Mathtrace – manual

IV. Equações diferenciais e análise avançada

Índice

IV. Equações diferenciais e análise avançada

34. Análise funcional

35. Funções de variável complexa

36. Equações diferenciais

37. Cálculo das variações

38. Equações diferenciais parciais

39. Recorrências e funções geradoras

40. Métodos numéricos

34. Análise funcional

> *"A análise funcional linear é, na verdade, álgebra linear em dimensão infinita."*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., na aula inaugural

A parte de cálculo da análise funcional linear. A norma de um vetor escreve-se ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ ou outro número; sem índice a aplicação calcula as três), a norma de uma sucessão no espaço ℓ^p ||1/n||_2 – a aplicação soma a série $\Sigma|a_n|^p$ e, se divergir, a sucessão não pertence ao espaço. A norma L^p de uma função é ||x^2||_{L^2(0; 1)}: a aplicação elimina o valor absoluto dividindo o integral nos zeros da função. A norma do supremo ||f||_{C⟨a; b⟩} é o maior valor de |f| entre os pontos estacionários e os extremos. dist(f, g, ⟨a; b⟩) dá a distância entre duas funções na norma do supremo e em L^2; holder(...) e minkowski(...) verificam as desigualdades de Hölder e de Minkowski com funções ou vetores dados.

Uma sucessão de funções convergência(x^n, ⟨0; 1⟩) (ou f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) é estudada em três passos: o limite pontual por troços (uma potência q^n tende para zero para |q| < 1), a convergência uniforme por $s_n = \sup |f_n - f|$ a partir do ponto estacionário x_n (um limite descontínuo de funções contínuas não pode ser uniforme) e a convergência em L^2 por $\int (f_n - f)^2$. Onde não sai uma fórmula, a aplicação estima o supremo e o integral numericamente. O gráfico tem um cursor sobre os termos f_1 a f_{20}.

O produto interno em L^2 com peso, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (opcionalmente w = ...), dá também as normas e o ângulo das funções. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) executa o processo de Gram–Schmidt e reconhece os polinómios clássicos: Legendre, Chebyshev com peso $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ ou $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerre com e^(−x) em ⟨0; ∞⟩ e Hermite com e^(−x²); funciona também com vetores. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) encontra a melhor aproximação por um polinómio de grau n como projeção ortogonal, com o erro e a desigualdade de Bessel. A identidade de Parseval (e a dedução de $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) está no capítulo das séries de Fourier.

As normas de matrizes escrevem-se ||[1 2; 3 4]||_1 (também _2, _oo e _F para a de Frobenius; sem índice a aplicação calcula-as todas), o número de condição cond([1 2; 3 4]) (opcionalmente p = 1). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) calcula a norma de um operador integral com o núcleo K(x, t): em C⟨a; b⟩ como o máximo de ∫|K| dt, em L^2 exatamente para um núcleo degenerado e, caso contrário, majorada pela norma de Hilbert-Schmidt. fnorm(g, ⟨a; b⟩) dá a norma do funcional φ(u) = ∫u·g em C e em L^2 (teorema de Riesz), com p = ... em L^p.

Escreva uma equação integral de segunda espécie tal como a vê: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholm) ou u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterra); também a partir de uma fotografia ou com os comandos fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) e volterra(K; f; λ; a). Um núcleo degenerado é reduzido a um sistema linear; com um parâmetro λ a aplicação encontra os valores característicos e as funções próprias e decide segundo

a alternativa de Fredholm. Os outros núcleos são resolvidos pela série de Neumann e pelo método de Nyström, e uma equação de Volterra com núcleo k(x − t) pela transformada de Laplace.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) verifica as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach (g transforma o intervalo em si mesmo, q = max |g′| < 1), calcula o número de passos a priori e itera com a estimativa a posteriori do erro (opcionalmente eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) faz o mesmo para o sistema x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) dá as aproximações sucessivas de Picard com o intervalo onde o operador é uma contração e um majorante do erro. As equações funcionais do tipo Cauchy – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), a de Jensen e a de d'Alembert – são resolvidas com a dedução.

Como introduzir

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normas de um vetor, de uma sucessão (ℓ^p) e de uma função (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	A distância entre duas funções na norma do supremo e em L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Desigualdades de Hölder e de Minkowski.
`convergência(f_n, ⟨a; b⟩)`	Convergência pontual, uniforme e em L^2 de uma sucessão de funções.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Produto interno, normas e ângulo de funções.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Processo de Gram–Schmidt para funções e vetores.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Melhor aproximação por um polinómio de grau n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normas de matrizes 1, 2, ∞, de Frobenius e o número de condição.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	A norma de um operador integral e do funcional $\int u \cdot g$.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Equações integrais de Fredholm e de Volterra de segunda espécie.

`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	O teorema do ponto fixo de Banach e as aproximações de Picard.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Equações funcionais do tipo Cauchy.

Exemplos

As normas 1, 2 e ∞ de um vetor.

Enunciado: `||(1; -2; 3)||`

Resultado

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Passos

- As três normas mais comuns do vetor $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: a soma dos valores absolutos das componentes ($\|\cdot\|_1$), o comprimento euclidiano ($\|\cdot\|_2$) e o maior valor absoluto de uma componente ($\|\cdot\|_\infty$)

  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$

  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$

  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

||1/n||₂ = π/√6 – o problema de Basileia.

Enunciado: `||1/n||_2`

Resultado

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Passos

- A norma da sucessão $a_n = \frac{1}{n}$ no espaço ℓ² para p = 2: somamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ e extraímos a raiz

  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

A série harmónica diverge – 1/n não pertence a ℓ^1.

Enunciado: `||1/n||_1`

Resultado

A sucessão (função) não pertence a este espaço – a sua norma é infinita.

Passos

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ – a sucessão $a_n = \frac{1}{n}$ não tem norma finita, não pertence ao espaço ℓ^p para p = 1

O valor absoluto eliminado dividindo o integral.

Enunciado: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Resultado

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Passos

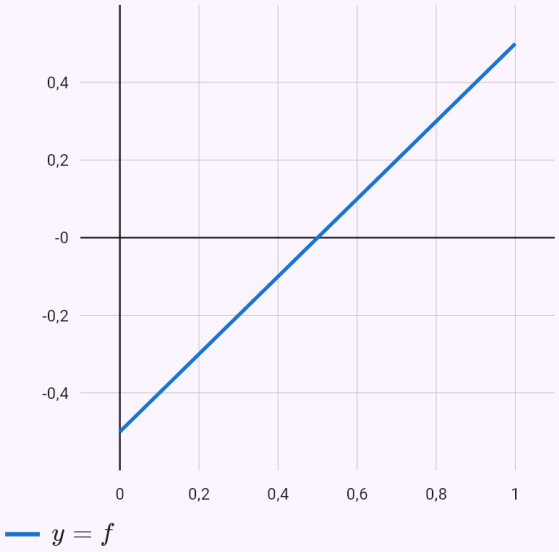
- Eliminamos o valor absoluto dividindo o integral nos zeros da função $x = \frac{1}{2}$ – em cada troço a função mantém o sinal

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- A norma no espaço L^p para p = 3: o integral $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, e portanto

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}3$$

Gráfico



A função no intervalo dado.

A norma do supremo a partir dos pontos estacionários e dos extremos.

Enunciado: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Resultado

$$\|f\|_\infty = 18$$

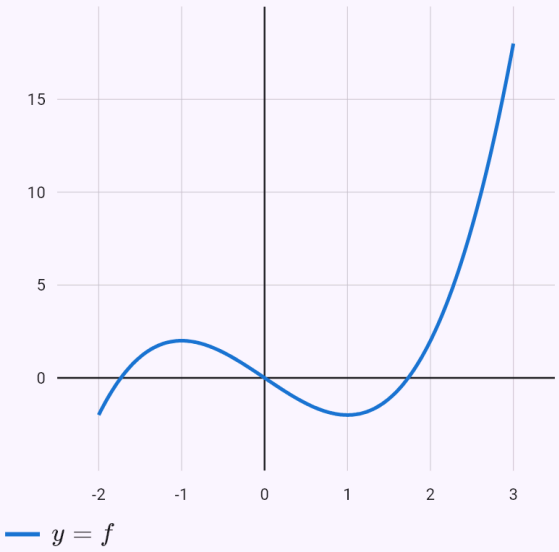
Passos

- A norma do supremo de uma função contínua num intervalo fechado é o maior valor de |f|. Procuramo-lo nos extremos e nos pontos estacionários interiores: a derivada $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, os pontos estacionários $x = -1,\ x = 1$
- Os valores de |f| nesses pontos

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- O maior deles é a norma do supremo
  $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle -2;\,3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Gráfico



A função no intervalo dado.

A distância na norma do supremo e em L².

Enunciado: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

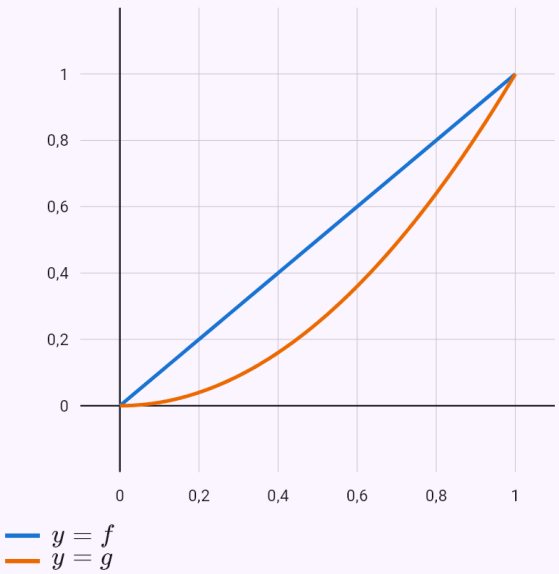
Passos

- A distância entre duas funções é a norma da sua diferença: $f - g = x(1 - x)$
- A norma do supremo de uma função contínua num intervalo fechado é o maior valor de |f|. Procuramo-lo nos extremos e nos pontos estacionários interiores: a derivada $(f - g)'(x) = 1 - 2x$, os pontos estacionários $x = \frac{1}{2}$
- Os valores de |f| nesses pontos

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

- O maior deles é a norma do supremo
  $\|(f-g)\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$
- A norma no espaço L² para p = 2: o integral
  $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, e portanto
  $\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$

Gráfico



Ambas as funções no intervalo dado.

Desigualdade de Hölder com o expoente conjugado q = 3/2.

Enunciado: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Passos

- A desigualdade de Hölder usa o expoente conjugado q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- A norma no espaço L^3 para p = 3: o integral $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, e portanto
  $\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$
- A norma no espaço $L^{\frac{3}{2}}$ para p = $\frac{3}{2}$: o integral $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, e portanto
  $\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$
- Lado esquerdo $\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, lado direito $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – a desigualdade de Hölder verifica-se.

x^n – pontualmente sim, uniformemente não, em L^2 sim.

Enunciado: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

A sucessão de funções converge pontualmente, mas não uniformemente.

Passos

- O limite é decidido pela potência q^n de base $q = x$: para $|q| < 1$, $q^n \to 0$ (mais depressa do que cresce qualquer potência de n); para $|q| > 1$ cresce sem limite. Os pontos com $|q| = 1$ calculam-se à parte.
- O limite pontual: para cada x fixo, $f_n(x) = x^n$ é uma sucessão de números; calculamos o seu limite quando $n \to \infty$

$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- A função limite

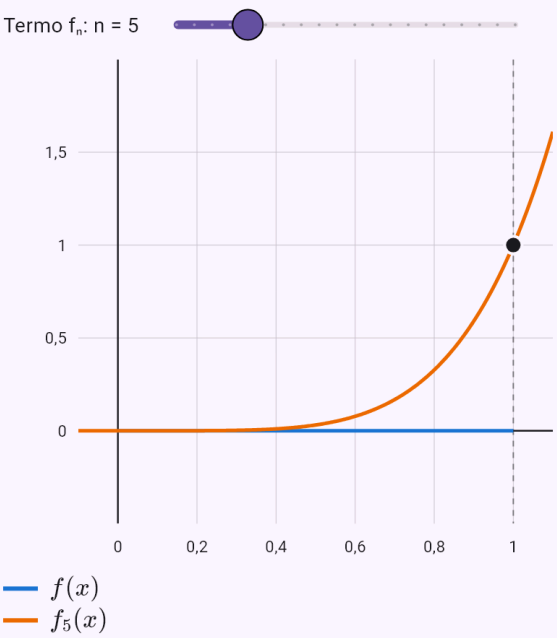
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Todas as funções f_n são contínuas, mas a função limite não é contínua em $x = 1$. O limite uniforme de funções contínuas é contínuo – logo a convergência não é uniforme.
- Convergência em L^2:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1},$$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – a sucessão converge em L^2.

Gráfico



A função limite f e o termo escolhido f_n – com o cursor vê-se como f_n se aproxima de f.

Convergência uniforme: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Enunciado: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

A sucessão de funções converge uniformemente.

Passos

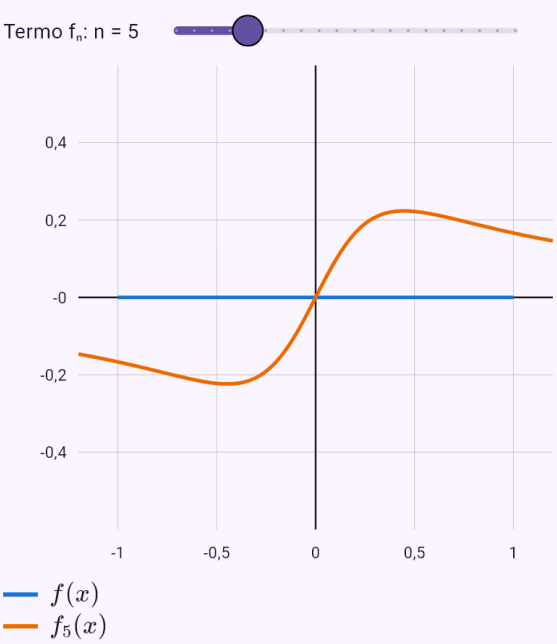
- O limite pontual: para cada x fixo, $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ é uma sucessão de números; calculamos o seu limite quando n → ∞

  $x \in \langle -1;\ 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

- A função limite: $f(x) = 0$
- Avaliamos a uniformidade por s_n = sup $|f_n - f|$. A diferença $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ tem a derivada $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; os candidatos ao maior valor são $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, a convergência é uniforme.
- Convergência em L² – calculamos o integral $\|f_n - f\|_2^2$ numericamente. Os valores tendem para zero – a sucessão converge em L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Gráfico



A função limite f e o termo escolhido f_n – com o cursor vê-se como f_n se aproxima de f.

A corcova viajante – pontualmente para zero, mas s_n e $\|f_n\|_2$ crescem.

Enunciado: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Resultado

A sucessão de funções converge pontualmente, mas não uniformemente.

Passos

- O limite é decidido pela potência q^n de base $q = e^{-x^2}$: para $|q| < 1$, $q^n \to 0$ (mais depressa do que cresce qualquer potência de n); para $|q| > 1$ cresce sem limite. Os pontos com $|q| = 1$ calculam-se à parte.
- O limite pontual: para cada x fixo, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ é uma sucessão de números; calculamos o seu limite quando $n \to \infty$

  $$x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

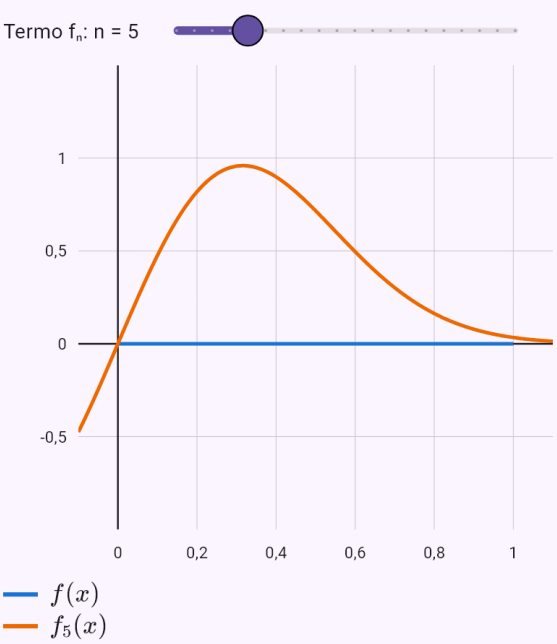
- A função limite: $f(x) = 0$
- Avaliamos a uniformidade por $s_n = \sup |f_n - f|$. A diferença $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ tem a derivada $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; os candidatos ao maior valor são $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (não 0), a convergência não é uniforme.

  $$s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$$

- Convergência em L^2 – calculamos o integral $\|f_n - f\|_2^2$ numericamente. Os valores não tendem para zero – a sucessão não converge em L^2.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Gráfico



A função limite f e o termo escolhido f_n – com o cursor vê-se como f_n se aproxima de f.

Produto interno, normas e ângulo de duas funções.

Enunciado: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

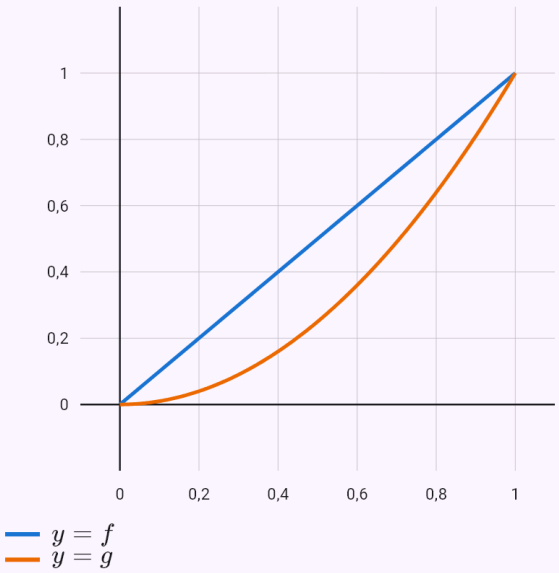
Resultado

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Passos

- O produto interno no espaço L²:
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- As normas das duas funções dadas pelo produto interno
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- O ângulo entre as funções (a desigualdade de Cauchy–Schwarz garante |cos φ| ≤ 1)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Gráfico



Ambas as funções no intervalo dado.

Polinómios de Legendre a partir de 1, x, x², x³.

Enunciado: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Passos

- O processo de Gram–Schmidt – mantemos a primeira função: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Passo 2: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Os produtos internos necessários: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Passo 3: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Os produtos internos necessários: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3},\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Passo 4: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Os produtos internos necessários

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5},\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

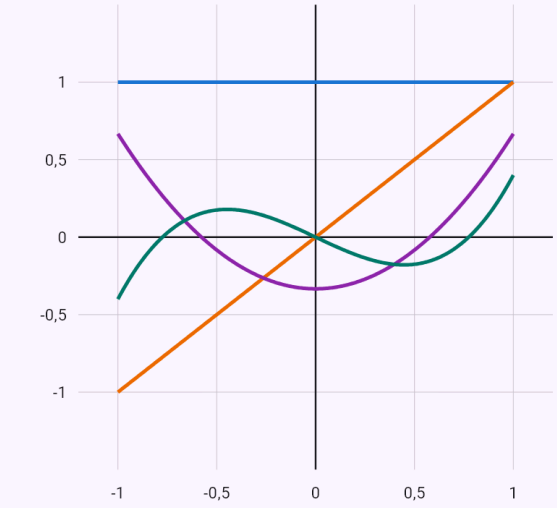
- Dividindo pelas normas obtemos um sistema ortonormado

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$

- São os polinómios de Legendre – na forma habitual com $P_k(1) = 1$

  $P_0(x) = 1$
  $P_1(x) = x$
  $P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$
  $P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$

Gráfico



As funções ortogonais no intervalo dado.

Polinómios de Chebyshev – os integrais a partir dos momentos do peso.

Enunciado: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Resultado

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

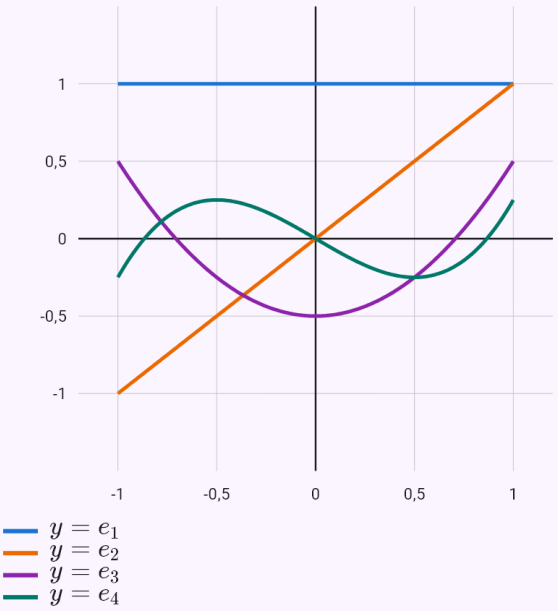
Passos

- Os produtos internos de polinómios com o peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ obtêm-se dos momentos do peso
  $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$
  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$
- O processo de Gram–Schmidt – mantemos a primeira função: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$
- Passo 2: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Os produtos internos necessários: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Passo 3: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Os produtos internos necessários
  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Passo 4: à função subtraímos as suas projeções sobre as anteriores: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$,
  $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Os produtos internos necessários
  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Dividindo pelas normas obtemos um sistema ortonormado
  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$
- São os polinómios de Chebyshev de primeira espécie,

$T_k(\cos t) = \cos kt$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$$

Gráfico



As funções ortogonais no intervalo dado.

A melhor aproximação quadrática de e^x em $\langle -1; 1 \rangle$.

Enunciado: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Passos

- A melhor aproximação em L^2 é a projeção ortogonal sobre os polinómios de grau no máximo n. O processo de Gram–Schmidt aplicado a 1, x, x^2, … dá uma base ortogonal: $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$; $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Os coeficientes da projeção

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

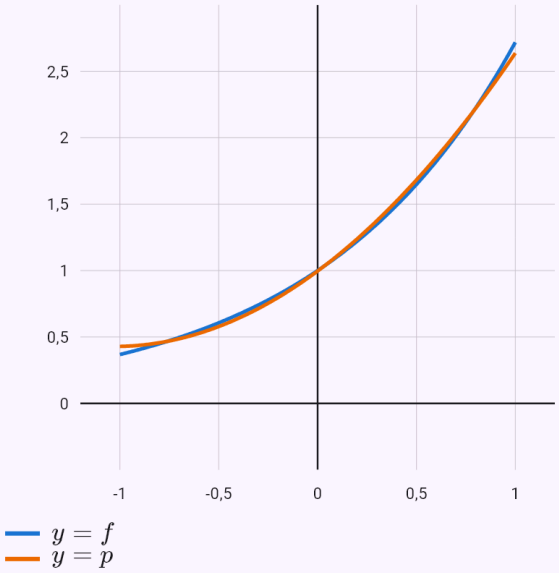
- A melhor aproximação

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$

- O erro pelo teorema de Pitágoras: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Desigualdade de Bessel: $\sum c_k^2 \|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Para um sistema completo (n → ∞) torna-se igualdade – a identidade de Parseval.

$$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2 \|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Gráfico



A função f e a sua melhor aproximação p.

As normas 1, 2, ∞ e de Frobenius de uma matriz.

Enunciado: `|||[1 2; 3 4]||`

Resultado

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Passos

- A matriz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- A norma das colunas é a maior soma dos valores absolutos de uma coluna:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, portanto
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- A norma espectral é a raiz do maior valor próprio de. Os valores próprios portanto
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- A norma das linhas é a maior soma dos valores absolutos de uma linha:
  $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, portanto
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- A norma de Frobenius é a raiz da soma dos quadrados de todos os elementos
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Uma matriz quase singular – κ ≈ 4·10⁴.

Enunciado: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Resultado

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Passos

- A matriz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- A norma espectral é a raiz do maior valor próprio de. Os valores próprios portanto
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- O número de condição. Indica quantas vezes o erro relativo dos dados pode crescer; ao resolver um sistema podem perder-se cerca de $4{,}6$ algarismos significativos – a matriz está mal condicionada.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}$

O núcleo muda de sinal – o integral é dividido em t = x.

Enunciado: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Passos

- A norma de um operador integral em C⟨a; b⟩ é o maior valor de φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. O núcleo $K(x,t) = x - t$ muda de sinal onde K = 0 – aí dividimos o integral
$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$
- A norma do supremo de uma função contínua num intervalo fechado é o maior valor de |f|. Procuramo-lo nos extremos e nos pontos estacionários interiores: a derivada $\varphi'(x) = 2x - 1$, os pontos estacionários $x = \frac{1}{2}$
- Os valores de |f| nesses pontos

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- O maior deles é a norma do supremo

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- O núcleo é degenerado, $K(x,t) = -t + x$. A sua norma em L² resulta então das matrizes de Gram das funções a𝕚(x) e b𝕚(t). Para comparação, a norma de Hilbert-Schmidt nunca é menor.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

A norma de um funcional em C e em L² (teorema de Riesz).

Enunciado: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

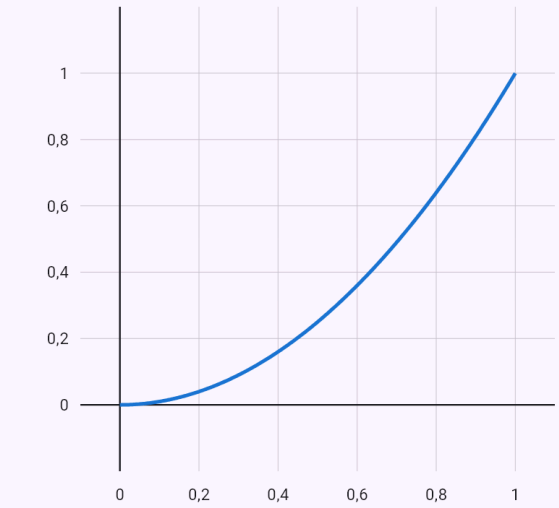
Resultado

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Passos

- O funcional φ(u) = ∫u·g em $C\langle 0;\,1\rangle$ com a norma do supremo: a sua norma é o integral de |g|, aproximado por funções contínuas u ≈ sgn g:
$$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_1$$
- A norma no espaço L𝕚 para p = 1: o integral $\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$, e portanto $\|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$
- Em $L^2\langle 0;\,1\rangle$ o funcional φ(u) = ∫u·g é o produto interno com g (teorema de Riesz). Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, a sua norma é ‖g‖₂, atingida para u = g/‖g‖₂:
$$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_2$$
- A norma no espaço L𝕚 para p = 2: o integral $\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}$, e portanto
$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Gráfico



A função no intervalo dado.

Um núcleo degenerado com o parâmetro λ.

Enunciado: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Resultado

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Condições: $\lambda \neq 3$

Passos

- Uma equação integral de Fredholm de segunda espécie (limites fixos): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\,u(t)\,dt$, o núcleo $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- O núcleo é degenerado – um produto de uma função de x por uma função de t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Os integrais com a função desconhecida são números – chamamos-lhes constantes desconhecidas $c = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$. A solução tem, portanto, a forma $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Substituindo esta forma nas definições das constantes obtém-se um sistema linear com os coeficientes

$$a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}$$

$$c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$$

- O sistema tem uma única solução onde o seu determinante não é nulo: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. As suas raízes são os valores característicos do núcleo: $\lambda_1 = 3$
- Para $\lambda \neq 3$ a solução do sistema é $c = \frac{1}{3-\lambda}$, portanto $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Para $\lambda_1 = 3$ a equação homogénea tem soluções não nulas – as funções próprias $\varphi_1(x) = x$
- Alternativa de Fredholm para $\lambda_1 = 3$: o sistema é impossível ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), a equação não tem solução para este λ (a função própria $\varphi(x) = x$).

Valores característicos e funções próprias.

Enunciado: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Resultado

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Passos

- Uma equação integral de Fredholm de segunda espécie (limites fixos): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\,u(t)\,dt$, o núcleo $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- O núcleo é degenerado – uma soma de 2 produtos de uma função de x por uma função de t: $K(x,t) = t + x$
- Os integrais com a função desconhecida são números – chamamos-lhes constantes desconhecidas $c_1 = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$, $c_2 = \int_0^1 u(t)\,dt$. A solução tem, portanto, a forma $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Substituindo esta forma nas definições das constantes obtém-se um sistema linear com os coeficientes

$$a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$$

$$c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$$

$$c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$$

- O sistema tem uma única solução onde o seu determinante não é nulo: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. As suas raízes são os valores característicos do núcleo: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282$, $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Para $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ a equação homogénea tem soluções não nulas – as funções próprias $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Para $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ a equação homogénea tem soluções não nulas – as funções próprias $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Um núcleo não degenerado – série de Neumann e método de Nyström.

Enunciado: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Resultado

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Passos

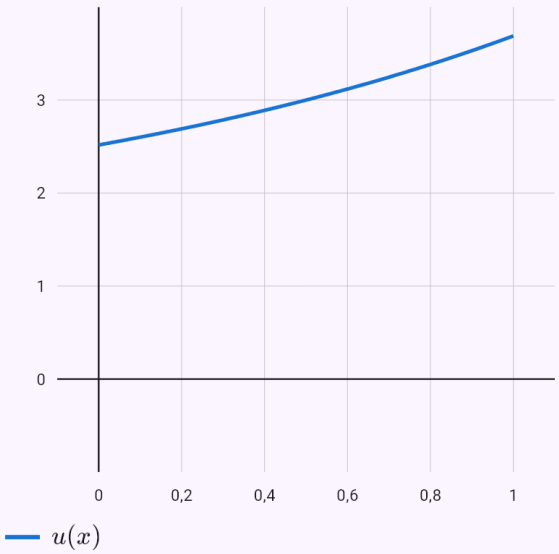
- Uma equação integral de Fredholm de segunda espécie (limites fixos): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\, dt$, o núcleo $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- O núcleo não é degenerado. A série de Neumann – as aproximações sucessivas $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – converge, porque

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Método de Nyström: o integral é substituído por uma quadratura de Gauss com 32 nós, a equação nos nós dá um sistema linear e os valores entre os nós resultam da própria equação.Comparando com metade dos nós, a precisão é de cerca de 10^{-8}. Os valores da solução

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$u(x)$	2,517	2,7372	2,9997	3,3134	3,6894

Gráfico



A solução da equação integral.

Uma equação de Volterra pela transformada de Laplace – cos x.

Enunciado: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

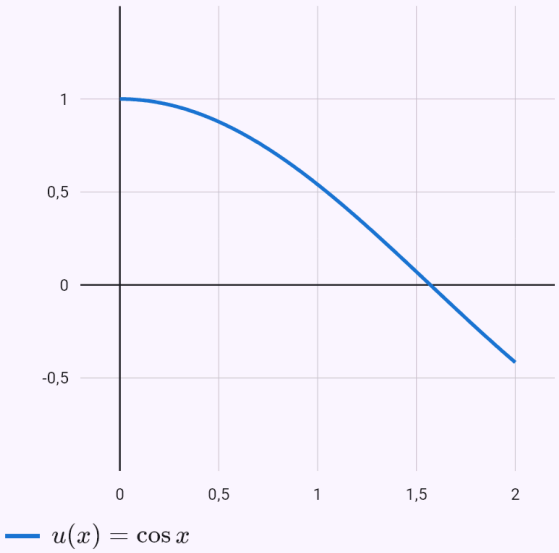
Resultado

$$u(x) = \cos x$$

Passos

- Uma equação integral de Volterra de segunda espécie (o limite superior é x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\, u(t)\, dt$, o núcleo $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- O núcleo depende apenas de x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – o integral é uma convolução, que a transformada de Laplace transforma num produto. As transformadas. A equação para as transformadas $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\, U(s)$, donde $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Invertendo, $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$
  $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$

Gráfico



A solução da equação integral.

O ponto fixo de cos x com as estimativas a priori e a posteriori.

Enunciado: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Passos

- O teorema do ponto fixo de Banach exige que $g(x) = \cos x$ transforme o intervalo $I = \langle 0;\ 1\rangle$ em si mesmo. O seu contradomínio (dos extremos e dos pontos estacionários) é $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – está contido em I.
- A norma do supremo de uma função contínua num intervalo fechado é o maior valor de |f|. A derivada $g''(x) = -\cos x$ não se anula no interior do intervalo – bastam os extremos.
- Os valores de |f| nesses pontos

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- O maior deles é a norma do supremo
  $\|g'\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$
- Pelo teorema de Lagrange, |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, sendo q o maior valor de |g'|:
  $q = \max\limits_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g é uma contração.
- A estimativa a priori: começamos em $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. De com $\varepsilon = 10^{-6}$ e $q = \sin 1$ são precisos n ≥ 86 passos.

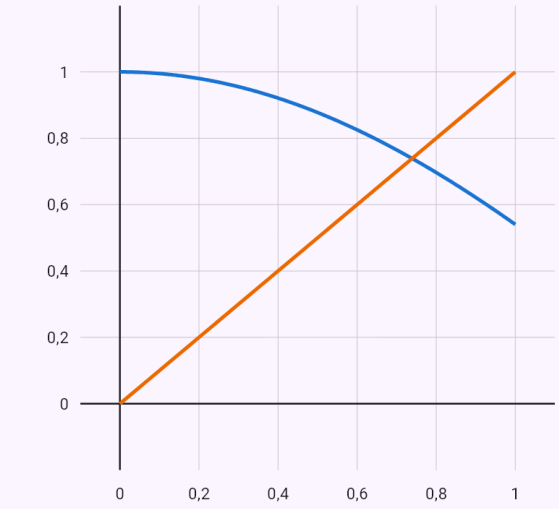
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\ln q}$$

- Iteramos $x_{n+1} = g(x_n)$; a última coluna é a estimativa a posteriori do erro e o cálculo termina quando ela desce abaixo de ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- O ponto fixo:
  $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Bastaram 38 passos em vez dos 86 da estimativa a priori – a estimativa a posteriori costuma ser muito mais precisa.

Gráfico



A função g e a reta y = x – o ponto fixo é a sua interseção.

O sistema x = Ax + b, uma contração na norma ∞.

Enunciado: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Resultado

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Passos

- O sistema na forma para iterar

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- A norma das colunas é a maior soma dos valores absolutos de uma coluna portanto

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- A norma das linhas é a maior soma dos valores absolutos de uma linha portanto

  $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- A aplicação x ↦ Ax + b é uma contração se alguma norma de A for menor que 1. Tomamos a menor:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- A estimativa a priori: começamos em $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. De com $\varepsilon = 10^{-6}$ e $q = 0{,}6$ são precisos n ≥ 31 passos.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iteramos $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; a última coluna é a estimativa a posteriori do erro e o cálculo termina quando ela desce abaixo de ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- O ponto fixo. Bastaram 28 passos em vez dos 31 da estimativa a priori – a estimativa a posteriori costuma ser muito mais precisa.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Para comparação, o ponto fixo exato do sistema linear

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

As aproximações de Picard e a solução exata.

