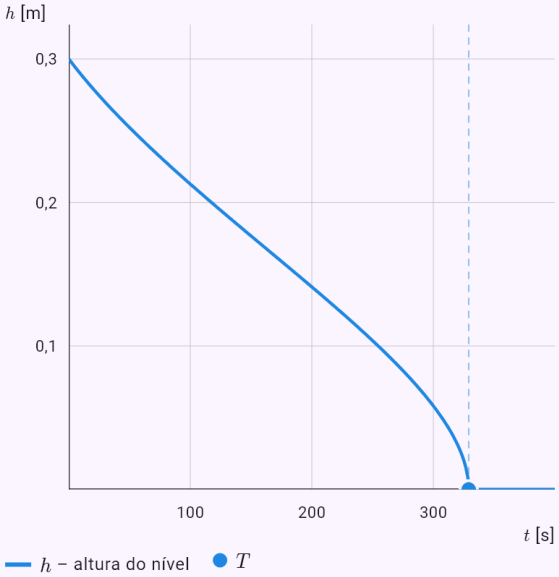
### Resultado

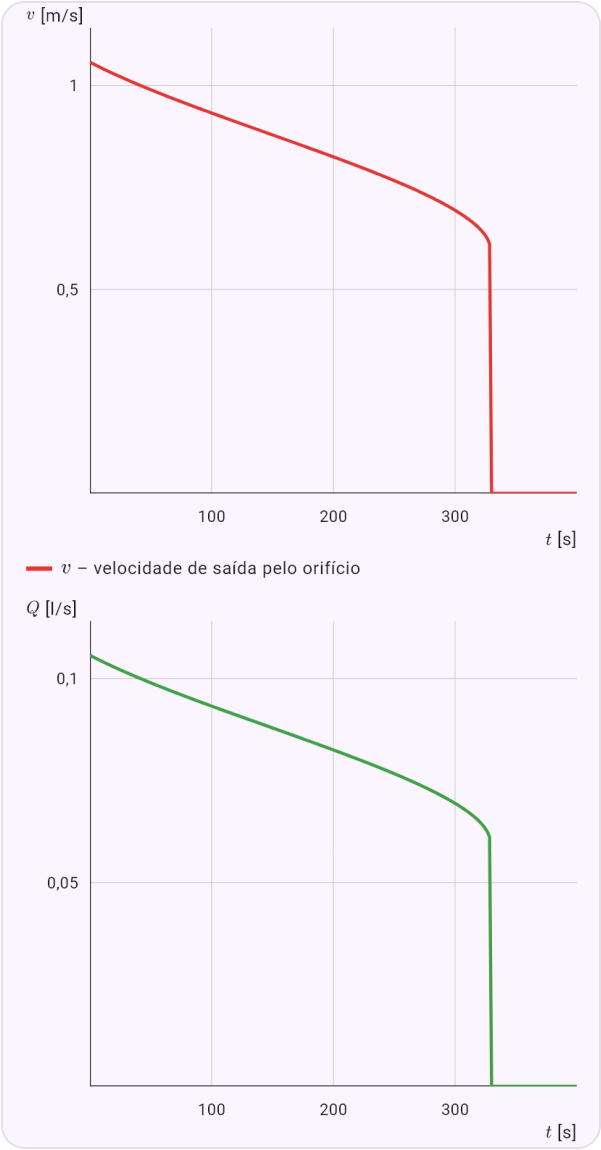
$$T \approx 5{,}48\,\text{min}$$

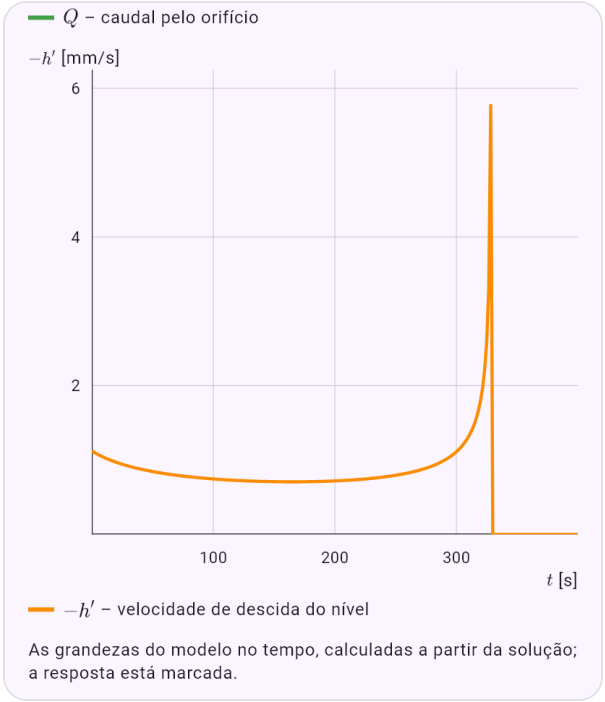
### Passos

- Procuramos $T$; dados
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Convertemos as unidades
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Um recipiente de revolução da forma escolhida tem um orifício no fundo. O líquido sai à velocidade dada pelo balanço de energia: a de Torricelli v = μ√(2gh), corrigida por um orifício grande (termo s²/S²), por um tubo de saída de comprimento L (acrescenta a altura L, mas também atrito conforme a viscosidade, laminar ou turbulento) e, num recipiente fechado, pela depressão do ar acima do nível, que trava o caudal até parar. Em dt sai s·v·dt e o nível desce dh, logo dt = −S(h)/(s·v) dh e o tempo obtém-se integrando. O gráfico mostra o nível, a velocidade do jato e o caudal. Para r = R·(h/H)^p sem tubo nem tampa mostra-se também a fórmula. Com r = k·h^(1/4) o nível desce uniformemente, assim funcionavam os relógios de água. Equação do modelo
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Secção do recipiente à altura h: $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Óleo de girassol a 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Solidifica perto de −17 °C e não ferve: acima de 200 °C decompõe-se; a viscosidade baixa muito com a temperatura.
- Separamos as variáveis: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- A velocidade do jato depende do nível de forma complicada, por isso o integral é calculado numericamente.
- Isolamos a grandeza procurada: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Substituímos: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Convertemos as unidades: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

### Gráfico






As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

**Forma do recipiente em que o nível desce uniformemente.**

Enunciado: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2];`

```
v=0.001[m_s])
```

### Resultado

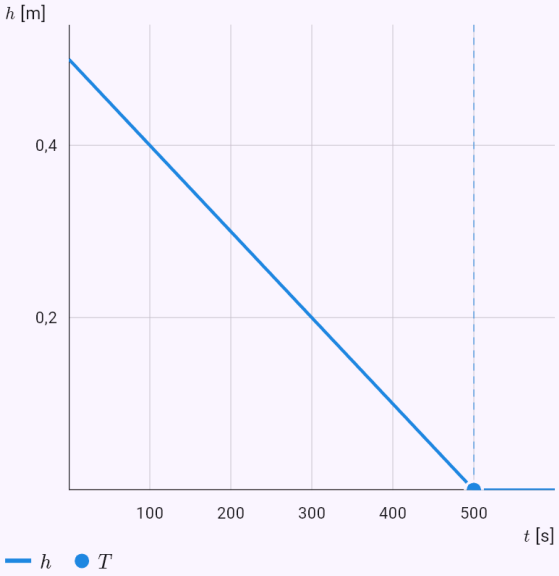
$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\text{cm}$$

### Passos

- Procuramos $r(h_0)$; dados
  $s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\text{cm}, \quad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$
- Convertemos as unidades
  $s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
- Um recipiente de revolução da forma escolhida tem um orifício no fundo. O líquido sai à velocidade dada pelo balanço de energia: a de Torricelli v = μ√(2gh), corrigida por um orifício grande (termo s²/S²), por um tubo de saída de comprimento L (acrescenta a altura L, mas também atrito conforme a viscosidade, laminar ou turbulento) e, num recipiente fechado, pela depressão do ar acima do nível, que trava o caudal até parar. Em dt sai s·v·dt e o nível desce dh, logo dt = −S(h)/(s·v) dh e o tempo obtém-se integrando. O gráfico mostra o nível, a velocidade do jato e o caudal. Para r = R·(h/H)^p sem tubo nem tampa mostra-se também a fórmula. Com r = k·h^(1/4) o nível desce uniformemente, assim funcionavam os relógios de água. Equação do modelo: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- O nível desce uniformemente se a secção for proporcional a √h, ou seja r = k·h^(1/4). Era a forma dos relógios de água.
- Substituímos: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\text{m}$
- Convertemos as unidades:

$$r(h_0) \approx 0{,}2446\,\text{m} = 24{,}46\,\text{cm}$$

### Gráfico




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

# 43. Física

Os cálculos de física estão na secção «Aplicações», área Física. O motor de foguete tem cinco modos: empuxo, impulso específico, equação de Tsiolkovski, foguete de vários estágios e velocidade de exaustão a partir da termodinâmica de um bocal ideal.

O empuxo calcula-se a partir do caudal mássico e da velocidade de exaustão, opcionalmente com o termo de pressão; o gráfico mostra então como cresce com a altitude na atmosfera padrão. Na equação de Tsiolkovski pode procurar-se a variação de velocidade, o propelente necessário, a massa inicial ou final e a velocidade de exaustão. Os resultados são ideais, sem perdas por gravidade e arrasto.

As leis de Kepler têm um formulário próprio com cinco modos: elipse, áreas, posição no tempo, período e velocidade pela equação vis-viva. O gráfico desenha a órbita à escala real e o corpo move-se com o cursor ou o botão de reprodução. Na segunda lei mostra setores coloridos varridos em tempos iguais.

O formulário de influência mútua calcula o baricentro, os pontos de Lagrange, as marés, as ressonâncias orbitais e a precessão do periélio. O gráfico do baricentro mostra ambos os corpos em torno do [[barycenter|baricentro]] B à escala real. Quando o círculo do corpo maior é invisível no conjunto (o Sol em torno do baricentro do Sol e de Júpiter), o seletor «Detalhe do baricentro» mostra-o ampliado e, com o raio R, também o contorno do corpo: o baricentro fica logo acima da superfície do Sol. Uma história célebre: Urano desviava-se da trajetória prevista e, em 1846, Le Verrier calculou a partir dessas perturbações onde devia estar um planeta desconhecido. Neptuno foi encontrado quase exatamente aí.

O problema dos três corpos é calculado numericamente em unidades com G = 1: a solução periódica em forma de oito, o problema pitagórico caótico, em que duas execuções quase iguais acabam por se afastar, e valores próprios. A variação da energia total verifica a precisão.

A física nuclear nas aplicações destina-se apenas a uso pacífico: laboratório, medicina e energia. O formulário Física nuclear calcula a atividade de uma amostra, o equilíbrio radioativo, as equações de Bateman de uma série, a energia de ligação com um gráfico pelo número de massa, a energia de reação e a energia do combustível em comparação com o carvão.

O formulário Reator nuclear mostra as gerações de neutrões como sucessão geométrica, o período do reator com neutrões retardados e o tamanho do núcleo no modelo de difusão de um grupo, apenas para redes moderadas (grafite, água leve).

A balística calcula o lançamento oblíquo para física escolar, desporto e caça. No vácuo há fórmulas exatas com os passos; com resistência do ar, uma solução numérica de Runge-Kutta que inclui vento de frente e lateral, densidade do ar conforme a altitude e força de Coriolis. O gráfico mostra a vista lateral e a comparação com o vácuo e, com desvio lateral, também a vista superior. Em projéteis supersónicos o coeficiente de arrasto vem de uma curva aproximada segundo o número de Mach. Calcula-se apenas o

voo, não o efeito no alvo, e não se inclui o desvio por rotação. O problema inverso encontra para uma dada distância os dois ângulos de elevação, rasante e elevado.

Avião calcula o desempenho para a aviação civil e o ensino: voo nivelado com polar parabólica, corrida de descolagem e aterragem numericamente com vento e altitude, viragem e voo planado. Um efeito de solo opcional reduz o arrasto induzido. O modelo ignora a compressibilidade do ar, pelo que em aviões comerciais à velocidade de cruzeiro o resultado é apenas indicativo. As velocidades e comprimentos também podem ser dados em nós e pés.

Reentrada na atmosfera calcula numericamente, pelo método de Runge-Kutta, a passagem de uma nave pela atmosfera: a velocidade, o ângulo de trajetória e a altitude sobre uma Terra redonda com a atmosfera padrão. O resultado é uma aterragem, um ressalto para o espaço ou um limite excedido, a aceleração máxima (verificada pela fórmula de Allen e Eggers), o fluxo de calor no [[stagnationPoint|ponto de estagnação]] e a temperatura do escudo por [[radiativeEquilibrium|equilíbrio radiativo]]. O modo Corredor de entrada encontra por bissecção os limites rasante e íngreme do ângulo de entrada: para o regresso da Lua o [[entryCorridor|corredor]] tem cerca de 2° de largura, com uma nota sobre a Apollo 13. Predefinições: Vostok, Apollo, Soyuz e o vaivém (com uma nota factual sobre a perda do Columbia). O único controlo é um [[bankAngle|ângulo de rolamento]] constante; no modelo a Terra não roda. Há uma demonstração interativa, em que se roda a sustentação durante o voo, em mathtrace.app, em «Experimente».

Corpos na água é um formulário para o ensino e uso civil: impulsão e flutuação, incluindo um balão, pressão e profundidade, equação de Bernoulli, afundamento e subida com massa adicionada, alcance e queda de um arpão de pesca desportiva, um veículo submerso propulsado, lastro e um navio. O coeficiente de arrasto de uma esfera segue o número de Reynolds e uma bolha tem a sua própria correlação. A resistência de um navio é o atrito pela linha ITTC-57 mais um coeficiente residual dado, pelo que fora do regime de deslocamento é apenas indicativa. Num navio pode ativar-se uma comparação com o ecranoplano KM: trabalho contra a resistência por tonelada e quilómetro e gráfico da potência pela velocidade.

A fusão termonuclear tem dois formulários, ambos só para uso civil (centrais, laboratórios, o Sol e as estrelas). O formulário Fusão termonuclear calcula a energia de uma reação (D-T, D-D, D-$^3$He e a cadeia p-p do Sol) com a sua repartição pelos produtos, a energia do combustível comparada com a cisão do urânio e com o carvão, a altura da [[coulombBarrier|barreira de Coulomb]] e o [[gamowPeak|pico de Gamow]]. Um reator de fusão não pode descontrolar-se como um de cisão: a fusão não tem massa crítica e, se algo falhar, o plasma arrefece e a reação para sozinha.

O formulário Plasma de fusão calcula o [[lawsonCriterion|critério de Lawson]] com um gráfico do produto triplo necessário em função da temperatura, o ganho Q, a taxa de reação $\langle\sigma v\rangle$ como integral sobre a distribuição de Maxwell pela regra de Simpson (comparada com o ajuste publicado de Bosch e Hale), a densidade de potência de fusão, a perda por radiação de travagem e o raio de Larmor de uma

partícula carregada num campo magnético. A app não calcula a dinâmica do plasma (magneto-hidrodinâmica).

Os aceleradores de partículas têm dois formulários. Cinemática relativista calcula o [[lorentzFactor|fator de Lorentz]], a velocidade, a energia e o momento a partir da velocidade ou da energia cinética, e a dilatação do tempo com o alcance de partículas instáveis (muão, pião, kaão). O formulário Aceleradores de partículas compara a energia de colisão √s de feixes opostos e de um alvo fixo, calcula o raio da órbita e o campo necessário, e a perda por radiação de sincrotrão. O menu preenche os valores do LHC, do LEP ou do Tevatron.

## Exemplos

### Empuxo do motor ao nível do mar e comparação com o vácuo.

Enunciado: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa]; pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)`

**Resultado**

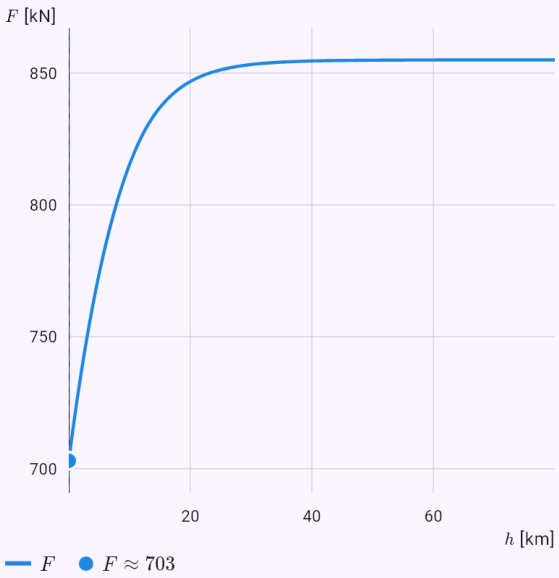
$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

**Passos**

- Procuramos $F$; dados $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Convertemos as unidades $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Um foguete impulsiona-se expelindo massa: a cada segundo sai uma massa Δm/Δt à velocidade $v_e$ e a conservação da quantidade de movimento dá o empuxo $F = (\Delta m/\Delta t)\cdot v_e$. Se a pressão do gás na saída do bocal p_e for diferente da ambiente p_a, soma-se o termo (p_e − p_a)·A_e; por isso o empuxo cresce com a altitude. Equação do modelo: $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Termo de pressão do empuxo $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- O gás está sobre-expandido no bocal (p_e < p_a): a pressão ambiente reduz o empuxo. É típico na descolagem de um motor concebido para grande altitude.
- Termo de quantidade de movimento do empuxo: $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Substituímos: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Impulso específico $I_{sp} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0} = \dfrac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$
- Empuxo no vácuo: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$

- Convertemos as unidades: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Velocidade de exaustão a partir do impulso específico do RP-1/LOX.

Enunciado: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

**Resultado**

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

**Passos**

- Procuramos $v_e$; dados: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- O impulso específico I_sp = $v_e/g_0$ indica durante quantos segundos 1 kg de propelente consegue fornecer um empuxo igual ao peso de 1 kg, e assim compara propelentes. Equação do modelo: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Gravidade padrão: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Isolamos a grandeza procurada: $v_e = I_{sp} g_0$
- Substituímos: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Quanto maior o impulso específico, menos propelente o motor gasta para o mesmo empuxo. Valores típicos no vácuo: sólido ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, $CH_4$/LOX ≈ 365 s, $LH_2$/LOX ≈ 450 s.

## Variação de velocidade pela equação de Tsiolkovski.

Enunciado: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

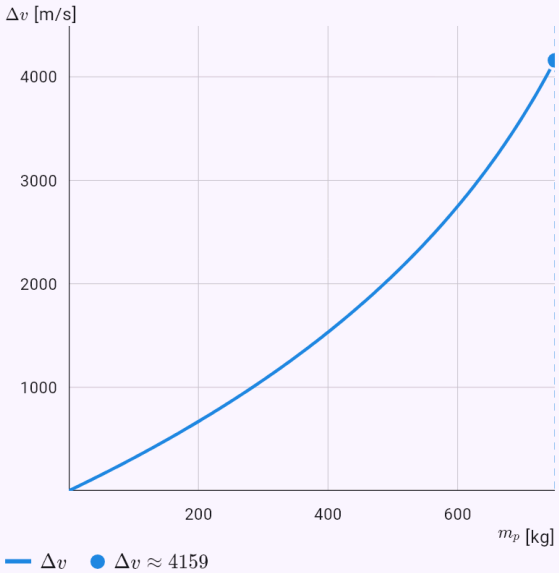
**Resultado**

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta v$; dados: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}$, $m_0 = 1000\,\mathrm{kg}$, $m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- A quantidade de movimento do propelente expelido acelera o foguete: integrando m·dv = −$v_e$·dm obtém-se a equação de Tsiolkovski Δv = $v_e$·ln($m_0$/$m_f$). Equação do modelo: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separamos as variáveis: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integramos ambos os lados: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Substituímos: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Razão de massas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Fração de propelente na massa inicial: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Resultado ideal, sem perdas por gravidade e arrasto. Para alcançar a órbita baixa são precisos na realidade cerca de 9,4 km/s.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Quanto propelente precisa 1 t de foguete para chegar à órbita baixa.

Enunciado: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

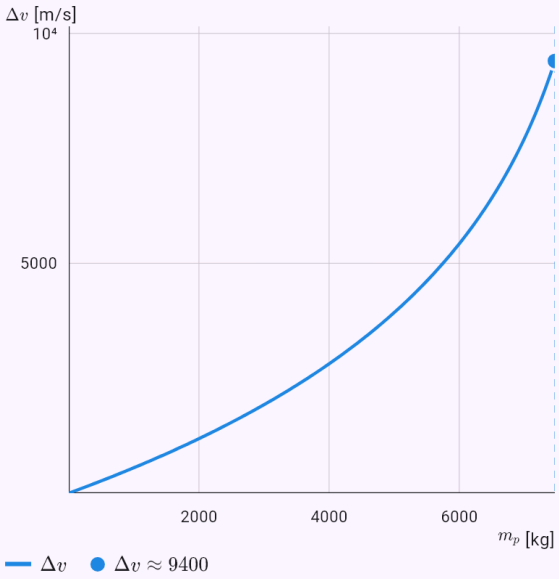
**Resultado**

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

**Passos**

- Procuramos $m_p$; dados: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- A quantidade de movimento do propelente expelido acelera o foguete: integrando m·dv = −v$_e$·dm obtém-se a equação de Tsiolkovski Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Equação do modelo: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separamos as variáveis: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integramos ambos os lados: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Isolamos a grandeza procurada: $m_p = m_0 - m_f = m_f \left( e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1 \right)$
- Substituímos: $m_p = 1000 \cdot \left( e^{\frac{9400}{4400}} - 1 \right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Razão de massas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Fração de propelente na massa inicial: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Resultado ideal, sem perdas por gravidade e arrasto. Para alcançar a órbita baixa são precisos na realidade cerca de 9,4 km/s.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Foguete de três estágios da classe Saturno V e o ganho dos estágios.

Enunciado: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

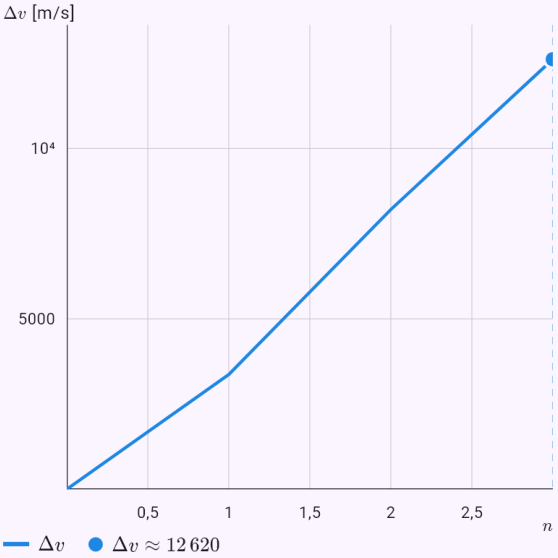
**Resultado**

$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta v$; dados
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sp}$
- Convertemos as unidades
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Cada estágio acrescenta velocidade pela equação de Tsiolkovski e os seus tanques vazios são descartados, pelo que o seguinte já não transporta massa inútil. Os ganhos de velocidade somam-se. Equação do modelo:
  $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Gravidade padrão: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Variação de velocidade do estágio
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Variação de velocidade do estágio
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Variação de velocidade do estágio
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Para comparar, um estágio com a mesma massa e propelente
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Ao descartar os estágios vazios o foguete ganha $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ a mais do que um único estágio com o mesmo propelente.
- Resultado ideal, sem perdas por gravidade e arrasto. Para alcançar a órbita baixa são precisos na realidade cerca de 9,4 km/s.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Velocidade de exaustão de um motor a hidrogénio pela termodinâmica do bocal.

Enunciado: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one];`

`pr=1000[one]; mode=nozzle; propellant=hydrogen)`

**Resultado**

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

**Passos**

- Procuramos $v_e$; dados

  $T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$

- Convertemos as unidades:
  $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- A velocidade de exaustão vem da termodinâmica de um bocal ideal: cresce com a temperatura da câmara de combustão e diminui com a massa molar dos gases. Equação do modelo

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Constante molar dos gases: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Termo de expansão

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Substituímos

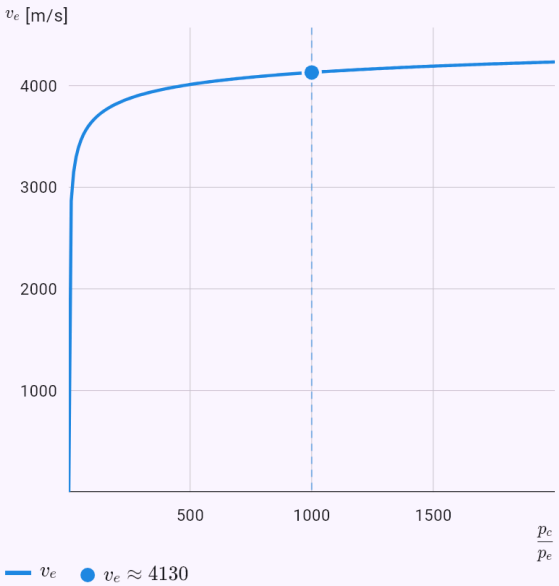
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Impulso específico: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Velocidade limite com expansão para o vácuo:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- A velocidade de exaustão cresce com √(T/M); por isso o hidrogénio (gases leves) tem o maior impulso específico.
- Escoamento isentrópico ideal; um bocal real atinge cerca de 92–98 % deste valor.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## O periélio do cometa Halley a partir do semieixo maior e da excentricidade.

Enunciado: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse;`

`body=halley)`

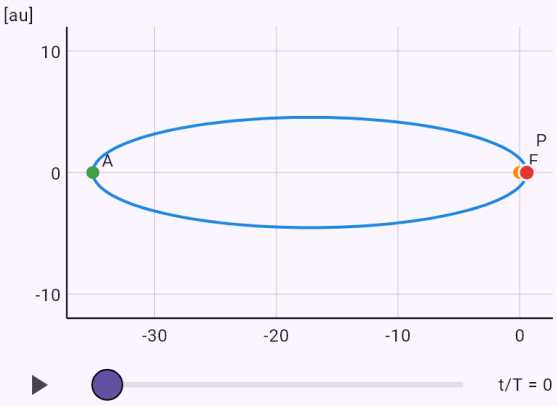
**Resultado**

$r_p \approx 0{,}586\,\text{au}$

**Passos**

- Procuramos $r_p$; dados: $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671$
- Primeira lei de Kepler: um planeta move-se numa elipse com o corpo central num foco. A distância r depende do ângulo θ desde o periélio; é mínima no periélio r_p = a(1 − e) e máxima no afélio r_a = a(1 + e). A excentricidade e indica quão alongada é a elipse. Equação do modelo: $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- Isolamos a grandeza procurada: $r_p = a(1-e)$
- Substituímos: $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\text{au}$
- Distância no afélio: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\text{au}$

**Gráfico**




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## A velocidade da Terra no afélio pela segunda lei de Kepler; setores de igual tempo.

Enunciado: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

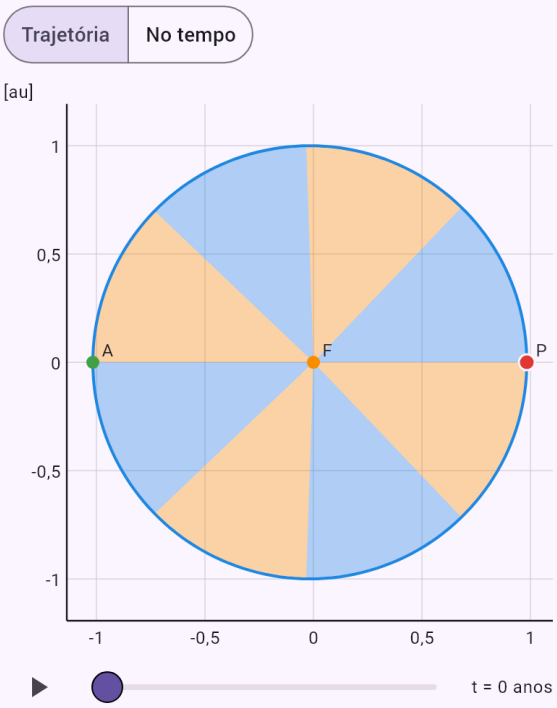
**Resultado**

$v_a \approx 29{,}29\,\text{km/s}$

**Passos**

- Procuramos $v_a$; dados $r_p = 0{,}9833\,\text{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\text{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\text{km/s}$
- Segunda lei de Kepler: o raio vetor a partir do foco varre áreas iguais em tempos iguais, porque o momento angular se conserva. A velocidade areolar é constante, pelo que um corpo é mais rápido no periélio: v_p·r_p = v_a·r_a. Os setores coloridos do gráfico foram percorridos no mesmo tempo e têm a mesma área. Equação do modelo: $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Isolamos a grandeza procurada: $v_a = v_p\dfrac{r_p}{r_a}$
- Substituímos: $v_a = 30{,}29 \cdot \dfrac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\text{km/s}$
- Razão das velocidades: $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Um corpo é mais rápido no periélio e mais lento no afélio; por isso a Terra anda mais depressa em janeiro.

**Gráfico**




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## Onde está o cometa Halley 10 anos após o periélio (método de Newton).

Enunciado: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr]; mode=position; body=halley)`

**Resultado**

$\theta \approx 168\,^\circ$

**Passos**

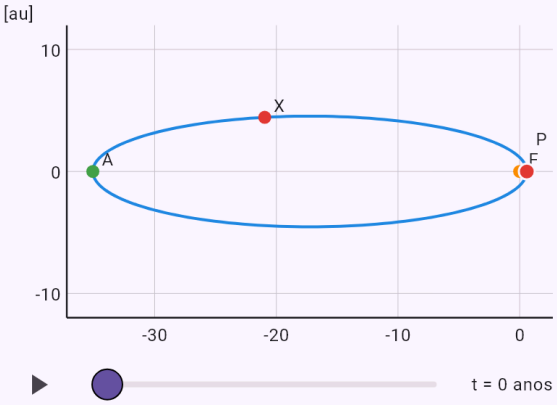
- Procuramos $\theta$; dados
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{anos}, \quad t = 1$
- Onde um corpo estará no instante t resulta da equação de Kepler M = E − e·sen E. A anomalia média M cresce uniformemente com o tempo; a anomalia excêntrica E não se exprime por uma fórmula e é obtida pelo método de Newton. Equação do modelo:
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Anomalia média: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- A equação de Kepler não tem solução em fórmulas; E é obtido numericamente.
- Iteração de Newton: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Passo: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Passo: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Passo: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Passo: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Passo: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Passo: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Passo: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Anomalia excêntrica: $E \approx 1{,}78021$
- Anomalia verdadeira

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Distância ao foco: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## A altitude da órbita geoestacionária pela terceira lei de Kepler.

Enunciado: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

**Resultado**

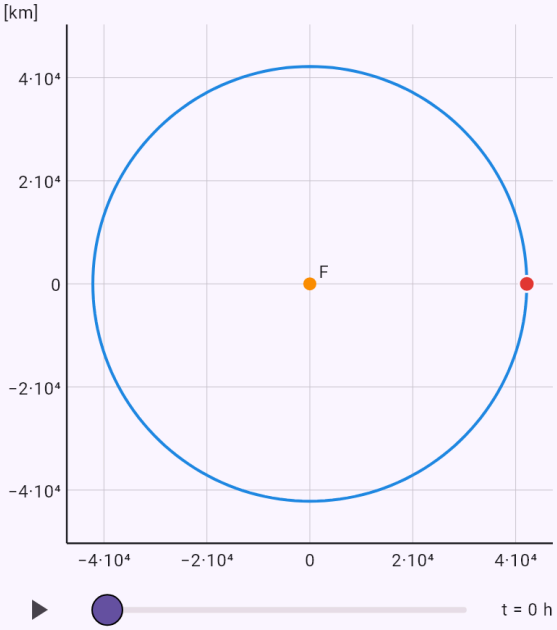
$h \approx 35\,790\,\text{km}$

**Passos**

- Procuramos $h$; dados
  $T = 86\,160\,\text{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R = 6378\,\text{km}$
- Convertemos as unidades: $R = 6378\,\text{km} = 6\,378\,000\,\text{m}$
- Terceira lei de Kepler: a razão T²/a³ depende apenas da massa do corpo central. A órbita de uma lua dá assim a massa do planeta, e um período pretendido dá a altitude da órbita, como a geoestacionária. Equação do modelo:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Isolamos a grandeza procurada: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Substituímos
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Isolamos a grandeza procurada: $h = a - R$
- Substituímos:
  $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Vale para uma massa em órbita desprezável face a M; caso contrário, surge M + m.
- Convertemos as unidades:
  $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m} = 35\,790\,\text{km}$

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## A velocidade do cometa Halley no periélio pela equação vis-viva.

