Mathtrace – manual

III. Análise matemática

Índice

III. Análise matemática

25. Limites

26. Derivadas

27. Estudo de uma função

28. Funções de várias variáveis
    - Mapa dos teoremas integrais
    - Aplicações físicas dos teoremas integrais

29. Polinómio de Taylor

30. Integrais indefinidos
    - Primitivas imediatas e substituição
    - Integração por partes
    - Funções racionais
    - Funções trigonométricas
    - Funções hiperbólicas
    - Raízes

31. Integrais definidos e as suas aplicações
    - Integral definido
    - Integrais impróprios
    - Área sob uma curva e entre curvas
    - Comprimento de uma curva
    - Volume de um sólido de revolução
    - Área lateral de um sólido de revolução
    - Aplicações com parâmetros
    - Centroide
    - Curvas paramétricas e em coordenadas polares
    - Curvas dadas por uma equação

32. Séries infinitas
    - Séries numéricas

Séries de potências
Série de Taylor
33. Séries de Fourier

25. Limites

O Mathtrace calcula o limite de uma função de uma variável num ponto, no infinito e os limites laterais, e procede como na escola: primeiro tenta substituir na função. O limite de uma sucessão (n → ∞) calcula-se da mesma forma – também a forma 1^∞ ou uma soma de potências, da qual se põe em evidência o termo que cresce mais rápido.

Se a substituição der uma indeterminação (0/0, ∞/∞, …), escolhe uma transformação conforme a forma da função – fatorizar e simplificar, multiplicar pelo conjugado, dividir pela maior potência, um limite notável (sin x / x) ou a regra de L'Hôpital, também repetidamente. Uma potência com a variável na base e no expoente (as formas 0^0, ∞^0, 1^∞) escreve-se como e^(g·ln f) e o limite calcula-se no expoente; se a função só está definida de um lado do ponto (x^(ln(x+1)) só para x > 0), calcula o limite desse lado e indica-o. O chip «Regra de L'Hôpital» escolhe a regra diretamente; se a substituição não der uma indeterminação, a resolução explica porque não pode ser aplicada.

As outras letras do enunciado (k em (1 + k/x)^x) são parâmetros – constantes com que calcula em geral; quando o resultado vale só para valores positivos do parâmetro, indica-o. A letra pode estar também no ponto do limite: lim (x² − a²)/(x − a) quando x → a = 2a. Um limite com parâmetro não tem gráfico.

Um limite infinito, ou um limite que não existe (os limites laterais são diferentes), nunca é apresentado como um número – di-lo por palavras e mostra os limites laterais. O resultado inclui um gráfico da função perto do ponto com o valor do limite assinalado.

No limite de uma sucessão o gráfico mostra os pontos a_1, a_2, a_3, … em vez de uma curva contínua.

Como introduzir

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Um limite escrito: depois da palavra lim, entre parênteses a variável, a seta -> e o ponto, e depois a função.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Um limite no infinito: infinito escreve-se oo (menos infinito -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Um limite lateral: + (à direita) ou − (à esquerda) depois do ponto.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	A partir de uma fotografia, ou em LaTeX tal como a câmara o reconhece.

`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	O limite de uma sucessão no infinito.

Exemplos

A indeterminação 0/0 – fatorizamos o numerador e simplificamos.

Enunciado: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

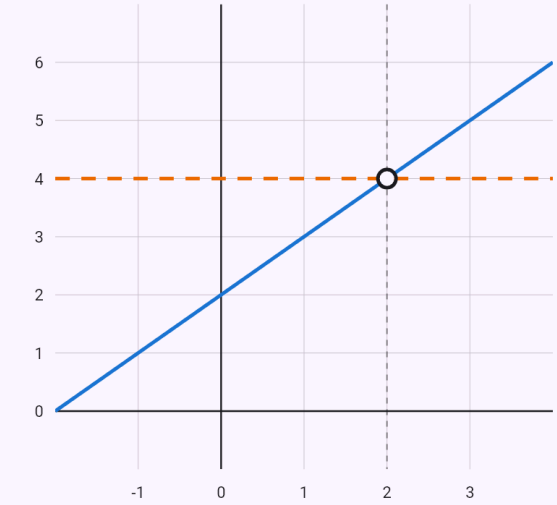
Resultado

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Passos

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Transformamos e simplificamos $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Substituímos: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Gráfico



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$y = 4$

Limite:

○ $(2; 4)$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

Um limite no infinito – numerador e denominador divididos pela maior potência.

Enunciado: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Resultado

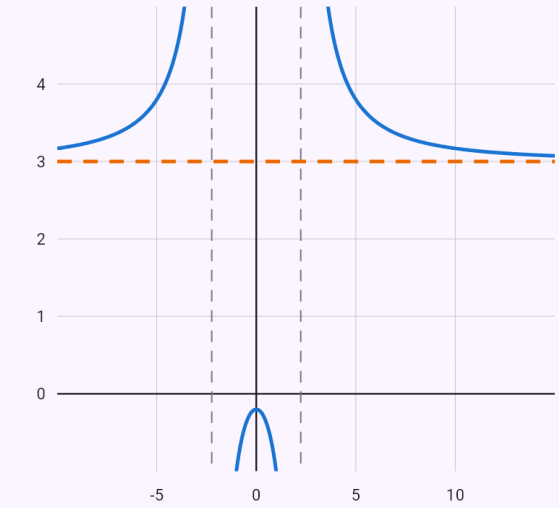
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Passos

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ – é preciso transformar a expressão.
- Dividimos numerador e denominador por x^2 – os termos do tipo c/xⁿ tendem para zero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Gráfico



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

O limite notável sin x / x.

Enunciado: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Resultado

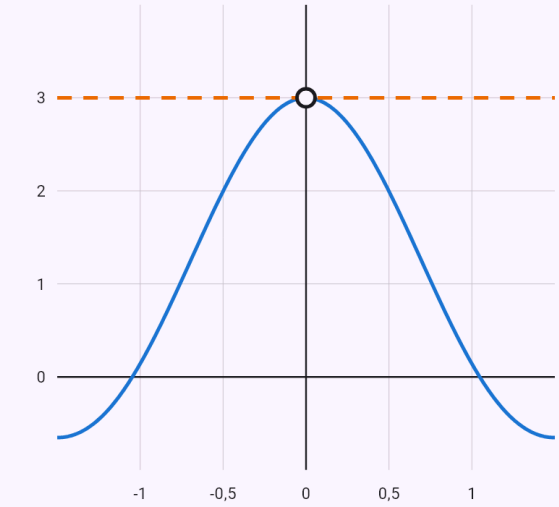
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Passos

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Usamos o limite conhecido $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Gráfico



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Limite:

○ $(0; 3)$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

A regra de L'Hôpital, aplicada duas vezes seguidas.

Enunciado: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Resultado

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Passos

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

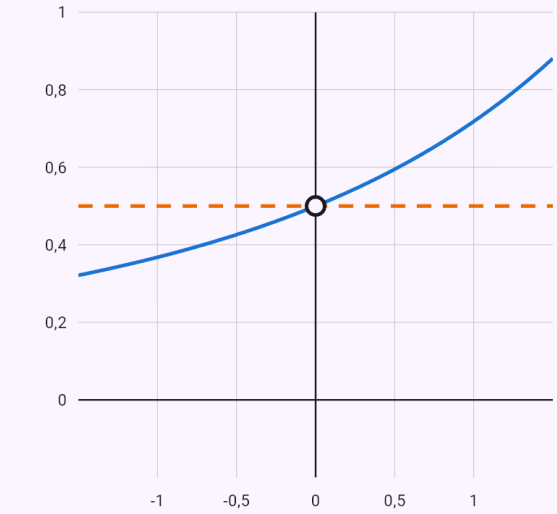
  $$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

  $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Substituímos: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Gráfico



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Limite:

- $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

A indeterminação 0^0 – escrevemos a potência como e^(g·ln f); a função só está definida para x > 0, por

isso o limite à direita.

Enunciado: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Resultado

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Passos

- A função não está definida à esquerda de 0, por isso calculamos o limite à direita.
- Ao substituir sai a indeterminação 0^0 – é preciso transformar a expressão.
- A base e o expoente contêm a variável – escrevemos a potência como e elevado ao expoente vezes o logaritmo da base e calculamos o limite no expoente

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $0\cdot\infty$ – é preciso transformar a expressão.
- Escrevemos o produto como quociente

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ – é preciso transformar a expressão.
- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- O fator $x+1$ vale 1 no ponto – tiramo-lo para fora do limite

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1\cdot\lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$

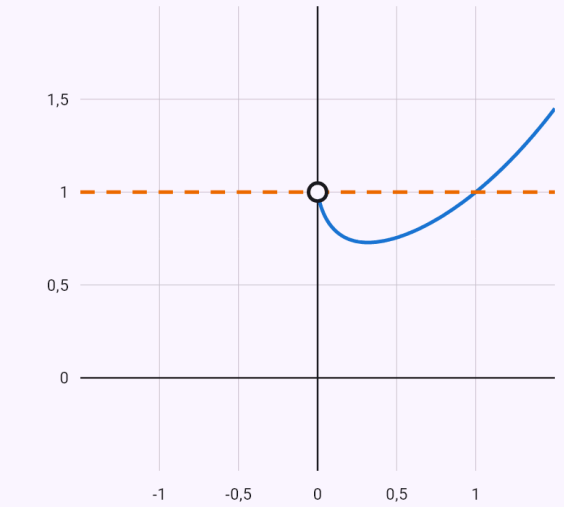
- Substituímos

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$

- Substituímos o limite do expoente:

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$$

Gráfico



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Limite:
○ $(0;1)$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

Os limites laterais são diferentes – o limite não existe.

Enunciado: `lim(x->0) 1/x`

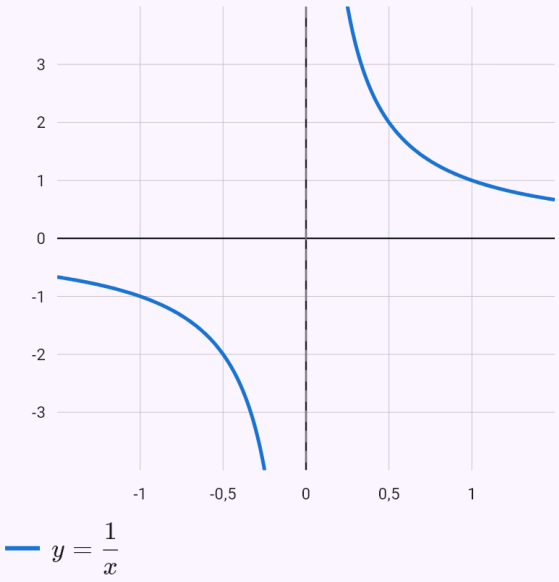
Resultado

O limite não existe – os limites laterais são diferentes.

Passos

- Ao substituir sai um número não nulo sobre zero – o limite é infinito, o sinal à esquerda e à direita: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Limites laterais: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Gráfico



Limite de uma sucessão – pomos em evidência o termo que cresce mais rápido, 9^n.

Enunciado: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Resultado

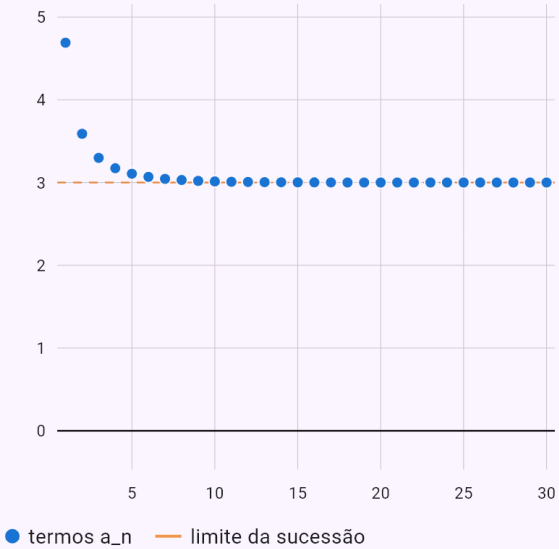
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Passos

- Colocamos em evidência o termo que cresce mais rápido, 9^n – os outros divididos por ele tendem a zero

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Gráfico



Os pontos são os termos a_n para n = 1, 2, 3, … Se a sucessão tem limite, os termos aproximam-se dele (tracejado).

Limite com parâmetro k – o limite conhecido (1 + 1/x)^x = e dá e^k.

Enunciado: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Resultado

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros – números fixos que tratamos como constantes: k
- Ao substituir sai a indeterminação 1^{∞} – é preciso transformar a expressão.
- Escrevemos a base como $1+\frac{1}{t}$ com t = $\frac{x}{k}$, e a potência como $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ elevado a k. A expressão entre parênteses retos tende para e – é o limite conhecido $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Resta o limite do expoente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Derivadas

A aplicação deriva pelas regras – da soma, da constante, do produto, do quociente e da função composta – e diz em cada passo que regra usou. Também calcula derivadas de ordem superior e o valor da derivada num ponto. As funções elementares (x^2, $\sin x$, e^x, …) também podem ser derivadas pela definição, como limite da razão incremental. O resultado inclui um gráfico da função e da sua derivada.

Para uma função dada implicitamente por uma equação em x e y ($x^3 + y^3 = 3xy$), deriva ambos os membros em ordem a x (y como função de x) e isola y', ou usa a fórmula $y' = -F_x / F_y$; também calcula y'' e, num ponto dado, a tangente e a normal, e desenha a curva.

Num ponto singular (a curva cruza-se ou tem uma cúspide), encontra as tangentes a partir dos termos de menor grau – no fólio, na origem, x = 0 e y = 0.

O diferencial df = f′(x) dx, num ponto com um passo («diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1») com o valor aproximado $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. «aproximadamente √4.1» escolhe o ponto $x_0 = 4$, onde o valor se conhece exatamente, e compara a estimativa com o valor real.

Como introduzir

`(x^2 sin x)'`	A derivada com uma plica depois do parêntese.
`d/dx (e^x / x)`	A notação d/dx, também a partir de uma fotografia (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Derivadas de ordem superior com várias plicas, ou com a ordem no chip «Derivar».
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	A derivada num ponto, ou indique o ponto no chip.
`x^2 sin x`	Uma expressão com o chip «Derivar» – aí escolhe também a ordem, o ponto e o método (pelas regras / pela definição).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Uma equação em x e y – o chip «Derivada implícita» (ordem 1 ou 2, o método, um ponto $[x_0; y_0]$) ou «Gráfico da curva»; escrito diff(x^3+y^3=3xy, x).
`diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1`	O diferencial num ponto com um passo.

`aproximadamente √4.1`	Um valor aproximado pelo diferencial.

Exemplos

A derivada do produto.

Enunciado: `(x^2 sin x)'`

Resultado

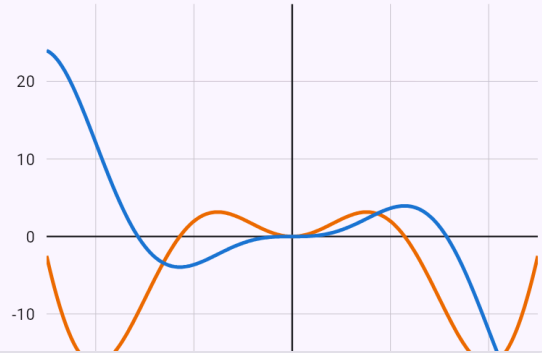
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

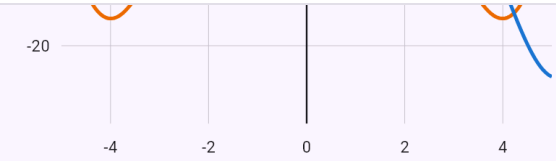
Passos

- Regra do produto (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Gráfico





$y = x^2 \sin x$

$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

A derivada do quociente.

Enunciado: `d/dx (e^x / x)`

Resultado

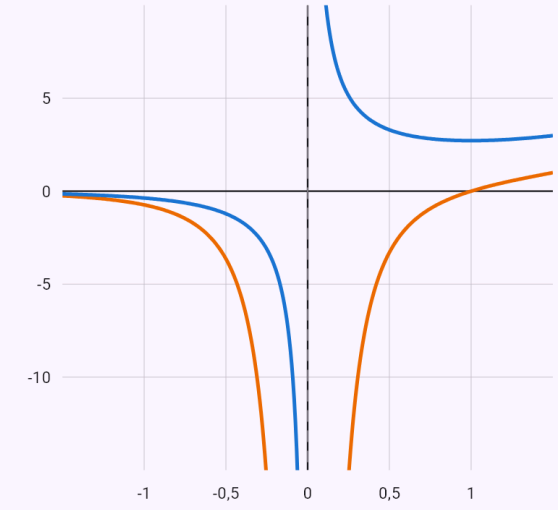
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Passos

- Regra do quociente (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Gráfico



$y = \frac{e^x}{x}$

$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

A segunda derivada.

Enunciado: `(x^3 ln x)''`

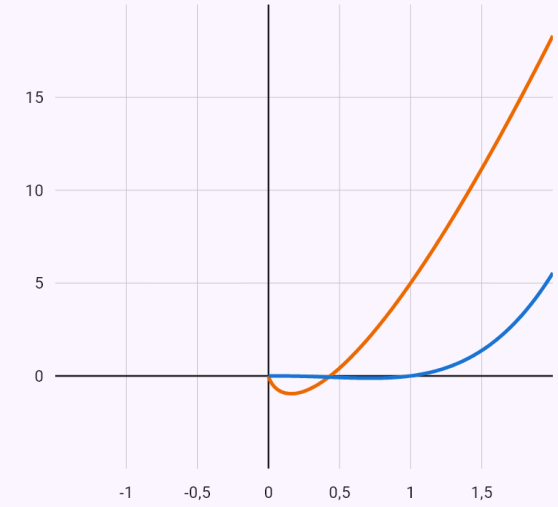
Resultado

$$y'' = 5x + 6x\ln x$$

Passos

- Derivada de ordem 1: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Regra do produto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Derivada de ordem 2: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- A derivada de uma soma é a soma das derivadas:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Tiramos a constante para fora da derivada:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Regra do produto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Substituímos:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Substituímos: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Simplificamos: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Gráfico



$y = x^3 \ln x$

$y'' = 5x + 6x \ln x$

Onde a segunda derivada é positiva, a função é convexa (curvada para cima); onde é negativa, é côncava (curvada para baixo).

A derivada pela definição, como limite.

Enunciado: x^2 Derivar → Pela definição

Resultado

$$y' = 2x$$

Passos

- Derivada pela definição

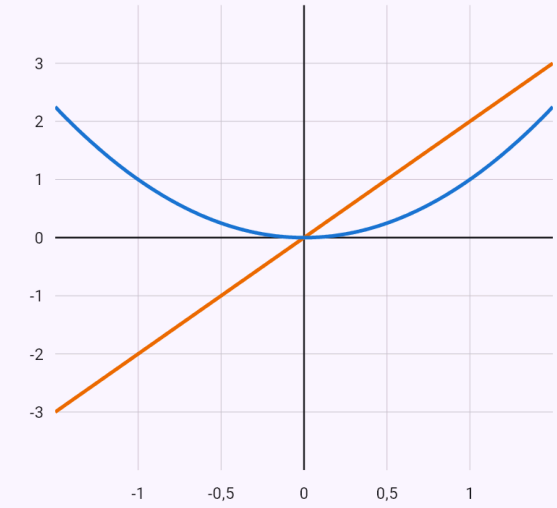
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Ao substituir sai a indeterminação $\frac{0}{0}$ – é preciso transformar a expressão.
- Transformamos e simplificamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

- Substituímos: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Gráfico



$y = x^2$

$y' = 2x$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

Derivada implícita – o fólio de Descartes, a tangente e a normal em [3/2; 3/2], a segunda derivada.

Enunciado: `x^3 + y^3 = 3xy` Derivada implícita, ordem 2, ponto [3/2; 3/2]

Resultado

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$$

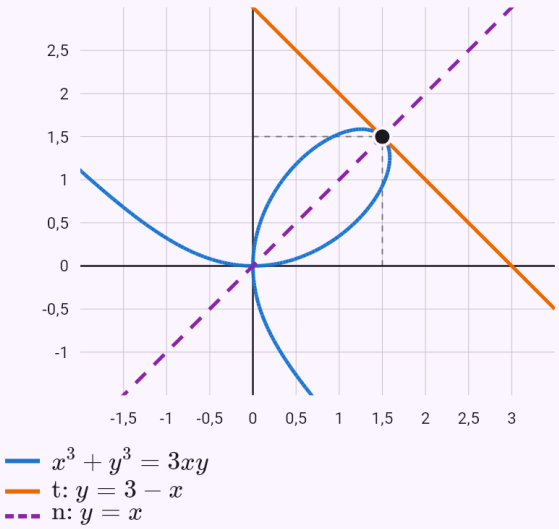
Condições: $y^2 - x \neq 0$

Passos

- A função y = y(x) é dada pela equação $x^3 + y^3 = 3xy$ – derivamos ambos os membros em ordem a x, tomando y como função de x (regra da cadeia: p. ex. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivamos ambos os membros:
  $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Os termos com y' para a esquerda, o resto para a direita, e pomos y' em evidência: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Isolamos y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- A segunda derivada – derivamos y' de novo em ordem a x (y e y' são funções de x)
  $y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$
- Substituímos y'
  $y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$
- Sobre a curva verifica-se $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – o que simplifica a expressão: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- O ponto $\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$ pertence à curva:
  $x^3 + y^3 - 3xy\big|_{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}} = 0$
- A derivada no ponto $\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$ – o declive da tangente:
  $y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$
- A tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- A normal é perpendicular à tangente, o seu declive é 1:
  $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- A segunda derivada no ponto: $y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$

Gráfico



A curva dada pela equação. No ponto dado, a tangente (traço contínuo) e a normal (tracejado).

O diferencial de √x em 4 com o passo 0,1.

Enunciado: `diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Resultado

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Passos

- O diferencial – a parte linear do acréscimo da função:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- O diferencial em x_0 para o passo h
  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Substituímos o acréscimo pelo diferencial. O valor exato é $2{,}0248457$, o erro da estimativa $0{,}00015$
  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Um valor aproximado de ∛27,1 pelo diferencial.

Enunciado: `aproximadamente \sqrt[3]{27.1}`

Resultado

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Passos

- Escrevemos o número como valor da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ perto de $x_0 = 27$, onde o conhecemos exatamente; o passo é $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- O diferencial – a parte linear do acréscimo da função:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- O diferencial em x_0 para o passo h
  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \frac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Substituímos o acréscimo pelo diferencial. O valor exato é $3{,}0036991$, o erro da estimativa $0{,}0000046$
  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Estudo de uma função

A aplicação estuda uma função pela ordem habitual: domínio, paridade, interseções com os eixos, sinal da função, limites nos extremos do domínio e assíntotas, primeira derivada – monotonia e extremos (também por derivadas de ordem superior), segunda derivada – concavidades e pontos de inflexão, e por fim o contradomínio. Resume tudo e desenha um gráfico com os pontos assinalados.

Numa função trigonométrica, o aplicativo encontra o período, estuda a função em um período e escreve os resultados com o período (um máximo em x = π/2 + 2kπ); se só a derivada for periódica (x + 2 sin x), os extremos e a monotonia se repetem com o período. Os módulos são removidos pelos sinais nos intervalos e nos bicos se comparam as derivadas laterais; onde a derivada é infinita, aparece uma tangente vertical. Módulos encaixados e somas de módulos são estudados por troços; onde a função é constante num intervalo, isso é indicado com o seu valor (um mínimo em cada ponto do intervalo).

Extremos absolutos (globais) num intervalo fechado: «extremos de x^3 - 3x em [-2; 3]» – a app encontra os pontos estacionários e os pontos sem derivada no intervalo e compara os valores aí e nas extremidades. Sem intervalo, «extremos …» estuda a função. A função inversa («função inversa f(x) = …») obtém-se resolvendo y = f(x) em ordem a x, com verificação pela composição; o gráfico mostra f, f^{-1} e a reta y = x.

O vértice de uma parábola («vértice da parábola y = x^2 - 4x + 7», basta também y = …) completando o quadrado – com o eixo, o conjunto imagem e a translação do gráfico de y = ax². Uma função composta escreve-se com as suas definições: «f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))».

Um gráfico por deslocamentos, estiramentos e reflexões: «posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1» (em inglês «graph transformations …») – a aplicação parte da função básica (sen, cos, tg, cotg, e^x, a^x, ln, $\log_a$, raiz, potência, 1/x, |x|) e passo a passo comprime-a ou estica-a ao longo do eixo x, desloca-a para a direita ou para a esquerda, estica-a ao longo do eixo y, reflete-a e desloca-a para cima ou para baixo; também |f(x)| e f(|x|). No gráfico estão a função básica e a resultante.

Como introduzir

`estudo y = x^3 - 3x`	Com a palavra «estudo» antes da função.
`x^3 - 3x`	Uma função com o chip «Estudo da função».
`extremos de x^3 - 3x em [-2; 3]`	Extremos absolutos num intervalo fechado.
`função inversa f(x) = (2x+1)/(x-3)`	A função inversa (também «f^{-1}, f(x) = …»).

Exemplos

Um polinómio – extremos e um ponto de inflexão.

Enunciado: `x^3 - 3x` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$
Paridade: ímpar
Zeros: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
Crescente: $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$
Decrescente: $[-1,\ 1]$
Máximo local: $[-1;\ 2]$
Mínimo local: $[1;\ -2]$
Convexa: $[0,\ \infty)$
Côncava: $(-\infty,\ 0]$
Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x:
  $f(x) = 0 \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, ou seja
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\ 0)$	$(0,\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  A função é positiva para $x \in \left(-\sqrt{3},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3},\ \infty\right)$ e negativa para $x \in \left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\ \sqrt{3}\right)$
- Limites nos extremos do domínio
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Primeira derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- Pontos estacionários: $f'(x) = 0 \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

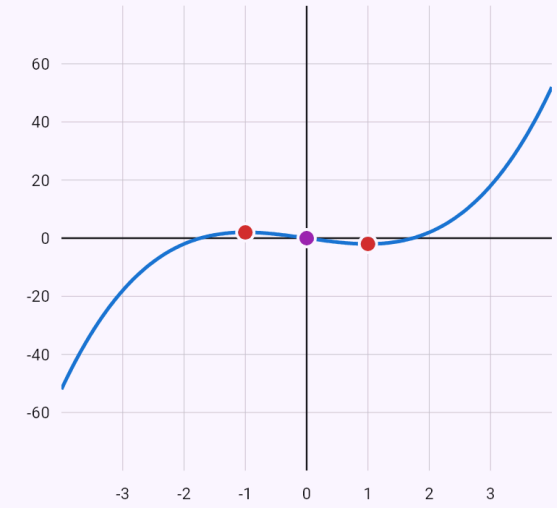
	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  A função é crescente em $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$ e decrescente em $[-1,\ 1]$
- Em $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – máximo local.
- Em $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – mínimo local.
- Máximo local $[-1;\ 2]$, mínimo local $[1;\ -2]$
- Segunda derivada: $f''(x) = 6x$
- Candidatos a pontos de inflexão: $f''(x) = 0 \Rightarrow\ x = 0$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  A função é convexa em $[0,\ \infty)$ e côncava em $(-\infty,\ 0]$
- Em $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – a primeira derivada não nula (a partir da terceira) é de ordem ímpar: ponto de inflexão.
- Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfico



$y = x^3 - 3x$

Pontos notáveis:

● máximo $(-1;2)$ ● inflexão $(0;0)$ ● mínimo $(1;-2)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Uma função racional – assíntotas.