Enunciado: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Resultado

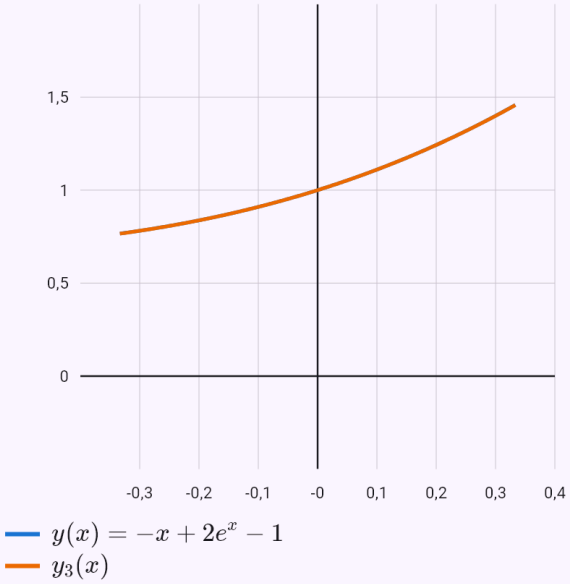
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Passos

- O problema $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ passa à equação integral y = T(y); as aproximações sucessivas de Picard iteram o operador T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Aproximação 1:
  $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Aproximação 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Aproximação 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Onde T é uma contração (teorema de Picard-Lindelöf): no retângulo $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ tem-se $M = \max_R |f| \doteq 3$ e. No intervalo com $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$, as aproximações ficam no retângulo e $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- O majorante do erro da última aproximação para $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$

- A solução exata para comparação: $y(x) = -x + 2e^x - 1$; o erro real no extremo do intervalo $|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Gráfico



A aproximação de Picard e a solução exata (se for conhecida).

A equação de Cauchy – f(x) = cx.

Enunciado: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Resultado

$$f(x) = c\,x$$

Passos

- A equação funcional de Cauchy de uma função aditiva: $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Supomos que a função f é contínua. Sem isso, a equação de Cauchy tem também soluções descontínuas «patológicas» (construídas com uma base de Hamel).
- Substituição: $x = y = 0: \quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Substituir y = −x mostra que a função é ímpar: $y = -x: \quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Por indução para n natural: $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Para racionais r = m/n $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Os racionais são densos e a função é contínua, logo vale para todo o x real: $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Todas as soluções contínuas (a, b, c constantes arbitrárias): $f(x) = c\,x$
- Verificação por substituição: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

A equação de d'Alembert – cos e cosh.

Enunciado: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Resultado

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Passos

- A equação funcional de d'Alembert: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Supomos que a função f é contínua. Sem isso, a equação de Cauchy tem também soluções descontínuas «patológicas» (construídas com uma base de Hamel).
- Substituição $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- Substituir x = 0 mostra que a função é par: $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- As soluções contínuas são suaves; derivando duas vezes em ordem a y em y = 0 obtém-se uma equação diferencial $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Consoante o sinal da constante k: $k = -c^2: \cos(cx), \qquad k = 0: 1, \qquad k = c^2: \cosh(cx)$
- Todas as soluções contínuas (a, b, c constantes arbitrárias): $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Verificação por substituição: $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Limitações conhecidas

- A aplicação encontra o limite pontual de sucessões cujo limite é decidido por uma potência q^n ou por uma expressão racional em n; as mais complicadas (sin nx sem dividir por n) pode recusá-las.
- A convergência é estudada num intervalo fechado e limitado; um intervalo infinito ainda não.
- O processo de Gram–Schmidt para no máximo 6 funções, a aproximação por um polinómio de grau no máximo 5.
- Um núcleo degenerado com no máximo 4 termos; com um parâmetro λ só núcleos degenerados, os outros são resolvidos numericamente para um λ numérico. Uma equação de Volterra exatamente só com um núcleo k(x − t) a partir de zero ou a(x)·b(t); caso contrário, por aproximações sucessivas e numericamente.
- Matrizes até 6 × 6, no máximo 6 aproximações de Picard. Equações funcionais só dos tipos indicados (e a de Cauchy com um termo polinomial adicional), sempre com soluções contínuas.

35. Funções de variável complexa

As equações de Cauchy-Riemann de f(z) verificam-se com cr(z^2 + 3z); a função pode escrever-se em z, z̄ (conj(z)), |z|, Re z, Im z ou diretamente em x e y. A app decompõe f = u + iv, calcula as derivadas parciais e substitui em u_x = v_y, u_y = −v_x. Se valem em todo o lado, a função é analítica e o resultado é a derivada f'(z) escrita em z; caso contrário a app indica onde valem (pontos ou uma curva) e a função não é analítica. Para uma função harmónica harmonic(u = x^2 - y^2) obtém a conjugada harmónica integrando as equações e toda a função f(z) pondo x = z, y = 0; também se pode dar a parte imaginária, harmonic(v = 2xy).

Valores das funções elementares em $\mathbb{C}$: o valor principal do logaritmo ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w com todos os valores que diferem por 2kπi, uma potência de expoente complexo i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh e cosh de um número complexo pelas fórmulas da soma. O argumento está no mesmo intervalo que nos números complexos (chip «Argumento principal»). As equações sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 resolvem-se pela substituição w = e^(iz) (e^z) e uma equação do segundo grau, e^z = 1 + i aplicando o logaritmo; o resultado é a solução geral com k ∈ $\mathbb{Z}$ e várias soluções no plano complexo. Uma equação em x sem solução real (sin x = 2) oferece o botão da solução complexa.

Singularidades e resíduos: singularities(f) encontra as raízes do denominador e as singularidades essenciais (e^(1/z), sin(1/z)), determina o seu tipo – removível, polo de ordem m, essencial – e calcula os resíduos: num polo simples g(a)/q'(a), num polo de ordem superior pela derivada de (z − a)^m f(z), numa singularidade essencial pela série de Laurent. Res(f, z = a) calcula um resíduo. A série de Laurent de uma função racional numa coroa laurent(f, 1 < |z| < 2) (ou |z| > 1, 0 < |z − a| < r, em torno de um ponto laurent(f, z = a)) constrói-se pelas frações simples sobre $\mathbb{C}$ e pela série geométrica de cada uma – conforme o seu polo esteja dentro ou fora da coroa. O integral sobre uma circunferência oint(f, |z − a| = r) (de uma foto \oint_{|z−a|=r}) calcula-se pelo teorema dos resíduos; sem singularidades no interior é nulo, uma singularidade sobre a circunferência é assinalada.

Resíduos na análise real: um integral impróprio de uma função racional sobre todo o eixo, com cos ax ou sin ax (lema de Jordan) e de 0 a ∞ de uma função par; um integral de uma função racional de cos t e sin t sobre ⟨0; 2π⟩ com z = e^(it). Os integrais com cosseno ou seno e sobre ⟨0; 2π⟩ vão diretamente por resíduos, para os outros escolha o chip «Por resíduos» (volta com «Método habitual»). O mesmo chip numa série soma Σ R(n) a partir de 1 (de 0 ou de outro inteiro) pelo núcleo π cot πz, uma série alternada por π/sin πz; a soma sobre todos os inteiros desde −∞ vai diretamente. A transformada inversa de Laplace de uma função racional invlaplace(F) (de uma foto \mathcal{L}^{-1}\{F\}) calcula-se como soma dos resíduos de F(s)e^(st).

O teorema de Rouché rouche(p, |z| < r) conta as raízes de um polinómio num disco pelo termo que domina a soma dos outros na circunferência, numa coroa r < |z| < R como diferença de dois discos; as raízes são mostradas no plano complexo. Uma aplicação conforme w = f(z) é decomposta em u e v, a

app indica onde é conforme (f' ≠ 0) e, numa transformação de Möbius (αz + β)/(γz + δ), encontra os pontos fixos e as imagens dos eixos real e imaginário e da circunferência unitária. O gráfico mostra a imagem da grelha de retas x = c e y = c.

A transformada de Fourier de uma função racional ftransform(1/(1 + t^2)) (de uma foto \mathcal{F}\{f\}) calcula-se por resíduos - para ω > 0 o caminho fecha-se no semiplano inferior, para ω < 0 no superior - e para uma função par (ímpar) o resultado escreve-se com |ω|. Para uma densidade em x dá a função característica da distribuição a menos do sinal de ω, para a distribuição de Cauchy simétrica diretamente e^(−|t|). A transformada Z inversa invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) é a soma dos resíduos de $F(z)z^{n-1}$ com o valor inicial x[0] = lim F(z) para z → ∞. O seu uso em filtros, controlo e ótica está no capítulo Aplicações da análise complexa.

Como introduzir

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	As equações de Cauchy-Riemann e a derivada.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	A conjugada harmónica de uma parte real (imaginária).
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logaritmo, potências, funções trigonométricas e equações em $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Um resíduo num ponto, todas as singularidades.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Uma série de Laurent numa coroa ou em torno de um ponto.
`oint(f, |z - a| = r)`	Um integral sobre uma circunferência pelo teorema dos resíduos.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Integrais reais por resíduos.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	A soma de uma série por resíduos.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	O número de raízes de um polinómio num disco ou numa coroa.
`w = (z - i)/(z + i)`	Uma aplicação conforme, uma transformação de Möbius.

`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	A transformada inversa de Laplace por resíduos.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Transformada de Fourier por resíduos.
`invz(z/(z - 1/2))`	Transformada Z inversa por resíduos.

Exemplos

Uma função analítica – as equações valem em todo o lado, a derivada em z.

Enunciado: `cr(z^2 + 3z)`

Resultado

$$f'(z) = 2z + 3$$

Passos

- Decompomos a função em parte real e imaginária, f = u + iv com z = x + iy: $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- As derivadas parciais de u e v em relação a x e y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Substituímos nas equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Ambas as equações valem em todo o plano e as derivadas parciais são contínuas – a função é analítica em todo $\mathbb{C}$.
- A derivada da função analítica, escrita em z:
  $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

As equações só valem na reta y = x – a função não é analítica.

Enunciado: `cr(x^2 + i y^2)`

Resultado

A função não é analítica – as equações de Cauchy-Riemann não valem em nenhuma região.

Passos

- Decompomos a função em parte real e imaginária, f = u + iv com z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- As derivadas parciais de u e v em relação a x e y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Substituímos nas equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Ambas as equações valem apenas onde $2(x - y) = 0$. Aí a função é derivável, mas nenhuma vizinhança de um ponto as satisfaz – a função não é analítica em parte nenhuma.

A conjugada harmónica e f(z) = z² + z.

Enunciado: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Resultado

$$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$$

Passos

- É dada a parte real u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Verificamos que é harmónica – o seu laplaciano é nulo: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- A primeira equação de Cauchy-Riemann $v_y = u_x$ dá v integrando em relação a y – a «constante» pode depender de x:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- Determinamos C(x) pela segunda equação $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- A conjugada harmónica: $v = 2xy + y + C$
- Escrevemos f(z) = u + iv em z – basta pôr x = z e y = 0:
  $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

O valor principal do logaritmo e todos os seus valores.

Enunciado: `ln(1 + i)`

Resultado

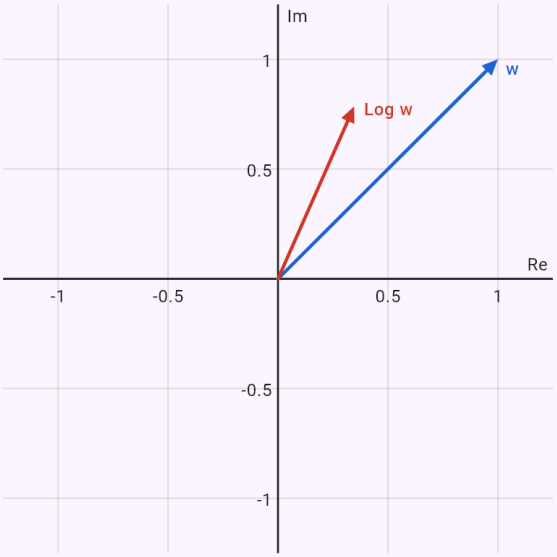
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Passos

- O valor principal do logaritmo é $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, o argumento em $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- O módulo e o argumento principal do número: $|1+i| = \sqrt{2}, \ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- A exponencial é periódica de período 2πi, por isso o logaritmo tem infinitos valores – diferem por múltiplos de 2πi

  $$\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

i^i é o número real e^(−π/2).

Enunciado: `i^i`

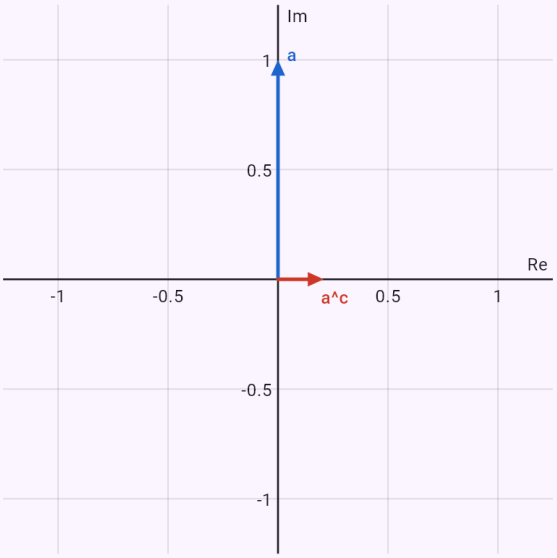
Resultado

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

Passos

- Uma potência de expoente complexo define-se pelo valor principal do logaritmo (argumento em $\langle 0; 2\pi)$) $a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$
- Decompomos o expoente em parte real e imaginária: $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- O valor principal da potência, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Com os outros valores do logaritmo obtemos todos os valores da potência: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$

Gráfico



O plano complexo – os números dados a azul, o resultado a vermelho, o argumento φ como arco a partir do semieixo real positivo.

A equação sin z = 2 – a substituição w = e^(iz) e uma equação do segundo grau.

Enunciado: `sin z = 2`

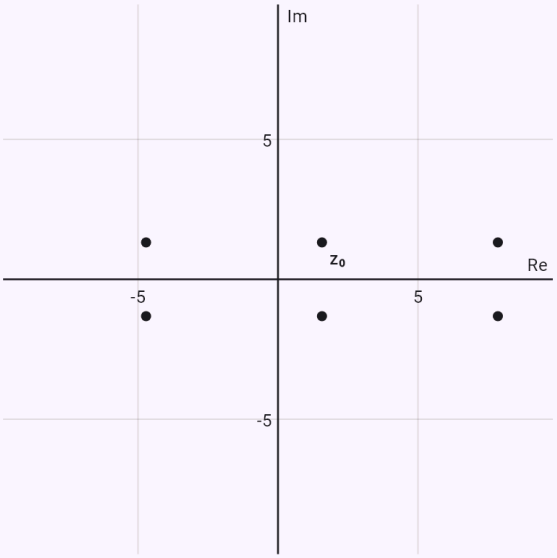
Resultado

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Passos

- Escrevemos a função com exponenciais e substituímos: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Multiplicando por w obtemos uma equação do segundo grau: $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- As suas raízes: $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Voltamos a z: $iz = \log w$, portanto $z = -i \log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i \ln |w|$ (argumento em $\langle 0; 2\pi \rangle$): $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Gráfico



Plano complexo (de Gauss) – as soluções como pontos: no eixo horizontal a parte real, no vertical a imaginária.

Um polo de ordem inferior graças a um zero do numerador, e um polo simples.

Enunciado: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

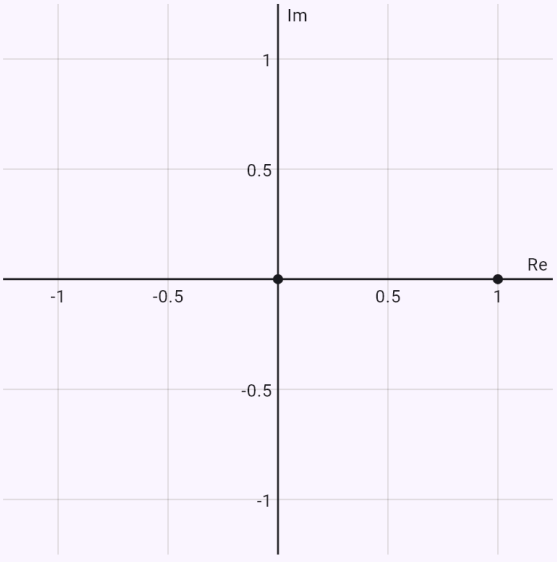
Resultado

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Passos

- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- Em 0 o denominador tem uma raiz de multiplicidade 3 e o numerador de multiplicidade 1 – é um polo de ordem 2
- O resíduo num polo de ordem 2 $\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},$ I
- Em 1 o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q $\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z^$

Gráfico



Plano complexo – os pontos singulares da função.

Uma singularidade essencial – o resíduo pela série de Laurent.

Enunciado: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Resultado

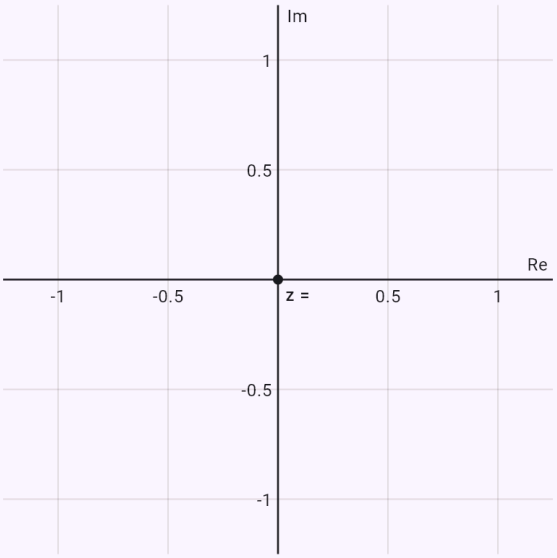
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Passos

- Em 0 há uma singularidade essencial – o expoente (argumento) tem aí um polo e a parte principal da série de Laurent é infinita.
- O resíduo é o coeficiente c_{-1} de $\frac{1}{z-a}$ na série de Laurent em torno de 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Gráfico



Plano complexo – os pontos singulares da função.

A série de Laurent na coroa 1 < |z| < 2 – uma fração em potências de 1/z, a outra em potências de z.

Enunciado: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

Resultado

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Passos

- Pontos singulares: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Procuramos a série de Laurent na coroa $1 < |z| < 2$ – não contém nenhum ponto singular.
- Decompomos a função em frações simples (sobre $\mathbb{C}$): $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- O polo da fração está dentro da circunferência interior – pomos $\frac{1}{z-c}$ em evidência e usamos a série geométrica em potências de $\frac{1}{z-c}$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

- O polo da fração está fora da coroa – pomos uma constante em evidência e usamos a série geométrica em potências de z - c

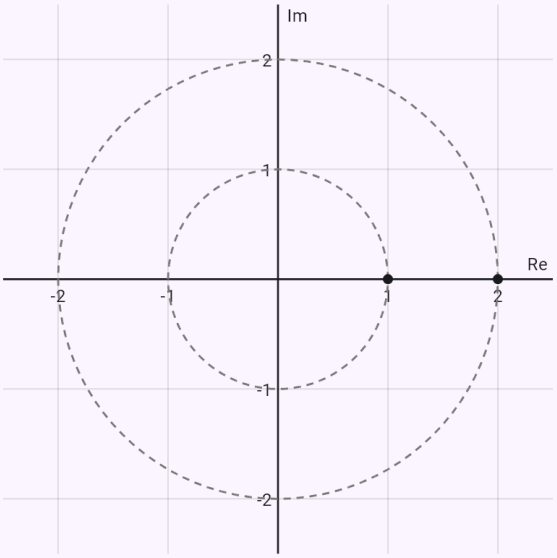
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

- Somamos as séries termo a termo

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$

- O termo geral: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

Gráfico



Plano complexo – a coroa da série de Laurent (a tracejado) e os pontos singulares.

O teorema dos resíduos num polo de ordem 2.

Enunciado: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Resultado

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

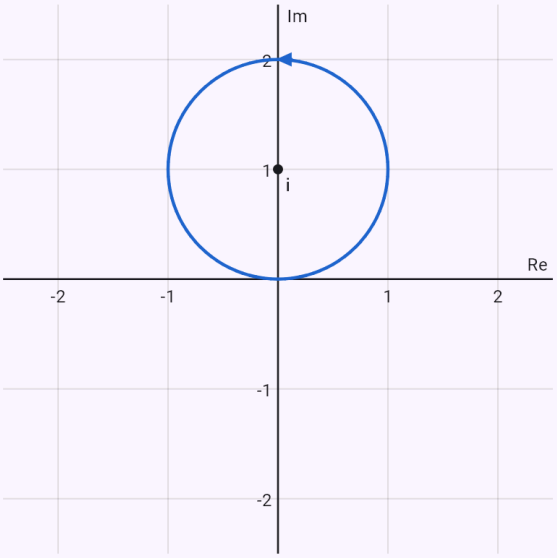
Passos

- Integramos sobre a circunferência de centro i e raio 1, no sentido anti-horário: $|z-i|=1$
- Dentro da circunferência estão os pontos singulares $z_0 = i$, fora $\emptyset$
- Em i o denominador tem uma raiz de multiplicidade 2 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 2
- O resíduo num polo de ordem 2

  $\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right], \quad (z-i)^2 f(z) = $
- Pelo teorema dos resíduos

  $\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i\left(e^i\right) = 2\pi i\, e^i$

Gráfico



Plano complexo – a circunferência de integração (a seta indica o sentido) e os pontos singulares.

Um integral impróprio com cosseno – lema de Jordan.

Enunciado: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Resultado

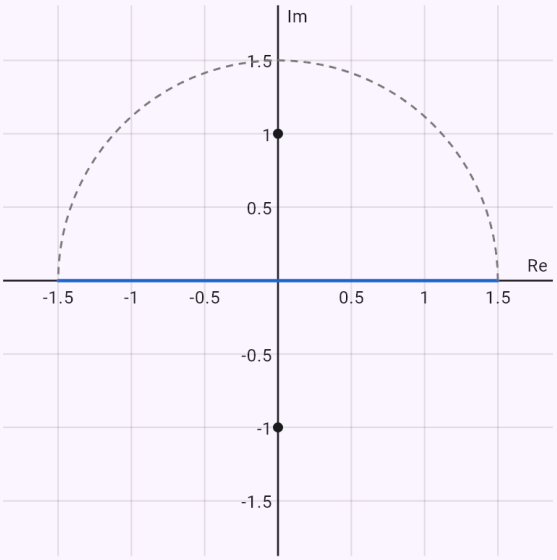
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

Passos

- Com um cosseno ou um seno basta $\deg Q \geq \deg P + 1$ e Q sem raízes reais – o integral sobre a semicircunferência tende para zero pelo lema de Jordan: $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- O cosseno é a parte real de e^{iax}
- Fechamos o eixo real com uma grande semicircunferência no semiplano superior. Dentro estão os polos $z_0 = i$, o integral sobre a semicircunferência tende para zero.
- Em i o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

  $\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$
- Pelo teorema dos resíduos o integral é 2πi vezes a soma dos resíduos no semiplano superior: $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Gráfico



Plano complexo – o eixo real fechado por uma semicircunferência no semiplano superior (a tracejado) e os polos do integrando.

Um integral sobre ⟨0; 2π⟩ como integral sobre a circunferência unitária.

Enunciado: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Resultado

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Passos

- Transformamos o integral sobre ⟨0; 2π⟩ num integral sobre a circunferência unitária com a substituição

  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$

- Depois de substituir e simplificar obtemos o integral de uma função racional sobre |z| = 1: $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$

- Dentro da circunferência estão os pontos singulares $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, fora $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- Em $-2 + \sqrt{3}$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1

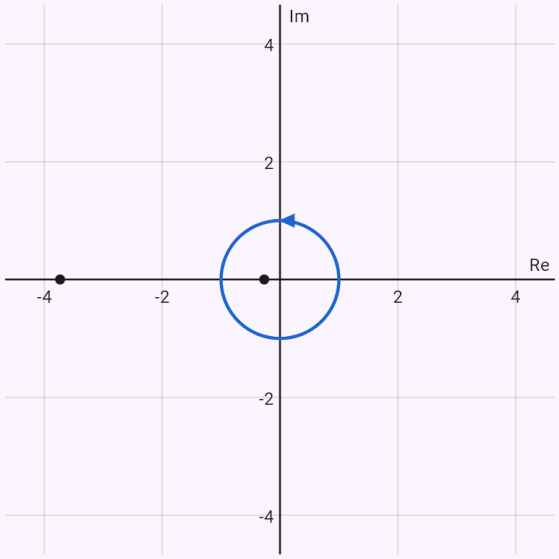
- O resíduo num polo simples, f = g/q

  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3},\quad g =$

- Pelo teorema dos resíduos

  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Gráfico



Plano complexo – a circunferência unitária z = e^(it) e os polos do integrando.

Σ 1/n² = π²/6 – o resíduo em zero, onde também o núcleo tem um polo.

Enunciado: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Por resíduos

Resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Cálculo do integral ou da soma

Método habitual ✓ Por resíduos

Passos

- A função π cot πz tem em cada inteiro n um polo simples de resíduo 1. O integral sobre um quadrado grande tende para zero, por isso a soma da série é menos a soma dos resíduos nos polos de R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \cot \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- A condição $\deg Q \geq \deg P + 2$ verifica-se: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $z^2 = 0:\ z_0 = 0$
- Em 0 tanto R como o núcleo têm um polo – o resíduo é o coeficiente de 1/z do seu produto

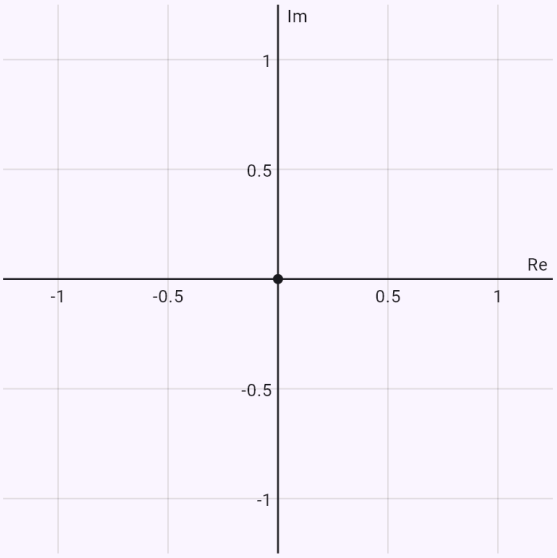
$$\pi \cot \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- A soma sobre todos os inteiros:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R é par, R(−n) = R(n), por isso a soma a partir de 1 é metade (sem o termo n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Gráfico



Plano complexo – os polos de R(z); o núcleo π cot πz tem ainda polos em todos os inteiros.

Teorema de Rouché – quatro raízes na coroa 1 < |z| < 2.

Enunciado: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

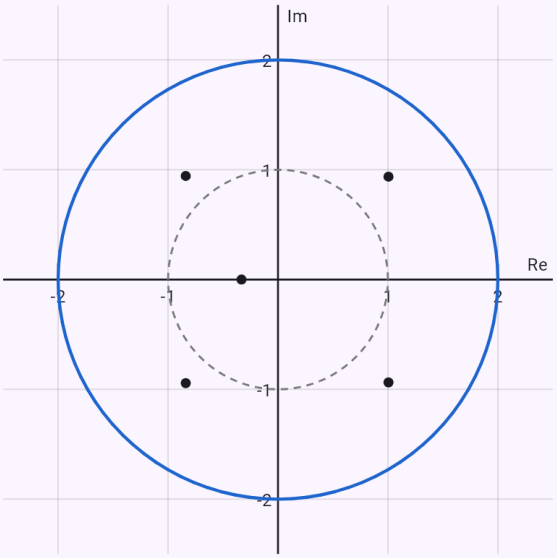
Resultado

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Passos

- Na circunferência |z| = 2 o termo z^5 domina a soma dos outros – pelo teorema de Rouché o polinómio tem no disco tantas raízes como z^5, ou seja 5:
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32,\quad 32 > 7$
- Na circunferência |z| = 1 o termo $3z$ domina a soma dos outros – pelo teorema de Rouché o polinómio tem no disco tantas raízes como $3z$, ou seja 1:
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1,\quad 3 > 2$
- Na coroa é a diferença dos números no disco maior e no menor: $5 - 1 = 4$
- As raízes numericamente, para verificação
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Gráfico



Plano complexo – as circunferências e as raízes do polinómio (calculadas numericamente).

Uma transformação de Möbius – o semiplano superior no disco unitário.

Enunciado: `w = (z - i)/(z + i)`

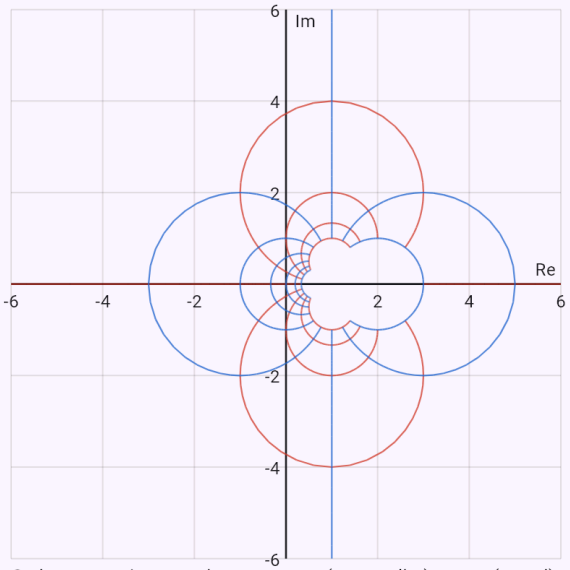
Resultado

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Passos

- Escrevemos a aplicação por componentes
  $w = u + iv,\quad u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- A aplicação é conforme em todo o lado exceto no polo $z_0 = -i$: $f'(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- É uma transformação de Möbius $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Os pontos fixos resolvem a equação f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0:\ z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- O eixo real é transformado em $|w| = 1$
- O eixo imaginário é transformado em $\operatorname{Im} w = 0$
- A circunferência unitária é transformada em $\operatorname{Re} w = 0$
- O gráfico mostra a imagem de uma grelha – as retas x = c (a vermelho) e y = c (a azul) para |c| ≤ 2 com passo $0{,}5$

Gráfico



O plano w – a imagem das retas x = c (a vermelho) e y = c (a azul) por w = f(z).

A transformada inversa de Laplace como soma de resíduos.

Enunciado: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Resultado

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Passos

- A transformada inversa de Laplace de uma função racional é a soma dos resíduos de $F(s)\,e^{st}$ em todos os polos de F

  $$f(t) = \sum \operatorname{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0:\ s_1 = -1,\ s_2 = -2i,\ s_3 = 2i$
- Em -1 o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- Em $-2i$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

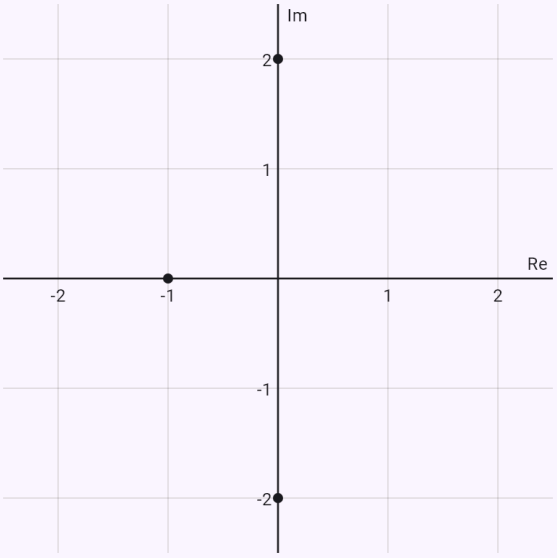
  $$\operatorname{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- Em $2i$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Somamos os resíduos e escrevemos o resultado na forma real: $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Gráfico



Plano complexo – os polos de F(s).

Transformada de Fourier da função de Lorentz: π·e^(−|ω|).

Enunciado: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Resultado

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Passos

- Transformada de Fourier de uma função racional: fechamos o integral com uma semicircunferência grande (lema de Jordan) e somamos os resíduos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $t^2 + 1 = 0:\ t_1 = -i,\ t_2 = i$
- Em $-i$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw},\ q' =$$

- Em i o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw},\ q' = 2t$$

- Para ω > 0 fechamos o caminho no semiplano inferior (sentido negativo, −2πi)

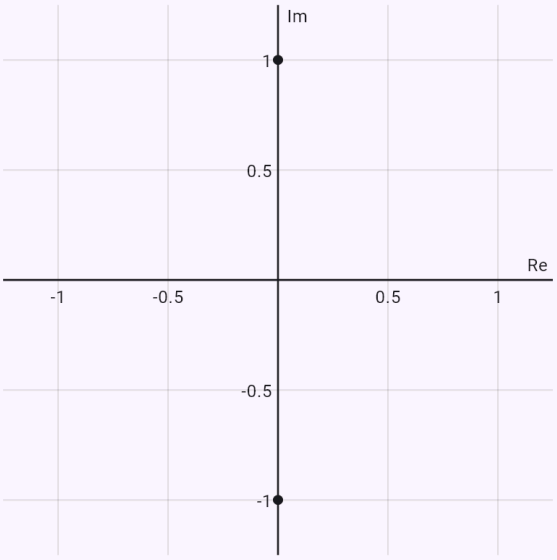
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Para ω < 0 fechamos o caminho no semiplano superior (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Resultado - a transformada de Fourier: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Gráfico



Plano complexo – os polos de F(s).

Função característica da distribuição de Cauchy e^(−|t|).

Enunciado: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Resultado

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Passos

- Transformada de Fourier de uma função racional: fechamos o integral com uma semicircunferência grande (lema de Jordan) e somamos os resíduos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $\pi x^2 + \pi = 0 : \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- Em $-i$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- Em i o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Para ω > 0 fechamos o caminho no semiplano inferior (sentido negativo, −2πi)

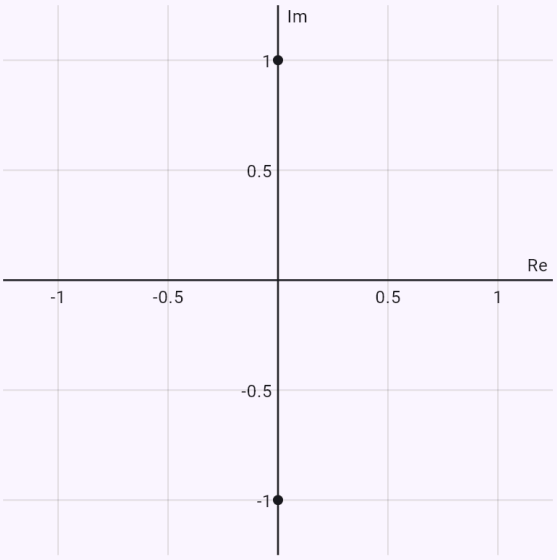
$$\omega > 0 : \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k < 0} \operatorname{Res} = e^{-\omega}$$

- Para ω < 0 fechamos o caminho no semiplano superior (+2πi)

$$\omega < 0 : \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k > 0} \operatorname{Res} = e^{\omega}$$

- Resultado - a transformada de Fourier: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Gráfico



Plano complexo – os polos de F(s).

Transformada Z inversa com dois polos: x[n] = 2 − 2^{-n}.

Enunciado: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Resultado

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Passos

- A transformada Z inversa é a soma dos resíduos de $F(z)z^{n-1}$ nos polos de F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Os pontos singulares – as raízes do denominador: $2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2},\; z_2 = 1$
- Em $\frac{1}{2}$ o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

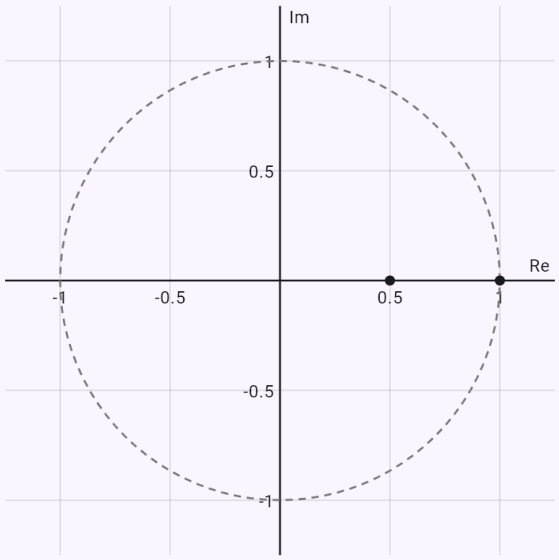
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1},\; q' = 4$$

- Em 1 o denominador tem uma raiz de multiplicidade 1 e o numerador de multiplicidade 0 – é um polo de ordem 1
- O resíduo num polo simples, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1},\; q' = 4z - 3$$

- O valor inicial é o limite para z → ∞: $x[0] = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$
- Somamos os resíduos: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Gráfico



Plano complexo – os polos de F(s).