Enunciado: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg];`

`mode=visviva; central=sun)`

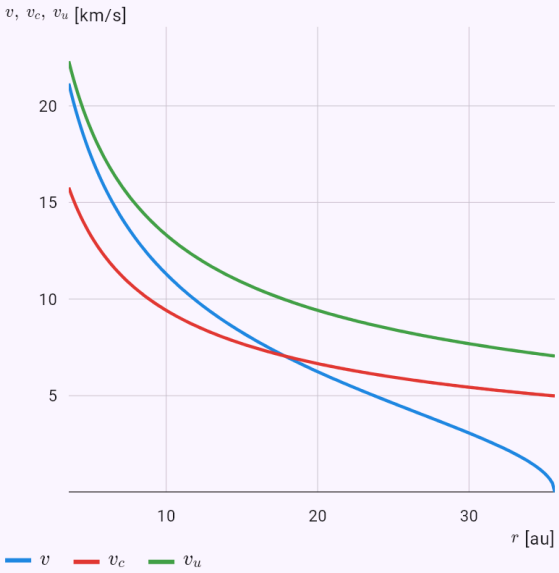
**Resultado**

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

**Passos**

- Procuramos $v$; dados
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Convertemos as unidades
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- A equação vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) decorre da conservação da energia e dá a velocidade em qualquer ponto da órbita. A velocidade circular mantém um corpo numa circunferência; a de escape é √2 vezes maior e o corpo já não regressa. Equação do modelo:
  $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Substituímos
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Velocidade circular a esta distância:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Velocidade de escape a esta distância:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Convertemos as unidades:
  $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

**O baricentro do Sol e de Júpiter fica logo acima da superfície do Sol; «Detalhe do baricentro» mostra o Sol a girar em torno dele.**

Enunciado: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

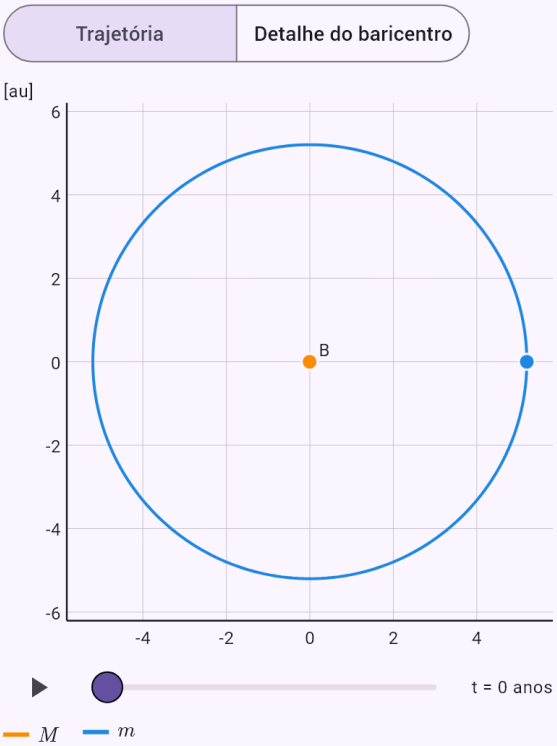
**Resultado**

$$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$$

**Passos**

- Procuramos $r_b$; dados
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Convertemos as unidades
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- Na realidade, ambos os corpos orbitam o centro de massa comum (baricentro). O problema de dois corpos reduz-se ao movimento de um corpo com a massa reduzida, e na terceira lei de Kepler surge a soma M + m. A oscilação de uma estrela em torno do baricentro revela exoplanetas. Equação do modelo
  $r_b = \dfrac{am}{M+m}, \quad \mu = \dfrac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$
- Substituímos
  $r_b = \dfrac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
- Distância do outro corpo ao baricentro:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- O baricentro está fora do corpo: $\dfrac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. O corpo maior descreve ele próprio um círculo visível.
- Convertemos as unidades:
  $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

**Gráfico**




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## A distância de L2, onde trabalha o telescópio James Webb.

Enunciado: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

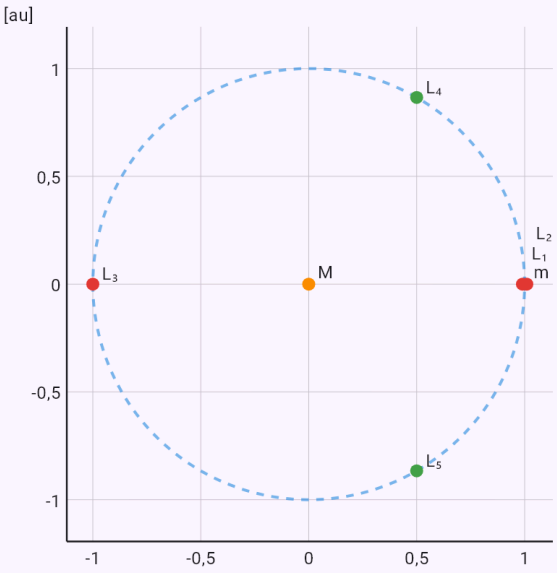
**Resultado**

$$r_{L_2} \approx 1{,}508 \text{ milhões de km}$$

**Passos**

- Procuramos $r_{L_2}$; dados
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- Num referencial que roda com o corpo m existem cinco lugares onde a gravidade dos dois corpos e a força centrífuga se equilibram. L1, L2 e L3 estão na reta que une os corpos e calculam-se numericamente; L4 e L5 formam triângulos equiláteros com eles. Equação do modelo
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Razão de massas: $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Aproximadamente para m pequeno:
  $$r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \approx 1{,}503 \text{ milhões de km}$$
- O ponto de Lagrange é raiz da equação na reta que une os corpos, obtida por bisseção.
- Exatamente da equação: $r_{L_2} \approx 1{,}508 \text{ milhões de km}$
- L1, L2 e L3 são instáveis: um corpo tem de manter o lugar com correções, como o telescópio James Webb em L2.
- L4 e L5 são estáveis porque M/m > 25; os troianos de Júpiter mantêm-se aí.

**Gráfico**




Os corpos e os pontos notáveis à escala real.

## A aceleração de maré causada pela Lua.

Enunciado: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km];`

`mode=tide; tideSource=moon)`

**Resultado**

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

**Passos**

- Procuramos $a_s$; dados
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- Convertemos as unidades
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- A face próxima de um corpo é atraída com mais força do que a distante. A aceleração de maré 2GMR/d³ diminui com o cubo da distância; por isso a Lua influencia mais do que o Sol, muito mais massivo. Equação do modelo: $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- Substituímos
  $a_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$

- Exatamente, diferença de gravidade na face próxima e no centro
  $\dfrac{GM}{(d-R)^2} - \dfrac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- O corpo que atrai cria duas protuberâncias de maré, na face próxima e na oposta, daí duas preia-mares por rotação.
- O atrito de maré trava a rotação: a Lua mostra sempre a mesma face à Terra e afasta-se cerca de 3,8 cm por ano.

## A ressonância das luas Io, Europa e Ganimedes.

Enunciado: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

**Resultado**

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

**Passos**

- Dados: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Uma ressonância orbital ocorre quando os períodos estão numa razão de números inteiros pequenos; os corpos encontram-se então regularmente e influenciam-se. Exemplos: Io, Europa e Ganimedes 1 : 2 : 4, Neptuno e Plutão 2 : 3. As lacunas de Kirkwood da cintura de asteroides estão em ressonâncias com Júpiter. Equação do modelo: $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Maior desvio de uma razão inteira: $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Os períodos estão numa razão de inteiros pequenos: uma ressonância orbital.

## A precessão do periélio de Mercúrio segundo a relatividade geral.

Enunciado: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km];`

```
e=0.2056[one]; mode=precession)
```

**Resultado**

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{anos}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta\varphi$; dados
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- Convertemos as unidades:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Segundo a relatividade geral, o periélio de uma órbita roda lentamente 6πGM/(c²a(1 − e²)) por volta. Em Mercúrio são 43" por século, a diferença que a mecânica newtoniana não conseguiu explicar. Equação do modelo:
  $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Rotação por volta
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Voltas em 100 anos: $N = \dfrac{100\,\text{anos}}{T} \approx 415{,}3$
- Substituímos: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{anos}$
- A mecânica newtoniana prevê menos rotação para Mercúrio; os restantes 43" por século foram explicados pela relatividade geral.

## A solução periódica em forma de oito de três corpos iguais.

Enunciado: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

**Resultado**

$$E \approx -1{,}28714$$

**Passos**

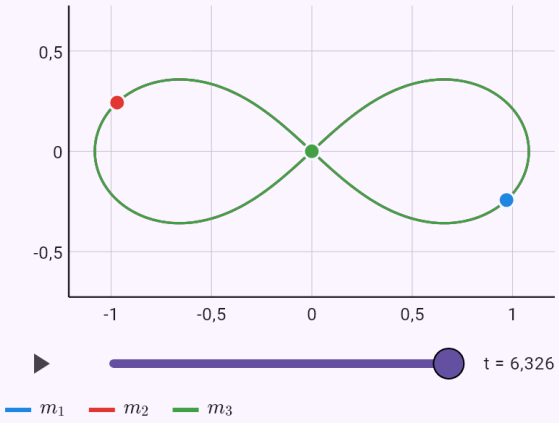
- Procuramos $E$; dados: $t_k = 6{,}326$
- Em geral, três corpos não têm solução em fórmulas. Há, porém, órbitas periódicas excecionais: na solução em forma de oito (Chenciner e Montgomery, 2000), três corpos iguais percorrem uma única curva em forma de 8. Equação do modelo

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Em geral, três corpos não têm solução em fórmulas; o movimento é calculado numericamente, em unidades com G = 1.
- Número de passos de cálculo: $N = 2748$
- Energia total: $E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$
- Variação relativa da energia (controlo de precisão): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$
- Três corpos iguais percorrem uma curva em forma de 8 e voltam ao lugar após um período.

- Maior distância ao início após um período: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

**Gráfico**




Os corpos à escala real. Com o cursor ou o botão de reprodução pode seguir o movimento.

## Caos: quando duas execuções quase iguais se afastam.

Enunciado: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

**Resultado**

$t_s \approx 42{,}9$

**Passos**

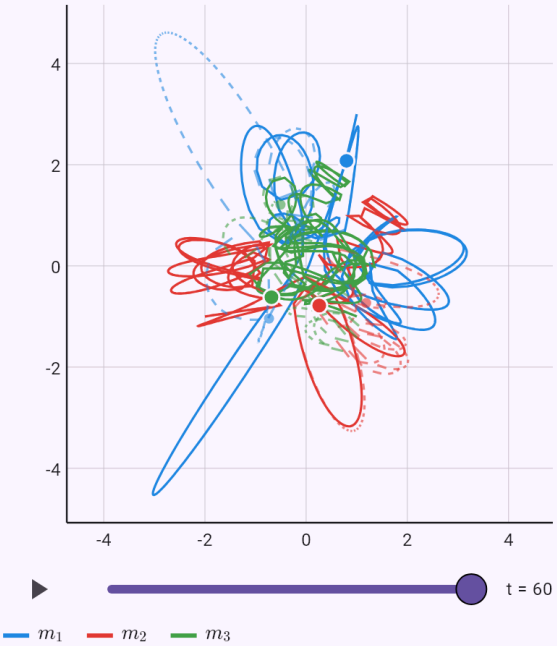
- Procuramos $t_s$; dados: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- O problema dos três corpos é caótico: uma alteração mínima no início cresce até as trajetórias nada terem em comum. O problema pitagórico com massas 3, 4 e 5 é calculado duas vezes, a segunda com um pequeno desvio δ. Equação do modelo

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Em geral, três corpos não têm solução em fórmulas; o movimento é calculado numericamente, em unidades com G = 1.
- Número de passos de cálculo: $N = 52\,307$
- Energia total: $E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$
- Variação relativa da energia (controlo de precisão): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$
- Calcula-se também uma segunda execução desviada $\delta = 0{,}001$. As linhas tracejadas são essa execução; o seu afastamento mostra o caos. Uma reta do logaritmo no tempo indica crescimento exponencial.
- No instante t_s a posição de algum corpo difere em mais de 1 entre as duas execuções.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




As linhas contínuas e tracejadas são duas execuções com um início minimamente diferente.

## A atividade de 1 g de rádio, cerca de um curie.

Enunciado: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

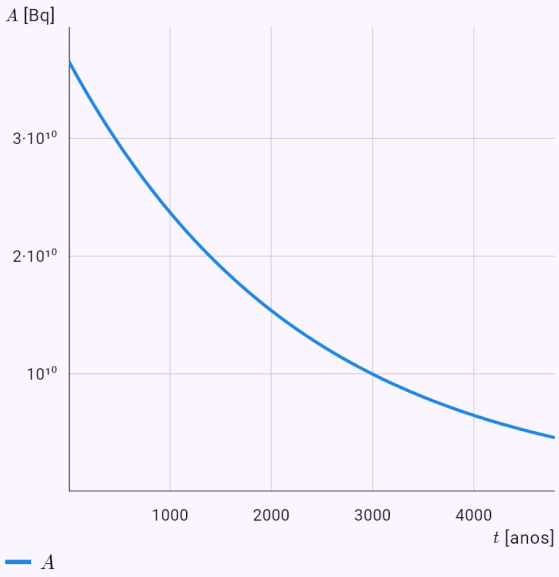
**Resultado**

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

**Passos**

- Procuramos $A$; dados:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{anos}$
- Convertemos as unidades:
  $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{anos} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- A atividade A = λN indica quantos núcleos decaem por segundo. O número de núcleos N resulta da massa, da massa molar e da constante de Avogadro; a constante de decaimento λ, da meia-vida. Equação do modelo:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- Numa meia-vida a quantidade cai para metade – constante de decaimento: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Número de núcleos:
  $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Substituímos
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Um becquerel é um decaimento por segundo. A unidade histórica curie corresponde aproximadamente à atividade de 1 g de rádio, 3,7·10¹⁰ Bq.

**Gráfico**




Como as grandezas variam no tempo.

## A razão de atividades num gerador Mo-99 / Tc-99m usado em hospitais.

Enunciado: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

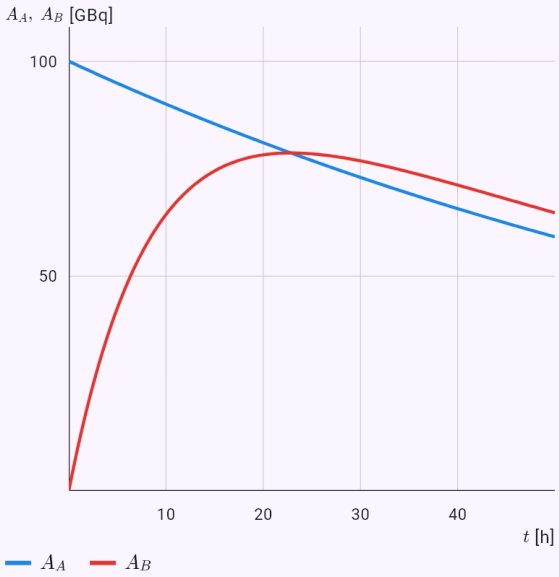
**Resultado**

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

**Passos**

- Procuramos $\frac{A_B}{A_A}$; dados:
  $A_{A,0} = 100\,\text{GBq}, \quad T_A = 66\,\text{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\text{h}$
- Quando um nuclídeo filho de vida curta surge de um pai de vida longa, a sua atividade alcança a do pai e depois segue-a numa razão fixa. Os geradores de radionuclídeos dos hospitais baseiam-se nisso. Equação do modelo
  $A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$
- Numa meia-vida a quantidade cai para metade – constante de decaimento: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$
- Substituímos: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Equilíbrio transitório: após várias meias-vidas do filho, a razão de atividades é constante.

**Gráfico**




Como as grandezas variam no tempo.

## Uma série de decaimento de três membros pelas equações de Bateman.

Enunciado: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

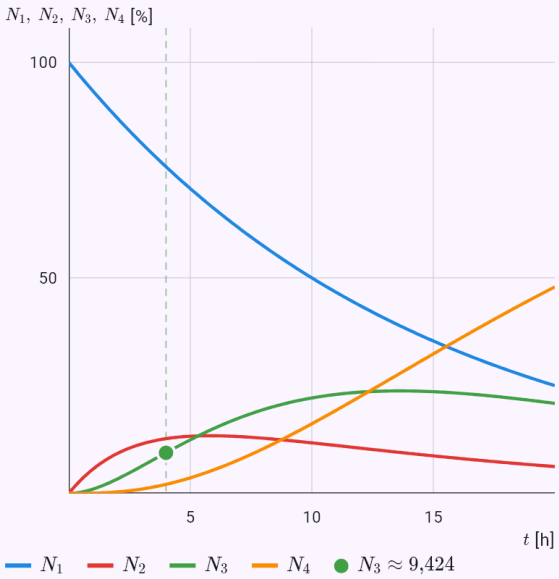
**Resultado**

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

**Passos**

- Procuramos $N_n$; dados:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\text{h}, \quad t = 4\,\text{h}$
- As equações de Bateman descrevem uma série de decaimento: cada membro surge do anterior e decai no seguinte. É um sistema de equações diferenciais lineares com solução fechada. Equação do modelo:
  $N_k' = \lambda_{k-1} N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- Numa meia-vida a quantidade cai para metade – constante de decaimento
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Isolamos a grandeza procurada
  $N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j} (\lambda_l - \lambda_j)}$
- Substituímos: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- O gráfico mostra também o produto final estável; a soma de todos os membros é constante.

**Gráfico**




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## A energia de ligação por nucleão do ferro-56.

Enunciado: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

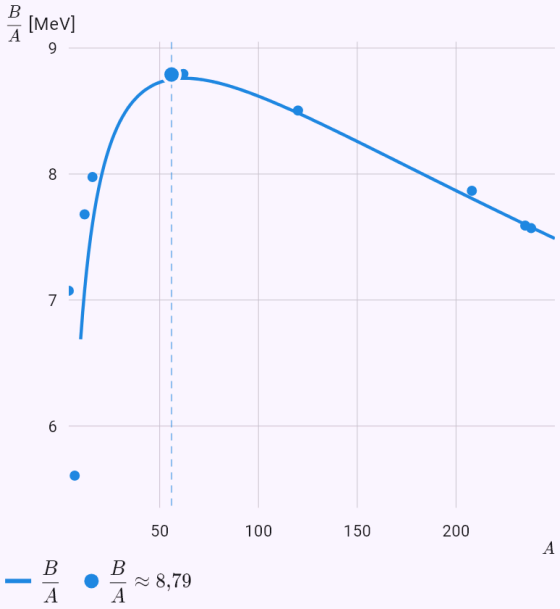
**Resultado**

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

**Passos**

- Procuramos $\frac{B}{A}$; dados:
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Um núcleo pesa menos do que os seus protões e neutrões livres. Por E = mc², a diferença Δm corresponde à energia de ligação. A sua curva por nucleão tem o máximo perto do ferro; por isso libertam energia tanto a fissão de núcleos pesados como a fusão de leves. Equação do modelo:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Defeito de massa
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Equivalente energético: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Substituímos: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Energia de ligação por nucleão: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A energia da fissão do urânio-235.

Enunciado: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

**Resultado**

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

**Passos**

- A energia de reação Q é a diferença das massas antes e depois, convertida por E = mc². Um Q positivo significa que se liberta energia. Equação do modelo:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right) c^2$
- Reação: $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Soma das massas:
  $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Substituímos: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Esta energia liberta-se de imediato; com os decaimentos dos produtos de fissão são cerca de 200 MeV por fissão.

## Quanto carvão substitui 1 g de urânio-235.

Enunciado: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg]; mode=fuel)`

**Resultado**

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

**Passos**

- Procuramos $m_c$; dados
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- A massa do combustível dá o número de núcleos e a energia de uma fissão dá a energia total, que se pode comparar com a queima de carvão. Equação do modelo: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Número de núcleos:
  $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Substituímos
  $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Substituímos
  $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Cálculo ideal: um reator real aproveita apenas uma pequena percentagem do combustível e converte cerca de um terço do calor em eletricidade.

## O número de neutrões após 10 gerações com k = 1,05.

Enunciado: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

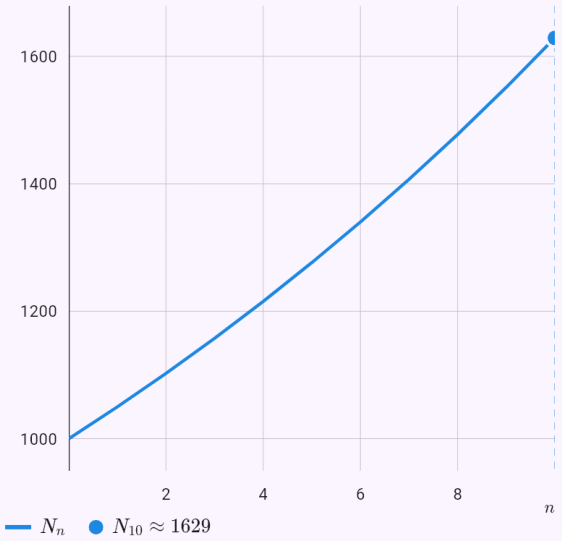
**Resultado**

$$N_n \approx 1629$$

**Passos**

- Procuramos $N_n$; dados:
  $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- O fator de multiplicação k indica quantos neutrões da geração seguinte um neutrão provoca. O número de neutrões é a sucessão geométrica $N_0 k^n$: com k < 1 a reação extingue-se, com k = 1 é estável e com k > 1 cresce. Equação do modelo: $N_n = N_0 k^n$
- Estado supercrítico: k > 1, a potência cresce. Um reator só entra neste estado brevemente e de forma mínima, quando se quer aumentar a potência.
- Substituímos: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A soma de todas as gerações em estado subcrítico.

Enunciado: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

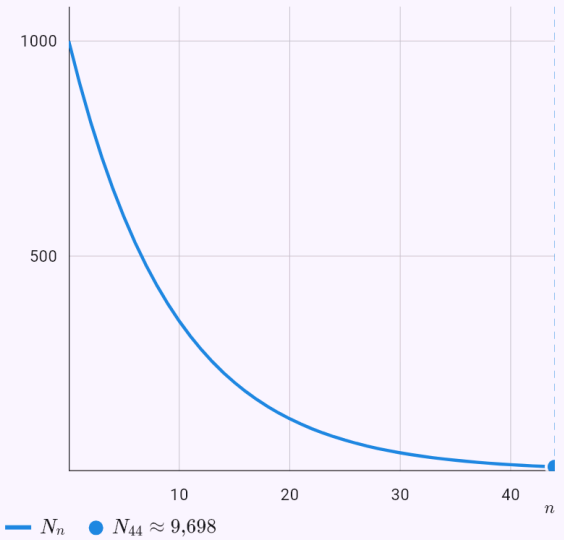
**Resultado**

$$S \approx 10\,000$$

**Passos**

- Procuramos $S$; dados: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- O fator de multiplicação k indica quantos neutrões da geração seguinte um neutrão provoca. O número de neutrões é a sucessão geométrica $N_0k^n$: com k < 1 a reação extingue-se, com k = 1 é estável e com k > 1 cresce. Equação do modelo: $N_n = N_0 k^n$
- Estado subcrítico: k < 1, a reação extingue-se.
- Isolamos a grandeza procurada: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Substituímos: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## O período do reator com neutrões retardados.

Enunciado: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s]; mode=kinetics)`

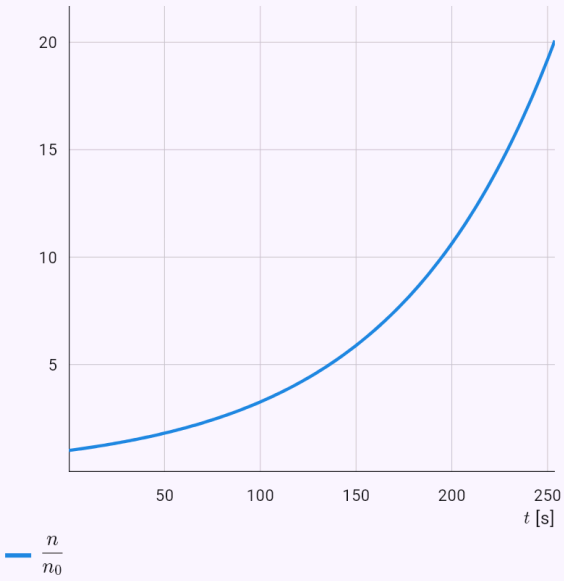
**Resultado**

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

**Passos**

- Procuramos $T$; dados
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- A potência de um reator varia exponencialmente com o período T = ℓ/(k − 1). Os neutrões retardados alongam o tempo médio de geração cerca de mil vezes, e por isso um reator pode ser controlado. Equação do modelo:
  $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \frac{\ell}{k-1}$
- Reatividade: $\rho = \frac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Substituímos: $T_p = \frac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Tempo médio de geração com neutrões retardados: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Substituímos: $T = \frac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Sem neutrões retardados, o período seria uma fração de segundo. Graças a eles, as barras de controlo têm tempo de reagir.
- A potência cresce com este período.

**Gráfico**




Como as grandezas variam no tempo.

## O raio de um núcleo esférico de grafite.

Enunciado: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite; shape=sphere)`

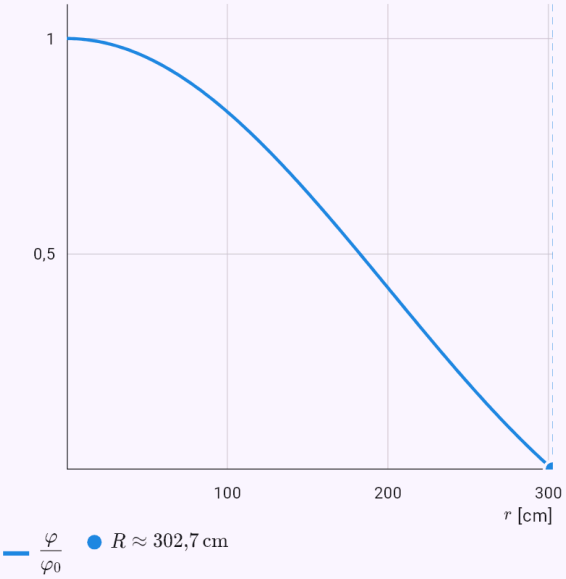
**Resultado**

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- No modelo de difusão de um grupo, a forma do fluxo de neutrões deve satisfazer ∇²φ + B²φ = 0. O tamanho do núcleo do reator resulta de o fluxo se anular no bordo. É um problema de valores próprios, destinado às redes moderadas dos reatores de potência. Equação do modelo: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Parâmetro geométrico: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Equação com simetria esférica: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Substituição: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Condição de fronteira: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Substituímos: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Modelo de difusão de um grupo sem refletor: os reatores reais têm refletor e por isso são menores. Uma forma geral leva a uma equação diferencial parcial.
- Convertemos as unidades: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Aresta de um núcleo cúbico de grafite.

Enunciado: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

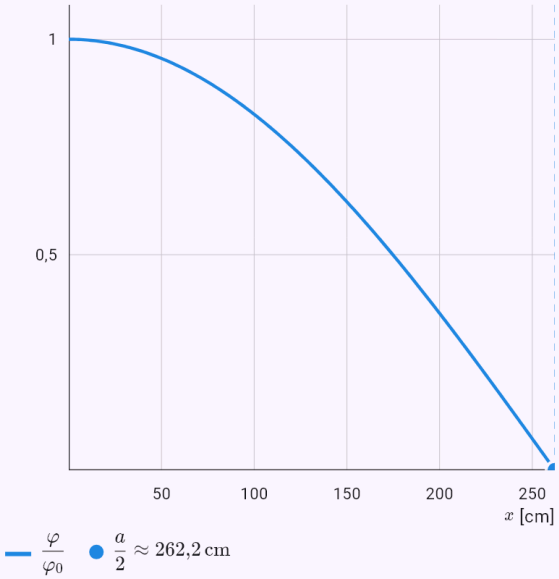
**Resultado**

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

**Passos**

- Procuramos $a$; dados: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- No modelo de difusão de um grupo, a forma do fluxo de neutrões deve satisfazer ∇²φ + B²φ = 0. O tamanho do núcleo do reator resulta de o fluxo se anular no bordo. É um problema de valores próprios, destinado às redes moderadas dos reatores de potência. Equação do modelo: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Parâmetro geométrico: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Separação de variáveis em x, y, z $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- Substituímos $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$
- Modelo de difusão de um grupo sem refletor: os reatores reais têm refletor e por isso são menores. Uma forma geral leva a uma equação diferencial parcial.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Barra de cobre a 100 °C com as extremidades a 20 °C – o meio após 10 minutos.

Enunciado: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

**Resultado**

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

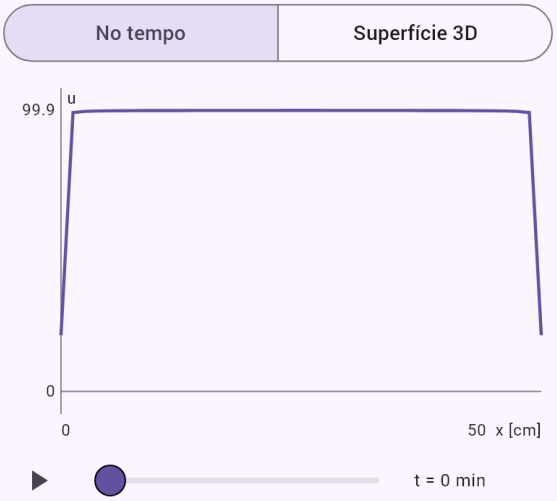
**Passos**

- Procuramos $T$; dados
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e = $
- Convertemos as unidades
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- A temperatura numa barra segue a equação do calor T_t = α·T_xx; a difusividade térmica α = λ/(ρc) diz quão depressa a temperatura se iguala. No início a barra tem em todo o lado a temperatura T₀; a partir de t = 0 as extremidades são mantidas a T_e (ou uma extremidade está isolada). A solução por separação de variáveis é uma série de Fourier; cada termo decai exponencialmente, o primeiro mais devagar, com a constante de tempo τ. Ambas as extremidades são mantidas a T_e; o meio da barra conserva a temperatura mais tempo. Equação do modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Solução por separação de variáveis (série de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Constante de tempo do termo mais lento
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Isolamos a grandeza procurada

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$$

- Soma da série no ponto: $S \approx 0{,}07967$
- Substituímos:
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

**Gráfico**




A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Barra de aço com uma extremidade isolada – quanto tempo até restar 5 % da diferença de temperatura.

Enunciado: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

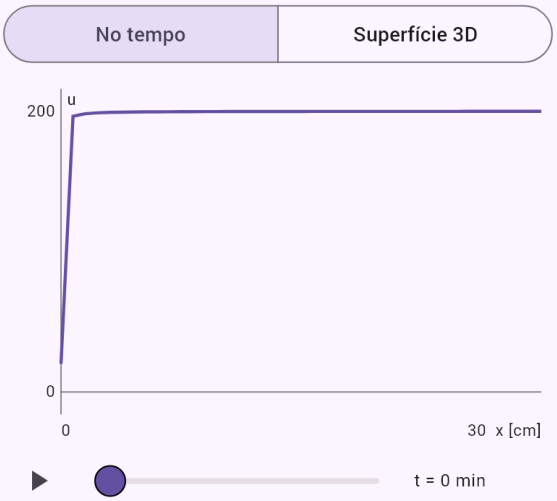
**Resultado**

$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

**Passos**

- Procuramos $t$; dados
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Convertemos as unidades
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- A temperatura numa barra segue a equação do calor T_t = α·T_xx; a difusividade térmica α = λ/(ρc) diz quão depressa a temperatura se iguala. No início a barra tem em todo o lado a temperatura T₀; a partir de t = 0 as extremidades são mantidas a T_e (ou uma extremidade está isolada). A solução por separação de variáveis é uma série de Fourier; cada termo decai exponencialmente, o primeiro mais devagar, com a constante de tempo τ. A extremidade x = 0 é mantida a T_e e a extremidade x = L está isolada (não passa calor) – a barra comporta-se como metade de uma barra duas vezes mais longa; a extremidade isolada conserva a temperatura mais tempo. Equação do modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Solução por separação de variáveis (série de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\, e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{2}$
- Constante de tempo do termo mais lento
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Isolamos a grandeza procurada
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- Substituímos: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- A extremidade isolada é o ponto mais quente. Passado algum tempo domina o primeiro termo da série, por isso basta o seu decaimento; o tempo exato sai de toda a série.
- Convertemos as unidades: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

**Gráfico**




A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Placa de cobre de 30 × 20 cm a 100 °C com as bordas a 20 °C – a temperatura no centro ao fim de 2 minutos.

