Mathtrace – podręcznik

V. Statystyka

Spis treści

V. Statystyka

41. Statystyka

41. Statystyka

Dane zapisz jako data(…): wartości oddziel średnikami, spacjami lub nowymi wierszami (data(1.5 2.5 3)). Tabela – wiersz na obserwację, kolumna na zmienną – idzie wiersz po wierszu oddzielona średnikami; pierwszy wiersz może zawierać nazwy zmiennych. Wygodniej: klawisz z siatką na zakładce f(x) otwiera tabelę do wypełnienia, wklejenia ze schowka (komórki z Excela lub Arkuszy Google) lub wczytania z pliku CSV, a przycisk „Jako dane” wstawia ją do statystyki – nawet tabelę większą niż siatka.

Dla jednej zmiennej chip wybiera, co obliczyć. Statystyki opisowe: średnia arytmetyczna, mediana, dominanta, kwartyle (mediany dolnej i górnej połowy), rozstęp i rozstęp międzykwartylowy, wariancja i odchylenie standardowe z próby (n − 1) i populacji (n), współczynnik zmienności i wartości odstające (poza $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR$ i $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR$), z wykresem pudełkowym. Liczebności i histogram: tabela liczebności bezwzględnych, względnych i skumulowanych – według wartości dla liczb całkowitych o niewielu wartościach, w przeciwnym razie według klas (ich liczba według reguły Sturgesa). Wartości standaryzowane z: każda wartość standaryzowana średnią i odchyleniem standardowym danych, z jej wynikiem T.

Dwie zmienne (dwie kolumny) dają korelację i regresję: sumy, kowariancję, współczynnik korelacji Pearsona r z siłą zależności słowami, prostą regresji metodą najmniejszych kwadratów i współczynnik determinacji r^2, z wykresem rozrzutu. Trzy i więcej zmiennych dostaje statystyki opisowe obok siebie z wykresami pudełkowymi.

Wnioskowanie statystyczne z danych: przedział ufności dla średniej (chip „Przedział ufności dla średniej”, 90, 95 lub 99 %) z rozkładu t; test t (chip „Test t”) – jedna zmienna wobec testowanej wartości μ_0, dwie zmienne jako próby niezależne (test Welcha lub przy równych wariancjach) lub wartości w parach (różnice par); test χ^2 (chip „Test χ^2”) – jedna kolumna liczebności jako test zgodności z rozkładem równomiernym, tabela jako test niezależności z V Craméra. Pod chipami podajesz poziom istotności α, hipotezę alternatywną (dwustronną, lewostronną, prawostronną) i μ_0. Kroki: hipotezy, statystyka testowa, wartość krytyczna i obszar krytyczny, wartość p i decyzja; wykres pokazuje rozkład z zacieniowanym obszarem krytycznym. Dwie próby niezależne różnej liczebności zapisz jako nazwane kolumny – data(A = 23 25 28; B = 20 22 21 25).

Porównanie grup: chip „Test rangowy (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)” porównuje dwie grupy testem Manna–Whitneya (z „Zależne (pary)” wartości w parach testem Wilcoxona) i trzy lub więcej grup testem Kruskala–Wallisa – według rang wartości, bez założenia rozkładu normalnego; dla małych prób bez rang wiązanych wartość p jest dokładna. Chip „ANOVA (analiza wariancji)” porównuje średnie grup jednoczynnikową analizą wariancji z tabelą ANOVA, testem F i wielkością efektu η^2. Grupy zapisz w kolumnach dowolnej długości (nazwane kolumny); wykres pokazuje wykresy pudełkowe grup i rozkład statystyki testowej. Dla testu χ^2 jednej kolumny liczebności pole „Oczekiwane udziały” przyjmuje własne oczekiwane udziały – 1:2:1, 0.25 0.5 0.25 lub w procentach.

Regresja dwóch zmiennych ma pod swoim chipem wybór modelu: liniowy (z testem istotności korelacji), kwadratowy (równania normalne metody najmniejszych kwadratów), wykładniczy y = a·e^(bx), potęgowy y = a·x^b i logarytmiczny y = a + b·ln x (przez linearyzację logarytmami) – ze współczynnikiem determinacji R² i wykresem dopasowanej krzywej. Formularz „Statystyka i psychometria” ma też przedział ufności i testy t z wartości podsumowujących (liczebność, średnia, odchylenie standardowe) – łącznie z testem z przy znanym σ i testem t dla dwóch prób.