Limitações conhecidas

- As singularidades encontram-se em funções com um polinómio no denominador (e as singularidades essenciais de e^h, sin h, cos h); um denominador como sin z (infinitos polos) ainda não é suportado.
- A série de Laurent numa coroa funciona para funções racionais, numa singularidade essencial só em torno do ponto quando a função não tem outra singularidade.
- Os integrais sobre outras curvas que não uma circunferência (quadrado, elipse), o valor principal de um integral com um polo no eixo e o princípio do argumento geral ainda não são suportados.
- A soma de uma série a partir de 1 por resíduos exige uma função racional R par; não são admitidos polos de R em inteiros diferentes de zero.
- Uma aplicação conforme mostra a imagem de uma grelha; a imagem de uma região dada (semiplano, faixa) só para os eixos e a circunferência unitária de uma transformação de Möbius.
- A transformada de Fourier funciona para funções racionais sem polos no eixo real, a transformada Z inversa para funções racionais sem polo em zero.

36. Equações diferenciais

A aplicação resolve equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: de variáveis separáveis, lineares, exatas, homogéneas ($y' = f(y/x)$), de Bernoulli e equações $y' = f(ax + by + c)$. Reconhece o tipo sozinha e mostra o procedimento como na escola – separação de variáveis, variação da constante ou fator integrante, substituição, função potencial de uma equação exata. Os integrais do procedimento têm os seus próprios passos. Verifica a solução: substitui a solução e a sua derivada na equação e leva os dois membros à mesma forma.

Ordens superiores: equações lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem pela equação característica (também raízes múltiplas e complexas), uma solução particular pelo lado direito especial (também ressonância e soma de lados direitos) ou por variação das constantes, um problema de valor inicial em zero também pela transformada de Laplace (chip «Método»). Além disso a equação de Euler com $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ por integrações sucessivas e a redução da ordem – quando falta y ($p = y'$) ou x ($y' = p(y)$).

A equação $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ torna-se linear com a substituição $z = \ln y$. Uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis é resolvida quando se consegue adivinhar uma solução (x^k, e^{cx}, …): a segunda, reduzindo a ordem (d'Alembert), e o lado direito por variação das constantes. A ordem também é reduzida em mais de um ($p = y^{(m)}$ com uma equação de segunda ordem em p). Com parâmetros, os casos são distinguidos: um oscilador amortecido pelo sinal de $\delta^2 - \omega^2$ (sobreamortecido, crítico, subamortecido), uma ressonância ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ para $\omega = 2$) e o sinal de uma constante de que depende o integral ($y'' = 2yy'$). A transformada de Laplace resolve também um problema de valor inicial num ponto diferente de 0 (deslocamento $\tau = t - t_0$) e com parâmetros.

Uma equação de Riccati $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ resolve-se quando se conhece uma solução particular y_1: dada na linha seguinte (y1 = 1/x) ou adivinhada de forma simples (uma constante, ax, a/x, ax^2, ae^{±x}, x + a). A substituição $y = y_1 + 1/z$ torna-a então linear. Equações não lineares em y′: a de Clairaut $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – as retas $y = Cx + \psi(C)$ e a solução singular (a sua envolvente) – e a de Lagrange $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ com uma solução paramétrica (o parâmetro $p = y'$).

O resultado é a solução geral com uma constante C, nas ordens superiores com constantes C_1, C_2, … (explícita, ou implícita onde não pode ser explícita); com condições, a solução que as satisfaz – iniciais e de fronteira, incluindo os casos «sem solução» e «infinitas soluções». Também encontra as soluções constantes perdidas ao dividir. Cada solução é verificada substituindo-a na equação. Na primeira ordem o gráfico mostra o campo de direções e soluções para diferentes C, nas ordens superiores soluções para diferentes constantes; numa equação autónoma de segunda ordem (sem x) um seletor mostra também o plano de fase (y, y′). Abaixo do gráfico pode introduzir valores próprios das constantes e adicionar a sua curva; o interruptor «Curvas padrão» oculta as que a aplicação escolheu. Ao tocar no

gráfico é desenhada a solução que passa por esse ponto – numa equação linear de segunda ordem ajusta ainda com um controlo deslizante a inclinação da tangente no ponto.

Um sistema de duas equações lineares com coeficientes constantes (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, também dx/dt) pelos valores e vetores próprios da matriz – reais, complexos e duplos – com as condições iniciais x(0), y(0). O ponto estacionário [0; 0] é classificado (nó, sela, foco, centro) e o plano de fases mostrado.

A oscilação de uma equação linear de 2.ª ordem (toda a solução tem infinitos zeros) é estudada pelo comando oscillation(y" + x y = 0), também para uma equação na forma autoadjunta (x y')' + y/x = 0 ou com y′ (a aplicação passa-a a essa forma). O procedimento: de forma exata para q constante e a equação de Euler y″ + (k/x²)y = 0 com a fronteira k = 1/4, os critérios de Leighton–Wintner e de Kneser (no caso crítico também a comparação com a equação de Riemann-Weber), a substituição de Riccati w = r y′/y, a transformação de Prüfer e a contagem numérica dos zeros num intervalo (depois de um ponto e vírgula: ; ⟨1; 50⟩) com a estimativa de Sturm da sua distância. Uma equação semilinear (|y'| y')' + q |y| y = 0 (em geral o expoente |y'|^(p−2)) é avaliada pela constante crítica ((p − 1)/p)^p, o análogo discreto Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (também Δ(r_n Δy_n)) pelos zeros generalizados. O gráfico mostra a solução com os zeros e o ângulo de Prüfer φ.

A assintótica das soluções de uma equação não linear com p-laplaciano (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y com a, b positivas é estudada pelo comando asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (em checo também asymptotika(...)); |y'|^k y' e |y|^k y podem escrever-se também com sgn, como potência ímpar (y')³, y³, e para α = 1 como (a y')' ou y". As soluções dividem-se nas classes M^+ (|y| cresce) e M^- (|y| decresce) segundo os limites de y e da quase-derivada y^[1] = a|y′|^α sgn y′. Numa equação semilinear (β = α) a aplicação calcula os integrais J_1, J_2, Y_1, Y_2 (com o Symja ou, caso contrário, comparando o comportamento de potência e logarítmico), determina um dos casos C1–C8 e as classes não vazias pelo teorema 3.1 de Z. Došlá e M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), e mostra a equação recíproca. Numa equação do tipo Emden-Fowler com β ≠ α usa os teoremas de M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): caso superlinear e sublinear, soluções fortemente e fracamente crescentes e regularmente decrescentes. O gráfico mostra soluções numéricas das classes não vazias (M^- por tiro) e, por baixo, as suas quase-derivadas. Indique o início do intervalo depois de um ponto e vírgula (; x ≥ 1). Numa equação com q negativo, a oscilação oferece o chip Assintótica das soluções e a assintótica, por sua vez, o chip Oscilação da equação.

Como introduzir

`y' = x*y`	A derivada com linha.

`dy/dx = x y^2`	Notação de Leibniz – indica também a variável (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Notação de uma foto.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	A forma M dx + N dy = 0 (equação exata).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Uma condição inicial após uma vírgula ou na linha seguinte.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	A função e a variável podem ser quaisquer letras.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Uma solução particular conhecida de uma equação de Riccati na linha seguinte (ou depois de um ponto e vírgula).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Uma equação de ordem superior – as derivadas com mais plicas.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Derivadas superiores como y^{(4)} (também de uma foto).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Condições iniciais y(0), y′(0) – ou de fronteira em pontos diferentes.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Os pontos de Newton (derivadas em ordem ao tempo t) e parâmetros gregos.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Um sistema de duas equações lineares – depois de uma vírgula ou em linhas, com as condições x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscilação de uma equação de 2.ª ordem, opcionalmente com um intervalo para os zeros.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Uma equação semilinear (aqui p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	O análogo discreto – uma recorrência linear de 2.ª ordem.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Assintótica das soluções de uma equação com p-laplaciano, opcionalmente com o início do intervalo.

Exemplos

Variáveis separáveis – a solução geral e o campo de direções.

Enunciado: `y' = x*y`

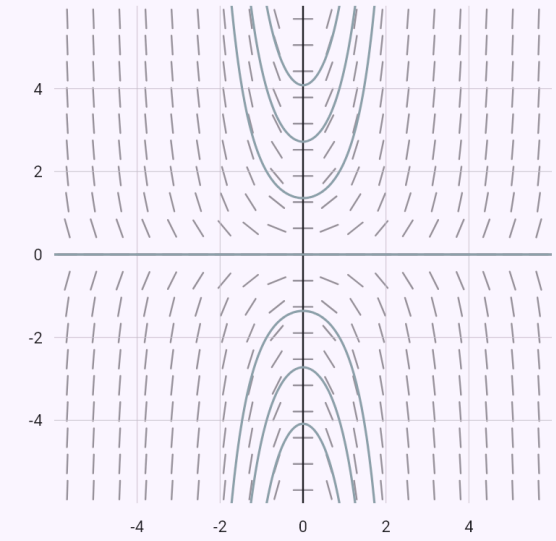
Resultado

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita: $y' = xy$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Integramos ambos os lados: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- A solução geral na forma implícita: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante ±e^C chama-se de novo C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- A solução constante $y = 0$, excluída ao dividir, está contida na solução geral para C = 0
- Verificação – a derivada da solução $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Gráfico



soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

A condição inicial determina a constante C.

Enunciado: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Resultado

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolver por um método numérico:

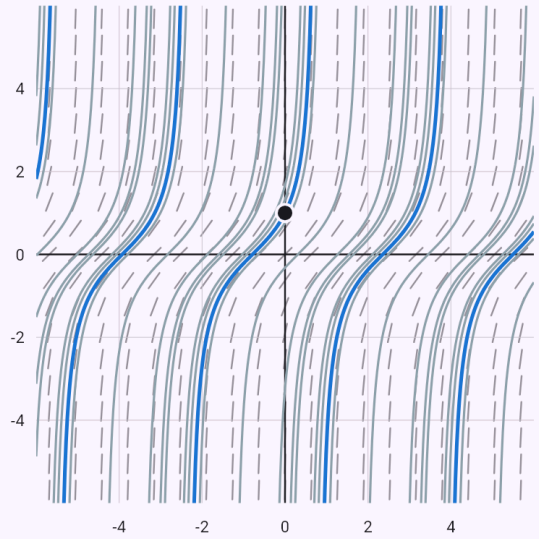
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Passos

- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita: $y' = y^2 + 1$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Integramos ambos os lados: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 1\,dx = x$
- A solução geral na forma implícita: $\arctan y = x + C$
- Isolamos a solução: $y = \tan(x + C)$
- Substituímos a condição inicial $y(0) = 1$: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- A solução da condição inicial (solução particular): $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente $\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação e simplificamos com a identidade $1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ – os dois membros são iguais

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado. Em destaque está a solução da condição inicial; o ponto é a condição inicial.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C | + Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

Uma equação linear por variação da constante.

Enunciado: `y' + 2y = e^x` Variação da constante

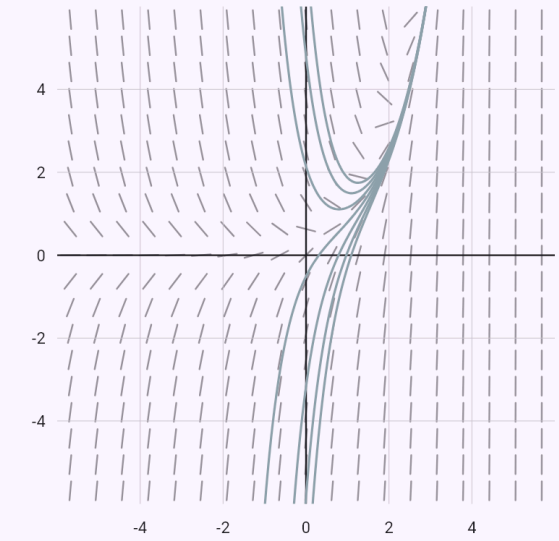
Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação linear de primeira ordem y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y' + 2y = 0$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 2\,dx = 2x$
- Solução da equação homogénea: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma $y = C(x)\,e^{-2x}$; substituída na equação: $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Daí $C'(x) = e^{3x}$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- A solução geral: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Gráfico



soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

A mesma equação com fator integrante.

Enunciado: `y' + 2y = e^x` Fator integrante

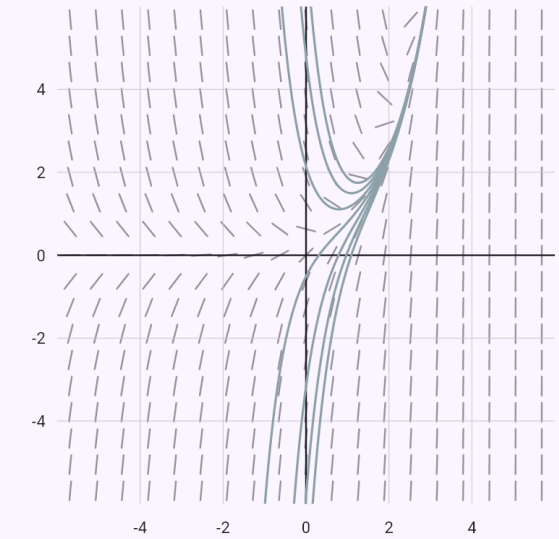
Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação linear de primeira ordem y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int 2\,dx = 2x$
- O fator integrante: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Multiplicamos pelo fator integrante – o lado esquerdo é a derivada de um produto: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos ambos os lados: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- A solução geral: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Gráfico



soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

Uma equação homogénea – a substituição u = y/x.

Enunciado: `y' = (x - y)/(x + y)`

Resultado

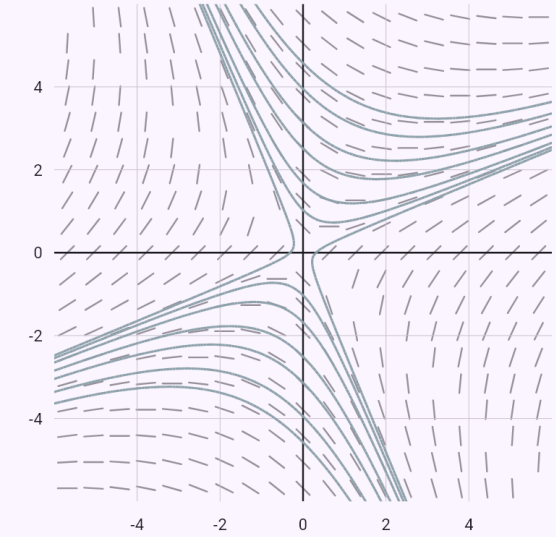
$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação homogénea – o lado direito depende apenas do quociente y/x: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- A substituição $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ transforma a equação em $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Integramos ambos os lados: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- O numerador é a derivada do denominador (ou um múltiplo), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, pela fórmula $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$

  $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- A solução geral na forma implícita: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Aplicamos a exponencial – a constante ±e^C chama-se de novo C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- A solução constante $u = -1 - \sqrt{2}$, excluída ao dividir, está contida na solução geral para C = 0
- A solução constante $u = -1 + \sqrt{2}$, excluída ao dividir, está contida na solução geral para C = 0
- Voltamos à incógnita original: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- A solução geral na forma implícita: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Gráfico



soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

Uma equação de Bernoulli – a substituição z = y^(1−n) e a solução constante y = 0.

Enunciado: `xy' - y = -xy^2`

Resultado

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Passos

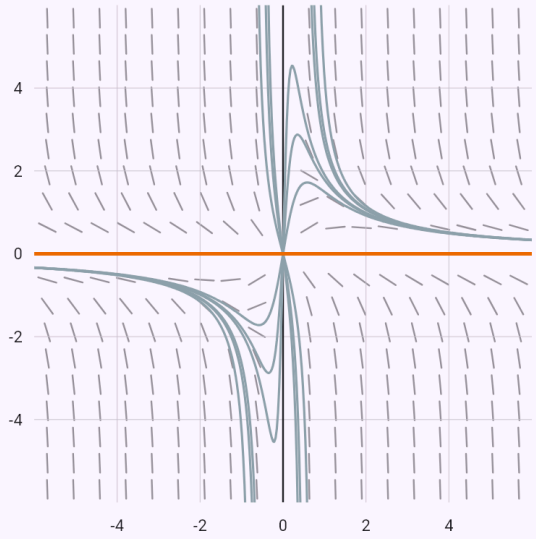
- Uma equação de Bernoulli y' + p(x)·y = q(x)·y^n: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- A substituição $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ transforma a equação em $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solução da equação homogénea: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma $z = C(x)\cdot\frac{1}{x}$; substituída na equação: $C'(x)\cdot\frac{1}{x} = 1$
- Daí $C'(x) = x$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Integramos: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- A solução geral: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Voltamos à incógnita original: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Isolamos a solução: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Ao dividir excluímos a solução constante $y = 0$ – é outra solução da equação.
- Renomeamos a constante (um múltiplo de uma constante arbitrária é de novo uma constante arbitrária): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2\cdot\frac{x^2 + C - x\cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = 0$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

Uma equação exata – a função potencial F(x, y) = C.

Enunciado: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

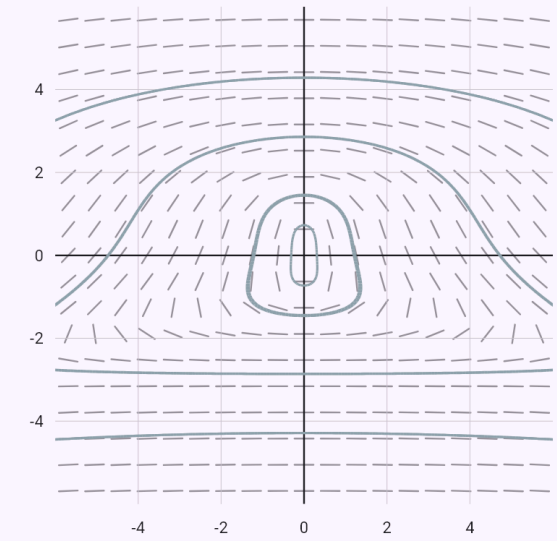
Resultado

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação M dx + N dy = 0 – verificamos se é exata (o lado esquerdo é uma diferencial total): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; a equação é exata, pois $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- A função potencial F integrando M em ordem a x: $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- De ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- A solução geral na forma implícita: $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Gráfico



soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

A substituição z = x − y; o Symja perderia aqui um fator 2, a app verifica o resultado.

Enunciado: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Resultado

$$y = x + 2\,\mathrm{arccot}\,(x+1)$$

Resolver por um método numérico:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Passos

- O lado direito é função de ax + by + c − tomamo-lo como nova incógnita: $y' = \cos(x-y)$
- A substituição $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ transforma a equação em $z' = 1 - \cos z$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo $1-\cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Integramos ambos os lados: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Nenhuma substituição mais simples serve − substituição universal $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Voltamos à variável original: $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$: $\quad -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- A solução geral na forma implícita: $-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Isolamos a solução: $z = 2\,\mathrm{arccot}\,(C-x)$
- Ao dividir excluímos a solução constante $z = 0$ − é outra solução da equação.
- Voltamos à incógnita original: $y = x - 2\,\mathrm{arccot}\,(C-x)$
- Renomeamos a constante (um múltiplo de uma constante arbitrária é de novo uma constante arbitrária): $y = x + 2\,\mathrm{arccot}\,(x+C)$
- Substituímos a condição inicial $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arccot}\,C \Rightarrow C = 1$
- A solução da condição inicial (solução particular): $y = x + 2\,\mathrm{arccot}\,(x+1)$
- Verificação − a derivada da solução $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente

  $$(2\,\mathrm{arccot}\,(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{2}{x^2+2}$$
- Somamos e simplificamos

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação − os dois membros são iguais

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos\left(x - (x + 2\,\mathrm{arccot}\,(x+1))\right)$$

Uma equação de Riccati – a solução particular $y_1 = -2/x$ adivinhada, a substituição $y = y_1 + 1/z$.

Enunciado: `y' = y^2 - 2/x^2`

Resultado

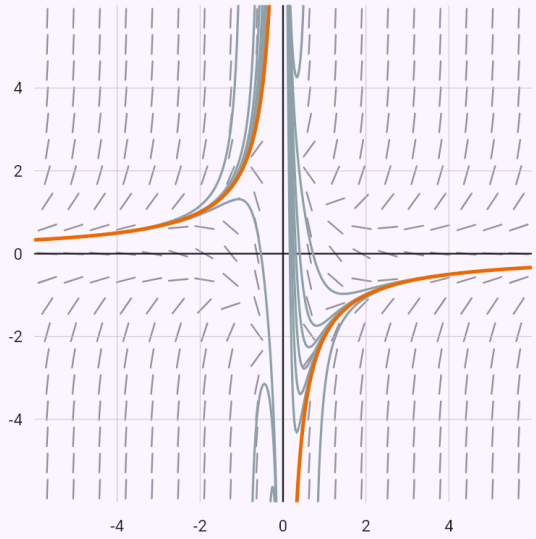
$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Passos

- Uma equação de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Sem uma solução particular, uma equação de Riccati não se resolve. Tentamos adivinhar uma de forma simples (uma constante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a): $y_1 = -\frac{2}{x}$ satisfaz a equação: $y_1' = \frac{2}{x^2}$, e substituindo-a no lado direito obtém-se o mesmo.
- A substituição $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ transforma a equação em $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solução da equação homogénea: $z_h = Cx^4$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma $z = C(x)\cdot x^4$; substituída na equação: $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Daí $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Integramos: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- A solução geral: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Voltamos à incógnita original: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- A própria solução $y = -\frac{2}{x}$ perde-se com a substituição y = y₁ + 1/z (corresponde a z → ∞); acrescentamo-la ao resultado.
- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ substituída na equação dá uma igualdade.

- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente $\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais $\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = -\frac{2}{x}$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

A mesma equação com a solução particular dada $y_1 = 1/x$.

Enunciado: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Resultado

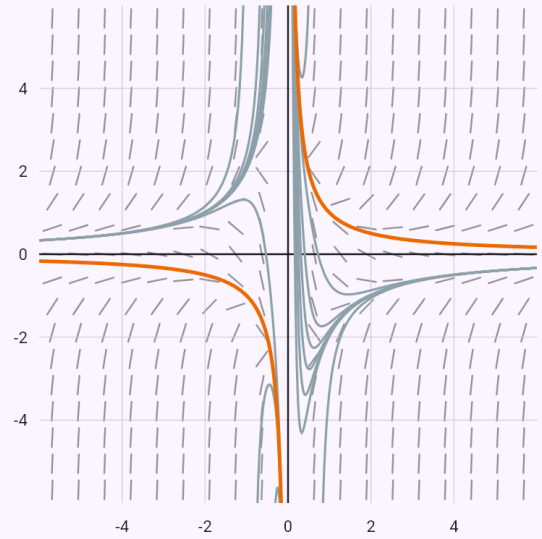
$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Passos

- Uma equação de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- A solução particular dada $y_1 = \frac{1}{x}$ satisfaz a equação: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, e substituindo-a no lado direito obtém-se o mesmo.
- A substituição $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ transforma a equação em $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solução da equação homogénea: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; substituída na equação: $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Daí $C'(x) = -x^2$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Integramos: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- A solução geral: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Voltamos à incógnita original: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- A própria solução $y = \frac{1}{x}$ perde-se com a substituição y = y_1 + 1/z (corresponde a z → ∞); acrescentamo-la ao resultado.

- Verificação – a derivada da solução $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ substituída na equação dá uma igualdade.
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = \frac{1}{x}$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C

+ Adicionar curva

Toque no gráfico – é desenhada a solução que passa por esse ponto.

Uma equação de Clairaut – as retas y = Cx + C² e a sua envolvente y = −x²/4.

Enunciado: `y = xy' + y'^2`

Resultado

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Passos

- Uma equação de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Seja $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Derivamos a equação em ordem a x (p = y' depende de x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Se p' = 0, p é constante e a solução geral são retas: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- O outro fator x + ψ'(p) = 0 dá a solução singular, a envolvente de todas essas retas. Na forma paramétrica $x = -2p,\ y = -p^2$; eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = -\frac{x^2}{4}$

As retas cinzentas são as soluções para vários valores de C; a cores, a solução singular – a sua envolvente, que cada reta toca.

Pelo ponto [2; −1] da envolvente passa uma única reta y = 1 − x – e a própria envolvente.

Enunciado: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

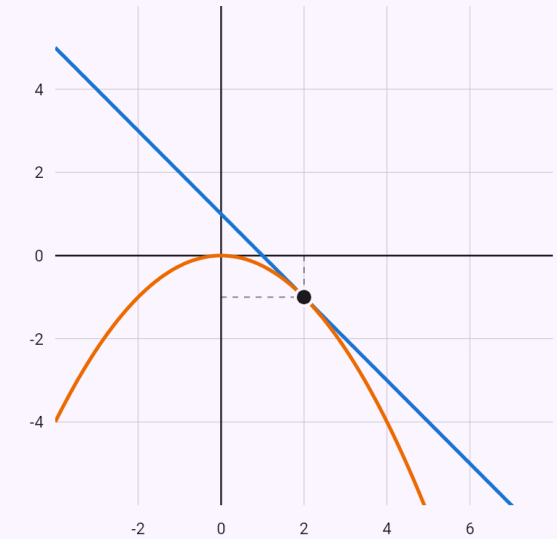
Resultado

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Passos

- Uma equação de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Seja $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Derivamos a equação em ordem a x (p = y' depende de x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Se p' = 0, p é constante e a solução geral são retas: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- O outro fator x + ψ'(p) = 0 dá a solução singular, a envolvente de todas essas retas. Na forma paramétrica $x = -2p,\ y = -p^2$; eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Substituímos a condição inicial $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- A solução da condição inicial (solução particular): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Gráfico



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

A cores, as soluções que passam pelo ponto dado – retas e, eventualmente, a envolvente.

Uma equação de Lagrange – a solução na forma paramétrica e a reta y = 0.

Enunciado: `y = 2xy' + y'^2`

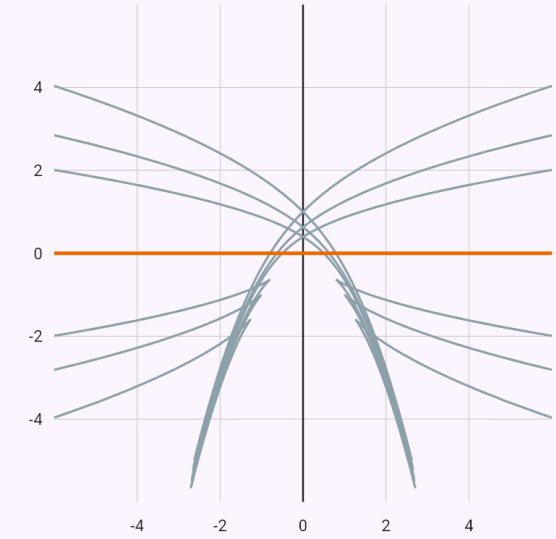
Resultado

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p},\quad C \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação de Lagrange y = x·φ(y') + ψ(y'). Seja $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Derivamos a equação em ordem a x (p = y' depende de x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Procuramos x como função de p: isolamos dx/dp, e a equação é linear na incógnita x: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Uma equação linear de primeira ordem y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Solução da equação homogénea: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; substituída na equação: $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- Daí $C'(p) = -2p^2$
- Tiramos a constante para fora do integral: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Integramos: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- A solução geral: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Renomeamos a constante (um múltiplo de uma constante arbitrária é de novo uma constante arbitrária): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Substituindo x na equação dada, obtemos a solução geral na forma paramétrica (parâmetro p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Dividimos por p − φ(p), deixando de fora os valores para os quais $p = 2p$. Cada um deles dá uma reta que também satisfaz a equação: $y = 0$

Gráfico



soluções para diferentes C

$y = 0$

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

A equação característica com raízes complexas −2 ± 3i.

Enunciado: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Resultado

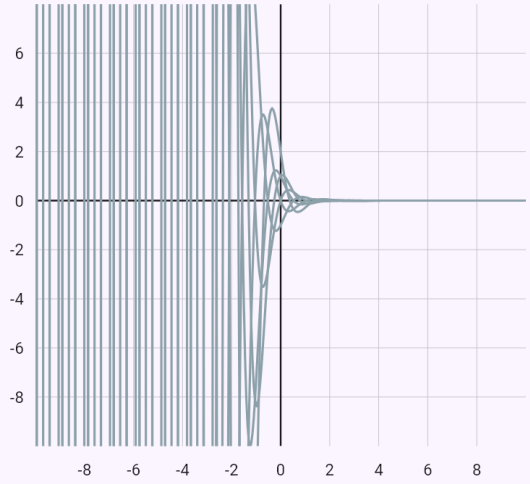
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- O discriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; as raízes: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- A solução geral: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Gráfico

Soluções | Plano de fase



soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C_1 C_2 + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

Lado direito especial com ressonância – 2 é raiz da equação característica.

Enunciado: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Lado direito especial

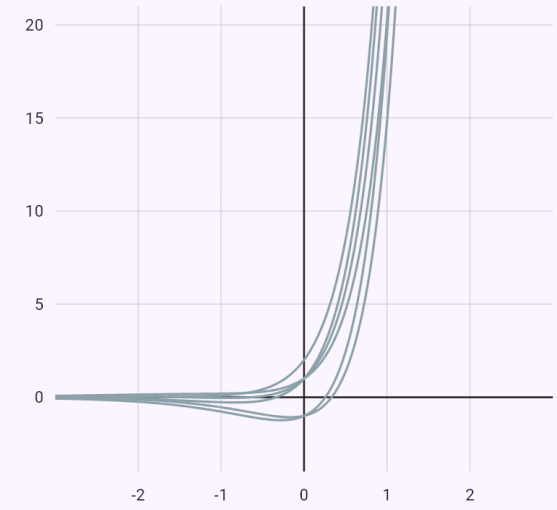
Resultado

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- O discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; as raízes: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Solução da equação homogénea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- O lado direito $3e^{2x}$ tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por x: $y_p = Axe^{2x}$
- As derivadas: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados: $A = 3$
- Uma solução particular: $y_p = 3xe^{2x}$
- A solução geral: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Gráfico



soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C₁ C₂ + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

O lado direito tan x não é especial – variação das constantes e o wronskiano.

Enunciado: `y'' + y = tan x`

Resultado

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + y = \tan x$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y'' + y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), ..., x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Solução da equação homogénea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variação das constantes – procuramos a solução na forma $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, as derivadas das funções C_k satisfazem o sistema
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$
- O determinante do sistema (o wronskiano)
$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$
- Daí $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- Daí $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Tiramos a constante para fora do integral:
$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = -\int \sin x \cdot \tan x \, dx$$
- A função é ímpar em relação ao cosseno – substituição
$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- O integral de uma soma é a soma dos integrais
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{2}$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int -1 \, dt = -t$
- Tiramos a constante para fora do integral:
$$\int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} \, dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos:
$$\int \frac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$$
- Tiramos a constante para fora do integral:
$$\int \frac{1}{2(t+1)} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} \, dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos:
$$\int \frac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$$
- Voltamos à variável original
$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea):
$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Uma solução particular:
$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$
- A solução geral
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrais da variação das constantes que não se exprimem por funções elementares – uma solução

com integral.

Enunciado: `y'' + y' + y = tan x`

Resultado

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + y' + y = \tan x$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y'' + y' + y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- O discriminante $D = 1^2 - 4 = -3$; as raízes: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- Solução da equação homogénea $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Variação das constantes – procuramos a solução na forma as derivadas das funções C_k satisfazem o sistema

$$y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- O determinante do sistema (o wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- Daí

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- Daí

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea)

$$C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$$

- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea)

$$C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$$

- Estes integrais não se podem exprimir por funções elementares (levam a funções superiores, não elementares), por isso a solução mantém-nos na forma de integral

$$\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$$

- A solução geral

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Um problema de valor inicial – um sistema para as constantes C_1, C_2.

Enunciado: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Resultado

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

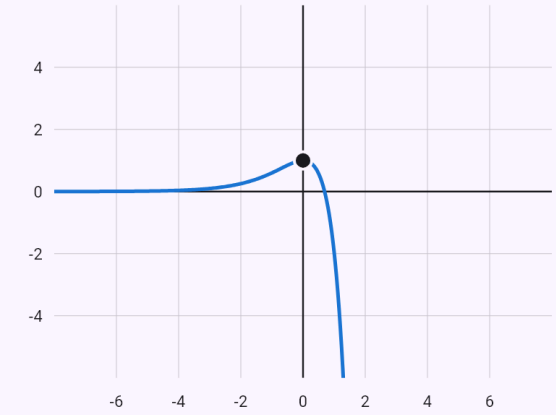
Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- O discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; as raízes: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Solução da equação homogénea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- O lado direito e^{2x} tem forma especial; o número 2 não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular $y_p = Ae^{2x}$
- As derivadas: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados: $-A = 1$
- Donde $A = -1$
- Uma solução particular: $y_p = -e^{2x}$
- A solução geral: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- As derivadas da solução geral: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. As condições dão o sistema donde $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- A solução que satisfaz as condições dadas: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Gráfico



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

Valores próprios das constantes

C₁ | C₂ | + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

O mesmo problema pela transformada de Laplace.

Enunciado: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Transformada de Laplace

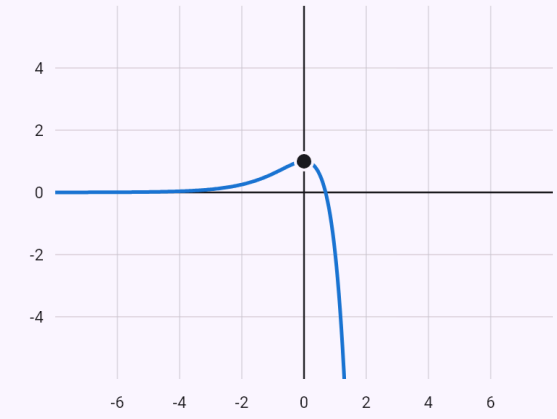
Resultado

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformada de Laplace dos dois lados: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)$; com as condições iniciais: $\left(s^2Y - s\right) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Isolamos a imagem Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Frações parciais: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- A transformada inversa (pela tabela de imagens) dá a solução: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Gráfico



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

Um problema de fronteira com infinitas soluções.

Enunciado: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Resultado

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), ..., x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- A solução geral: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- A constante C_2 fica arbitrária – o problema tem infinitas soluções.
- A solução que satisfaz as condições dadas: $y = C_2 \sin x$

Equação de Euler – a substituição x = eᵗ.