Enunciado: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

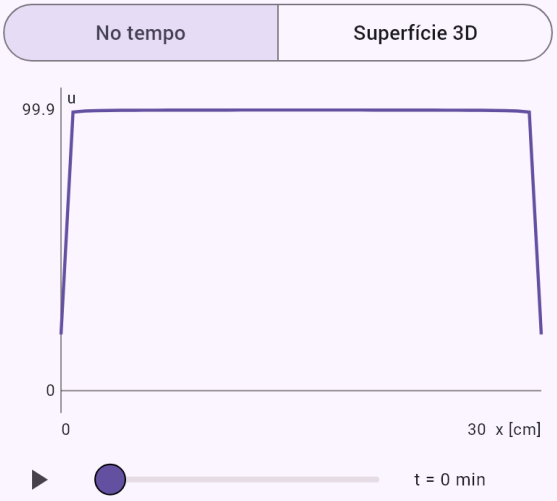
**Resultado**

$$T \approx 20{,}87\,^{\circ}\mathrm{C}$$

**Passos**

- Procuramos $T$; dados
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Convertemos as unidades
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- A temperatura numa placa retangular a × b segue a equação do calor T_t = α(T_xx + T_yy). A placa começa a $T_0$ em todo o lado e a partir de t = 0 as bordas mantêm-se a T_e. O problema separa-se em duas barras: a fração restante da diferença de temperaturas é o produto das séries de uma barra de comprimento a e de outra de comprimento b – por isso uma placa arrefece mais depressa do que qualquer das duas barras. O centro mantém a temperatura durante mais tempo. Equação do modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separação em duas barras – produto de duas séries de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Constante de tempo do termo mais lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Somas das duas séries no ponto:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Substituímos
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^{\circ}\mathrm{C}$
- O gráfico mostra a temperatura ao longo da reta:
  $y = 10\,\mathrm{cm}$

**Gráfico**




A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Laje de betão com uma borda isolada – ao fim de quantas horas resta 5 % da diferença de temperaturas.

Enunciado: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

**Resultado**

$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

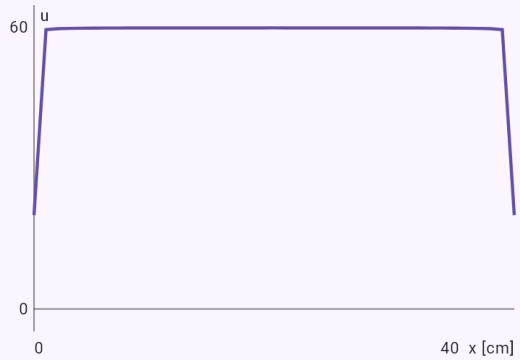
**Passos**

- Procuramos $t$; dados
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Convertemos as unidades
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- A temperatura numa placa retangular a × b segue a equação do calor T_t = α(T_xx + T_yy). A placa começa a $T_0$ em todo o lado e a partir de t = 0 três bordas mantêm-se a T_e, enquanto a borda y = b está isolada (não passa calor). O problema separa-se em duas barras; a borda isolada funciona como eixo de simetria de uma placa com o dobro da altura. O ponto médio da borda isolada mantém a temperatura durante mais tempo. Equação do modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separação em duas barras – produto de duas séries de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Constante de tempo do termo mais lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)}$ s
- Isolamos a grandeza procurada
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Substituímos: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$

- O mais quente é o ponto médio da borda isolada. Passado algum tempo domina o produto dos primeiros termos das duas séries (16/π²)·e^(−t/τ), por isso basta a sua atenuação; o tempo exato sai das séries completas.
- O gráfico mostra a temperatura ao longo da reta: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Convertemos as unidades: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

**Gráfico**

No tempo | Superfície 3D




t = 0 h

A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Corda mi aguda de uma guitarra – frequência fundamental.

Enunciado: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

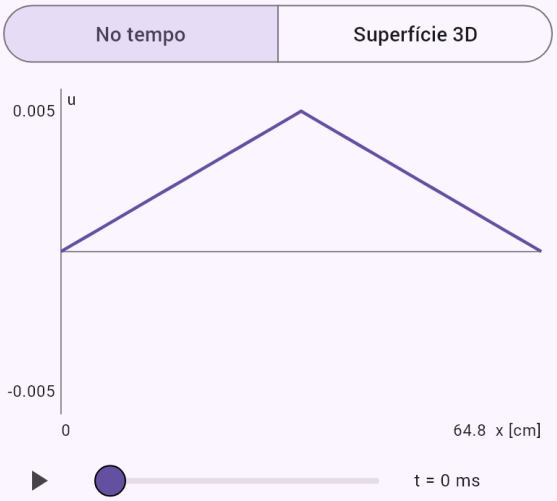
**Resultado**

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

**Passos**

- Procuramos $f_1$; dados:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Convertemos as unidades
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Uma corda esticada com as extremidades fixas segue a equação das ondas u_tt = c²·u_xx; a velocidade da onda c = √(F/μ) vem da tensão F e da densidade linear μ. A separação de variáveis dá ondas estacionárias sin(nπx/L) com frequências f_n = n·c/(2L). Uma corda dedilhada tem a forma de um triângulo – desenvolve-se em série de Fourier e cada harmónico vibra à sua própria frequência. Equação do modelo
  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$
- Velocidade da onda:
  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Modos da corda (ondas estacionárias)
  $X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$
- Substituímos: $f_1 = \frac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- As frequências superiores são múltiplos inteiros da fundamental (harmónicos) – por isso uma corda tem uma altura de som clara.

**Gráfico**




A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Corda dedilhada – deslocamento no meio após 1 ms.

Enunciado: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

`x=32.4[cm]; t=1[ms])`

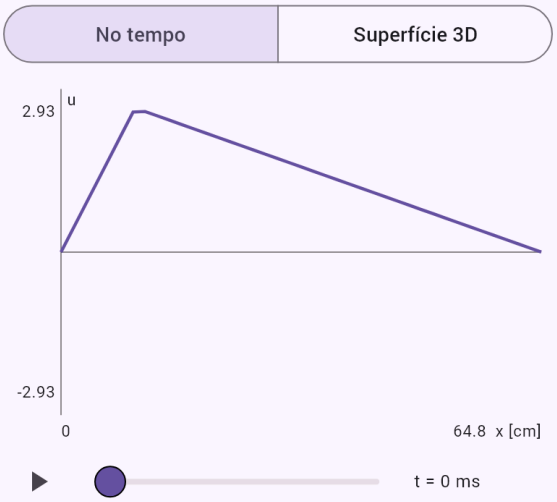
**Resultado**

$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

**Passos**

- Procuramos $u$; dados
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- Convertemos as unidades
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
- Uma corda esticada com as extremidades fixas segue a equação das ondas u_tt = c²·u_xx; a velocidade da onda c = √(F/μ) vem da tensão F e da densidade linear μ. A separação de variáveis dá ondas estacionárias sin(nπx/L) com frequências f_n = n·c/(2L). Uma corda dedilhada tem a forma de um triângulo – desenvolve-se em série de Fourier e cada harmónico vibra à sua própria frequência. Equação do modelo
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Velocidade da onda:
  $$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$$
- Modos da corda (ondas estacionárias)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Corda dedilhada – série de Fourier
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Substituímos: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$
- Após um período a forma da corda repete-se:
  $$T = \frac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$$
- Convertemos as unidades:
  $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

**Gráfico**




A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

## Tambor – frequência do modo (1, 1) com um diâmetro nodal.

Enunciado: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2];`

```
m=1[one]; n=1[one])
```

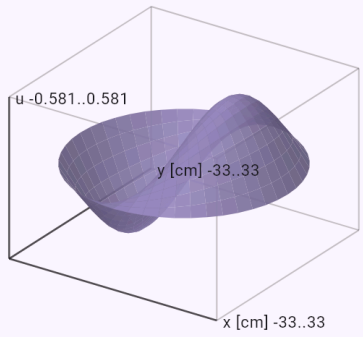
### Resultado

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

### Passos

- Procuramos $f_{mn}$; dados
  $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Convertemos as unidades: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Uma membrana circular fixa no bordo (a pele de um tambor) segue a equação das ondas u_tt = c²·Δu com velocidade c = √(T/σ). Em coordenadas polares as variáveis separam-se: a parte angular é cos(mφ) e a radial uma função de Bessel J_m(kr). A condição no bordo J_m(ka) = 0 dá k = j_mn/a, onde j_mn é a n-ésima raiz de J_m, e as frequências f_mn = j_mn·c/(2πa). O modo (m, n) tem m diâmetros nodais e n − 1 círculos nodais. Equação do modelo
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a, \varphi, t) = 0$$
- Velocidade da onda na membrana:
  $$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$
- Separação em coordenadas polares – equação de Bessel
  $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- O bordo da membrana está fixo:
  $J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$
- Substituímos: $f_{11} = \frac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Os modos superiores não são múltiplos inteiros do fundamental. Por isso um tambor não tem uma altura tão clara como uma corda.
  $\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$

### Gráfico




A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

## Alcance de um lançamento no vácuo.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

**Resultado**

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

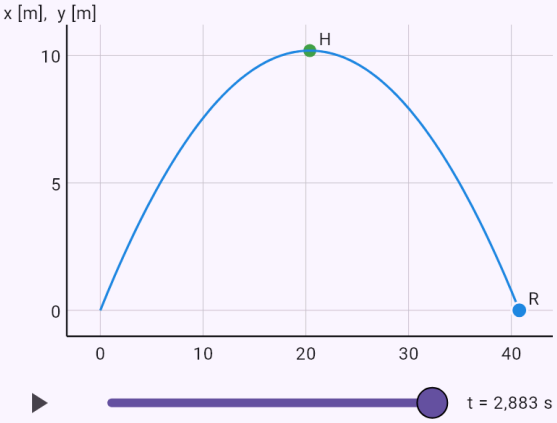
**Passos**

- Procuramos $R$; dados: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Sem resistência do ar, o movimento separa-se em dois independentes: uniforme na horizontal e uniformemente acelerado na vertical. A trajetória é uma parábola e todos os valores têm fórmula exata. Equação do modelo: $x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 20\cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Tempo de voo
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2\cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Isolamos a grandeza procurada: $R = v_{0x}T$
- Substituímos: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Com alturas de partida e de chegada iguais valem as fórmulas escolares
  $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
  $$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$
  $$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

- O alcance máximo ocorre a 45°; os ângulos α e 90° − α dão o mesmo alcance.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Velocidade de chegada de um lançamento de uma altura.

Enunciado: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

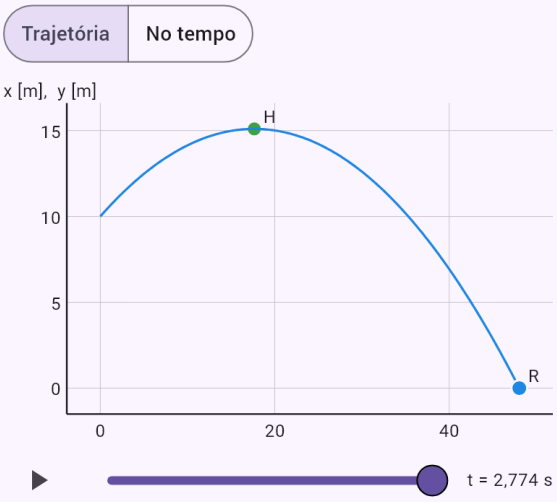
### Resultado

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

### Passos

- Procuramos $v_k$; dados:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Sem resistência do ar, o movimento separa-se em dois independentes: uniforme na horizontal e uniformemente acelerado na vertical. A trajetória é uma parábola e todos os valores têm fórmula exata. Equação do modelo: $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 20\cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Substituímos
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Resulta da conservação da energia mecânica e não depende do ângulo.

### Gráfico




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Dois ângulos de elevação para uma distância de 200 m.

Enunciado: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

**Resultado**

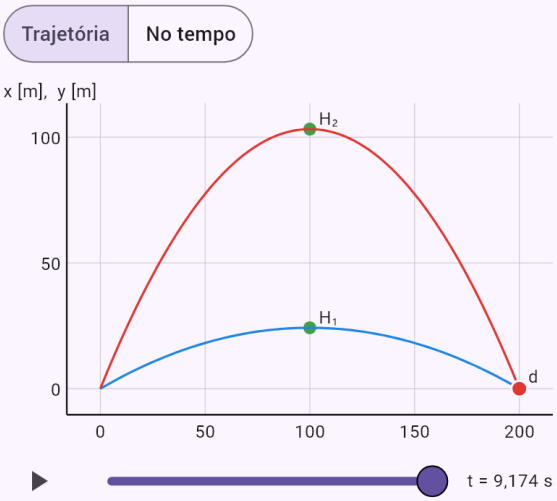
$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

**Passos**

- Procuramos $\alpha$; dados: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- A distância e a altura do alvo são substituídas na equação da trajetória. Com u = tan α obtém-se uma equação quadrática, normalmente com duas raízes: uma trajetória rasante e outra elevada. Equação do modelo:
  $h_k = h_0 + d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$
- Equação quadrática para tan α
  $u = \tan\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$
  $a = \frac{gd^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81\cdot(200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$
  $c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$
- Discriminante:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4\cdot 78{,}48\cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Raízes: $u_{1,2} = \frac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Solução
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Solução
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Em terreno plano os dois ângulos somam 90°.

**Gráfico**




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Alcance de uma bola com resistência do ar e comparação com o vácuo.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

**Resultado**

$$R \approx 38{,}65\,\text{m}$$

**Passos**

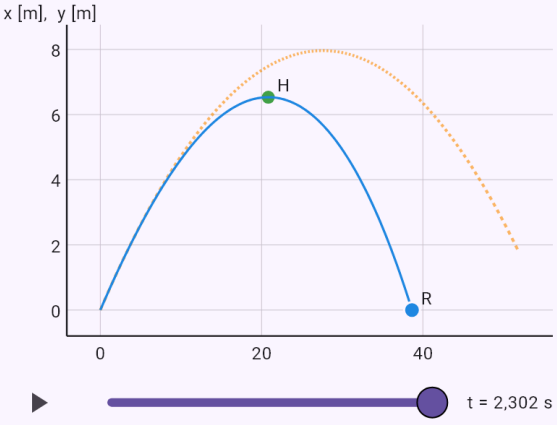
- Procuramos $R$; dados
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$
- Convertemos as unidades
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Sobre o corpo atuam o peso e a resistência do ar, oposta à velocidade em relação ao ar, pelo que o vento também entra nas equações. As componentes da velocidade estão acopladas e não há solução exata, por isso o sistema é resolvido numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem. Equação do modelo:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- O sistema de seis equações para x, y, z e as componentes da velocidade foi resolvido com Runge-Kutta de 4.ª ordem; número de passos: $N = 1807$
- Evolução do voo

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] | $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 25 |
| 0,46 | 9,358 | 4,405 | 20,31 |
| 0,921 | 17,72 | 6,367 | 17,37 |
| 1,38 | 25,32 | 6,163 | 15,99 |
| 1,84 | 32,28 | 3,985 | 15,96 |
| 2,3 | 38,65 | 0 | 16,88 |

- Valores principais
  $H \approx 6{,}534\,\text{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\text{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\text{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- O mesmo lançamento no vácuo
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Alcance no ar em relação ao vácuo: $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




A linha contínua é a trajetória no ar e a tracejada, no vácuo. Os eixos têm escalas diferentes.

## Desvio lateral de uma bola ao vento, com vista lateral e superior.

Enunciado: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

**Resultado**

$$z \approx 2{,}621\ \text{m}$$

**Passos**

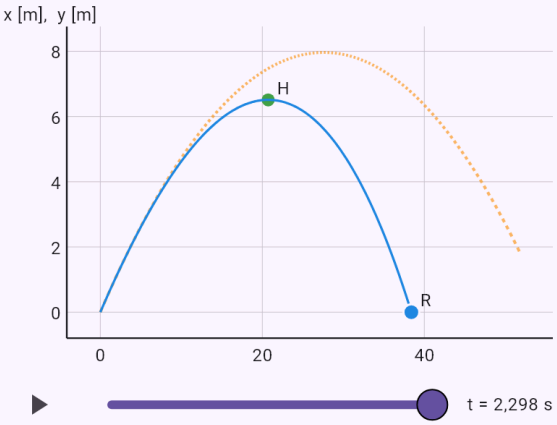
- Procuramos $z$; dados
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$
- Convertemos as unidades
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Sobre o corpo atuam o peso e a resistência do ar, oposta à velocidade em relação ao ar, pelo que o vento também entra nas equações. As componentes da velocidade estão acopladas e não há solução exata, por isso o sistema é resolvido numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem. Equação do modelo:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- O sistema de seis equações para x, y, z e as componentes da velocidade foi resolvido com Runge-Kutta de 4.ª ordem; número de passos: $N = 1804$
- Evolução do voo

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] | $v$ [m/s] | $z$ [m] |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 25 | 0 |
| 0,46 | 9,33 | 4,393 | 20,27 | 0,143 |
| 0,919 | 17,65 | 6,346 | 17,33 | 0,519 |
| 1,38 | 25,19 | 6,139 | 15,96 | 1,07 |
| 1,84 | 32,09 | 3,968 | 15,95 | 1,78 |
| 2,3 | 38,4 | 0 | 16,89 | 2,62 |

- Valores principais
  $H \approx 6{,}51\,\text{m}$
  $T \approx 2{,}298\,\text{s}$
  $R \approx 38{,}4\,\text{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\,\text{m}$
- O mesmo lançamento no vácuo
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Alcance no ar em relação ao vácuo: $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Efeito do vento: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\text{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\text{m}$

**Gráfico**

Vista lateral | Vista superior | No tempo




A linha contínua é a trajetória no ar e a tracejada, no vácuo. Os eixos têm escalas diferentes.

## Carabina desportiva de pequeno calibre: velocidade no fim do voo, curva G1.

Enunciado: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

**Resultado**

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

**Passos**

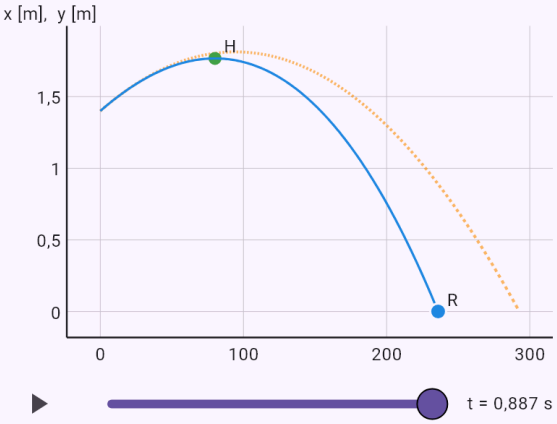
- Procuramos $v_k$; dados
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Convertemos as unidades
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Sobre o corpo atuam o peso e a resistência do ar, oposta à velocidade em relação ao ar, pelo que o vento também entra nas equações. As componentes da velocidade estão acopladas e não há solução exata, por isso o sistema é resolvido numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem. Equação do modelo:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Número de Mach e coeficiente de arrasto no início:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- O sistema de seis equações para x, y, z e as componentes da velocidade foi resolvido com Runge-Kutta de 4.ª ordem; número de passos: $N = 73$
- Evolução do voo

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] | $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,4 | 326 |
| 0,177 | 54,58 | 1,727 | 292,2 |
| 0,355 | 104,4 | 1,729 | 270,3 |
| 0,532 | 150,8 | 1,431 | 253,5 |
| 0,71 | 194,5 | 0,8512 | 239,6 |
| 0,887 | 236 | 0 | 227,7 |

- Valores principais
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- O mesmo lançamento no vácuo
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Alcance no ar em relação ao vácuo: $\dfrac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- O coeficiente de arrasto vem de uma curva aproximada segundo o número de Mach; num projétil, a curva G1 vezes o fator de forma. As tabelas do fabricante têm prioridade. O desvio por rotação não é incluído.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




A linha contínua é a trajetória no ar e a tracejada, no vácuo. Os eixos têm escalas diferentes.

## Carabina de caça: alcance com a densidade do ar conforme a altitude.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

```
cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)
```

**Resultado**

$$R \approx 2365\,\text{m}$$

**Passos**

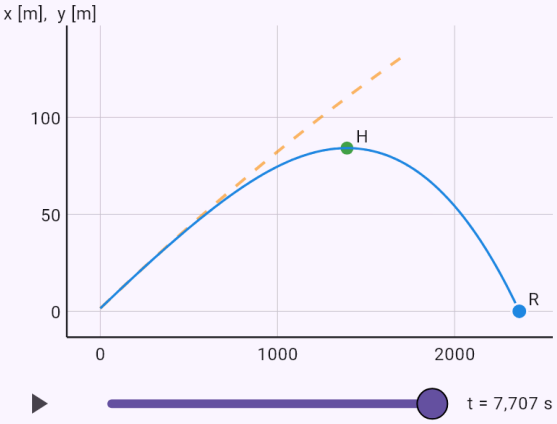
- Procuramos $R$; dados
  $v_0 = 860\,\text{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\text{m}, \quad m = 9{,}72\,\text{g},$
- Convertemos as unidades
  $m = 9{,}72\,\text{g} = 0{,}00972\,\text{kg}, \quad S = 48{,}1\,\text{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Sobre o corpo atuam o peso e a resistência do ar, oposta à velocidade em relação ao ar, pelo que o vento também entra nas equações. As componentes da velocidade estão acopladas e não há solução exata, por isso o sistema é resolvido numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem. Equação do modelo:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\text{m/s}$
- Densidade do ar segundo a atmosfera padrão:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\text{kg/m}^3$
- Número de Mach e coeficiente de arrasto no início:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\text{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\text{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- O sistema de seis equações para x, y, z e as componentes da velocidade foi resolvido com Runge-Kutta de 4.ª ordem; número de passos: $N = 335$
- Evolução do voo

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] | $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,5 | 860 |
| 1,54 | 847,3 | 66,67 | 367,7 |
| 3,08 | 1325 | 83,84 | 274 |
| 4,62 | 1715 | 76,3 | 236,4 |
| 6,17 | 2058 | 47,72 | 211,3 |
| 7,71 | 2365 | 0 | 192,8 |

- Valores principais
  $H \approx 84{,}15\,\text{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\text{s}$
  $R \approx 2365\,\text{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- O mesmo lançamento no vácuo
  $R_v \approx 13\,110\,\text{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\text{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\text{s}$
- Alcance no ar em relação ao vácuo: $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- O coeficiente de arrasto vem de uma curva aproximada segundo o número de Mach; num projétil, a curva G1 vezes o fator de forma. As tabelas do fabricante têm prioridade. O desvio por rotação não é incluído.
- Durante o voo a velocidade desceu abaixo da do som; é nesta zona que o coeficiente de arrasto mais varia.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




A linha contínua é a trajetória no ar e a tracejada, no vácuo. Os eixos têm escalas diferentes.

## Uma bala de canhão de física escolar: desvio devido à força de Coriolis.

Enunciado: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

### Resultado

$z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$

### Passos

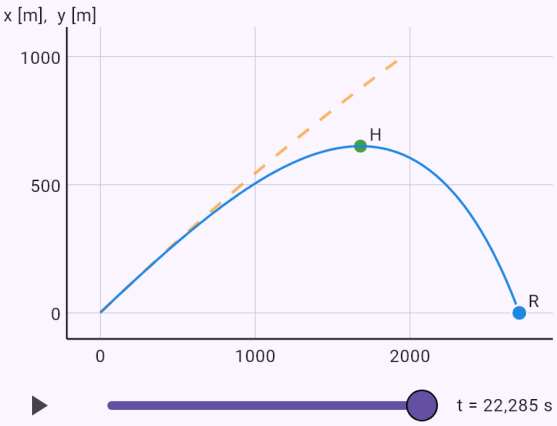
- Procuramos $z$; dados
  $v_0 = 439\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\mathrm{m}, \quad m = 5580\,\mathrm{g},$
- Convertemos as unidades
  $m = 5580\,\mathrm{g} = 5{,}58\,\mathrm{kg}, \quad S = 10\,200\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0102\,\mathrm{m^2}$
- Sobre o corpo atuam o peso e a resistência do ar, oposta à velocidade em relação ao ar, pelo que o vento também entra nas equações. As componentes da velocidade estão acopladas e não há solução exata, por isso o sistema é resolvido numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem. Equação do modelo
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Componentes da velocidade inicial
  $v_{0x} = 439\cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 439\sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Número de Mach e coeficiente de arrasto no início:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\mathrm{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\mathrm{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Velocidade angular da Terra (força de Coriolis):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
- O sistema de seis equações para x, y, z e as componentes da velocidade foi resolvido com Runge-Kutta de 4.ª ordem; número de passos: $N = 1023$
- Evolução do voo

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] | $v$ [m/s] | $z$ [m] |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 439 | 0 |
| 4,46 | 1014 | 509,8 | 172,8 | 0,122 |
| 8,91 | 1617 | 648,6 | 115 | 0,408 |
| 13,4 | 2069 | 580,7 | 95,94 | 0,839 |
| 17,8 | 2425 | 353 | 97,3 | 1,41 |
| 22,3 | 2706 | 0 | 106,4 | 2,12 |

- Valores principais
  $H \approx 650{,}1\,\mathrm{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2706\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- O mesmo lançamento no vácuo
  $R_v \approx 17\,020\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 2457\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\mathrm{s}$
- Alcance no ar em relação ao vácuo: $\dfrac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Efeito da força de Coriolis
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- O coeficiente de arrasto vem de uma curva aproximada segundo o número de Mach; num projétil, a curva G1 vezes o fator de forma. As tabelas do fabricante têm prioridade. O desvio por rotação não é incluído.
- Durante o voo a velocidade desceu abaixo da do som; é nesta zona que o coeficiente de arrasto mais varia.

### Gráfico

Vista lateral | Vista superior | No tempo




A linha contínua é a trajetória no ar e a tracejada, no vácuo. Os eixos têm escalas diferentes.

## Ângulo rasante e elevado para uma bola com resistência do ar.

Enunciado: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

**Resultado**

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

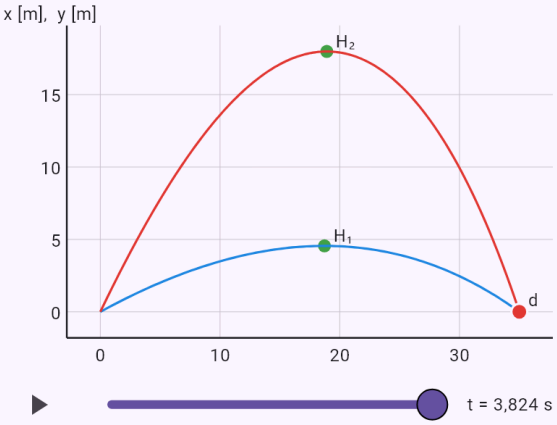
**Passos**

- Procuramos $\alpha$; dados
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Convertemos as unidades
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Com resistência do ar não há fórmula. O cálculo experimenta vários ângulos e observa a que altura voa o corpo à distância do alvo. Os ângulos com que passa exatamente pelo alvo são encontrados por bisseção. Equação do modelo: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Constante de resistência do ar (coeficiente de arrasto):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Velocidade terminal em queda livre:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Resistência do ar face ao peso no início: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Os ângulos foram encontrados pelo método do tiro: bisseção pela altura à distância d, isto é, procurando uma raiz de $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Solução
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Solução

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Velocidade de perda de um avião ligeiro.

Enunciado: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

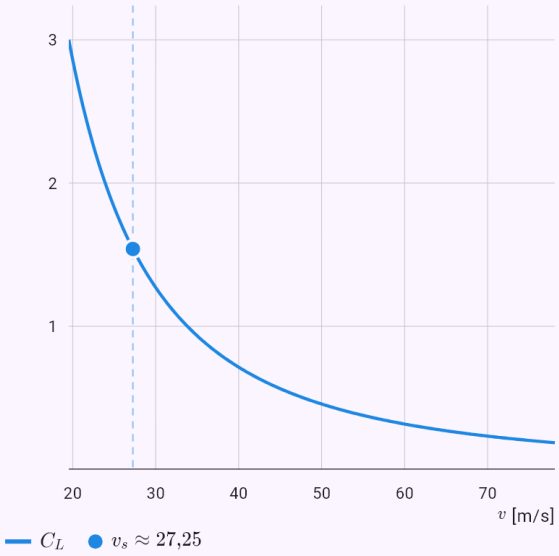
**Resultado**

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

**Passos**

- Procuramos $v_s$; dados
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- Em voo nivelado a sustentação iguala o peso e a tração iguala o arrasto. O arrasto tem duas partes: o parasita cresce com o quadrado da velocidade e o induzido diminui com ela, pelo que existe uma velocidade de arrasto mínimo. Equação do modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Peso do avião: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Substituímos
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Convertemos as unidades:
  $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Arrasto em voo nivelado e gráfico do arrasto parasita e induzido.

Enunciado: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

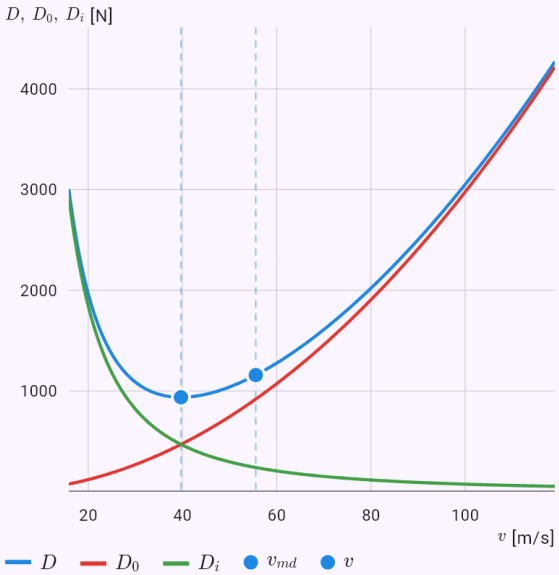
**Resultado**

$$D \approx 1{,}158\,\text{kN}$$

**Passos**

- Procuramos $D$; dados
  $v = 200\,\text{km/h}, \quad m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad b = 1$
- Convertemos as unidades: $v = 200\,\text{km/h} = 55{,}56\,\text{m/s}$
- Em voo nivelado a sustentação iguala o peso e a tração iguala o arrasto. O arrasto tem duas partes: o parasita cresce com o quadrado da velocidade e o induzido diminui com ela, pelo que existe uma velocidade de arrasto mínimo. Equação do modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Peso do avião: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Alongamento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Fator de arrasto induzido (fator de Oswald e, polar):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Pressão dinâmica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\text{Pa}$
- Coeficiente de sustentação necessário:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Arrasto parasita e induzido:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\text{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\text{N}$
- Razão de planeio a esta velocidade:
  $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Isolamos a grandeza procurada: $D = D_0 + D_i$
- Substituímos: $D \approx 1158\,\text{N}$
- Convertemos as unidades: $D \approx 1158\,\text{N} = 1{,}158\,\text{kN}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Ecranoplano KM: quanto arrasto poupa o efeito de solo.

Enunciado: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

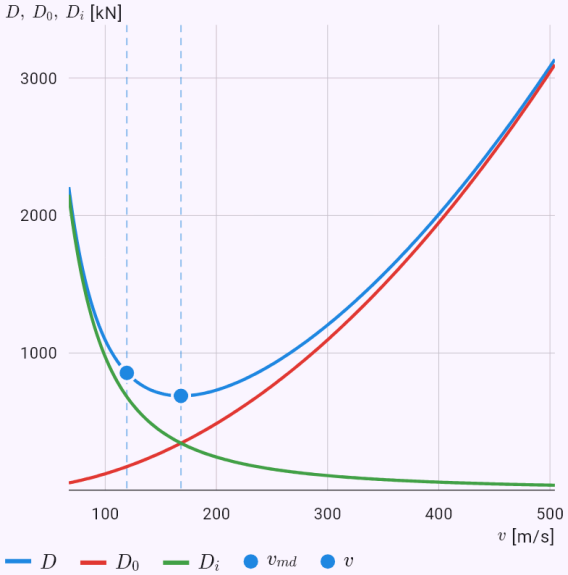
**Resultado**

$$D \approx 855{,}6\,\text{kN}$$

**Passos**

- Procuramos $D$; dados
  $v = 430\,\text{km/h}, \quad m = 544\,000\,\text{kg}, \quad S = 662{,}5\,\text{m}^2, \quad b$
- Convertemos as unidades: $v = 430\,\text{km/h} = 119{,}4\,\text{m/s}$
- Em voo nivelado a sustentação iguala o peso e a tração iguala o arrasto. O arrasto tem duas partes: o parasita cresce com o quadrado da velocidade e o induzido diminui com ela, pelo que existe uma velocidade de arrasto mínimo. Equação do modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Peso do avião: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\text{kN}$
- Alongamento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Fator de arrasto induzido (fator de Oswald e, polar):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- O efeito de solo reduz o arrasto induzido
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Ganho de sustentação com o mesmo ângulo de ataque (estimativa pela linha sustentadora)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Fórmula empírica de McCormick para asas comuns. Numa asa de pequeno alongamento com placas de extremidade, como a de um ecranoplano, o efeito real é mais forte.
- Pressão dinâmica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\text{Pa}$
- Coeficiente de sustentação necessário:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Arrasto parasita e induzido
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\text{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\text{kN}$
- Razão de planeio a esta velocidade:
  $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Arrasto poupado pelo efeito de solo:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\text{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Isolamos a grandeza procurada: $D = D_0 + D_i$
- Substituímos: $D \approx 855{,}6\,\text{kN}$
- Convertemos as unidades: $D \approx 855\,600\,\text{N} = 855{,}6\,\text{kN}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Corrida de descolagem de um avião ligeiro com gráfico de velocidade e distância.