Rozkład normalny jest w formularzu „Statystyka i psychometria” (sekcja „Zastosowania” na ekranie głównym, dziedzina Statystyka): prawdopodobieństwa P(X < x), P(X > x), P(a < X < b) i kwantyl – wartość, poniżej której leży dana część. Kroki standaryzują, z = (x − μ)/σ, i używają dystrybuanty Φ, ujemne z jako 1 − Φ(|z|) jak w tablicach; wykres pokazuje gęstość z zacieniowanym polem.

Jak to wpisać

`data(3; 5; 7; 7; 9)`	Jedna zmienna – wartości średnikami, spacjami lub jedna pod drugą.
`data(x y; 1 52; 2 58; 3 61)`	Tabela wiersz po wierszu, pierwszy wiersz to nazwy zmiennych (opcjonalnie).
`data(x = 1 2 3 4; y = 2 4 5 4)`	Nazwane kolumny, każda ze swoimi wartościami.

Przykłady

Statystyki opisowe ośmiu wartości.

Input: `data(2; 4; 4; 4; 5; 5; 7; 9)`

Wynik

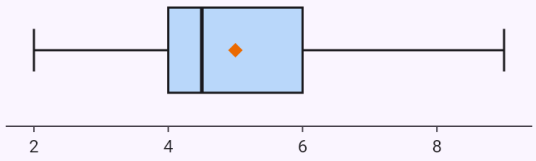
$$\bar{x} = 5$$
$$\tilde{x} = 4{,}5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 8$, dane posortowane: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Średnia arytmetyczna: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40}{8} = 5$
- Mediana to środkowa wartość posortowanych danych: $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- Dominanta (najczęstsza wartość, 3×): $\hat{x} = 4$
- Kwartyle to mediany dolnej i górnej połowy: $Q_1 = 4, \quad Q_2 = \tilde{x} = 4{,}5, \quad Q_3 = 6$
- Rozstęp i rozstęp międzykwartylowy $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 2 = 7$ $IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$
- Suma kwadratów odchyleń od średniej: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 32$
- Wariancja – z próby s² i populacji σ² $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{7} \approx 4{,}571$ $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{8} = 4$
- Odchylenie standardowe $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}571} \approx 2{,}138$ $\sigma = \sqrt{4} = 2$
- Współczynnik zmienności: $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}138}{5} \approx 0{,}4276 = 42{,}8\,\%$
- Granice dla wartości odstających $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 1, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 9$ – żadna wartość nie leży poza nimi.
- Wariancja z próby s² dzieli przez n − 1 i szacuje wariancję populacji z próby – to zwykły wybór. Wariancja populacji σ² dzieli przez n, dla danych będących całą populacją.
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Wykres

Wykres pudełkowy (mediana, kwartyle, wartości odstające; ◆ średnia)



Wartość odstająca 31 na wykresie pudełkowym.

Input: `data(12 15 14 13 16 15 14 31)`

Wynik

$$\bar{x} = 16{,}25$$
$$\tilde{x} = 14{,}5$$
$$s \approx 6{,}089$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 8$, dane posortowane:
  $12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16,\ 31$
- Średnia arytmetyczna: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{8} = 16{,}25$
- Mediana to środkowa wartość posortowanych danych:
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$
- Dominanta (najczęstsza wartość, 2×): $\hat{x} = 14,\ 15$
- Kwartyle to mediany dolnej i górnej połowy:
  $Q_1 = 13{,}5, \quad Q_2 = \tilde{x} = 14{,}5, \quad Q_3 = 15{,}5$
- Rozstęp i rozstęp międzykwartylowy
  $R = x_{max} - x_{min} = 31 - 12 = 19$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 15{,}5 - 13{,}5 = 2$
- Suma kwadratów odchyleń od średniej:
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 259{,}5$
- Wariancja – z próby s² i populacji σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{7} \approx 37{,}07$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{8} \approx 32{,}44$
- Odchylenie standardowe
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{37{,}07} \approx 6{,}089$
  $\sigma = \sqrt{32{,}44} \approx 5{,}695$
- Współczynnik zmienności:
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6{,}089}{16{,}25} \approx 0{,}3747 = 37{,}5\,\%$
- Wartości odstające leżą poza granicami
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 10{,}5, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 18{,}5$: 31
- Wariancja z próby s² dzieli przez n − 1 i szacuje wariancję populacji z próby – to zwykły wybór. Wariancja populacji σ² dzieli przez n, dla danych będących całą populacją.
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Wykres