Enunciado: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

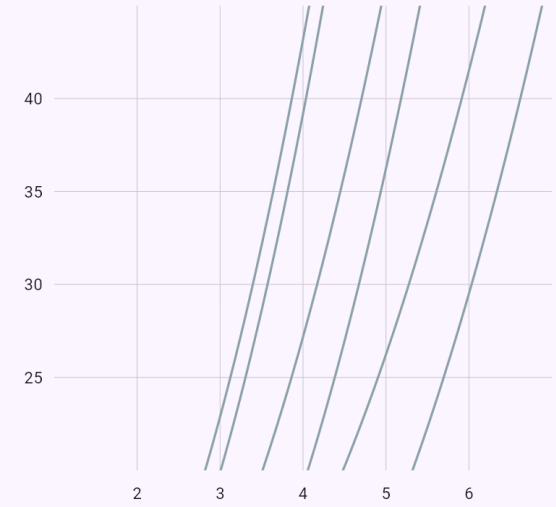
Resultado

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Passos

- Equação de Euler – cada derivada y^(k) vem com x^k; a substituição x = e^t transforma-a numa de coeficientes constantes: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- A substituição $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ transforma a equação em $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λt); substituindo e dividindo por e^(λt), obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- O discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; as raízes: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Solução da equação homogénea: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Dividimos o lado direito em partes de forma especial – uma solução particular para cada uma, depois somamo-las: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- O lado direito 2 tem forma especial; o número 0 não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular $y_{p_1} = A$
- As derivadas: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados: $2A = 2$
- Donde $A = 1$
- Uma solução particular: $y_{p_1} = 1$
- O lado direito e^{2t} tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- As derivadas: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados: $A = 1$
- Uma solução particular: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Uma solução particular: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- A solução geral: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Voltamos à variável original (t = ln x, para $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Gráfico



soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C₁ | C₂ | + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

A redução y' = p(y), as constantes das condições iniciais passo a passo.

Enunciado: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Resultado

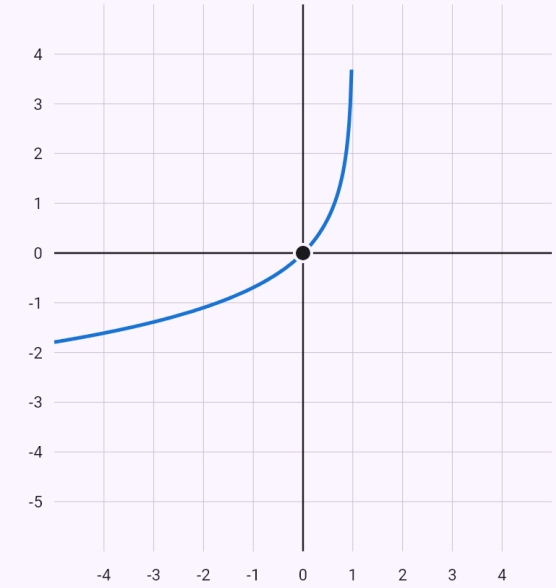
$$y = -\ln(1 - x)$$

Passos

- Falta a variável independente – tomamos y' como função de y: $y'' = e^{2y}$
- A substituição $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ transforma a equação em $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; das condições iniciais resulta $p(0) = 1$
- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Separamos as variáveis: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Integramos ambos os lados: $\displaystyle\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\displaystyle\int p\,dp = \frac{p^2}{2}$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável: $\displaystyle\int e^{2y}\,dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- A solução geral na forma implícita: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Isolamos a solução: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Substituímos a condição inicial $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- A solução da condição inicial (solução particular): $p = e^y$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Voltamos à incógnita original: $y' = e^y$
- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita: $y' = e^y$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Integramos ambos os lados: $\displaystyle\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- Pela tabela – a função interior é linear, por isso dividimos o resultado pelo seu coeficiente da variável: $\displaystyle\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Pela tabela de integrais imediatos: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- A solução geral na forma implícita: $-e^{-y} = x + C_2$
- Isolamos a solução: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Substituímos a condição inicial $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- A solução da condição inicial (solução particular): $y = -\ln(1 - x)$
- Derivamos o termo pelas regras da função composta, do produto e do quociente: $(-\ln(1 - x))' = -\dfrac{1}{1 - x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{1 - x}$
- Substituímos a solução e a sua derivada na equação – os dois membros são iguais: $\dfrac{1}{1 - x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Gráfico

Soluções | Plano de fase



$y = -\ln(1 - x)$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

Um oscilador amortecido: três casos segundo δ e ω.

Enunciado: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Resultado

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Para $\delta > \omega$ logo

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta)x}$
- Para $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, logo $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Para $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, i$, logo

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right)\right.$

Ressonância: para ω = 2 a solução tem outra forma.

Enunciado: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Resultado

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λt); substituindo e dividindo por e^(λt), obtemos a equação característica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Solução da equação homogénea: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- O lado direito $\cos(2t)$ tem forma especial; o número $2i$ não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- As derivadas

$$y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$$

- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados $\left(A\omega^2 - 4A\right)\cos(2t) + \left(B\omega^2 - 4B\right)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Comparamos os coeficientes dos termos semelhantes dos dois lados donde $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Uma solução particular: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- A solução geral

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Para $\omega = 2$ o número do lado direito é raiz da equação característica (ressonância): a solução tem outra forma: $y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{t\sin(2t)}{4}$

Uma solução adivinhada $y_1 = x$ e a redução da ordem (d'Alembert).

Enunciado: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Resultado

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Passos

- Uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis: $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$
- Adivinhamos uma solução e verificamo-la por substituição: $y_1 = x$. A segunda, reduzindo a ordem (d'Alembert, y = $y_1 \cdot u$)

  $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

  $$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

  $$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $$\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

  $$\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

  $$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

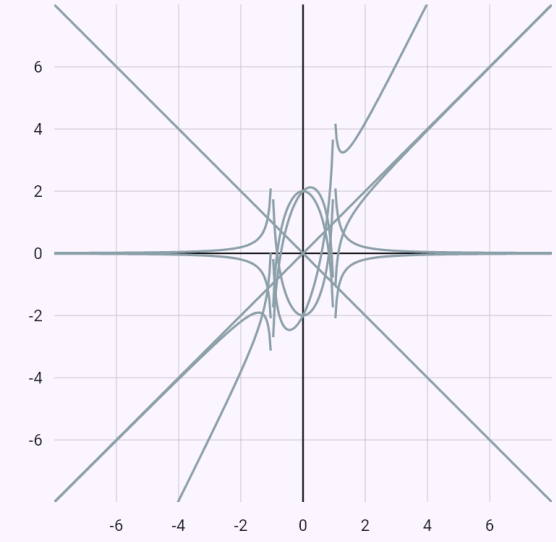
  $$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$

- A solução geral:

  $$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$$

Gráfico



soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

Curvas padrão

Valores próprios das constantes

C_1 C_2 + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

Um sistema – valores próprios de sinais opostos, uma sela.

Enunciado: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Resultado

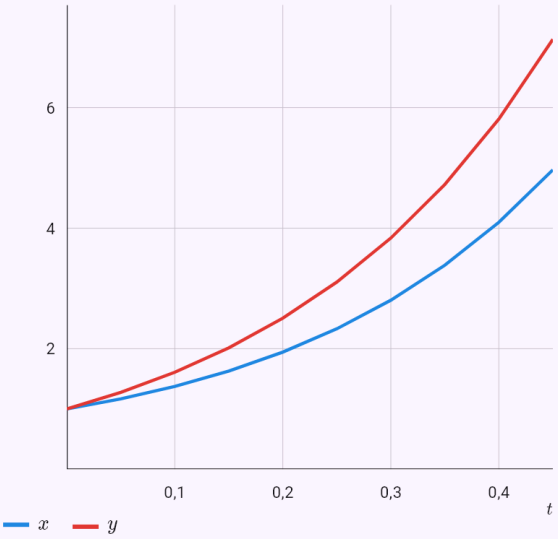
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Passos

- O sistema na forma matricial
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Os valores próprios da matriz pela equação característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$:
  $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – dois reais distintos.
- Vetores próprios, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- A solução geral
  $x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$
  $y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$
- O ponto estacionário $[0;\ 0]$ é uma sela – os valores próprios têm sinais opostos, é instável.

Gráfico

No tempo | Plano de fase



A solução do sistema no tempo para as condições iniciais dadas (sem elas, para x(0) = y(0) = 1).

Valores próprios complexos – um foco instável.

Enunciado: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Resultado

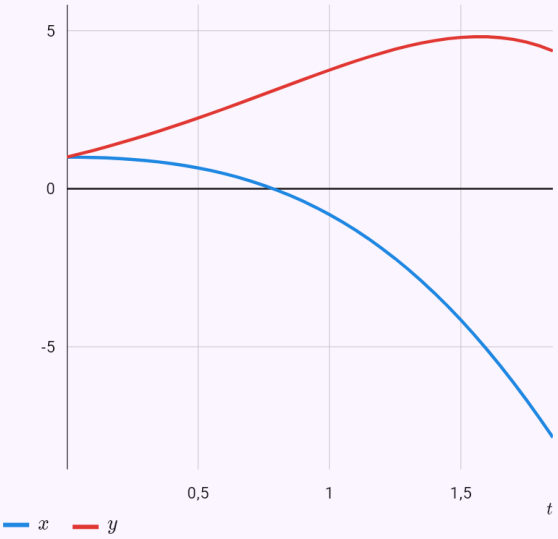
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Passos

- O sistema na forma matricial
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Os valores próprios da matriz pela equação característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$:
  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – complexos conjugados.
- Vetores próprios, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- A solução geral
  $x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$
  $y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$
- O ponto estacionário $[0;\ 0]$ é um foco instável – a parte real dos valores próprios é positiva, as trajetórias afastam-se em espiral.

Gráfico

No tempo | Plano de fase



A solução do sistema no tempo para as condições iniciais dadas (sem elas, para x(0) = y(0) = 1).

Um sistema com condições iniciais – um centro.

Enunciado: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Resultado

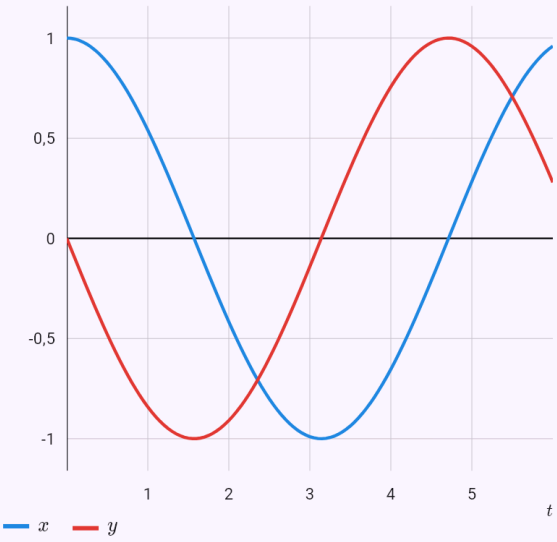
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Passos

- O sistema na forma matricial
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Os valores próprios da matriz pela equação característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – complexos conjugados.
- Vetores próprios, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- A solução geral
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- As constantes pelas condições iniciais donde
  $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $C_1 = 1$
  $C_2 = 0$
- O ponto estacionário $[0;\ 0]$ é um centro – os valores próprios são imaginários puros, as trajetórias são curvas fechadas à sua volta.

Gráfico

No tempo | Plano de fase



A solução do sistema no tempo para as condições iniciais dadas (sem elas, para x(0) = y(0) = 1).

A equação de Airy – critério de Leighton–Wintner e 12 zeros.

Enunciado: `oscillation(y'' + x y = 0)`

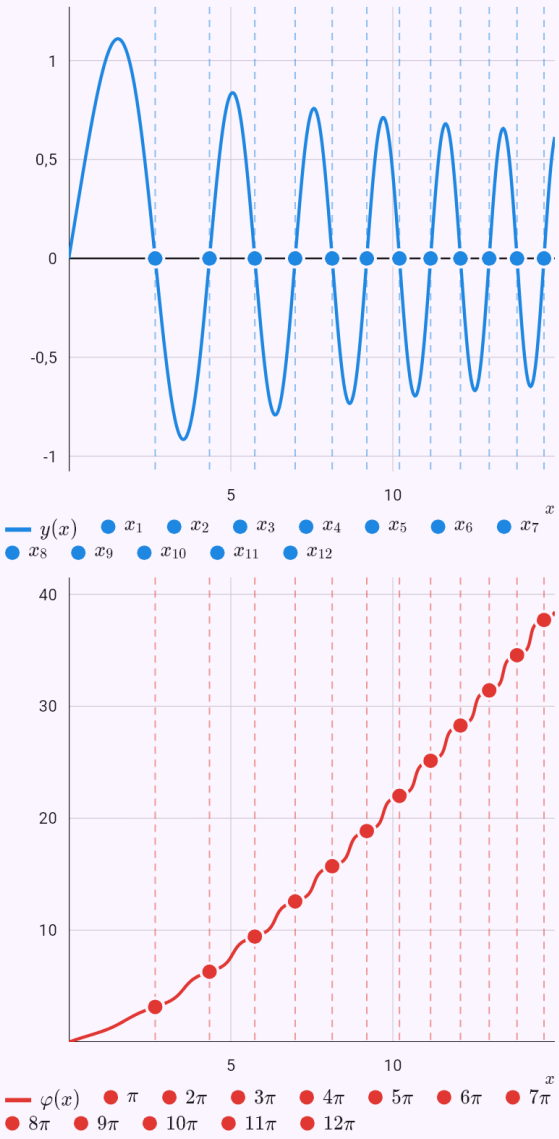
Resultado

A equação é oscilatória.

Passos

- Estudamos a equação $y'' + xy = 0$ no intervalo $[0,\ \infty)$, ou seja, y" + q(x)y = 0 com q = x
- A equação é oscilatória se toda a solução não trivial tem infinitos zeros no intervalo. Pelo teorema de separação de Sturm, os zeros de duas soluções independentes alternam-se, por isso basta uma solução: ou oscilam todas as soluções, ou nenhuma.
- O critério de Leighton e Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, a equação é oscilatória. Aqui $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ e $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, portanto a equação é oscilatória.
- O critério de Kneser com a constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, a equação é oscilatória.
- A técnica de Riccati: a substituição $w = \frac{y'}{y}$ transforma a equação na equação de Riccati $w' + w^2 + x = 0$. A equação é não oscilatória exatamente quando a equação de Riccati tem uma solução em todo um intervalo ⟨T; ∞) para algum T. Para uma equação oscilatória não existe: w «foge» para −∞ em cada zero de y.
- A transformação de Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ transforma a equação numa equação para o ângulo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. Num zero de y o ângulo φ é múltiplo de π e φ' > 0, por isso φ só cresce ao passar pelos múltiplos de π. O número de zeros em (a; b⟩ é portanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numericamente pelo método de Runge-Kutta (RK4) a partir dos valores iniciais $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- No intervalo $(0,\ 15]$ a solução tem este número de zeros: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Zeros vizinhos distam entre $0{,}8322$ e $1{,}6761$. Os zeros $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,\ $
- O teorema de comparação de Sturm: no intervalo $[0,\ 15]$ temos $q \in [0,\ 15]$. Aí q não é positivo em todo o lado, por isso só obtemos um limite inferior da distância entre zeros vizinhos: $0{,}8112 \le \Delta$
- Conclusão: a equação é oscilatória – toda a solução não trivial tem infinitos zeros.

Gráfico



A solução com os zeros assinalados; por baixo, o ângulo de Prüfer φ, que nos zeros passa por múltiplos de π.

A equação de Euler na fronteira k = 1/4 – ainda não oscila.

Enunciado: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

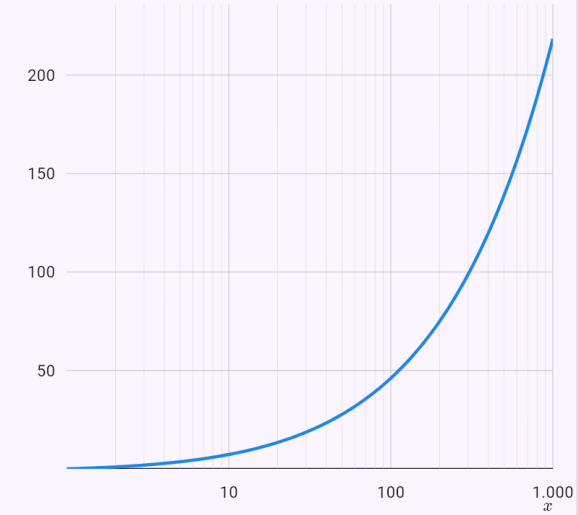
Resultado

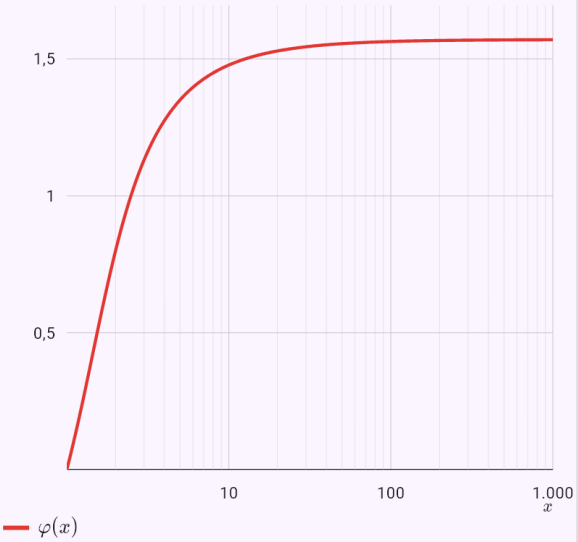
A equação não é oscilatória.

Passos

- Estudamos a equação $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ no intervalo $[1,\ \infty)$, ou seja, y" + q(x)y = 0 com q = $\frac{1}{4x^2}$
- A equação é oscilatória se toda a solução não trivial tem infinitos zeros no intervalo. Pelo teorema de separação de Sturm, os zeros de duas soluções independentes alternam-se, por isso basta uma solução: ou oscilam todas as soluções, ou nenhuma.
- Trata-se da equação de Euler y" + (k/x²)y = 0 com o valor-limite k = $\frac{1}{4}$. A equação característica $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{4}=0$ tem a raiz dupla $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}$, a solução $y=\sqrt{x}(C_1+C_2\ln x)$ tem no máximo um zero. A equação ainda não é oscilatória.
- O critério de Leighton e Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, a equação é oscilatória. Aqui $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x=\infty$, mas $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$, portanto o critério não decide.
- O critério de Kneser: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{4}$ é igual à constante crítica $\frac{1}{4}$, portanto o critério sozinho não decide. Decide o termo seguinte.
- No caso crítico comparamos com a equação de Riemann-Weber y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, que oscila exatamente para μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)\ln^2 x=0<\frac{1}{4}$, a equação não é oscilatória.
- A técnica de Riccati: a substituição $w=\frac{y'}{y}$ transforma a equação na equação de Riccati $w'+w^2+\frac{1}{4x^2}=0$. Esta tem a solução $w=\frac{1}{2x}$ em todo o intervalo – corresponde a uma solução y sem zeros, portanto a equação não é oscilatória.
- A transformação de Prüfer $y=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho\cos\varphi$ transforma a equação numa equação para o ângulo φ: $\varphi'=\cos^2\varphi+\frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. Num zero de y o ângulo φ é múltiplo de π e φ' > 0, por isso φ só cresce ao passar pelos múltiplos de π. O número de zeros em (a; b⟩ é portanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numericamente pelo método de Runge-Kutta (RK4) a partir dos valores iniciais $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ \varphi(1)=0$
- No intervalo $(1,\ 1000]$ a solução não tem nenhum zero: $\varphi(1000)\doteq 1{,}5702\doteq 0{,}4998\pi$, o ângulo não chegou a π.
- Conclusão: a equação não é oscilatória – toda a solução não trivial tem apenas um número finito de zeros.

Gráfico





A solução não tem nenhum zero no intervalo escolhido; o ângulo de Prüfer φ, por baixo, não chega a π.

Critério de Kneser: x²q → 1 > 1/4, os zeros crescem geometricamente.

Enunciado: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

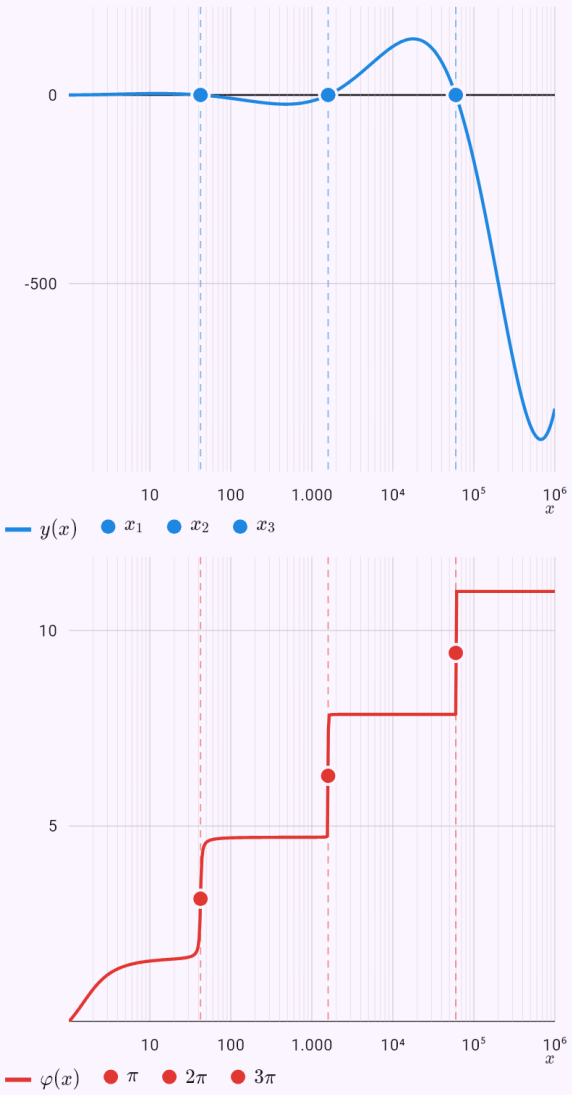
Resultado

A equação é oscilatória.

Passos

- Estudamos a equação $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ no intervalo $[0,\ \infty)$, ou seja, y" + q(x)y = 0 com q = $\frac{1}{x^2+1}$
- A equação é oscilatória se toda a solução não trivial tem infinitos zeros no intervalo. Pelo teorema de separação de Sturm, os zeros de duas soluções independentes alternam-se, por isso basta uma solução: ou oscilam todas as soluções, ou nenhuma.
- O critério de Leighton e Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, a equação é oscilatória. Aqui $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, mas $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, portanto o critério não decide.
- O critério de Kneser com a constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, a equação é oscilatória.
- A técnica de Riccati: a substituição $w = \frac{y'}{y}$ transforma a equação na equação de Riccati $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. A equação é não oscilatória exatamente quando a equação de Riccati tem uma solução em todo um intervalo ⟨T; ∞) para algum T. Para uma equação oscilatória não existe: w «foge» para −∞ em cada zero de y.
- A transformação de Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ transforma a equação numa equação para o ângulo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. Num zero de y o ângulo φ é múltiplo de π e φ' > 0, por isso φ só cresce ao passar pelos múltiplos de π. O número de zeros em (a; b⟩ é portanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numericamente pelo método de Runge-Kutta (RK4) a partir dos valores iniciais $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- No intervalo $(1,\ 1\,000\,000]$ a solução tem este número de zeros: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Zeros vizinhos distam entre $1548{,}7974$ e $58269{,}3046$. Os zeros: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Conclusão: a equação é oscilatória – toda a solução não trivial tem infinitos zeros.

Gráfico



A solução com os zeros assinalados; por baixo, o ângulo de Prüfer φ, que nos zeros passa por múltiplos de π.

A equação de Euler semilinear, k = 1 > (2/3)³.

Enunciado: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Resultado

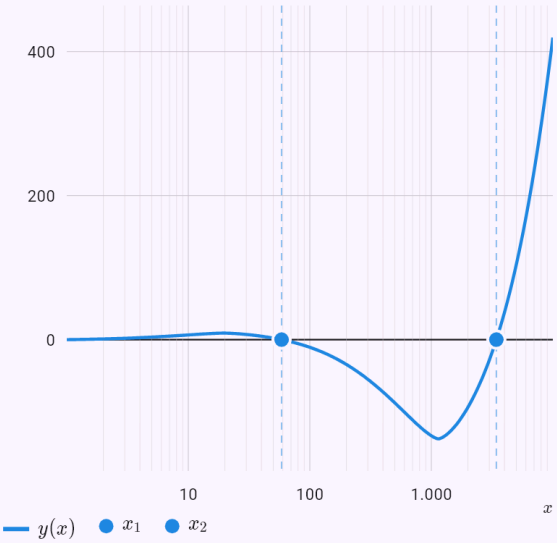
A equação é oscilatória.

Passos

- Estudamos a equação semilinear $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ com p = 3 no intervalo $[1, \infty)$, onde $\Phi(s) = |s|^1 s$. Um múltiplo de uma solução volta a ser solução, mas a soma de duas soluções em geral não. Para p = 2 é a equação linear y" + q(x)y = 0.
- A equação é oscilatória se toda a solução não trivial tem infinitos zeros no intervalo. O teorema de separação de Sturm vale também para equações semilineares: ou oscilam todas as soluções, ou nenhuma.
- Trata-se da equação de Euler semilinear com k = 1. Substituindo y = x^λ com 0 < λ < 1 obtemos k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ para p = 3. A função G atinge o máximo, a constante crítica $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, em λ = (p − 1)/p. Aqui k é maior, não há solução x^λ e a equação é oscilatória.
- O critério de Leighton e Wintner (se ∫ q = ∞, a equação é oscilatória) aqui não decide: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- O critério de Kneser para equações semilineares com a constante crítica $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ é maior, a equação é oscilatória.
- A técnica de Riccati para uma equação semilinear: a substituição $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ leva à equação de Riccati $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. A equação é não oscilatória exatamente quando esta tem uma solução em todo um intervalo ⟨T; ∞).

- Numericamente (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) a solução tem no intervalo $(1,\ 10\,000]$ este número de zeros: 2, à distância $3369{,}2413$. Os zeros: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Conclusão: a equação é oscilatória – toda a solução não trivial tem infinitos zeros.

Gráfico



A solução com os zeros assinalados.

O critério de Kneser discreto: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Enunciado: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

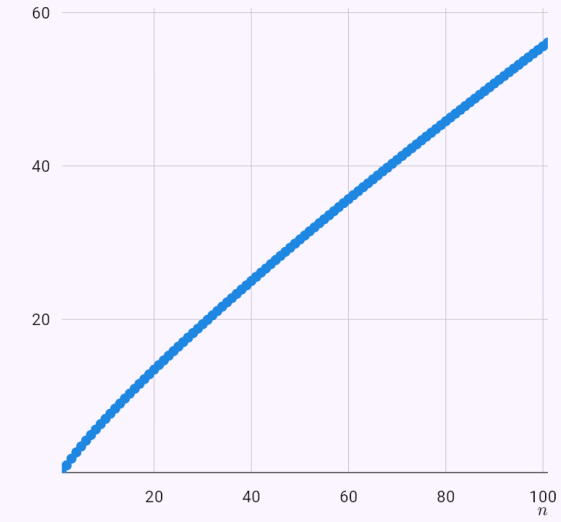
Resultado

A equação não é oscilatória.

Passos

- Estudamos o análogo discreto de (r y')' + q y = 0, a recorrência linear $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ para $n \geq 1$, onde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Como recorrência: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Numa sucessão contamos zeros generalizados: $y_n = 0$, ou uma mudança de sinal entre y_n e y_{n+1}. A equação é oscilatória se toda a solução não trivial tem infinitos zeros generalizados. Também aqui vale o teorema de separação de Sturm.
- O critério de Leighton e Wintner discreto: se $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ e $\Sigma\, q_n = \infty$, a equação é oscilatória. Aqui $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, portanto o critério não decide.
- O critério de Kneser discreto com a constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, a equação não é oscilatória.
- A técnica de Riccati discreta: a substituição $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ leva a $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. A equação é não oscilatória exatamente quando esta equação tem, a partir de certo n, uma solução com $w_n + r_n > 0$.
- A solução com $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ não tem nenhum zero generalizado para n em $(1,\ 101]$
- Conclusão: a equação não é oscilatória – toda a solução não trivial tem apenas um número finito de zeros.

Gráfico



A solução não tem nenhum zero no intervalo escolhido.

Exemplo 4.2 de Došlá e Marini – o caso C5: soluções regularmente crescentes e fortemente

decrescentes.

Enunciado: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Resultado

$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

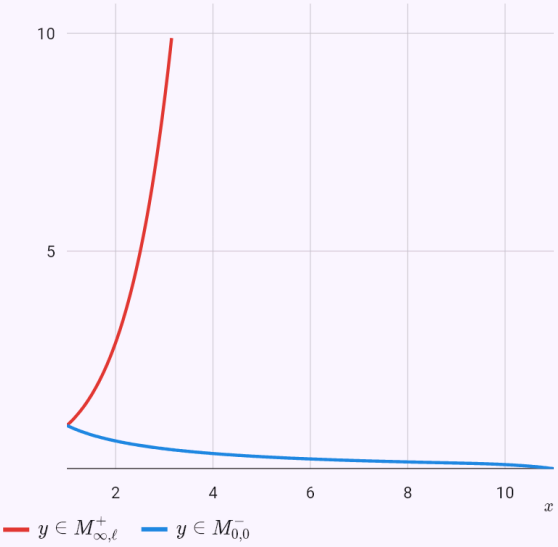
Passos

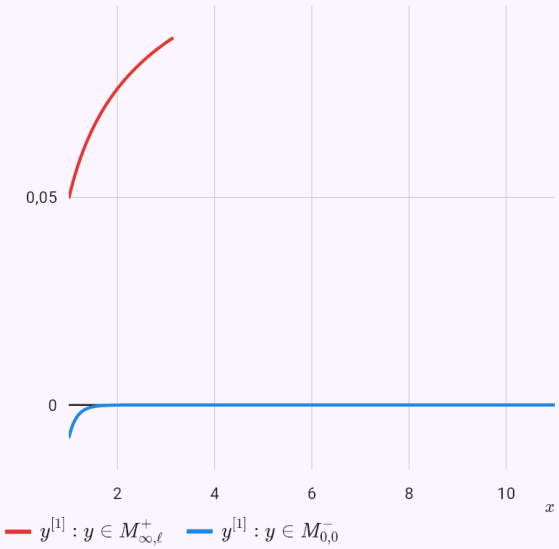
- Estudamos a equação semilinear $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ no intervalo $[1,\ \infty)$ com α = 3, a = e^{-3x} > 0 e b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. É uma equação com p-laplaciano para p = α + 1 e «potencial negativo» − não oscila. A forma geral da equação é $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- O comportamento de uma solução é descrito, juntamente com y, pela sua quase-derivada $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3 \operatorname{sgn} y'$. Toda a solução não trivial pertence a uma de duas classes: M^+ − a partir de certo x é y·y' > 0 e |y| cresce − ou M^- − y·y' < 0 em todo o intervalo e |y| decresce. As classes dividem-se segundo os limites de |y| e $|y^{[1]}|$ quando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito não nulo) ou 0 (nulo), por exemplo $M^+_{\infty,\ell}$
- Pelo teorema 2.1 (Došlá–Marini), toda a solução está definida em todo o intervalo e ambas as classes M^+ e M^- são não vazias. A M^+ pertencem, por exemplo, as soluções com y(x₀) > 0 e y'(x₀) ≥ 0.
- O integral A: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como e^x (a menos de uma constante positiva). Decide a exponencial, portanto $\displaystyle\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- O integral B $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- O integral J_1: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como e^x (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Decide a exponencial, portanto $\displaystyle\int_1^\infty e^x \left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- O integral J_2: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como $x^{-\frac{2}{3}}$ (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\,dx$, que converge exatamente para μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- O integral Y_1 diverge, porque já o integral interior diverge $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- O integral Y_2: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como x^{-2} (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\,dx$, que converge exatamente para μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x < \infty$
- Lema 2.1 (uma generalização do teorema de Fubini): para α = 3 ≥ 1, de $Y_2 = \infty$ segue-se $J_2 = \infty$ e de $Y_1 = \infty$ segue-se $J_1 = \infty$.
- Os integrais deram $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ − é o caso C_5 da classificação (teorema 3.1).
- A equação recíproca $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a e b trocam de papel e α passa a 1/α) tem como soluções as quase-derivadas das soluções da equação dada. Os

seus integrais J_1, J_2 leem-se como Y_2, Y_1, pelo que ocorre o caso C_8. As classes correspondem-se com os índices trocados: $M^+_{\infty,\ell}$ da equação dada corresponde a $M^+_{\ell,\infty}$ da recíproca.

- $M^+_{\infty,\ell} \neq \varnothing$: soluções regularmente crescentes – $|y| \to \infty$, mas a quase-derivada tem limite finito não nulo; y cresce como $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (teorema 3.1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: soluções fortemente decrescentes – $y \to 0$ e $y^{[1]} \to 0$ (teorema 3.1).
- A solução de M^- no gráfico é encontrada numericamente por tiro: procuramos o valor inicial da quase-derivada para o qual a solução com $y(1) = 1$ num intervalo longo nem chega a zero nem começa a crescer – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Esse valor é único, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (teorema 4).

Gráfico





Em cima, soluções numéricas y(x) das classes não vazias (M^+ a partir de $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- por tiro); em baixo, as suas quase-derivadas y^[1](x). Uma curva termina onde |y| ultrapassa 10.

O caso C4 – soluções crescentes limitadas e todo um intervalo de decrescentes.

Enunciado: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Resultado

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oscilação da equação

Passos

- Estudamos a equação linear $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ no intervalo $[1,\ \infty)$, ou seja (a(x)y')' = b(x)y com a = x^4 > 0 e b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. Escrita como (a y')' + q y = 0 tem q = −b negativo, pelo que a equação não é oscilatória – cada solução tem no máximo um zero.
- O comportamento de uma solução é descrito, juntamente com y, pela sua quase-derivada $y^{[1]} = x^4 y'$. Toda a solução não trivial pertence a uma de duas classes: M^+ – a partir de certo x é y·y' > 0 e |y| cresce – ou M^- – y·y' < 0 em todo o intervalo e |y| decresce. As classes dividem-se segundo os limites de |y| e $|y^{[1]}|$ quando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito não nulo) ou 0 (nulo), por exemplo $M^+_{\infty,\ell}$
- Pelo teorema 2.1 (Došlá–Marini), toda a solução está definida em todo o intervalo e ambas as classes M^+ e M^- são não vazias. A M^+ pertencem, por exemplo, as soluções com y(x₀) > 0 e y'(x₀) ≥ 0.
- O integral A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- O integral B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- O integral J_1: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como x^{-4} (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\,dx$, que converge exatamente para μ < −1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

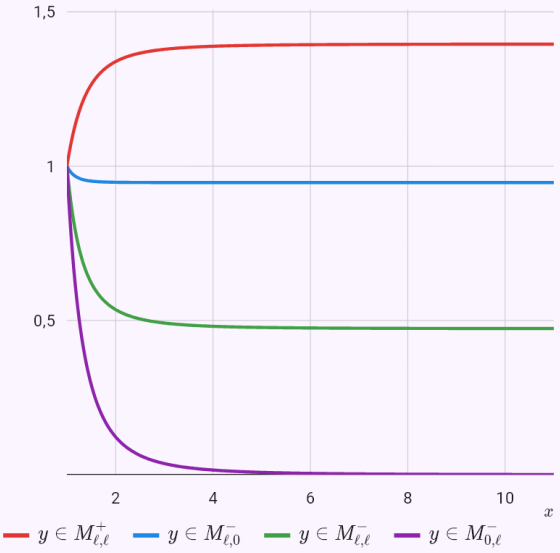
- O integral J_2: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como x^{-7} (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\,dx$, que converge exatamente para μ < −1

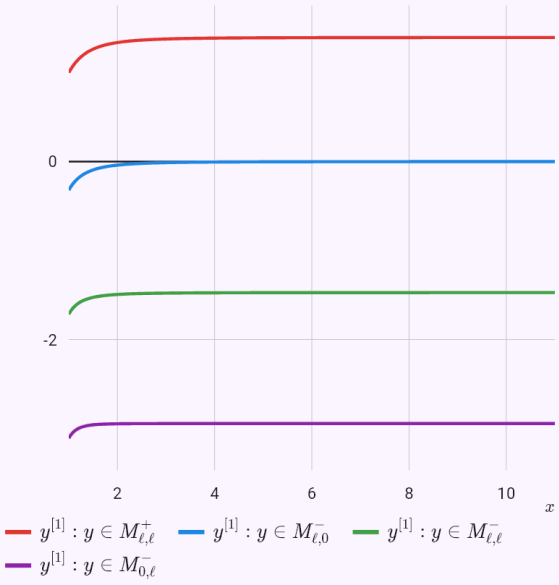
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Os integrais deram $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – é o caso C_4 da classificação (teorema 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluções crescentes com limites finitos de y e da quase-derivada (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluções decrescentes em que y e a quase-derivada têm limites não nulos (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: soluções que decrescem para um limite não nulo, a quase-derivada → 0 (teorema 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: soluções regularmente decrescentes – y → 0, mas a quase-derivada tem limite não nulo; y decresce como $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (teorema 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – nenhuma solução deste tipo (teorema 3.1).
- As soluções de M^- no gráfico são encontradas numericamente por tiro: com $y(1) = 1$ mantêm-se

positivas e decrescentes para todo um intervalo de valores iniciais da quase-derivada $y^{[1]}(1) \in [-3{,}1103,\ -0{,}3215]$, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (teorema 4). Os extremos e o ponto médio do intervalo dão soluções de classes diferentes.