Enunciado: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

### Resultado

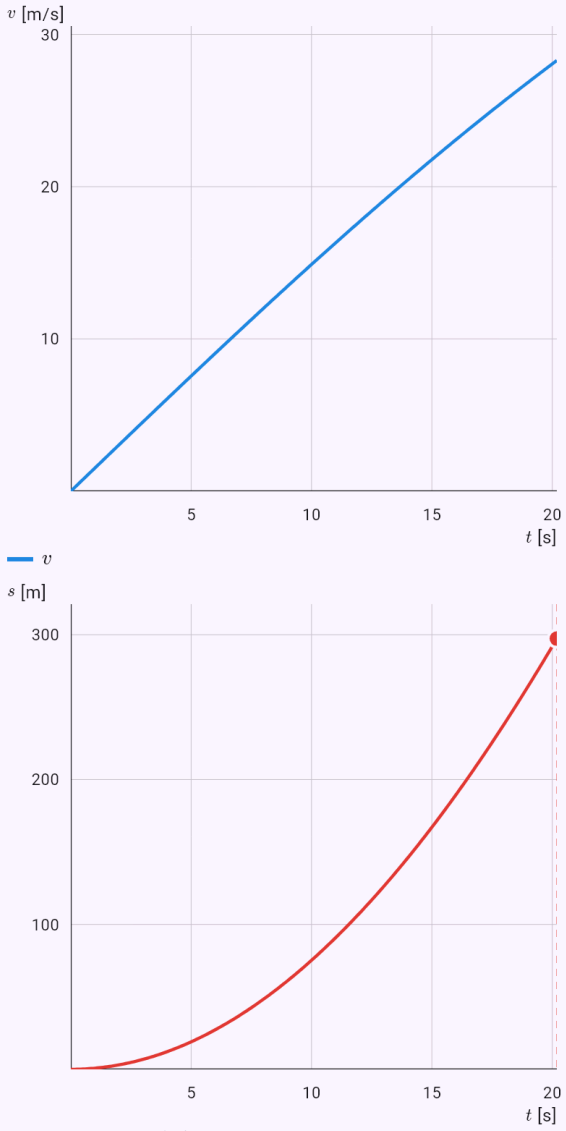
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

### Passos

- Procuramos $s_g$; dados
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Convertemos as unidades: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- O avião acelera do repouso até à velocidade de descolagem sob a tração, o arrasto e o atrito de rolamento, que diminui à medida que a sustentação cresce. A equação é resolvida numericamente com Runge-Kutta de 4.ª ordem; a tração é uma média constante. Equação do modelo
  $m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = \iota$
- Peso do avião: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Velocidade de perda
  $$v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$$
- Velocidade de descolagem em relação ao ar:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Alongamento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Fator de arrasto induzido (fator de Oswald e, polar):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Coeficiente de arrasto na pista:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Aceleração no início e no fim
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$
- A equação foi resolvida com Runge-Kutta de 4.ª ordem, passos: $N = 2172$
- Desenrolar na pista

| $t$ [s] | $s$ [m] | $v$ [m/s] |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 4,04 | 12,38 | 6,12 |
| 8,08 | 49,25 | 12,11 |
| 12,1 | 109,9 | 17,87 |
| 16,2 | 193,1 | 23,28 |
| 20,2 | 297,4 | 28,29 |

### Gráfico




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Raio de viragem com 30° de inclinação.

Enunciado: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

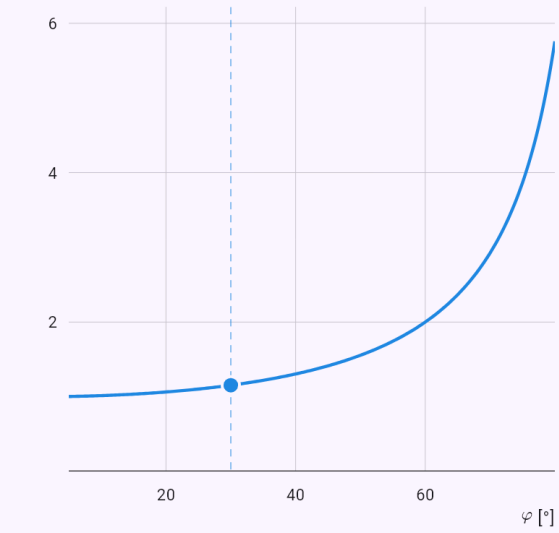
**Resultado**

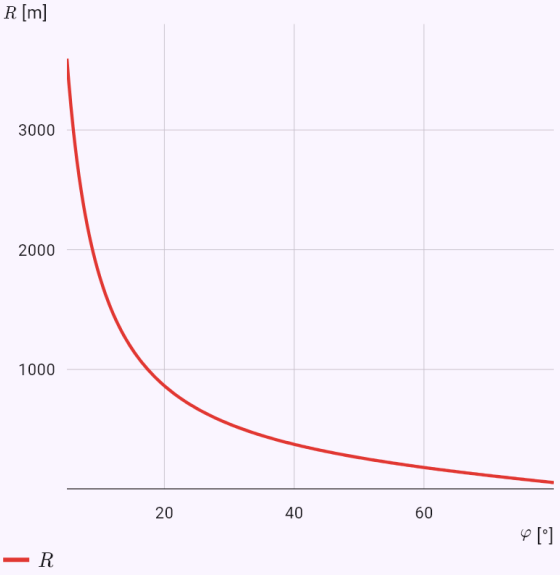
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30^\circ$
- Convertemos as unidades: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- Numa viragem coordenada a componente vertical da sustentação suporta o peso e a horizontal curva a trajetória. O fator de carga depende só da inclinação; o raio, também da velocidade. Equação do modelo:
  $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Isolamos a grandeza procurada: $R = \dfrac{v^2}{g\tan\varphi}$
- Substituímos: $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81\cdot\tan 30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Alcance de um planador a partir de 1000 m de altura.

Enunciado: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

**Resultado**

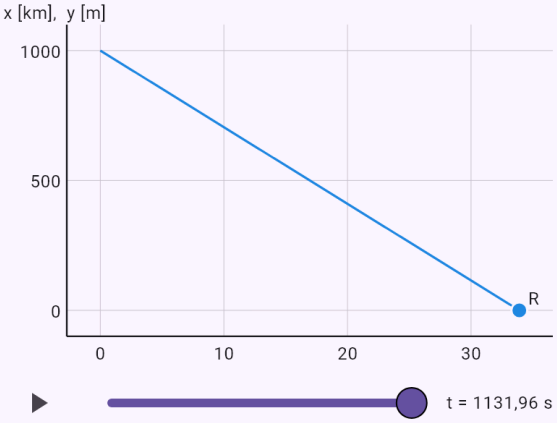
$$R \approx 33{,}91\,\text{km}$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados $h = 1000\,\text{m}, \quad m = 600\,\text{kg}, \quad S = 17{,}95\,\text{m}^2, \quad b = 17$
- Sem tração o avião desce em linha reta com uma inclinação dada pela razão entre sustentação e arrasto. O alcance a partir de uma altura é a altura vezes a razão de planeio, máximo à velocidade de melhor planeio. Equação do modelo: $\tan\gamma = \dfrac{D}{L} = \dfrac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \dfrac{v}{E}$
- Peso do avião: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\text{N}$
- Alongamento: $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Fator de arrasto induzido (fator de Oswald e, polar): $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Coeficiente de sustentação no melhor planeio: $C_L^* = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Velocidade de melhor planeio $v = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\text{m/s}$
- Razão de planeio máxima e arrasto mínimo $E_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Ângulo de planeio: $\gamma = \arctan\dfrac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Assume-se um pequeno ângulo de planeio, em que a sustentação praticamente iguala o peso, e uma massa volúmica do ar constante.
- Isolamos a grandeza procurada: $R = hE$
- Substituímos: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\text{m}$
- Convertemos as unidades: $R \approx 33\,910\,\text{m} = 33{,}91\,\text{km}$

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Apollo 13: a aceleração de uma entrada a −6,20°.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])`

**Resultado**

$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$

**Passos**

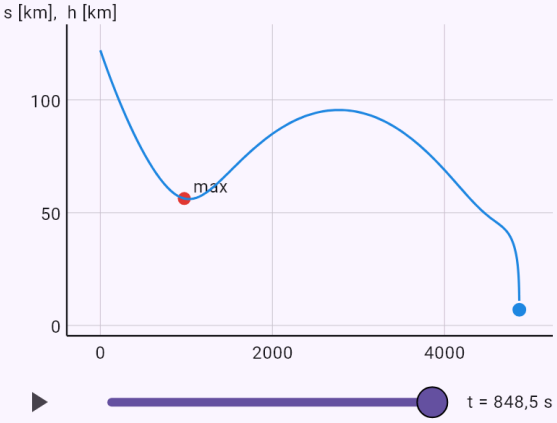
- Procuramos $a_{max}$; dados
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Uma passagem pela atmosfera desde a altitude de entrada h_0 (122 km por omissão) com o ângulo de trajetória γ_0 dado e um rolamento σ constante até à altitude h_k (abertura dos paraquedas, voo planado no vaivém). A aceleração máxima é comparada com a fórmula de Allen e Eggers para uma entrada balística. O fluxo de calor no ponto de estagnação é dado pela fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, e a temperatura da superfície do escudo pelo equilíbrio radiativo εσT⁴ = q. Equação do modelo
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Área frontal e coeficiente balístico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densidade do ar segundo a atmosfera padrão (isotérmica acima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Componente vertical da sustentação com o rolamento σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Captura: a nave desceu até à altitude h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Aceleração máxima (numericamente)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Uma entrada balística sem sustentação daria muito mais segundo Allen e Eggers: a sustentação reduz a aceleração
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Fluxo de calor máximo no ponto de estagnação (Sutton–Graves) e o calor total por m²

$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$

- Temperatura da superfície do escudo por equilíbrio radiativo (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Simplificações: a Terra é redonda e não roda, C_D e L/D são constantes e o rolamento σ é o mesmo durante todo o voo (o guiamento real varia-o). O fluxo de calor é apenas convectivo; no regresso da Lua soma-se a radiação da camada de choque incandescente. Um escudo ablativo leva parte do calor ao vaporizar-se, por isso a temperatura de equilíbrio radiativo é uma estimativa por excesso.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## O corredor de entrada da cápsula Apollo no regresso da Lua.

Enunciado: `model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn])`

**Resultado**

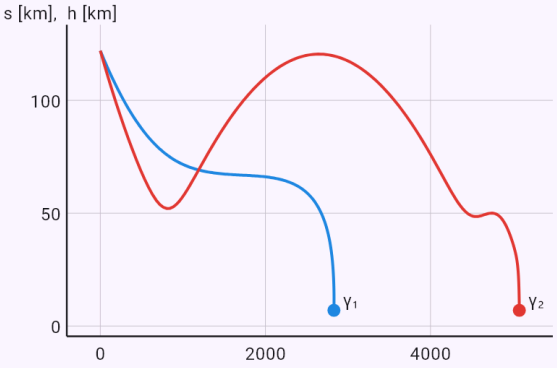
$$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$$
$$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$$
$$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta\gamma$; dados
  $m = 5500\,\text{kg}, \quad d = 3{,}91\,\text{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Os limites do ângulo de entrada por bissecção. O limite rasante é a entrada mais rasante que, com a sustentação voltada para baixo (σ = 180°), não volta a subir acima da altitude de entrada; o limite íngreme, a entrada mais íngreme que, com a sustentação para cima (σ = 0°), não excede a aceleração dada (nem o fluxo de calor, se for dado). Para o regresso da Lua o corredor tem apenas cerca de 2° de largura. A Apollo 13 (abril de 1970) regressou após a explosão do tanque de oxigénio com o módulo de comando desligado para poupar energia. A tripulação corrigiu a trajetória com uma ignição manual do motor do módulo lunar, apontada pela Terra no visor da janela, e a última correção visou o centro do corredor. O ângulo de entrada previsto era −6,20°; o computador do módulo de comando só voltou a ser ligado antes da entrada. Equação do modelo
  $\dot{v} = -\dfrac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \dfrac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\dfrac{g}{v} - \dfrac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Área frontal e coeficiente balístico
  $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\text{m}^2, \quad \beta = \dfrac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\text{kg/m}^2$
- Densidade do ar segundo a atmosfera padrão (isotérmica acima de 86 km)
  $\rho(122\,\text{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\text{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\text{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Limite rasante do corredor (sustentação para baixo):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Limite íngreme do corredor (sustentação para cima):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Largura do corredor de entrada:
  $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Simplificações: a Terra é redonda e não roda, C_D e L/D são constantes e o rolamento σ é o mesmo durante todo o voo (o guiamento real varia-o). O fluxo de calor é apenas convectivo; no regresso da Lua soma-se a radiação da camada de choque incandescente. Um escudo ablativo leva parte do calor ao vaporizar-se, por isso a temperatura de equilíbrio radiativo é uma estimativa por excesso.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes.

## Vostok: descida balística sem sustentação e 8–9 g.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

`sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])`

**Resultado**

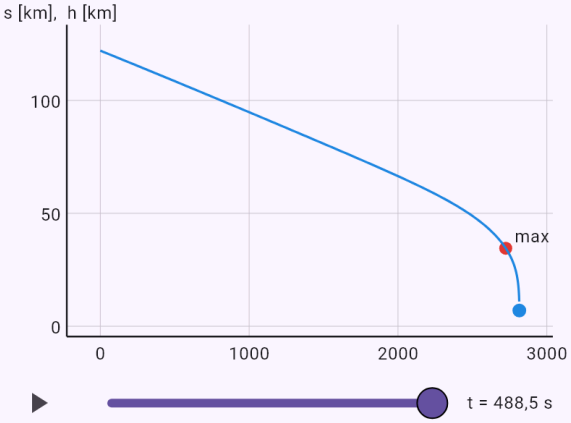
$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

**Passos**

- Procuramos $a_{max}$; dados
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad h$
- Uma passagem pela atmosfera desde a altitude de entrada h_0 (122 km por omissão) com o ângulo de trajetória γ_0 dado e um rolamento σ constante até à altitude h_k (abertura dos paraquedas, voo planado no vaivém). A aceleração máxima é comparada com a fórmula de Allen e Eggers para uma entrada balística. O fluxo de calor no ponto de estagnação é dado pela fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, e a temperatura da superfície do escudo pelo equilíbrio radiativo εσT⁴ = q. Equação do modelo
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Área frontal e coeficiente balístico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densidade do ar segundo a atmosfera padrão (isotérmica acima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Captura: a nave desceu até à altitude h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Aceleração máxima (numericamente)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Verificação pela fórmula de Allen e Eggers para uma entrada balística (sem gravidade, atmosfera exponencial de altura de escala H)
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$
- Fluxo de calor máximo no ponto de estagnação (Sutton–Graves) e o calor total por m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Temperatura da superfície do escudo por equilíbrio radiativo (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Simplificações: a Terra é redonda e não roda, C_D e L/D são constantes e o rolamento σ é o mesmo durante todo o voo (o guiamento real varia-o). O fluxo de calor é apenas convectivo; no regresso da Lua soma-se a radiação da camada de choque incandescente. Um escudo ablativo leva parte do calor ao vaporizar-se, por isso a temperatura de equilíbrio radiativo é uma estimativa por excesso.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Vaivém espacial: a temperatura do escudo por equilíbrio radiativo.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];`

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

**Resultado**

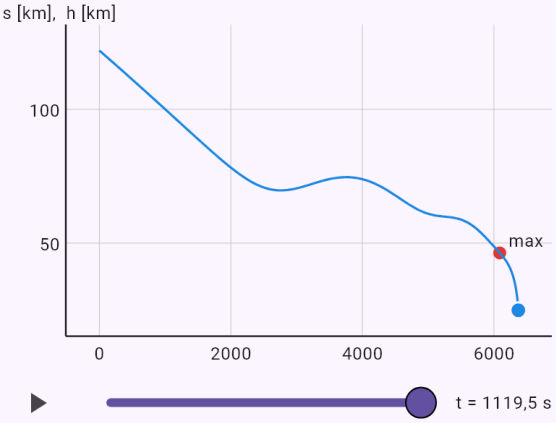
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

**Passos**

- Procuramos $T_{max}$; dados
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Uma passagem pela atmosfera desde a altitude de entrada h_0 (122 km por omissão) com o ângulo de trajetória γ_0 dado e um rolamento σ constante até à altitude h_k (abertura dos paraquedas, voo planado no vaivém). A aceleração máxima é comparada com a fórmula de Allen e Eggers para uma entrada balística. O fluxo de calor no ponto de estagnação é dado pela fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, e a temperatura da superfície do escudo pelo equilíbrio radiativo εσT⁴ = q. Equação do modelo
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- O vaivém espacial entrava com um ângulo de ataque de cerca de 40° e dissipava a sustentação em excesso rolando em torno do eixo longitudinal (até cerca de 70°); aterrava como planador sem motor. Os valores da predefinição são aproximados. O quanto a proteção térmica é solicitada mostrou-o a perda do Columbia (missão STS-107). No lançamento, a 16 de janeiro de 2003, um pedaço de espuma isolante do tanque externo perfurou um painel de carbono-carbono reforçado (RCC) do bordo de ataque da asa esquerda. Os bordos de ataque aquecem na reentrada até cerca de 1650 °C (cerca de 3000 °F). A 1 de fevereiro de 2003 entrou plasma quente na asa pela brecha, a estrutura fundiu e o orbitador desintegrou-se sobre o Texas; morreram os sete tripulantes.
- Área frontal e coeficiente balístico
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Densidade do ar segundo a atmosfera padrão (isotérmica acima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Componente vertical da sustentação com o rolamento σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Captura: a nave desceu até à altitude h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Aceleração máxima (numericamente)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Uma entrada balística sem sustentação daria muito mais segundo Allen e Eggers: a sustentação reduz a aceleração
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Fluxo de calor máximo no ponto de estagnação (Sutton–Graves) e o calor total por m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Temperatura da superfície do escudo por equilíbrio radiativo (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Simplificações: a Terra é redonda e não roda, C_D e L/D são constantes e o rolamento σ é o mesmo durante todo o voo (o guiamento real varia-o). O fluxo de calor é apenas convectivo; no regresso da Lua soma-se a radiação da camada de choque incandescente. Um escudo ablativo leva parte do calor ao vaporizar-se, por isso a temperatura de equilíbrio radiativo é uma estimativa por excesso.

**Gráfico**

Trajetória | No tempo




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## Quanto de um icebergue fica debaixo de água.

Enunciado: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

**Resultado**

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

**Passos**

- Procuramos $\varphi$; dados:
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Um corpo num fluido sofre uma impulsão igual ao peso do fluido deslocado. Um corpo a flutuar fica submerso na proporção das densidades. A mesma lei sustenta um balão no ar. Equação do modelo: $F_b = \rho_f V g$
- Isolamos a grandeza procurada: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Substituímos: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Convertemos as unidades: $\varphi \approx 0{,}8946 \; = 89{,}46\,\%$

## O que um balão de ar quente pode levar.

Enunciado: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

**Resultado**

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

**Passos**

- Procuramos $m_p$; dados
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Um corpo num fluido sofre uma impulsão igual ao peso do fluido deslocado. Um corpo a flutuar fica submerso na proporção das densidades. A mesma lei sustenta um balão no ar. Equação do modelo: $F_b = \rho_f V g$
- Massa que o gás pode sustentar
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Isolamos a grandeza procurada: $m_p = m_v - m_0$
- Substituímos: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

## A pressão no fundo da fossa das Marianas.

Enunciado: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure;`

`water=sea)`

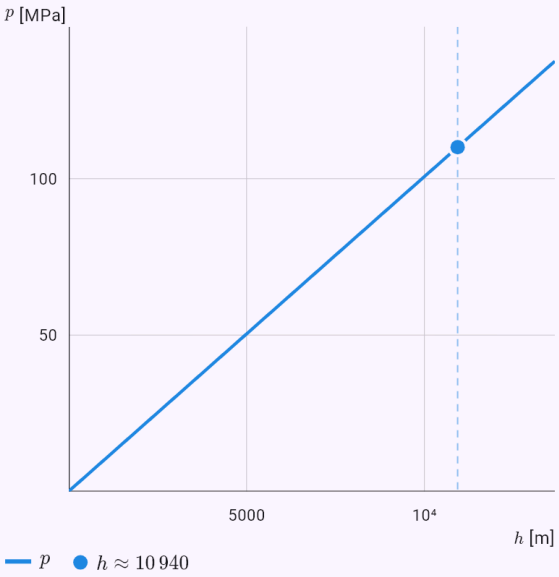
**Resultado**

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

**Passos**

- Procuramos $p$; dados:
  $h = 10\,940\ \text{m}, \quad \rho_f = 1025\ \text{kg/m}^3$
- A pressão cresce linearmente com a profundidade, em densidade vezes g vezes profundidade. À superfície soma-se a pressão do ar. A água é considerada incompressível. Equação do modelo: $p = p_0 + \rho_f g h$
- A grande profundidade a água comprime-se ligeiramente e a densidade muda com a temperatura e a salinidade; o resultado pode diferir cerca de 2 %.
- Isolamos a grandeza procurada: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Substituímos:
  $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\ \text{MPa}$
- Quantas vezes a pressão atmosférica: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Convertemos as unidades:
  $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\ \text{Pa} = 1101\ \text{bar}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A pressão num estreitamento do tubo.

Enunciado: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa]; rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

**Resultado**

$$p_2 \approx 170{,}1\ \text{kPa}$$

**Passos**

- Procuramos $p_2$; dados
  $A_1 = 20\ \text{cm}^2, \quad A_2 = 5\ \text{cm}^2, \quad v_1 = 2\ \text{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Convertemos as unidades
  $A_1 = 20\ \text{cm}^2 = 0{,}002\ \text{m}^2, \quad A_2 = 5\ \text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2,$
- Ao longo de uma linha de corrente de um líquido ideal conserva-se a soma da pressão e das energias cinética e potencial de um volume. Num estreitamento a velocidade sobe e a pressão desce; se atingir a pressão de vapor, surge a cavitação. Equação do modelo:
  $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Equação da continuidade:
  $v_2 = v_1 \dfrac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \dfrac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\ \text{m/s}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Substituímos
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - ($
- Convertemos as unidades:
  $p_2 \approx 170\,100\ \text{Pa} = 170{,}1\ \text{kPa}$

## Velocidade terminal de uma pedra na água e gráfico do arranque.

Enunciado: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

`nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

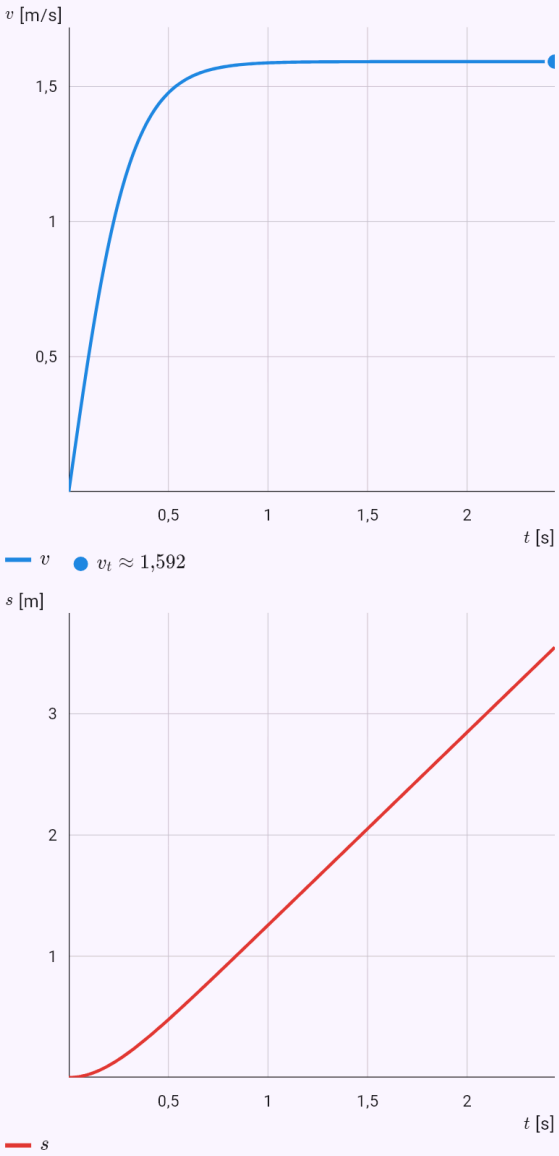
**Resultado**

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

**Passos**

- Procuramos $v_t$; dados
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Convertemos as unidades: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Um corpo desce ou sobe até o arrasto igualar a diferença entre peso e impulsão, atingindo a sua velocidade terminal. Ao arrancar tem também de pôr em movimento a água em redor, o que a massa adicionada descreve. A equação é resolvida numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Equação do modelo: $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, secção e massa da esfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- A força resultante aponta para baixo, o corpo desce:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Massa com a massa adicionada:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Número de Reynolds e coeficiente de arrasto à velocidade terminal: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Velocidade terminal: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Constante de tempo do arranque com e sem massa adicionada
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- A massa adicionada só altera o arranque. A velocidade terminal não depende dela, pois em movimento estável nada acelera.
- Substituímos: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

**Gráfico**




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Quanto tempo uma bolha sobe desde 10 m.

Enunciado: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

`nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)`

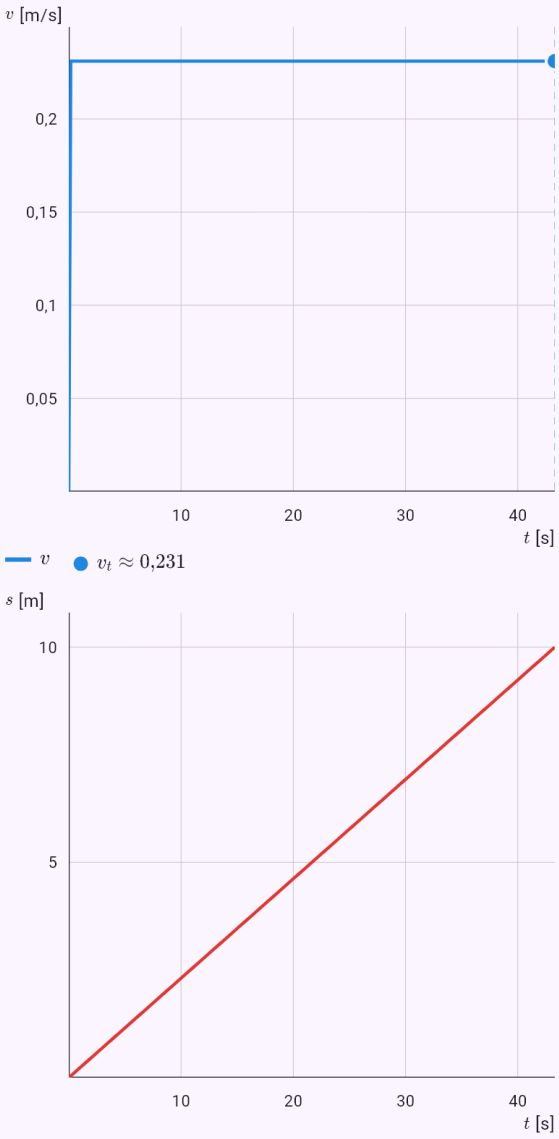
**Resultado**

$$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$$

**Passos**

- Procuramos $t$; dados
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Convertemos as unidades: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Um corpo desce ou sobe até o arrasto igualar a diferença entre peso e impulsão, atingindo a sua velocidade terminal. Ao arrancar tem também de pôr em movimento a água em redor, o que a massa adicionada descreve. A equação é resolvida numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Equação do modelo: $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, secção e massa da esfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- A força resultante aponta para cima, o corpo sobe:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Massa com a massa adicionada:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- O número de Eötvös indica quanto a bolha se deforma:
  $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Número de Reynolds e coeficiente de arrasto à velocidade terminal: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Velocidade terminal: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Constante de tempo do arranque com e sem massa adicionada
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- A massa adicionada só altera o arranque. A velocidade terminal não depende dela, pois em movimento estável nada acelera.
- A correlação de Tomiyama vale para água comum ligeiramente contaminada. Em água limpa as bolhas pequenas sobem mais depressa e as grandes partem-se ou oscilam.
- A equação foi resolvida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, número de passos: $N = 3363$

**Gráfico**




As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## A queda da haste de um arpão a 5 m.

Enunciado: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

`rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)`

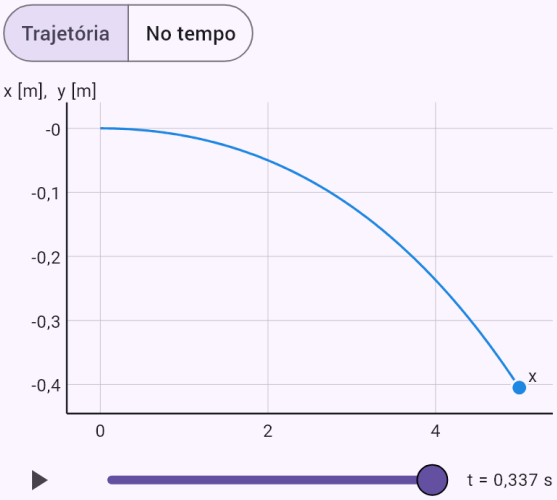
**Resultado**

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\text{cm}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta y$; dados $x = 5\,\text{m}, \quad v_0 = 20\,\text{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\text{kg}, \quad d = 7\,\text{mm},$
- Convertemos as unidades: $d = 7\,\text{mm} = 0{,}007\,\text{m}$
- Arpão de pesca desportiva: a haste esbelta é travada sobretudo pelo atrito na sua superfície, perdendo velocidade em poucos metros. A queda é determinada pelo peso menos a impulsão. As equações são resolvidas numericamente. Equação do modelo $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Coeficiente de atrito pela linha ITTC-57 $$Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($$
- Coeficiente de arrasto da haste: ponta e atrito ao longo do comprimento: $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Percurso em que a velocidade cai para cerca de 37 %, e aceleração para baixo na água $$\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\text{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\text{m/}$$
- A equação foi resolvida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, número de passos: $N = 1538$
- O modelo não inclui o arrasto do cabo, que encurta ainda mais o alcance real. A massa adicionada da haste no sentido axial é desprezável.
- Convertemos as unidades: $\Delta y \approx 0{,}405\,\text{m} = 40{,}5\,\text{cm}$

**Gráfico**




Os eixos têm escalas diferentes. Com o controlo deslizante ou o botão de reprodução pode seguir o voo no tempo.