Wykres pudełkowy (mediana, kwartyle, wartości odstające; ◆ średnia)

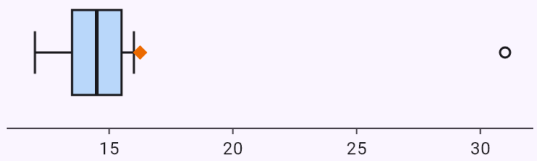


Tabela liczebności ocen i jej histogram.

Input: `data(1 2 2 3 3 3 3 4 4 5 1 3 2 4 3)` Liczebności i histogram

Wynik

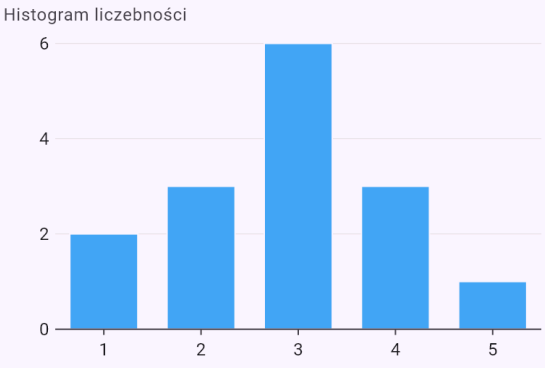
$$n = 15$$
$$\hat{x} = 3$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 15$, dane posortowane:
  $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5$
- Tabela liczebności – bezwzględne n, względne f, skumulowane N i F

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,133	2	0,133
2	3	0,200	5	0,333
3	6	0,400	11	0,733
4	3	0,200	14	0,933
5	1	0,067	15	1,000
$\sum$	15	1		

Wykres



Dane ciągłe pogrupowane w klasy.

Input: `data(12.5 14.1 15.8 17.2 18.9 21.3 22.0 23.7 25.1 26.4 28.8 31.2)`
Liczebności i histogram

Wynik

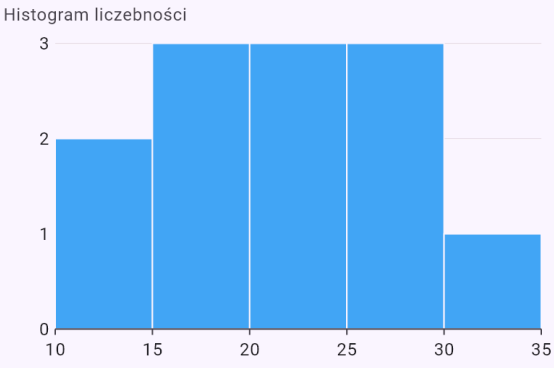
$$n = 12$$
$$k = 5, \quad h = 5$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 12$, dane posortowane
  $12{,}5,\ 14{,}1,\ 15{,}8,\ 17{,}2,\ 18{,}9,\ 21{,}3,\ 22,\ 23{,}7,\ 25{,}1,\ 26,$
- Wartości jest dużo – grupujemy je w 5 klas (reguła Sturgesa)
  $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + \log_2 12 \approx 4{,}585 \Rightarrow k = 5$
  $h \approx \frac{R}{k} = \frac{18{,}7}{5} \approx 3{,}74 \Rightarrow h = 5$
- Tabela liczebności klas (x środek klasy)

I_j	x_j	n_j	f_j	N_j	F_j
$\langle 10;\ 15)$	12,5	2	0,167	2	0,167
$\langle 15;\ 20)$	17,5	3	0,250	5	0,417
$\langle 20;\ 25)$	22,5	3	0,250	8	0,667
$\langle 25;\ 30)$	27,5	3	0,250	11	0,917
$\langle 30;\ 35\rangle$	32,5	1	0,083	12	1,000
$\sum$		12	1		

Wykres



Wyniki z i wyniki T wartości.