Gráfico





Em cima, soluções numéricas y(x) das classes não vazias (M^{+} a partir de $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} por tiro); em baixo, as suas quase-derivadas y^[1](x). Uma curva termina onde |y| ultrapassa 10.

Uma equação superlinear – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (a solução $\sqrt{2}/(x + \sqrt{2})$).

Enunciado: `asymptotics(y'' = y^3)`

Resultado

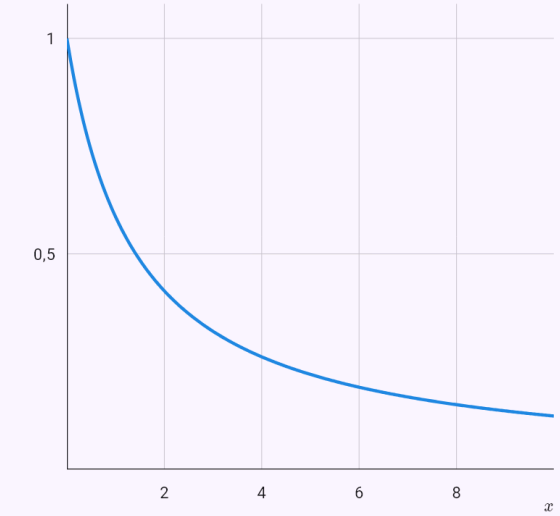
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

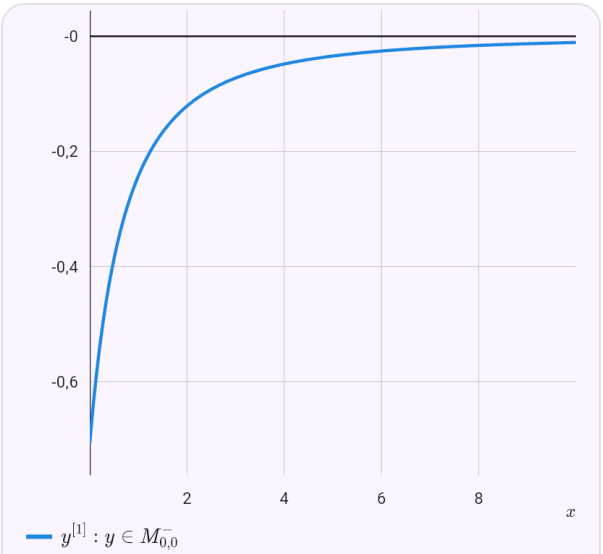
Passos

- Estudamos a equação do tipo Emden-Fowler $y'' = |y|^2 y$ no intervalo $[0, \infty)$ com α = 1, β = 3, a = 1 > 0 e b = 1 > 0. Como β > α, a equação é superlinear. A forma geral da equação é $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- O comportamento de uma solução é descrito, juntamente com y, pela sua quase-derivada $y^{[1]} = y'$. Toda a solução não trivial definida até ao infinito pertence a uma de duas classes: M^+ – a partir de certo x é y·y' > 0 e |y| cresce – ou M^- – y·y' < 0 e |y| decresce. As classes dividem-se segundo os limites de |y| e $|y^{[1]}|$ quando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito não nulo) ou 0 (nulo).
- Pelo teorema 1 (Cecchi–Došlá–Marini), para β > α a classe M^- é não vazia. Algumas soluções, porém, «explodem»: |y| → ∞ já num ponto finito, pelo que não estão definidas até ao infinito. A classe M^+ pode ser vazia.
- O integral A: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como 1 (a menos de uma constante positiva). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\, dx$, que converge exatamente para μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- O integral B: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como 1 (a menos de uma constante positiva). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\, dx$, que converge exatamente para μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- O integral J_1: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como x (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\, dx$, que converge exatamente para μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- O integral $Y_2^{(\beta)}$: quando x → ∞ a função integranda comporta-se como x^3 (a menos de uma constante positiva, com o integral interior substituído pelo seu comportamento assintótico). Pelo critério de comparação com $\int x^\mu\, dx$, que converge exatamente para μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- O integral $Y_1^{(\beta)}$ diverge, porque já o integral interior diverge: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \varnothing$ – nenhuma solução deste tipo (Kiguradze, citado em Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \varnothing$ – nenhuma solução deste tipo (lema 1).
- $M^-_{\ell,0} = \varnothing$ – nenhuma solução deste tipo (lema 2).
- $M^-_{0,\ell} = \varnothing$ – nenhuma solução deste tipo (lema 1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: soluções fortemente decrescentes – y → 0 e $y^{[1]} \to 0$ (teorema 1).

- A solução de M^- no gráfico é encontrada numericamente por tiro: procuramos o valor inicial da quase-derivada para o qual a solução com $y(0) = 1$ num intervalo longo nem chega a zero nem começa a crescer – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Esse valor é único, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (teorema 4).

Gráfico





Em cima, soluções numéricas y(x) das classes não vazias (M^+ a partir de $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- por tiro); em baixo, as suas quase-derivadas y^[1](x). Uma curva termina onde |y| ultrapassa 10.

Limitações conhecidas

- Uma equação que precisa de uma indicação do enunciado (diferente de z = ln y) ainda não é resolvida.
- Numa equação com parâmetro (k, λ, ω) a aplicação não desenha gráfico e considera os parâmetros positivos.
- Quando a solução não se pode exprimir explicitamente, fica na forma implícita.
- A transformada de Laplace ainda não conhece a função de Heaviside, os deslocamentos nem os lados direitos periódicos.
- Quando os integrais da variação das constantes não se podem exprimir por funções elementares (y″ + y′ + y = tan x), a solução mantém-nos como integrais; nesse caso não há gráfico nem se aplicam condições iniciais.
- Sistemas só de duas equações lineares com coeficientes constantes sem termo independente; sistemas não lineares só nas aplicações (modelos).
- Uma equação de Riccati sem solução particular dada só se resolve se se adivinhar uma de forma simples – caso contrário, a aplicação indica que é precisa.
- A equação de Lagrange só sem condição inicial; na de Clairaut, a condição escolhe as retas (e a envolvente) que passam pelo ponto.

- A oscilação apenas para equações com coeficientes numéricos (k tem de ser um número); uma equação semilinear apenas com r = 1. Os zeros são contados numericamente num intervalo finito – sobre o infinito decidem apenas os critérios.
- A assintótica de uma equação do tipo Emden-Fowler ($\beta \neq \alpha$) só é decidida onde os teoremas citados o dizem – as restantes classes são marcadas como não decididas. Os coeficientes a, b têm de ser positivos; o seu comportamento no infinito é reconhecido em produtos de potências, logaritmos e exponenciais, caso contrário apenas integrais exatos com o Symja.

37. Cálculo das variações

A aplicação procura uma extremal de um funcional J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx com as condições de fronteira y(a), y(b): monta a equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (com as derivadas parciais na resolução), mostra o integral primeiro de um integrando sem y e resolve a equação diferencial resultante com o resolvedor de EDO, com as condições de fronteira e a verificação. O problema existe também como formulário nas áreas Análise e Física (Aplicações).

Se a equação não tiver solução em forma fechada e F não depender de x, usa a identidade de Beltrami e reconhece as extremais conhecidas: a braquistócrona (uma cicloide, comparada com a reta, com o tempo de deslizamento), a catenária e a superfície de revolução mínima (duas, uma ou nenhuma catenária – solução de Goldschmidt), um problema isoperimétrico com multiplicador de Lagrange (um arco de circunferência de comprimento dado, uma corrente suspensa). As constantes calculam-se numericamente. O princípio da mínima ação transforma um lagrangiano na equação do movimento; no pêndulo, com sen θ ≈ θ. Há uma demonstração interativa – uma corrida de bolas pela braquistócrona – em mathtrace.app, em «Experimenta».

Como introduzir

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	O integrando e as condições de fronteira, separados por ponto e vírgula.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	A restrição ∫ G dx = L como último elemento.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Um lagrangiano L = T − V e a palavra action – a equação do movimento.

Exemplos

O caminho mais curto entre dois pontos é um segmento.

Enunciado: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Resultado

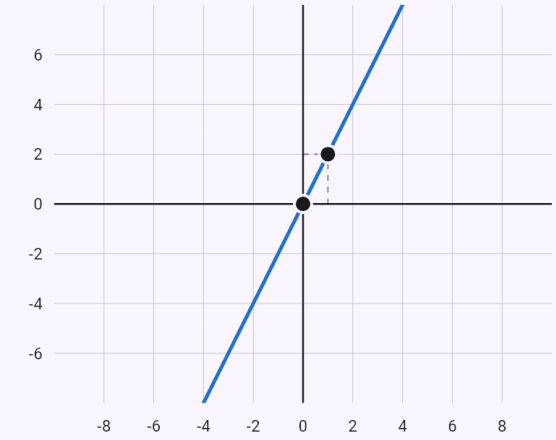
$$y = 2x$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, condições de fronteira $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- O integrando não depende de y – a equação de Euler-Lagrange tem um integral primeiro:
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$$
- Resolvemos a equação diferencial:
- O lado direito depende só da variável independente – integramos a equação passo a passo: $y'' = 0$
- Integramos ambos os lados: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Integramos ambos os lados: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = 2, \; C_2 = 0$
$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $y = 2x$

Gráfico

Soluções | Plano de fase



$y = 2x$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

Valores próprios das constantes

C_1 | C_2 | + Adicionar curva

Toque no gráfico e ajuste a inclinação com o controle deslizante – é desenhada a solução que passa por esse ponto com essa inclinação da tangente.

A equação de Euler-Lagrange y'' = y com condições de fronteira.

Enunciado: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Resultado

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, condições de fronteira $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Resolvemos a equação diferencial:
- Uma equação linear com coeficientes constantes: $y'' - y = 0$
- Procuramos soluções y = e^(λx); substituindo e dividindo por e^(λx), obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 1 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^x$
- A solução geral: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$
  $$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

A braquistócrona – uma cicloide de A [0; 0] a B [2; 1], deslizamento de 0,806 s contra 1,010 s pela reta.

Enunciado: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

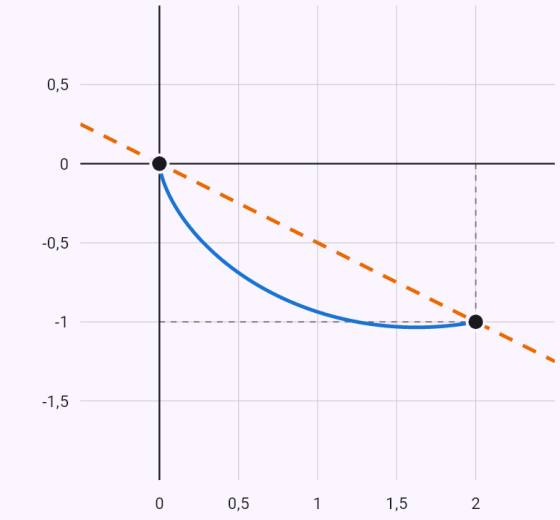
Resultado

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx,$ condições de fronteira $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Da identidade de Beltrami resulta y·(1 + y'²) = const. A solução é uma cicloide − a curva descrita por um ponto de uma circunferência que rola (o eixo y aponta para baixo, partida em repouso em A): $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- As constantes a partir do ponto final B (θ_B numericamente por bisseção) $\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$
- O valor do funcional: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; ao longo da reta $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Para J = ∫ ds/v com v = √(2gy), J é o tempo do deslizamento: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056\ \text{s}$
- θ_B > π − a trajetória mais rápida desce abaixo do nível de B e depois sobe até B.

Gráfico



$x(\theta),\ y(\theta)$
$y = 0{,}5x$

O eixo y aponta para baixo − a trajetória passa abaixo do ponto A. A cheio a cicloide (o deslizamento mais rápido), a tracejado a reta para comparar.

A superfície de revolução mínima entre dois anéis – duas catenárias, o mínimo é a menos funda.

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

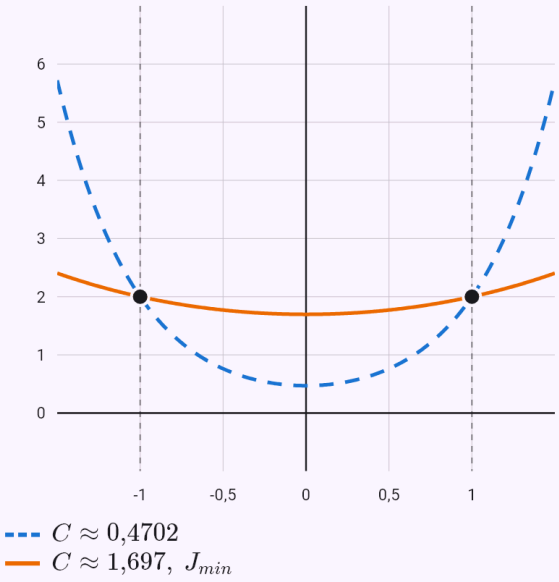
Resultado

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, condições de fronteira $y(-1) = 2,\quad y(1) = 2$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Da identidade de Beltrami resulta uma catenária (o cosseno hiperbólico): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Duas catenárias satisfazem as condições de fronteira (numericamente). O mínimo é a de menor J − a menos funda; a mais funda é apenas estacionária. $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358;\quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Gráfico



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

A extremal entre os pontos dados; a tracejado a outra solução ou uma curva para comparar.

Anéis muito afastados – nenhuma catenária (solução de Goldschmidt).

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Resultado

Não há solução.

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, condições de fronteira $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Da identidade de Beltrami resulta uma catenária (o cosseno hiperbólico): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Nenhuma catenária passa pelos dois pontos – os anéis são pequenos demais para a sua distância. A superfície mínima é então só os dois discos e o eixo entre eles (solução de Goldschmidt); não existe extremal suave.

A maior área sob uma curva de comprimento π – uma semicircunferência.

Enunciado: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Resultado

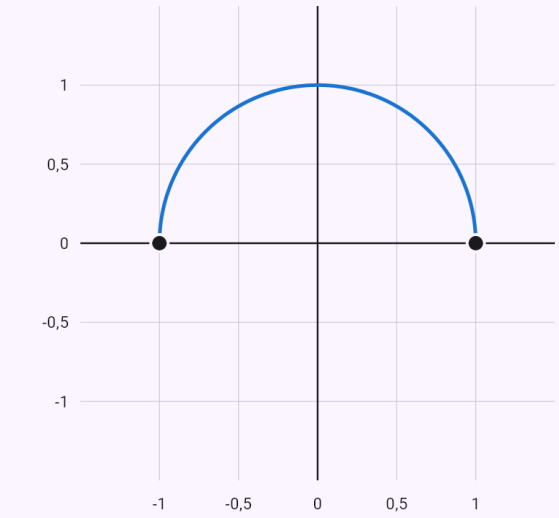
$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, condições de fronteira $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Um problema isoperimétrico com a restrição $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: juntamo-la com um multiplicador de Lagrange λ e procuramos um extremo do funcional com o integrando $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Da identidade de Beltrami para F + λG resulta uma circunferência − um arco de raio |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- As constantes a partir do comprimento do arco e da corda, ângulo ao centro 2α (numericamente)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Gráfico



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

A extremal entre os pontos dados; a tracejado a outra solução ou uma curva para comparar.

Uma corrente suspensa de comprimento 3 – uma catenária com multiplicador de Lagrange.

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Resultado

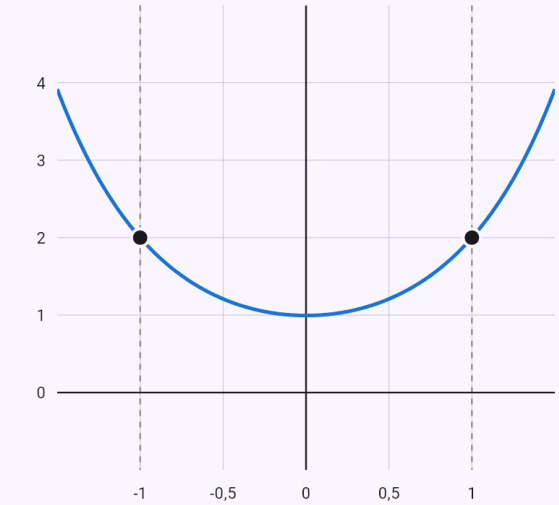
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$$

Passos

- Procuramos a função para a qual o funcional tem um extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, condições de fronteira $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Um problema isoperimétrico com a restrição $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{y'^2+1}\right)dx = 3$: juntamo-la com um multiplicador de Lagrange λ e procuramos um extremo do funcional com o integrando $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- A equação de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Da identidade de Beltrami para F + λG resulta uma catenária deslocada de λ: $y = c + C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- As constantes a partir do comprimento da corrente e das condições de fronteira (numericamente)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Gráfico



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$

A extremal entre os pontos dados; a tracejado a outra solução ou uma curva para comparar.

O princípio da mínima ação – uma mola, a equação do movimento m x'' + k x = 0.

Enunciado: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Resultado

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Passos

- O princípio da mínima ação: o movimento torna a ação estacionária: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- A equação de Euler-Lagrange do lagrangiano é a equação do movimento: $-kx - mx'' = 0$
- Resolvemos a equação diferencial:
- Uma equação linear com coeficientes constantes:
  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Procuramos soluções x = e^(λt); substituindo e dividindo por e^(λt), obtemos a equação característica:
  $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- A solução geral
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Um pêndulo – sen θ ≈ θ para pequenas oscilações.

Enunciado: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Resultado

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Passos

- O princípio da mínima ação: o movimento torna a ação estacionária: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- As derivadas parciais do integrando em ordem a y e y' e a derivada total em ordem a x (y e y' dependem de x)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- A equação de Euler-Lagrange do lagrangiano é a equação do movimento: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- O integrando não depende de x − vale a identidade de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- A equação com sen θ não tem solução elementar. Para pequenas oscilações, sen θ ≈ θ dá a equação das oscilações harmónicas: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Resolvemos a equação diferencial:
- Uma equação linear com coeficientes constantes:
  $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Procuramos soluções \theta = e^(λt); substituindo e dividindo por e^(λt), obtemos a equação característica:
  $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Cada raiz λ dá a solução e^(λx), uma raiz de multiplicidade k também x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e um par α ± βi as soluções e^(αx)·cos βx e e^(αx)·sin βx. O sistema fundamental
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- A solução geral
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Limitações conhecidas

- Uma função incógnita e no máximo a sua primeira derivada no integrando; ainda não funcionais de várias funções nem com y″.
- As extremais conhecidas (cicloide, catenária, arco de circunferência) são reconhecidas pela forma do integrando; outras equações não lineares ficam como equação de Euler-Lagrange.
- A braquistócrona parte do repouso – o ponto inicial deve ter y(a) = 0 e o eixo y aponta para baixo.

38. Equações diferenciais parciais

Escreva a equação com índices u_t, u_xx, u_xy (de uma foto o app também lê ∂u/∂t e ∂²u/∂x²), o laplaciano como Δu; as condições e o domínio separados por ponto e vírgula. Sem condições o app determina o tipo de uma equação linear de segunda ordem (elíptica, parabólica, hiperbólica – por regiões com coeficientes variáveis), a equação das características, a forma canônica e, sem termos de ordem inferior, a solução geral. Uma equação de primeira ordem a·u_x + b·u_y + c·u = f é resolvida pelas características com verificação.

Com condições de contorno e iniciais resolve por separação de variáveis a equação do calor u_t = k·u_xx e a equação da onda u_tt = c²·u_xx num intervalo (extremidades a temperatura fixa ou isoladas, valores não nulos via estado estacionário) e a equação de Laplace num retângulo e num disco (também fora). Os coeficientes de Fourier saem como fórmula em n; se a função inicial é soma de autofunções, sai uma soma finita. Em toda a reta usa a fórmula de d'Alembert e a transformada de Fourier (núcleo do calor), na semirreta x > 0 a transformada de Laplace no tempo. Também trata uma fonte f(x, t) (princípio de Duhamel), um fluxo de calor numa extremidade, valores de contorno variáveis no tempo e, na equação de Laplace, derivadas nos lados. Das equações não lineares resolve a de Burgers – por características até se formar uma onda de choque e, com viscosidade, pela transformação de Cole-Hopf; a equação das ondas na reta é também mostrada pela transformada de Fourier. A equação de Poisson Δu = f num retângulo resolve-se com uma série de Fourier dupla (a fonte como soma de produtos p(x)·q(y)); com derivadas nos quatro lados verifica-se a condição de solubilidade e a solução sai a menos de uma constante. As equações com os coeficientes variáveis αx²u_xx + βxu_x passam a um problema de Sturm-Liouville com peso.

Numericamente numa malha com o esquema como cabeçalho, como os outros métodos numéricos: a equação do calor explícita (ftcs), implícita (btcs), por Crank-Nicolson (cranknicolson) e pelo método θ (theta) – os sistemas implícitos pelo algoritmo de Thomas, com a análise de estabilidade de von Neumann; a equação de transporte por upwind, laxwendroff e leapfrog com a condição CFL, a equação da onda por leapfrog; a equação de Laplace (Poisson) pelo esquema de cinco pontos e as iterações jacobi, gaussseidel e sor comparando o número de iterações. Valores nomeados: h passo espacial, k passo de tempo, to tempo final, theta, omega, tol, max. A equação do calor também é um formulário em Métodos numéricos. O calor em 2D num retângulo é resolvido pelos esquemas ftcs e adi (direções alternadas), a equação de Laplace também pelo gradiente conjugado (cg), multigrelha (multigrid) e elementos finitos com triângulos (fem); a equação de Burgers pelo esquema de Godunov (upwind). As equações de transporte e de Laplace são também formulários na área Métodos numéricos, e as aplicações (barra, corda, tambor, difusão) formulários de física e química. Para leis de conservação há os esquemas laxfriedrichs e muscl (com o limitador minmod) – para a equação de transporte e a de Burgers, esta também com viscosidade (comparação com a transformação de Cole-Hopf). O método dos elementos finitos (fem) calcula também num polígono geral dado pelos vértices, polygon = (0,0),

(2,0), …, com o valor na fronteira u = …; a malha sai do corte de orelhas e da divisão dos triângulos. O calor numa placa é um formulário de física.

O resultado é um gráfico de u(x, t): uma curva no tempo com controle deslizante e botão de reprodução e uma superfície 3D giratória; na solução numérica a exata vem tracejada. A solução estacionária u(x, y) de Laplace é uma superfície 3D.

Como introduzir

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	A equação, condições de contorno e iniciais; uma derivada numa condição como u_t(x,0) ou u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	O domínio: x ∈ ℝ, x > 0 ou 0 < x < π; sem condições de contorno toda a reta.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	A equação de Laplace num disco: Δu, o raio r e o ângulo φ (ou θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numericamente: o esquema como cabeçalho, os passos h e k e o tempo final to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Calor em 2D: u(x,y,t), condições como u(x,y,0) = … e u(0,y,t) = …; os lados sem condição valem 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Elementos finitos num polígono: os vértices depois de polygon =, o valor na fronteira u = …, a aresta maior h.

Exemplos

Uma equação hiperbólica – características, forma canônica u_ξη = 0 e solução geral.

Enunciado: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Resultado

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Os coeficientes das segundas derivadas na forma $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- O discriminante: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, a equação é hiperbólica (como a equação da onda): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- A equação das características: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Duas famílias reais de características: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Novas variáveis ao longo das características: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Após a mudança de variáveis (regra da cadeia) obtemos a forma canônica: $u_{\xi\eta} = 0$
- A equação u_ξη = 0 é integrada duas vezes – a solução geral com duas funções arbitrárias $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

A equação de Tricomi – o tipo por regiões.

Enunciado: `y u_xx + u_yy = 0`

Resultado

$$D = -y$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Os coeficientes das segundas derivadas na forma $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- O discriminante depende da posição: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- O tipo por regiões – hiperbólica para $y < 0$, parabólica para $y = 0$, elíptica para $y > 0$
- A equação das características: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

A equação de transporte pelas características – a onda anda com velocidade 2.

Enunciado: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

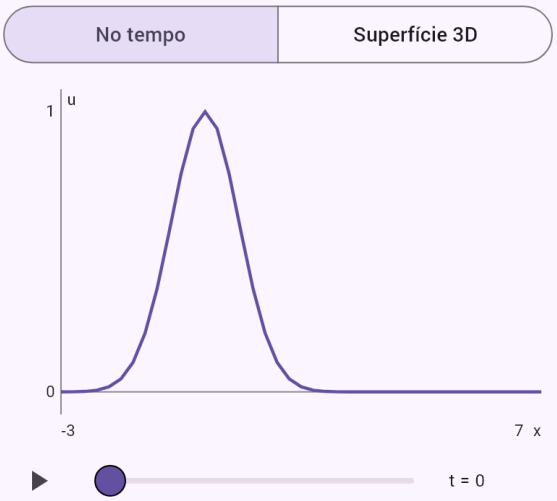
Resultado

$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t + 2u_x = 0$
- Condições: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- O método das características: ao longo das curvas que resolvem o sistema a equação vira uma equação diferencial ordinária para u.
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$
- As características são as curvas nas quais $x - 2t = \xi$ é constante.
- Ao longo de uma característica resolvemos uma equação ordinária, o valor inicial vem da condição:
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$$
- Verificação: substituída na equação, o lado esquerdo é igual ao direito.
- A solução: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Calor numa barra com extremidades resfriadas – uma série de Fourier.

Enunciado: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Resultado

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \, e^{-4n^2 t} \, \sin(n$$

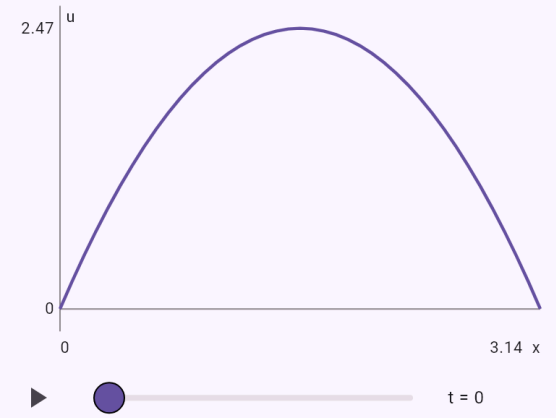
Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = 4u_{xx}$
- Condições:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separação de variáveis: procuramos um produto; substituído e dividido, as variáveis se separam – os dois lados devem igualar a mesma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -4n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-4n^2 t} \, \sin(nx)$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \, \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$

- A solução
  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \, e^{-4n^2 t} \, \sin(nx)$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Extremidades a temperaturas diferentes – o estado estacionário e o desvio.

Enunciado: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Resultado

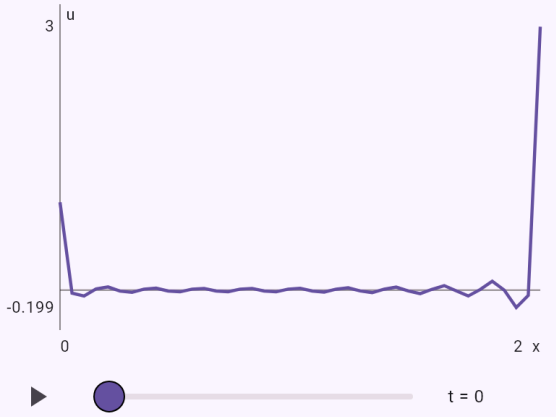
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = 2u_{xx}$
- Condições: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- As extremidades têm valores não nulos. Primeiro o estado estacionário $w(x) = x + 1$ (a equação sem o tempo, w" = 0), depois procuramos $u = w(x) + v(x,t)$; o desvio v é nulo nas extremidades.
- Separação de variáveis: procuramos um produto; substituído e dividido, as variáveis se separam – os dois lados devem igualar a mesma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\, T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- A solução
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



t = 0

A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Uma corda dedilhada – ondas estacionárias.

Enunciado: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ s$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Condições:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, a equação é hiperbólica (como a equação da onda): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Separação de variáveis: procuramos um produto – ondas estacionárias; os dois lados igualam a mesma constante: $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – oscilações com a sua própria frequência:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição)

  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)

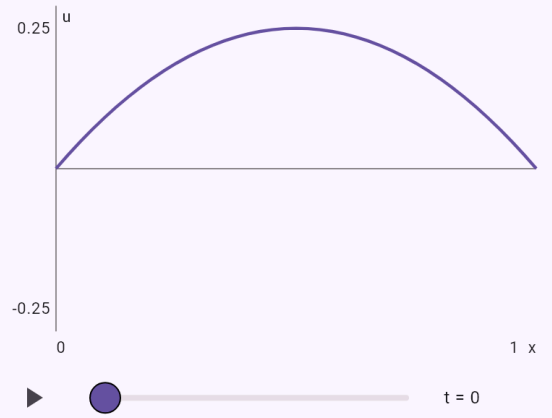
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\, \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- A solução

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

A equação de Laplace num retângulo com um lado aquecido.

Enunciado: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

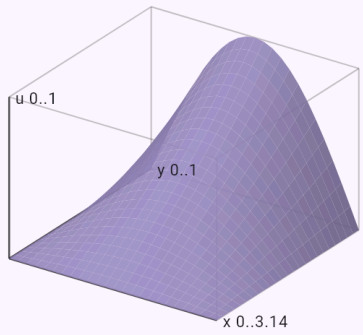
Resultado

$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condições: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, a equação é elíptica (como a equação de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- O lado com valores não nulos (os outros têm u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Separação de variáveis: procuramos um produto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A outra equação Y" = λY, nula no lado oposto, normalizada para 1 no lado dado: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- A função inicial (de contorno) já é uma soma de autofunções, por isso só poucos coeficientes $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, \sin(nx)\, dx$ não são nulos: $c_1 = 1$, os outros são nulos.
- A solução: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

A equação de Laplace num disco – uma soma finita de harmônicos.

Enunciado: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

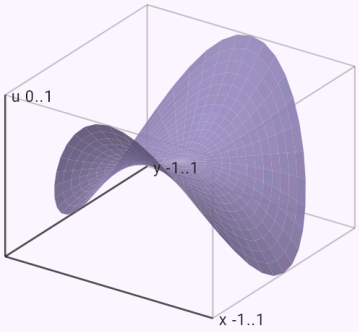
Resultado

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Condições: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, a equação é elíptica (como a equação de Laplace):
  $\Delta u = 0$
- Separação de variáveis em coordenadas polares:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi):\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- O ângulo volta após uma volta, Φ deve ser periódica:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – as soluções
  $\lambda_n = n^2,\quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi,\quad n = 0,1,2,\ldots$
- A parte radial é a equação de Euler; dentro do disco a solução deve ser limitada (r^{-n} e ln r saem):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Os coeficientes de Fourier da função de contorno:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- A função inicial (de contorno) já é uma soma de autofunções, por isso só poucos coeficientes $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ não são nulos: $a_2 = -\frac{1}{2}$, os outros são nulos.
- Todos os coeficientes são nulos:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- A solução: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

A fórmula de d'Alembert – um impulso inicial divide-se em duas ondas.

Enunciado: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Resultado

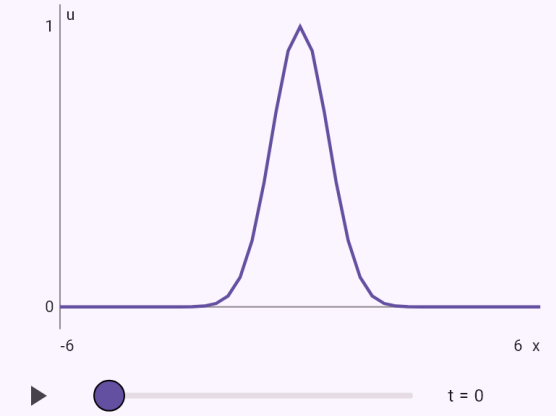
$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{tt} = u_{xx}$
- Condições: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, a equação é hiperbólica (como a equação da onda): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- A solução geral da equação da onda são duas ondas que se movem com velocidade c para a esquerda e para a direita: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- O mesmo com a transformada de Fourier em x: cada frequência ω oscila separadamente. Multiplicar por e^(±icωt) é um deslocamento de ∓ct, pelo que a transformada inversa dá – a fórmula de d'Alembert.
- As condições iniciais u = f e u_t = g dão a fórmula de d'Alembert: $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Verificação: substituída na equação, o lado esquerdo é igual ao direito.
- A solução: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



t = 0

A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

A transformada de Fourier em toda a reta – um perfil gaussiano alarga-se.

Enunciado: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Resultado

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

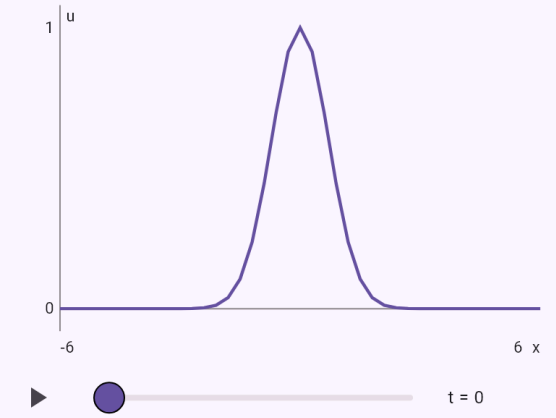
Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = u_{xx}$
- Condições: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Em toda a reta usamos a transformada de Fourier em x – a derivada u_xx vira multiplicação por −ω²:
  $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Para cada ω fica uma equação ordinária no tempo
  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- A transformada inversa de um produto é a convolução com o núcleo do calor (uma gaussiana que se alarga com o tempo)
  $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- A convolução de duas gaussianas é outra gaussiana, só mais larga e mais baixa
  $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Verificação: substituída na equação, o lado esquerdo é igual ao direito.

- A solução: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

A transformada de Laplace – um semiespaço aquecido, a função erfc.