## O alcance de um drone submarino com bateria.

Enunciado: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

**Resultado**

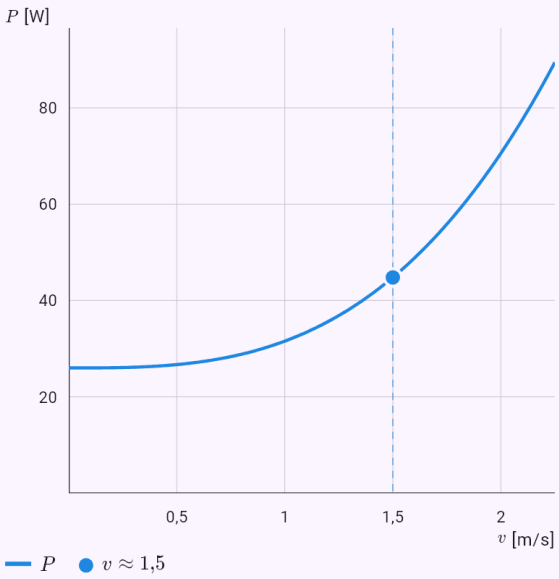
$$R \approx 120{,}5\,\text{km}$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados $v = 1{,}5\,\text{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\text{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Convertemos as unidades: $E = 1\,\text{kWh} = 3\,600\,000\,\text{J}$
- Em regime estável o impulso iguala o arrasto. O arrasto cresce com o quadrado da velocidade e a potência com o cubo. Com bateria conta ainda o consumo constante dos instrumentos, pelo que existe uma velocidade de alcance máximo. Equação do modelo: $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Fator K do arrasto D = Kv²

  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\text{kg/m}$
- Potência necessária: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\text{W}$
- Velocidade de alcance máximo: $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\text{m/s}$
- Autonomia da bateria: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\text{h}$
- Isolamos a grandeza procurada: $R = v t_E$
- Substituímos: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\text{km}$
- Convertemos as unidades: $R \approx 120\,500\,\text{m} = 120{,}5\,\text{km}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Um submarino histórico: a potência cresce com o cubo da velocidade.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

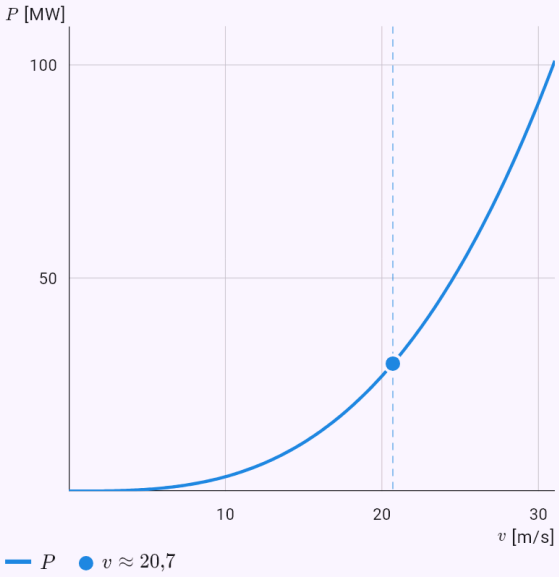
**Resultado**

$$P \approx 29\,930\,\text{kW}$$

**Passos**

- Procuramos $P$; dados
  $v = 20{,}7\,\text{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\text{m}^2, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- Em regime estável o impulso iguala o arrasto. O arrasto cresce com o quadrado da velocidade e a potência com o cubo. Com bateria conta ainda o consumo constante dos instrumentos, pelo que existe uma velocidade de alcance máximo. Equação do modelo:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Fator K do arrasto D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\text{kg/m}$
- Isolamos a grandeza procurada: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h$
- Substituímos: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\text{MW}$
- A potência cresce com o cubo da velocidade: o dobro da velocidade exige oito vezes mais potência:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Convertemos as unidades:
  $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\text{W} = 29\,930\,\text{kW}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Quanta água um submarino deve admitir para se manter.

Enunciado: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

**Resultado**

$$m_b \approx 849{,}8\,\text{t}$$

**Passos**

- Procuramos $m_b$; dados
  $V = 3073\,\text{m}^3, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\text{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}$
- Um veículo submerso mantém-se quando a sua massa com o lastro iguala a da água deslocada. Soltando ou admitindo água sobe ou desce. Esvaziar um tanque em profundidade exige mais ar, pois tem de vencer a pressão exterior. Equação do modelo: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Isolamos a grandeza procurada: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Substituímos:
  $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\text{kg}$
- Volume da água de lastro: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\text{m}^3$
- Convertemos as unidades: $m_b \approx 849\,800\,\text{kg} = 849{,}8\,\text{t}$

## Potência de um porta-contentores com a repartição da resistência.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

**Resultado**

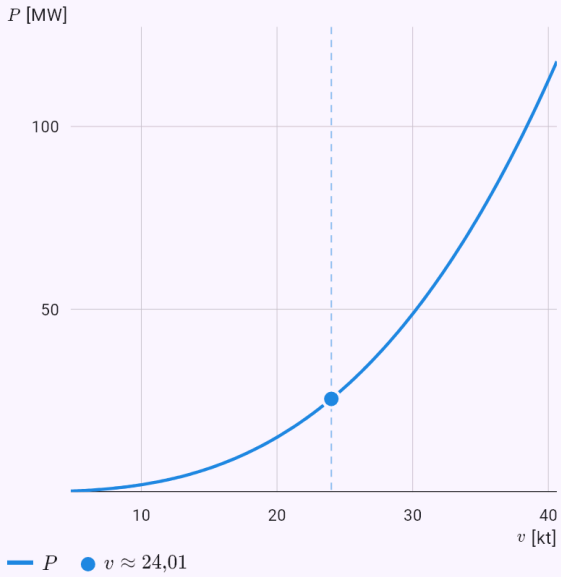
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

**Passos**

- Procuramos $P$; dados
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- O calado decorre do deslocamento e a estabilidade transversal do metacentro. A resistência tem uma parte de atrito pela linha ITTC-57 e uma parte residual de um coeficiente dado. O número de Froude e a velocidade de casco mostram quando as ondas no casco começam a aumentar muito a resistência. Equação do modelo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Números de Froude e de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^{9}$$
- Coeficiente de atrito pela linha ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Resistência de atrito e residual
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- O coeficiente residual é tomado como constante. Na realidade varia com a velocidade e provém de ensaios em modelo.
- Resistência total: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Isolamos a grandeza procurada: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Substituímos: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Convertemos as unidades:
  $P \approx 2{,}547 \cdot 10^{7}\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Altura metacêntrica: a estabilidade de um navio.

Enunciado: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

**Resultado**

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

**Passos**

- Procuramos $GM$; dados
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- O calado decorre do deslocamento e a estabilidade transversal do metacentro. A resistência tem uma parte de atrito pela linha ITTC-57 e uma parte residual de um coeficiente dado. O número de Froude e a velocidade de casco mostram quando as ondas no casco começam a aumentar muito a resistência. Equação do modelo
  $Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Volume deslocado e área de flutuação (coeficiente de bloco)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Altura do centro de carena acima da quilha (fórmula de Morrish)
  $KB = T - \frac{1}{3}\left(\frac{T}{2} + \frac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Altura do metacentro acima do centro de carena:
  $BM = \frac{I}{\nabla} = \frac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $GM = KB + BM - KG$
- Substituímos: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- O metacentro está acima do centro de gravidade: o navio é estável transversalmente.
- Válido para pequenos adornamentos. O momento da flutuação é estimado pelo seu coeficiente, exato para um retângulo; num navio real o resultado é apenas uma primeira estimativa.

## Navegação de um navio de 544 t e voo do ecranoplano KM rente à água.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)

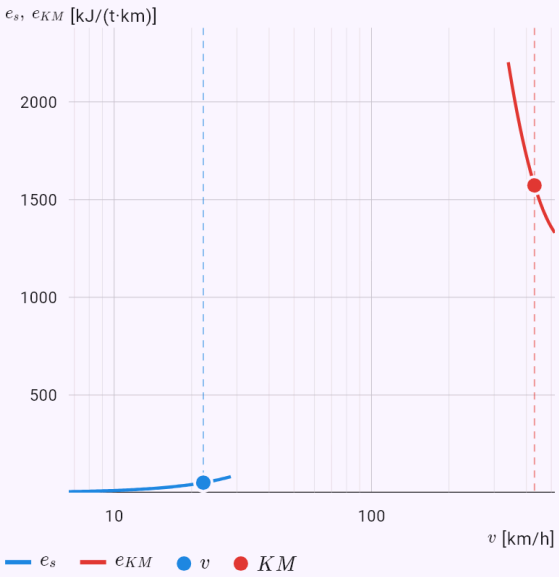
### Resultado

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

### Passos

- Procuramos $P$; dados
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- O calado decorre do deslocamento e a estabilidade transversal do metacentro. A resistência tem uma parte de atrito pela linha ITTC-57 e uma parte residual de um coeficiente dado. O número de Froude e a velocidade de casco mostram quando as ondas no casco começam a aumentar muito a resistência. Equação do modelo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Números de Froude e de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Coeficiente de atrito pela linha ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Resistência de atrito e residual
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- O coeficiente residual é tomado como constante. Na realidade varia com a velocidade e provém de ensaios em modelo.
- Ecranoplano KM em cruzeiro (o mesmo cálculo que no formulário Avião)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Trabalho contra a resistência por tonelada e quilómetro: navio e KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Quantas vezes mais energia o KM precisa e quantas vezes é mais rápido: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- O KM é calculado em efeito solo com o fator de McCormick. A comparação é do trabalho contra a resistência; não inclui o rendimento dos motores, as ondas nem o tempo.
- Resistência total: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Isolamos a grandeza procurada: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Substituímos: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Convertemos as unidades: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

### Gráfico




O eixo horizontal é logarítmico porque as velocidades diferem muitas vezes. Os pontos são a velocidade dada do navio e a de cruzeiro do ecranoplano.

## A energia do neutrão da reação D-T – repartida pela conservação do momento.

Enunciado: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

**Resultado**

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

**Passos**

- A energia de uma reação a partir das massas atómicas. Com dois produtos, a energia reparte-se pela conservação do momento linear: a partícula mais leve leva a maior parte. Equação do modelo:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reação: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Massas antes e depois:
  $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Substituímos:
  $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Os produtos afastam-se com momentos opostos e iguais, por isso as energias cinéticas estão na razão inversa das massas.
- Isolamos a grandeza procurada: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Substituímos:
  $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energia do núcleo de hélio: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

## Quanto carvão substitui 1 g de combustível D-T.

Enunciado: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

**Resultado**

$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$

**Passos**

- Procuramos $m_c$; dados: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Convertemos as unidades: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Quanta energia liberta uma quantidade de combustível, comparada com a cisão do urânio-235 (cerca de 200 MeV por núcleo) e com o carvão. Equação do modelo: $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reação: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energia de uma reação: $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Substituímos $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Substituímos: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Substituímos: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- A fusão não tem massa crítica. Se algo falhar, o plasma arrefece e a reação para sozinha; o reator não pode descontrolar-se como um de cisão.
- Convertemos as unidades: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

## O pico de Gamow da cadeia p-p no centro do Sol.

Enunciado: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one];`

`T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

**Resultado**

$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

**Passos**

- Procuramos $E_0$; dados:
  $Z_1 = 1,\quad Z_2 = 1,\quad A_1 = 1,\quad A_2 = 1,\quad k_B T = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- Na realidade, os núcleos atravessam a barreira por efeito túnel. A probabilidade de túnel e^(−√(E_G/E)) cresce depressa com a energia, enquanto os núcleos rápidos da distribuição de Maxwell rareiam depressa. O produto tem um pico de Gamow estreito $E_0$, onde as reações realmente acontecem. O fator de Gamow é usado como fórmula dada; a sua dedução pertence à mecânica quântica. Equação do modelo

$$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}},\quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2,\quad E_0 = \left($$

- Massa reduzida

$$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$

- Substituímos

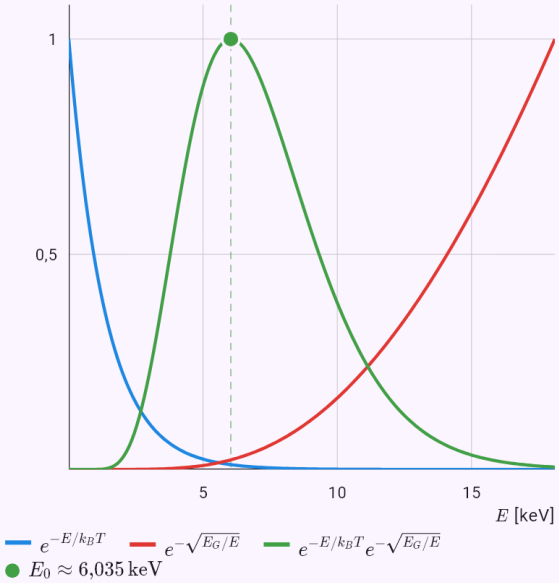
$$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$

- Substituímos

$$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

- Largura do pico: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Posição do pico em múltiplos de k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- As reações acontecem sobretudo numa faixa estreita de energias em torno de $E_0$, várias vezes a energia média k_BT. O gráfico mostra as duas funções e o seu produto, cada uma dividida pelo seu máximo.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## O produto triplo com os parâmetros do ITER comparado com a condição de ignição.

Enunciado: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

mode=lawson)

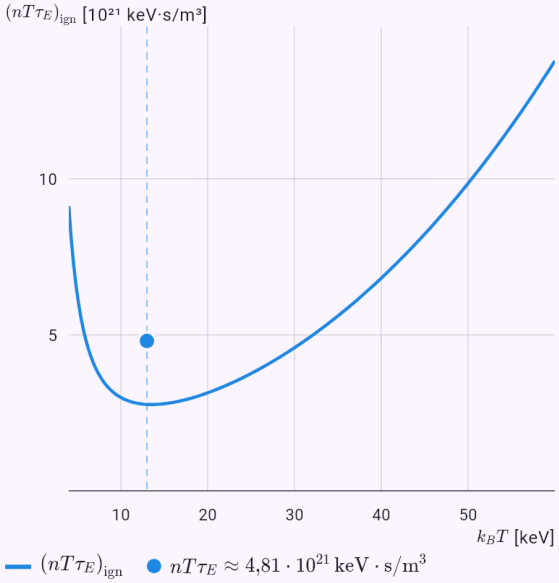
### Resultado

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$$

### Passos

- Procuramos $nT\tau_E$; dados
  $n = 10^{20}\ \mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\ \mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\ \mathrm{s}$
- O critério de Lawson: o plasma mantém-se quente sozinho (ignição) quando o aquecimento pelas partículas alfa das reações D-T compensa as perdas de calor 3nk_BT/τ_E. Decide o produto triplo da densidade n, da temperatura T e do tempo de confinamento da energia τ_E. O seu mínimo, cerca de 3·10²¹ keV·s/m³, fica perto de 14 keV. Equação do modelo
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Taxa de reação D-T (ajuste)
  $\langle\sigma v\rangle(13\ \mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m^3/s}$
- Substituímos
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12 \cdot (13)^2}{3520 \cdot 2{,}073 \cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s}$$
- Substituímos
  $nT\tau_E = 10^{20} \cdot 13 \cdot 3{,}7 \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$
- O produto triplo chega para a ignição: o aquecimento alfa cobre as perdas – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- O menor produto triplo necessário, cerca de 3·10²¹ keV·s/m³, fica perto de 14 keV. As perdas por radiação de travagem são aqui desprezadas.

### Gráfico




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A taxa de reação D-T a 10 keV como integral pela regra de Simpson.

Enunciado: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

**Resultado**

$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

**Passos**

- Procuramos $\langle \sigma v \rangle$; dados: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- A taxa de reação ⟨σv⟩ é a secção eficaz σ(E) em média sobre a distribuição de Maxwell das velocidades. Calcula-se como integral pela regra de Simpson e compara-se com um ajuste publicado. As secções eficazes são de Bosch e Hale (Nuclear Fusion, 1992). Equação do modelo

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$

- Reação: $^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n$
- Secção eficaz (Bosch-Hale):

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$$

- Regra de Simpson: $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Integral

$$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$

- Valores no SI

$$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2,$$

- Substituímos

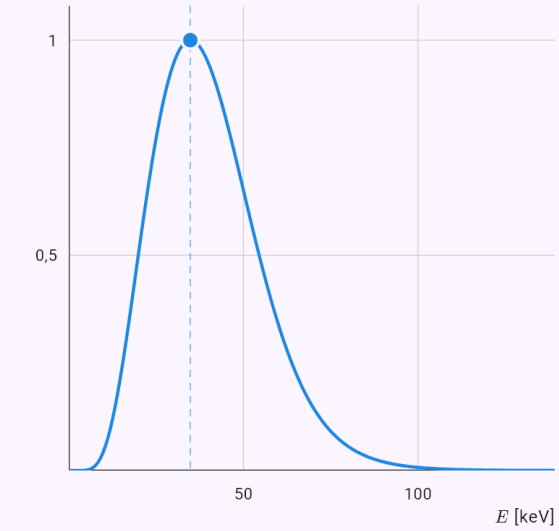
$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$

- Comparação com o ajuste

$$\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$$

- O integrando conta sobretudo perto do pico de Gamow, por isso basta integrar até 40 k_BT. A diferença em relação ao ajuste é da ordem de um por cento.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## O raio de Larmor de uma partícula alfa de fusão em 5 T.

Enunciado: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

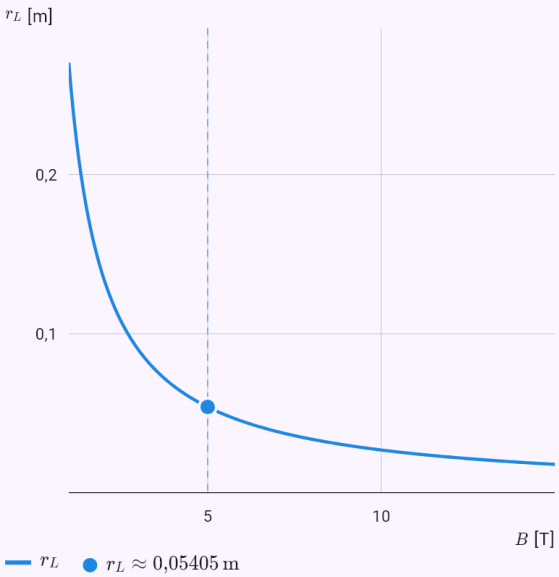
**Resultado**

$$r_L \approx 5{,}405\,\text{cm}$$

**Passos**

- Procuramos $r_L$; dados:
  $m = 4{,}002\,\text{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\text{keV}, \quad B = 5\,\text{T}$
- Uma partícula carregada num campo magnético gira à volta de uma linha de campo (raio de Larmor); por isso o campo magnético mantém o plasma quente longe das paredes. O cálculo é relativista; para iões lentos γ ≈ 1. Equação do modelo:
  $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Massa: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- Fator de Lorentz e velocidade
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\text{m/s} \approx 0{,}04$
- Momento linear
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$
- Substituímos
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\text{m}$
- Os iões de um tokamak giram em raios de milímetros a centímetros; por isso o campo magnético mantém-nos longe das paredes.
- Convertemos as unidades: $r_L \approx 0{,}05405\,\text{m} = 5{,}405\,\text{cm}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## O fator de Lorentz de um protão no LHC.

Enunciado: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV];`

`mode=lorentz; given=kinetic; particle=proton)`

**Resultado**

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

**Passos**

- Procuramos $\gamma$; dados:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Convertemos as unidades:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- A partir da velocidade (como fração de c) ou da energia cinética, calcula γ, a velocidade, a energia total e o momento. Um protão do LHC (6,8 TeV) é mais lento do que a luz apenas uns metros por segundo. Equação do modelo
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Energia em repouso: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Substituímos: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Velocidade: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- Quanto mais lenta do que a luz:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Uma partícula ultrarrelativista: quase toda a energia é cinética e a velocidade difere de c muito pouco.

## Quantos muões criados a 15 km chegam ao solo graças à dilatação do tempo.

Enunciado: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

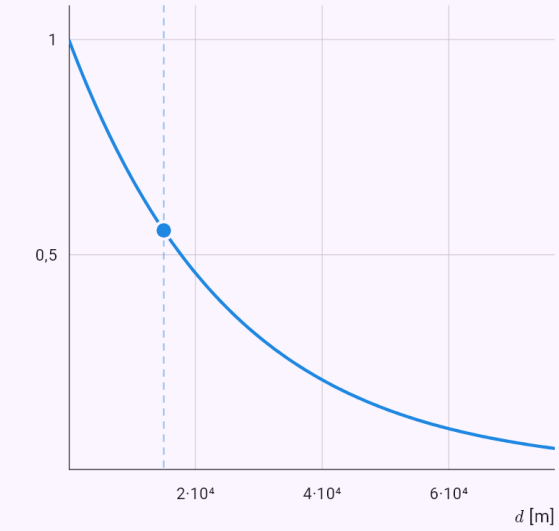
**Resultado**

$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

**Passos**

- Procuramos $\frac{N}{N_0}$; dados
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Convertemos as unidades
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Uma partícula instável decai com o seu tempo de vida médio próprio $\tau_0$. No laboratório, o seu tempo passa $\gamma$ vezes mais devagar, por isso chega $\gamma$ vezes mais longe. Sem dilatação do tempo, os muões criados a 15 km de altitude quase não chegariam ao solo. Equação do modelo: $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Substituímos: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Velocidade: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Substituímos
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{m}$
- Substituímos: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Sem dilatação do tempo chegaria a fração:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- No referencial próprio da partícula o tempo não abranda, mas a distância encurta (contração do comprimento). Ambos os pontos de vista dão o mesmo número de decaimentos.
- Convertemos as unidades: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 \; = 55{,}64\,\%$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A energia de colisão de um feixe do LHC num alvo fixo.

Enunciado: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

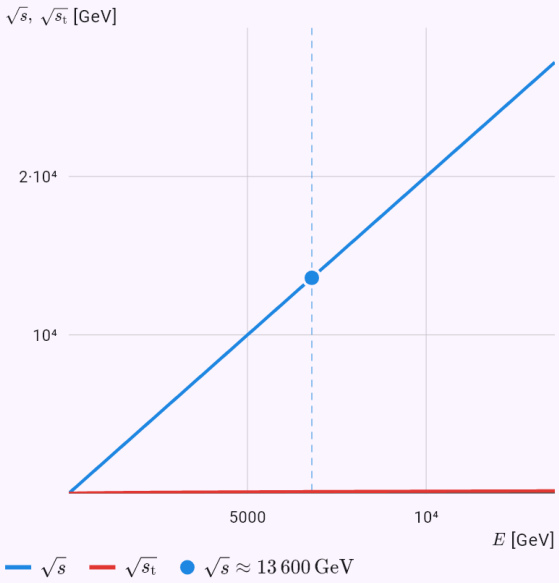
**Resultado**

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

**Passos**

- Procuramos $\sqrt{s_t}$; dados:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Em feixes que colidem de frente, toda a energia das duas partículas vai para a colisão: √s = 2E. Um feixe contra um alvo fixo gasta a maior parte da energia a mover o centro de massa, e √s só cresce com a raiz de E. Por isso se constroem colisionadores. Equação do modelo: $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s é a massa invariante do sistema: a energia disponível para criar partículas novas.
- Substituímos
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Feixes que colidem de frente: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A perda de energia de um eletrão por volta no LEP.

Enunciado: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

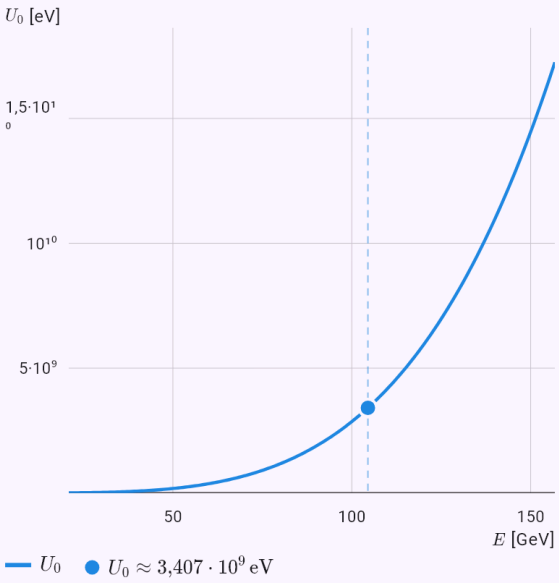
### Resultado

$$U_0 \approx 3{,}407\,\text{GeV}$$

### Passos

- Procuramos $U_0$; dados
  $E = 104{,}5\,\text{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\text{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Convertemos as unidades: $R = 3{,}096\,\text{km} = 3096\,\text{m}$
- Uma partícula carregada numa trajetória curva irradia (radiação de sincrotrão). A perda por volta cresce com γ⁴, ou seja, à mesma energia com 1/m⁴. Um eletrão perde 10¹³ vezes mais do que um protão; por isso o LEP ficou nos 104 GeV e o LHC acelera protões. Equação do modelo: $U_0 = \dfrac{e^2\beta^3\gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Fator de Lorentz: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Substituímos
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- Em eletrões-volt: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\text{eV}$
- Os eletrões irradiam 10¹³ vezes mais do que protões da mesma energia: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- O outro tipo de partícula com a mesma energia e órbita: $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\text{eV}$
- Convertemos as unidades:
  $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\text{J} = 3{,}407\,\text{GeV}$

### Gráfico




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

# 44. Estática e resistência dos materiais

O formulário Estática (Aplicações, área Engenharia) tem três modos. Uma viga está no eixo x de 0 a L e é sustentada por uma articulação, um apoio móvel ou um engaste; pode carregá-la com forças verticais e inclinadas, momentos e uma carga distribuída – uniforme, triangular ou trapezoidal. Várias forças vão num campo separadas por espaços, suas posições e ângulos na mesma ordem. Rótulas internas formam uma [[gerberBeam|viga Gerber]].

O procedimento começa com o [[freeBody|diagrama de corpo livre]]: as reações substituem os apoios e o posto das equações de equilíbrio mostra a [[staticDeterminacy|determinação estática]]. Se a viga for hiperestática ou a vinculação crítica, o app diz isso com o grau de hiperestaticidade. As equações são resolvidas uma a uma – sempre a que tem uma só incógnita (um momento em relação a um apoio; numa viga Gerber primeiro a parte além da rótula) – e uma equação não usada serve de verificação.

O app dá os esforços N, T e M trecho a trecho entre os pontos notáveis e encontra o momento fletor máximo pelo [[schwedlerTheorem|teorema de Schwedler]]: onde o cortante é nulo ou onde salta. Sob o desenho da viga com cargas e reações estão os diagramas de N, T e M na mesma escala de comprimento.

O modo Corpo no plano calcula as reações de um corpo dado pelos pontos dos apoios e pelos pontos de aplicação das forças – uma escada encostada na parede, por exemplo. Num apoio móvel escolhe a direção da reação pelo ângulo β.

As propriedades da seção são a área, o [[centroid|centroide]], os momentos de inércia pelo [[parallelAxisTheorem|teorema de Steiner]], os [[sectionModulus|módulos de resistência]] e, em seções assimétricas, os [[principalAxes|eixos principais]] – para retângulo, tubo, perfis T, I, U, L e uma seção composta de retângulos e círculos com furos. O desenho mostra a seção em escala com seu centroide e eixos. Os arredondamentos dos perfis laminados são desprezados.

O formulário Camião-cisterna com líquido calcula uma cisterna parcialmente cheio ao travar, arrancar e numa curva. A superfície se inclina perpendicular à resultante do peso e da força de inércia (tan θ = a/g), o centro de gravidade do líquido se move e com ele o do conjunto. As cargas nos eixos são as reações de uma viga sobre dois apoios; na curva o app calcula a [[loadTransferRatio|transferência de carga]] às rodas externas e a velocidade crítica de tombamento, comparadas com uma carga rígida, e a frequência natural do [[sloshing|sloshing]]. Há uma demo interativa em mathtrace.app, em «Experimente».

O formulário Projeto de vigas compara três variantes de uma viga à flexão: o perfil normalizado mais leve das tabelas (IPE, HEB, tubos circulares e retangulares), a secção constante ótima de uma forma escolhida (retângulo, círculo, tubo com esbelteza de parede limitada) e uma [[uniformStrengthBeam|viga de igual resistência]]. Verifica a resistência, a flecha admissível L/n e o corte na extremidade livre; o procedimento mostra qual condição está [[activeConstraint|ativa]] e o gráfico a secção, o momento e a

flecha ao longo da viga. A inspiração foi uma dissertação de otimização: um braço projetado por otimização saiu bem mais leve do que pelas tabelas.

## Exemplos

### Uma viga simplesmente apoiada com uma força e uma carga distribuída em parte: reações, trechos e momento máximo.

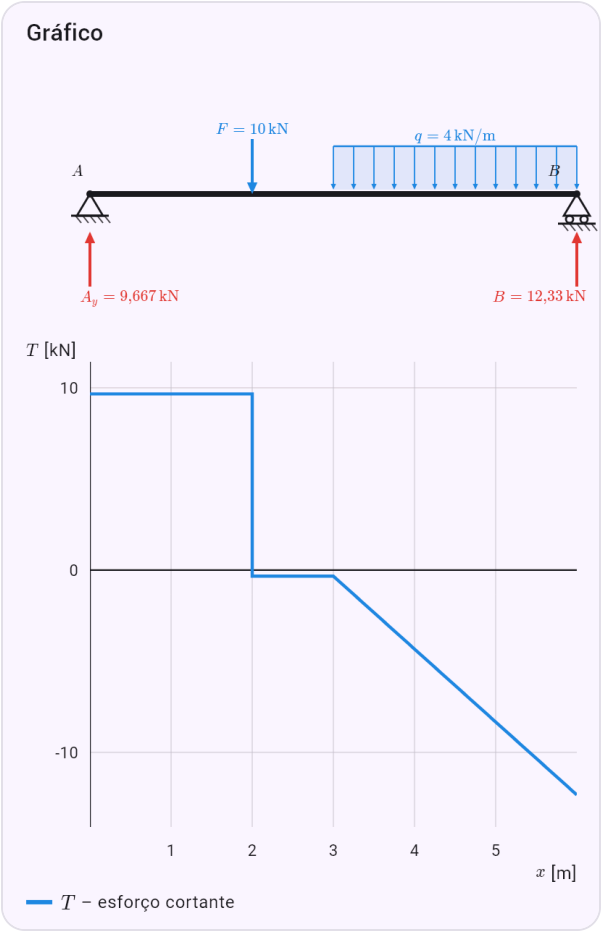
Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

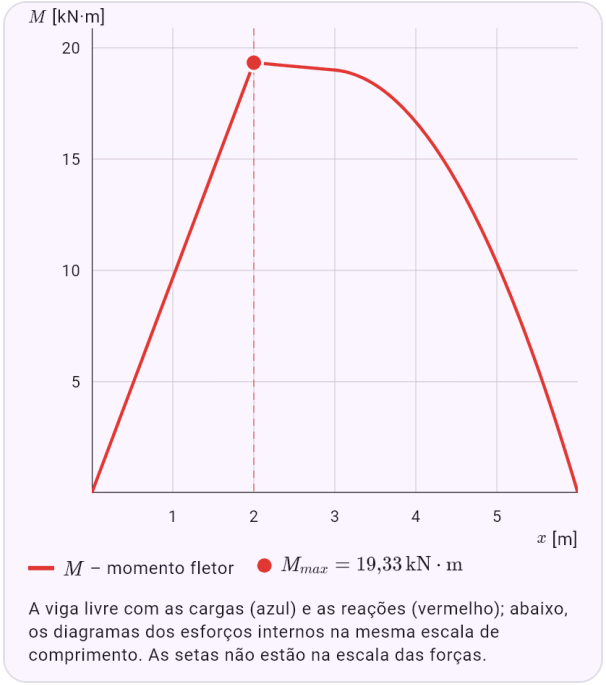
**Resultado**

$$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 2\,\mathrm{m}$$

**Passos**

- Procuramos $M_{max}$; dados
  $L = 6\,\mathrm{m},\quad F = 10\,\mathrm{kN},\quad x_F = 2\,\mathrm{m},\quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- A viga está no eixo x de 0 a L. Um apoio fixo (articulação) transmite uma força horizontal e uma vertical, um apoio móvel só a força perpendicular à sua base, um engaste também um momento. Uma força forma com a viga o ângulo α (90° = vertical para baixo), um momento é positivo no sentido anti-horário, uma carga distribuída positiva para baixo. Rótulas internas formam uma viga Gerber: na rótula o momento fletor é nulo, o que dá uma equação a mais. Os diagramas de N, T e M são construídos trecho a trecho pelo teorema de Schwedler. Equação do modelo:
  $\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M = 0$
- Resultante da carga distribuída (no centroide da área de carga):
  $Q = q\,l = 4\cdot 3 = 12\,\mathrm{kN},\quad x_Q = 3 + \dfrac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Reações desconhecidas: $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostática: tantas incógnitas quantas equações independentes (n incógnitas, e equações, h o posto):
  $n = 3,\quad e = 3,\quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_A = 0:\quad B\cdot 6 - 10\cdot 2 - 12\cdot 4{,}5 = 0 \quad\Rightarrow\quad B$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_B = 0:\quad -A_y\cdot 6 + 10\cdot 4 + 12\cdot 1{,}5 = 0 \quad\Rightarrow$
- Soma das forças horizontais:
  $\sum F_x = 0:\quad A_x = 0 \quad\Rightarrow\quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Verificação por uma equação não usada:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Teorema de Schwedler: a derivada do momento fletor é o esforço cortante e a derivada do esforço cortante é a carga distribuída com o sinal trocado. Onde T é nulo, M tem um extremo.
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [0,\ 2]:\quad T = 9{,}667,\quad M = 9{,}667x$
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [2,\ 3]:\quad T = -0{,}3333,\quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [3,\ 6]:\quad T = 11{,}67 - 4x,\quad M = 2 + 11{,}67x - 2x^2$
- O momento fletor máximo está onde o esforço cortante salta: $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Um momento fletor positivo curva a viga para baixo (fibras inferiores tracionadas), um negativo para cima, tipicamente sobre um apoio ou no engaste.