Input: `data(2 4 4 4 5 5 7 9)` Wartości standaryzowane z

Wynik

$$\bar{x} = 5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 8$, dane posortowane: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Średnia arytmetyczna: $\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$
- Odchylenie standardowe

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{32}{7}} \approx 2{,}138$$

- Każdą wartość standaryzujemy

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 5}{2{,}138}$$
$$T_i = 50 + 10 z_i$$

- Wyniki z i wyniki T wartości

x_i	z_i	T_i
2	$-1{,}40$	$36{,}0$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
7	$0{,}94$	$59{,}4$
9	$1{,}87$	$68{,}7$

- Wyniki z korzystają ze średniej i odchylenia standardowego tych danych. Do porównania z populacją użyj średniej i SD normy (model „Przeliczanie wyników standaryzowanych”).

Korelacja i prosta regresji – godziny nauki i punkty z testu.

Input: `data(x y; 1 52; 2 58; 3 61; 4 70; 5 74; 6 79)`

Wynik

$$r \approx 0{,}9937$$

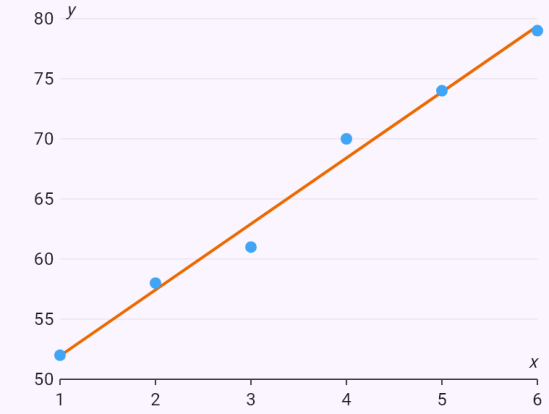
$$\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 6$, dane posortowane
  $[1;\,52],\ [2;\,58],\ [3;\,61],\ [4;\,70],\ [5;\,74],\ [6;\,79]$
- Sumy i średnie
  $\sum x_i = 21$
  $\sum y_i = 394$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum y_i^2 = 26\,410$
  $\sum x_i y_i = 1475$
  $\bar{x} = 3{,}5$
  $\bar{y} = 65{,}67$
- Odchylenie standardowe
  $$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \approx 1{,}871$$
  $$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}} \approx 10{,}33$$
- Kowariancja
  $$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{1475 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot 65{,}67}{5} = 19{,}2$$
- Współczynnik korelacji Pearsona:
  $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{19{,}2}{1{,}871 \cdot 10{,}33} \approx 0{,}9937$ – zależność jest bardzo silna, dodatnia (y rośnie wraz z x).
- Współczynniki prostej regresji metodą najmniejszych kwadratów
  $b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{19{,}2}{3{,}5} \approx 5{,}486$
  $a = \bar{y} - b\bar{x} = 65{,}67 - 5{,}486 \cdot 3{,}5 \approx 46{,}47$
- Prosta regresji: $\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$
- Współczynnik determinacji $r^2 = 0{,}9937^2 \approx 0{,}9874$ – prosta wyjaśnia $98{,}7\,\%$ wariancji y.
- Test hipotezy zerowej ρ = 0 (rozkład t z 4 stopniami swobody) – korelacja jest istotna statystycznie.
  $$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}9937\sqrt{4}}{\sqrt{1-0{,}9937^2}} \approx 17{,}73$$
  $p < 0{,}0001 \le \alpha = 0{,}05$
- Korelacja opisuje tylko zależność liniową: nie mówi, co jest przyczyną czego, i może przeoczyć zależność nieliniową. Prostej regresji używaj tylko w zakresie zmierzonych x.

Wykres

Wykres rozrzutu z prostą regresji



Trzy zmienne obok siebie.