Enunciado: `x^2/(x - 1)` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty,\, 0] \cup [4,\, \infty)$

Paridade: nem par nem ímpar

Zeros: $[0;\ 0]$

Crescente: $(-\infty,\, 0],\ [2,\, \infty)$

Decrescente: $[0,\, 1),\ (1,\, 2]$

Máximo local: $[0;\ 0]$

Mínimo local: $[2;\ 4]$

Convexa: $(1,\, \infty)$

Côncava: $(-\infty,\, 1)$

Assíntotas: $x = 1,\ y = x + 1$

Passos

- Domínio – condições $x \neq 1$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- O domínio $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ não é simétrico em relação a zero – a função não é par nem ímpar.
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

  A função é positiva para $x \in (1,\, \infty)$ e negativa para $x \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, 1)$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Assíntotas verticais (o limite aí é infinito): $x = 1$
- Assíntota em ±∞: $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – a reta $y = x + 1$
- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Pontos estacionários: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, 2)$	$(2,\, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

  A função é crescente em $(-\infty,\, 0],\ [2,\, \infty)$ e decrescente em $[0,\, 1),\ (1,\, 2]$

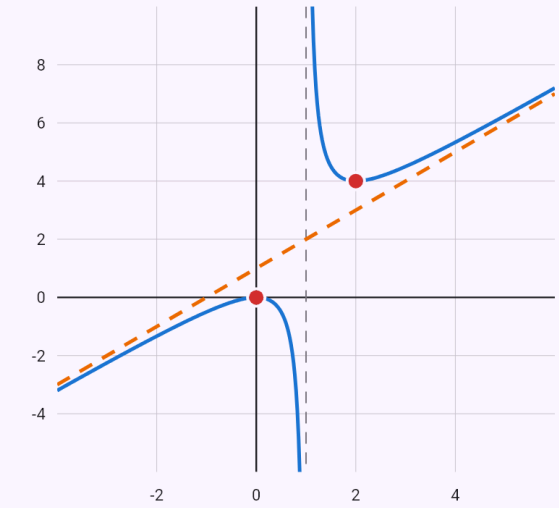
- Em $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.
- Em $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – mínimo local.
- Máximo local $[0;\ 0]$, mínimo local $[2;\ 4]$
- Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- A equação $f''(x) = 0$ não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  A função é convexa em $(1,\, \infty)$ e côncava em $(-\infty,\, 1)$

- A função não tem pontos de inflexão.
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty,\, 0] \cup [4,\, \infty)$

Gráfico



$y = \frac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Pontos notáveis:

● máximo $(0;\, 0)$ ● mínimo $(2;\, 4)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Função periódica – tudo em um período, os resultados com o período.

Enunciado: `sin 2x + 2cos x` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Paridade: nem par nem ímpar

Período: $p = 2\pi$

Zeros: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Crescente: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Decrescente: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexa:
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\right.$

Côncava:
$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\right.\right.$

Pontos de inflexão:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- A função é periódica de período 2π: estudamos em um período (de 0 a 2π) e repetimos os resultados com o período, k ∈ ℤ.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – não é f(x) nem -f(x): a função não é par nem ímpar.
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ou seja $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 2$, ou seja $[0;\ 2]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

A função é positiva para $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

- Uma função periódica (que não é constante) não tem limite em ±∞.
- Primeira derivada: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Pontos estacionários

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(0,\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

A função é crescente em $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

- Máximo local $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, mínimo local $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Segunda derivada: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Candidatos a pontos de inflexão

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$

- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é

convexa, onde é negativa côncava:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right))$	$(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right),\ \frac{3}{2}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

A função é convexa em e côncava em

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right],\ \left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ 2\pi-\right.$$

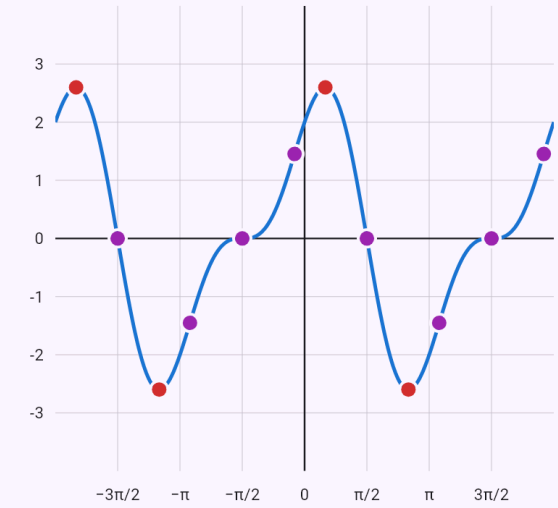
$$\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],\ \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right.$$

- Pontos de inflexão

$$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f)=\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Gráfico



$y=\sin 2x+2\cos x$

Pontos notáveis:

- máximo $\left(-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão $\left(-\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- mínimo $\left(-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão $\left(-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexão $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- inflexão $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- máximo $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- mínimo $\left(\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão $\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexão $\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- inflexão $\left(2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Tangente – assíntotas verticais, imagem $\mathbb{R}$.

Enunciado: `tg x` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Período: $p = \pi$

Zeros: $[k\pi;\ 0]$

Crescente: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Convexa: $\left[k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Côncava: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi\right]$

Pontos de inflexão: $[k\pi;\ 0]$

Assíntotas: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Passos

- Domínio – condições $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- A função é periódica de período π: estudamos em um período (de 0 a π) e repetimos os resultados com o período, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, ou seja $[k\pi;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  A função é positiva para $x \in \left(k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi\right)$
- Uma função periódica (que não é constante) não tem limite em ±∞.
- Limites nos extremos do domínio
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Assíntotas verticais (o limite aí é infinito): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Primeira derivada: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- A equação $f'(x) = 0$ não tem solução – não há pontos estacionários.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

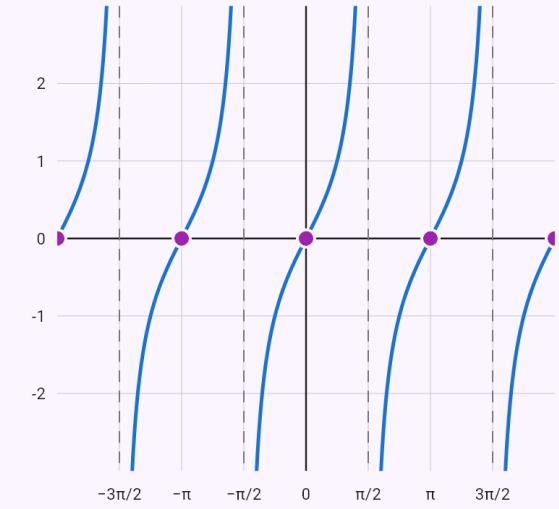
	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  A função é crescente em $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- A função não tem extremos locais.
- Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$
- Candidatos a pontos de inflexão: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  A função é convexa em $\left[k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e côncava em $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi\right]$
- Pontos de inflexão: $[k\pi;\ 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfico



$y = \mathrm{tg}\, x$

Pontos notáveis:

- inflexão $(-2\pi; 0)$
- inflexão $(-\pi; 0)$
- inflexão $(0; 0)$
- inflexão $(\pi; 0)$
- inflexão $(2\pi; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Tangente hiperbólica – assíntotas horizontais y = ±1.

Enunciado: `tanh x` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\operatorname{Im}(f) = (-1,\ 1)$

Paridade: ímpar

Zeros: $[0;\ 0]$

Crescente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty,\ 0]$

Côncava: $[0,\ \infty)$

Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$

Assíntotas: $y = -1,\ y = 1$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  A função é positiva para $x \in (0,\ \infty)$ e negativa para $x \in (-\infty,\ 0)$
- Limites nos extremos do domínio

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- A função não tem assíntotas verticais.
- Assíntota em -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – a reta $y = -1$
- Assíntota em +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – a reta $y = 1$
- Primeira derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- A equação $f'(x) = 0$ não tem solução – não há pontos estacionários.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(-\infty,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

  A função é crescente em $\mathbb{R}$
- A função não tem extremos locais.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Candidatos a pontos de inflexão: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  A função é convexa em $(-\infty,\ 0]$ e côncava em $[0,\ \infty)$
- Em $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – a primeira derivada não nula (a partir da terceira) é de ordem ímpar: ponto de inflexão.
- Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\operatorname{Im}(f) = (-1,\ 1)$

Só a derivada é periódica – os valores dos extremos crescem com k.

Enunciado: `x + 2sin x` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Período: $p = 2\pi$

Zeros: $[0;\ 0]$

Crescente: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Decrescente: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexa: $[\pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$

Côncava: $[2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$

Pontos de inflexão: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- A função não é periódica, mas sua derivada é (período 2π): a monotonia, os extremos e a concavidade se repetem com esse período, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- Limites nos extremos do domínio

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- Primeira derivada: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Pontos estacionários

  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(0,\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3},\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  A função é crescente em $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

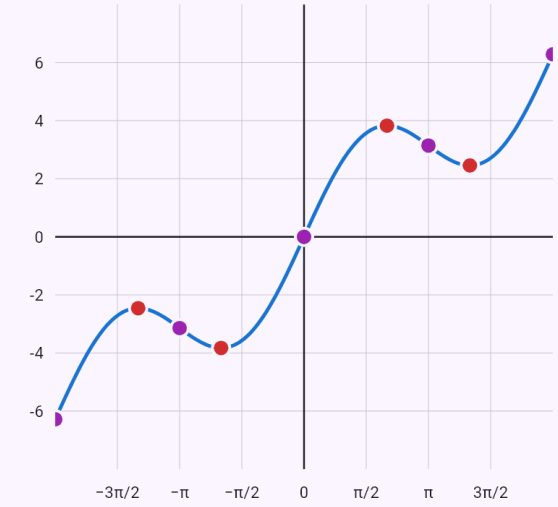
- Máximo local $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, mínimo local $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Segunda derivada: $f''(x) = -2\sin x$
- Candidatos a pontos de inflexão: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(0,\ \pi)$	$(\pi,\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  A função é convexa em $[\pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$ e côncava em $[2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$

- Pontos de inflexão: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Gráfico



$y = x + 2\sin x$

Pontos notáveis:

- inflexão $(-2\pi; -2\pi)$
- máximo $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- inflexão $(-\pi; -\pi)$
- mínimo $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexão $(0; 0)$
- máximo $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexão $(\pi; \pi)$
- mínimo $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexão $(2\pi; 2\pi)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Módulo – bicos, derivadas laterais.

Enunciado: `|x^2 - 1|` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\, \infty)$

Paridade: par

Zeros: $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$

Crescente: $[-1,\, 0]$, $[1,\, \infty)$

Decrescente: $(-\infty,\, -1]$, $[0,\, 1]$

Máximo local: $[0;\ 1]$

Mínimo local: $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$

Convexa: $(-\infty,\, -1]$, $[1,\, \infty)$

Côncava: $[-1,\, 1]$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty,\, -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1,\, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1,\, \infty) \end{cases}$$

- – a função é par (o gráfico é simétrico em relação ao eixo y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, ou seja $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 1$, ou seja $[0;\ 1]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\, -1)$	$(-1,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

A função é positiva para $x \in (-\infty,\, -1) \cup (-1,\, 1) \cup (1,\, \infty)$ e negativa para $x \in \emptyset$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Não há assíntota em +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Pontos estacionários: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Em $x = -1$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), o gráfico tem ali um bico.
- Em $x = 1$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), o gráfico tem ali um bico.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(-\infty,\, -1)$	$(-1,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

A função é crescente em $[-1,\,0],\ [1,\,\infty)$ e decrescente em $(-\infty,\,-1],\ [0,\,1]$

- Em $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[0;\ 1]$, mínimo local $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

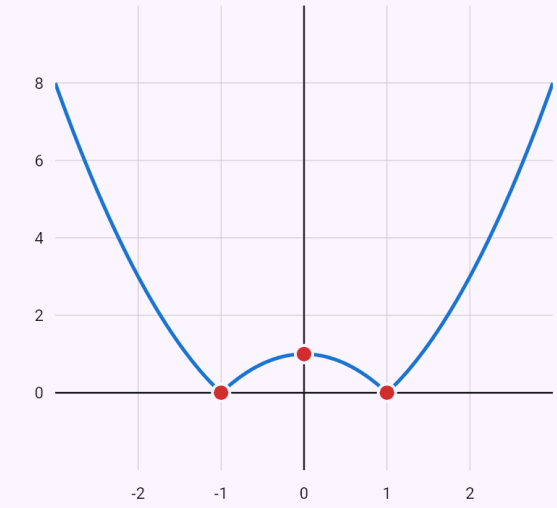
- A equação $f''(x) = 0$ não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty,\,-1)$	$(-1,\,1)$	$(1,\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

A função é convexa em $(-\infty,\,-1],\ [1,\,\infty)$ e côncava em $[-1,\,1]$

- A função não tem pontos de inflexão.
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\,\infty)$

Gráfico



$y = |x^2 - 1|$

Pontos notáveis:

- mínimo $(-1;0)$
- máximo $(0;1)$
- mínimo $(1;0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Raiz cúbica – tangente vertical em zero.

Enunciado: `x^(1/3)` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Zeros: $[0;\ 0]$

Crescente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty,\ 0]$

Côncava: $[0,\ \infty)$

Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 0$, ou seja $[0;\ 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  A função é positiva para $x \in (0,\ \infty)$ e negativa para $x \in (-\infty,\ 0)$
- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, mas $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Não há assíntota em +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, mas $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Primeira derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- A equação $f'(x) = 0$ não tem solução – não há pontos estacionários.
- Em $x = 0$ a derivada é infinita ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$): o gráfico tem ali uma tangente vertical.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

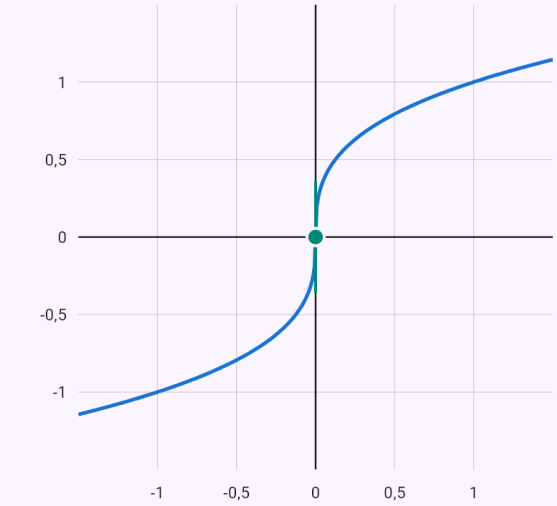
	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  A função é crescente em $\mathbb{R}$
- A função não tem extremos locais.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- A equação $f''(x) = 0$ não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  A função é convexa em $(-\infty,\ 0]$ e côncava em $[0,\ \infty)$
- Pontos de inflexão: $[0;\ 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfico



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Pontos notáveis:

● inflexão $(0;0)$ ● tangente vertical $(0;0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Módulo encaixado – por troços, função par.

Enunciado: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\, \infty)$

Paridade: par

Zeros: $[-3;\ 0]$, $[3;\ 0]$

Crescente: $[-3,\, -1]$, $[0,\, 1]$, $[3,\, \infty)$

Decrescente: $(-\infty,\, -3]$, $[-1,\, 0]$, $[1,\, 3]$

Máximo local: $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$

Mínimo local: $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$

Convexa: $(-\infty,\, -3]$, $[3,\, \infty)$

Côncava: $[-3,\, 0]$, $[0,\, 3]$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty,\, -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3,\, 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0,\, 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3,\, \infty) \end{cases}$$

- – a função é par (o gráfico é simétrico em relação ao eixo y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Interseções com o eixo x: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -3,\ x = 3$, ou seja $[-3;\ 0]$, $[3;\ 0]$
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 3$, ou seja $[0;\ 3]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\, -3)$	$(-3,\, 3)$	$(3,\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

A função é positiva para $x \in (-\infty,\, -3) \cup (-3,\, 3) \cup (3,\, \infty)$ e negativa para $x \in \emptyset$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Não há assíntota em +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+$$

- Pontos estacionários: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ x = 1$
- Em $x = -3$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), o gráfico tem ali um bico.
- Em $x = 0$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), o gráfico tem ali um bico.
- Em $x = 3$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), o gráfico tem ali um bico.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

A função é crescente em $[-3,\ -1],\ [0,\ 1],\ [3,\ \infty)$ e decrescente em $(-\infty,\ -3],\ [-1,\ 0],\ [1,\ 3]$

- Em $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – máximo local.
- Em $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$, mínimo local $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

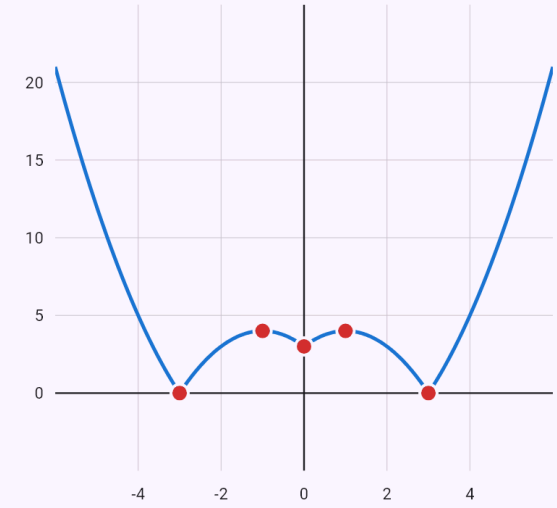
- A equação $f''(x) = 0$ não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

A função é convexa em $(-\infty,\ -3],\ [3,\ \infty)$ e côncava em $[-3,\ 0],\ [0,\ 3]$

- A função não tem pontos de inflexão.
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\ \infty)$

Gráfico



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Pontos notáveis:

- mínimo $(-3; 0)$
- máximo $(-1; 4)$
- mínimo $(0; 3)$
- máximo $(1; 4)$
- mínimo $(3; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Soma de módulos – um troço constante e duas assíntotas oblíquas.

Enunciado: `|x - 2| + |x + 3|` Estudo da função

Resultado

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(f) = [5,\ \infty)$

Paridade: nem par nem ímpar

Crescente: $[2,\ \infty)$

Decrescente: $(-\infty,\ -3]$

Constante: $[-3,\ 2]$

Mínimo local: $f(x) = 5,\ x \in [-3,\ 2]$

Assíntotas: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Passos

- Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty,\ -3) \\ 5, & x \in [-3,\ 2) \\ 2x + 1, & x \in [2,\ \infty) \end{cases}$$

- − não é f(x) nem −f(x): a função não é par nem ímpar.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- A equação $f(x) = 0$ não tem solução – o gráfico não corta o eixo x.
- Interseção com o eixo y: $f(0) = 5$, ou seja $[0;\ 5]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

	$(-\infty,\ \infty)$
$f(x)$	$+$

A função é positiva para $x \in \mathbb{R}$ e negativa para $x \in \emptyset$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.
- Assíntota em -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – a reta $y = -2x - 1$
- Assíntota em +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – a reta $y = 2x + 1$
- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

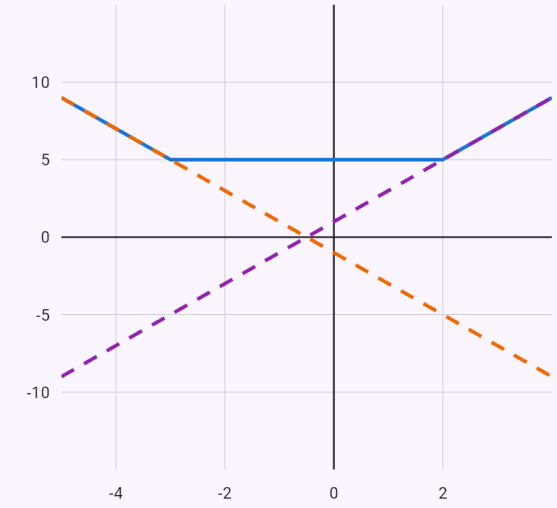
- A equação $f'(x) = 0$ não tem solução – não há pontos estacionários.
- Em $x = -3$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), o gráfico tem ali um bico.
- Em $x = 2$ não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), o gráfico tem ali um bico.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

	$(-\infty,\ -3)$	$(-3,\ 2)$	$(2,\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

A função é crescente em $[2,\ \infty)$ e decrescente em $(-\infty,\ -3]$. Em $[-3,\ 2]$ é constante (f' = 0).

- Mínimo local $f(x) = 5,\ x \in [-3,\ 2]$, sem máximo local.
- Segunda derivada: $f''(x) = 0$
- A segunda derivada é zero – o gráfico é (parte de) uma reta, nem convexo nem côncavo.
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites: $\mathrm{Im}\,(f) = [5,\ \infty)$

Gráfico



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

Extremos absolutos num intervalo – pontos estacionários e extremidades.

Enunciado: `extremos de x^3 - 3x em [-2; 3]`

Resultado

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

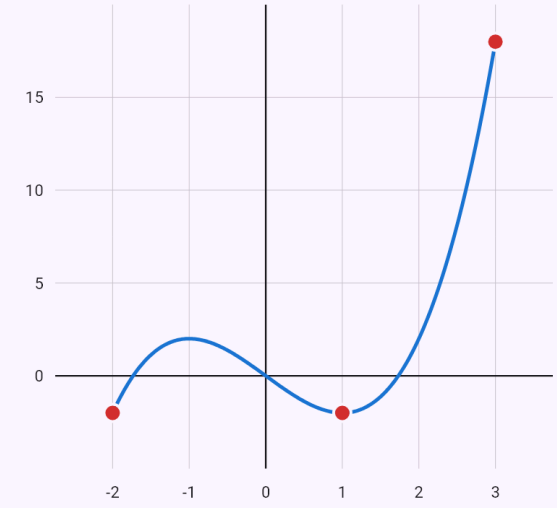
Passos

- A derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Pontos estacionários ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; todos estão no intervalo $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Uma função contínua atinge num intervalo fechado o seu maior e menor valor (teorema de Weierstrass) – num ponto estacionário, num ponto sem derivada ou numa extremidade. Comparamos os valores

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- O maior valor em $\langle -2;\ 3 \rangle$ é $f(3) = 18$, o menor $f(-2) = f(1) = -2$

Gráfico



$y = x^3 - 3x$

Pontos notáveis:

- máximo $(3; 18)$
- mínimo $(-2; -2)$
- mínimo $(1; -2)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

A inversa de uma função racional linear, com verificação.

Enunciado: `função inversa f(x) = (2x+1)/(x-3)`

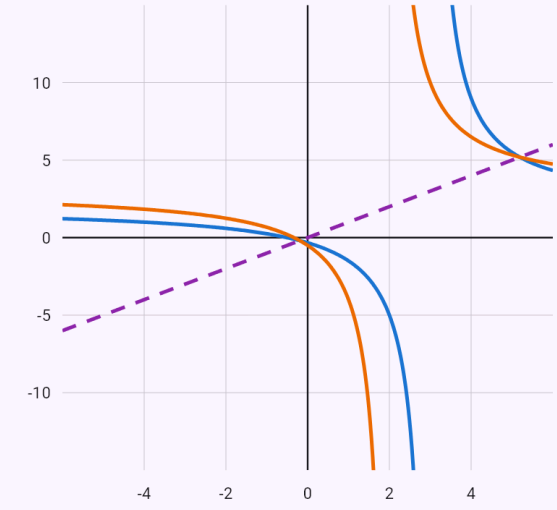
Resultado

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$$

Passos

- A função $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$, condições do domínio: $x - 3 \neq 0$
- Resolvemos $y = f(x)$ em ordem a x: $y = \frac{2x + 1}{x - 3} \Rightarrow x = \frac{3y + 1}{y - 2}$
- Trocamos x e y: $f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$. O domínio da inversa é o contradomínio de f: $x - 2 \neq 0$
- Verificação pela composição: $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{3x + 1}{x - 2}\right) = x$ ✓

Gráfico



$y = \frac{2x + 1}{x - 3}$

f^{-1}

$y = x$

O gráfico da inversa é simétrico ao de f em relação à reta y = x.

O vértice de uma parábola completando o quadrado.

Enunciado: `vértice da parábola y = x^2 - 4x + 7`

Resultado

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Passos

- Completamos o quadrado:
  $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Vértice $V = [2;\ 3]$, eixo $x = 2$; a parábola tem a concavidade para cima, conjunto imagem $H(f) = \langle 3; \infty)$
- O gráfico é o de $y = x^2$ transladado pelo vetor $(2;\ 3)$

Uma sinusoide comprimindo, deslocando e esticando.

Enunciado: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

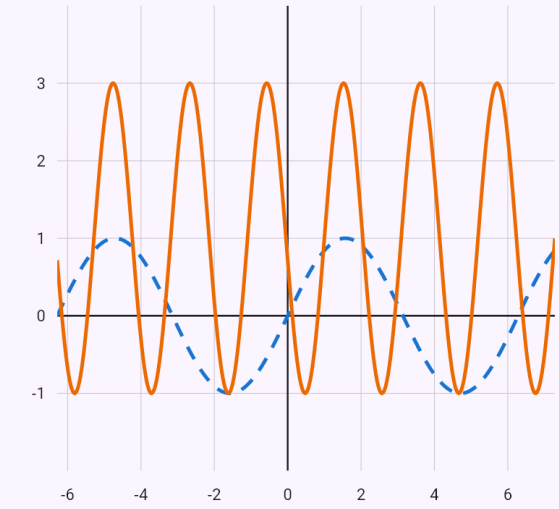
Resultado

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Passos

- Partimos do gráfico da função básica $y = \sin x$
- Comprimimos o gráfico na direção do eixo x com o fator 3 (para o eixo y): $y = \sin\left(3x\right)$
- Deslocamos o gráfico 1 para a direita na direção do eixo x: $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Esticamos o gráfico na direção do eixo y com o fator 2: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Deslocamos o gráfico 1 para cima na direção do eixo y: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Gráfico



A tracejado o gráfico da função básica, a cheio o gráfico resultante.