A viga livre com as cargas (azul) e as reações (vermelho); abaixo, os diagramas dos esforços internos na mesma escala de comprimento. As setas não estão na escala das forças.

**Uma viga em balanço com força inclinada na ponta e carga uniforme: reações horizontal e vertical e momento de engaste.**

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

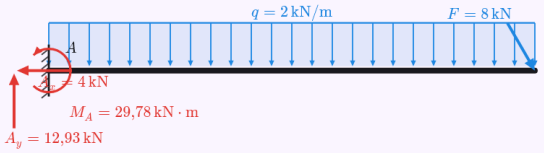
### Resultado

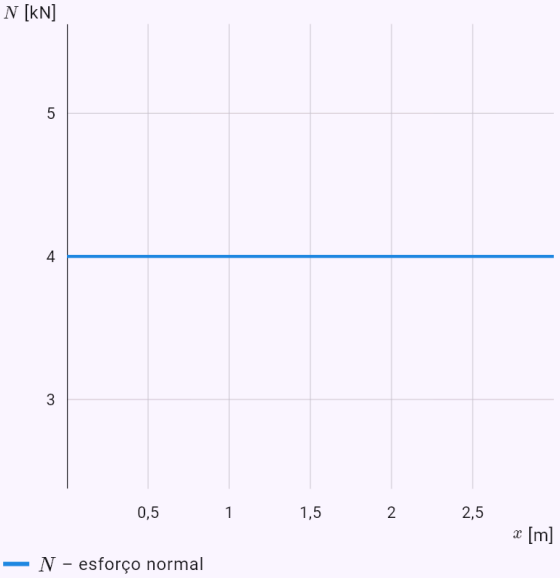
$$A_x = -4\,\text{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\text{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

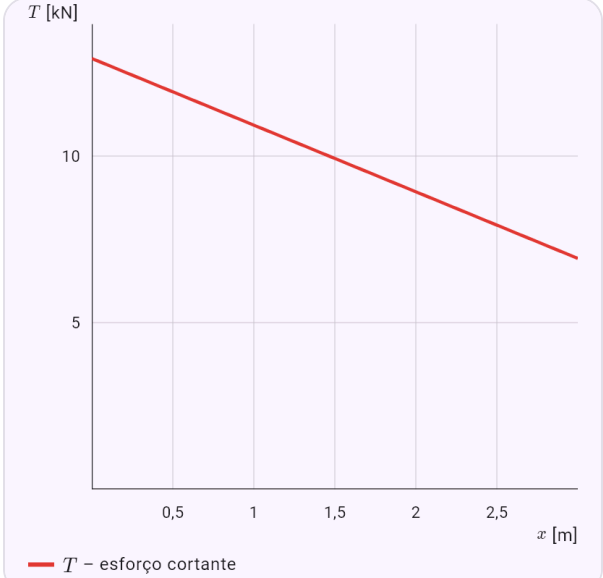
### Passos

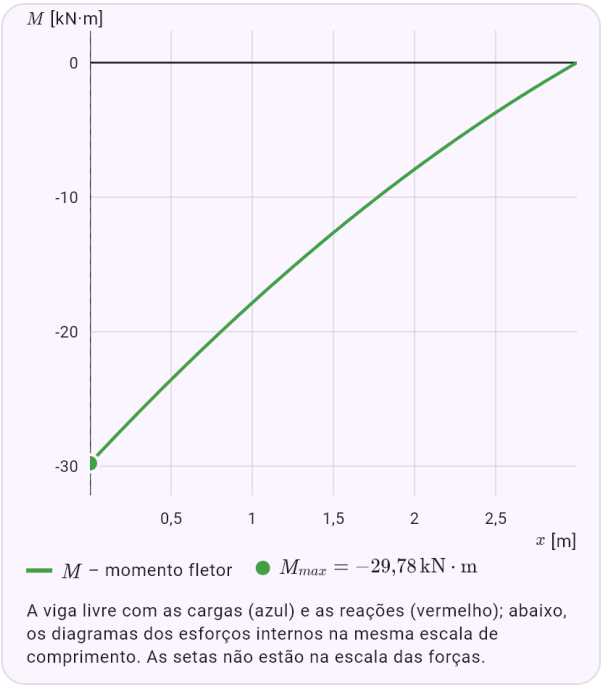
- Procuramos $R$; dados
  $L = 3\,\text{m}, \quad F = 8\,\text{kN}, \quad x_F = 3\,\text{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- A viga está no eixo x de 0 a L. Um apoio fixo (articulação) transmite uma força horizontal e uma vertical, um apoio móvel só a força perpendicular à sua base, um engaste também um momento. Uma força forma com a viga o ângulo α (90° = vertical para baixo), um momento é positivo no sentido anti-horário, uma carga distribuída positiva para baixo. Rótulas internas formam uma viga Gerber: na rótula o momento fletor é nulo, o que dá uma equação a mais. Os diagramas de N, T e M são construídos trecho a trecho pelo teorema de Schwedler. Equação do modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultante da carga distribuída (no centroide da área de carga): $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{m}$
- Componentes da força inclinada:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\text{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\text{kN}$
- Reações desconhecidas: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Isostática: tantas incógnitas quantas equações independentes (n incógnitas, e equações, h o posto):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Soma das forças horizontais:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\text{kN}$
- Soma das forças verticais
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

### Gráfico






A viga livre com as cargas (azul) e as reações (vermelho); abaixo, os diagramas dos esforços internos na mesma escala de comprimento. As setas não estão na escala das forças.

**Uma viga Gerber sobre três apoios com rótula: o cálculo começa pela parte além da rótula.**

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller;`

```
xB=6[m]; xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

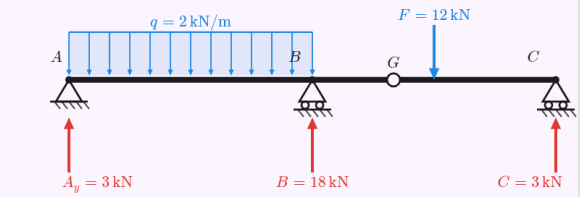
**Resultado**

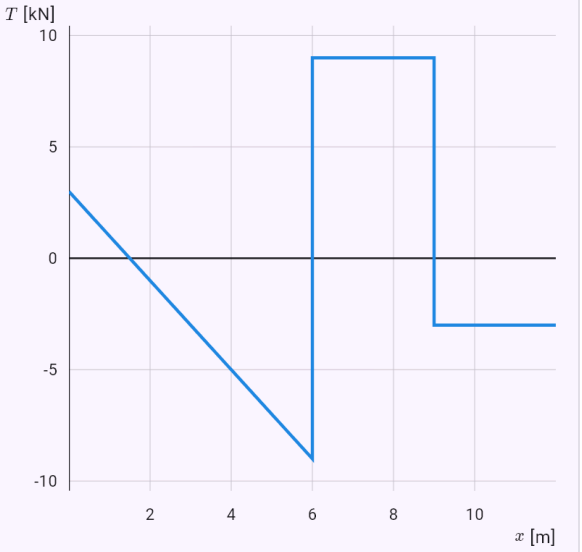
$$M_{max} \approx -18\,\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$x \approx 6\,\text{m}$$

**Passos**

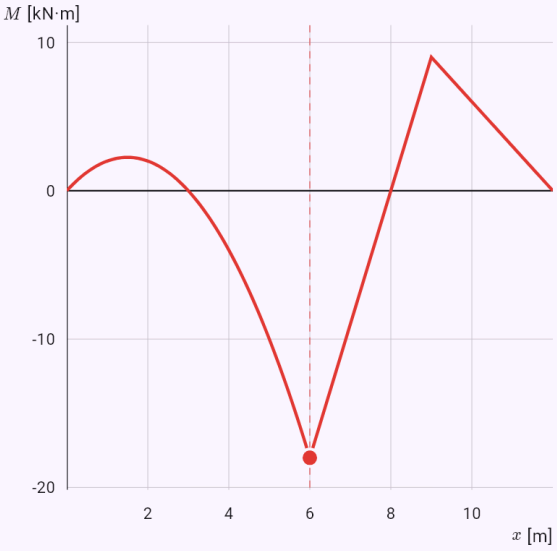
- Procuramos $M_{max}$; dados
  $L = 12\,\text{m}, \quad x_B = 6\,\text{m}, \quad x_s = 12\,\text{m}, \quad x_G = 8\,\text{m}, \quad F$
- A viga está no eixo x de 0 a L. Um apoio fixo (articulação) transmite uma força horizontal e uma vertical, um apoio móvel só a força perpendicular à sua base, um engaste também um momento. Uma força forma com a viga o ângulo α (90° = vertical para baixo), um momento é positivo no sentido anti-horário, uma carga distribuída positiva para baixo. Rótulas internas formam uma viga Gerber: na rótula o momento fletor é nulo, o que dá uma equação a mais. Os diagramas de N, T e M são construídos trecho a trecho pelo teorema de Schwedler. Equação do modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultante da carga distribuída (no centroide da área de carga): $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{6}{2} = 3\,\text{m}$
- Reações desconhecidas: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Isostática: tantas incógnitas quantas equações independentes (n incógnitas, e equações, h o posto):
  $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- O momento da parte à direita da rótula em relação a ela é nulo:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\text{kN}$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- O momento da parte à esquerda da rótula em relação a ela é nulo
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Soma das forças horizontais:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\text{kN}$
- Verificação por uma equação não usada:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Teorema de Schwedler: a derivada do momento fletor é o esforço cortante e a derivada do esforço cortante é a carga distribuída com o sinal trocado. Onde T é nulo, M tem um extremo.
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [0,\ 6]: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [6,\ 9]: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Esforços internos no trecho (x em m, forças em kN, momentos em kN·m):
  $x \in [9,\ 12]: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- O momento fletor máximo está onde o esforço cortante salta: $M_{max} = M(6) = -18\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Um momento fletor positivo curva a viga para baixo (fibras inferiores tracionadas), um negativo para cima, tipicamente sobre um apoio ou no engaste.

Gráfico




$T$ – esforço cortante




$M$ – momento fletor  $M_{max} = -18\,\mathrm{kN \cdot m}$

A viga livre com as cargas (azul) e as reações (vermelho); abaixo, os diagramas dos esforços internos na mesma escala de comprimento. As setas não estão na escala das forças.

**Uma escada encostada numa parede lisa com o peso da escada e de uma pessoa: reações no chão e na parede.**

Enunciado: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

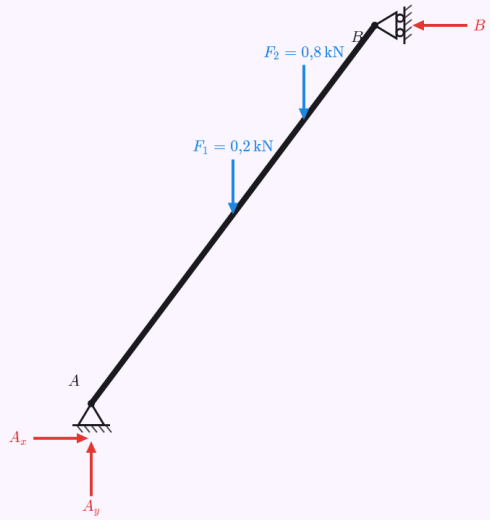
**Resultado**

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Um corpo no plano dado pelos pontos dos apoios e pelos pontos de aplicação das forças (x para a direita, y para cima). Num apoio móvel, o ângulo β dá a direção da reação: 90° de baixo, 0° de uma parede à esquerda para a direita, 180° de uma parede à direita para a esquerda. Exemplo: uma escada encostada numa parede lisa – o pé preso ao chão pelo atrito (articulação), o topo deslizando pela parede (apoio móvel). Equação do modelo: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Reações desconhecidas: $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostática: tantas incógnitas quantas equações independentes (n incógnitas, e equações, h o posto):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Soma das forças horizontais
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Soma dos momentos em relação a um apoio – uma equação com uma incógnita
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Verificação por uma equação não usada:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

**Gráfico**




O corpo livre: cargas em azul, reações de apoio em vermelho. As setas não estão na escala das forças. Os valores das reações estão no resultado.

## Um engaste com um apoio móvel é hiperestático de grau 1.

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

`xF=2[m])`

**Resultado**

$$s = n - h = 1$$

**Passos**

- Procuramos $R$; dados:
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- A viga está no eixo x de 0 a L. Um apoio fixo (articulação) transmite uma força horizontal e uma vertical, um apoio móvel só a força perpendicular à sua base, um engaste também um momento. Uma força forma com a viga o ângulo α (90° = vertical para baixo), um momento é positivo no sentido anti-horário, uma carga distribuída positiva para baixo. Rótulas internas formam uma viga Gerber: na rótula o momento fletor é nulo, o que dá uma equação a mais. Os diagramas de N, T e M são construídos trecho a trecho pelo teorema de Schwedler. Equação do modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Reações desconhecidas: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Hiperestática: mais incógnitas do que equações independentes:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Há mais reações desconhecidas do que as equações de equilíbrio fornecem. As equações que faltam vêm da deformação (p. ex. flecha nula sobre um apoio) – o app ainda não resolve vigas hiperestáticas. O grau s diz quantos apoios estão sobrando.

**Gráfico**




A viga livre com as cargas (azul) e as reações (vermelho); abaixo, os diagramas dos esforços internos na mesma escala de comprimento. As setas não estão na escala das forças.

## Seção T: centroide, momento de inércia e módulo de resistência.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

`tf=20[mm]; tw=20[mm])`

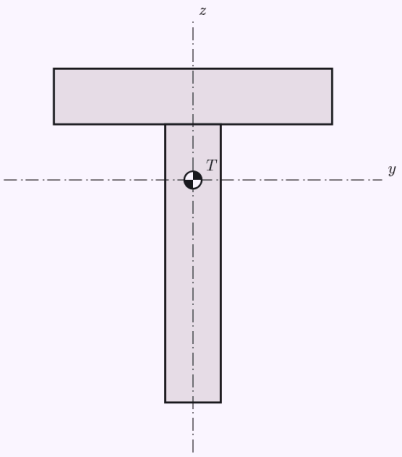
**Resultado**

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

**Passos**

- Procuramos $W_y$; dados
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Dividimos a seção em retângulos e círculos e subtraímos os furos. O centroide é a média ponderada dos centroides das partes, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam por ele vêm do teorema de Steiner. O eixo y é horizontal e z vertical, então I_y decide a flexão no plano vertical. Do momento e da distância das fibras extremas sai o módulo de resistência W e, numa seção assimétrica (L), também os eixos principais. Desprezamos os arredondamentos dos perfis laminados, por isso os valores diferem um pouco das tabelas. Equação do modelo
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Parte da seção
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Parte da seção
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Área da seção: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Centroide como média ponderada dos centroides das partes
  $y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$
- Momentos de inércia de toda a seção
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Módulos de resistência (e = distância das fibras extremas ao centroide)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$
- Raios de giração
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$

**Gráfico**




A seção em escala real com seu centroide T e os eixos y, z que passam por ele; numa seção assimétrica também os eixos principais 1, 2.

## Cantoneira de abas iguais L: produto de inércia e eixos principais a 45°.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm];`

t=10[mm])

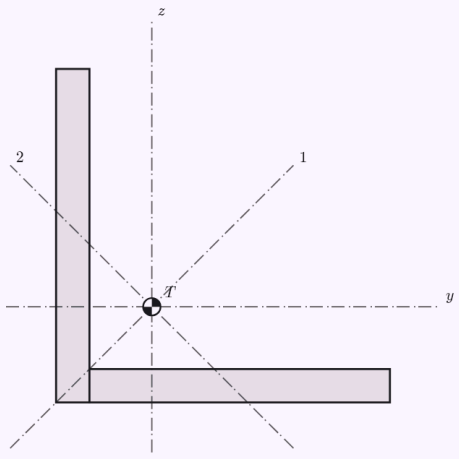
### Resultado

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\text{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\text{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

### Passos

- Procuramos $I_1$; dados:
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad t = 10\,\text{mm}$
- Dividimos a seção em retângulos e círculos e subtraímos os furos. O centroide é a média ponderada dos centroides das partes, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam por ele vêm do teorema de Steiner. O eixo y é horizontal e z vertical, então I_y decide a flexão no plano vertical. Do momento e da distância das fibras extremas sai o módulo de resistência W e, numa seção assimétrica (L), também os eixos principais. Desprezamos os arredondamentos dos perfis laminados, por isso os valores diferem um pouco das tabelas. Equação do modelo
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Parte da seção
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\text{mm}, \quad z_1 =$$
- Parte da seção
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\text{mm}, \quad z_2 =$$
- Área da seção: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\text{mm}^2$
- Centroide como média ponderada dos centroides das partes
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\text{mm}, \quad z_T =$$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\text{mm}^4,$$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\text{mm}^4,$$
- Momentos de inércia de toda a seção
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Produto de inércia
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\text{mm}^4$$
- Momentos de inércia principais
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 =$$
- Rotação do eixo principal 1 em relação ao eixo y:
  $$\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Módulos de resistência (e = distância das fibras extremas ao centroide)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Raios de giração
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}$$

### Gráfico




A seção em escala real com seu centroide T e os eixos y, z que passam por ele; numa seção assimétrica também os eixos principais 1, 2.

## Uma placa com furo circular fora do centro: seção composta e centroide deslocado.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm];`

`rh=100[mm]; ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])`

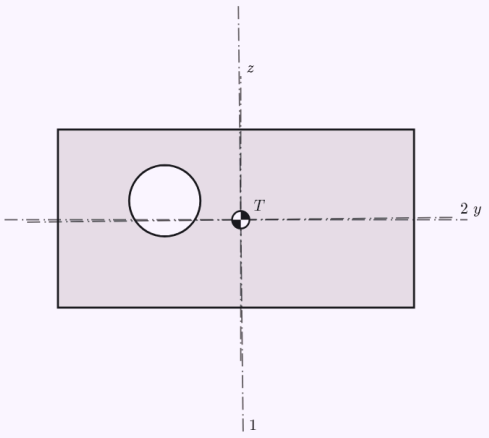
**Resultado**

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

**Passos**

- Procuramos $I_y$; dados
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- Dividimos a seção em retângulos e círculos e subtraímos os furos. O centroide é a média ponderada dos centroides das partes, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam por ele vêm do teorema de Steiner. O eixo y é horizontal e z vertical, então I_y decide a flexão no plano vertical. Do momento e da distância das fibras extremas sai o módulo de resistência W e, numa seção assimétrica (L), também os eixos principais. Desprezamos os arredondamentos dos perfis laminados, por isso os valores diferem um pouco das tabelas. Equação do modelo
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Parte da seção
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$
- Furo (subtraído)
  $2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$
- Área da seção: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Centroide como média ponderada dos centroides das partes
  $y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T =$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Teorema de Steiner: momento próprio da parte + área × quadrado da distância entre eixos
  $I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$
- Momentos de inércia de toda a seção
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Produto de inércia
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$
- Momentos de inércia principais
  $I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$
- Rotação do eixo principal 1 em relação ao eixo y
  $\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$
- Módulos de resistência (e = distância das fibras extremas ao centroide)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$
- Raios de giração
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$

**Gráfico**




A seção em escala real com seu centroide T e os eixos y, z que passam por ele; numa seção assimétrica também os eixos principais 1, 2.

## Um camião-cisterna meio cheio de água trava a 5 m/s²: o eixo dianteiro leva dezenas de por cento a mais.

Enunciado: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

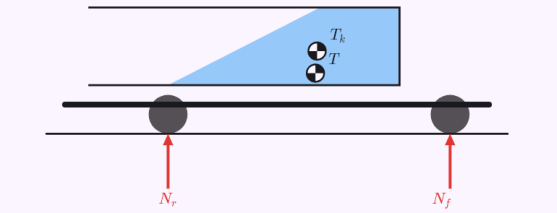
**Resultado**

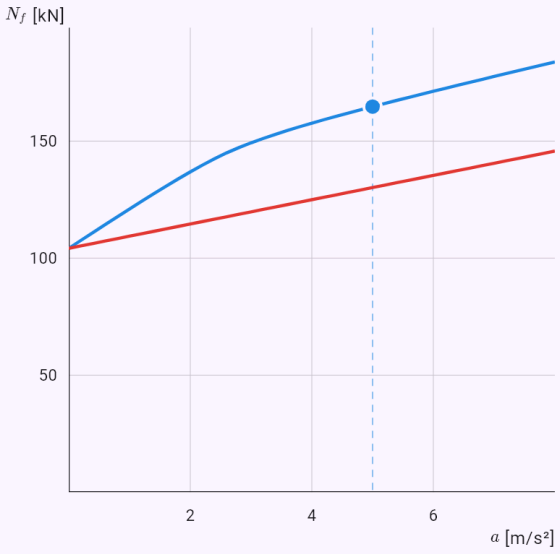
$$N_f \approx 164{,}7\,\text{kN}$$

**Passos**

- Procuramos $N_f$; dados
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\text{m/s}^2, \quad \rho = 1000\,\text{kg/m}^3, \quad L_n = 8$
- Travagem com a desaceleração a: o líquido vai para a frente, a superfície se inclina pelo ângulo θ e o centro de gravidade avança e sobe. As cargas nos eixos são as reações de uma viga sobre dois apoios com a força de inércia m·a no centro de gravidade. Equação do modelo:
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$
- Volume do tanque e do líquido
  $V = 25{,}13\,\text{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\text{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Inclinação da superfície – perpendicular à resultante do peso e da força de inércia
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- O centro de gravidade do líquido avança e sobe
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\text{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\text{m}, \quad \Delta x_k =$
- Centro de gravidade de todo o veículo
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\text{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\text{m}$
- Cargas nos eixos pelos momentos em relação ao eixo traseiro (força de inércia no centro de gravidade)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Eixo dianteiro em repouso e em movimento; com carga rígida
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\text{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\text{rigid}} = 130{,}2$
- Frequência natural da primeira onda (sloshing)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\text{s}^{-1}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- O modelo quase-estático vale para uma travagem constante. Após uma travagem brusca o líquido oscila com o período T e seus golpes contra a parede podem aumentar a carga por um instante ainda mais; por isso os tanques têm anteparas.

**Gráfico**




Vista lateral com a superfície inclinada, o centro de gravidade do líquido T_k, o do conjunto T e as cargas nos eixos; o gráfico mostra a carga no eixo dianteiro conforme a desaceleração para o líquido e uma carga rígida.

## O mesmo camião-cisterna numa curva de R = 60 m: a velocidade crítica com o líquido e com uma carga rígida.

Enunciado: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];`