Input: `data(A B C; 12 15 9; 14 18 11; 11 16 10; 15 19 12; 13 17 10)`

Wynik

$$\bar{x}_{\mathrm{A}} = 13$$
$$\bar{x}_{\mathrm{B}} = 17$$
$$\bar{x}_{\mathrm{C}} = 10{,}4$$

Kroki

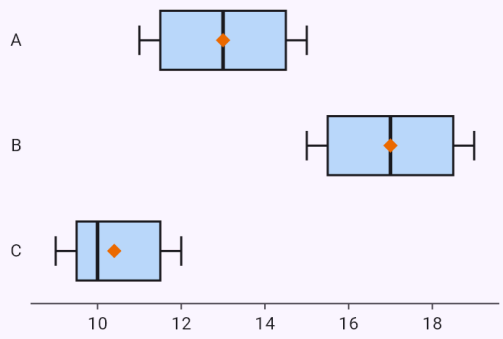
- Statystyki opisowe zmiennych

	A	B	C
n	5	5	5
$\bar{x}$	13	17	10,4
$\tilde{x}$	13	17	10
Q_1	11,5	15,5	9,5
Q_3	14,5	18,5	11,5
s	1,581	1,581	1,14
σ	1,414	1,414	1,02
x_{min}	11	15	9
x_{max}	15	19	12

- Wariancja z próby s² dzieli przez n − 1 i szacuje wariancję populacji z próby – to zwykły wybór. Wariancja populacji σ² dzieli przez n, dla danych będących całą populacją.

Wykres

Wykres pudełkowy (mediana, kwartyle, wartości odstające; ◆ średnia)



95-procentowy przedział ufności dla średniej dziesięciu pomiarów.

Input: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Przedział ufności dla średniej

Wynik

$$95\,\%:\ \langle 99{,}71;\ 106{,}3\rangle$$

Kroki

- Liczebność, średnia i odchylenie standardowe z próby: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- Błąd standardowy: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Kwantyl dla wybranej ufności: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$
- Przedział ufności
  $\bar{x} \pm t \cdot SE = 103 \pm 2{,}262 \cdot 1{,}453 = 103 \pm 3{,}287 \Rightarrow \langle 99$
- Ufność 95 % oznacza: gdyby losowanie powtarzać wielokrotnie, około 95 % tak obliczonych przedziałów zawierałoby prawdziwą średnią μ. Nie oznacza, że μ leży w tym konkretnym przedziale z prawdopodobieństwem 95 %.
- Dla małej próby (n < 30) rozkład t zakłada, że dane pochodzą z rozkładu w przybliżeniu normalnego. Przy danych silnie skośnych lub z wartościami odstającymi lepszy jest test nieparametryczny.

Czy średnia różni się od 100? Test t dla jednej próby.

Input: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Test t

Wynik

$$t \approx 2{,}065$$

$$p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Liczebność, średnia i odchylenie standardowe z próby: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- Hipoteza zerowa i alternatywna: $H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu \neq 100$
- Błąd standardowy: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład t z 9 stopniami swobody: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \frac{103 - 100}{1{,}453} \approx 2{,}065$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$, obszar krytyczny $|t| \geq 2{,}262$
- Wartość p: $p = 2\,P(T \geq 2{,}065) \approx 0{,}06895$
- Ponieważ $p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$, nie odrzucamy hipotezy zerowej – dane nie dostarczają wystarczających dowodów przeciw niej.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.

- Dla małej próby (n < 30) rozkład t zakłada, że dane pochodzą z rozkładu w przybliżeniu normalnego. Przy danych silnie skośnych lub z wartościami odstającymi lepszy jest test nieparametryczny.

Wykres

Rozkład t – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}065$

Dwie próby niezależne różnej liczebności – test t Welcha.