Uma raiz deslocada e refletida em relação ao eixo x.

Enunciado: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

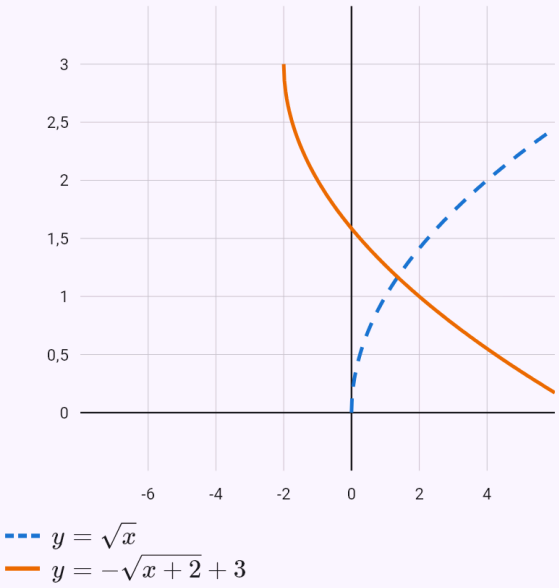
Resultado

$$y = -\sqrt{x + 2} + 3$$

Passos

- Partimos do gráfico da função básica $y = \sqrt{x}$
- Deslocamos o gráfico 2 para a esquerda na direção do eixo x: $y = \sqrt{x + 2}$
- Refletimos o gráfico em relação ao eixo x: $y = -\sqrt{x + 2}$
- Deslocamos o gráfico 3 para cima na direção do eixo y: $y = -\sqrt{x + 2} + 3$

Gráfico



A tracejado o gráfico da função básica, a cheio o gráfico resultante.

Uma função composta f(g(x)).

Enunciado: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Resultado

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Passos

- Na função externa f substituímos x pela função interna g: $f(g(x)) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Limitações conhecidas

- Uma função que nem tem derivada periódica (x·sin x) é estudada só numericamente em ⟨−2π; 2π⟩ e sem o período; as funções trigonométricas inversas (arcsin, arctan) ainda não são suportadas.
- Extremos absolutos só num intervalo fechado e para uma função contínua; a inversa só onde uma fórmula a exprime – para uma função não injetiva (x²) ainda não se procura a inversa numa parte do domínio.

28. Funções de várias variáveis

Derivadas parciais (primeiras e segundas, mistas) e o gradiente de uma função de duas ou três variáveis – ao derivar em ordem a uma variável, as outras são constantes.

Extremos locais de uma função de duas variáveis: os pontos estacionários de f_x = 0, f_y = 0, cada um decidido pelo determinante da matriz hessiana D = f_xx·f_yy − f_xy² (mínimo, máximo, sela). Extremos condicionados com uma restrição («extremos de xy, x + y = 1») pelo método de Lagrange e o hessiano orlado.

A derivada direcional (o gradiente vezes um vetor unitário), a diferencial total com um valor aproximado e o plano tangente a uma superfície. Um integral duplo introduz-se com limites iterados ou como região de desigualdades; a aplicação divide a região em partes normais, mostra o integral interior e o exterior e desenha a região; o seletor 3D mostra a superfície da função integranda sobre ela. Os chips sob o resultado mudam a ordem de integração e passam a coordenadas polares.

Análise vetorial: a divergência, o rotacional (num campo plano um único número ∂Q/∂x − ∂P/∂y), o laplaciano e o potencial de um campo conservativo – a aplicação verifica primeiro que o rotacional é zero, depois encontra φ integrando as componentes uma a uma e verifica ∇φ = F. Um campo introduz-se como vetor (P; Q; R) ou (P; Q), também com os vetores unitários i, j, k ou com nome «F = …» numa linha à parte. Num campo plano o gráfico mostra as setas do campo e as curvas de nível do potencial. Os chips sob o resultado alternam entre a divergência, o rotacional e o potencial do mesmo campo.

Integrais de linha: de primeira espécie ∫_C f ds (comprimento de uma curva, massa de um fio) e de segunda espécie ∫_C F·dr (trabalho de uma força, circulação $\oint$ ao longo de uma curva fechada). A curva dá-se por uma parametrização r(t) ou um modelo – segmento, circunferência, gráfico y = f(x), linha poligonal; os passos mostram o vetor tangente, a substituição no campo e o integral em t. Para um campo conservativo a aplicação verifica o resultado pelo potencial φ(B) − φ(A) (independência do caminho), para uma curva plana fechada (circunferência, elipse, polígono convexo) pelo teorema de Green – calcula também o integral duplo sobre a região interior. Os chips sob o resultado escolhem o método principal. O formulário «Integral de linha» (secção «Aplicações», área Cálculo multivariável) oferece modelos de curva; o gráfico mostra a curva com a sua orientação sobre as setas do campo e a região do teorema de Green, uma curva do espaço em 3D, que se roda com o dedo.

Integrais triplos: por limites iterados, sobre um sólido de inequações (∫∫∫_V, também a partir de uma foto) ou com o formulário «Integral tripla» (secção «Aplicações», área Cálculo multivariável) com os modelos paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, sólido entre gráficos e inequações. A aplicação descreve o sólido como uma região normal – a variável mais interna entre duas superfícies sobre a projeção – e calcula três integrais seguidos (teorema de Fubini). Em coordenadas cilíndricas e esféricas mostra a substituição com o jacobiano (r, ρ² sin θ) e os limites nas novas variáveis; quando as coordenadas

cartesianas não dão um resultado exato, passa a elas sozinha e, para uma esfera, um cilindro ou x² + y² no enunciado, um chip propõe-nas. O formulário calcula também o volume, a massa com uma densidade ρ, o centroide e o momento de inércia em relação a um eixo. Um gráfico 3D rotativo mostra o sólido.

As letras além de x, y, z (um raio r, uma altura h, arestas a, b, c) são parâmetros positivos: o resultado é uma fórmula, por exemplo V = 4/3 πr³ para a bola ball(r) – ao lado do raio r a coordenada cilíndrica escreve-se ϱ – ou V = abc para um paralelepípedo. A aplicação verifica a fórmula numericamente para vários valores dos parâmetros; a imagem 3D do sólido é desenhada para o valor 1.

Integrais de superfície: de primeira espécie ∬_S f dS (área de uma superfície, massa de uma casca) e de segunda espécie – o fluxo ∬_S F·n dS. A superfície dá-se por um modelo – um gráfico z = g(x, y) sobre uma região D, uma esfera, uma semiesfera, um cilindro, um cone (toda a superfície com os discos ou só a superfície lateral) – ou por uma parametrização r(u, v). Os passos mostram os vetores tangentes r_u, r_v, o vetor normal r_u × r_v com a sua orientação (para fora numa superfície fechada, para cima num gráfico, senão pela parametrização; a escolher outward, inward, up, down), o elemento de superfície e o integral duplo sobre os parâmetros; uma superfície fechada soma-se por partes. O fluxo através de uma superfície fechada é verificado pelo teorema de Gauss (integral triplo da divergência), o fluxo de um rotacional pelo teorema de Stokes – o integral de linha ao longo da fronteira; os chips sob o resultado mudam o método principal. O formulário «Integral de superfície» (secção «Aplicações», área Cálculo multivariável) oferece modelos de superfície; um gráfico 3D rotativo mostra a superfície com as normais, as setas do campo e a fronteira.

Fios e cascas: os formulários do integral de linha e de superfície (a opção «O que calcular») e a notação quantity=mass / centroid / inertia calculam a massa de um fio ou de uma casca com densidade f (vazia = 1), o centroide e o momento de inércia em relação a um eixo (axis=x, y, z). O planímetro lineint(area; C) calcula a área dentro de uma curva plana fechada como ½∮ x dy − y dx e verifica-a pelo teorema de Green.

Como introduzir

`derivadas parciais x^2 y + y^3`	Todas as primeiras derivadas parciais (com «segundas» as segundas).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Uma derivada parcial (também \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	O gradiente.
`extremos de x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Extremos locais de uma função de duas variáveis.

`extremos de xy, x + y = 1`	Extremos condicionados – a função e, depois de uma vírgula, a restrição.
`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Derivada direcional: a função, o ponto, a direção (também por palavras).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Diferencial total; o ponto e os acréscimos h são opcionais (também por palavras).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Plano tangente num ponto, para z = f(x, y) ou F(x, y, z) = 0 (também por palavras).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Integral duplo com limites iterados (também \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Integral duplo sobre uma região de desigualdades (também \iint_D ..., D: ...); pode acrescentar order=dxdy ou polar.
`div(x y; y z; z x)`	A divergência de um campo (também ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, por extenso «divergência»).
`∇×(y z; x z; x y)`	O rotacional (também rot, curl, \nabla \times); num campo (P; Q) um único número.
`Δ(x^2 y + y^3)`	O laplaciano de uma função de duas ou três variáveis (também laplace(...), ∇², \Delta).
`potencial (2x + y; x + 2y)`	O potencial de um campo conservativo (também potential(...)); o campo pode ter nome: «div F, F = (y; x; 0)».
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Um integral de linha – um campo (P; Q) ou uma função f, depois a curva: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); também cw (sentido horário), method=green / method=potential (também por palavras «integral de linha … ao longo de …»). Depois da curva também quantity=mass / centroid / inertia (com axis=…); area em vez da função calcula a área dentro de uma curva fechada.

`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	A massa de um fio com densidade f, quantity=centroid o seu centroide, quantity=inertia o seu momento de inércia (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	O planímetro – a área dentro de uma curva plana fechada a partir do integral ao longo da fronteira (teorema de Green).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	De uma foto ∮_C ou ∫_C com P dx + Q dy, F·dr ou f ds; a curva depois de uma vírgula ou na linha seguinte (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Um integral de primeira espécie – a curva paramétrica com o intervalo do parâmetro (também t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Um integral triplo – a função e depois o sólido por inequações ou por um modelo ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); coordenadas cart, cyl, sph, a ordem order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (com axis=x). Por palavras «integral tripla de z sobre V: …», «volume do sólido …», «massa do sólido … com densidade …», «centroide do sólido …», «momento de inércia do sólido … em relação ao eixo z».
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	A partir de uma foto ∭ (\iiint_V) com dV ou dx dy dz; o sólido depois de uma vírgula (V: …) ou sob o integral.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Por limites iterados – três integrais seguidos, os diferenciais no fim ou logo a seguir ao seu integral.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Um integral de superfície – uma função f, um campo (P; Q; R) ou curl(P; Q; R), depois a superfície: graph(z = …; desigualdades de D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (só a superfície lateral), closed (semiesfera com a base), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. Por palavras «integral de superfície de … sobre …», «fluxo de … através de …». Com uma

	função f também quantity=mass / centroid / inertia (com axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	De uma foto ∬_S ou ∯_S com f dS, F·dS ou F·n dS; a superfície após uma vírgula ou na linha seguinte: S: x² + y² + z² = R² (com z ≥ 0 uma semiesfera), x² + y² = R² com limites de z (superfície lateral de um cilindro), z = g(x, y) com desigualdades, r(u, v) com os intervalos dos parâmetros.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	O fluxo de um rotacional (∇ × F, rot F, curl F) – o campo nomeado à parte; verificação pelo teorema de Stokes.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	A massa, o centroide ou o momento de inércia de uma casca com densidade superficial f.

Exemplos

Segundas derivadas parciais, também a mista.

Enunciado: `segundas derivadas parciais x^2 y + y^3`

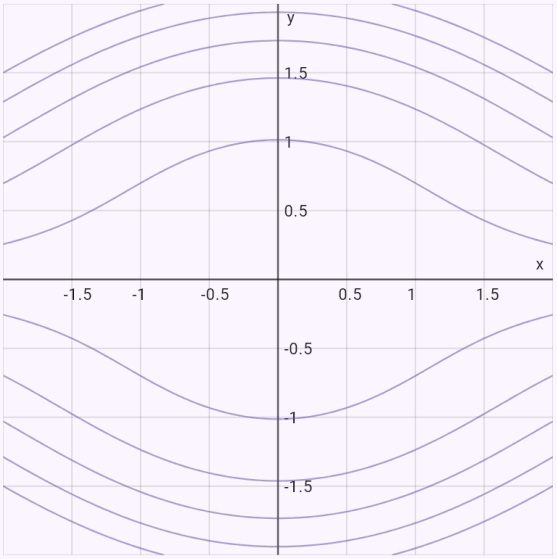
Resultado

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Passos

- A derivada parcial em ordem a x – as outras variáveis são constantes: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- A derivada parcial em ordem a y – as outras variáveis são constantes: $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- A derivada parcial em ordem a xx – as outras variáveis são constantes: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- A derivada parcial em ordem a xy – as outras variáveis são constantes: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- A derivada parcial em ordem a yy – as outras variáveis são constantes: $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Gráfico



Curvas de nível de f.

Extremos locais – um ponto de sela e um mínimo.

Enunciado: `extremos de x^3 - 3xy + y^3`

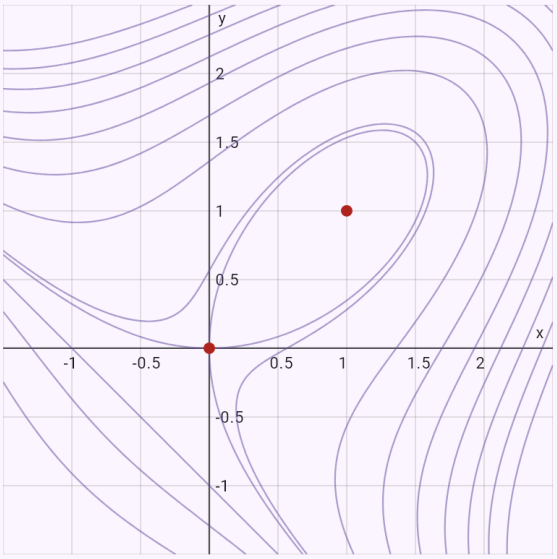
Resultado

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Passos

- A derivada parcial em ordem a x – as outras variáveis são constantes: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- A derivada parcial em ordem a y – as outras variáveis são constantes: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Os pontos estacionários $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ resolvem o sistema em que ambas as derivadas parciais são nulas
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- As segundas derivadas parciais $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ e o determinante da matriz hessiana
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- Em $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – um ponto de sela, sem extremo ($f(0;\ 0) = 0$).
- Em $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$ – um mínimo local $f(1;\ 1) = -1$

Gráfico



Curvas de nível de f.

Um extremo condicionado pelo método de Lagrange.

Enunciado: `extremos de xy, x + y = 1`

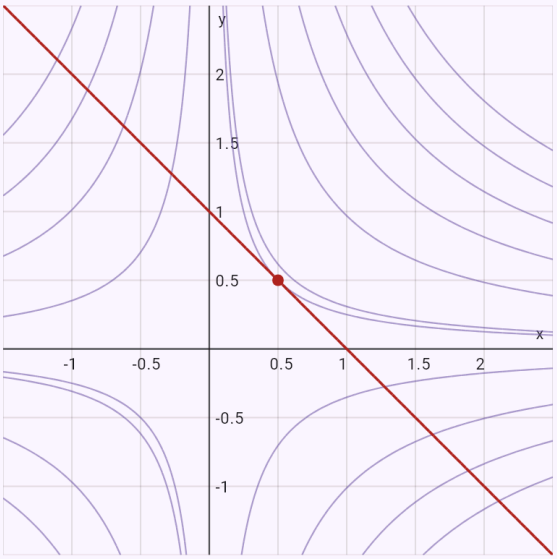
Resultado

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Passos

- A função de Lagrange com o multiplicador λ: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. As suas derivadas parciais são nulas e a restrição verifica-se
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Candidatos a extremo condicionado (soluções do sistema): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- Em $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ ($\lambda = \frac{1}{2}$) o hessiano orlado é positivo – um máximo local condicionado $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Gráfico



Curvas de nível de f.

A derivada direcional e o maior crescimento.

Enunciado: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

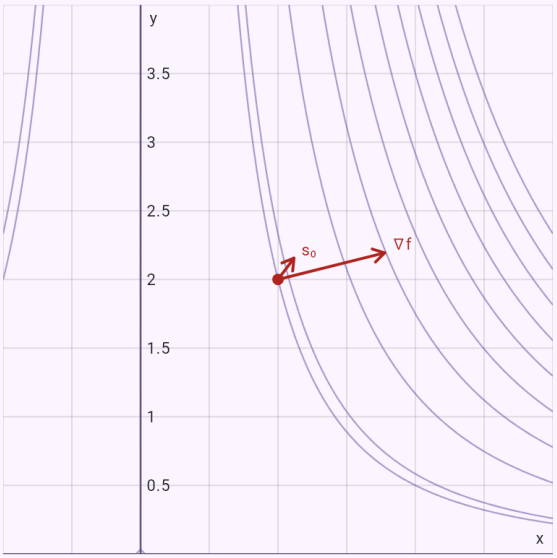
Resultado

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Passos

- A derivada parcial em ordem a x – as outras variáveis são constantes: $f_x = 2xy$
- A derivada parcial em ordem a y – as outras variáveis são constantes: $f_y = x^2$
- Convertemos a direção num vetor unitário: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- O gradiente no ponto $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- A derivada direcional é o produto escalar do gradiente pelo vetor unitário $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- O maior crescimento segue o gradiente, com módulo $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Gráfico



Curvas de nível de f. A seta ∇f aponta na direção de maior crescimento.

O plano tangente de um paraboloide.

Enunciado: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

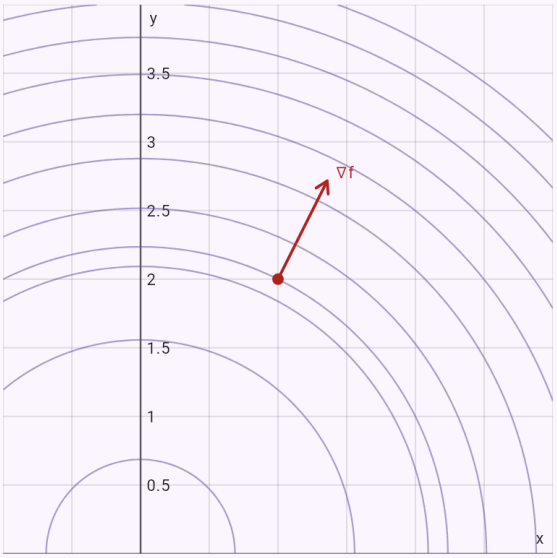
Resultado

$$z = 2x + 4y - 5$$

Passos

- A derivada parcial em ordem a x – as outras variáveis são constantes: $f_x = 2x$
- A derivada parcial em ordem a y – as outras variáveis são constantes: $f_y = 2y$
- A terceira coordenada do ponto de tangência: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Substituímos no plano tangente $z - z_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)$: $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- O vetor normal do plano: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Gráfico



Curvas de nível de f. A seta ∇f aponta na direção de maior crescimento.

Um integral duplo sobre um triângulo.

Enunciado: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Resultado

$$\frac{1}{8}$$

Ordem de integração:

✓ dy dx | dx dy

Coordenadas:

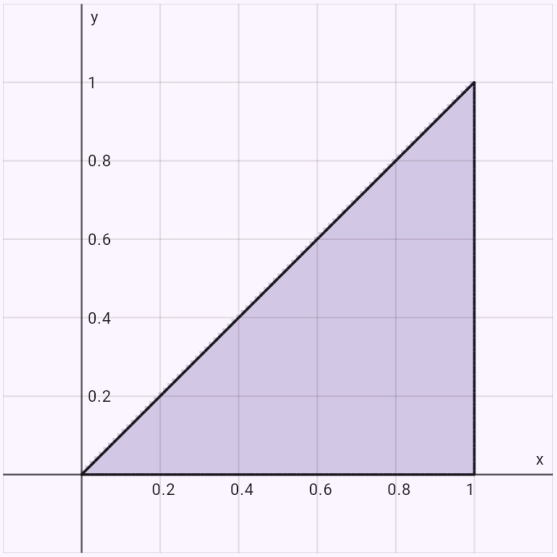
✓ Cartesianas | Polares

Passos

- Descrevemos a região como região normal: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- O integral interior em ordem a y (a outra variável é constante): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- O integral exterior em ordem a x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Gráfico

✓ 2D | 3D



A região de integração.

O integral interior não é elementar – a aplicação troca a ordem sozinha.

Enunciado: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Resultado

$$\frac{e-1}{2}$$

Ordem de integração:

✓ dx dy | dy dx

Coordenadas:

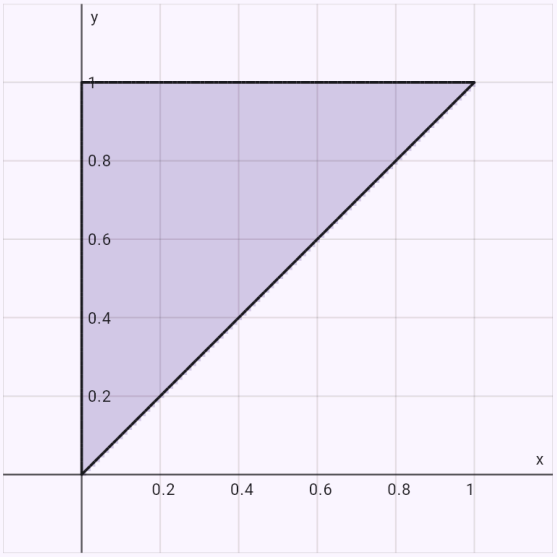
✓ Cartesianas | Polares

Passos

- O integral interior em ordem a y não tem primitiva elementar, por isso trocamos a ordem de integração.
- Descrevemos a região como região normal: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado: $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- O integral interior em ordem a x (a outra variável é constante): $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- O integral exterior em ordem a y: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Gráfico

✓ 2D | 3D



A região de integração.

Um quarto de círculo em coordenadas polares.

Enunciado: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Resultado

$$\frac{\pi}{8}$$

Coordenadas:

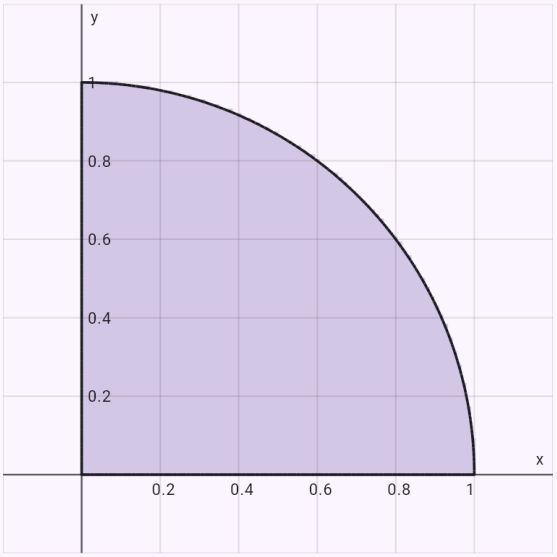
Cartesianas | ✓ Polares

Passos

- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, sendo r o jacobiano da transformação. A função integranda: $f \cdot r = r^3$
- A região em coordenadas polares: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- O integral interior em ordem a r (a outra variável é constante): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- O integral exterior em ordem a φ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Gráfico

✓ 2D | 3D



A região de integração.

A divergência de um campo no espaço como soma de três derivadas parciais.

Enunciado: `div(x y; y z; z x)`

Resultado

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Para este campo calcular:

✓ divergência | rotacional | potencial

Passos

- O campo vetorial e as suas componentes: $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- A derivada parcial em ordem a x – as outras variáveis são constantes: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = y$
- A derivada parcial em ordem a y – as outras variáveis são constantes: $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = z$
- A derivada parcial em ordem a z – as outras variáveis são constantes: $\dfrac{\partial R}{\partial z} = x$
- A divergência é a soma das derivadas parciais das componentes, cada uma em relação à «sua» variável $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

O rotacional de um vórtice plano – as setas giram em torno da origem.

Enunciado: `rot(-y; x)`

Resultado

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

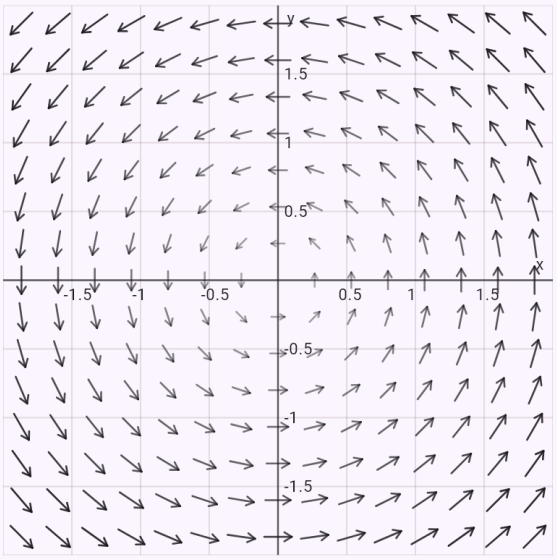
Para este campo calcular:

divergência | ✓ rotacional | potencial

Passos

- O campo vetorial e as suas componentes: $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Num campo plano o rotacional é um único número – a componente z, ∂Q/∂x − ∂P/∂y $(\nabla \times \vec{F})_z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Gráfico



As setas mostram a direção e a intensidade do campo (mais longas e escuras = mais intenso).

Uma função harmónica – o laplaciano é zero.

Enunciado: `Δ(x^2 - y^2)`

Resultado

$$\Delta f = 0$$

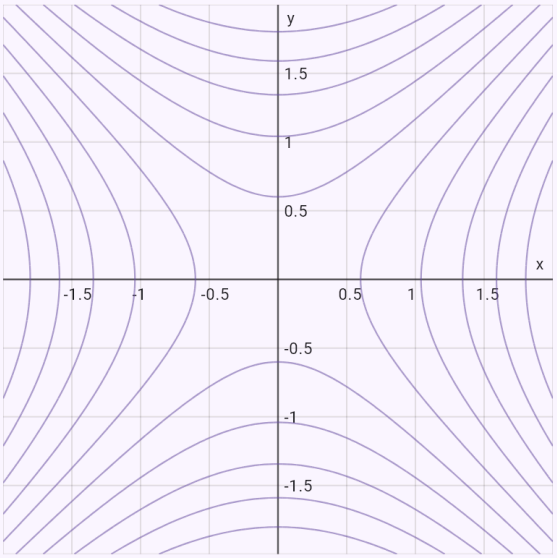
Para esta função calcular:

✓ laplaciano Δf | gradiente ∇f

Passos

- A primeira e a segunda derivada parcial em relação a x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- A primeira e a segunda derivada parcial em relação a y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- O laplaciano é a soma das segundas derivadas parciais:
  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – a função é harmónica.