```
W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])
```

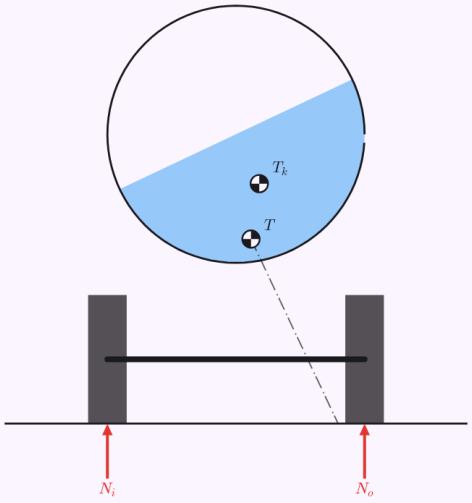
### Resultado

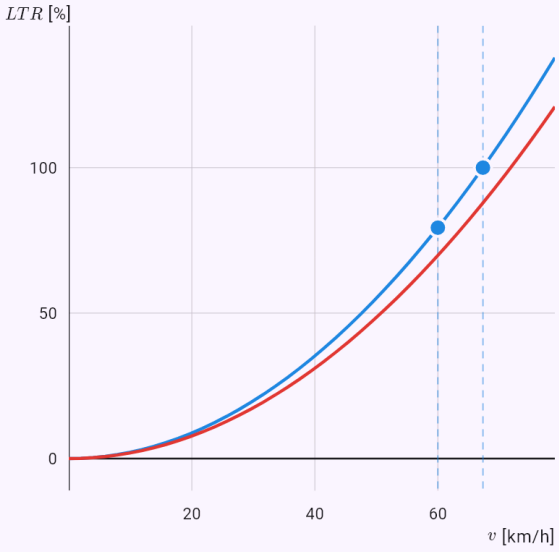
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

### Passos

- Procuramos $v_{krit}$; dados
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Uma curva de raio R à velocidade v: a aceleração centrípeta a = v²/R, o líquido se desloca para fora e com ele o centro de gravidade. O veículo tomba quando a resultante do peso e da força centrífuga passa pelas rodas externas (LTR = 100 %). A rolagem da carroceria sobre as molas (k_r graus por g) leva o centro de gravidade ainda mais para fora. Equação do modelo:
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Volume do tanque e do líquido
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Aceleração centrípeta na curva
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Inclinação da superfície – perpendicular à resultante do peso e da força de inércia:
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Centro do líquido na seção (y para fora da curva):
  $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- A rolagem da carroceria leva o centro de gravidade ainda mais para fora
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Transferência de carga às rodas externas
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Limite de tombamento: a resultante passa pelas rodas externas
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Carga rígida para comparação:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Frequência natural da primeira onda (sloshing)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Tanques reais tombam já por volta de 0,35–0,45 g: além da rolagem nas molas, os pneus deformam e o líquido oscila na curva. O limite quase-estático é uma estimativa superior.

### Gráfico




Vista traseira na curva (para fora à direita) com a superfície inclinada, o centro de gravidade e a resultante; o gráfico mostra a transferência de carga às rodas externas conforme a velocidade – a 100 % as rodas internas levantam.

## Uma consola de 2 m com 10 kN: IPE 200 das tabelas, o tubo ótimo e um tubo de igual resistência.

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

### Resultado

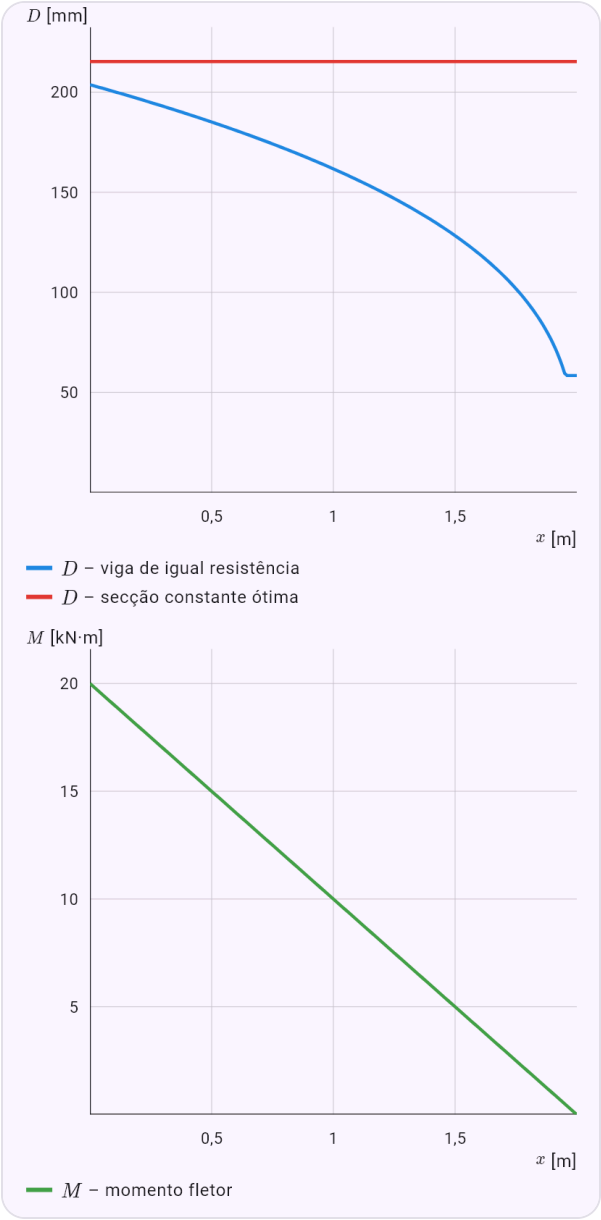
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

### Passos

- Procuramos $m$; dados
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Uma consola de comprimento L com uma força F na extremidade livre ou uma carga distribuída q em todo o comprimento. O momento máximo está no encastramento. Equação do modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento fletor máximo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condição de resistência – o módulo de resistência mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condição de flecha (integrando E·I·y'' = −M) – o momento de inércia mínimo
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$$
- O perfil adequado mais leve de cada série
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3, \ I = 1943\,\text{cm}^4, \ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Pelas tabelas – o mais leve de todos
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Uma parede mais fina dá menor área para o mesmo W, por isso o ótimo está no limite de esbelteza:
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 50$$
- 2. Secção constante ótima – o menor tamanho que cumpre as duas condições
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$$
- Está ativa a condição de flecha (a tensão fica abaixo da admissível): $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Área e massa da secção ótima:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistência – σ(x) = σ_adm em todo o lado, na extremidade livre a secção mínima devido ao corte
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$$
- Massa e flecha da viga de igual resistência
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$$
- A viga de igual resistência só vigia a tensão, por isso é mais flexível e excede a flecha admissível. Na prática aumenta-se a sua secção ou usa-se onde decide a resistência.
- Massa das variantes em relação ao perfil das tabelas:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$$
- O peso próprio da viga é desprezado; em vigas longas e pesadas soma-se à carga distribuída.

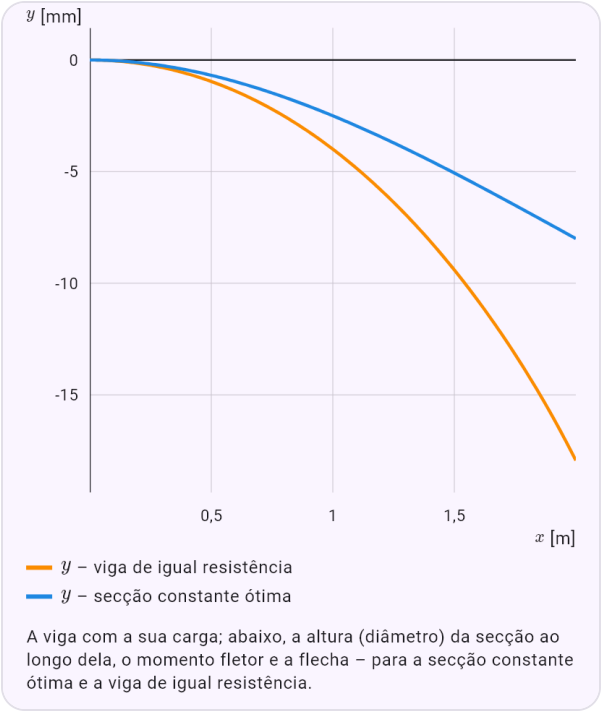
### Gráfico












A viga com a sua carga; abaixo, a altura (diâmetro) da secção ao longo dela, o momento fletor e a flecha – para a secção constante ótima e a viga de igual resistência.

**Um retângulo de igual resistência de largura constante: a altura é uma parábola, um terço menos de material.**

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

### Resultado

$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$

$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$

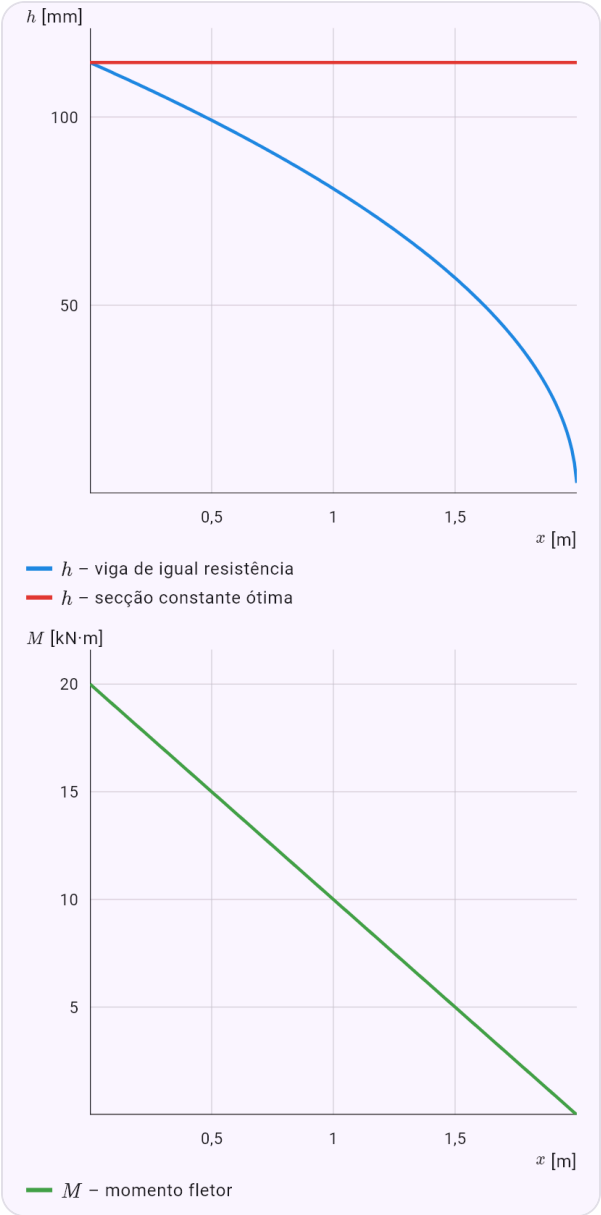
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

### Passos

- Procuramos $m$; dados
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Uma consola de comprimento L com uma força F na extremidade livre ou uma carga distribuída q em todo o comprimento. O momento máximo está no encastramento. Equação do modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento fletor máximo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condição de resistência – o módulo de resistência mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condição de flecha (integrando E·I·y'' = −M) – o momento de inércia mínimo
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- O perfil adequado mais leve de cada série
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Pelas tabelas – o mais leve de todos
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Secção constante ótima – o menor tamanho que cumpre as duas condições
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- Está ativa a condição de resistência (a flecha fica abaixo da admissível): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Área e massa da secção ótima:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistência – σ(x) = σ_adm em todo o lado, na extremidade livre a secção mínima devido ao corte
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Massa e flecha da viga de igual resistência
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Massa das variantes em relação ao perfil das tabelas:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- O peso próprio da viga é desprezado; em vigas longas e pesadas soma-se à carga distribuída.

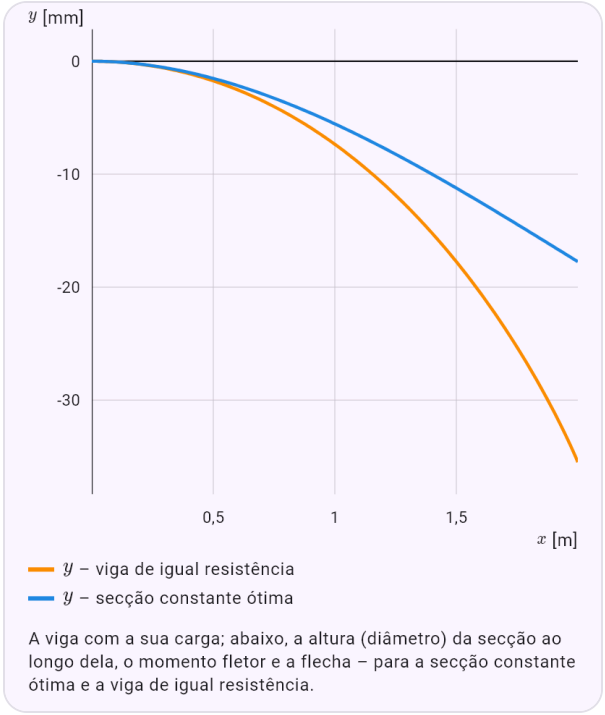
### Gráfico












A viga com a sua carga; abaixo, a altura (diâmetro) da secção ao longo dela, o momento fletor e a flecha – para a secção constante ótima e a viga de igual resistência.

**Uma viga simplesmente apoiada de 6 m com carga distribuída: decide a flecha.**

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

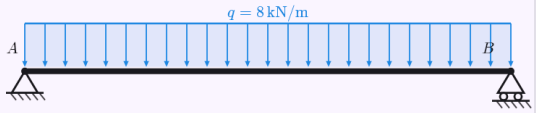
### Resultado

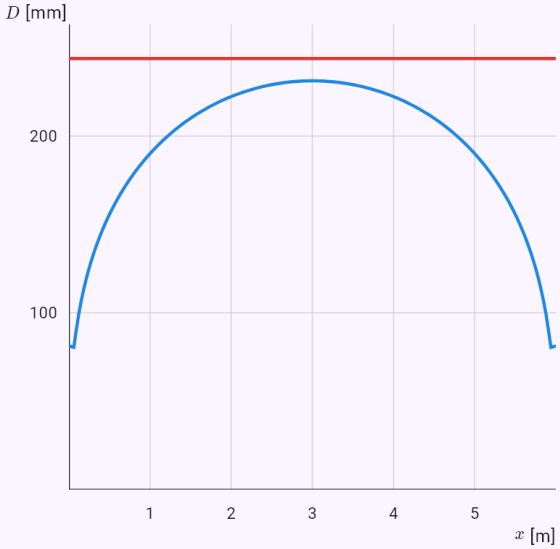
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

### Passos

- Procuramos $m$; dados
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Uma viga simplesmente apoiada de comprimento L com uma força F a meio ou uma carga distribuída q em todo o comprimento. O momento máximo está a meio. Equação do modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento fletor máximo: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condição de resistência – o módulo de resistência mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Condição de flecha (integrando E·I·y'' = −M) – o momento de inércia mínimo
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- O perfil adequado mais leve de cada série
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Pelas tabelas – o mais leve de todos
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Uma parede mais fina dá menor área para o mesmo W, por isso o ótimo está no limite de esbelteza:
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 40$$
- 2. Secção constante ótima – o menor tamanho que cumpre as duas condições
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- Está ativa a condição de flecha (a tensão fica abaixo da admissível): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Área e massa da secção ótima:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistência – σ(x) = σ_adm em todo o lado, na extremidade livre a secção mínima devido ao corte
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Massa e flecha da viga de igual resistência
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- A viga de igual resistência só vigia a tensão, por isso é mais flexível e excede a flecha admissível. Na prática aumenta-se a sua secção ou usa-se onde decide a resistência.
- Massa das variantes em relação ao perfil das tabelas:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$$
- O peso próprio da viga é desprezado; em vigas longas e pesadas soma-se à carga distribuída.

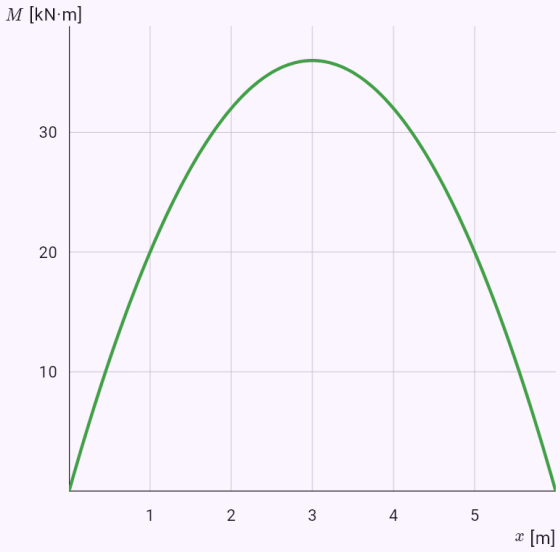
### Gráfico



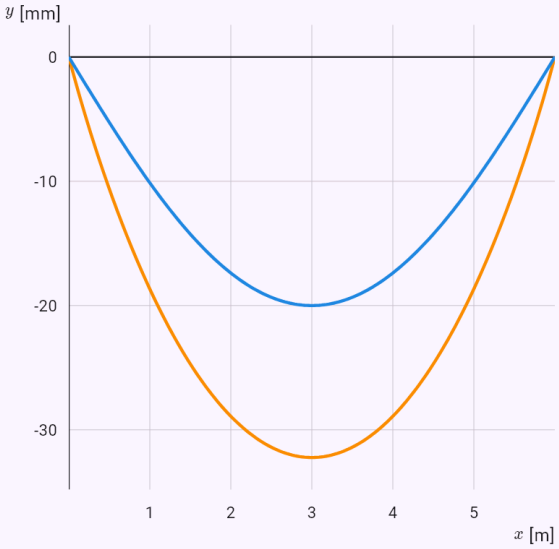



$D$ – viga de igual resistência

$D$ – secção constante ótima




$M$ – momento fletor




$y$ – viga de igual resistência

$y$ – secção constante ótima

A viga com a sua carga; abaixo, a altura (diâmetro) da secção ao longo dela, o momento fletor e a flecha – para a secção constante ótima e a viga de igual resistência.

# 45. Astronomia e astrofísica

A área Astronomia e astrofísica está na secção «Aplicações». Além das leis de Kepler, da influência mútua dos corpos e do problema dos três corpos (descritos no capítulo Física), tem os formulários Buracos negros, Estrelas de neutrões, Ondas gravitacionais, Magnitudes e distâncias, Radiação das estrelas, Desvio para o vermelho e lei de Hubble, e Exoplanetas. As fórmulas são dadas e os passos mostram a substituição. A app não resolve as equações da relatividade geral; usa apenas os seus resultados para um buraco negro sem rotação.

O formulário Buracos negros calcula o [[schwarzschildRadius|raio de Schwarzschild]], a esfera de fotões e a órbita estável mais interior, a «densidade» de um buraco negro com um gráfico em função da massa em escala logarítmica, a velocidade de escape, a dilatação gravitacional do tempo e o desvio para o vermelho (também para dois relógios, como o GPS), a força de maré, a temperatura de Hawking com o tempo de evaporação e a massa de Sgr A* a partir da órbita da estrela S2. O menu de objetos preenche o Sol, a Terra, uma estrela de neutrões, um buraco negro estelar, Sgr A* ou M87*.

As estrelas de neutrões têm a densidade, a gravidade à superfície, a aceleração da rotação no colapso pela conservação do momento angular e o período de rotação mais curto possível. As ondas gravitacionais dão a frequência a partir da separação de um par em órbita (e vice-versa) e a energia irradiada numa fusão como GW150914.

As bases de um curso introdutório de astronomia: a equação de Pogson, o módulo de distância com a [[absoluteMagnitude|magnitude absoluta]] e a paralaxe; as leis de Wien e de Stefan-Boltzmann de um [[blackBody|corpo negro]], a constante solar e a temperatura de equilíbrio de um planeta; o [[redshift|desvio para o vermelho]] Doppler e a lei de Hubble com o tempo de Hubble; nos exoplanetas a profundidade do trânsito, o método das velocidades radiais e a [[habitableZone|zona habitável]].

Às leis de Kepler juntou-se a transferência de Hohmann entre duas órbitas circulares (Δv e duração do voo), e à influência mútua dos corpos o [[rocheLimit|limite de Roche]] e a esfera de Hill.

# Exemplos

### Em que bola tão pequena seria preciso comprimir a Terra para a tornar um buraco negro.

Enunciado: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

**Resultado**

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

**Passos**

- Procuramos $r_s$; dados: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Convertemos as unidades:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- O raio de Schwarzschild r_s = 2GM/c² é o raio do horizonte de acontecimentos. A Terra teria de ser comprimida numa bola de cerca de 18 mm de diâmetro, o Sol numa de 3 km de raio. A luz pode orbitar na esfera de fotões a 1,5 r_s, e a órbita estável mais interior da matéria (ISCO) fica a 3 r_s. Equação do modelo
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Substituímos
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Para um buraco negro sem rotação. Em torno de um em rotação (Kerr), a ISCO e a esfera de fotões ficam mais perto.
- Convertemos as unidades: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

## A «densidade» do buraco negro M87* – menor do que a do ar.

Enunciado: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

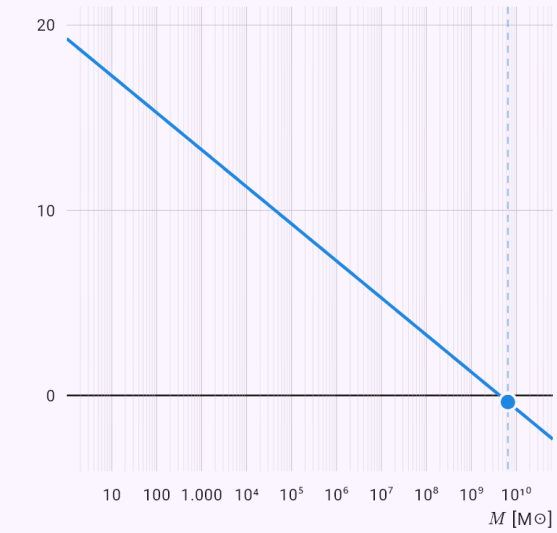
**Resultado**

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

**Passos**

- Procuramos $\rho$; dados: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Convertemos as unidades:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- A «densidade» média dentro do horizonte: a massa a dividir pelo volume de uma esfera de raio r_s. Diminui com 1/M². Um buraco negro estelar é mais denso do que um núcleo atómico, um de $10^8$ massas solares tem a densidade da água e M87* é menos denso do que o ar. O gráfico mostra a massa em escala logarítmica. Equação do modelo: $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Substituímos
  $$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$$
- Para comparar: um núcleo atómico, a água e o ar (cerca de 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Menos denso do que o ar – a «densidade» é apenas uma média sobre o volume do horizonte.

**Gráfico**




O eixo horizontal é logarítmico: cada marca vale dez vezes a anterior. O ponto é o valor dado ou a resposta.

## Quanto se adiantam por dia os relógios dos satélites GPS devido à gravidade.

Enunciado: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km];`

`t=1[d]; mode=gravdilation; astro=earth)`

**Resultado**

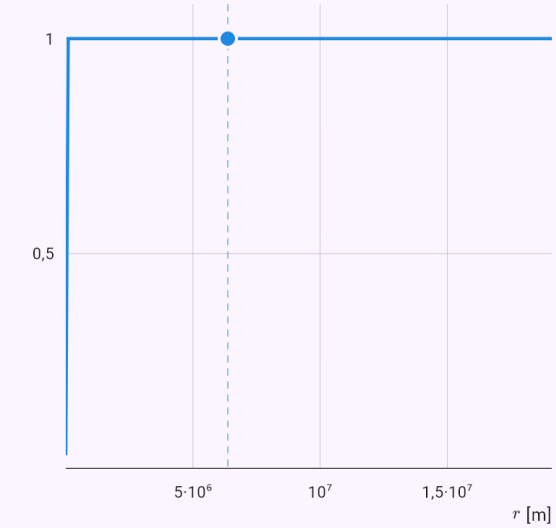
$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta t$; dados
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Convertemos as unidades
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Os relógios perto de um corpo massivo andam mais devagar: dτ/dt = √(1 − r_s/r). A luz de lá chega desviada para o vermelho. Com uma segunda distância $r_2$ comparam-se dois relógios. Os satélites GPS ($r_2$ = 26 571 km) adiantam-se cerca de 45,7 µs por dia em relação ao solo. Equação do modelo
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Substituímos
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Atraso por unidade de tempo: $1 - \frac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Substituímos
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Comparação de dois relógios a distâncias diferentes; uma diferença positiva significa que o relógio mais próximo anda mais devagar.
- Convertemos as unidades:

$$\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$$

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A força de maré sobre uma pessoa no horizonte de um buraco negro estelar.

Enunciado: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

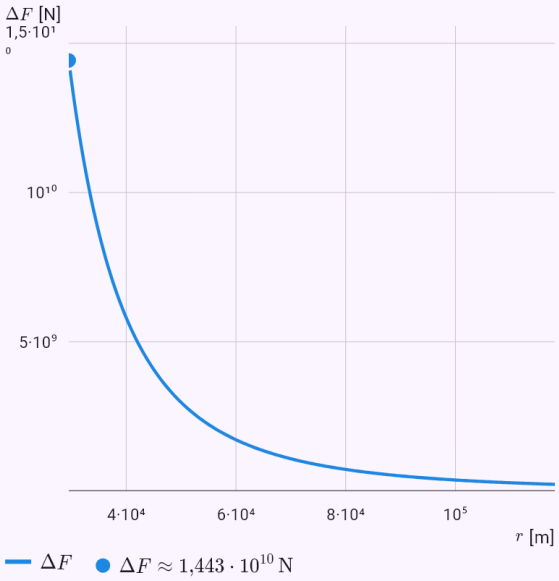
**Resultado**

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta F_s$; dados: $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Convertemos as unidades: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- A força de maré é a diferença da gravidade entre a cabeça e os pés. Um buraco negro estelar despedaça uma pessoa muito antes do horizonte («esparguetificação»); no horizonte de um grande (Sgr A*) é minúscula. Equação do modelo: $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- Substituímos $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- Isolamos a grandeza procurada: $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Substituímos $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- Em múltiplos do peso do corpo: $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- A força de maré é muito maior do que um corpo aguenta – «esparguetificação».

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A massa de Sgr A* a partir da órbita da estrela S2.

Enunciado: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

**Resultado**

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

**Passos**

- Procuramos $M$; dados: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{anos}$
- Convertemos as unidades $a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{anos} = 5{,}0$
- A estrela S2 orbita o centro da Galáxia numa elipse de semieixo maior de cerca de 1 019 ua em 16,05 anos. A terceira lei de Kepler dá a massa de Sgr A*: cerca de 4 milhões de sóis numa região menor do que o sistema solar. Esta medição valeu o Prémio Nobel da Física de 2020. Equação do modelo: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Substituímos $M = \dfrac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$
- Em massas solares: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizonte de Sgr A* $r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \dfrac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Prémio Nobel da Física de 2020 (Genzel, Ghez) pela descoberta de um objeto compacto supermassivo no centro da Galáxia.
- Convertemos as unidades: $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

## O período de rotação do núcleo após o colapso numa estrela de neutrões.

Enunciado: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

**Resultado**

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\text{ms}$$

**Passos**

- Procuramos $T_2$; dados:
  $T_1 = 25{,}4\,\text{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km}, \quad R_2 = 12\,\text{km}$
- Convertemos as unidades
  $T_1 = 25{,}4\,\text{d} = 2\,195\,000\,\text{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km} = 6{,}96 \cdot$
- Conservação do momento angular: quando o núcleo encolhe, roda mais depressa e o período diminui com o quadrado do raio (como uma patinadora que recolhe os braços). Assim nascem os pulsares, com períodos de milissegundos a segundos. Equação do modelo
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- A estrela é tomada como uma esfera homogénea que não perde massa.
- Substituímos

$$T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$$

- Quantas vezes mais depressa roda:
  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Os pulsares reais rodam mais devagar (milissegundos a segundos): o núcleo roda mais devagar antes do colapso e o invólucro expelido leva momento angular.
- Convertemos as unidades:
  $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}6524\,\text{ms}$

## A energia irradiada em ondas gravitacionais na fusão GW150914.

Enunciado: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

**Resultado**

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\text{J}$$

**Passos**

- Procuramos $E$; dados:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Convertemos as unidades
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\text{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- A fusão forma um buraco negro mais leve do que os dois juntos. A diferença de massa é levada pelas ondas gravitacionais como energia E = Δm·c². Equação do modelo: $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Substituímos
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Fração da massa irradiada:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$

- Substituímos
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\text{J}$
- Comparada com toda a vida do Sol:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\text{anos}} \approx 4438$
- O LIGO captou as ondas de GW150914 vindas de 1,3 mil milhões de anos-luz; deslocaram os espelhos uma milésima do diâmetro de um protão.

## A distância de Sírio pelo módulo de distância.

Enunciado: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod; star=sirius)`

**Resultado**

$$d \approx 2{,}655\ \text{pc}$$

**Passos**

- Procuramos $d$; dados: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- A magnitude absoluta M é a que a estrela teria a 10 pc. O módulo de distância m − M dá a distância quando se conhece a luminosidade real da estrela (cefeidas, supernovas Ia). Equação do modelo: $m - M = 5 \log \dfrac{d}{10\ \text{pc}}$
- Isolamos a grandeza procurada: $d = 10\ \text{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Substituímos: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \text{pc}$
- Em anos-luz: $d \approx 8{,}658\ \text{a.l.}$
- Despreza-se a absorção da luz pela poeira interestelar; com ela, a estrela parece mais distante.

## O comprimento de onda do máximo de radiação do Sol.

Enunciado: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

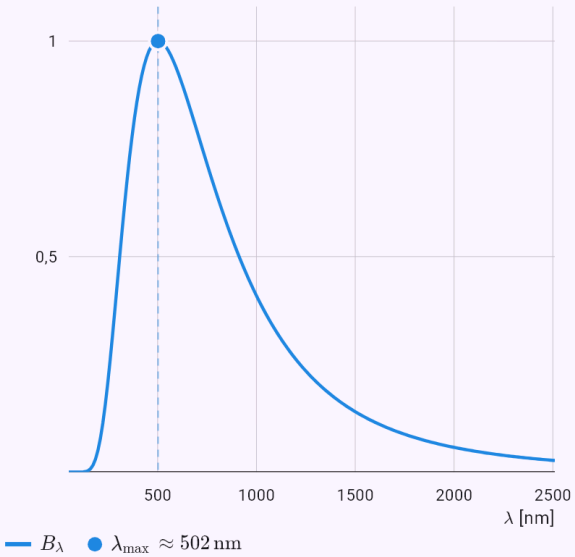
**Resultado**

$$\lambda_{\max} \approx 502\ \text{nm}$$

**Passos**

- Procuramos $\lambda_{\max}$; dados: $T = 5772\ \text{K}$
- A lei do deslocamento de Wien: o comprimento de onda a que um corpo mais irradia é inversamente proporcional à temperatura. O Sol tem o máximo no verde (cerca de 500 nm), a fria Betelgeuse no infravermelho, a quente Vega no azul. Equação do modelo: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$
- Constante de Wien em nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\ \text{nm} \cdot \text{K}$
- Substituímos: $\lambda_{\max} = \dfrac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\ \text{nm}$
- O máximo está na luz visível.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## A temperatura de equilíbrio da Terra sem efeito de estufa.

Enunciado: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one];`

`mode=equilibrium; planet=earth)`

**Resultado**

$$T_{\mathrm{eq}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

**Passos**

- Procuramos $T_{\mathrm{eq}}$; dados: $L = 1\,L_{\odot}, \quad a = 1\,\mathrm{au}, \quad A = 0{,}306$
- Convertemos as unidades $L = 1\,L_{\odot} = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}, \quad a = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- A constante solar S é a potência que incide em 1 m² à distância a da estrela. Um planeta absorve S(1 − A) na sua secção πR² e irradia σT⁴ de toda a superfície 4πR². O equilíbrio dá a temperatura sem efeito de estufa. Equação do modelo: $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eq}}^4$
- Substituímos $S = \dfrac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\mathrm{W/m^2}$
- Isolamos a grandeza procurada: $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Substituímos $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\mathrm{K}$
- Sem efeito de estufa. A temperatura média real da Terra é mais alta: $T_{\oplus} \approx 288\,\mathrm{K}$

## O tempo de Hubble como estimativa da idade do universo.

Enunciado: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

**Resultado**

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$$

**Passos**

- Procuramos $t_H$; dados: $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s \cdot Mpc)}$
- A lei de Hubble v = H₀·d. O inverso da constante de Hubble (tempo de Hubble) estima a idade do universo em cerca de 14 mil milhões de anos; a idade exata de 13,8 mil milhões de anos vem de um modelo da expansão. Equação do modelo: $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Constante de Hubble em s⁻¹ $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086 \cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Substituímos: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269 \cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- Em mil milhões de anos: $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$
- O tempo de Hubble é só uma estimativa da idade; a expansão abrandou e agora acelera.
- Convertemos as unidades: $t_H \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{Ga}$

## A profundidade do trânsito da Terra diante do Sol.

Enunciado: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

**Resultado**

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

**Passos**

- Procuramos $\frac{\Delta F}{F}$; dados: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Convertemos as unidades:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Quando um planeta passa à frente da estrela, tapa parte do disco e o brilho desce na razão das áreas (R_p/R_*)². Júpiter atenuaria o Sol em 1 %, a Terra apenas em 84 milionésimas (ppm). Equação do modelo:
  $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Substituímos: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- Em milionésimas (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- Só se vê um trânsito quando olhamos para a órbita do planeta quase de perfil.
- Convertemos as unidades:
  $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

### A duração de uma transferência de Hohmann da Terra para Marte.

Enunciado: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

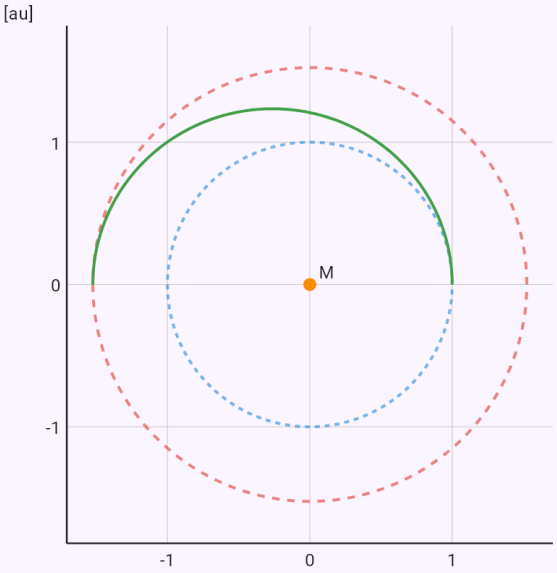
**Resultado**

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

**Passos**

- Procuramos $t$; dados
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Convertemos as unidades
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- A órbita de transferência de Hohmann é meia elipse que toca a órbita circular de partida e a de destino. Com duas queimas (Δv) passa-se de uma para a outra com o mínimo de combustível. Uma viagem da Terra a Marte assim dura cerca de 259 dias. Equação do modelo
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Substituímos
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Substituímos
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- Em dias: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Para fora: acelerar no sentido do voo e voltar a acelerar na órbita de destino.
- Convertemos as unidades: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

**Gráfico**




Os corpos e os pontos notáveis à escala real.

## O limite de Roche de Saturno para uma lua gelada – porque é que lá há anéis.

Enunciado: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

**Resultado**

$$d_R \approx 129\,000\,\text{km}$$

**Passos**

- Procuramos $d_R$; dados
  $R = 58\,230\,\text{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3, \quad \rho_m = 0{,}917\,\text{g/}$
- Convertemos as unidades
  $R = 58\,230\,\text{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\text{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3 =$
- O limite de Roche: mais perto do planeta, as forças de maré despedaçam uma lua mantida apenas pela própria gravidade. Por isso os anéis de Saturno ficam dentro do seu limite de Roche. Uma lua rígida resiste mais perto do que uma fluida. Equação do modelo: $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Substituímos
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\frac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m}$
- Em raios do planeta: $\frac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Dentro do limite de Roche não se forma uma lua grande; em vez disso há anéis (Saturno).
- Convertemos as unidades:
  $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m} = 129\,000\,\text{km}$

# 46. Aplicações da análise complexa

Os formulários das Aplicações (áreas Física, Eletrotecnia, Engenharia, Geometria e Análise) usam as funções de variável complexa do capítulo anterior. Cada um tem passos com um potencial complexo, uma transformação ou polos e um gráfico no plano de Gauss.

Escoamento ideal e perfil de asa: o [[complexPotential|potencial complexo]] w(z), as [[streamline|linhas de corrente]] como curvas de nível de Im w e a pressão pela equação de Bernoulli. Escoamento em torno de um cilindro, também com circulação (pontos de estagnação, efeito Magnus, sustentação $L' = \rho U \Gamma$), corpo de Rankine, escoamento para um canto e vórtice. O perfil de Joukowski nasce da transformação conforme $z = \zeta + b^2/\zeta$, a [[kuttaCondition|condição de Kutta]] fixa a circulação e o teorema de Kutta–Joukowski a sustentação; o gráfico mostra as linhas de corrente em torno do perfil e C_L conforme o ângulo de ataque.

Campos por transformação conforme: cabo coaxial ($w = \ln z$ torna-o num condensador plano - capacidade, indutância e impedância característica), linha bifilar com uma transformação de Möbius, potencial numa cunha entre placas e temperatura estacionária num semiplano; linhas de campo e equipotenciais no gráfico. A tensão em torno de um furo circular segundo Kirsch, com os potenciais de Kolosov e Muskhelishvili, dá uma [[stressConcentration|concentração de tensões]] de 3 à tração, 2 com tração igual em duas direções e 4 ao corte. O mapa de Mercator é o logaritmo complexo da projeção estereográfica: escala $1/\cos\varphi$, círculos de Tissot e a [[loxodrome|loxodrómia]] como reta face à ortodrómia.

Controlo e sinais: estabilidade de uma malha $K \cdot e^{(-s\tau)}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ pelo [[nyquistCriterion|critério de Nyquist]] (princípio do argumento, margens de ganho e de fase, diagrama de Bode) e pelo [[rootLocus|lugar das raízes]] (assíntotas, ponto de separação, ganho crítico). Projeto de um filtro de [[butterworthFilter|Butterworth]] e de Chebyshev a partir de polos numa circunferência e numa elipse, filtro digital de segunda ordem com polos e zeros no plano z, resposta ao impulso por resíduos e resposta em frequência na circunferência unitária. Curva de ressonância de um oscilador mecânico ou de um circuito RLC pelas distâncias de $i\omega$ aos polos, [[qualityFactor|fator de qualidade]] e largura de banda. Os circuitos de corrente alternada com fasores estão no capítulo Eletrotecnia.

Resposta e linhas: o oscilador de Lorentz dá o índice de refração e a absorção de um meio; polos no semiplano inferior significam causalidade e as [[kramersKronig|relações de Kramers–Kronig]], que a aplicação verifica com um integral numérico em valor principal. A largura natural de uma risca espectral sai da transformada de Fourier de uma onda amortecida. A [[smithChart|carta de Smith]]: coeficiente de reflexão como transformação de Möbius, ROE, impedância de entrada de uma linha, transformador de quarto de onda e adaptação com stub.

Brinquedos em mathtrace.app em «Experimente»: os conjuntos de Mandelbrot e de Julia e as bacias de Newton - uma iteração no plano complexo que se pode deslocar e ampliar.

# Exemplos

### Cilindro a rodar: a circulação baixa os pontos de estagnação para baixo do eixo horizontal.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

**Resultado**

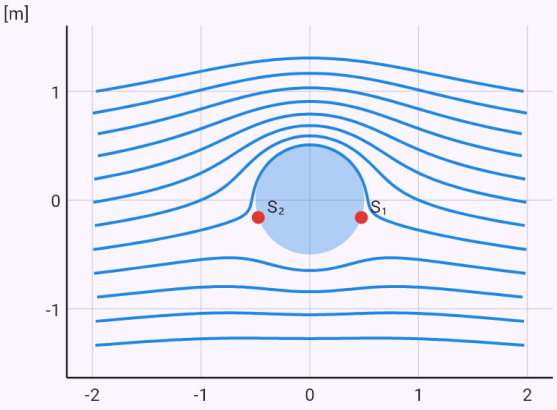
$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

**Passos**

- Procuramos $\theta_s$; dados
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Escoamento em torno de um cilindro: a corrente U(z + R²/z), opcionalmente com um vórtice de circulação Γ (cilindro a rodar). Na superfície a velocidade é 2U·sin θ, o dobro nos lados. A circulação desloca os pontos de estagnação para baixo e cria sustentação pelo teorema de Kutta–Joukowski, L' = ρUΓ por metro de comprimento. Equação do modelo:
  $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- A velocidade conjugada é a derivada do potencial
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- Na superfície do cilindro a velocidade é tangencial
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Velocidade máxima na superfície:
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Pontos de estagnação (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Coeficiente de pressão pela equação de Bernoulli
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$
- Sustentação por metro de comprimento (teorema de Kutta–Joukowski):
  $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Um cilindro ou uma bola a rodar com circulação recebe sustentação perpendicular à corrente - o efeito Magnus que curva uma bola com efeito. Os navios Flettner usam-no como propulsão.

**Gráfico**

Linhas de corrente | Gráfico




As linhas contínuas são linhas de corrente, as tracejadas equipotenciais (só sem circulação). Onde as linhas de corrente se juntam, o fluido vai mais depressa.

### Perfil de Joukowski de 12 % com curvatura de 2 % a 4° de ataque.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

`tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])`

### Resultado

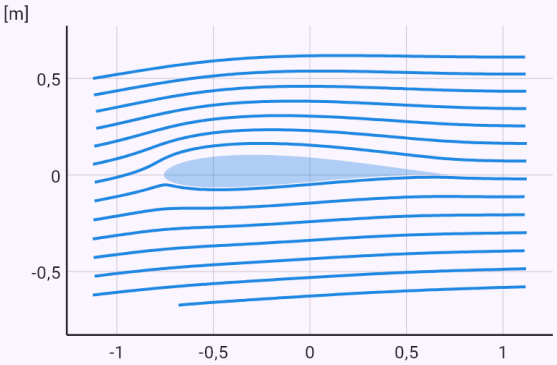
$$C_L \approx 0{,}7243$$

### Passos

- Procuramos $C_L$; dados
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- O perfil de Joukowski nasce da transformação conforme z = ζ + b²/ζ de uma circunferência que passa por ζ = b. Deslocar o centro para a esquerda dá espessura, para cima curvatura. O escoamento em torno do círculo passa para o perfil, a circulação é fixada pela condição de Kutta (o escoamento deixa suavemente o bordo de fuga agudo) e a sustentação pelo teorema de Kutta–Joukowski. Sai o conhecido C_L ≈ 2π(α + β), como num perfil fino. O desempenho de um avião está no formulário Avião. Equação do modelo
  $z = \zeta + \dfrac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}$
- A circunferência do plano ζ de onde nasce o perfil
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Circulação pela condição de Kutta no bordo de fuga
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Sustentação por metro de comprimento (teorema de Kutta–Joukowski): $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Coeficiente de sustentação, entre parênteses a teoria do perfil fino
  $C_L = \dfrac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \dfrac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$
- Fluido ideal: válido para ângulos de ataque pequenos sem descolamento (até cerca de 10–15° nos perfis comuns). Uma asa real de envergadura finita sustenta menos por causa do arrasto induzido (formulário Avião).

### Gráfico

Linhas de corrente | Gráfico




Linhas de corrente em torno do perfil à escala real. O bordo de fuga está à direita - o escoamento deixa-o suavemente (condição de Kutta); acima do perfil as linhas juntam-se e a pressão é menor.

## Corpo de Rankine - a largura muito a jusante é Q/U.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

### Resultado

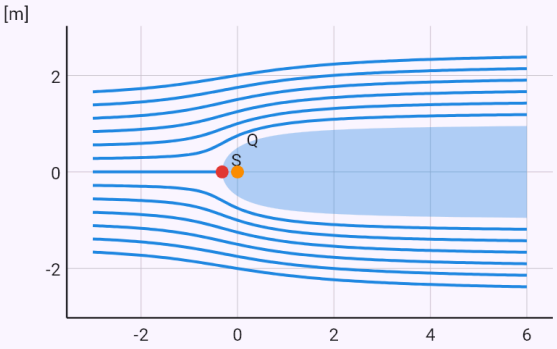
$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

### Passos

- Procuramos $d$; dados: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Uma fonte de caudal Q (m²/s por metro de profundidade) numa corrente de velocidade U. A linha de corrente divisória ψ = Q/2 envolve o semicorpo de Rankine, parecido com a frente de um pilar de ponte ou de uma proa. À frente há um ponto de estagnação; muito a jusante o corpo tem largura Q/U. Equação do modelo:
  $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- A velocidade conjugada é a derivada do potencial:
  $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Ponto de estagnação à frente da fonte:
  $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Linha de corrente divisória - o contorno do corpo:
  $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Largura do corpo muito a jusante:
  $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Velocidade máxima na superfície do corpo (numericamente)
  $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$

- O corpo de Rankine é uma primeira estimativa do escoamento em torno de uma frente arredondada (pilar, casco, bordo de ataque). Num fluido ideal não há esteira atrás do corpo.

### Gráfico




As linhas contínuas são linhas de corrente, as tracejadas equipotenciais (só sem circulação). Onde as linhas de corrente se juntam, o fluido vai mais depressa.

## Cabo coaxial RG-58: impedância característica de cerca de 50 Ω.

Enunciado: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

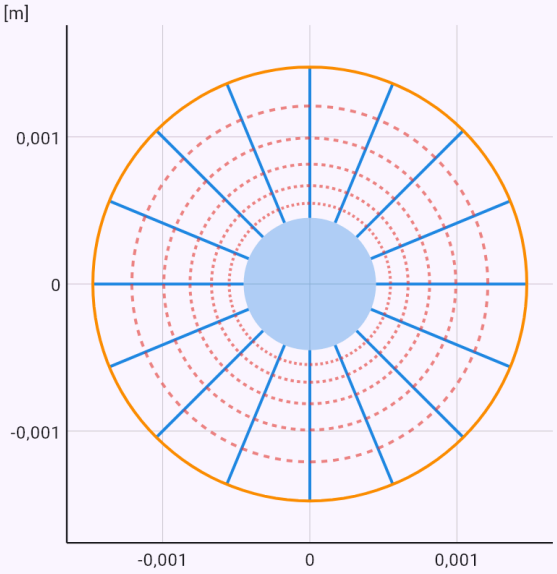
### Resultado

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

### Passos

- Procuramos $Z_0$; dados:
  $a = 0{,}45\,\text{mm}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Convertemos as unidades
  $a = 0{,}45\,\text{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm} = 0{,}001$
- Cabo coaxial: o logaritmo w = ln z desenrola a coroa a < |z| < b num retângulo de largura 2π e altura ln(b/a). O cabo torna-se um condensador plano e a capacidade, a indutância e a impedância característica saem de imediato. Equação do modelo: $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Imagem da coroa no plano w = ln z - um retângulo
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- O potencial é linear em Re w
- Capacidade como a de um condensador plano:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\text{pF/m}$
- Indutância e impedância característica da linha
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\text{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- O cabo RG-58 (condutor de 0,9 mm, polietileno de 2,95 mm) tem cerca de 50 Ω e 100 pF/m. A impedância característica depende só da razão b/a, por isso cabos finos e grossos têm os mesmos 50 ou 75 Ω.

### Gráfico




As linhas contínuas são linhas de campo, as tracejadas equipotenciais; cruzam-se em ângulo reto. Os condutores estão preenchidos ou grossos.

## Capacidade de uma linha bifilar pela transformação de Möbius.

Enunciado: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

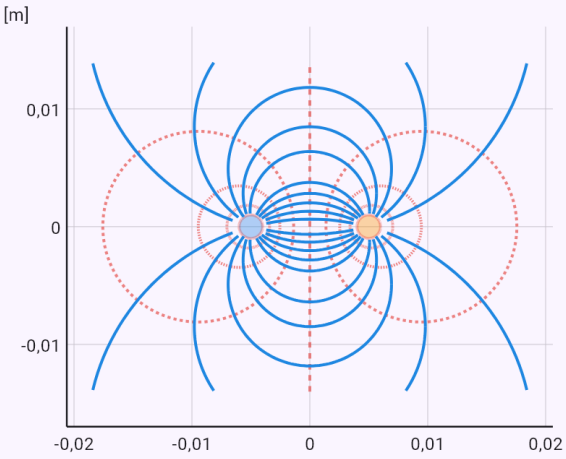
**Resultado**

$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

**Passos**

- Procuramos $C'$; dados: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Convertemos as unidades:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Linha bifilar (dois fios paralelos): a transformação de Möbius w = (z − h)/(z + h) transforma as circunferências dos fios em circunferências concêntricas - um cabo coaxial. As equipotenciais são circunferências de Apolónio, as linhas de campo circunferências que passam por ±h. Equação do modelo
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- As imagens dos fios são circunferências concêntricas
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Capacidade da linha bifilar
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Indutância e impedância característica da linha
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$
- A fita bifilar de antena tinha 300 Ω, um par entrançado de cabo de dados cerca de 100 Ω. A fórmula vale para fios afastados de outros condutores.

**Gráfico**




As linhas contínuas são linhas de campo, as tracejadas equipotenciais; cruzam-se em ângulo reto. Os condutores estão preenchidos ou grossos.

## Temperatura estacionária num semiplano com uma parte da fronteira quente e outra fria.

Enunciado: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC];`