Input: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)` Test t

Wynik

$$t \approx 3{,}503$$

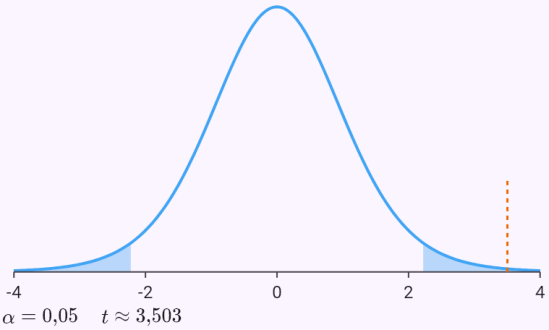
$$p \approx 0{,}005546 \le \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Liczebność, średnia i odchylenie standardowe z próby
  $n_1 = 6,\ \bar{x}_1 = 26{,}5,\ s_1 \approx 2{,}429$
  $n_2 = 7,\ \bar{x}_2 = 22,\ s_2 \approx 2{,}16$
- Hipoteza zerowa i alternatywna:
  $H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- Błąd standardowy
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2{,}429^2}{6} + \frac{2{,}16^2}{7}} \approx 1{,}285$$
- Stopnie swobody Welcha–Satterthwaite'a
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 10{,}18$$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład t z $10{,}18$ stopniami swobody: $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{26{,}5 - 22}{1{,}285} \approx 3{,}503$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $t_{0{,}975}(10{,}18) \approx 2{,}223$, obszar krytyczny $|t| \ge 2{,}223$
- Wartość p: $p = 2\,P(T \ge 3{,}503) \approx 0{,}005546$
- Ponieważ $p \approx 0{,}005546 \le \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Test Welcha nie zakłada równych wariancji grup; jego stopnie swobody v nie muszą być całkowite.

Wykres

Rozkład t – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}503$

Test t dla par – pomiary przed i po.

Input: `data(x1 x2; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71)` Test t · Zależne (pary)

Wynik

$$t \approx 3{,}081$$

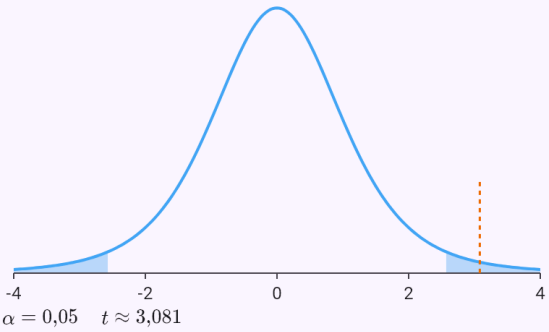
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Różnice par d (kolumna 1 − kolumna 2): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3;\ n = 6, \quad \bar{d} \approx 2{,}167, \quad s_d \approx 1{,}722$
- Hipoteza zerowa i alternatywna: $H_0 : \mu_d = 0, \quad H_1 : \mu_d \neq 0$
- Błąd standardowy: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}722}{\sqrt{6}} \approx 0{,}7032$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład t z 5 stopniami swobody: $t = \frac{\bar{d} - \mu_0}{SE} = \frac{2{,}167 - 0}{0{,}7032} \approx 3{,}081$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $t_{0{,}975}(5) \approx 2{,}571$, obszar krytyczny $|t| \geq 2{,}571$
- Wartość p: $p = 2\,P(T \geq 3{,}081) \approx 0{,}02743$
- Ponieważ $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Dla małej próby (n < 30) rozkład t zakłada, że dane pochodzą z rozkładu w przybliżeniu normalnego. Przy danych silnie skośnych lub z wartościami odstającymi lepszy jest test nieparametryczny.
- Test t dla par to test t dla jednej próby różnic (kolumna 1 − kolumna 2) – każda para należy do tej samej osoby (np. przed i po).

Wykres

Rozkład t – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



Czy kostka jest uczciwa? Test zgodności χ².

Input: `data(8 12 9 11 6 14)` Test χ²

Wynik

$$\chi^2 = 4{,}2$$
$$p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: wszystkie 6 kategorii jest jednakowo prawdopodobnych ($H_0: p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$); alternatywna: co najmniej jedna się różni.
- Liczebności oczekiwane przy H_0 $E_i = \frac{N}{k} = \frac{60}{6} = 10$ i wkłady kategorii

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	0,4
2	12	10	0,4
3	9	10	0,1
4	11	10	0,1
5	6	10	1,6
6	14	10	1,6
$\sum$	60	60	4,2

- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład χ² z 5 stopniami swobody

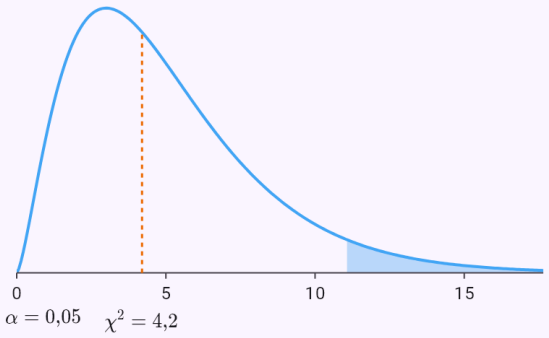
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}6 + 1$$

- Wartość krytyczna na poziomie α: $\chi^2_{0{,}95}(5) \approx 11{,}07$, obszar krytyczny $\chi^2 \geq 11{,}07$
- Wartość p: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}2) \approx 0{,}521$
- Ponieważ $p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$, nie odrzucamy hipotezy zerowej – dane nie dostarczają wystarczających dowodów przeciw niej.

- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Test χ² pracuje na liczebnościach (liczbach przypadków), a nie na procentach czy średnich.

Wykres

Rozkład χ² – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



Test niezależności w tabeli 2×2.

Input: `data(20 30; 25 15)` Test χ²

Wynik

$$\chi^2 = 4{,}5$$
$$p \approx 0{,}03389 \le \alpha = 0{,}05$$
$$V \approx 0{,}2236$$

Kroki

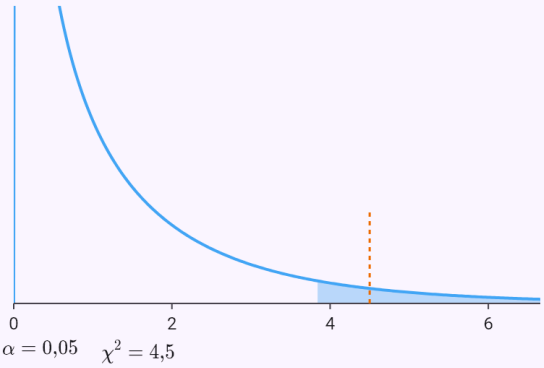
- Hipoteza zerowa: zmienna wierszowa i kolumnowa są niezależne; alternatywna: są zależne.
- Liczebności oczekiwane przy niezależności $E_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{N}$, obserwowane w nawiasach

	1	2	∑
1	25 (20)	25 (30)	50
2	20 (25)	20 (15)	40
∑	45	45	90

- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład χ² z 1 stopniami swobody: $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 1 + 1 + 1{,}25 + 1{,}25 = 4{,}5$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}841$, obszar krytyczny $\chi^2 \ge 3{,}841$
- Wartość p: $p = P(\chi^2 \ge 4{,}5) \approx 0{,}03389$
- Ponieważ $p \approx 0{,}03389 \le \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Siła związku – V Craméra (0 brak, 1 doskonały) $V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(r,c)-1)}} = \sqrt{\frac{4{,}5}{90 \cdot 1}} \approx 0{,}2236$
- Test χ² pracuje na liczebnościach (liczbach przypadków), a nie na procentach czy średnich.

Wykres

Rozkład χ² – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



Dwie grupy testem Manna–Whitneya – małe próby, dokładna wartość p.

Input: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)`

Test rangowy (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Wynik

$$U = 3$$
$$z \approx -2{,}579$$
$$p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: obie grupy pochodzą z tego samego rozkładu, alternatywna: jedna ma zwykle wyższe wartości

  H_0: $F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}$
  H_1: $F_{\mathrm{A}} \neq F_{\mathrm{B}}$

- Wartości obu grup razem posortowane i ponumerowane rangą R (równe wartości średnią swoich rang)

x	R	
19	1	B
20	2	B
21	3	B
22	4	B
23	5,5	A
23	5,5	B
24	7	B
25	8,5	A
25	8,5	B
26	10	A
27	11	A
28	12	A
30	13	A

- Liczebności grup i sumy rang:
  $n_1 = 6, \quad n_2 = 7, \quad R_1 = 60, \quad R_2 = 31$

- U Manna–Whitneya – liczba par, w których wartość jednej grupy ma wyższą rangę niż wartość drugiej; testujemy mniejszą z obu

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 60 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 39$$
$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 6 \cdot 7 - 39 = 3$$
$$U = \min(U_1, U_2) = 3$$

- Statystyka testowa – przy H_0 ma standardowy rozkład normalny: $z = \dfrac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_U} = \dfrac{3 - 21}{6{,}981} \approx -2{,}579$

- Wartość krytyczna na poziomie α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, obszar krytyczny $|z| \geq 1{,}96$

- Wartość p: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}579) \approx 0{,}009922$

- Ponieważ $p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.