Enunciado: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

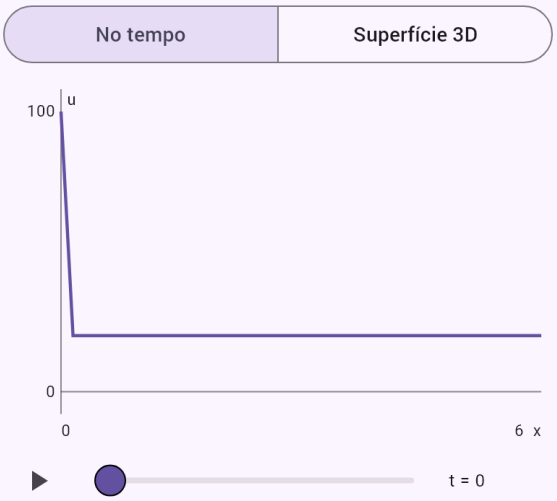
Resultado

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = 4u_{xx}$
- Condições: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Numa semirreta usamos a transformada de Laplace no tempo $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – a derivada u_t vira sU − u(x, 0) e fica uma equação ordinária em x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Quando x → ∞ U deve ficar limitada, a exponencial crescente sai: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; a constante pela condição de contorno: $U(0,s) = \frac{100}{s} \;\Rightarrow\; A(s) = \frac{80}{s}$
- A transformada inversa pela tabela $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- A solução: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

O esquema explícito com r = 0,7 > 1/2 – instável segundo von Neumann.

Enunciado: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to`

= 1)

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- A malha: 11 nós em x, 143 passos de tempo até t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r é o passo de tempo sobre o quadrado do passo espacial).
- O esquema explícito (para frente no tempo, centrado no espaço) – cada valor novo diretamente de três antigos: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Análise de von Neumann: o erro é decomposto em ondas e^(iβx), cada uma multiplicada a cada passo por G: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. A estabilidade exige $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – aqui não, os erros vão crescer exponencialmente.
- O primeiro nível de tempo

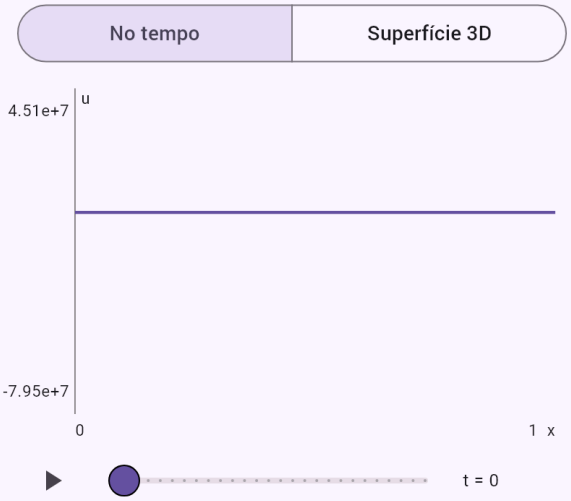
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- No nível level.50 os valores cresceram sem limite – o esquema é instável, o cálculo foi interrompido.
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

O esquema de Crank-Nicolson com o algoritmo de Thomas.

Enunciado: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k`

= 0.01; to = 0.1)

Resultado

$$u(0{,}5,\,0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- A malha: 11 nós em x, 10 passos de tempo até t = 0,1; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r é o passo de tempo sobre o quadrado do passo espacial).
- O esquema de Crank-Nicolson – a média do explícito e do implícito, de segunda ordem também no tempo $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Análise de von Neumann: o erro é decomposto em ondas e^(iβx), a amplificação a cada passo é $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; sempre $|G| \le 1$, o esquema é estável para qualquer passo (incondicionalmente).
- Em cada nível de tempo é preciso resolver um sistema tridiagonal a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (os valores de contorno no lado direito). O primeiro nível

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- O sistema pelo algoritmo de Thomas – a varredura para frente e a substituição regressiva $c_i' = \dfrac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \dfrac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

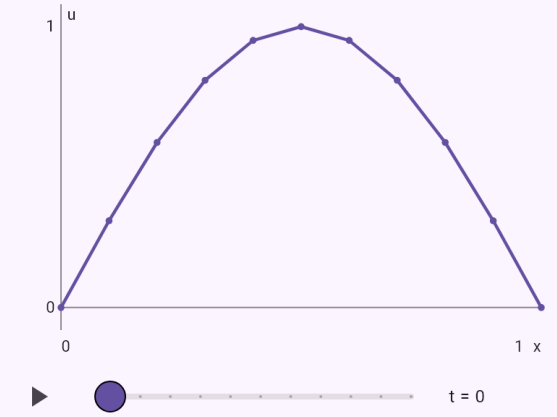
- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,'
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,!
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,:

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (exatamente $0{,}372708$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5,\,0{,}1) \approx 0{,}375442$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



Pontos: a solução numérica nos nós da malha; tracejada: a solução exata. O controle deslizante escolhe o nível de tempo.

O esquema de Lax-Wendroff para a equação de transporte, a condição CFL.

Enunciado: laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =

```
0.016; to = 0.4)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- A malha em $0 \le x \le 1$: 51 nós, 25 passos de tempo até t = $0{,}4$; $h = 0{,}02$, $\quad k = 0{,}016$, $\quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ é o número de Courant.
- A solução exata é transportada ao longo das características $x - t = C$ com velocidade a = 1
- O esquema de Lax-Wendroff – desenvolvimento de Taylor até a segunda ordem, u_tt substituído por a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- A condição CFL (o domínio numérico de dependência contém a característica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Análise de von Neumann: o erro é decomposto em ondas e^(iβx), cada uma multiplicada a cada passo pela amplificação G. O esquema é estável se |G| ≤ 1 para todo β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; vale porque $|\nu| \le 1$
- O primeiro nível de tempo

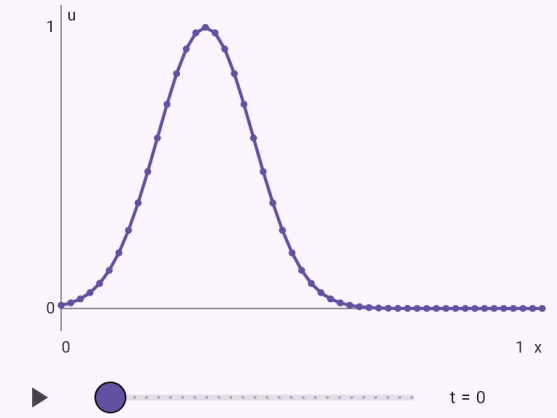
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (exatamente $0{,}135335$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Gráfico



Pontos: a solução numérica nos nós da malha; tracejada: a solução exata. O controle deslizante escolhe o nível de tempo.

O esquema de cinco pontos e SOR com ω ótimo – comparado com Jacobi e Gauss-Seidel.

Enunciado: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Uma malha quadrada: $h = 0{,}1$, 121 nós, 81 deles incógnitas interiores.
- O esquema de cinco pontos – u_xx + u_yy substituído por diferenças, uma equação em cada nó: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- A sobrerrelaxação sucessiva (SOR) – o passo de Gauss-Seidel «esticado» pelo fator ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- O fator de relaxação ótimo a partir do raio espectral da iteração de Jacobi $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- As iterações a partir de uma estimativa nula no interior (nós escolhidos e a maior variação)

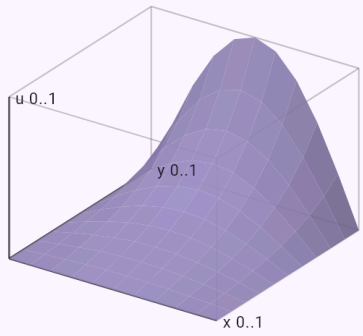
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- A iteração parou após 20 passos, quando a maior variação ficou abaixo de 10^{-4}
- Os métodos na mesma malha com a mesma tolerância: Jacobi 102 iterações, Gauss-Seidel 61, SOR com ω = $1{,}528$ só 20
- Métodos mais rápidos para o mesmo sistema (81 incógnitas): gradiente conjugado 10 iterações, multigrelha 5 ciclos V. O número de ciclos V quase não depende da finura da malha.
- Os valores nos nós da malha

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}0028$ (exatamente $0{,}199268$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Uma fonte de calor que enfraquece com o tempo – princípio de Duhamel.

Enunciado: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Passos

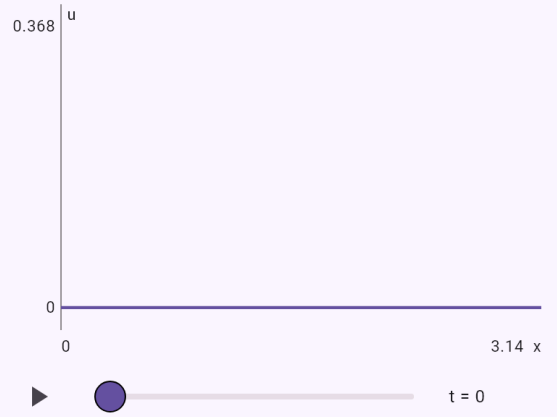
- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Condições: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separação de variáveis: procuramos um produto; substituído e dividido, as variáveis se separam – os dois lados devem igualar a mesma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Todos os coeficientes são nulos: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Desenvolvemos a fonte $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ nas autofunções tal como a condição inicial: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, com os coeficientes dados por um integral.
- A função inicial (de contorno) já é uma soma de autofunções, por isso só poucos coeficientes $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ não são nulos: $f_1 = 1$, os outros são nulos.
- Princípio de Duhamel: cada coeficiente da série satisfaz uma equação ordinária linear com fonte; a solução é o decaimento livre mais a convolução da fonte com o decaimento

$$T_n' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- A fonte tem apenas um número finito de coeficientes não nulos; as suas contribuições saem exatas: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- A solução: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Uma fonte de calor constante na barra – o estado estacionário é uma parábola.

Enunciado: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Passos

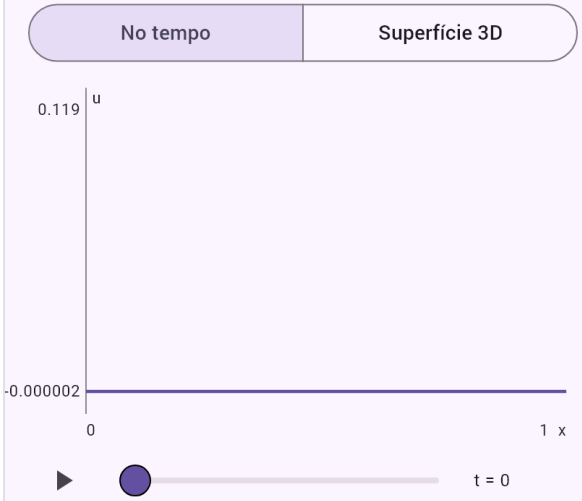
- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = u_{xx} + 1$
- Condições: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Nem a fonte nem os valores na fronteira dependem do tempo. Primeiro encontramos o estado estacionário – a solução da equação sem a derivada temporal $w'' + 1 = 0$ com as condições de contorno: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Procuramos $u = w(x) + v(x,t)$; o desvio v tem condições de contorno nulas e nenhuma fonte.
- Separação de variáveis: procuramos um produto; substituído e dividido, as variáveis se separam – os dois lados devem igualar a mesma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi x)$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)

$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- A solução

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi$$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Uma barra isolada onde entra calor por uma extremidade – a temperatura média cresce linearmente.

Enunciado: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Resultado

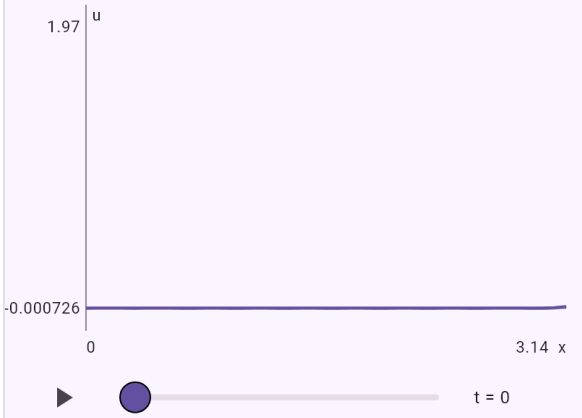
$$u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = u_{xx}$
- Condições: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, a equação é parabólica (como a equação do calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Ambas as extremidades são isoladas, mas entra calor na barra (um fluxo nas extremidades ou uma fonte). Não há estado estacionário – a temperatura média cresce à taxa $R = \frac{1}{\pi}$. Procuramos $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, onde W satisfaz a equação sem a derivada temporal: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Separação de variáveis: procuramos um produto; substituído e dividido, as variáveis se separam – os dois lados devem igualar a mesma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X' = 0 nas duas extremidades (extremidades isoladas) tem as soluções $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição): $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes): $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- A solução $u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Uma corda agitada na extremidade à sua própria frequência – ressonância, a amplitude cresce com t.

Enunciado: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

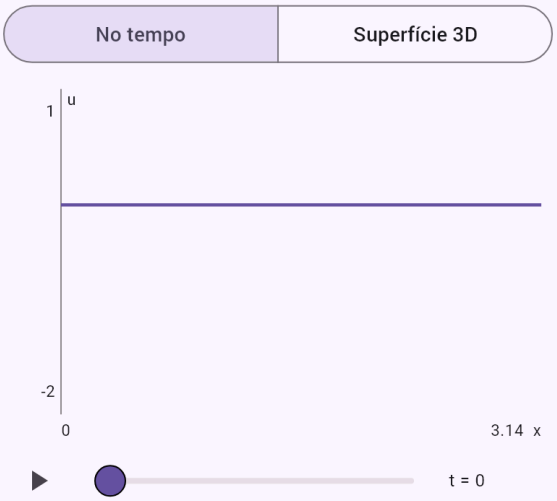
Resultado

$$u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{tt} = u_{xx}$
- Condições:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, a equação é hiperbólica (como a equação da onda): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Os valores na fronteira mudam com o tempo. Escolhemos uma função $w(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ que satisfaz as condições de contorno e procuramos $u = w + v$. O desvio v tem condições de contorno nulas, mas a sua equação ganha uma fonte: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x\sin t}{\pi}$
- Separação de variáveis: procuramos um produto – ondas estacionárias; os dois lados igualam a mesma constante: $u = X(x)\,T(t):\quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A parte temporal para cada n – oscilações com a sua própria frequência:
  $T_n'' + n^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n\cos nt + b_n\sin nt$
- A equação é linear – uma soma de soluções é solução (superposição): $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\ \sin(nx)$
- Todos os coeficientes são nulos:
  $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)
  $b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Desenvolvemos a fonte $F(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ nas autofunções tal como a condição inicial:
  $F_n(t) = f_n\ \sin t$, com os coeficientes dados por um integral.
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)
  $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Princípio de Duhamel: cada coeficiente da série é uma oscilação forçada – um oscilador com frequência própria e uma força externa F_n(t). A solução é a oscilação livre mais a convolução da força com a resposta ao impulso sin(ω_n t)/ω_n
  $T_n'' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(n$
- O integral é calculado em geral para cada n (K_n é o núcleo do passo anterior); onde a fórmula geral dividiria por zero (ressonância), à parte
  $\int_0^t K_n(t-s)\ \sin s\,\mathrm{d}s = \frac{n\sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1:\ \int$
- A solução
  $u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt)\ \sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Equação de Laplace com o lado inferior isolado (u_y = 0) – cosh em vez de sinh.

Enunciado: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Resultado

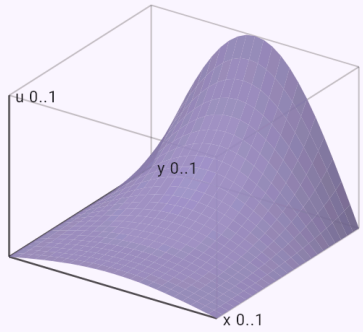
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condições:
  $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, a equação é elíptica (como a equação de Laplace):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- O lado com valores não nulos (os outros têm u = 0):
  $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Separação de variáveis: procuramos um produto:
  $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X = 0 nas duas extremidades só tem soluções não nulas para
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- A segunda equação Y" = λY com derivada nula no lado oposto (isolado) – daí cosh –, normalizada para 1 no lado dado: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- A função inicial (de contorno) já é uma soma de autofunções, por isso só poucos coeficientes $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ não são nulos: $c_1 = 1$, os outros são nulos.

- A solução: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Equação de Burgers – as características cruzam-se e forma-se uma onda de choque.

Enunciado: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

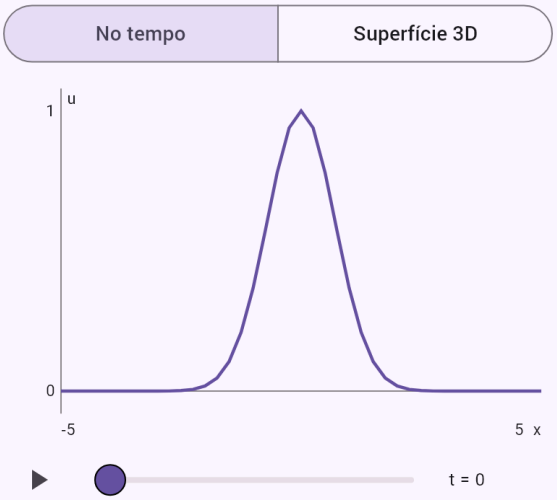
Resultado

$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t + uu_x = 0$
- Condições: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- A equação de Burgers é não linear – a velocidade de propagação é o próprio u. Ao longo das características u é constante, pelo que as características são retas $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- A solução é dada implicitamente por $u = f(x - ut)$ – para cada ponto procura-se o x_0 cuja característica chega até ele.
- Onde f decresce, a parte mais rápida da onda alcança a mais lenta e as características cruzam-se. O primeiro cruzamento ocorre no instante $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ – forma-se uma onda de choque e a solução suave deixa de existir.
- A solução (implícita, até se formar uma onda de choque): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Equação de Burgers com viscosidade – transformação de Cole-Hopf na equação do calor.

Enunciado: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

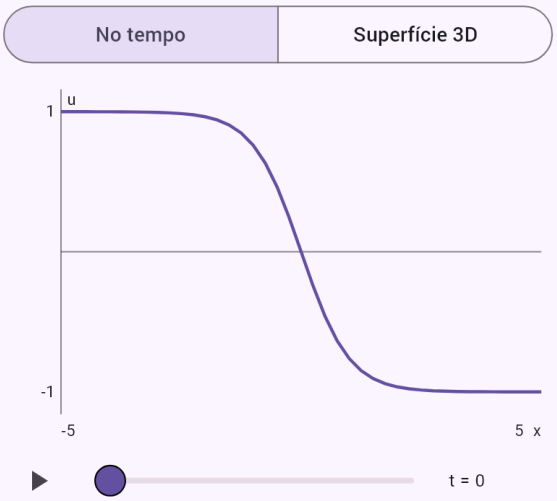
Resultado

$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Condições: $u(x,0) = -\tanh x$
- Com viscosidade ν > 0 a transformação de Cole-Hopf linearia a equação: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – a equação de Burgers torna-se a equação do calor.
- A condição inicial para φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- A equação do calor resolve-se pela convolução com o núcleo do calor; após a substituição, u é um quociente de dois integrais, calculados numericamente para o gráfico $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}\,I}{\int K}$
- A integral não tem forma elementar – a solução fica como convolução, o gráfico é calculado numericamente: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Gráfico



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Esquema de Godunov – a onda de choque avança à velocidade 1/2.

Enunciado: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Resultado

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Malha: 61 nós, 25 passos de tempo; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Uma onda de choque é tratada pelo esquema conservativo de Godunov – o fluxo F entre as células vem da solução exata do problema de Riemann (um salto)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min \\ u_i \le u \le u_{i+1} \\ \max \\ u_{i+1} \le u \le u_i \end{cases}$$

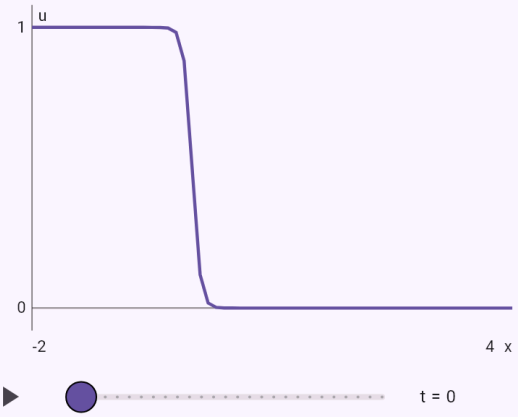
- A condição CFL (o domínio numérico de dependência contém a característica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- A queda de u_L para u_R < u_L propaga-se como onda de choque à velocidade da condição de Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x=-2$	$x=-1{,}4$	$x=-0{,}8$	$x=-0,$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- O resultado no nó central: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Calor numa placa quadrada pelo ADI – estável mesmo com passo grande.

Enunciado: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Malha: 121 nós, 10 passos de tempo (as razões entre o passo temporal e os quadrados dos passos espaciais).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- O método das direções alternadas (ADI) de Peaceman e Rachford: meio passo é implícito em x e explícito em y, a outra metade ao contrário

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Análise de von Neumann: as duas metades do passo têm em conjunto a amplificação para qualquer passo – o ADI é incondicionalmente estável.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- Na primeira metade do passo resolvemos 9 sistemas tridiagonais ao longo das linhas da malha e na segunda 9 ao longo das colunas – cada um pelo algoritmo de Thomas. É muito mais barato do que um grande sistema para toda a malha.
- A solução em níveis de tempo escolhidos

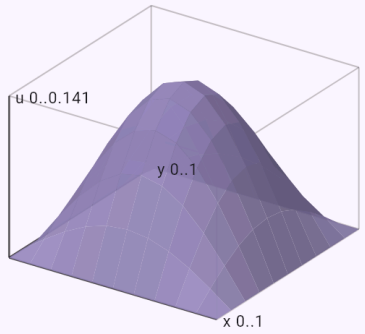
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	1,000000	1,000000
0,01	0,822069	0,822069
0,02	0,675798	0,675798
0,03	0,555553	0,555553
0,04	0,456703	0,456703
0,05	0,375442	0,375442
0,06	0,308639	0,308639
0,07	0,253723	0,253723
0,08	0,208578	0,208578
0,09	0,171465	0,171465
0,1	0,140956	0,140956

- O maior erro em relação à solução exata no último nível (exatamente $0{,}138911$ no meio).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Equação de Laplace pelo gradiente conjugado – comparação com SOR e multigrelha.

Enunciado: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

```
0.125)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Uma malha quadrada: $h = 0{,}125$, 81 nós, 49 deles incógnitas interiores.
- O esquema de cinco pontos – u_xx + u_yy substituído por diferenças, uma equação em cada nó: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- O método do gradiente conjugado – o sistema $-\Delta_h u = -f$ é simétrico e definido positivo; cada passo reduz o erro numa nova direção p_k, conjugada com as anteriores

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_i$$

- As iterações a partir de uma estimativa nula no interior (nós escolhidos e a maior variação)

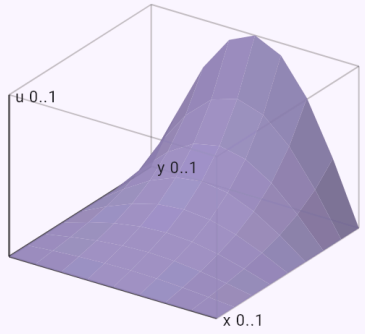
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- A iteração parou após 8 passos, quando a maior variação ficou abaixo de 10^{-4}
- Os métodos na mesma malha com a mesma tolerância: Jacobi 71 iterações, Gauss-Seidel 42, SOR com ω = $1{,}446$ só 16
- Métodos mais rápidos para o mesmo sistema (49 incógnitas): gradiente conjugado 8 iterações, multigrelha 5 ciclos V. O número de ciclos V quase não depende da finura da malha.
- Os valores nos nós da malha

$y \backslash x$	0	$0{,}125$	$0{,}25$	$0{,}375$	$0{,}5$	
1	$0{,}0000$	$0{,}3827$	$0{,}7071$	$0{,}9239$	$1{,}0000$	
$0{,}875$	$0{,}0000$	$0{,}2591$	$0{,}4787$	$0{,}6254$	$0{,}6770$	
$0{,}75$	$0{,}0000$	$0{,}1749$	$0{,}3232$	$0{,}4222$	$0{,}4570$	
$0{,}625$	$0{,}0000$	$0{,}1173$	$0{,}2168$	$0{,}2833$	$0{,}3066$	
$0{,}5$	$0{,}0000$	$0{,}0777$	$0{,}1435$	$0{,}1875$	$0{,}2029$	
$0{,}375$	$0{,}0000$	$0{,}0498$	$0{,}0920$	$0{,}1202$	$0{,}1301$	
$0{,}25$	$0{,}0000$	$0{,}0295$	$0{,}0545$	$0{,}0712$	$0{,}0771$	
$0{,}125$	$0{,}0000$	$0{,}0137$	$0{,}0253$	$0{,}0331$	$0{,}0358$	
0	$0{,}0000$	$0{,}0000$	$0{,}0000$	$0{,}0000$	$0{,}0000$	

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00432$ (exatamente $0{,}199268$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Equação de Poisson por multigrelha – poucos ciclos V numa malha fina.

Enunciado: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Uma malha quadrada: $h = 0{,}0625$, 289 nós, 225 deles incógnitas interiores.
- O esquema de cinco pontos – u_xx + u_yy substituído por diferenças, uma equação em cada nó

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Multigrelha (ciclo V): a iteração de Gauss-Seidel amortece depressa apenas a parte do erro que varia rapidamente (S² – dois varrimentos). O resto suave r passa para a malha grossa 2h, é corrigido lá (de novo por multigrelha) e a correção é interpolada de volta

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- As iterações a partir de uma estimativa nula no interior (nós escolhidos e a maior variação)

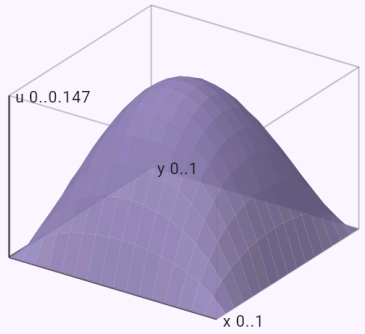
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- A iteração parou após 4 passos, quando a maior variação ficou abaixo de 10^{-4}
- Os métodos na mesma malha com a mesma tolerância: Jacobi 179 iterações, Gauss-Seidel 108, SOR com ω = $1{,}674$ só 25
- Métodos mais rápidos para o mesmo sistema (225 incógnitas): gradiente conjugado 15 iterações, multigrelha 4 ciclos V. O número de ciclos V quase não depende da finura da malha.
- Os valores nos nós da malha

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (exatamente $0{,}147342$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Método dos elementos finitos com triângulos – matriz de rigidez e o mesmo sistema que o esquema

de cinco pontos.

Enunciado: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Uma malha quadrada: $h = 0{,}25$, 25 nós, 9 deles incógnitas interiores.
- O método dos elementos finitos: a equação é multiplicada por uma função de teste v e integrada por partes (formulação fraca); a solução é procurada como combinação de funções «chapéu» φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- A malha: cada célula é dividida por uma diagonal em dois triângulos retângulos – 32 triângulos, 25 nós, 9 deles incógnitos.
- A matriz de rigidez de um triângulo (os gradientes das funções lineares são constantes nele)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\, \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0{,} \\ -0{,} \end{pmatrix}$$

- Somando as contribuições dos seis triângulos à volta de um nó interior obtemos a sua equação – numa malha regular é o esquema de cinco pontos multiplicado por h_x·h_y

$$4{,}0000\, u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + $$

- O método do gradiente conjugado – o sistema $-\Delta_h u = -f$ é simétrico e definido positivo; cada passo reduz o erro numa nova direção p_k, conjugada com as anteriores

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_$$

- As iterações a partir de uma estimativa nula no interior (nós escolhidos e a maior variação)

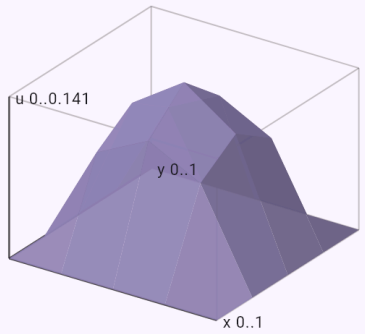
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- A iteração parou após 4 passos, quando a maior variação ficou abaixo de 10^{-4}
- Os métodos na mesma malha com a mesma tolerância: Jacobi 19 iterações, Gauss-Seidel 11, SOR com ω = $1{,}172$ só 8
- Métodos mais rápidos para o mesmo sistema (9 incógnitas): gradiente conjugado 4 iterações, multigrelha 3 ciclos V. O número de ciclos V quase não depende da finura da malha.
- Os valores nos nós da malha

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (exatamente $0{,}147342$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Equação de Poisson num quadrado – série de Fourier dupla; compare com o esquema sor.

Enunciado: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Resultado

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$

Passos

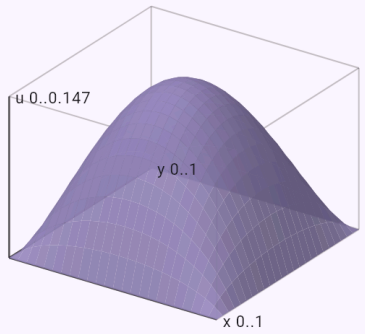
- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Condições: $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, a equação é elíptica (como a equação de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- A parte com a fonte é uma série dupla das funções próprias das duas direções – cada produto X_m·Y_n cumpre as condições nos lados e o laplaciano só o multiplica por um número: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, onde $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Desenvolve-se a fonte na mesma série dupla. Substituindo em Δv = f e comparando coeficientes obtém-se $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, ou seja $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$

$$c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$$

- A solução

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Derivadas nos quatro lados – condição de solubilidade e solução a menos de uma constante.

Enunciado: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 +`

cos(πx)

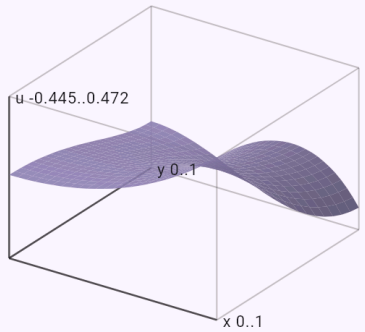
Resultado

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condições
  $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, a equação é elíptica (como a equação de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Nos quatro lados está dada a derivada (um fluxo). Pelo teorema de Gauss, o fluxo total através da fronteira tem de corresponder à fonte interior ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – a condição de solubilidade. Verifica-se; existe solução, mas só a menos de uma constante aditiva. O fluxo através da fronteira
  $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Um polinómio quadrático P assume os fluxos médios dos lados; o resto v tem em cada lado um fluxo de média nula e soma-se lado a lado como antes:
  $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; os fluxos médios
  $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- O lado com valores não nulos (os outros têm u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Separação de variáveis: procuramos um produto:
  $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- O problema de autovalores $X'' + \lambda X = 0$ com X' = 0 nas duas extremidades (extremidades isoladas) tem as soluções
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- No lado dado é prescrita uma derivada e o lado oposto está isolado: cosh, normalizado para que a sua derivada no lado dado seja 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- A função inicial (de contorno) já é uma soma de autofunções, por isso só poucos coeficientes $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ não são nulos: $c_1 = 1$, os outros são nulos.
- A solução (C é uma constante arbitrária – com derivadas em todos os lados, u fica determinada só a menos de uma translação)
  $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Coeficientes variáveis – problema de Sturm-Liouville com o peso 1/x, funções próprias sin(n ln x).

Enunciado: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Resultado

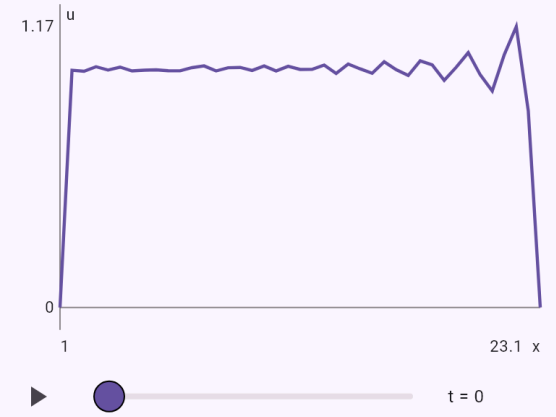
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Passos

- Resolvemos a equação diferencial parcial $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Condições: $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Separação de variáveis numa equação com coeficientes variáveis – os dois membros têm de ser a mesma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Multiplicando a equação de X por uma função adequada obtém-se um problema de Sturm-Liouville $(xX')' + \lambda \frac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ com p = x e o peso w = $\frac{1}{x}$. As suas funções próprias são ortogonais com o peso w.
- A equação de X é de Euler; experimenta-se X = x^r: $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0.$ Uma solução não nula com X = 0 nos dois extremos só existe para raízes complexas: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. As condições nos extremos dão
  $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Ortogonalidade das funções próprias com o peso w: $\int_1^{e^\pi} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; a sua norma $\int_1^{e^\pi} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- A parte temporal para cada n – um decaimento exponencial, as frequências altas amortecem mais rápido: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Os coeficientes da função inicial f são as suas projeções com o peso w: $c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Após uma substituição passam a ser os coeficientes de uma série de senos ordinária de $\xi = \ln x: \quad 1$
- Os coeficientes a partir da função inicial (de contorno) graças à ortogonalidade das autofunções (integração por partes)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \,\sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- A solução
  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



A solução u no tempo t escolhido com o controle deslizante; o botão a reproduz.

Esquema MUSCL com limitador – compare o erro com os esquemas de Lax-Wendroff e de Lax-Friedrichs.