Gráfico



Curvas de nível de f.

O potencial à maneira escolar: P integrada em x, comparada com Q, verificação; gráfico com

equipotenciais.

Enunciado: `potential(2x y; x^2)`

Resultado

$$\varphi = x^2 y + C$$

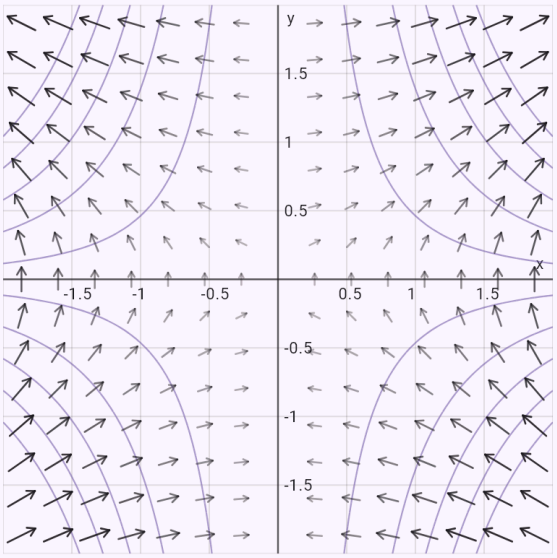
Para este campo calcular:

divergência | rotacional | ✓ potencial

Passos

- O campo vetorial e as suas componentes:
  $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- O rotacional é zero (no plano ∂Q/∂x = ∂P/∂y), o campo é conservativo e faz sentido procurar um potencial:
  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Procuramos φ com ∇φ = F. Integramos P em relação a x; a constante de integração pode depender das outras variáveis: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Derivamos φ em relação a y e comparamos com a componente Q – fica a derivada da «constante»
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- Integramos a «constante» em relação a y; a nova só depende das variáveis restantes, no fim é um número C:
  $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Verificação – o gradiente do potencial é o campo dado:
  $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Gráfico



As setas mostram a direção e a intensidade do campo (mais longas e escuras = mais intenso). Curvas de nível do potencial φ (equipotenciais) – o campo é perpendicular a elas em toda a parte.

O trabalho de um campo conservativo – por parametrização, verificado pelo potencial φ = x²y.

Enunciado: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Resultado

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Calcular:

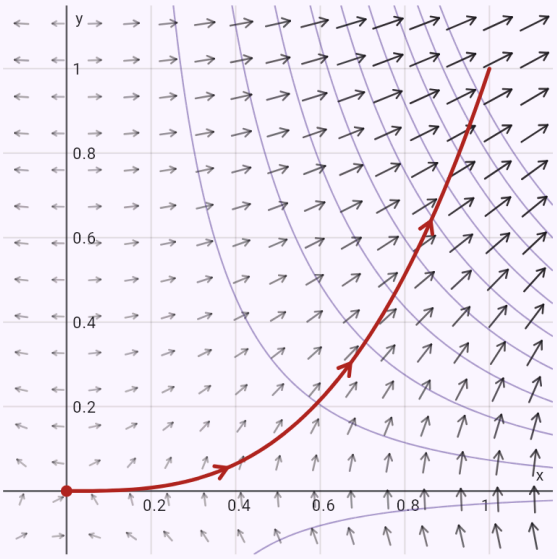
✓ por parametrização | pelo potencial

Editar no formulário

Passos

- Integral de linha de segunda espécie de um campo vetorial ao longo da curva orientada C (por exemplo o trabalho de uma força ao longo de um caminho):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametrização da curva: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro: $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Verificação: o campo é conservativo, tem um potencial φ e o integral é independente do caminho – basta a diferença φ(B) − φ(A)
  $\varphi = x^2 y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial). As setas mostram a direção e a intensidade do campo (mais longas e escuras = mais intenso). Curvas de nível do potencial φ (equipotenciais) – o campo é perpendicular a elas em toda a parte.

Uma circulação ao longo da circunferência unitária a partir de uma foto, verificada pelo teorema de

Green em coordenadas polares.

Enunciado: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Resultado

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Calcular:

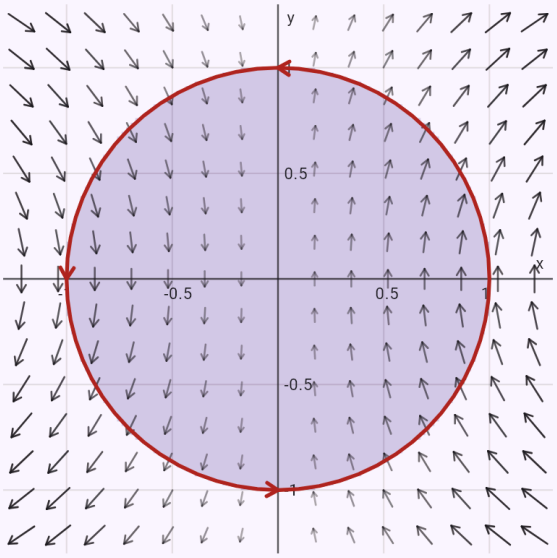
por parametrização | pelo teorema de Green

Editar no formulário

Passos

- A curva é fechada – a integral de segunda espécie ao longo dela é a circulação do campo:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- A circunferência de centro S e raio r, percorrida uma vez (parametrização pelo ângulo t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro: $\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Verificação pelo teorema de Green: a curva está orientada positivamente (sentido anti-horário), o integral ao longo dela é igual ao integral duplo sobre a região D interior
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- A região D dentro da curva – o integral duplo sobre ela: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, sendo r o jacobiano da transformação. A função integranda: $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- A região em coordenadas polares: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- O integral interior em ordem a r (a outra variável é constante)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -$
- O integral exterior em ordem a φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Os dois lados do teorema de Green coincidem:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial). As setas mostram a direção e a intensidade do campo (mais longas e escuras = mais intenso). Sombreada, a região D dentro da curva do teorema de Green.

O comprimento de uma parábola – o integral de primeira espécie de 1.

Enunciado: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Resultado

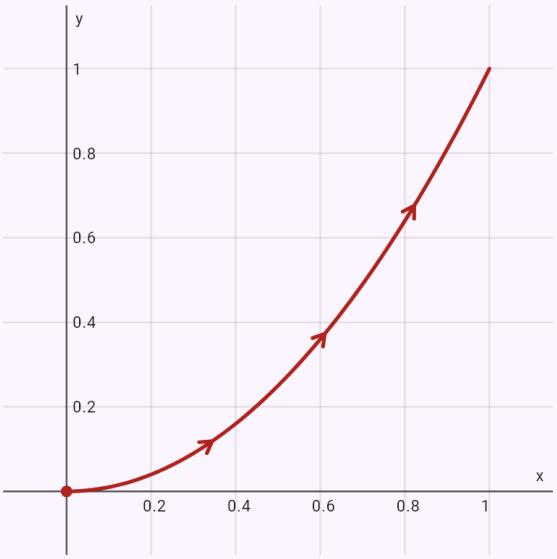
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Editar no formulário

Passos

- Integral de linha de primeira espécie de f ao longo da curva C – somamos f vezes o comprimento ds de pequenos pedaços da curva: $\int_C ds$
- O gráfico de uma função – o próprio x é o parâmetro (parametrização r(x) = (x; f(x))):
  $y = x^2: \quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- A sua norma; o elemento de comprimento de arco é ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Substituímos a parametrização em f e multiplicamos pela norma do vetor tangente:
  $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro
  $$\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$$
- O integral de 1 ds é o comprimento da curva (com uma densidade f em vez de 1 seria a massa de um fio).

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial).

Uma hélice no espaço – um gráfico 3D rotativo com as setas do campo.

Enunciado: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Resultado

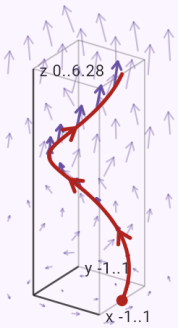
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Editar no formulário

Passos

- Integral de linha de segunda espécie de um campo vetorial ao longo da curva orientada C (por exemplo o trabalho de uma força ao longo de um caminho):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametrização da curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro: $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial). As setas mostram o campo, mais fortes sobre a curva. Rode arrastando o dedo.

O centroide de uma semicircunferência – a massa e dois momentos estáticos.

Enunciado: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Resultado

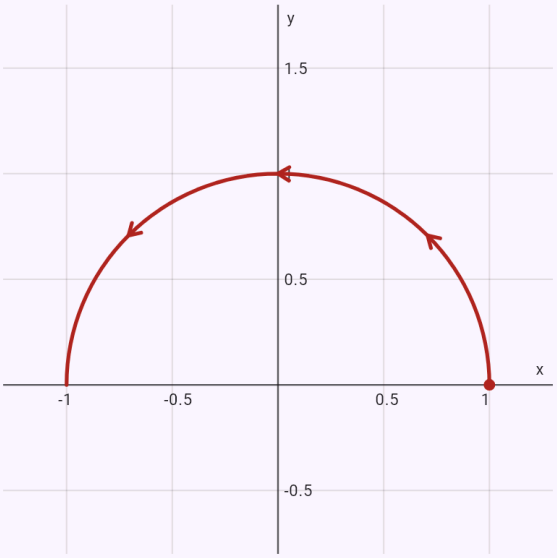
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Editar no formulário

Passos

- Integral de linha de primeira espécie de f ao longo da curva C – somamos f vezes o comprimento ds de pequenos pedaços da curva: $\int_C ds$
- O centro de massa do fio: os momentos estáticos (integral de uma coordenada vezes a densidade) a dividir pela massa, o mesmo para y (e z)
  $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametrização da curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- A sua norma; o elemento de comprimento de arco é ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Substituímos a parametrização em f e multiplicamos pela norma do vetor tangente: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- O momento estático para a coordenada x – o mesmo cálculo com o integrando $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- O momento estático para a coordenada y – o mesmo cálculo com o integrando $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- As coordenadas do centro de massa são os momentos a dividir pela massa: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial).

A área de uma elipse pelo planímetro: ½∮ x dy − y dx = πab.

Enunciado: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Resultado

$$A = 6\pi$$

Calcular:

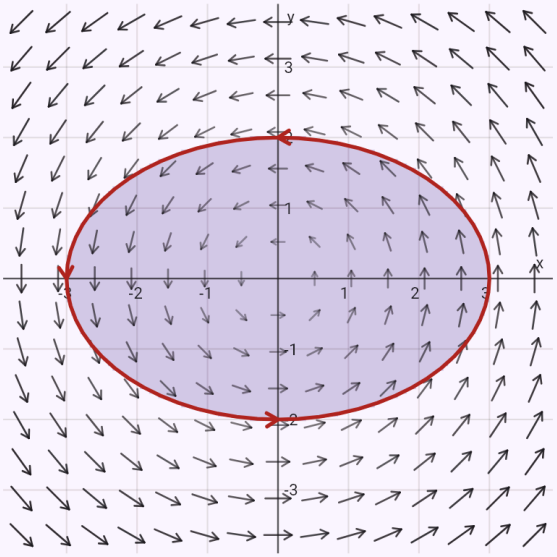
✓ por parametrização | pelo teorema de Green

Editar no formulário

Passos

- A curva é fechada – a integral de segunda espécie ao longo dela é a circulação do campo:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- A área dentro de uma curva fechada como integral de linha ao longo da fronteira (o planímetro) – pelo teorema de Green com Q_x − P_y = 1: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- Parametrização da curva:
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- O vetor tangente – a derivada da parametrização:
  $\vec{r}'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \ldots$
- Resta um integral definido comum sobre o intervalo do parâmetro: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Verificação pelo teorema de Green: a curva está orientada positivamente (sentido anti-horário), o integral ao longo dela é igual ao integral duplo sobre a região D interior
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- A região D dentro da curva – o integral duplo sobre ela:
  $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Descrevemos a região como região normal:
  $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado
  $$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$
- O integral interior em ordem a y (a outra variável é constante)
  $$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- O integral exterior em ordem a x
  $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$
- Os dois lados do teorema de Green coincidem:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

Gráfico



A curva C com setas no sentido da sua orientação (o ponto = o ponto inicial). As setas mostram a direção e a intensidade do campo (mais longas e escuras = mais intenso). Sombreada, a região D dentro da curva do teorema de Green.

A semiesfera superior em coordenadas esféricas – o jacobiano ρ² sin θ, os limites de ρ, θ, φ.

Enunciado: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Resultado

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Calcular em coordenadas:

cartesianas | cilíndricas | ✓ esféricas

Editar no formulário

Passos

- A integral tripla da função sobre o sólido V: $\iiint_V z\,dV$
- Coordenadas esféricas – J = ρ² sin θ é o jacobiano da transformação (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); substituição e integrando

  $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$

  $f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$
- O sólido em coordenadas esféricas:

  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla

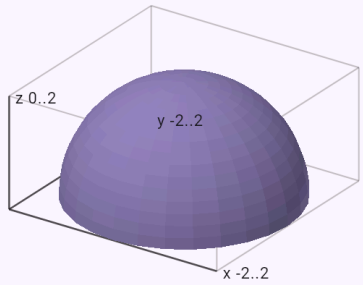
  $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$
- A integral mais interna em relação a ρ (as outras variáveis são constantes)

  $\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$
- A integral do meio em relação a θ

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$
- A integral externa em relação a φ:

  $\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

Gráfico



O sólido V sobre o qual se integra. Rode arrastando o dedo.

Um tetraedro por limites iterados – três integrais seguidos.

Enunciado: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Resultado

$$\frac{1}{24}$$

Calcular em coordenadas:

✓ cartesianas | cilíndricas | esféricas

Editar no formulário

Passos

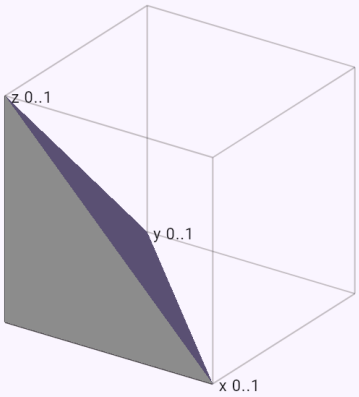
- A integral tripla da função sobre o sólido V: $\iiint_V x \, dV$
- Descrevemos o sólido como uma região normal – z fica entre duas superfícies sobre a projeção do sólido: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le -x-y+1$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes): $\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x-y+1)$
- A integral do meio em relação a y

$$\int_0^{1-x} (x(-x-y+1))\, dy = \left[-\frac{x(x+y-1)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

- A integral externa em relação a x

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Gráfico



O sólido V sobre o qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O volume de um cone em coordenadas cilíndricas.

Enunciado: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Resultado

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Calcular em coordenadas:

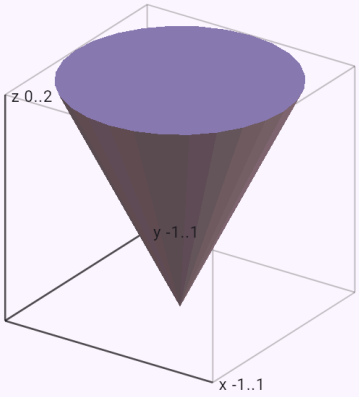
cartesianas | ✓ cilíndricas

Editar no formulário

Passos

- O volume do sólido é a integral tripla de um:
  $V = \iiint_V dV$
- Coordenadas cilíndricas – J = r é o jacobiano da transformação (dV = r dr dφ dz); substituição e integrando
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- O sólido em coordenadas cilíndricas:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 r\,dz\,dr\,d\varphi$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes):
  $\int_{2r}^2 r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- A integral do meio em relação a r
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- A integral externa em relação a φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Gráfico



O sólido V sobre o qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O centroide de uma semiesfera – a massa e três momentos estáticos.

Enunciado: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Resultado

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

O sólido ou a função contém x² + y² + z² – as coordenadas esféricas costumam ser mais simples:

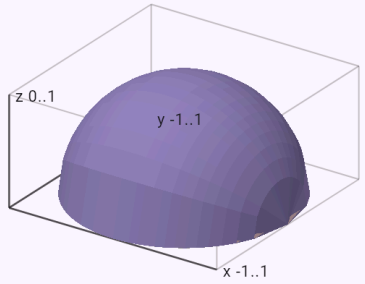
✓ cartesianas | cilíndricas | esféricas

Editar no formulário

Passos

- O centroide do sólido: cada coordenada é um momento estático (a integral da coordenada vezes a densidade) dividido pela massa m, igualmente para y e z:
$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$$
- Descrevemos o sólido como uma região normal – z fica entre duas superfícies sobre a projeção do sólido
$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-}$$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes)
$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- A integral do meio em relação a y
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\frac{}{\sqrt{}}\right.}{2}\right.$$
- A integral externa em relação a x
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- O momento estático para a coordenada x – os mesmos passos com o integrando $x \cdot \rho$
$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- O momento estático para a coordenada y – os mesmos passos com o integrando $y \cdot \rho$
$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- O momento estático para a coordenada z – os mesmos passos com o integrando $z \cdot \rho$
$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- As coordenadas do centroide são os momentos divididos pela massa
$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Gráfico



O sólido V sobre o qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O momento de inércia de um cilindro em relação ao seu eixo.

Enunciado: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Resultado

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Calcular em coordenadas:

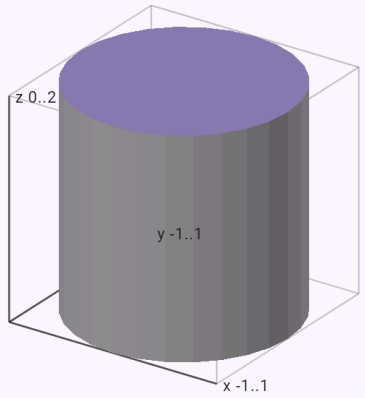
cartesianas | ✓ cilíndricas

Editar no formulário

Passos

- O momento de inércia em relação ao eixo z – a densidade vezes o quadrado da distância d ao eixo:
  $$I_z = \iiint_V d^2 \, dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$
- Coordenadas cilíndricas – J = r é o jacobiano da transformação (dV = r dr dφ dz); substituição e integrando
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- O sólido em coordenadas cilíndricas:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 r^3 \, dz \, dr \, d\varphi$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes): $\int_0^2 r^3 \, dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- A integral do meio em relação a r:
  $$\int_0^1 2r^3 \, dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$$
- A integral externa em relação a φ
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Gráfico



O sólido V sobre o qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O fluxo para fora através de uma esfera – parametrização pelos ângulos θ, φ e verificação pelo

teorema de Gauss.

Enunciado: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Resultado

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Calcular:

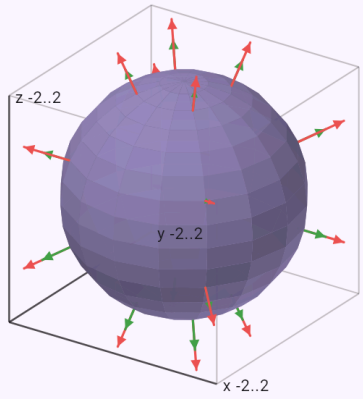
✓ por parametrização | pelo teorema de Gauss

Editar no formulário

Passos

- O fluxo do campo vetorial através da superfície S – um integral de superfície de segunda espécie:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametrização da esfera pelos ângulos θ (a partir do eixo z positivo) e φ (em torno do eixo z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- As derivadas parciais em relação aos parâmetros – os vetores tangentes da superfície
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- O vetor normal (produto vetorial dos vetores tangentes) orientado para fora do sólido
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot si\right.$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor normal (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- O integral duplo sobre o retângulo dos parâmetros
  $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$
- Verificação pelo teorema de Gauss: o fluxo para fora através da superfície fechada é o integral triplo da divergência sobre o sólido interior
- A integral tripla da função sobre o sólido V: $\iiint_V 3\,dV$
- Descrevemos o sólido como uma região normal – z fica entre duas superfícies sobre a projeção do sólido
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla
  $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes)
  $\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$
- A integral do meio em relação a y
  $\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right)dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$
- A integral externa em relação a x
  $\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$
- O teorema de Gauss dá o mesmo valor:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$

Gráfico



A superfície S com as suas normais (verde) e as setas do campo (vermelho). Rode arrastando o dedo.

A área de um paraboloide – o elemento de superfície do gráfico, um integral duplo em coordenadas

polares.

Enunciado: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Resultado

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Editar no formulário

Passos

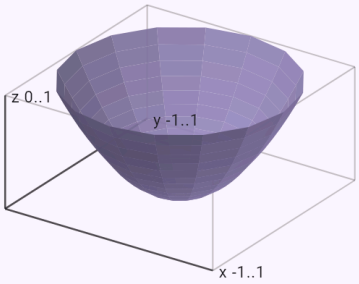
- A área da superfície S é o integral de superfície de um: $\iint_S dS$
- A superfície é o gráfico de z = g(x, y) sobre a região D do plano xy: $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \ x^2 + y^2 \le 1$
- As derivadas parciais de g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- O elemento de superfície do gráfico: $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Substituímos a parametrização em f e multiplicamos pelo elemento de superfície: $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- O integral de superfície sobre um gráfico é um integral duplo sobre a sua projeção D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \ J = r$, sendo r o jacobiano da transformação. A função integranda: $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- A região em coordenadas polares: $0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como integral iterado: $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- O integral interior em ordem a r (a outra variável é constante)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2 + 1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1 + 5\sqrt{}}{12}$$

- O integral exterior em ordem a φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1 + 5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{\left(-1 + \right.}{}$$

Gráfico



A superfície S sobre a qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O fluxo através de um cilindro fechado pelo teorema de Gauss, verificado por partes – superfície lateral

e dois discos.

Enunciado: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Resultado

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$$

Calcular:

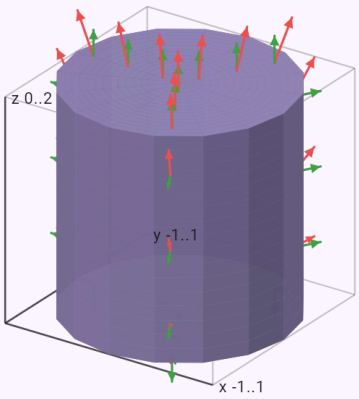
por parametrização | ✓ pelo teorema de Gauss

Editar no formulário

Passos

- O fluxo do campo vetorial através da superfície S – um integral de superfície de segunda espécie: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Pelo teorema de Gauss (da divergência), o fluxo para fora através de uma superfície fechada é igual ao integral triplo da divergência sobre o sólido V interior
- A integral tripla da função sobre o sólido V: $\iiint_V 3\, dV$
- Descrevemos o sólido como uma região normal – z fica entre duas superfícies sobre a projeção do sólido: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Pelo teorema de Fubini, escrevemos como uma integral iterada tripla: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} 3\, dz\, dy\, dx$
- A integral mais interna em relação a z (as outras variáveis são constantes): $\int_0^2 3\, dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- A integral do meio em relação a y $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$
- A integral externa em relação a x $\int_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$
- A verificação pela parametrização da superfície dá o mesmo valor: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$

Gráfico



A superfície S com as suas normais (verde) e as setas do campo (vermelho). Rode arrastando o dedo.

O fluxo de um rotacional através de uma semiesfera – verificado pelo teorema de Stokes ao longo do

equador.

Enunciado: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Resultado

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Calcular:

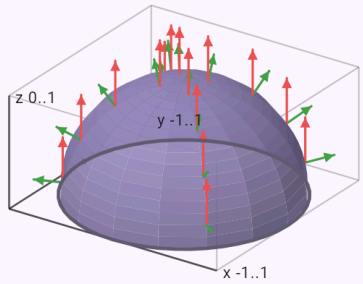
✓ por parametrização | pelo teorema de Stokes

Editar no formulário

Passos

- O fluxo do rotacional através de S – um integral de superfície de segunda espécie, calculável também pelo teorema de Stokes
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- O rotacional do campo
$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Parametrização da semiesfera superior – θ só até π/2
$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- As derivadas parciais em relação aos parâmetros – os vetores tangentes da superfície
$$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- O vetor normal (produto vetorial dos vetores tangentes) orientado para fora do sólido
$$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Substituímos a parametrização no campo e fazemos o produto escalar com o vetor normal (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$
- O integral duplo sobre o retângulo dos parâmetros
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Verificação pelo teorema de Stokes: o fluxo do rotacional é igual à circulação do campo ao longo da fronteira (regra da mão direita)
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- Os lados do retângulo dos parâmetros que se transformam num ponto ou são percorridos duas vezes em sentidos opostos (uma costura) cancelam-se – fica a fronteira real da superfície.
- Uma parte da fronteira
$$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi :\ 0 \to 2\pi$$
- O integral de linha ao longo dela:
$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$
- O teorema de Stokes dá o mesmo valor:
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Gráfico



A superfície S com as suas normais (verde) e as setas do campo (vermelho). A fronteira com uma seta do seu sentido. Rode arrastando o dedo.

Um integral de superfície de primeira espécie sobre uma semiesfera dada pela sua equação.

Enunciado: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Resultado

$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

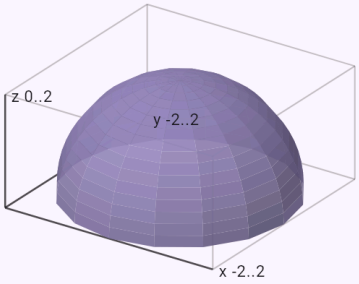
Editar no formulário

Passos

- O integral de superfície de primeira espécie de f sobre a superfície S: $\iint_S z \, dS$
- Parametrização da semiesfera superior – θ só até π/2
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- As derivadas parciais em relação aos parâmetros – os vetores tangentes da superfície
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- O produto vetorial dos vetores tangentes é um vetor normal, a sua norma dá o elemento de superfície dS = | r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Substituímos a parametrização em f e multiplicamos pelo elemento de superfície:
  $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- O integral duplo sobre o retângulo dos parâmetros

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$$

Gráfico



A superfície S sobre a qual se integra. Rode arrastando o dedo.

O momento de inércia de uma casca esférica em relação ao eixo z.