```
x=0.5[m]; y=1[m])
```

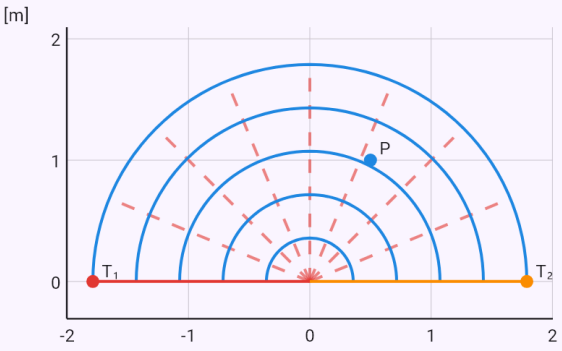
### Resultado

$$T \approx 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$

### Passos

- Procuramos $T$; dados
  $T_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Condução estacionária de calor no semiplano y > 0 cuja fronteira está a $T_1$ à esquerda e a $T_2$ à direita. A temperatura é harmónica, como o potencial numa cunha de 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. As isotérmicas são raios a partir da origem, o calor flui por semicircunferências. Equação do modelo
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Função harmónica com os valores dados na fronteira
- Ângulo do ponto: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^{\circ}$
- Temperatura no ponto: $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$
- Por exemplo o solo sob o limite de duas superfícies a temperaturas diferentes. Na origem a temperatura da fronteira salta de $T_1$ para $T_2$, por isso aí o fluxo cresce sem limite.

### Gráfico




Os raios tracejados são isotérmicas, as semicircunferências contínuas linhas de fluxo de calor.

## Furo circular numa placa à tração: fator de concentração 3.

Enunciado: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

### Resultado

$$K_t \approx 3$$

### Passos

- Procuramos $K_t$; dados: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Tração σ_x numa direção: na borda do furo 3σ_x transversal à carga, −σ_x (compressão) na sua direção. Equação do modelo

  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$
- Potenciais complexos de Kolosov–Muskhelishvili para a tração σ

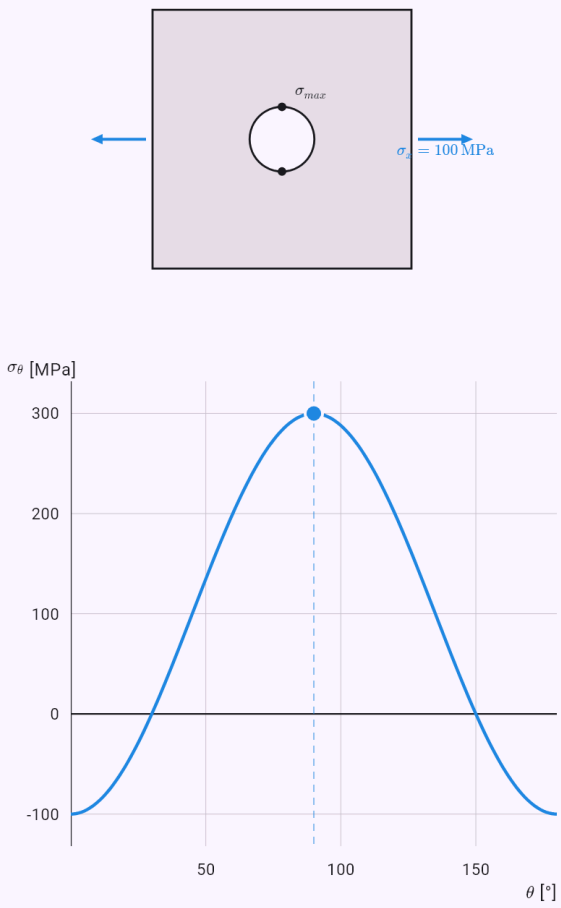
  $$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$
- Na borda do furo a tensão radial é nula, a circunferencial

  $r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$
- Tensão circunferencial em torno do furo (Kirsch)

  $$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$
- Tensão máxima e fator de concentração

  $$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$
- A dois raios do centro a tensão só excede a da placa em 22 % - a concentração é local.
- Válido para material elástico e um furo pequeno face à placa (largura pelo menos cinco vezes o diâmetro). Numa faixa estreita K_t é menor, mas a tensão na secção enfraquecida é maior.

### Gráfico




$\sigma_\theta$ – tensão circunferencial na borda do furo

$\sigma_{max} = 300\,\mathrm{MPa}$

A placa com o furo e a tensão que a solicita (as setas não estão à escala). O gráfico mostra a tensão circunferencial na borda do furo conforme o ângulo θ a partir do eixo x; os pontos no furo marcam a tensão máxima.

## A 60° de latitude os comprimentos no mapa duplicam.

Enunciado: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

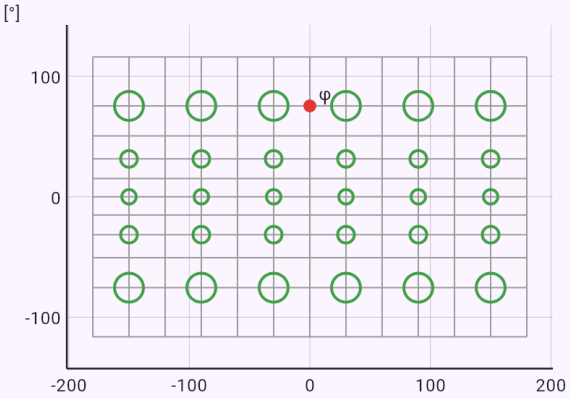
**Resultado**

$$k \approx 2$$

**Passos**

- Procuramos $k$; dados: $\varphi = 60\,^{\circ}$
- Distância do paralelo φ ao equador num mapa de largura W e escala k = 1/cos φ. Os círculos de Tissot do gráfico são iguais no globo. Equação do modelo
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$$
- A projeção é conforme, os comprimentos crescem igualmente em todas as direções:
$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$$
- Escala no paralelo φ: $k = \dfrac{1}{\cos 60^{\circ}} = 2, \quad k^2 = 4$
- As áreas crescem como k², quatro vezes a 60°. Os polos não estão no mapa, ficam no infinito.

**Gráfico**




Meridianos de 30° em 30° e paralelos de 15° em 15°. Os círculos de Tissot são iguais no globo e no mapa crescem como 1/cos φ - a forma conserva-se, a área não.

## Praga – Nova Iorque: a ortodrómia e a loxodrómia, mais longa.

Enunciado: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg];`

`lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

**Resultado**

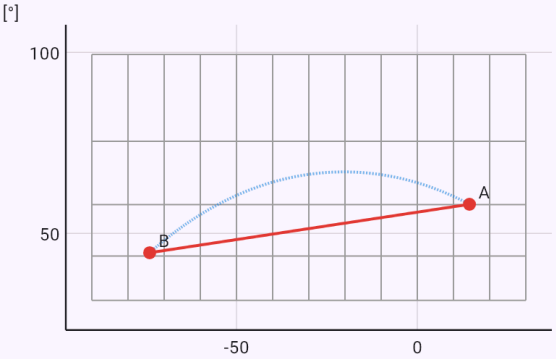
$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

**Passos**

- Procuramos $d$; dados
  $\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$
- Loxodrómia entre dois lugares (latitude e longitude, oeste negativo): rumo, comprimento e comparação com a ortodrómia - o caminho mais curto pelo círculo máximo. Equação do modelo
  $x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$
- A projeção é conforme, os comprimentos crescem igualmente em todas as direções:
  $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- No mapa a loxodrómia é uma reta - o rumo pelas diferenças de coordenadas
  $\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$
- Comprimento da loxodrómia: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Ortodrómia (caminho mais curto na esfera)
  $d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$

- A loxodrómia é mais longa do que a ortodrómia, mas navega-se com rumo fixo. Os aviões de longo curso seguem a ortodrómia e mudam de rumo continuamente.

**Gráfico**




A reta contínua é a loxodrómia (rumo constante), a curva tracejada a ortodrómia (caminho mais curto), ambas na projeção de Mercator.

## Margem de fase de uma malha com três atrasos de primeira ordem.

Enunciado: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s];`

`T2=1[s]; T3=1[s])`

**Resultado**

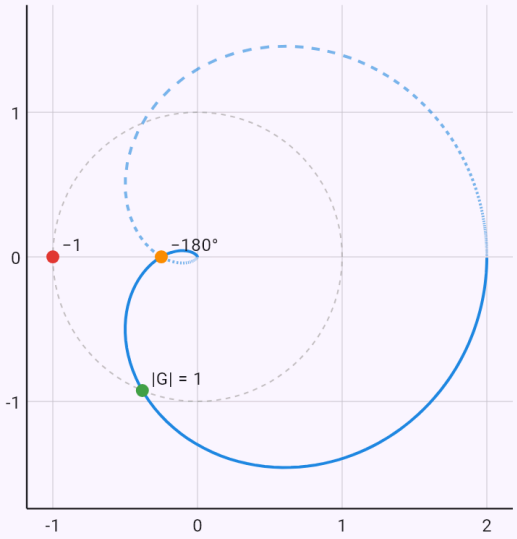
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

**Passos**

- Procuramos $\varphi_m$; dados:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- O critério de Nyquist decorre do princípio do argumento: o número de voltas da curva G(iω) em torno de −1 é a diferença dos polos instáveis da malha fechada e da aberta. Com uma malha aberta estável, a curva não pode envolver −1. A distância a que fica medem-na as margens de ganho e de fase. Equação do modelo
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Princípio do argumento: N voltas em torno de −1, Z polos instáveis da malha fechada, P da aberta:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frequência onde a fase atinge −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Margem de ganho e ganho crítico
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frequência onde |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Margem de fase: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- A curva não envolve −1 - a malha fechada é estável:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Requisito habitual: margem de ganho de pelo menos 6 dB e de fase de 30–60°. Um tempo morto tira fase continuamente, por isso um processo com atraso é mais difícil de controlar.

**Gráfico**

Diagrama de Nyquist | Gráfico




A curva contínua é G(iω) para ω > 0, a tracejada a sua imagem espelhada para ω negativo, a circunferência tracejada |G| = 1. A malha fechada é estável se a curva não envolve −1.

## Lugar das raízes com integrador: ganho crítico 3.

Enunciado: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one];`

`T1=1[s]; T2=0.5[s])`

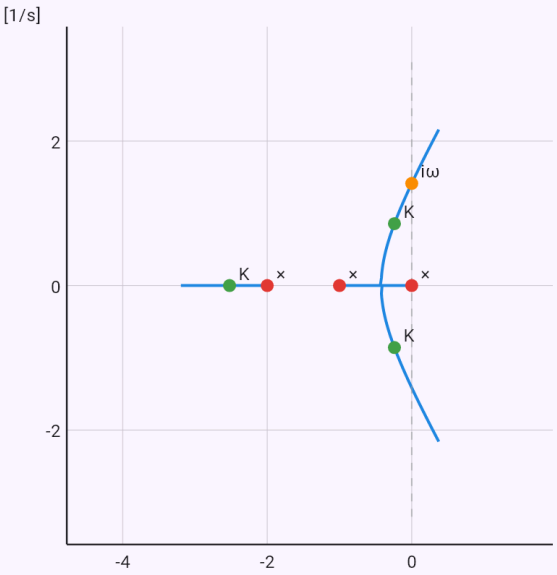
**Resultado**

$$K_{krit} \approx 3$$

**Passos**

- Procuramos $K_{krit}$; dados:
  $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- O lugar das raízes: como se movem os polos da malha fechada quando o ganho K cresce a partir de zero. Os ramos começam nos polos da malha aberta, afastam-se por assíntotas e no eixo imaginário o sistema fica instável (ganho crítico pela condição de Routh–Hurwitz).
  Equação do modelo:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Polos da malha aberta (inícios dos ramos):
  $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Assíntotas dos ramos: centroide e ângulos
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Ponto de separação no eixo real:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Cruzamento do eixo imaginário - o limite de estabilidade
  $s = i\omega: \quad \operatorname{Im} D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- O ganho dado está abaixo do crítico - estável:
  $K = 1 < K_{krit}$
- Polos da malha fechada para o K dado:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

**Gráfico**




Os ramos mostram os polos da malha fechada quando K cresce: começam nos polos da malha aberta (×), os pontos K são os polos para o ganho dado, iω o cruzamento com o eixo imaginário.

## Ordem necessária de um filtro de Chebyshev para 40 dB uma oitava acima.

Enunciado: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

### Resultado

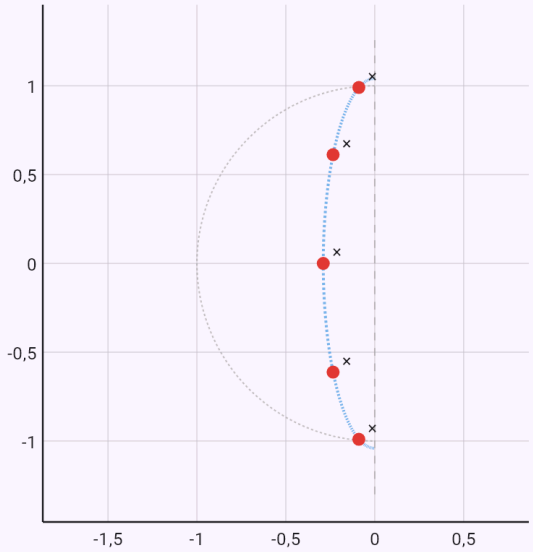
$$n \approx 5$$

### Passos

- Procuramos $n$; dados
  $f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($
- Chebyshev: uma ondulação A_p na banda passante, em troca uma transição mais abrupta para a banda de rejeição do que um Butterworth da mesma ordem. Equação do modelo
  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$
- Parâmetro de ondulação: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Ordem necessária (arredondada para cima)
- Polos numa semielipse
  $s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$
- Polos (relativos a ω_c)
  $\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28($
- Função de transferência - todos os polos à esquerda, o filtro é estável
  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$
- O Chebyshev paga a inclinação com ondulação e pior atraso de grupo - conserva pior a forma dos impulsos.

### Gráfico

Polos | Gráfico




Polos no plano complexo s (×); um sistema estável tem-nos à esquerda do eixo imaginário.

## Resposta ao impulso de um filtro digital com polos complexos por resíduos.

Enunciado: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

**Resultado**

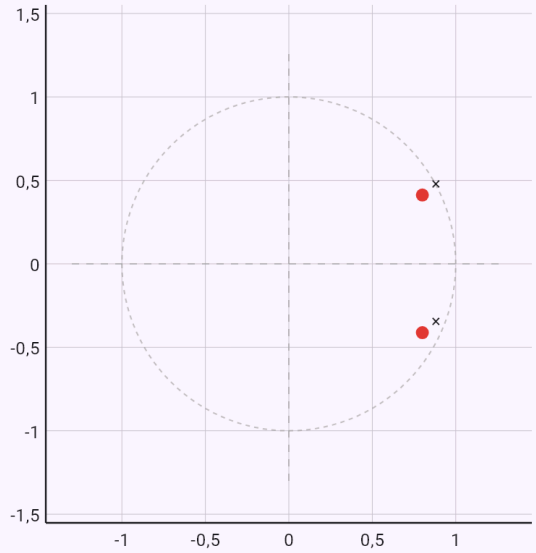
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

**Passos**

- Procuramos $h[n]$; dados:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Um filtro digital calcula a saída a partir das últimas amostras: y[n] = $b_0$x[n] + $b_1$x[n−1] + $b_2$x[n−2] − $a_1$y[n−1] − $a_2$y[n−2]. A sua função de transferência é uma função racional H(z) (transformada Z). O filtro é estável se todos os polos estão dentro da circunferência unitária. A resposta ao impulso sai da transformada Z inversa por resíduos: h[n] = Σ Res[H(z)$z^{n-1}$]. A resposta em frequência é H sobre a circunferência unitária, z = e^(iΩ). Equação do modelo
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Equação de diferenças do filtro:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Polos da função de transferência
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Polos dentro da circunferência unitária - o filtro é estável: $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Transformada Z inversa por resíduos:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Polos complexos conjugados dão uma oscilação amortecida
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \vartheta$
- Valor da resposta: $h[10] = -0{,}6596$

**Gráfico**

Polos e zeros | Gráfico




Polos (×) e zeros (○) da função de transferência no plano z com a circunferência unitária. O filtro é estável se todos os polos estão dentro.

## Fator de qualidade de um oscilador a partir da posição dos polos.

Enunciado: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

`b=2[kg_s])`

**Resultado**

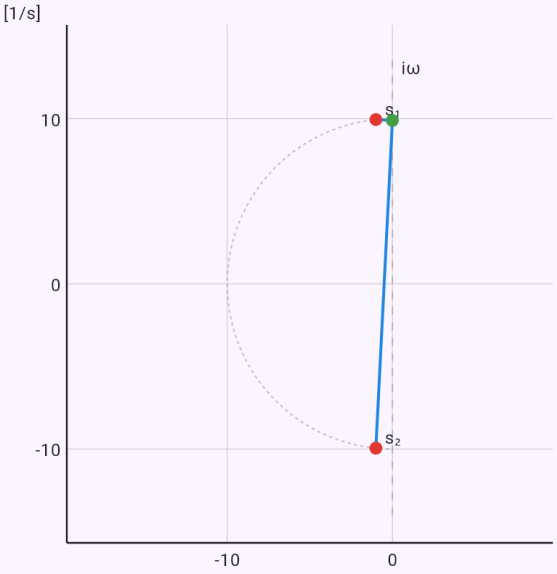
$$Q \approx 5$$

**Passos**

- Procuramos $Q$; dados:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Uma massa numa mola amortecida, excitada por uma força harmónica. X/X₀ é a amplitude face à deformação estática sob a mesma força. Equação do modelo:
  $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Polos da função de transferência
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplitude a partir das distâncias aos polos
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Pico da curva de ressonância
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Fator de qualidade e largura de banda
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Perto da ressonância a curva tem forma de lorentziana
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Por isso uma máquina não deve rodar muito tempo à frequência própria da sua estrutura e as pontes são verificadas face à excitação por peões e vento.

**Gráfico**

Polos | Gráfico




Polos no plano complexo s (×); um sistema estável tem-nos à esquerda do eixo imaginário.

## Índice de refração abaixo da ressonância de um oscilador de Lorentz, verificado pela relação de Kramers–Kronig.

Enunciado: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV];`

```
E=1.5[eV])
```

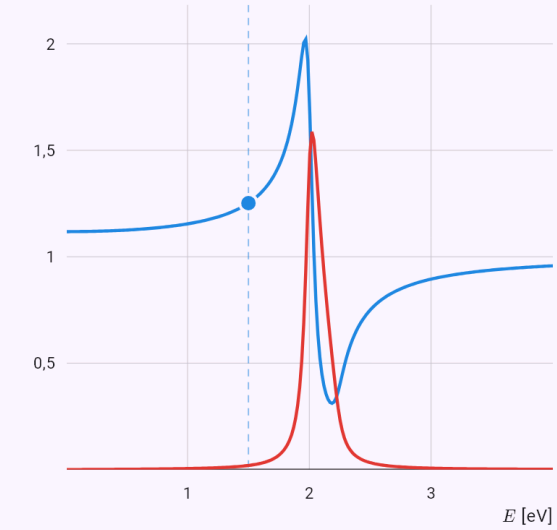
### Resultado

$$n \approx 1{,}252$$

### Passos

- Procuramos $n$; dados
  $E_0 = 2\,\text{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\text{eV}, \quad E_p = 1\,\text{eV}, \quad E = 1{,}5\,\text{eV}$
- Índice de refração n e coeficiente de extinção κ a partir de n + iκ = √(1 + χ). Energia do fotão E, ressonância $E_0$, largura Γ e força do oscilador E_p em eletrões-volt.
  Equação do modelo: $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Os polos da suscetibilidade estão no semiplano inferior
  $E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4}} - \dfrac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$
- Causalidade: a relação de Kramers–Kronig
  $\operatorname{Im} E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$
- Suscetibilidade à energia dada: $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Verificação: χ' pelo integral sobre χ'' (numericamente) e diretamente: $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Índice de refração complexo:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Comprimento de onda e coeficiente de absorção
  $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 826{,}6\,\text{nm}, \quad \alpha = \dfrac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\text{m}^{-1}$
- Abaixo da ressonância o índice cresce com a energia - a dispersão normal, com que um prisma decompõe a luz em cores.

### Gráfico




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

## Largura natural da risca D do sódio - cerca de 10 MHz.

Enunciado: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

**Resultado**

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\text{MHz}$$

**Passos**

- Procuramos $\Delta\nu$; dados: $\tau = 16\,\text{ns}$
- Um átomo excitado emite uma onda que decai exponencialmente com o tempo de vida τ. A sua transformada de Fourier (um resíduo num polo) dá a risca lorentziana de largura Δν = 1/(2πτ) - a largura natural de uma risca espectral. Equação do modelo: $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Transformada de Fourier da onda amortecida

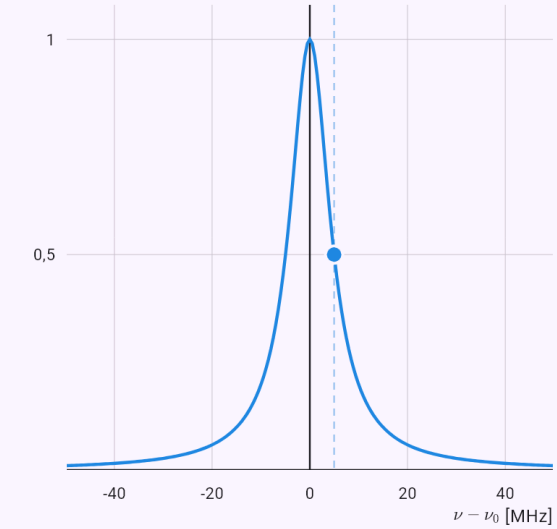
$$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$

- Forma lorentziana da risca e a sua largura

$$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}} : \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$

- Largura natural da risca: $\Delta\nu = \dfrac{1}{2\pi \cdot 16\,\text{ns}} = 9{,}947\,\text{MHz}$
- A risca D do sódio (τ ≈ 16 ns) tem uma largura natural de cerca de 10 MHz. Num gás, o efeito Doppler e as colisões alargam ainda mais as riscas.

**Gráfico**




O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

**Adaptação de uma carga de 100 Ω a uma linha de 50 Ω com um stub em curto-circuito.**

Enunciado: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

**Resultado**

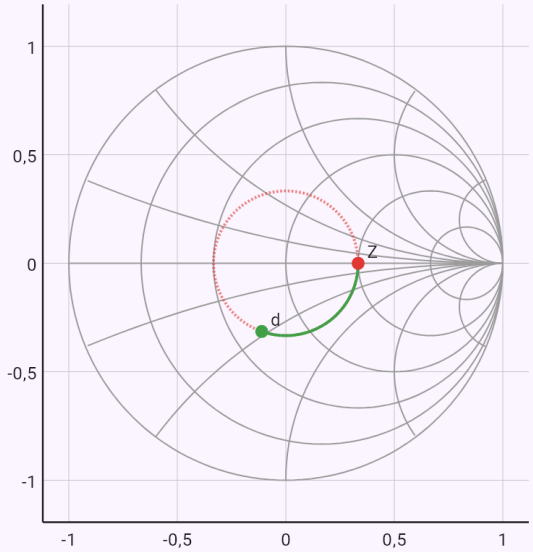
$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

**Passos**

- Procuramos $d$; dados
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- O coeficiente de reflexão Γ = (Z − $Z_0$)/(Z + $Z_0$) numa linha de impedância característica $Z_0$ é uma transformação de Möbius. Leva o semiplano direito das impedâncias para o disco unitário - a carta de Smith. Avançar pela linha em direção ao gerador é rodar no sentido horário sobre a circunferência |Γ| = const.; meio comprimento de onda é uma volta completa. Daí a razão de ondas estacionárias, a impedância de entrada, o transformador de quarto de onda e a adaptação com stub. Equação do modelo
  $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{z-1}{z+1}, \quad z = \dfrac{Z_L}{Z_0}$
- Impedância de carga normalizada: $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Coeficiente de reflexão:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Razão de ondas estacionárias e perda de retorno
  $PSV = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$
- Comprimento de onda na linha: $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Admitância de carga normalizada: $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Ponto onde a parte real da admitância vale 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Comprimento do stub em curto-circuito que anula a susceptância
  $y_s = -j\cot\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccot}\,(0{,}707$
- Um stub é um troço de linha terminado em curto-circuito, ligado em paralelo. À frequência escolhida a linha anterior não vê então qualquer reflexão.

**Gráfico**




Circunferências de resistência constante e arcos de reatância constante (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). A circunferência tracejada tem raio |Γ| (ROE constante), o arco colorido é o avanço pela linha em direção ao gerador.

## Limitações conhecidas

- O escoamento é ideal: sem viscosidade, descolamento nem esteira. O modelo não dá o arrasto nem o comportamento a grandes ângulos de ataque.
- As transformações conformes são só para as formas indicadas; uma forma geral de condutores ou de perfil (transformação de Schwarz–Christoffel) ainda não.
- A função de transferência da malha tem forma fixa com três atrasos e no máximo dois integradores; zeros no numerador e uma malha aberta instável ainda não.
- O filtro digital é de segunda ordem, os analógicos só passa-baixo.