Enunciado: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016;`

```
to = 0.4)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- A malha em $0 \le x \le 1$: 51 nós, 25 passos de tempo até t = 0,4; $h = 0{,}02$, $k = 0{,}016$, $\nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ é o número de Courant.
- A solução exata é transportada ao longo das características $x - t = C$ com velocidade a = 1
- O esquema MUSCL – em cada célula um perfil linear com o declive σ_i limitado por um limitador; o fluxo vem da célula a montante deslocada meio passo. Segunda ordem onde a solução é suave, sem oscilações nos saltos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\nu}{2}$$

- O declive numa célula é limitado por minmod – nulo num extremo, caso contrário a menor das duas diferenças laterais

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- A condição CFL (o domínio numérico de dependência contém a característica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Um esquema com limitador é não linear; em vez da análise de von Neumann, vale que não aumenta a variação total (TVD – não surgem novas oscilações): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n)$, $TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, desde que $|\nu| \le 1$
- O primeiro nível de tempo

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

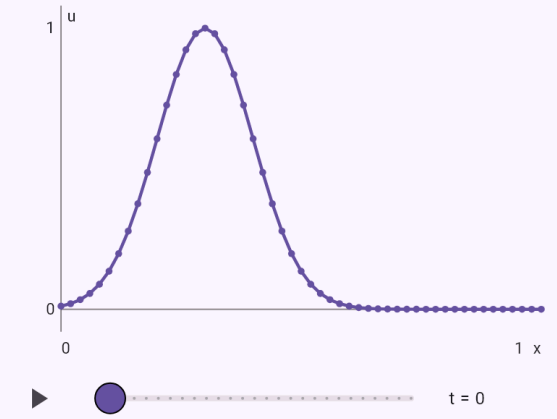
- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_i |u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}| \approx 0{,}0326$ (exatamente $0{,}135335$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



Pontos: a solução numérica nos nós da malha; tracejada: a solução exata. O controle deslizante escolhe o nível de tempo.

Equação de Burgers com viscosidade pelo esquema MUSCL – comparação com a transformação de Cole-Hopf.

Enunciado: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Resultado

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Malha: 41 nós, 10 passos de tempo; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- O esquema MUSCL para a equação de Burgers: os declives limitados σ_i (limitador) dão os valores nas fronteiras das células, o fluxo entre elas vem da solução de Godunov do salto e no tempo avança o método de Heun (duas etapas)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- O declive numa célula é limitado por minmod – nulo num extremo, caso contrário a menor das duas diferenças laterais

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

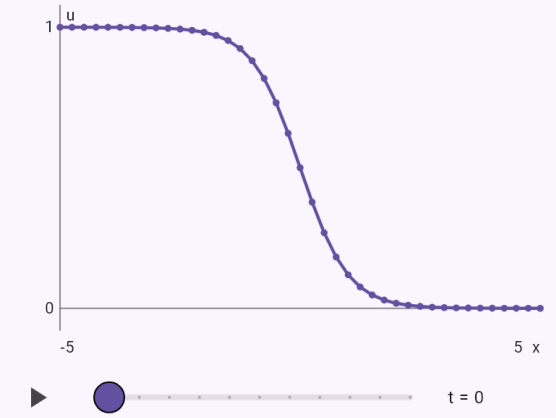
- A condição CFL (o domínio numérico de dependência contém a característica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- O termo viscoso ν·u_xx soma-se com uma diferença central: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. O passo explícito é estável, pois $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- A queda de u_L para u_R < u_L propaga-se como onda de choque à velocidade da condição de Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- A solução em níveis de tempo escolhidos

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- O maior erro em relação à solução exata no último nível: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (exatamente $0{,}811680$ no meio).
- O resultado no nó central: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Gráfico

No tempo | Superfície 3D



Pontos: a solução numérica nos nós da malha; tracejada: a solução exata. O controle deslizante escolhe o nível de tempo.

Elementos finitos num domínio em L – triangulação pelo corte de orelhas, superfície 3D só sobre o domínio.

Enunciado: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h =`