Enunciado: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Resultado

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

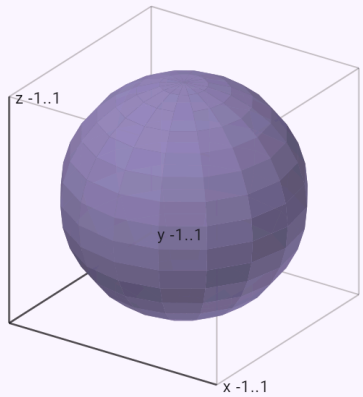
Editar no formulário

Passos

- O integral de superfície de primeira espécie de f sobre a superfície S: $\oiint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- O momento de inércia da casca em relação ao eixo z – a densidade vezes o quadrado da distância d ao eixo: $I_z = \oiint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Parametrização da esfera pelos ângulos θ (a partir do eixo z positivo) e φ (em torno do eixo z) $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- As derivadas parciais em relação aos parâmetros – os vetores tangentes da superfície $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- O produto vetorial dos vetores tangentes é um vetor normal, a sua norma dá o elemento de superfície dS = | r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Substituímos a parametrização em f e multiplicamos pelo elemento de superfície: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- O integral duplo sobre o retângulo dos parâmetros

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Gráfico



A superfície S sobre a qual se integra. Rode arrastando o dedo.

Mapa dos teoremas integrais

Todos os teoremas integrais dizem o mesmo: o integral de uma derivada sobre uma região é igual a um integral sobre a sua fronteira. A fronteira de um segmento são dois pontos, a de uma superfície uma curva, a de um sólido uma superfície fechada; o teorema de Stokes generalizado ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω diz tudo de uma vez. A aplicação usa os teoremas como segundo cálculo e como verificação (os chips sob o resultado); o glossário mostra o mesmo mapa em «Teoremas integrais».

Como introduzir

`∫ f′(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Fórmula de Newton–Leibniz – dentro: a derivada em [a, b], na fronteira: os valores nos extremos.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Teorema do gradiente (potencial, independência do caminho) – dentro: o gradiente ao longo de uma

	curva, na fronteira: o potencial nos extremos.
`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Teorema de Green – dentro: ∂Q/∂x − ∂P/∂y sobre uma região plana, na fronteira: a circulação ao longo da curva fechada.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Teorema de Stokes – dentro: o fluxo do rotacional através de uma superfície, na fronteira: a circulação ao longo do seu contorno.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Teorema de Gauss – dentro: a divergência sobre um sólido, na fronteira: o fluxo para fora através da superfície fechada.

Aplicações físicas dos teoremas integrais

A secção «Aplicações» (áreas Física e Cálculo multivariável, a eletricidade também em Engenharia eletrotécnica, o escoamento e o calor em Engenharia) tem modelos com unidades: a lei de Gauss (esfera, reta, plano), a lei de Ampère e a de Biot-Savart (fio, solenoide, toroide, espira), a indução eletromagnética (fluxo magnético, campo variável, gerador), o condensador (de placas, esférico, cilíndrico), a energia de um campo, o trabalho num campo de forças (gravidade, mola, força de Coulomb), o escoamento de um fluido (caudal, perfil parabólico, equação da continuidade, circulação e rotacional), a condução de calor (parede plana e cilíndrica) e o campo gravitacional pela lei de Gauss.

Os passos começam pela lei integral, depois justificam a simetria (na superfície ou curva escolhida o campo é constante e aponta segundo a normal ou a tangente), mostram o integral calculado, a carga, corrente ou massa envolvida e a fórmula em que se substitui. As leis eletromagnéticas trazem a sua forma diferencial – o termo do glossário «Equações de Maxwell» tem as duas formas lado a lado. O gráfico mostra o campo em função da distância (E(r), B(r), g(r)), um perfil de velocidades, a temperatura numa parede ou a tensão de um gerador.

Exemplos

O campo dentro de uma bola carregada uniformemente – a carga interna Q r³/R³, o campo cresce

linearmente.

Enunciado: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Resultado

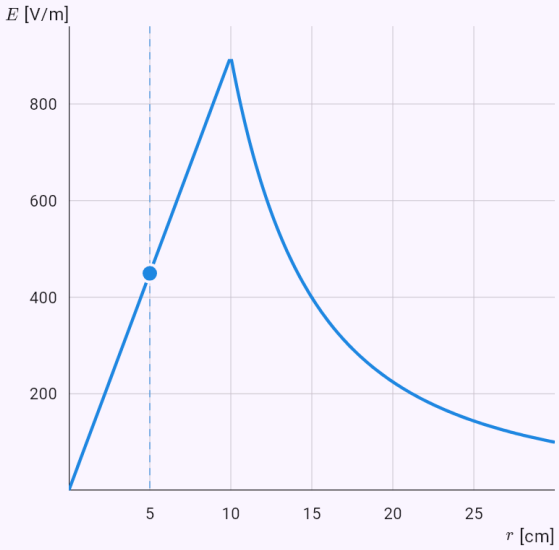
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Passos

- Procuramos E; dados:
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertemos as unidades
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Uma carga Q distribuída simetricamente em torno do centro – na superfície de uma esfera (esfera condutora, casca) ou uniformemente em todo o volume. A superfície gaussiana é uma esfera concêntrica de raio r; fora, a carga age como uma carga pontual. Equação do modelo: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Simetria: o campo é radial e tem a mesma intensidade em cada esfera concêntrica. Tomamos como superfície gaussiana uma esfera de raio r – nela o campo é paralelo à normal e constante.
- O integral calculado: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- A carga interna
  $$Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$$
- Isolamos a grandeza procurada
  $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
- Substituímos
  $$E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

- A mesma lei na forma diferencial (equações de Maxwell): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

O campo magnético de um fio reto pela lei de Ampère ao longo de uma circunferência em torno do

eixo.

Enunciado: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

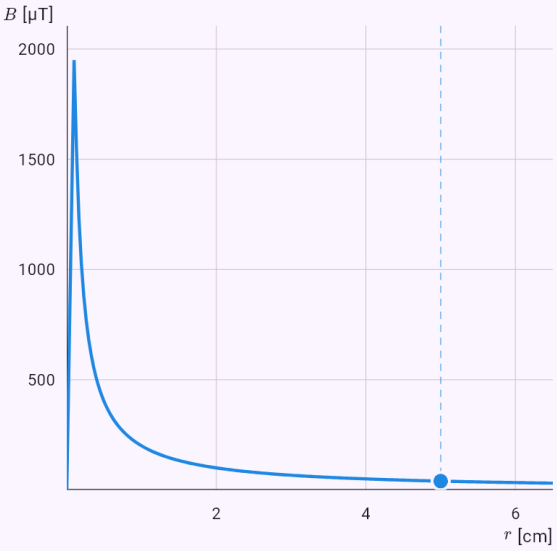
Resultado

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Passos

- Procuramos B; dados:
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertemos as unidades:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Um fio reto e longo de raio R com uma corrente I distribuída uniformemente na seção. A curva é uma circunferência em torno do eixo do fio; dentro do fio ela envolve só parte da corrente. Equação do modelo:
  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Simetria: as linhas de campo são circunferências em torno do eixo do fio; B é tangente a elas e constante numa circunferência de raio r.
- O integral calculado: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- A corrente envolvida: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Substituímos
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- A mesma lei na forma diferencial (equações de Maxwell): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Convertemos as unidades: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

O campo no eixo de uma espira pela lei de Biot-Savart.

Enunciado: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

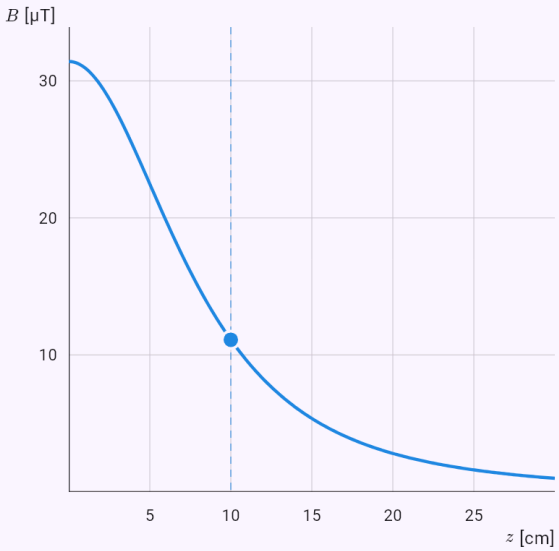
Resultado

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Passos

- Procuramos B; dados:
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertemos as unidades:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Uma espira circular de raio R com corrente I. O campo no seu eixo a uma distância z do centro vem da lei de Biot-Savart – as componentes perpendiculares se cancelam, as axiais se somam. Equação do modelo:
  $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Cada pedaço dl da espira está à mesma distância de um ponto do eixo, ρ = √(R² + z²), e é perpendicular à reta que os une. As componentes perpendiculares ao eixo se cancelam ao redor da espira; só as axiais, dB · R/ρ, se somam.
- O integral calculado
  $B = \oint_C \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$
- Isolamos a grandeza procurada: $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Substituímos
  $B = \dfrac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- No centro da espira (z = 0):
  $B(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Convertemos as unidades:
  $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

A amplitude da fem de um gerador ε = NBAω e o seu andamento sinusoidal no gráfico.

Enunciado: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

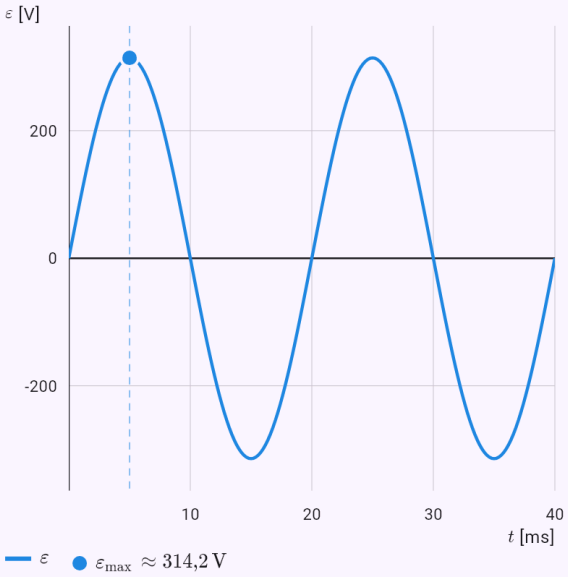
Resultado

$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\ \text{V}$

Passos

- Procuramos $\varepsilon_{\max}$; dados
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\ \text{T}, \quad A = 500\ \text{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\ \text{ra}$
- Convertemos as unidades: $A = 500\ \text{cm}^2 = 0{,}05\ \text{m}^2$
- Uma espira de N voltas gira com velocidade angular ω num campo uniforme B – o princípio do gerador de corrente alternada. A fem é senoidal com amplitude NBAω. Equação do modelo:
  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- O fluxo magnético por uma espira:
  $\Phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- O integral calculado: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Isolamos a grandeza procurada: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Substituímos: $\varepsilon_{\max} = 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\ \text{V}$
- A frequência: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\ \text{Hz}$
- A mesma lei na forma diferencial (equações de Maxwell): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

A capacidade de um metro de cabo coaxial – o campo pela lei de Gauss, a tensão como integral do campo.

Enunciado: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

Resultado

$C \approx 102{,}1\ \text{pF}$

Passos

- Procuramos C; dados
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\ \text{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\ \text{mm}, \quad L = 1\ \text{m}$
- Convertemos as unidades
  $R_1 = 1\ \text{mm} = 0{,}001\ \text{m}, \quad R_2 = 3{,}5\ \text{mm} = 0{,}0035\ \text{m}$
- Dois eletrodos cilíndricos coaxiais de raios $R_1 < R_2$ e comprimento L – um cabo coaxial, por exemplo. Equação do modelo
  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$
- A superfície gaussiana é um cilindro coaxial de raio r e comprimento L entre os eletrodos; ele envolve a carga Q do eletrodo interno e pelas bases não passa campo.
- O campo entre os eletrodos pela lei de Gauss

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$

- A tensão como integral de linha do campo
  $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$
- A capacidade
  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}3 \cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$
- Convertemos as unidades:
  $C \approx 1{,}021 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = 102{,}1\ \text{pF}$

A energia de um campo magnético de 1 T num litro de volume.

Enunciado: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Resultado

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Passos

- Procuramos W; dados: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Convertemos as unidades: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- A densidade de energia de um campo magnético no vácuo, w = B²/(2μ₀) – o campo dentro de uma bobina, por exemplo. Equação do modelo:
  $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$
- Substituímos
  $w = \dfrac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m}^3$
- Num campo uniforme a densidade de energia é a mesma em toda parte; o integral de volume é a densidade vezes o volume.
- Isolamos a grandeza procurada:
  $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Substituímos: $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- É assim que uma bobina com corrente armazena sua energia: $W = \dfrac{1}{2}LI^2$

O trabalho da gravidade ao erguer 1 kg da superfície da Terra até uma altura de um raio.

Enunciado: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km];`

`mode=gravity)`

Resultado

$$W \approx -31{,}28\,\text{MJ}$$

Passos

- Procuramos W; dados
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad m = 1\,\text{kg}, \quad r_1 = 6371\,\text{km}, \quad r_2$
- Convertemos as unidades
  $r_1 = 6371\,\text{km} = 6\,371\,000\,\text{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\text{km} = 1{,}27$
- A força é conservativa (tem potencial): o trabalho é independente do caminho, depende só do início e do fim. Por isso o calculamos pelo caminho mais simples – a reta que os une.
- A gravidade de um corpo de massa M age sobre um corpo m levado da distância r_1 à r_2 do centro. Um trabalho negativo do campo significa que foi preciso erguer o corpo. Equação do modelo:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- O integral calculado
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- Substituímos
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- A energia potencial
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\text{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- O trabalho de uma força conservativa é igual à perda de energia potencial: $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J}$
- Convertemos as unidades:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J} = -31{,}28\,\text{MJ}$

O caudal de um escoamento laminar – o integral do perfil parabólico em coordenadas polares.

Enunciado: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

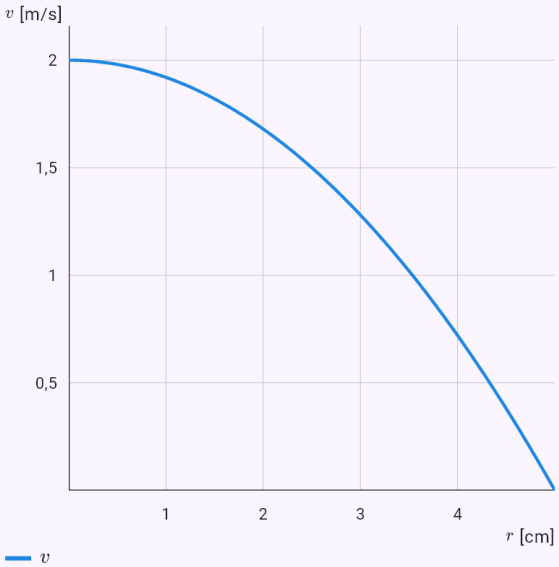
Resultado

$$Q \approx 7{,}854\,\text{l/s}$$

Passos

- Procuramos Q; dados: $v_{\max} = 2\,\text{m/s}, \quad R = 5\,\text{cm}$
- Convertemos as unidades: $R = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Escoamento laminar (de Poiseuille): o fluido fica parado na parede e é mais rápido no eixo; o perfil de velocidades é a parábola v = v_max(1 − r²/R²). Equação do modelo
  $Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
- A velocidade depende só da distância r ao eixo, então a seção é integrada em coordenadas polares (dS = r dr dφ).
- O integral calculado
  $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$
- Substituímos
  $Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s}$
- A velocidade média na seção: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\text{m/s}$
- Convertemos as unidades:
  $Q \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s} = 7{,}854\,\text{l/s}$

Gráфico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

As perdas de calor de um tubo isolado – a temperatura cai logaritmicamente na parede.

Enunciado: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC]; T2=20[degC]; mode=cylinder)`

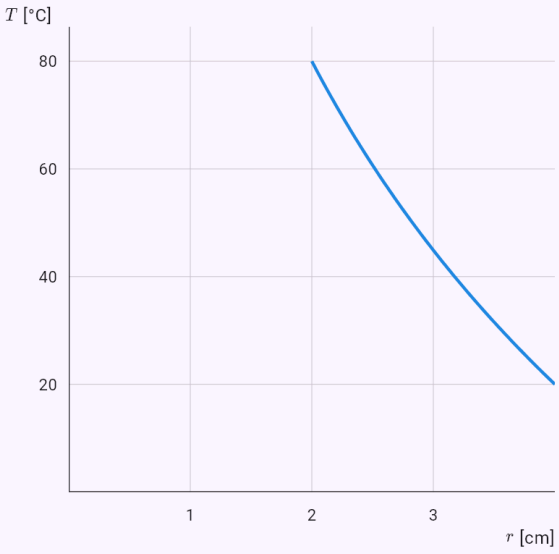
Resultado

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Passos

- Procuramos P; dados
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Convertemos as unidades:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Uma parede cilíndrica – o isolamento de um tubo de raio interno r_1, externo r_2 e comprimento L. O calor atravessa cilindros de área crescente, por isso a temperatura cai logaritmicamente. Equação do modelo:
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Regime permanente sem fontes de calor – a mesma potência atravessa cada camada: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- O integral calculado
  $P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- Isolamos a grandeza procurada
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- Substituímos
  $P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

A aceleração da gravidade a meio caminho do centro da Terra.

Enunciado: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

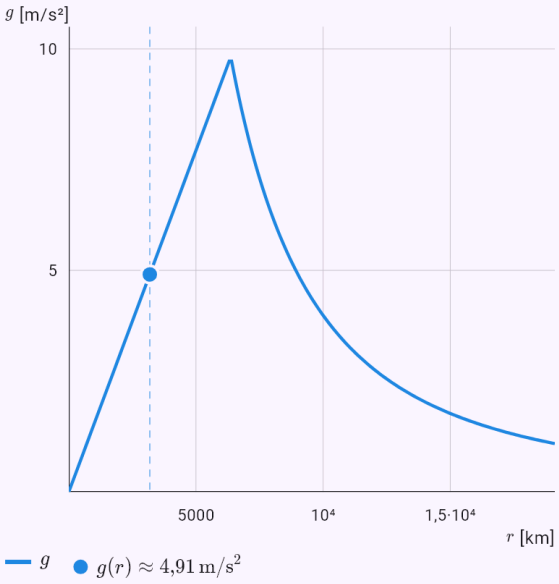
Resultado

$$g \approx 4{,}91\ \mathrm{m/s^2}$$

Passos

- Procuramos g; dados
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}, \quad R = 6371\ \mathrm{km}, \quad r = 3186\ \mathrm{km}$
- Convertemos as unidades
  $R = 6371\ \mathrm{km} = 6\,371\,000\ \mathrm{m}, \quad r = 3186\ \mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Uma bola homogênea (um planeta de densidade constante). Dentro, a aceleração da gravidade cresce linearmente com a distância ao centro. Equação do modelo: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{in}}$
- Simetria: o campo é radial e tem a mesma intensidade em cada esfera concêntrica. Tomamos como superfície gaussiana uma esfera de raio r – nela o campo é paralelo à normal e constante.
- O integral calculado: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- A massa interna
  $M_{\text{in}} = M\dfrac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \dfrac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Isolamos a grandeza procurada:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\text{in}} \Rightarrow g = \dfrac{G M_{\text{in}}}{r^2}$
- Substituímos
  $g = \dfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\ \mathrm{m/s^2}$
- A mesma lei na forma diferencial (pelo teorema de Gauss): $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Limitações conhecidas

- Extremos só para funções de duas variáveis, condicionados com uma única restrição. Integral duplo só sobre uma região limitada cuja fronteira é no máximo quadrática numa variável; a superfície z = f(x, y) em 3D por enquanto só é desenhada para o integral duplo. Campos vetoriais só em x, y (z), as outras letras são constantes; as setas só num campo plano. O potencial procura-se integrando as componentes – se um integral não é elementar, não é encontrado. Integrais de linha: o teorema de Green só é verificado para uma circunferência, uma elipse e um polígono convexo; uma curva fechada formada por um gráfico e um segmento só se introduz como linha poligonal ou paramétrica por troços. O integral triplo só sobre um sólido limitado que seja normal em relação a uma variável (uma superfície inferior e uma superior sobre toda a projeção) e cujas inequações sejam no máximo quadráticas nela; coordenadas esféricas só para um sólido cujos ângulos θ e φ formem um retângulo.

- Integrais de superfície: o teorema de Gauss só é verificado nos modelos (esfera, semiesfera fechada, cilindro, cone), o de Stokes só no fluxo de um rotacional escrito como curl ou $\nabla \times F$; um gráfico $z = g(x, y)$ só sobre uma região que o integral duplo trata; introduza uma esfera com outro limite que $z \geq 0$ como gráfico ou por parametrização.
- As aplicações físicas dos teoremas integrais calculam só casos simétricos (esfera, reta e plano infinitos, bobina longa, campo uniforme) em que o integral vira um produto; uma distribuição geral de carga ou corrente introduz-se como integral de linha ou de superfície. Desprezam a corrente de deslocamento na lei de Ampère-Maxwell e consideram os materiais só pela permissividade relativa de um condensador.

29. Polinómio de Taylor

A aplicação constrói o polinómio de Taylor (em 0, o de Maclaurin) do grau indicado: uma tabela das derivadas no ponto, a substituição na fórmula e o resto na forma de Lagrange. Também pode encontrar ela própria o grau – o menor para o qual o erro num ponto ou num intervalo não ultrapassa um limite dado. O gráfico mostra a função e o polinómio; com um cursor muda o grau e vê a aproximação a melhorar.

Os graus altos (até cerca de 1000) são calculados com exatidão e abreviados na solução e no gráfico; o controlo do grau é então logarítmico. As funções cujas derivadas crescem depressa (tan x) calculam-se dividindo séries, e o erro pela estimativa de Cauchy no plano complexo ou pela da série alternada. Se nem isso for possível, a aplicação explica porquê e dá conselhos.

Como introduzir

`taylor(sin x, 0, 5)`	A função, o ponto e o grau.
`maclaurin(e^x, 4)`	O polinómio de Maclaurin – o ponto é 0.
`taylor(e^x, 0, erro=0.001, x=0.5)`	O grau segundo o erro no ponto x (num intervalo, escreva r=… em vez de x).
`ln(1 + x)`	Uma função com o chip «Polinómio de Taylor» – aí indica o ponto, o grau ou a precisão.

Exemplos

Um polinómio de grau 4 com o resto.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Resultado

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

- Substituímos os valores das derivadas

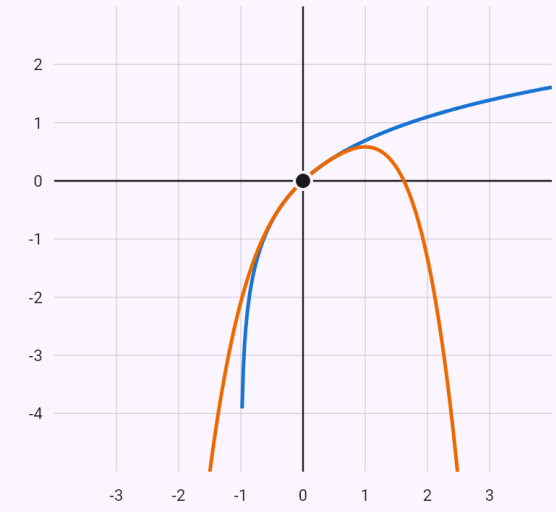
$$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- O resto (o erro) na forma de Lagrange, ξ entre a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$$

Gráfico

Grau: 4



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

O ponto em torno do qual o polinómio aproxima a função:

- $(0; 0)$

Com o cursor acima do gráfico escolhes o grau – com um grau maior o polinómio aproxima melhor a função, e mais longe do ponto.

O grau segundo a precisão pedida – um valor aproximado de e^0,5.

Enunciado: `taylor(e^x, 0, erro=0.001, x=0.5)`

Resultado

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Substituímos os valores das derivadas

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- O resto (o erro) na forma de Lagrange, ξ entre a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5$$

- Procuramos o menor grau n cuja estimativa do resto em x não ultrapasse o erro

$$M_k = \max_{t \in [0,\, 0{,}5]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

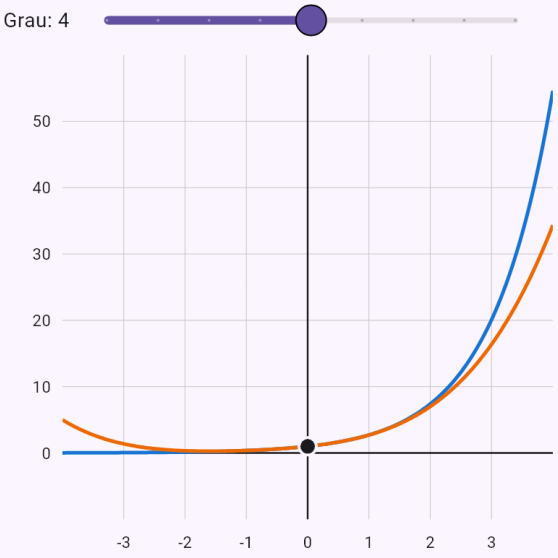
$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- O valor aproximado: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

Gráfico

Grau: 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

O ponto em torno do qual o polinómio aproxima a função:

- $(0; 1)$

Com o cursor acima do gráfico escolhes o grau – com um grau maior o polinómio aproxima melhor a função, e mais longe do ponto.

Grau 999: um grau alto é abreviado na solução.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Resultado

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{}{}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$\vdots$$
$$f^{(998)}(x) = -\frac{997!}{(x+1)^{998}} \qquad f^{(998)}(0) = -997!$$
$$f^{(999)}(x) = \frac{998!}{(x+1)^{999}} \qquad f^{(999)}(0) = 998!$$

- O resto (o erro) na forma de Lagrange, ξ entre a e x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

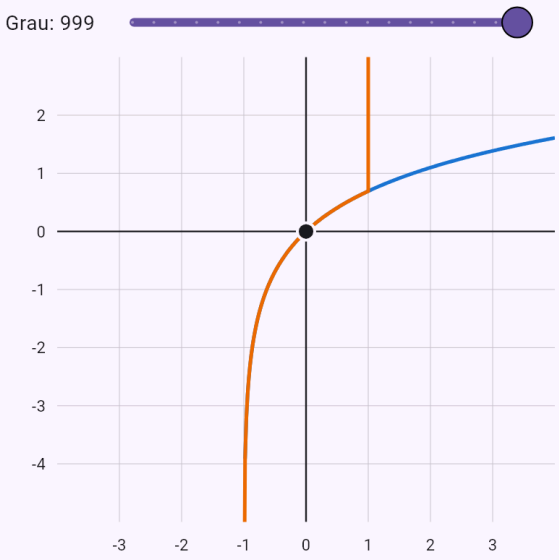
- Procuramos o menor grau n cuja estimativa do resto em x não ultrapasse o erro

$$M_k = \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$
$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$
$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$
$$\cdots$$
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$
$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- O valor aproximado: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Gráfico

Grau: 999



$y = \ln(1+x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} +$

O ponto em torno do qual o polinómio aproxima a função:

- $(0; 0)$

Com o cursor acima do gráfico escolhes o grau – com um grau maior o polinómio aproxima melhor a função, e mais longe do ponto.

Tangente: coeficientes de séries, erro pela estimativa de Cauchy.

Enunciado: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Resultado

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\tan x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\tan^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Os coeficientes vêm da aritmética de séries; as derivadas altas seriam enormes

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- As derivadas são demasiado grandes; usamos a estimativa de Cauchy numa circunferência do plano complexo

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- O valor aproximado: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Limitações conhecidas

- Graus acima de 1000 não são calculados; um ponto no limite da convergência ou além não admite a estimativa de Cauchy.

30. Integrais indefinidos

A aplicação integra com os métodos ensinados na escola e diz em cada passo o que faz. Verifica o resultado – deriva-o termo a termo pelas regras e transforma a soma na função integranda (denominador comum, identidades como sen²x + cos²x = 1) – e desenha a função integranda e a primitiva.

As raízes de potências da variável (∛(x⁴), √(x³)) são reescritas como potências de expoente racional; um valor absoluto (|cos x|, √(1 − sin²x)), com a função sinal sgn.

Se um integral não tiver primitiva elementar (como e^(−x²)), a aplicação di-lo e exprime-a com uma função especial (erf, Si, …).

Como introduzir

`int(x e^x, x)`	Um integral com a variável – os limites ou uma aplicação (área, volume, …) podem ser acrescentados nos campos sob o enunciado.
`int(x^2 sin x)`	Sem a variável quando só há uma.
`∫ x^2 dx`	Com o sinal de integral, também a partir de uma fotografia.
`x e^x`	Uma função com o chip «Integrar».

Primitivas imediatas e substituição

O integral de uma soma termo a termo, as constantes fora do integral, as primitivas da tabela (também com uma função interior linear) e a substituição quando a função integranda contém uma função juntamente com a derivada do seu interior.

Exemplos

Termo a termo pela tabela.

Enunciado: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

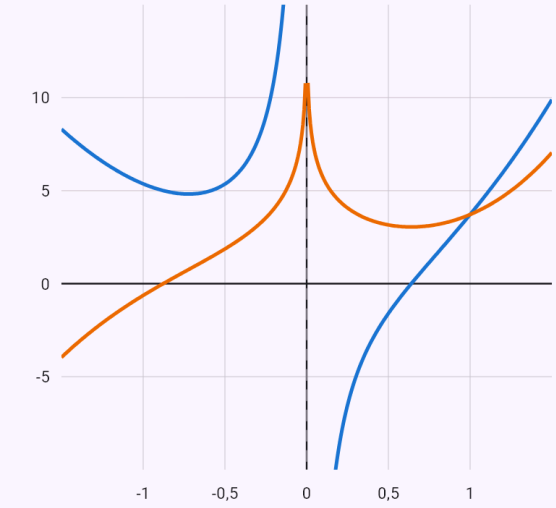
Resultado

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Passos

- O integral de uma soma é a soma dos integrais $\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int e^x\,dx = e^x$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada: $\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

Gráfico



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

A substituição t = x².

Enunciado: `int(2x cos(x^2))`

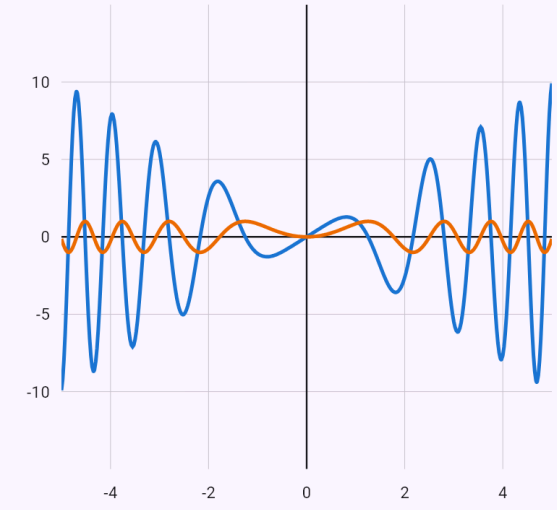
Resultado

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Passos

- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Substituição $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Voltamos à variável original: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Gráfico



$f(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$

$F(x) = \sin\left(x^2\right)$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Integral com constantes a, b.

Enunciado: `int(1/(a - bx)^3)`

Resultado

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Condições: $b \neq 0$

Passos

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Integração por partes

O produto de um polinómio por uma exponencial, uma função trigonométrica ou um logaritmo é integrado por partes, várias vezes se for preciso; integrais como $e^x \sin x$ por partes de forma cíclica.

Exemplos

Por partes duas vezes seguidas.

Enunciado: `int(x^2 e^x)`

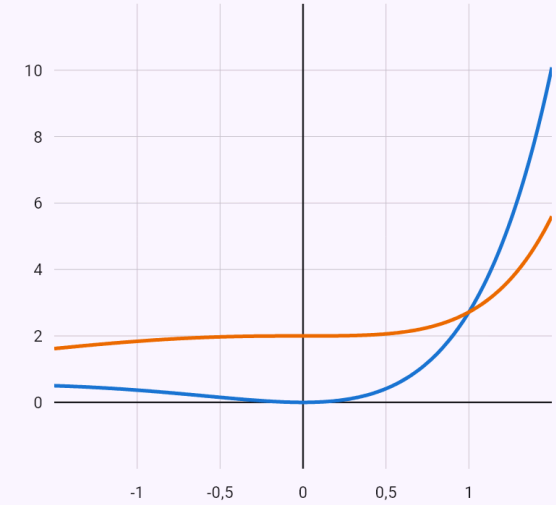
Resultado

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Passos

- Por partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, logo $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Por partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, logo $u' = 1$, $v = e^x$: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int e^x \, dx = e^x$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada: $\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2 e^x$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente: $\left(x^2 e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2 e^x + 2xe^x$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente: $\left(-2xe^x\right)' = -2 \cdot \left(e^x \cdot x + e^x\right) = -2xe^x - 2e^x$
- Somamos e simplificamos $\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2 e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Gráfico



A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Funções racionais

Uma função racional é dividida se necessário, o denominador é fatorizado e a função decomposta em frações parciais, que são integradas em logaritmos e arcos tangentes.

Um denominador que não se fatoriza nos racionais ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) é fatorizado nos reais – cada par de raízes complexas conjugadas dá um fator quadrático sem raízes reais.

Exemplos

Decomposição em frações parciais.

Enunciado: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

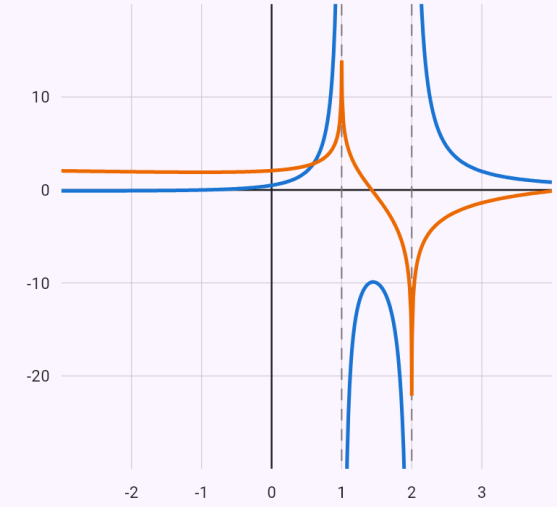
Resultado

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Passos

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais:
  $$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
- Pela tabela de integrais imediatos:
  $$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- Pela tabela de integrais imediatos:
  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada:
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente:
  $$(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente:
  $$(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$
- Somamos e simplificamos
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Gráfico



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Fatorização do denominador x⁴ + 1 nos reais.

Enunciado: `int(1/(x^4 + 1))`

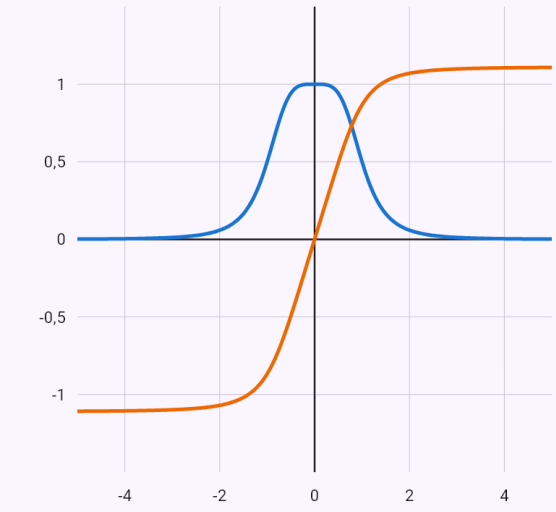
Resultado

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x -\right.\right.$$

Passos

- Fatorizamos o denominador em $\mathbb{R}$: as suas raízes complexas formam pares conjugados r, r̄ e cada par dá um fator quadrático (x − r)(x − r̄) = x² − 2·Re r·x + |r|² sem raízes reais:
  $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$
- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais
  $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$
- O denominador não tem raízes reais: um múltiplo da sua derivada separado do numerador dá ln, o resto, completando o quadrado, dá arctg
  $\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$
- O denominador não tem raízes reais: um múltiplo da sua derivada separado do numerador dá ln, o resto, completando o quadrado, dá arctg
  $\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$

Gráfico



$f(x) = \frac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}\,\text{ar}}{}$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Verificação das frações parciais com denominador comum.

Enunciado: `int(1/(x^3 + 1))`

Resultado

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-$$

Passos

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx = \int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

- O denominador não tem raízes reais: um múltiplo da sua derivada separado do numerador dá ln, o resto, completando o quadrado, dá arctg

$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x}{}$$

- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2}{}$$

- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(-\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$

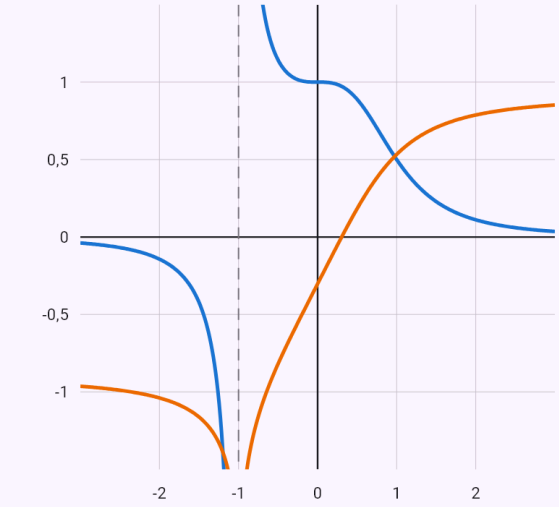
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$

- Somamos e simplificamos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x}{}$$

Gráfico



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-}{6}$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Funções trigonométricas

Primeiro as fórmulas (sin²x = (1 − cos 2x)/2, produtos em somas), para uma potência ímpar a substituição t = sin x ou t = cos x, para uma função racional de seno e cosseno uma substituição segundo a paridade, e a substituição universal t = tan(x/2) só no fim.

Exemplos

Uma potência ímpar do seno – a substituição t = cos x.

Enunciado: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

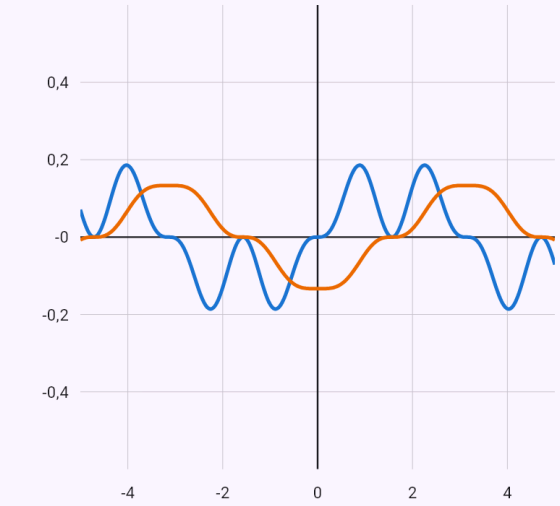
Resultado

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Passos

- Uma potência ímpar – substituição $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Voltamos à variável original:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada: $\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- Somamos e simplificamos com a identidade
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Gráfico



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

A verificação: derivada termo a termo, transformada com a identidade 1 + tg²x = 1/cos²x.

Enunciado: `int(1/cos(x)^4)`

Resultado

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

Passos

- A função não muda quando o seno e o cosseno mudam de sinal ao mesmo tempo – substituição $t = \tan x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais:
  $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 1\,dt = t$
- Voltamos à variável original:
  $t = \tan x:\quad \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$

- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada: $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente
  $\left(\frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$
- Somamos e simplificamos com a identidade
  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $$\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$

Funções hiperbólicas

Integrais da tabela (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx pelo logaritmo da derivada, por partes (x sinh x, arsinh x), quadrados pelas fórmulas sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x; o resto pela definição através de exponenciais.

Exemplos

A fórmula sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Enunciado: `int(sinh(x)^2)`

Resultado

$$\int \sinh^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Passos

- Usamos a fórmula $\sinh^2\alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x\,dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2}\,dx$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = \int -\frac{1}{2}\,dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \cosh(2x)\,dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$

- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada: $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = \sinh^2 x$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente
  $\left(\frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = \frac{1}{4}\cdot\cosh(2x)\cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- Somamos e simplificamos com a identidade $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

Raízes

Integrais com a raiz de uma função linear fracionária por substituição, com a raiz de um trinómio do 2.º grau por uma substituição de Euler, e integrais binómios segundo as condições de Tchebychev – se nenhuma se verificar, a aplicação diz que o integral não é elementar.

Exemplos

Uma substituição de Euler.

Enunciado: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Resultado

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Passos

- Substituição de Euler (tipo 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – o integral passa a ser o de uma função racional de t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Voltamos à variável original

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Verificação – a derivada do resultado (a primitiva) é a função integrada

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

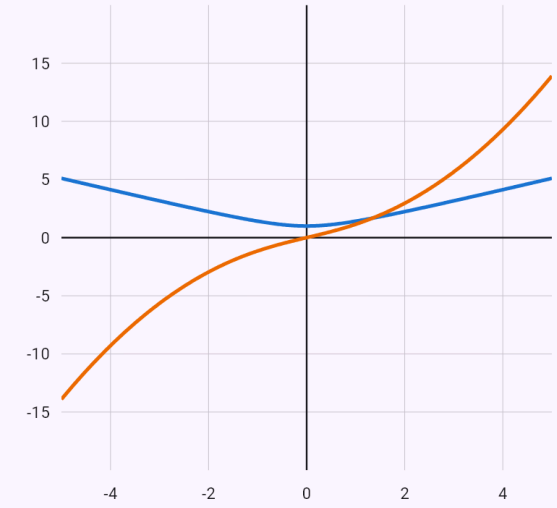
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Somamos e simplificamos

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Gráfico



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

Limitações conhecidas

- Para alguns integrais, encontramos o resultado sem resolução – a aplicação indica-o nos passos.
- Um cálculo sem resolução que demora demasiado é interrompido – a aplicação indica-o.
- Em resultados longos, em que a transformação na função integranda não seria legível (vários termos com raízes de números, p. ex. $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), a aplicação omite a verificação.

31. Integrais definidos e as suas aplicações

A aplicação calcula um integral definido pela fórmula de Barrow (Newton–Leibniz) e desenha a área sob o gráfico – a parte acima do eixo x de outra cor que a de baixo. Também trata integrais impróprios e aplicações: área, comprimento de curva, volume e área lateral de um sólido de revolução, também para curvas paramétricas e em coordenadas polares.

Integral definido

A aplicação encontra a primitiva como no integral indefinido e substitui os limites. Numa mudança de variável recalcula logo os limites. Num intervalo simétrico em relação a zero usa a simetria: o integral da parte ímpar é zero sem procurar primitiva e $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ é reconhecida como a área de um semicírculo. Sem primitiva elementar, dá a forma exata com uma função especial (por exemplo 2 Si(π)) e calcula o seu número por uma série de potências com estimativa do erro; se não encontrar forma exata, calcula o valor numericamente e diz por que método.

As letras do enunciado ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ de −r a r) são parâmetros positivos: o resultado é uma fórmula ($\pi r^2/2$), verificada numericamente para vários valores dos parâmetros, e o gráfico tem um cursor para cada letra.

Como introduzir

`int(x^2, x, 0, 3)`	Um integral com a variável e os limites.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	A partir de uma fotografia ou em LaTeX.
`x^2`	Uma função com o chip «Integrar» – escreva os limites nos campos.

Exemplos

Uma substituição com os limites transformados.

Enunciado: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Resultado

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

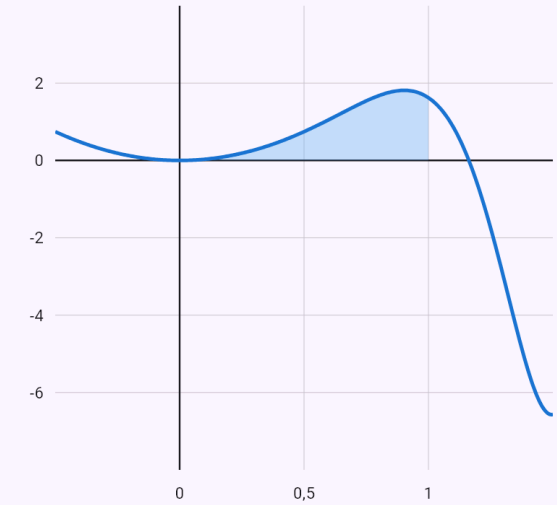
Resolver por um método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapézios | Σ Romberg

Passos

- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Substituição $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Gráfico



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

A parte ímpar num intervalo simétrico é zero, o resto é a área de um semicírculo – o resultado é π.

Enunciado: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Resultado

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx =$$

Resolver por um método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapézios | Σ Romberg

Passos

- O intervalo é simétrico em relação a zero, dividimos o integral na parte ímpar e no resto

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

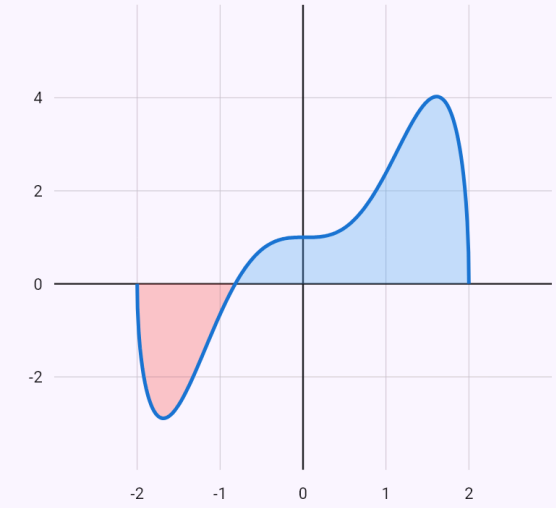
- A função $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ é ímpar (f(−x) = −f(x)): em $\langle -2;\,2\rangle$ as áreas acima e abaixo do eixo anulam-se, o integral é zero sem procurar primitiva:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$$

- O gráfico de √(r² − x²) é a semicircunferência superior de raio r = 2, o integral é a área do semicírculo πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Gráfico



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

A primitiva não é elementar: exatamente 2 Si(π), o valor por uma série de potências.

Enunciado: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Resultado

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

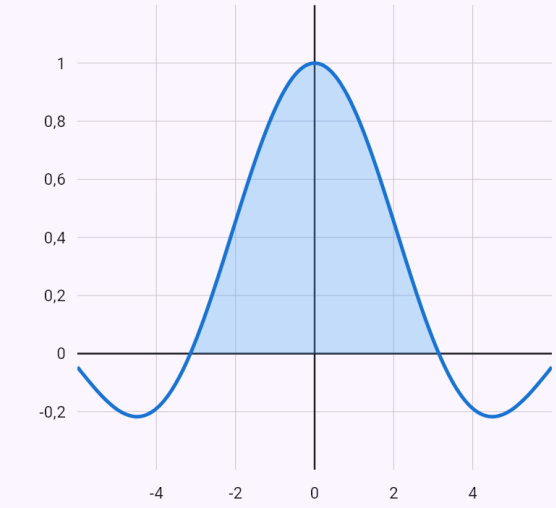
O número da forma exata também é calculado por um método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapézios | Σ Romberg

Passos

- A função $\frac{\sin x}{x}$ é par (f(−x) = f(x)), o gráfico é simétrico em relação ao eixo y, por isso o integral em $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ é o dobro do integral em $\langle 0;\ \pi\rangle$:
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
- A primitiva não é elementar, é uma função especial – o resultado exato escreve-se com ela
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$
- O número da forma exata calcula-se pela série de potências da função especial:
  $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Para t = π somamos 6 termos. A série é alternada, o erro é menor do que o primeiro termo omitido, $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ (estimativa da série alternada): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Gráfico



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

Integral com parâmetro r – a área de um semicírculo, πr²/2; o cursor do gráfico altera r.

Enunciado: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Resultado

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros positivos: $r > 0$
- Uma raiz de uma diferença de quadrados – a substituição trigonométrica $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, a raiz $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Usamos a fórmula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

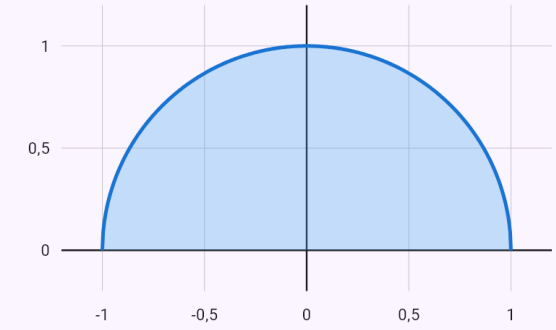
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($

Valores dos parâmetros

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Gráfico



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

Integrais impróprios

Um limite infinito ou uma função não limitada são tratados com um limite da primitiva, e a aplicação diz se o integral converge ou diverge. Se esse limite não puder ser calculado, decide por um critério de comparação.

Os integrais $\int_0^{\infty} x^{s-1} \ln^k x/(x^n + a^n)^m\, dx$ ($0 < s < mn$, $k = 0$ a 3) são calculados exatamente mesmo sem primitiva: como a k-ésima derivada em ordem a s do integral com parâmetro I(s). A aplicação encontra I(s) pela substituição $t = x^n/(x^n + a^n)$ através da função beta e da fórmula de reflexão (chip «Função beta») ou sobre um contorno em buraco de fechadura à volta do semieixo positivo através dos

resíduos (chip «Resíduos»). Onde existe uma primitiva, a fórmula de Newton-Leibniz continua a ser a predefinida (chip «Primitiva»). O valor é sempre verificado numericamente.

Outro integral impróprio sem primitiva é comparado com 1/x^α em cada extremo (um limite infinito ou um ponto onde a função cresce sem limite) pelo critério de comparação por limite. Só quando converge em todos os extremos é que a aplicação calcula o valor numericamente (≈); um integral divergente é indicado como divergente.

Exemplos

Um limite superior infinito.

Enunciado: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Resultado

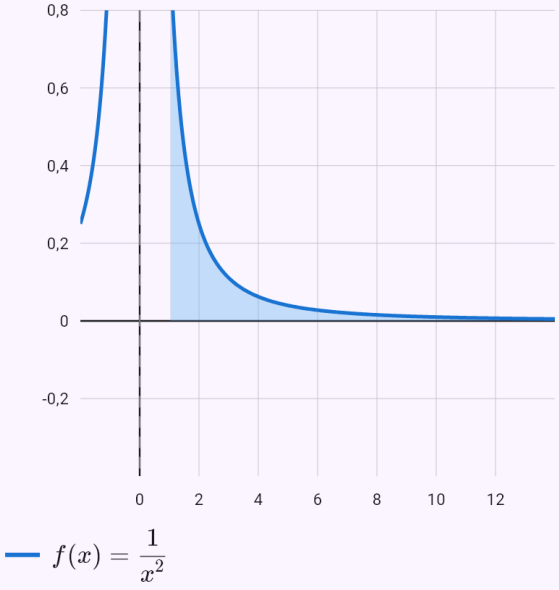
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Passos

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Gráfico



O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

Uma função não limitada no limite inferior.

Enunciado: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Resultado

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Resolver por um método numérico:

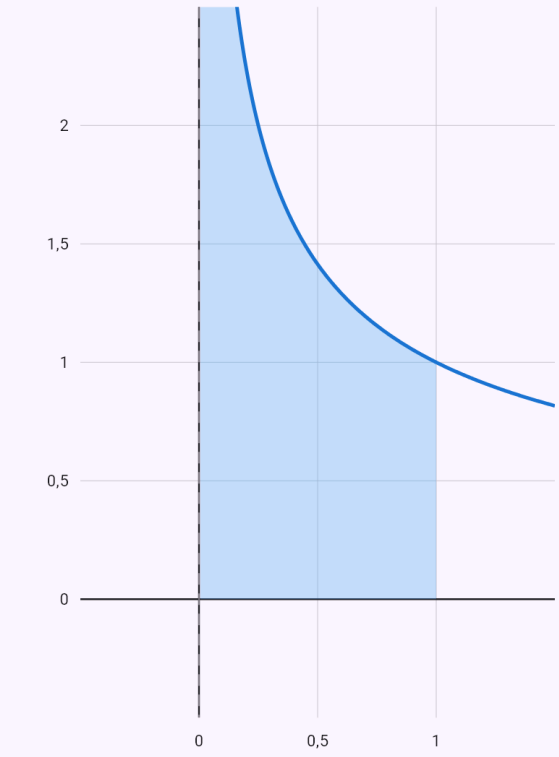
Σ Simpson | Σ Trapézios | Σ Romberg

Passos

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Gráfico



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I″(4) através da função beta – 5√3π³/972.