```
0.25)
```

Resultado

$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Passos

- Resolvido numericamente numa malha: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \ \ (\partial\Omega)$
- O domínio é um polígono com os vértices $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, de área $|\Omega| = 3{,}0000$
- O método dos elementos finitos: a equação é multiplicada por uma função de teste v e integrada por partes (formulação fraca); a solução é procurada como combinação de funções «chapéu» φ_j

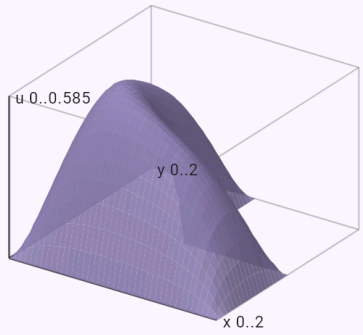
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulação: cortando «orelhas» (um vértice convexo em cujo triângulo não há outro vértice) obtêm-se 4 triângulos; 4 vezes cada um divide-se pelos pontos médios dos lados em quatro – 1024 triângulos, 561 nós, 465 deles interiores (incógnitas), aresta maior $h = 0{,}1398$
- A matriz de rigidez de um triângulo (os gradientes das funções lineares são constantes nele)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- Os valores nos nós da fronteira são dados; as suas contribuições passam para o segundo membro: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- O sistema esparso K·U = F com 465 incógnitas é resolvido pelo método do gradiente conjugado em 128 iterações. Maior valor: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- O resultado no nó central: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Gráfico



A solução u como superfície sobre o domínio. Rode arrastando o dedo.

Limitações conhecidas

- Analiticamente só equações lineares com uma função incógnita u de duas variáveis e a equação de Burgers; outras equações não lineares e sistemas, não.
- Por separação de variáveis, as equações do calor e das ondas num intervalo; uma fonte só como soma de produtos p(x)·q(t), na equação de Poisson no máximo três produtos p(x)·q(y). Coeficientes variáveis só do tipo de Euler αx²u_xx + βxu_x com valores nulos nos extremos.
- A transformada de Fourier em forma fechada para uma gaussiana, um polinómio e funções com f″ = λf; caso contrário fica a convolução e o gráfico é calculado numericamente.
- Numericamente em 2D, as equações do calor e de Laplace num retângulo com malha regular; num polígono só o método dos elementos finitos com triângulos lineares e um valor na fronteira (não uma derivada), sem buracos e com no máximo 40 vértices.

39. Recorrências e funções geradoras

A aplicação resolve recorrências lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem pela equação característica – também raízes múltiplas e complexas (a forma complexa da solução e a sua passagem à forma real pelo teorema de De Moivre) – e com lado direito da forma $P(n)\cdot q^n$ (também cos nφ, sin nφ, ressonância e soma de lados direitos). As condições iniciais determinam as constantes; como verificação, a aplicação calcula mais termos pela recorrência e compara-os com a fórmula.

O chip «Método» oferece também a função geradora ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, frações parciais, séries geométricas), as potências de uma matriz (diagonalização) ou, na primeira ordem, o somatório. Uma recorrência de primeira ordem com coeficiente variável ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) resolve-se por um produto (fatoriais), as recorrências não lineares convertíveis pela substituição $b_n = 1/a_n$ ou $b_n = \ln a_n$. Um sistema de duas recorrências resolve-se eliminando uma sucessão ou pela matriz, e uma recorrência de dividir para conquistar $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ por $n = b^k$ – com a estimativa do teorema mestre.

Com a operação «Função geradora», a aplicação encontra a função geradora de uma sucessão dada por uma fórmula ($n^2 + 2^n$) ou pelos primeiros termos (1, 0, 1, 0, …) e, ao contrário, a fórmula de a_n a partir de uma função A(x). O número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (também com limites ou coeficientes – pagar com moedas) é um coeficiente de uma função geradora.

O gráfico mostra os termos da sucessão como pontos (num sistema, as duas sucessões).

Uma diferença Δf(n) = f(n + 1) − f(n) («Δ(n^3)») e a equação às diferenças Δy_n = n como a recorrência y_{n+1} − y_n = n. Uma progressão aritmética ou geométrica a partir de dois dados («a_3 = 7, a_7 = 19», «progressão geométrica a_2 = 6, a_5 = 162») – a_1, d ou q, o termo de ordem n e os termos e somas pedidos (s_{10}, a_{20} = ?).

Uma sequência dada pelo seu termo geral (a_n = (n+1)/n) é estudada: os cinco primeiros termos, a monotonia pela diferença de termos vizinhos, a limitação e o limite.

Como introduzir

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Com parênteses, as condições após uma vírgula.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Com índices (também de uma foto). Sem condições: a solução geral com as constantes C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	O índice pode descer (a_{n-1}, a_{n-2}); o mesmo valor pode ser dado a vários termos.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Um sistema – as equações em linhas, as condições na última.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Dividir para conquistar – um termo em n/b.
`n^2 + 2^n`	A fórmula de uma sucessão com a operação «Função geradora» (também a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Os primeiros termos separados por vírgulas.
`1/(1 - x - x^2)`	Uma função geradora em x (também A(x) = …) – a fórmula de a_n.
`número de soluções x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	O número de soluções inteiras não negativas com limites.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Uma diferença e uma equação às diferenças.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Uma progressão a partir de termos dados – aritmética sem palavra, geométrica com «geométrica».

Exemplos

Duas raízes reais distintas, a verificação com mais termos.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

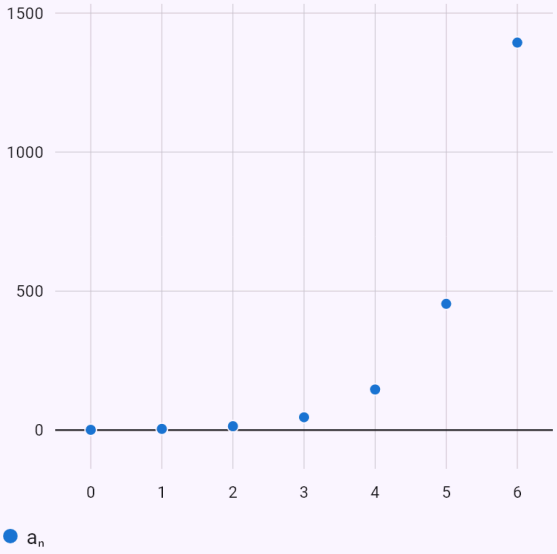
Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Procuramos soluções $a_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- O discriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; as raízes: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- A solução geral: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$2C_1 + 3C_2 = 4$$

- A solução que satisfaz as condições dadas: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Verificação: a recorrência dá $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

A sucessão de Fibonacci – a fórmula de Binet.

Enunciado: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Resultado

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

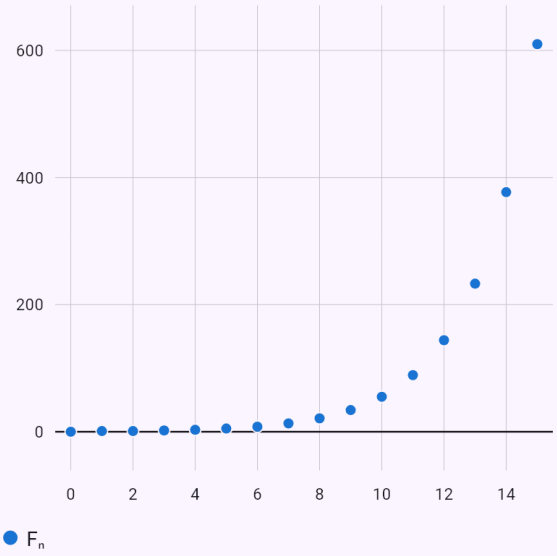
Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Procuramos soluções $F_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^{n-2} obtemos a equação característica: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- O discriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; as raízes: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- A solução geral $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- A solução que satisfaz as condições dadas $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Verificação: a recorrência dá $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Raízes complexas 1 ± i – a forma complexa e o teorema de De Moivre.

Enunciado: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

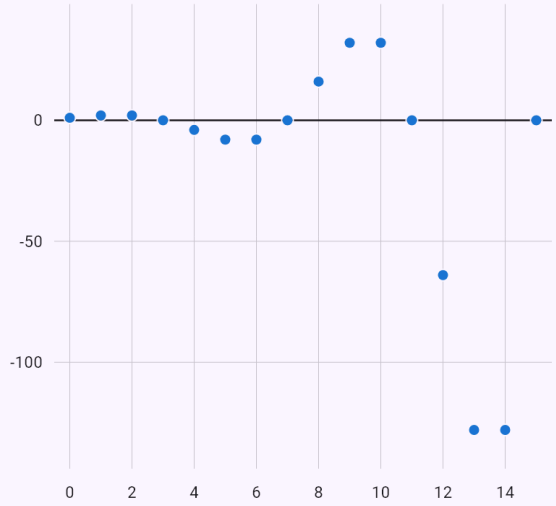
Resultado

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Procuramos soluções $a_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- O discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; as raízes: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Escrevemos as raízes complexas $1 \pm i$ na forma trigonométrica: |λ| = $\sqrt{2}$, φ = $\frac{\pi}{4}$, ou seja λ = $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Pelo teorema de De Moivre λⁿ = $\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- A solução geral na forma complexa (constantes complexas): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Somando os termos conjugados, com novas constantes reais obtemos a forma real $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(C_1\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = 1,\ C_2 = 1$
  $C_1 = 1$
  $C_1 + C_2 = 2$
- A solução que satisfaz as condições dadas $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Verificação: a recorrência dá $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

O lado direito n, uma raiz dupla 2.

Enunciado: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Resultado

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogénea (lado direito 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Procuramos soluções $a_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- O discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; as raízes: $\lambda_{1,2} = 2$
- A solução geral da recorrência homogénea: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- O lado direito n tem forma especial; o número 1 não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular $a_n^{(p)} = An + B$
- Substituímos na recorrência e agrupamos os termos: $An + B - 2A = n$
- Comparamos os coeficientes dos termos semelhantes dos dois lados donde $A = 1,\ B = 2$

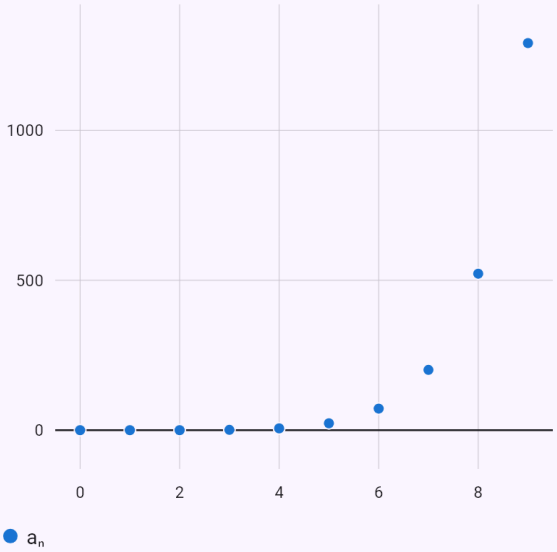
$$A = 1$$
$$B - 2A = 0$$

- Uma solução particular: $a_n^{(p)} = n + 2$
- A solução geral: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + 2 = 0$$
$$2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$$

- A solução que satisfaz as condições dadas: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Verificação: a recorrência dá $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

A mesma recorrência pela função geradora.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Função geradora

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Introduzimos a função geradora $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Multiplicamos a recorrência por x^{n+2} e somamos para todo n ≥ 0

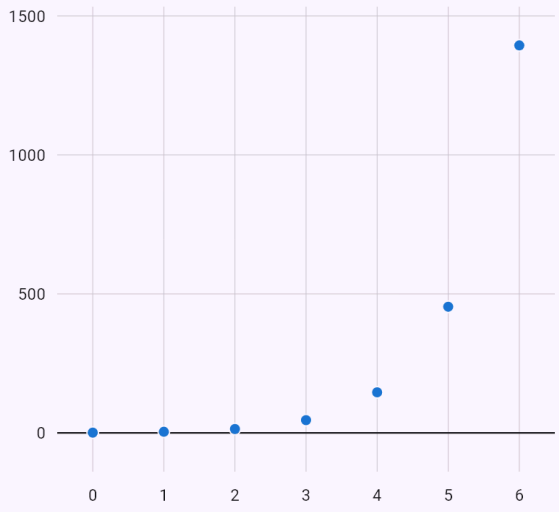
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Exprimimos as somas pela função geradora e pelos valores iniciais:
  $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Isolamos a função geradora e fatorizamos o denominador: $A(x) = \dfrac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Decomposição em frações parciais:
  $A(x) = -\dfrac{1}{1 - 2x} + \dfrac{2}{1 - 3x}$
- Desenvolvemos as frações em séries geométricas

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- O coeficiente de x^n é o termo procurado:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

A mesma recorrência pelas potências de uma matriz.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Potências de uma matriz

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- A recorrência na forma matricial ou seja $v_{n+1} = M \cdot v_n$ com

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Substituindo repetidamente, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Os valores próprios da matriz:
  $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, logo $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Os vetores próprios – soluções de $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalizamos a matriz, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

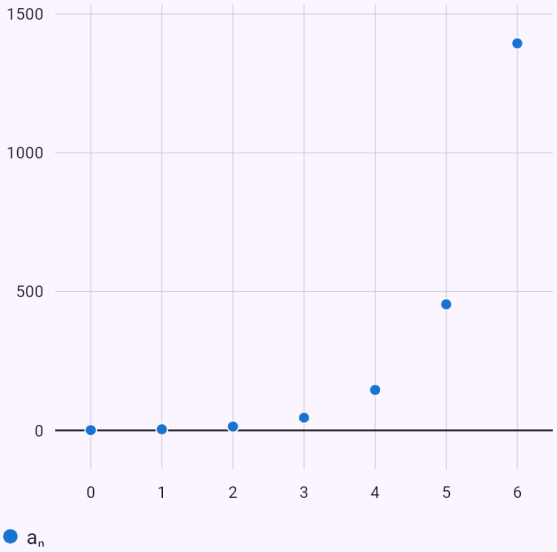
- A potência da matriz os coeficientes portanto $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = PD^nP^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- A solução que satisfaz as condições dadas:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Verificação: a recorrência dá
  $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Uma recorrência de primeira ordem por somatório.

Enunciado: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Somatório

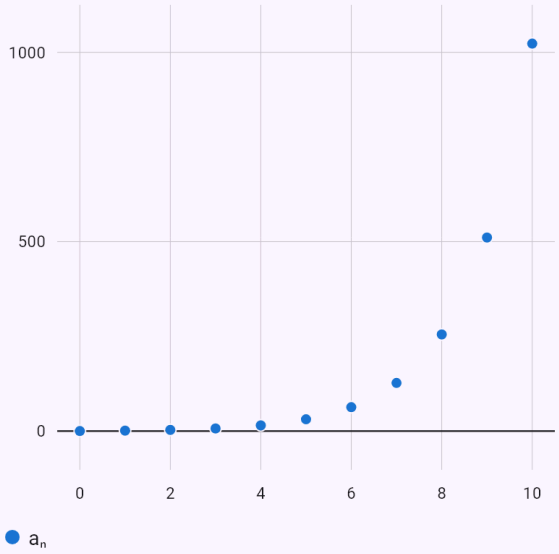
Resultado

$$a_n = 2^n - 1$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 1 com coeficientes constantes: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Substituímos a recorrência em si mesma repetidamente: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \ldots$; em geral $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Calculamos a soma: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $a_n = 2^n - 1$
- Verificação: a recorrência dá $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Um coeficiente variável – o produto dá um fatorial.

Enunciado: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

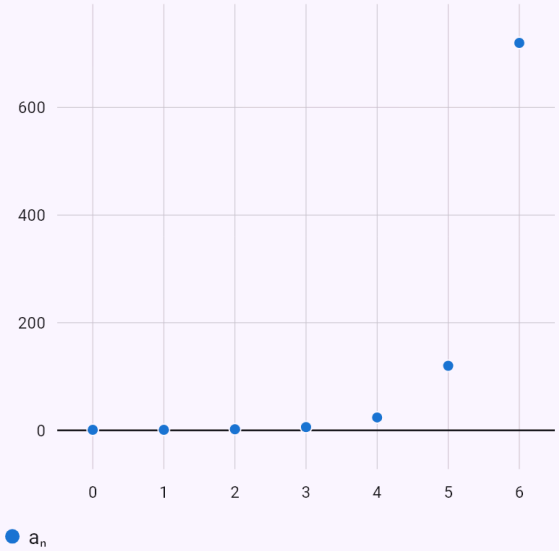
Resultado

$$a_n = n!$$

Passos

- Recorrência linear de primeira ordem com coeficiente variável: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Substituindo a recorrência em si mesma, o termo é um produto $a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$
- Simplificamos o produto (os fatoriais cancelam-se): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $a_n = n!$
- Verificação: a recorrência dá $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – o mesmo que a fórmula.

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Uma recorrência não linear – a substituição $b_n = 1/a_n$.

Enunciado: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

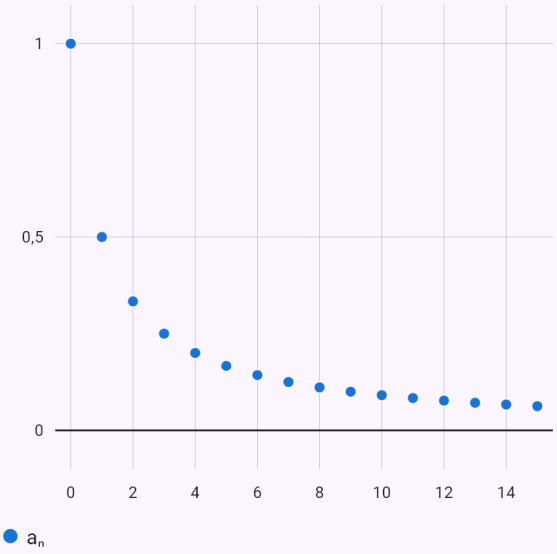
Resultado

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Passos

- Uma recorrência não linear – os inversos dos termos tornam-na linear: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Invertemos ambos os lados: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; a substituição $b_n = \frac{1}{a_n}$ torna assim a recorrência linear: $b_{n+1} = b_n + 1$
- As condições iniciais da nova sucessão: $b_0 = 1$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogénea (lado direito 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Procuramos soluções $b_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica: $\lambda - 1 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_1 = 1$
- A solução geral da recorrência homogénea: $b_n^{(h)} = C_1$
- O lado direito 1 tem forma especial; o número 1 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por n: $b_n^{(p)} = An$
- Substituímos na recorrência e agrupamos os termos: $A = 1$
- Uma solução particular: $b_n^{(p)} = n$
- A solução geral: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $b_n = 1 + n$
- Verificação: a recorrência dá $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – o mesmo que a fórmula.
- Voltamos à sucessão original: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Um sistema de duas recorrências eliminando a sucessão b_n.

Enunciado: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Resultado

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Passos

- Um sistema de duas recorrências lineares
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$

- Da primeira equação $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, logo $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; substituindo na segunda obtemos uma recorrência para uma só sucessão:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$

- A segunda condição inicial obtém-se da primeira equação: $a_1 = 1 + 0 = 1$

- Procuramos soluções $a_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica:
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

- O discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; as raízes:
  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$

- A solução geral: $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$

- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$

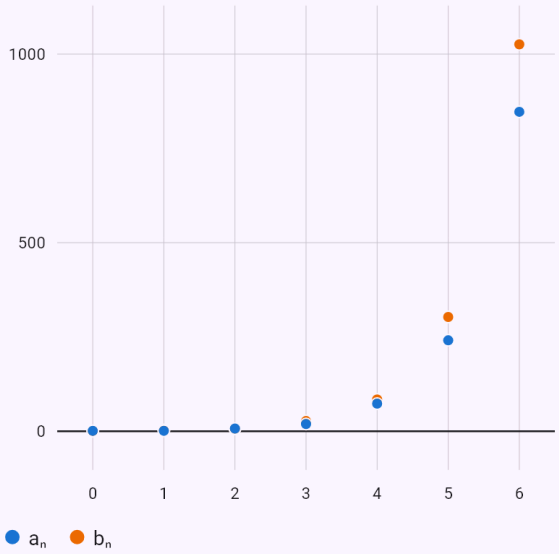
$$C_1 + C_2 = 1$$
$$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$

- A solução que satisfaz as condições dadas:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$

- Verificação: a recorrência dá $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – o mesmo que a fórmula.

- A outra sucessão a partir da expressão
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

Dividir para conquistar (merge sort) – n = 2^k e o teorema mestre.

Enunciado: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Resultado

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Condições: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Passos

- Uma recorrência do tipo dividir para conquistar: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Para n potência da base: a substituição $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ dá uma recorrência linear de primeira ordem: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- As condições iniciais da nova sucessão: $S_0 = 1$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogénea (lado direito 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Procuramos soluções $S_k = \lambda^k$; substituindo e dividindo por λ^k obtemos a equação característica: $\lambda - 2 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_1 = 2$
- A solução geral da recorrência homogénea: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- O lado direito 2^{k+1} tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Substituímos na recorrência, dividimos por 2^k e agrupamos os termos: $2A = 2$
- Donde $A = 1$
- Uma solução particular: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- A solução geral: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Substituímos as condições na solução geral donde $C_1 = 1$ $C_1 = 1$
- A solução que satisfaz as condições dadas: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Verificação: a recorrência dá $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – o mesmo que a fórmula.
- Voltamos a n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- O teorema mestre (a = 2, b = 2, f(n) = $\Theta(n)$): $2 = 2^1$, logo T(n) = $\Theta(n \log n)$

A função geradora da sucessão $n^2 + 2^n$.

Enunciado: `n^2 + 2^n` Função geradora

Resultado

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Passos

- Introduzimos a função geradora $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- Separamos a série por linearidade: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Uma série conhecida: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Uma série conhecida: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Multiplicar os termos por n equivale a derivar e multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Multiplicar os termos por n equivale a derivar e multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

- A função geradora: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Verificação – o desenvolvimento começa pelos termos da sucessão: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

A fórmula de a_n a partir de uma função geradora – frações parciais com raízes irracionais.

Enunciado: `1/(1 - x - x^2)` Função geradora

Resultado

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left($$

Passos

- Isolamos a função geradora e fatorizamos o denominador

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Decomposição em frações parciais

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Desenvolvemos as frações em séries geométricas

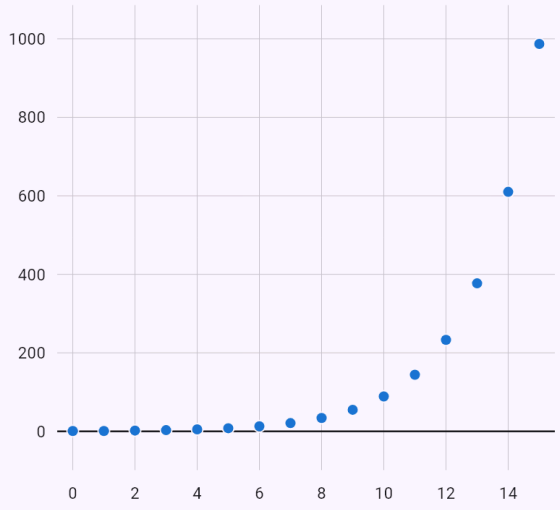
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- O coeficiente de x^n é o termo procurado

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Verificação – o desenvolvimento começa pelos termos da sucessão: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

O número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ com $x_1 \le 3$.

Enunciado: `número de soluções x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Resultado

38

Passos

- A incógnita x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ contribui com a série $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- A incógnita x_2 $(x_2 \ge 0)$ contribui com a série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- A incógnita x_3 $(x_3 \ge 0)$ contribui com a série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- A função geradora é o seu produto – o coeficiente de x^N conta as soluções: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- O número de soluções é o coeficiente de x^{10}: 38

A diferença de uma função.

Enunciado: `Δ(n^3)`

Resultado

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Passos

- A diferença – o acréscimo da função quando n aumenta 1

  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Uma equação às diferenças como recorrência.

Enunciado: `\Delta y_n = n`

Resultado

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Passos

- Recorrência linear de ordem 1 com coeficientes constantes: $y_{n+1} - y_n = n$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogénea (lado direito 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Procuramos soluções $y_n = \lambda^n$; substituindo e dividindo por λ^n obtemos a equação característica: $\lambda - 1 = 0$
- As raízes da equação característica: $\lambda_1 = 1$
- A solução geral da recorrência homogénea: $y_n^{(h)} = C_1$
- O lado direito n tem forma especial; o número 1 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Substituímos na recorrência e agrupamos os termos:

  $2An + A + B = n$
- Comparamos os coeficientes dos termos semelhantes dos dois lados donde $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $2A = 1$

  $A + B = 0$
- Uma solução particular: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- A solução geral: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Uma progressão aritmética a partir de dois termos e a soma de dez termos.

Enunciado: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Resultado

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Passos

- Uma progressão aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Os dados formam um sistema
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- A solução do sistema: $a_1 = 1,\ d = 3$
- O termo de ordem n: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Os valores pedidos: $s_{10} = 145$

Uma progressão geométrica a partir de dois termos.

Enunciado: `progressão geométrica a_2 = 6, a_5 = 162`

Resultado

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Passos

- Uma progressão geométrica: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Os dados formam um sistema
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- A solução do sistema: $a_1 = 2,\ q = 3$
- O termo de ordem n: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

As propriedades de uma sequência dada por uma fórmula.

Enunciado: `a_n = (n+1)/n`

Resultado

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Passos

- Os cinco primeiros termos
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- A diferença de termos vizinhos $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ é negativa para todo $n \geq 1$ – a sequência é decrescente.
- O limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – a sequência converge.
- A sequência é limitada: $1 < a_n \leq 2$

Limitações conhecidas

- Ainda não: recorrências lineares de ordem superior com coeficientes variáveis, sistemas de três ou mais recorrências, dividir para conquistar com vários termos (T(n/2) e T(n/3)) e recorrências não lineares que estas substituições não tornam lineares.
- Uma progressão a partir de termos dados precisa de exatamente dois dados (termos, somas, d ou q).

40. Métodos numéricos

Os métodos numéricos estão no ecrã inicial, na secção “Aplicações”, área Métodos numéricos: raízes de equações (bissecção, Newton, secante, regula falsi, iteração de ponto fixo), integrais numéricas (métodos dos trapézios, de Simpson e de Romberg), derivadas numéricas por quocientes de diferenças, equações diferenciais (métodos de Euler, de Heun e de Runge–Kutta), sistemas lineares (métodos de Jacobi e de Gauss–Seidel, decomposição LU), interpolação (polinômio de Lagrange e de Newton, spline cúbico) e mínimos quadrados. A integral e a derivada também se calculam a partir de uma tabela de valores medidos.

Equações diferenciais também por métodos de passo múltiplo – Adams-Bashforth e o preditor-corretor Adams-Bashforth-Moulton (arranque por Runge-Kutta) –, pelo método adaptativo RK45 (Dormand-Prince, uma tabela dos passos aceites e rejeitados segundo a estimativa do erro, notação tol=…) e por métodos implícitos para equações rígidas: o método de Euler implícito e a regra do trapézio (Crank-Nicolson), com o método de Newton em cada passo. Numa equação com $\partial f/\partial y < 0$, a resolução mostra a estabilidade do método: $h\lambda$ e o fator de amplificação $|R(h\lambda)|$; se for maior do que 1, um método explícito diverge e o cálculo indica-o.

Problemas de fronteira $y'' = f(x, y, y')$ com as condições $y(a)$, $y(b)$: pelo método do tiro (o declive inicial pelo método da secante, cada tiro por Runge-Kutta) e por diferenças finitas (uma equação linear como sistema tridiagonal resolvido pelo algoritmo de Thomas, com tabelas da passagem para a frente e da substituição para trás); quando o resolvedor de EDO encontra a solução exata, compara-a nos nós. A equação do movimento $x'' = a(x)$ resolve-a o método simplético de Verlet ao lado de RK4, mostrando como evolui em cada um o erro da energia total.

Os passos mostram a fórmula do método, a tabela das iterações ou dos valores nos nós, o critério de paragem (precisão por omissão $\varepsilon = 10^{-4}$, no máximo 50 iterações) e a estimativa do erro; onde o valor exato é conhecido, o resultado é comparado com ele. As condições de convergência são verificadas: troca de sinal no intervalo, condição de Fourier para iniciar o método de Newton, $|g'(x)| < 1$ na iteração de ponto fixo, dominância diagonal e raio espectral nos sistemas. O gráfico mostra as tangentes ou secantes, os trapézios ou parábolas, a solução numérica de uma equação diferencial face à exata e o polinômio ajustado com os pontos.

Num problema comum – uma equação com uma incógnita, uma integral definida, uma equação diferencial com condição inicial – a aplicação oferece sob o resultado os chips “Resolver por um método numérico”; o formulário é preenchido com o enunciado. Onde não há forma exata ou ela é desnecessariamente complicada ($x = \cos x$, fórmulas de Cardano), a oferta fica destacada, e uma equação que não se resolve algebricamente é resolvida logo pelo método de Newton. As aplicações que calculam um número sem o mostrar (taxa interna de retorno, TAEG, rendimento de uma obrigação, pH

de um ácido poliprótico, Runge–Kutta nos modelos) têm sob o resultado uma linha recolhida “O método” com uma tabela curta de iterações.

Como introduzir

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	O método – o seu nome em inglês – e depois de pontos e vírgulas a equação, a estimativa inicial x0, a precisão tol e, opcionalmente, max (iterações) e stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Uma função f(x) (resolve-se f(x) = 0) e o intervalo a, b. Sem intervalo nem estimativa, as raízes são isoladas automaticamente.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	A integral de uma função entre a e b com n subintervalos; também trapezoid e romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	A integral de valores medidos – x e y separados por espaços.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	A derivada no ponto at com o passo h; a partir de uma tabela x=…; y=… (at opcional).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Uma equação diferencial de 1.ª ordem com a condição inicial, o passo h e o fim do intervalo to; também euler e heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Um sistema – as equações depois de pontos e vírgulas ou em linhas; também jacobi e lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Os pontos x, y e o ponto at; também newtonpoly e spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Um polinômio de mínimos quadrados de grau degree.

Exemplos

Uma equação que não se resolve algebricamente – a aplicação resolve-a pelo método de Newton e oferece os outros.

Enunciado: `x = cos x`

Resultado

$x \approx 0{,}7391$

Resolver por um método numérico:

Σ Bissecção | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Ponto fixo

Passos

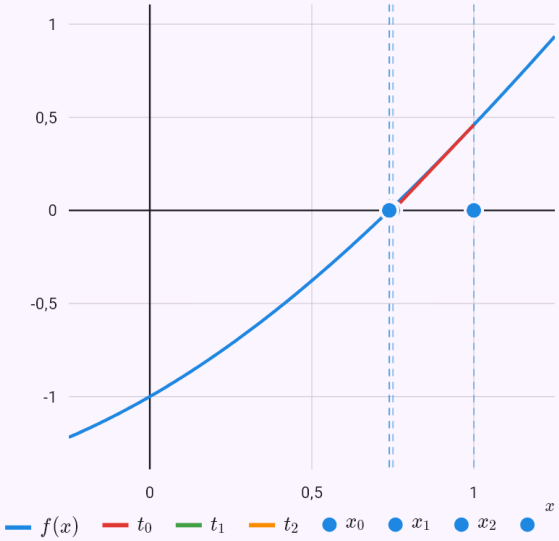
- Procuramos uma raiz da equação $x = \cos x$, ou seja, um zero da função $f(x) = x - \cos x$
- Isolamos as raízes com uma tabela de valores: a função troca de sinal nos intervalos $[0,\ 1]$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Uma função contínua tem uma raiz em cada um deles.
- O método de Newton precisa da derivada: $f'(x) = \sin x + 1$
- A estimativa inicial $x_0 = 1$ escolhida pela condição de Fourier – na extremidade onde $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); a partir dela as tangentes convergem para a raiz de forma monótona.
- Método de Newton: do ponto x_n pela tangente até ao eixo x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- O critério de paragem $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert < 10^{-4}$ é cumprido após 3 iterações.

- Estimativa do erro pelo teorema do valor médio, $m_1 = \min \lvert f'(x) \rvert \approx 1$ no intervalo $[0,\ 1]$: $\lvert \xi - x_n \rvert \leq \dfrac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Resultado do método: $x \approx 0{,}7391$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Método de Newton com a raiz isolada automaticamente e o início pela condição de Fourier.

Enunciado: `newton(x^3 - x - 2)`

Resultado

$$x \approx 1{,}5214$$

Passos

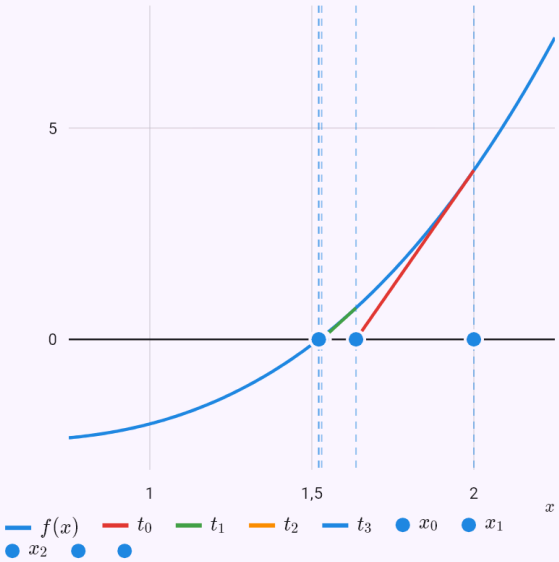
- Procuramos uma raiz da equação $x^3 - x - 2 = 0$, ou seja, um zero da função $f(x) = x^3 - x - 2$
- Isolamos as raízes com uma tabela de valores: a função troca de sinal nos intervalos $[1,\ 2]$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Uma função contínua tem uma raiz em cada um deles.
- O método de Newton precisa da derivada: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- A estimativa inicial $x_0 = 2$ escolhida pela condição de Fourier – na extremidade onde $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); a partir dela as tangentes convergem para a raiz de forma monótona.
- Método de Newton: do ponto x_n pela tangente até ao eixo x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- O critério de paragem $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ é cumprido após 4 iterações.
- Estimativa do erro pelo teorema do valor médio, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 2$ no intervalo $[1,\ 2]$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Resultado do método: $x \approx 1{,}5214$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Bissecção num intervalo dado com a estimativa do erro.

Enunciado: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Resultado

$$x \approx 1{,}5214$$

Passos

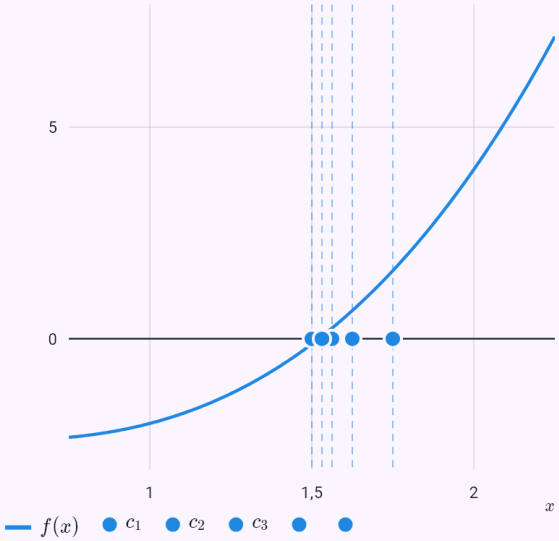
- Procuramos uma raiz da equação $x^3 - x - 2 = 0$, ou seja, um zero da função $f(x) = x^3 - x - 2$
- No intervalo $[1,\ 2]$, $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – sinais opostos, a função contínua tem aí uma raiz.
- Bissecção: o ponto médio do intervalo $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, ficamos com a metade em que f troca de sinal.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- O critério de paragem $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ é cumprido após 14 iterações.
- Estimativa do erro: a raiz ξ está no último intervalo, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Resultado do método: $x \approx 1{,}5214$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Método da secante a partir de duas estimativas.

Enunciado: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Resultado

$$x \approx 2{,}0946$$

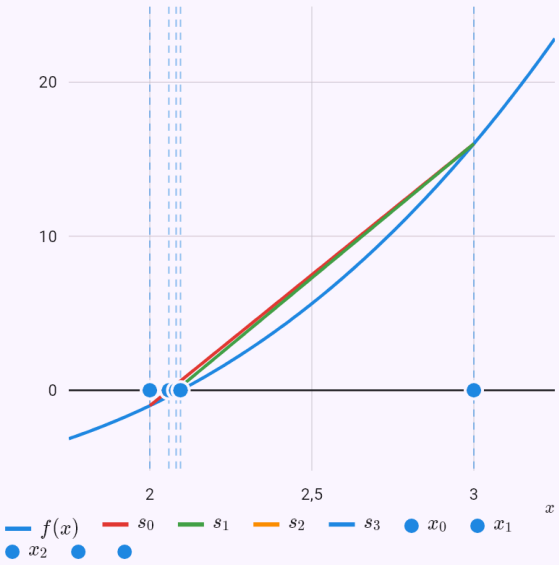
Passos

- Procuramos uma raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$, ou seja, um zero da função $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Método da secante: a secante dos dois últimos pontos substitui a tangente,
  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	$-1{,}000000$	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	$-0{,}390800$	0,941176
3	2,081264	$-0{,}147204$	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	$-0{,}000023$	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- O critério de paragem $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ é cumprido após 6 iterações.
- Estimativa do erro pelo teorema do valor médio, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ no intervalo $[2,\ 3]$:
  $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Resultado do método: $x \approx 2{,}0946$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Iteração de ponto fixo com a condição de convergência |g'(x)| < 1 verificada.

Enunciado: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Resultado

$$x \approx 0{,}7391$$

Passos

- A equação $x = \cos x$ escrita como x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Condição de convergência: $g'(x) = -\sin x$, no intervalo $[0,\ 1]$ é $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 − g é uma contração e a iteração converge.
- Iteração de ponto fixo: $x_{n+1} = g(x_n)$.

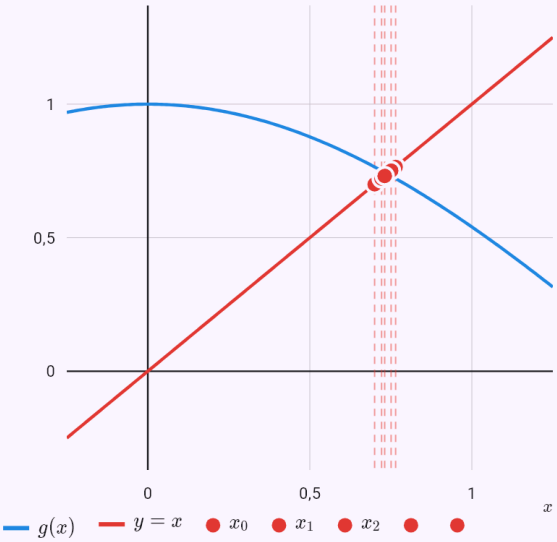
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- O critério de paragem $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ é cumprido após 18 iterações.
- Estimativa do erro da iteração de ponto fixo

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Resultado do método: $x \approx 0{,}7391$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Regra de Simpson, estimativa do erro de Runge e comparação com o valor exato.

Enunciado: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Resultado

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Passos

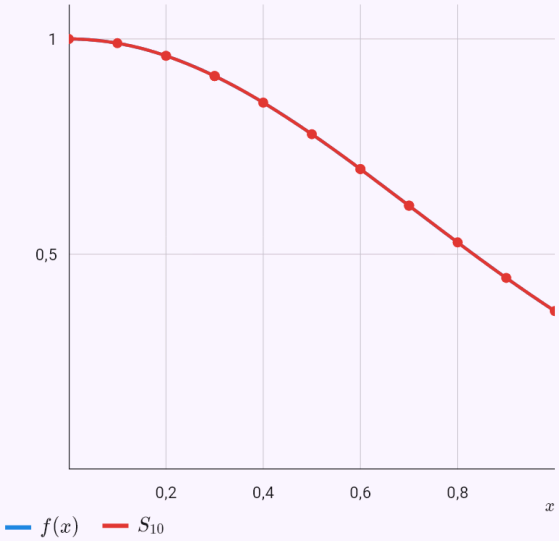
- Calculamos a integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ numericamente.
- O passo: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Os valores nos nós e os seus coeficientes

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Regra de Simpson
  $S_n = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \dfrac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Para comparar, o valor exato
  $I = \dfrac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, o erro do método
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Resultado do método: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Tabela de Romberg para uma integral sem primitiva elementar.

Enunciado: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Resultado

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

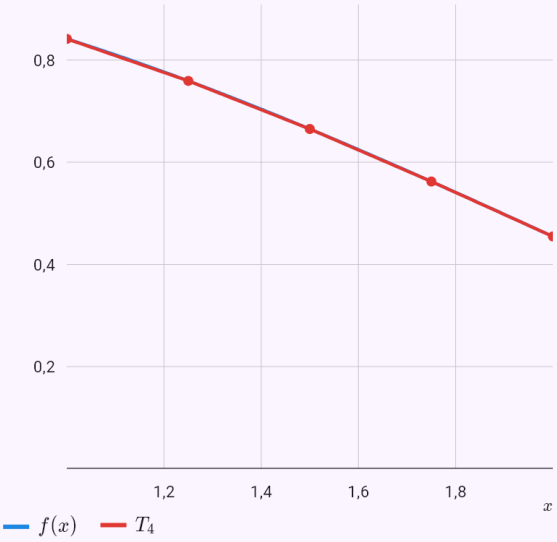
Passos

- Calculamos a integral $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ numericamente.
- Método de Romberg: a primeira coluna são os trapézios com os passos h, h/2, h/4, ..., as seguintes refinam-nos pela extrapolação de Richardson,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- O critério de paragem $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ é cumprido após 2 iterações.
- Para comparar, o valor exato o erro do método
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Resultado do método: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

A distância a partir de uma velocidade medida pela regra dos trapézios.

Enunciado: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Resultado

$$\int_{0}^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

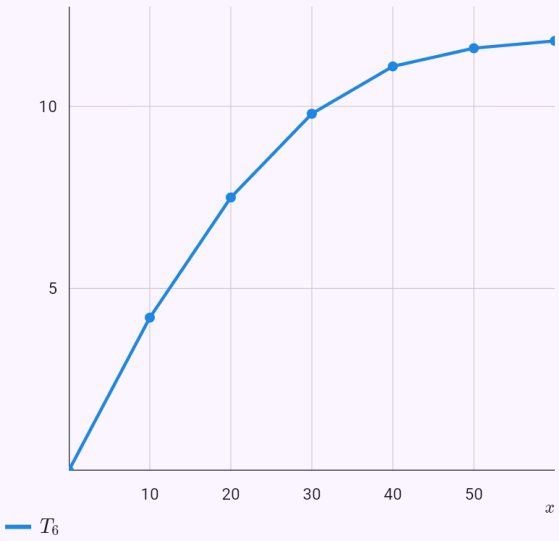
Passos

- Integramos uma tabela de 6 subintervalos no intervalo $[0,\ 60]$
- O passo: $h = 10$
- Os valores nos nós e os seus coeficientes

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	$0{,}000000$
1	10	$4{,}2$	2	$8{,}400000$
2	20	$7{,}5$	2	$15{,}000000$
3	30	$9{,}8$	2	$19{,}600000$
4	40	$11{,}1$	2	$22{,}200000$
5	50	$11{,}6$	2	$23{,}200000$
6	60	$11{,}8$	1	$11{,}800000$
Σ				$100{,}200000$

- Regra dos trapézios $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Erro estimado pela regra de Runge (o cálculo com o passo duplo): $T_3 \approx 490{,}000000,\quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Resultado do método: $\int_{0}^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Diferenças progressiva, regressiva e central para três passos.

Enunciado: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Resultado

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

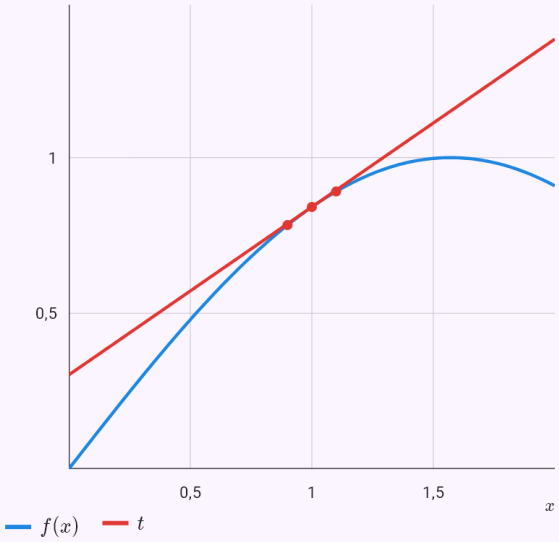
Passos

- Estimamos a derivada da função $f(x) = \sin x$ em $x_0 = 1$ por quocientes de diferenças.
- A diferença progressiva $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ tem um erro proporcional a h, a regressiva $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ também; a central $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ apenas a h². A segunda derivada: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
0,1	0,497364	0,581441	0,539402	−0,840770
0,05	0,519045	0,561110	0,540077	−0,841296
0,025	0,529728	0,550764	0,540246	−0,841427

- Exatamente: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. O erro da diferença progressiva com o primeiro passo é $0{,}0429$, o da central apenas $9 \cdot 10^{-4}$
- Resultado do método: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Método de Runge–Kutta de 4.ª ordem com a tabela dos declives e a solução exata para comparar.

Enunciado: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Passos

- O problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ no intervalo $[0,\ 1]$, o passo $h = 0{,}1$ (10 passos).
- Método de Runge–Kutta de 4.ª ordem – média ponderada de quatro declives

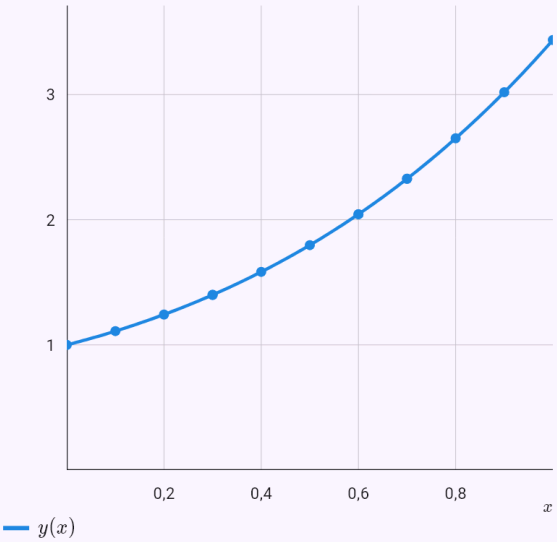
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Para comparar, a solução exata: $y = -x + 2e^x - 1$
- Passo a passo

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- No fim do intervalo, exatamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Resultado do método: $y(1) \approx 3{,}436559$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Método de Euler para uma equação sem solução elementar.

Enunciado: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

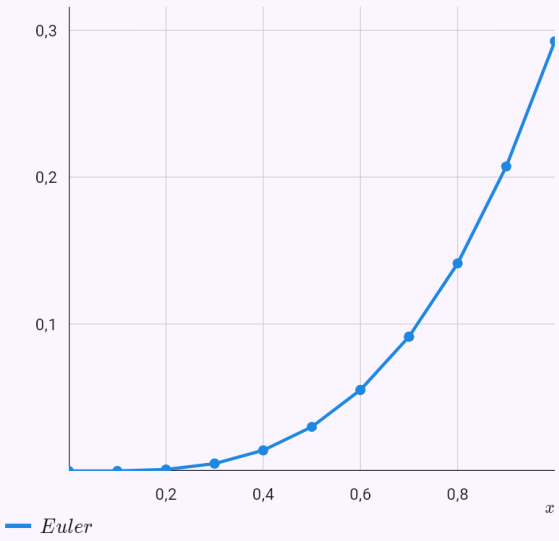
Passos

- O problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ no intervalo $[0,\ 1]$, o passo $h = 0{,}1$ (10 passos).
- Método de Euler – um passo pela tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Passo a passo

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Resultado do método: $y(1) \approx 0{,}292542$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

O preditor-corretor ABM – mais preciso do que Adams-Bashforth sozinho.

Enunciado: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Passos

- O problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ no intervalo $[0,\ 1]$, o passo $h = 0{,}1$ (10 passos).
- Um preditor-corretor: Adams-Bashforth estima o novo ponto e Adams-Moulton corrige-o com o declive no ponto estimado. Arranque pelo método de Runge-Kutta

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

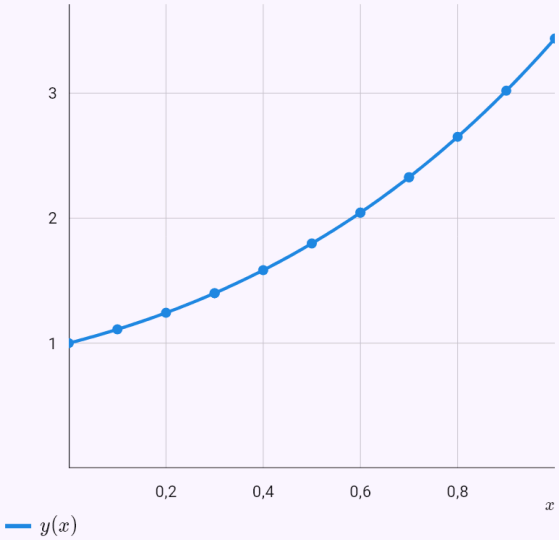
- Para comparar, a solução exata: $y = -x + 2e^x - 1$
- Passo a passo

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + $
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + $
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + $
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + $
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + $
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + $
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + $
10	1	3,436567	4,436567		

- No fim do intervalo, exatamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Resultado do método: $y(1) \approx 3{,}436567$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

O RK45 adaptativo – o primeiro passo é rejeitado e encurtado; depois o método controla o passo

sozinho.

Enunciado: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Resultado

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Passos

- O problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ no intervalo $[0,\ 2]$, o passo $h = 0{,}5$ (4 passos).
- Um passo adaptativo: em cada passo, dois métodos (de 5.ª e 4.ª ordem) a partir dos mesmos declives – a sua diferença estima o erro. O passo é aceite se o erro ficar abaixo da tolerância, e o seguinte aumenta ou diminui conforme

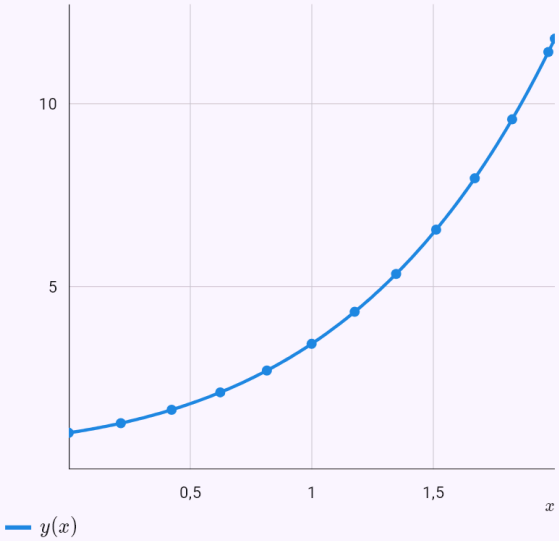
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Para comparar, a solução exata: $y = -x + 2e^x - 1$
- Os passos com a tolerância $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ passo aceite, × rejeitado (o passo diminuiu e repetiu-se). Aceites 12, rejeitados 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- No fim do intervalo, exatamente $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Resultado do método: $y(2) \approx 11{,}778114$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Uma equação rígida – o método de Euler explícito com passo 0,05 é instável (|1 + hλ| = 1,5) e diverge.

Enunciado: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Resultado

A solução numérica diverge com este passo (ver a resolução).

Passos

- O problema de valor inicial $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ no intervalo $[0,\ 1]$, o passo $h = 0{,}05$ (20 passos).
- Método de Euler – um passo pela tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Para comparar, a solução exata: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Estabilidade: a equação comporta-se como y' = λy com $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. O método amplia um erro em cada passo: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – com este passo é instável, os valores vão oscilar e crescer. Ajuda um passo menor ou um método implícito.
- Passo a passo

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Os valores crescem sem limite (em $x \approx 0{,}6000$) – o método é instável com este passo. Experimente um passo menor ou um método implícito.

A mesma equação pelo método de Euler implícito – estável mesmo com um passo grande.

Enunciado: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Resultado

$y(1) \approx 0{,}556616$

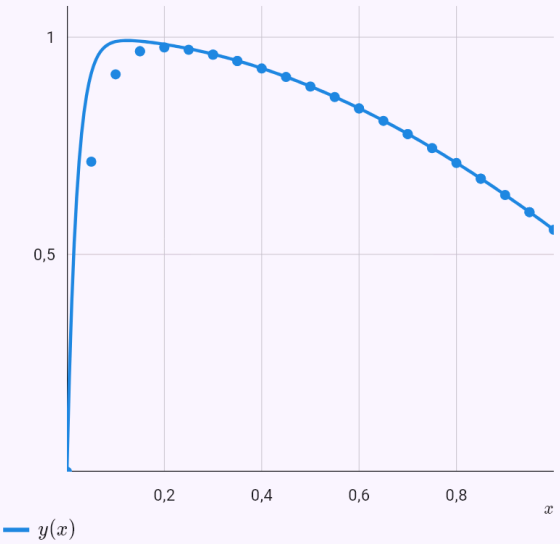
Passos

- O problema de valor inicial $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ no intervalo $[0,\ 1]$, o passo $h = 0{,}05$ (20 passos).
- O método de Euler implícito – o declive no fim do passo, pelo que y_{n+1} está dos dois lados de uma equação. Resolve-se em cada passo pelo método de Newton: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Para comparar, a solução exata: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Estabilidade: a equação comporta-se como y' = λy com $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. O método reduz um erro em cada passo: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – o cálculo é estável.
- Passo a passo

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- No fim do intervalo, exatamente $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Resultado do método: $y(1) \approx 0{,}556616$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Um problema de fronteira não linear pelo método do tiro – cinco passos da secante corrigem o declive.

Enunciado: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Passos

- O problema de fronteira $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, passo $h = 0{,}05$ (20 subintervalos).
- O método do tiro: escolhemos um declive inicial s = y'(a), resolvemos o problema como de valor inicial (Runge-Kutta) e vemos quanto falha a ponta direita. O declive é corrigido pelo método da secante

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_k}$$

- Os tiros – cada um é um problema de valor inicial; corrigimos até F(s) ficar abaixo da tolerância.

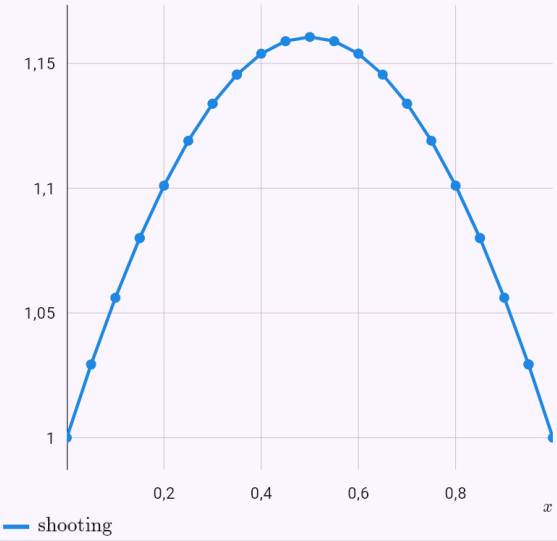
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- O declive inicial com que a solução atinge a condição de fronteira: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- A solução nos nós

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Resultado do método: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Diferenças finitas e o algoritmo de Thomas – exato nos nós para y = x³.

Enunciado: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Passos

- O problema de fronteira $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, passo $h = 0{,}25$ (4 subintervalos).
- Diferenças finitas: nos nós x_i substituímos y'' e y' por diferenças centrais

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- O sistema tridiagonal a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; os valores de fronteira passam para o lado direito

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- O algoritmo de Thomas – eliminação de Gauss para uma matriz tridiagonal: a passagem para a frente e depois a substituição para trás a partir do fim

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

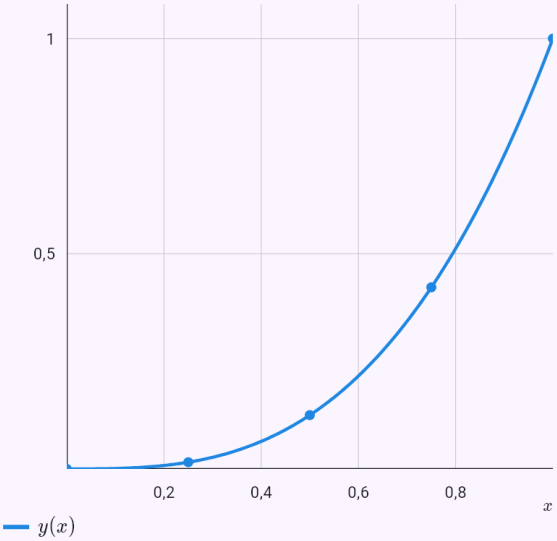
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Para comparar, a solução exata: $y = x^3$
- A solução nos nós

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- O maior erro nos nós face à solução exata: $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Resultado do método: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Problema de contorno por elementos finitos – exato nos nós.

Enunciado: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Passos

- O problema de fronteira $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, passo $h = 0{,}25$ (4 subintervalos).
- O método dos elementos finitos: a equação é multiplicada por uma função «chapéu» φ_i (linear por troços, 1 no nó i e 0 nos outros) e integrada por partes. A solução é procurada como combinação de chapéus, com os integrais sobre os elementos pela regra de Gauss

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- O sistema montado – uma linha por cada nó interior (a matriz de rigidez K é tridiagonal, os valores de contorno passados para o lado direito)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- O algoritmo de Thomas – eliminação de Gauss para uma matriz tridiagonal: a passagem para a frente e depois a substituição para trás a partir do fim

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+1}$$

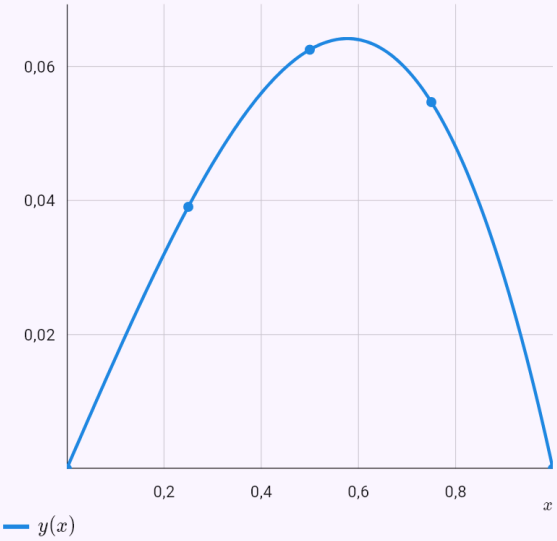
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Para comparar, a solução exata: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- A solução nos nós

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- O maior erro nos nós face à solução exata: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Resultado do método: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Um pêndulo pelo método de Verlet – o seu erro de energia mantém-se, o de RK4 cresce dez vezes.

Enunciado: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Resultado

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0$$

Passos

- A equação do movimento $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, passo $h = 0{,}5$ (1000 passos).
- O método de Verlet de velocidade – a nova posição a partir da velocidade e da aceleração, a velocidade a partir da aceleração média no início e no fim do passo. A energia total $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ calcula-se para ambos os métodos

$$x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \tfrac{h^2}{2}a(x_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + \tfrac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$$

- Verlet contra RK4 com o mesmo passo (linhas escolhidas)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^R
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

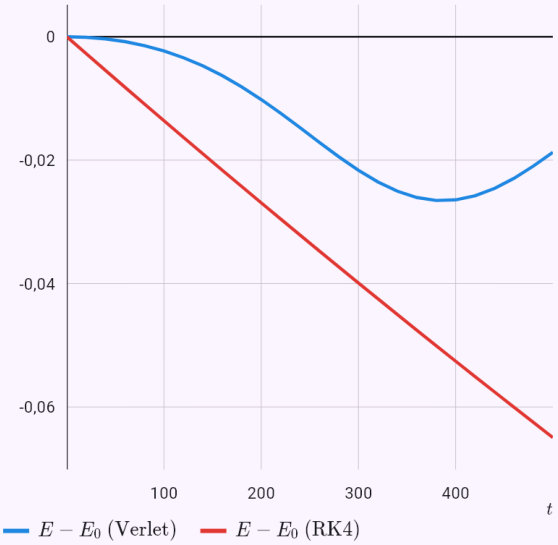
- O erro de energia de Verlet mantém-se, o de RK4 cresce com o tempo – num cálculo longo, Verlet é mais fiel. O maior erro no início e no fim, em cima Verlet, em baixo RK4

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$$

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$$

- Resultado do método: $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Gráfico



O desvio da energia total face à inicial: Verlet oscila em torno de zero, RK4 afasta-se lentamente.

Método de Gauss–Seidel – equações reordenadas pela dominância diagonal.

Enunciado: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Resultado

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Passos

- O sistema na forma matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Trocamos a ordem das equações para que a matriz seja diagonal dominante ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- A matriz de iteração o seu raio espectral $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – o método converge.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Método de Gauss–Seidel – os valores novos usam-se logo que são calculados

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- As iterações

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- O critério de paragem $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ é cumprido após 6 iterações.
- Resultado do método: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

Decomposição LU em frações exatas, substituição progressiva e regressiva.

Enunciado: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Resultado

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Passos

- O sistema na forma matricial
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Eliminação de Gauss – os multiplicadores das linhas formam a matriz L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- Decomposição LU A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Substituição progressiva Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$

- Substituição regressiva Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$

- Resultado do método: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

O polinômio interpolador de Lagrange e o seu valor num ponto.

Enunciado: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Resultado

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Passos

- Os pontos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Polinômios de base de Lagrange $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

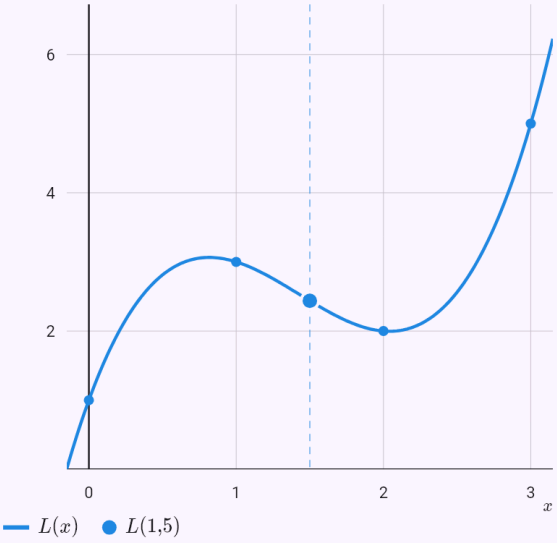
- O polinômio interpolador de Lagrange

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

- O valor no ponto dado: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$
- Resultado do método

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

O polinômio de Newton a partir da tabela de diferenças divididas.

Enunciado: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Resultado

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Passos

- Os pontos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- A tabela de diferenças divididas

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

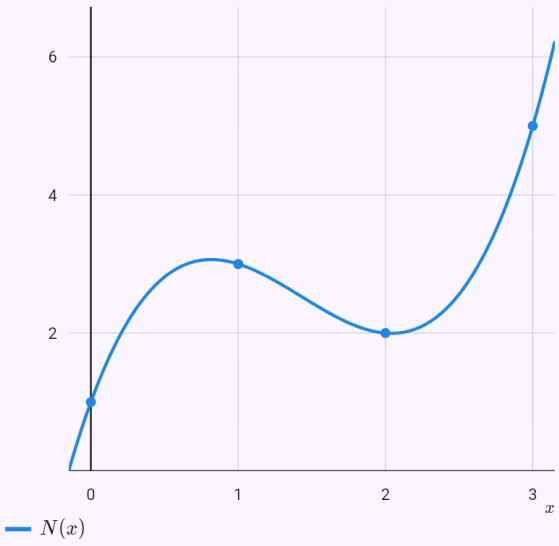
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- O polinômio interpolador de Newton (coeficientes da diagonal superior da tabela)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Resultado do método: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Spline cúbico natural – o sistema para os momentos e os polinômios por troços.

Enunciado: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Resultado

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Passos

- Os pontos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Spline cúbico natural: as segundas derivadas M⃰ nos nós cumprem com $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

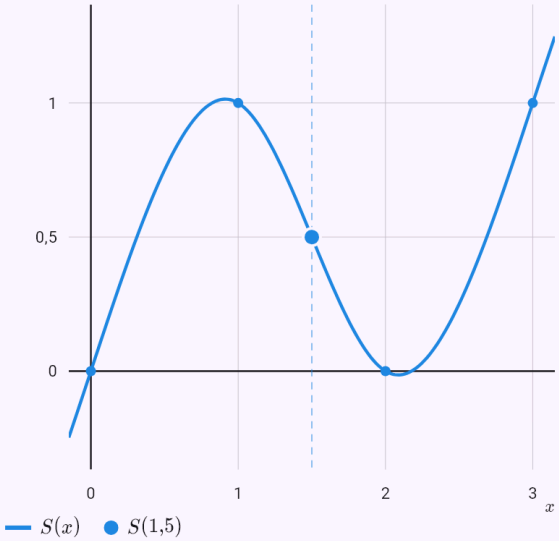
- A solução do sistema:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Em cada subintervalo

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- O valor no ponto dado: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Resultado do método: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Aproximação quadrática por mínimos quadrados.

Enunciado: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Resultado

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Passos

- Os pontos dados (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Procuramos o polinômio com $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. As somas necessárias

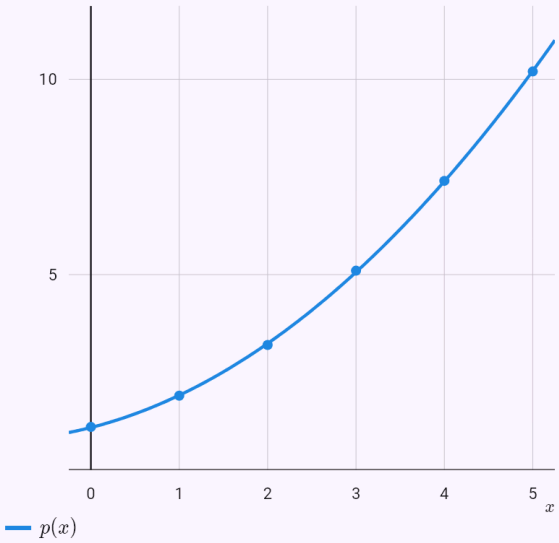
$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- As equações normais para os coeficientes $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- A solução:
  $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- A soma dos quadrados dos desvios:
  $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Resultado do método:
  $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

A taxa interna de retorno – sob o resultado, os passos da bissecção recolhidos.

Enunciado: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

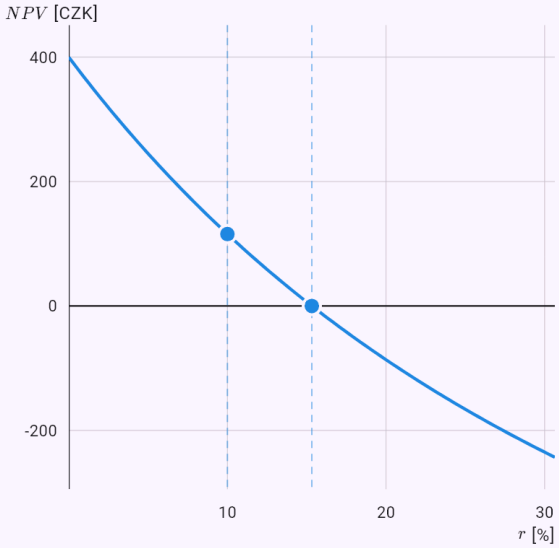
Resultado

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Passos

- Dados:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Convertemos as unidades: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- O valor atual líquido VAL soma os fluxos de caixa CF_0, CF_1, … de um projeto atualizados à rentabilidade exigida r: VAL = Σ CF_t/(1 + r)^t. Um projeto com VAL > 0 rende mais do que o exigido. A taxa interna de rentabilidade TIR é a taxa à qual VAL = 0 – raiz de uma equação polinomial, procurada numericamente. O período de recuperação é o momento em que a soma acumulada (simples ou atualizada) deixa de ser negativa. Equação do modelo: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Valor atual líquido
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- VAL ≥ 0 – o projeto rende pelo menos o exigido.
- Resolvemos a equação numericamente (bisseção): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › O método: bissecção, 14 iterações

Gráfico



O gráfico calculado a partir da solução do modelo; os pontos são os valores dados ou a resposta.

Limitações conhecidas

- Raízes: uma equação com uma incógnita, raízes reais; automaticamente isolam-se no máximo três raízes em ⟨−50; 50⟩.
- Equações diferenciais: só uma equação de 1.ª ordem y′ = f(x, y), no máximo 2000 passos; sistemas e ordens superiores ainda não.
- Sistemas: 2 a 6 equações; interpolação no máximo 12 pontos, polinômio de mínimos quadrados no máximo de grau 5.
- Os métodos de Simpson e de Romberg a partir de uma tabela precisam de passos iguais (Romberg 2, 4, 8, … subintervalos).
- Problemas de fronteira só de 2.ª ordem com os valores y(a), y(b) (não uma derivada numa ponta); diferenças finitas só para uma equação linear em y e y′. O método de Verlet só para um movimento x″ = a(x) numa coordenada – ainda não a órbita de um planeta no plano.