Enunciado: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Resultado

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Passos

- O logaritmo surge ao derivar em ordem ao parâmetro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Assim, o integral é uma derivada do integral com parâmetro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, que converge para $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calculamos I(s) para um s geral, derivamos e substituímos.
- A substituição leva o integral a ⟨0; 1⟩ e dá a função beta de Euler B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Escrevemos a função beta com a função gama, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), e usamos a fórmula de reflexão Γ(p)Γ(1 − p) = π/sen πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

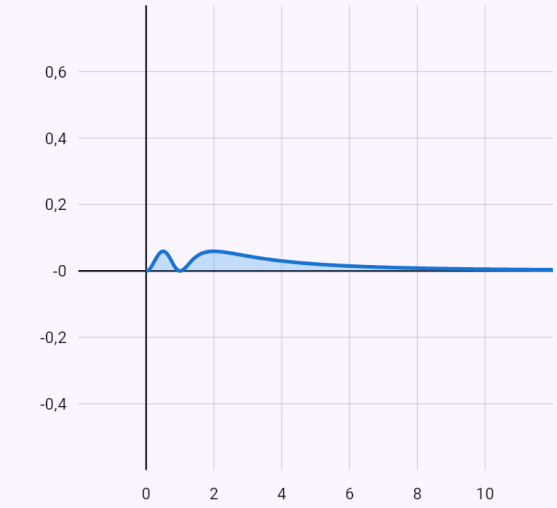
- A derivada em ordem ao parâmetro s (de ordem 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Substituímos s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Gráfico



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

O mesmo integral sobre um contorno em buraco de fechadura através dos resíduos.

Enunciado: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Resíduos

Resultado

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Passos

- O logaritmo surge ao derivar em ordem ao parâmetro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Assim, o integral é uma derivada do integral com parâmetro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, que converge para $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calculamos I(s) para um s geral, derivamos e substituímos.
- Tomamos a potência z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) com o argumento de z em (0; 2π) e integramos sobre o contorno em buraco de fechadura C à volta do semieixo real positivo. Na margem superior z^(s − 1) = x^(s − 1), na inferior x^(s − 1)·e^(2πis); a circunferência grande e a pequena não contribuem no limite, porque $0 < s < 6$. No interior estão os polos $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ de ordem 1 e, pelo teorema dos resíduos (para s não inteiro)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Os polos são simples; o resíduo é o numerador a dividir pela derivada do denominador no polo, com z⍰ⁿ = −aⁿ

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Substituímos as potências dos polos, somamos a série geométrica e simplificamos. A fórmula foi deduzida para s não inteiro (caso contrário 1 − e^(2πis) = 0). Mas ambos os membros são contínuos em s, pelo que vale também para s = 4, pelo limite $s \to 4$

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

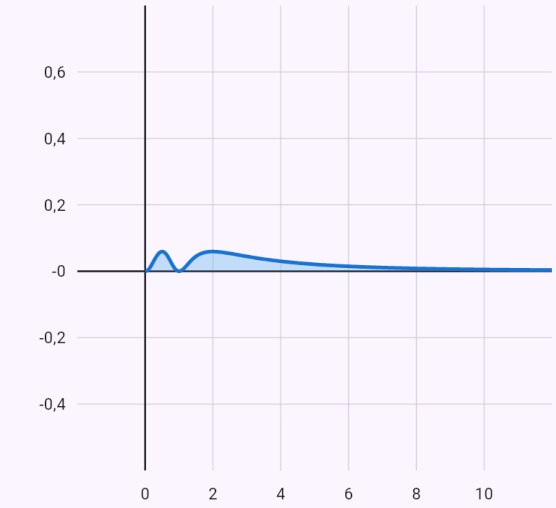
- A derivada em ordem ao parâmetro s (de ordem 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Substituímos s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Gráfico



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

Sem primitiva: convergência por comparação com 1/x³ e depois o valor numérico.

Enunciado: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

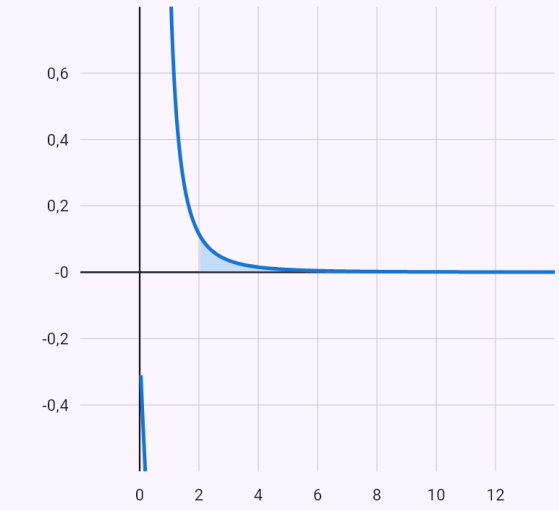
Resultado

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$$

Passos

- Para $x \to \infty$ comparamos a função integranda com $\frac{1}{x^3}$ (critério de comparação por limite): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. O limite é um número positivo, pelo que aí o integral se comporta como o integral de $\frac{1}{x^3}$, que converge para $\alpha = 3 > 1$
- O integral converge em todos os extremos; o seu valor: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$
- Não se encontrou forma exata; o valor do integral impróprio foi calculado numericamente pela quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod.

Gráfico



$f(x) = \frac{1}{x^3 + \ln x}$

acima do eixo x (+) abaixo do eixo x (−)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

Área sob uma curva e entre curvas

A área entre um gráfico e o eixo x, ou entre duas curvas, é calculada como o integral do módulo da diferença – as partes acima e abaixo contam ambas como positivas. Não precisa de indicar os limites: são encontrados como os pontos de interseção das curvas.

Como introduzir

`área(x^2, x)`	A área entre duas curvas, limites a partir dos pontos de interseção.
`área(sin x, 0, pi)`	A área entre uma curva e o eixo x num intervalo.
`x^2`	Uma função com o chip «Integrar» → «Área entre curvas»; escreva a segunda curva e os limites nos campos.

Exemplos

A área entre uma parábola e uma reta.

Enunciado: `x^2` Área entre curvas, segunda curva x

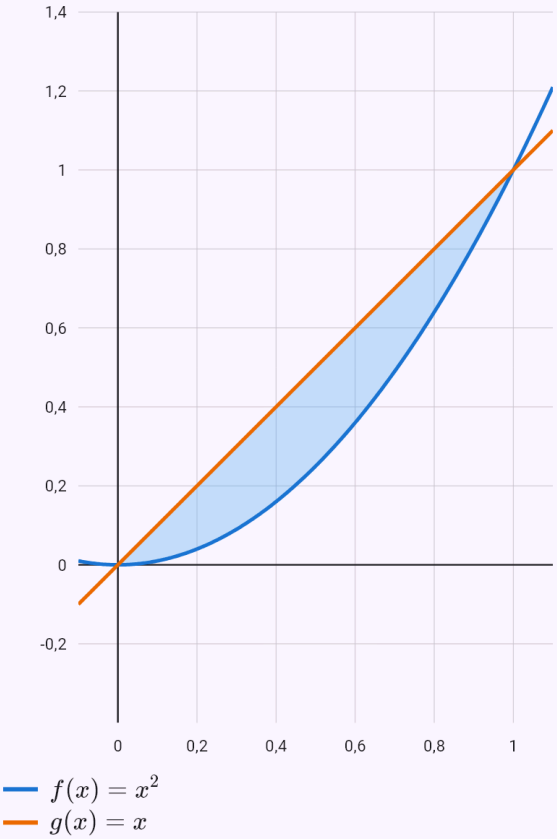
Resultado

$$S = \frac{1}{6}$$

Passos

- Os limites são as interseções das curvas:
  $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- A área entre as curvas (as partes acima e abaixo contam positivas), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$:
  $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- A expressão em módulo não muda de sinal no intervalo – retiramos o módulo por ele:
  $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais:
  $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Gráfico



A região sombreada – a sua área é o resultado (as partes acima e abaixo do eixo contam positivas).

Comprimento de uma curva

O comprimento de um gráfico num intervalo é calculado pela fórmula l = ∫√(1 + f′²) dx. A aplicação tenta simplificar a raiz (numa semicircunferência obtém-se o arco seno); quando o integral não tem primitiva elementar, o resultado é numérico.

Como introduzir

`comprimento(x^(3/2), 0, 4)`	O comprimento da curva num intervalo.

Exemplos

O comprimento de uma semicircunferência.

Enunciado: `sqrt(1 - x^2)` Comprimento de curva, limites −1 e 1

Resultado

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Passos

- O comprimento da curva

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

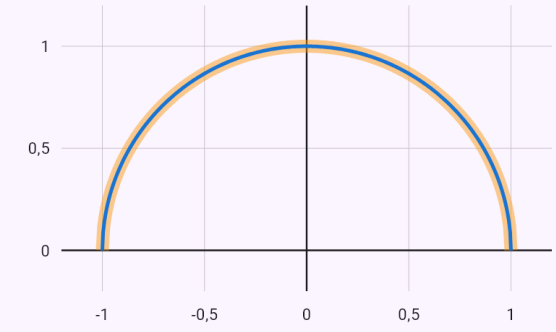
- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Gráfico



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

O arco realçado – o seu comprimento é o resultado.

Volume de um sólido de revolução

O volume de um sólido de revolução em torno do eixo x é calculado pela fórmula V = π∫f² dx (entre duas curvas, por anéis), em torno do eixo y pelo método das cascas cilíndricas. A aplicação mostra também o sólido em 3D – rode-o com o dedo.

Como introduzir

`volume(sqrt(x), 0, 4)`	O volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo x.
`volume(x^2, 0, 2, y)`	Rotação em torno do eixo y.

Exemplos

Um paraboloide de revolução.

Enunciado: `sqrt(x)` Volume de um sólido, limites 0 e 4

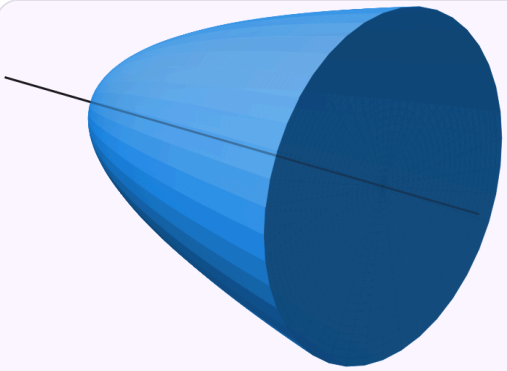
Resultado

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Passos

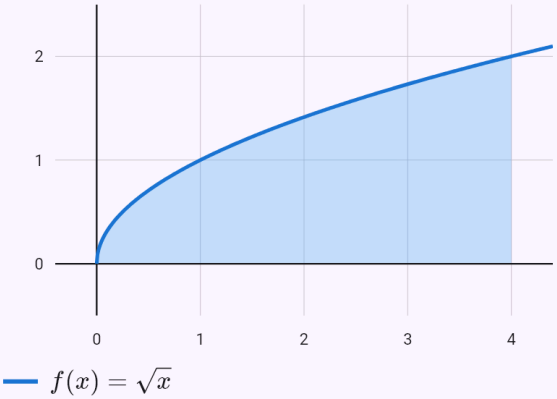
- O volume do sólido de revolução em torno do eixo x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- O valor do integral vezes a constante à frente: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



Área lateral de um sólido de revolução

A área lateral é calculada pela fórmula S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; o produto sob a raiz simplifica-se muitas vezes (numa esfera obtém-se uma constante).

Como introduzir

`superfície(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	A área lateral por rotação em torno do eixo x.

Exemplos

A superfície de uma esfera de raio 2.

Enunciado: `sqrt(4 - x^2)` Superfície de um sólido, limites −2 e 2

Resultado

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Passos

- A área lateral do sólido de revolução em torno do eixo x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

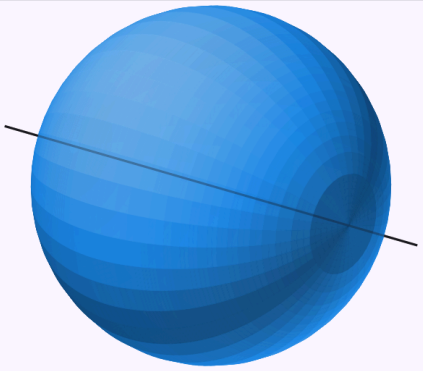
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 2\,dx = 2x$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a):

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

- O valor do integral vezes a constante à frente:

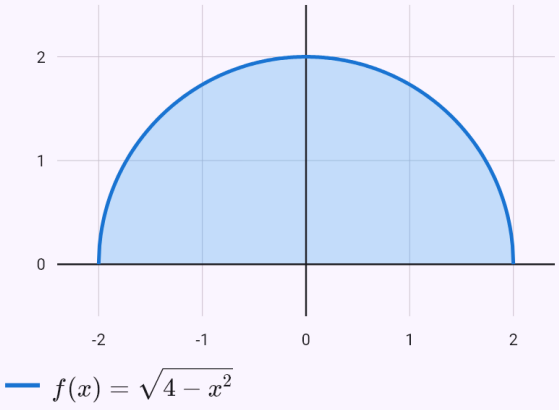
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



Aplicações com parâmetros

Cada letra exceto x é um parâmetro positivo e o resultado é uma fórmula, como o volume da esfera 4πr³/3. As verificações numéricas usam valores substituídos. O gráfico e o sólido 3D têm um controlo por parâmetro.

Como introduzir

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Volume da esfera de raio r.

Exemplos

Volume da esfera de raio r.

Enunciado: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Resultado

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros positivos: $r > 0$
- O volume do sólido de revolução em torno do eixo x,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais:

$$\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$$

- O valor do integral vezes a constante à frente:

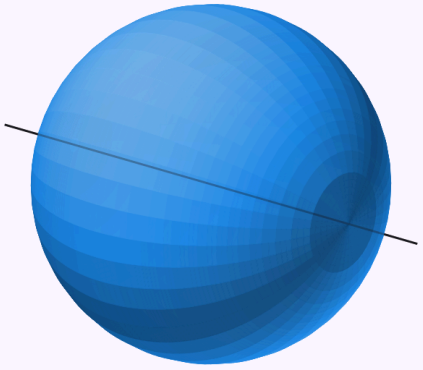
$$V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Valores dos parâmetros

$r = 1$

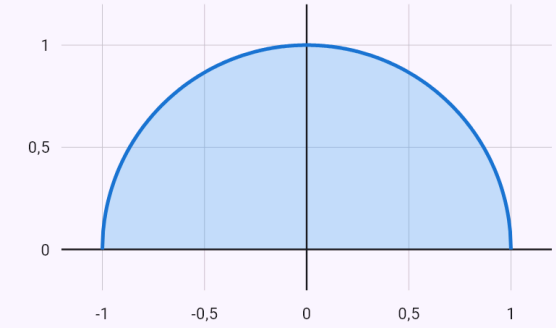
$V \approx 4{,}189$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Tronco de cone de raios a, b e altura h.

Enunciado: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Resultado

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros positivos: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- O volume do sólido de revolução em torno do eixo x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- O valor do integral vezes a constante à frente

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Valores dos parâmetros

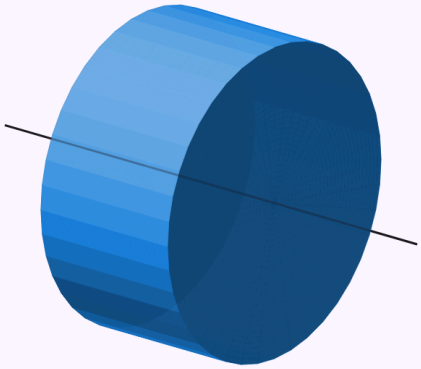
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

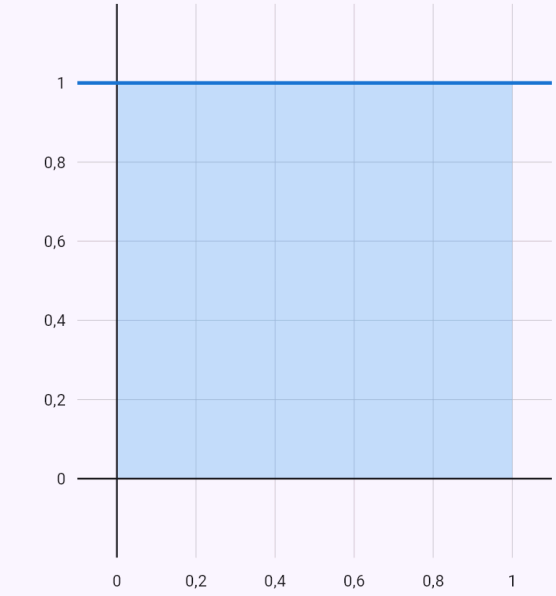
$V \approx 3{,}142$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

Centroide

O centroide de uma região sob ou entre curvas, de um arco e de um sólido de revolução obtém-se com integrais e todos os passos, e é marcado no gráfico. As letras funcionam como parâmetros.

Como introduzir

`teziste(x^2, 0, 1)`	Região sob a curva; uma segunda função dá a região entre curvas.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	A última palavra oblouk ou teleso escolhe arco ou sólido de revolução.

Exemplos

Centroide do semicírculo, 4r/(3π).

Enunciado: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Resultado

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros positivos: $r > 0$
- O centroide obtém-se de integrais

  $$x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$$

  $$y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$$

- Calculamos o integral: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Uma raiz de uma diferença de quadrados – a substituição trigonométrica $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, a raiz $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$:

  $$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $$\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$$

- Usamos a fórmula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $$\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

  $$\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:

  $$\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$

- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:

  $$x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},\quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

- Calculamos o integral: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Substituição $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:

  $$\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $$\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:

  $$x = -r \Rightarrow t = 0,\quad x = r \Rightarrow t = 0$$

- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_{0}^{0} = 0 - 0 = 0$$

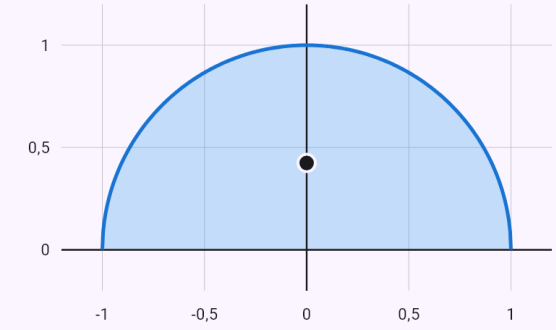
- Calculamos o integral: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais:
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- As coordenadas do centroide são quocientes dos integrais
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

Valores dos parâmetros

$r = 1$

$T \approx [0;\ 0{,}424]$

Gráfico



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

O ponto T é o centroide.

Centroide do cone a 3/4 da altura a partir do vértice.

Enunciado: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Resultado

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Passos

- As letras diferentes da variável são parâmetros positivos: $h > 0,\ r > 0$
- O centroide obtém-se de integrais

  $x_T = \dfrac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$

  $y_T = 0$

- Calculamos o integral: $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$

- Calculamos o integral: $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$

- As coordenadas do centroide são quocientes dos integrais

  $x_T = \dfrac{M_y}{J} = \dfrac{3h}{4}$

  $y_T = 0$

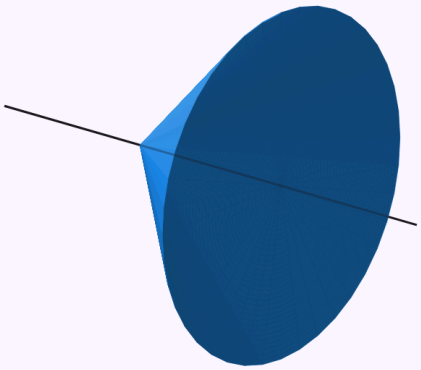
Valores dos parâmetros

$h = 1$

$r = 1$

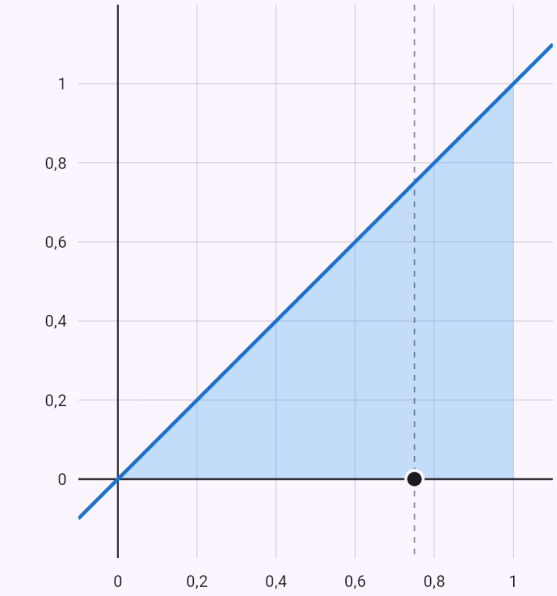
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



$f(x) = \dfrac{rx}{h}$

O ponto T é o centroide.

Curvas paramétricas e em coordenadas polares

Escreva uma curva x = φ(t), y = ψ(t) em duas linhas, e uma curva em coordenadas polares como r = ρ(φ). O chip «Integrar» oferece então a área, o comprimento, o volume e a superfície; os limites do parâmetro são opcionais (sem eles, de 0 a 2π). O gráfico colore a região; volume e superfície surgem como sólido 3D. Roda-se em torno do eixo x ou y; para o eixo y acrescente y como último argumento.

Como introduzir

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Uma curva paramétrica em duas linhas.
`r = 1 + cos(phi)`	Uma curva em coordenadas polares (também r^2 = … para uma lemniscata).
`comprimento(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	A forma escrita com o parâmetro e os limites.

Exemplos

A área sob um arco de cicloide.

Enunciado: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Área

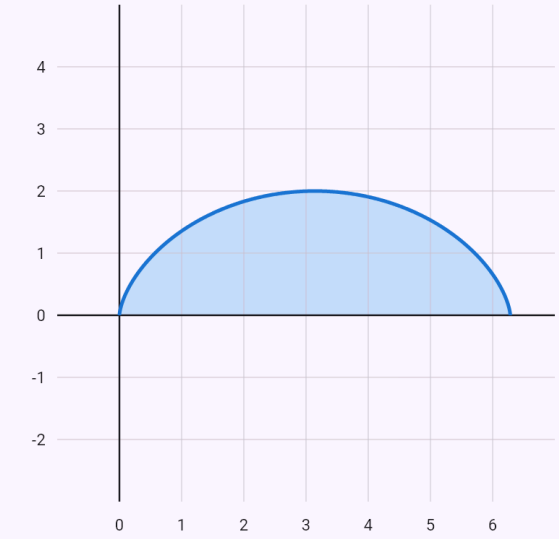
Resultado

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Passos

- As derivadas em ordem ao parâmetro:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- A área sob uma curva paramétrica (dentro de uma curva fechada) para $t \in [0,\ 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$:
  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt\right|$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 1\, dt = t$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -2\cos t\, dt = -2\int \cos t\, dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Usamos a fórmula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4}\right.$

Gráfico



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

A curva dada parametricamente (ou em coordenadas polares), desenhada para os limites escolhidos do parâmetro.

O comprimento de uma cardioide.

Enunciado: `r = 1 + cos(phi)` Comprimento de curva

Resultado

$$l = 8$$

Passos

- As derivadas em ordem ao parâmetro: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- O comprimento de uma curva em coordenadas polares para $\varphi \in [0,\ 2\pi]$, $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$

  $$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(
- Dividimos o intervalo nos zeros das expressões em módulo (π) e em cada parte retiramos o módulo pelo sinal

  $$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos
- Tiramos a constante para fora do integral

  $$\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) – F(a)

  $$\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$
- Tiramos a constante para fora do integral

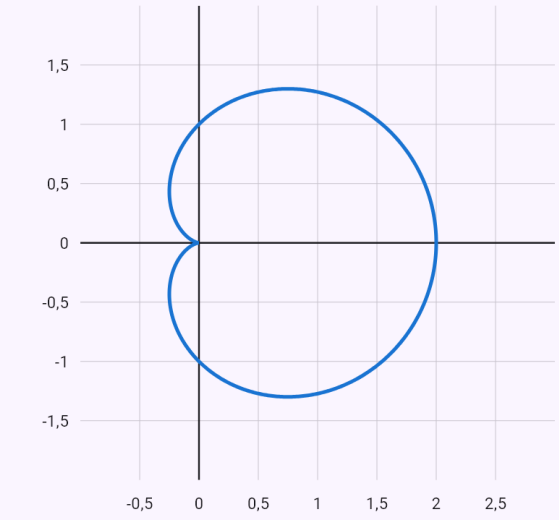
  $$\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) – F(a)

  $$\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =
- Somamos os valores das partes:

  $$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Gráfico



$r = \cos\varphi + 1$

A curva dada parametricamente (ou em coordenadas polares), desenhada para os limites escolhidos do parâmetro.

Astroide rodada em torno do eixo y.

Enunciado: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Resultado

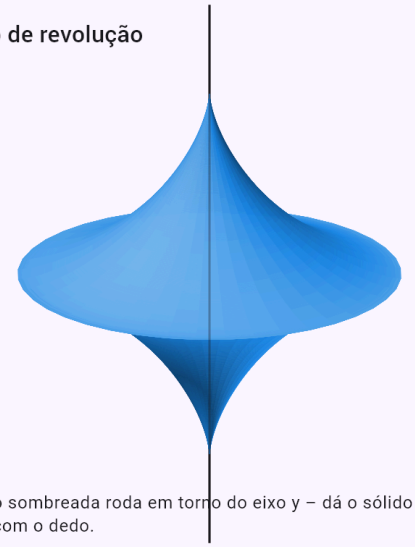
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Passos

- As derivadas em ordem ao parâmetro:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- O sólido vem da parte da curva à direita do eixo y (x ≥ 0):
  $t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$
- Volume do sólido em torno do eixo y para $t \in [0,\ 2\pi]$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Uma potência ímpar – substituição $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) – F(a)
  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Uma potência ímpar – substituição $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$

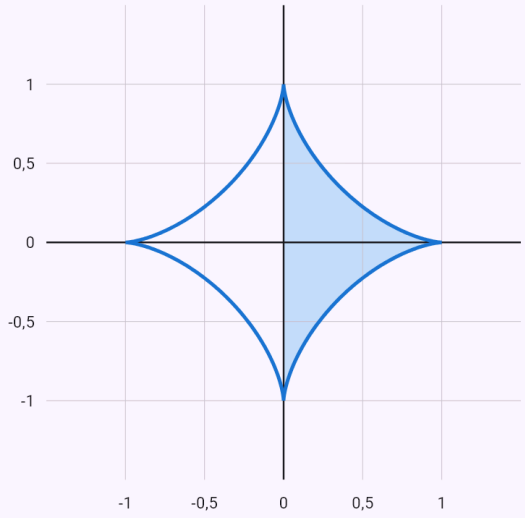
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original: $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- O valor do integral vezes a constante à frente: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo y – dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

Gráfico



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

A curva dada parametricamente (ou em coordenadas polares), desenhada para os limites escolhidos do parâmetro.

Curvas dadas por uma equação

Para uma equação em x e y (x³ + y³ = 3xy), o chip «Integrar» oferece a área, o comprimento, o volume e a superfície. Sem limites, usa toda a curva fechada: a circunferência e a elipse na forma paramétrica com cos e sin, um laço que passa pela origem (o fólio de Descartes) pelas retas y = tx – a área do laço então exatamente a partir dos setores, o comprimento, o volume e a superfície numericamente. Com limites em x, usa o ramo superior y = f(x).

Como introduzir

`x^3 + y^3 = 3xy`	Uma curva fechada – o chip «Integrar» sem limites.

`y^2 = x^3`	Uma curva não fechada – o chip «Integrar» com limites em x (o ramo superior y = x^(3/2)).

Exemplos

A área do laço do fólio – pelas retas y = tx e pelos setores, S = 3/2.

Enunciado: `x^3 + y^3 = 3xy` Integrar → Área

Resultado

$$S = \frac{3}{2}$$

Passos

- O laço que passa pela origem na forma paramétrica pelas retas y = tx – substituímos na equação e isolamos x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- A área do laço somando os setores a partir da origem: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, e sobre a reta y = tx, x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Substituição $u = t^3+1$, $du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

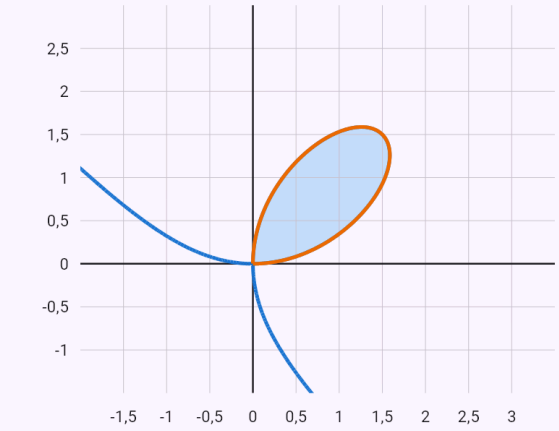
- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Voltamos à variável original: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Gráфico



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\; y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Toda a curva dada pela equação; destacada a parte usada no cálculo.

Área da lemniscata, por coordenadas polares.

Enunciado: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

Resultado

$$S = 1$$

Passos

- Escrevemos a curva em coordenadas polares

  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$

- A área limitada por uma curva em coordenadas polares (somando os setores a partir da origem) para

  $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

  $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$

- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

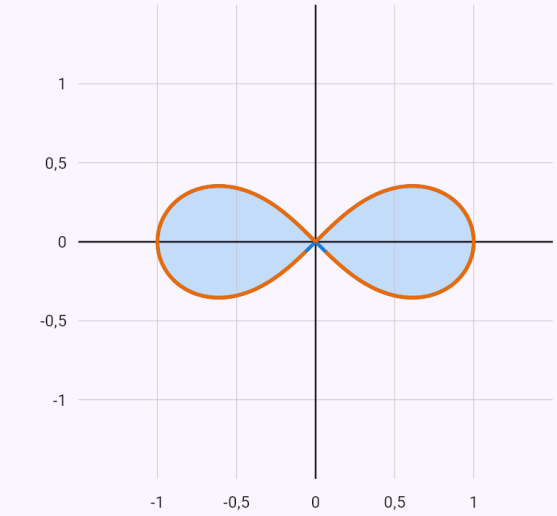
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

- A curva tem laços iguais (2); o valor de um multiplica-se pelo seu número: $2 \cdot 1$

- O valor do integral vezes a constante à frente:

  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Gráfico



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Toda a curva dada pela equação; destacada a parte usada no cálculo.

Elipse rodada com termo xy.

Enunciado: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Resultado

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Passos

- A curva é uma elipse rodada; os eixos saem do ângulo de rotação e escrevemo-la parametricamente

  $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos$

- As derivadas em ordem ao parâmetro:

  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$

- A área sob uma curva paramétrica (dentro de uma curva fechada) para $t \in [0,\ 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$

  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) d$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \int -$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \cos^2 t\, dt$

- Usamos a fórmula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3}\int \cos t \cdot \sin t\, dt$

- Usamos a fórmula $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(2t)\, dt$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

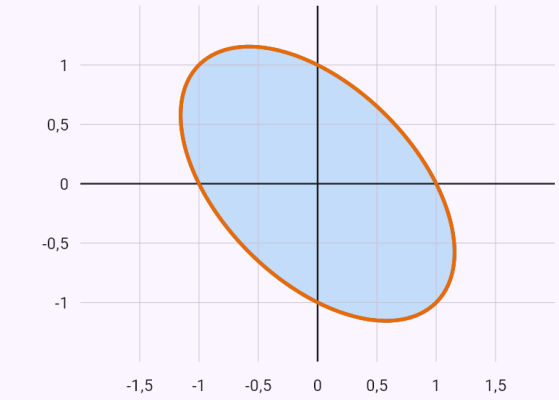
  $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \sin^2 t\, dt$

- Usamos a fórmula $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- A fórmula de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- O integral deu negativo (a curva é percorrida da direita para a esquerda) – tomamos o seu valor absoluto:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Gráfico



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Toda a curva dada pela equação; destacada a parte usada no cálculo.

Limitações conhecidas

- O comprimento de y = ∛x (e de curvas semelhantes) só é calculado numericamente – conduz a um integral elíptico, que não tem primitiva elementar.
- Rotação em torno do eixo y só para uma região de um lado do eixo.
- A fórmula com parâmetros só é dada se o resultado não depender da relação entre eles; se o sinal mudar com os valores, não é dada.
- Em curvas implícitas sem limites: cónicas (também com termo xy), laço pela origem e curvas de duas partes homogéneas (lemniscata).
- Integral definido com parâmetro, por enquanto só com limites finitos.
- Quando o critério de comparação por limite não decide (a função integranda oscila no infinito, por exemplo cos x/(x + ln x)), a aplicação não dá um valor sem provar a convergência e indica que o integral ainda não está resolvido.

32. Séries infinitas

Numa série numérica, a aplicação verifica primeiro a condição necessária de convergência e depois escolhe um critério conforme a forma da série – série geométrica, $\Sigma\, 1/n^p$, critério da razão, da raiz, de comparação por passagem ao limite, do integral ou de Leibniz; numa série alternada distingue convergência absoluta e simples. Quando possível, soma a série. O gráfico mostra os termos e as somas parciais.

Séries numéricas

A aplicação encontra a soma de séries geométricas e telescópicas (de Mengoli), de séries $\Sigma\, P(n)q^n$ e de séries conhecidas ($\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$); caso contrário, calcula-a numericamente. Uma soma finita calcula-se como na escola – telescópica, aritmética, geométrica, senão termo a termo. Também se resolve uma equação com a soma de uma série geométrica, verificando a condição de convergência $|q| < 1$.

Uma soma até uma letra (sum(k^2, k, 1, n)) pelas fórmulas das somas de potências, uma geométrica pela sua fórmula e um termo racional por frações parciais (telescópica); o resultado é verificado nos primeiros termos.

Como introduzir

`soma(1/n^2)`	O termo geral; o índice n a partir de 1 (também sum).
`soma(1/n^2, n, 1, oo)`	Com o índice e o valor inicial.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	A partir de uma fotografia ou em LaTeX.
`1/n^2`	O termo geral com o chip «Série» – escreva o índice inicial no campo.
`soma(2k+1, k, 1, 100)`	Uma soma finita – com o índice, o limite inferior e o superior.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Uma soma até n – a fórmula da soma.

Exemplos

A série Σ 1/n² – converge, a soma é π²/6.

Enunciado: `sum(1/n^2)`

Resultado

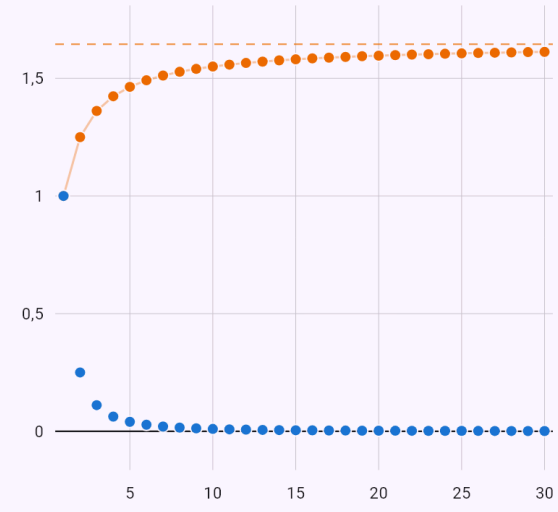
A série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é do tipo Σ 1/n^p com p = 2 > 1 – converge.
- A soma de uma série conhecida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Gráfico



Os pontos são os termos a_n e as somas parciais s_n = a_1 + … + a_n. Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

O critério de Leibniz – converge simplesmente.

Enunciado: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Resultado

A série converge, mas não absolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Os termos têm sinais diferentes – primeiro a convergência absoluta

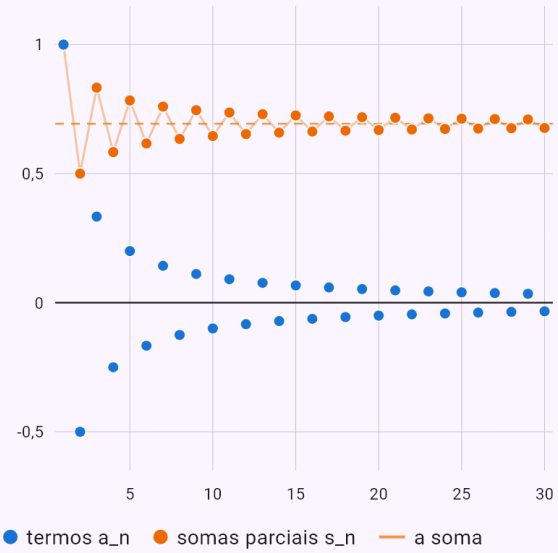
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- A série harmónica diverge – os termos agrupados por potências de dois, cada grupo pelo menos 1/2

  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Critério de Leibniz: |a_n| = $\frac{1}{n}$ decresce e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – a série converge.
- Conclusão: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- A soma de uma série conhecida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Gráfico



Os pontos são os termos a_n e as somas parciais s_n = a_1 + … + a_n. Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

O critério da razão e a soma.

Enunciado: `sum(n/2^n)`

Resultado

A série converge.

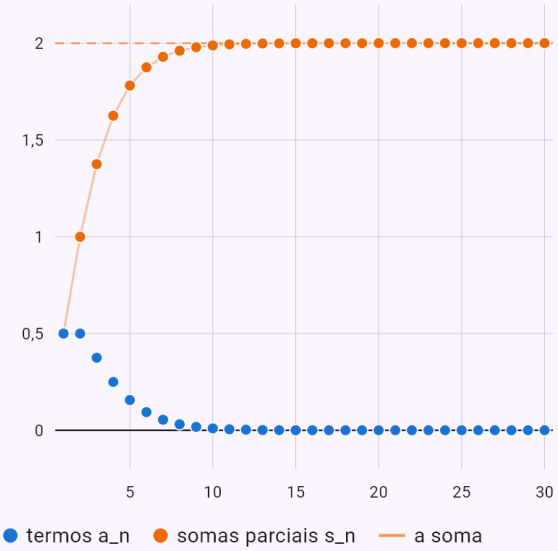
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Critério da razão (d'Alembert) – a série converge.

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Uma série Σ P(n)·qⁿ somada derivando a série geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Gráfico



Os pontos são os termos a_n e as somas parciais s_n = a_1 + … + a_n. Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

A condição necessária não se verifica – a série diverge.

Enunciado: `sum(n/(n+1))`

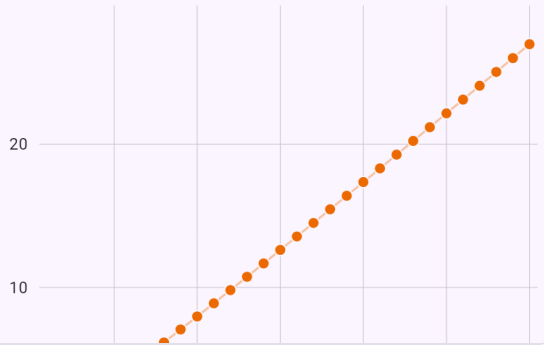
Resultado

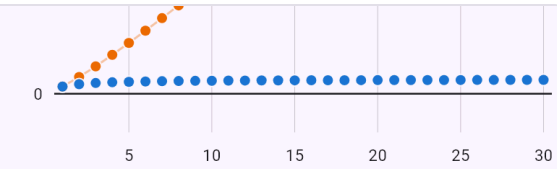
A série diverge.

Passos

- A condição necessária de convergência não se verifica: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Gráfico





Os pontos são os termos a_n e as somas parciais s_n = a_1 + … + a_n. Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

Soma telescópica – ficam o primeiro e o último termo.

Enunciado: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Resultado

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Passos

- Soma telescópica – os termos vizinhos cancelam-se, ficam só o primeiro e o último: $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Equação com a soma de uma série geométrica.

Enunciado: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Resultado

$$x = -1$$

Passos

- A série é geométrica de razão q = 2^x e converge para $|2^x| < 1$; a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Resolvemos: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ cumpre a condição de convergência: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

A soma dos quadrados pela fórmula.

Enunciado: `sum(k^2, k, 1, n)`

Resultado

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passos

- Usamos as fórmulas das somas de potências: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- A soma: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Uma soma telescópica até n – frações parciais.

Enunciado: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Resultado

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Passos

- Decompomos o termo em frações parciais – as suas partes anulam-se uma após outra na soma (soma telescópica): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- A soma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Séries de potências

Numa série de potências, a aplicação encontra o raio de convergência pelo critério da razão, estuda os extremos como séries numéricas e indica o intervalo de convergência; quando possível, também a soma. O gráfico mostra as somas parciais com um cursor para o número de termos.

Exemplos

O intervalo de convergência [−1, 1[.

Enunciado: `sum(x^n/n)`

Resultado

$$x \in [-1,\ 1)$$

Passos

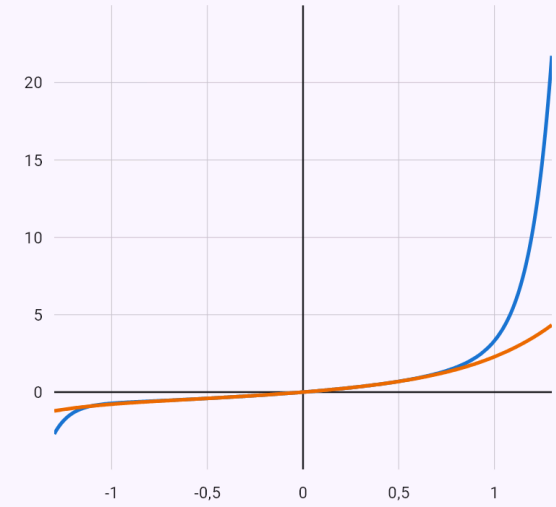
- O raio de convergência R = 1 pelo critério da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- O extremo $x = -1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- O extremo $x = 1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge pelo agrupamento dos termos da série harmónica.
- O intervalo de convergência: $x \in [-1,\ 1)$

Gráfico

Termos: 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Escolhe o número de termos com o cursor – as somas parciais aproximam-se da soma apenas dentro do intervalo de convergência.

Série de Taylor

A série de Taylor de uma função é obtida a partir de desenvolvimentos conhecidos (e^x, sin x, ln(1 + x), …) por substituição, e a aplicação determina o seu intervalo de convergência.

Como introduzir

`taylor(e^x, 0, oo)`	A função, o ponto e oo em vez do grau; ou o chip «Polinómio de Taylor» → «Série».

Exemplos

A série de ln(1 + x) e o seu intervalo de convergência.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Resultado

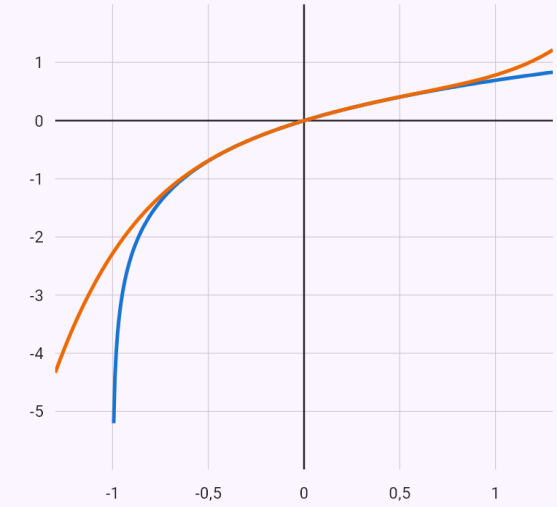
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Passos

- Do desenvolvimento conhecido $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ com $u = x$:
  $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- O raio de convergência R = 1 pelo critério da razão
  $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- O extremo $x = -1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge pelo agrupamento dos termos da série harmónica.
- O extremo $x = 1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- O intervalo de convergência: $x \in (-1, 1]$

Gráfico

Termos: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Escolhe o número de termos com o cursor – as somas parciais aproximam-se da soma apenas dentro do intervalo de convergência.

33. Séries de Fourier

A aplicação constrói a série de Fourier de uma função num intervalo tomado como um período (sem indicação, em [−π, π]), ou a série de senos ou de cossenos de uma função em [0, L]. A função também pode ser definida por ramos.

Calcula os coeficientes por integrais com toda a resolução (por partes com o parâmetro n), substitui sin nπ = 0 e cos nπ = $(-1)^n$ e aproveita a simetria das funções pares e ímpares. Nos pontos de descontinuidade determina a soma da série pelo teorema de Dirichlet e, substituindo um ponto e com a identidade de Parseval, deduz somas de séries numéricas (como Σ $1/n^2 = \pi^2/6$). O gráfico mostra o prolongamento periódico da função e as somas parciais com um cursor.

O botão «Complexa» (ou fourierc) mostra também a forma complexa: os coeficientes c_n, a sua relação com a_n e b_n e os espetros de amplitude e fase.

Como introduzir

`fourier(x^2, -pi, pi)`	A função e o intervalo.
`fouriersin(x, 0, pi)`	A série de senos (fouriercos – a de cossenos).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Uma função definida por ramos, linha a linha, com o chip «Série de Fourier».
`x^2`	Uma função com o chip «Série de Fourier» – aí escolhe o tipo de série e o intervalo.

Exemplos

Uma função par – só cossenos; as somas Σ 1/n² e Σ 1/n⁴.

Enunciado: `fourier(x^2)`

Resultado

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

Passos

- O intervalo $[-\pi,\ \pi]$ é um período: $T = 2\pi$, meio período $l = \pi$. Procuramos a série com os coeficientes

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- A função é par, $f(-x) = x^2 = f(x)$, por isso os coeficientes dos senos são nulos e basta calcular os outros sobre metade do intervalo

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- O coeficiente a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$

- Substituímos os limites: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

- O coeficiente a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, logo u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, logo u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:
  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Para n inteiro, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Substituímos os limites

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Substituímos os coeficientes na série

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- A extensão periódica da função é contínua, por isso pelo teorema de Dirichlet a soma da série é f(x) para $x \in [-\pi, \pi]$
- Substituindo $x = 0$ obtemos a soma de uma série numérica

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Substituindo $x = \pi$ obtemos a soma de uma série numérica

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

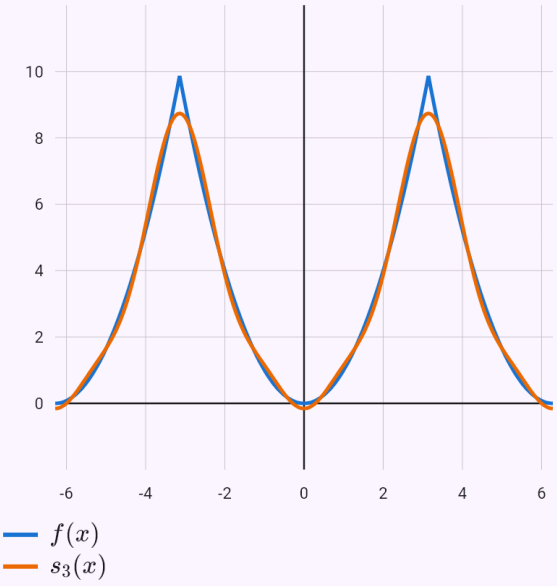
- Da identidade de Parseval obtemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Gráfico

Termos até n = 3



A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

Uma função definida por ramos – saltos e o fenómeno de Gibbs.

Enunciado: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Série de Fourier

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Passos

- O intervalo $[-\pi,\ \pi]$ é um período: $T = 2\pi$, meio período $l = \pi$. Procuramos a série com os coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- A função é ímpar, $f(-x) = -f(x)$, por isso o termo constante e os coeficientes dos cossenos são nulos e basta calcular os dos senos sobre metade do intervalo

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- O coeficiente b_n: $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para n inteiro, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Substituímos os limites

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Substituímos os coeficientes na série:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Os termos com n par são nulos – ficam só os n ímpares, n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Pelo teorema de Dirichlet a soma da série é f(x) para $x \in (-\pi,\ 0) \cup (0,\ \pi)$; num ponto de descontinuidade é a média dos limites laterais

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Substituindo $x = \dfrac{\pi}{2}$ obtemos a soma de uma série numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

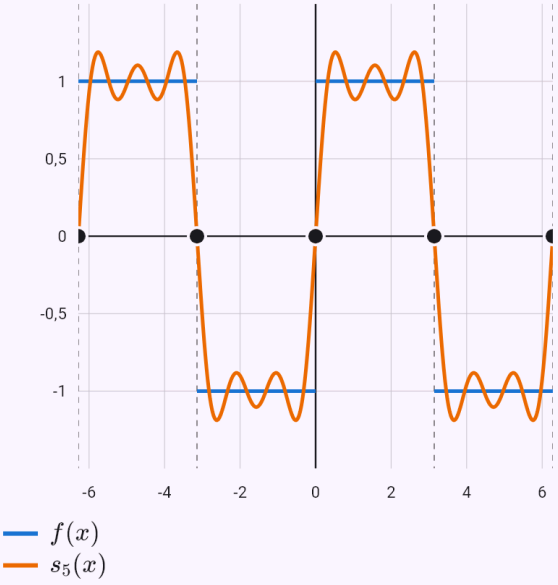
- Da identidade de Parseval obtemos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Gráfico

Termos até n = 5



A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

Uma série de senos e a soma 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Enunciado: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

Passos

- Estendemos a função de $[0,\ \pi]$ de forma ímpar e depois periódica ($T = 2\pi$) – resulta a série de senos
  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, onde
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
- O coeficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$
- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, logo u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$
- Tiramos a constante para fora do integral
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$
- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, logo u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$
- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Para n inteiro, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Substituímos os limites
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$
- Substituímos os coeficientes na série:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$
- Os termos com n par são nulos – ficam só os n ímpares, n = 2k − 1
  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$

- A extensão periódica da função é contínua, por isso pelo teorema de Dirichlet a soma da série é f(x) para $x \in [0,\ \pi]$
- Substituindo $x = \frac{\pi}{2}$ obtemos a soma de uma série numérica
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
- Da identidade de Parseval $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ obtemos
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Gráfico

Termos até n = 5



$f(x)$
$s_5(x)$

A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

Forma complexa com o seu espetro.

Enunciado: `fourierc(x, -pi, pi)`

Resultado

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i \, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Passos

- O intervalo $[-\pi, \pi]$ é um período: $T = 2\pi$, meio período $l = \pi$. Procuramos a série com os coeficientes

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- A função é ímpar, $f(-x) = -x = -f(x)$, por isso o termo constante e os coeficientes dos cossenos são nulos e basta calcular os dos senos sobre metade do intervalo

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- O coeficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, logo u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:
  $\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável:
  $\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Para n inteiro, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Substituímos os limites

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Substituímos os coeficientes na série:

  $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

- Pelo teorema de Dirichlet a soma da série é f(x) para $x \in (-\pi, \pi)$; num ponto de descontinuidade é a média dos limites laterais:

  $$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

- Substituindo $x = \frac{\pi}{2}$ obtemos a soma de uma série numérica

  $$s(\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Da identidade de Parseval obtemos

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Forma complexa da série: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$, onde $c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-inx}\,dx$. Relação com a forma real

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Substituímos os coeficientes da forma real

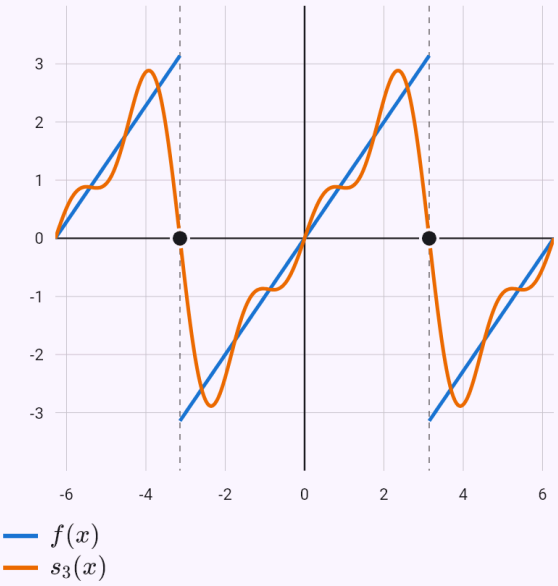
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

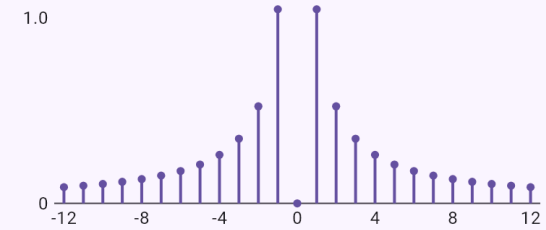
Gráfico

Termos até n = 3

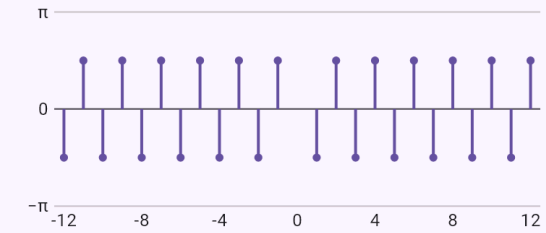


A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

Espetro de amplitude $|c_n|$



Espetro de fase $\arg c_n$



O eixo horizontal é n. A altura mostra o módulo ou o ângulo de c_n; os coeficientes nulos não têm fase.

Limitações conhecidas

- Uma função não limitada num extremo do intervalo (ln x em [0, 2π]) é desenvolvida com coeficientes calculados numericamente; no ponto onde cresce sem limite o teorema de Dirichlet não vale. Uma função com um polo (1/x) não é desenvolvida – não é integrável.
- Quando os coeficientes conduzem a um integral sem primitiva elementar (ln x em [1, 3]), são expressos com o seno e o cosseno integrais.

Gerado a partir da aplicação Mathtrace