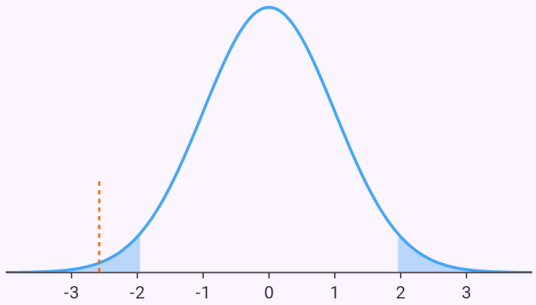
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.

- Wielkość efektu r (orientacyjnie 0,1 mały, 0,3 średni, 0,5 duży): $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{N}} = \dfrac{2{,}579}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7152$

- Test Manna–Whitneya to test rangowy: nie zakłada rozkładu normalnego i nadaje się też dla danych porządkowych i wartości odstających. Porównuje całe rozkłady grup – przy podobnych kształtach jest testem różnicy median.

Wykres

Standardowy rozkład normalny – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}579$

Wartości w parach przed i po testem Wilcoxona.

Input: `data(pred po; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71; 79 72)`

Test rangowy (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis) · Zależne (pary)

Wynik

$$T = 1$$
$$z \approx -2{,}205$$
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: mediana różnic wynosi zero (brak zmiany), alternatywna: nie wynosi:
  $H_0: \tilde{d} = 0, \quad H_1: \tilde{d} \neq 0$
- Różnice par d (1. kolumna − 2. kolumna):
  $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 7$; różnice zerowe pominięte: $n = 7$
- Niezerowe różnice posortowane według wielkości (bez znaku) i ponumerowane rangą R; znak zostaje przy randze

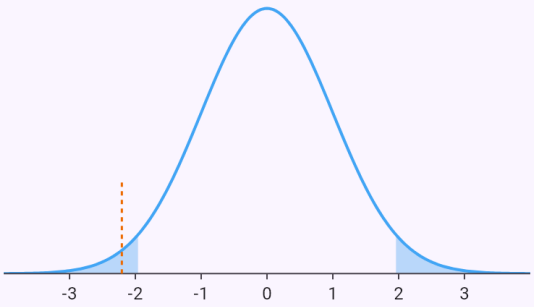
d_i	R	
-1	1	$-$
2	$2{,}5$	$+$
2	$2{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
4	6	$+$
7	7	$+$

- Sumy rang różnic dodatnich i ujemnych
  $T^+ = 27$
  $T^- = 1$
  $T = \min\left(T^+, T^-\right) = 1$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma standardowy rozkład normalny: $z = \dfrac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sigma_T} = \dfrac{1 - 14}{5{,}895} \approx -2{,}205$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, obszar krytyczny $|z| \geq 1{,}96$
- Wartość p: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}205) \approx 0{,}02743$
- Ponieważ $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.

- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Wielkość efektu r (orientacyjnie 0,1 mały, 0,3 średni, 0,5 duży): $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}205}{\sqrt{7}} \approx 0{,}8335$
- Test Wilcoxona to rangowy odpowiednik testu t dla par: nie zakłada rozkładu normalnego różnic i uwzględnia ich znaki i wielkości przez ich rangi.

Wykres

Standardowy rozkład normalny – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}205$

Trzy grupy testem Kruskala–Wallisa.

Input: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

Test rangowy (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Wynik

$$H \approx 8{,}263$$
$$p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: wszystkie grupy pochodzą z tego samego rozkładu, alternatywna: co najmniej jedna się różni
  $H_0: F_1 = \cdots = F_3$
  $H_1: \exists\, i, j: F_i \neq F_j$

- Wartości wszystkich grup razem posortowane i ponumerowane rangą R (równe wartości średnią swoich rang)

x	R	
11	1	A
12	2,5	A
12	2,5	C
13	4,5	A
13	4,5	C
14	6,5	A
14	6,5	C
15	9	A
15	9	B
15	9	C
16	11,5	B
16	11,5	C
17	13	B
18	14	B
19	15	B

- Suma rang każdej grupy
  $R_\mathrm{A} = 23{,}5\ (n = 5)$
  $R_\mathrm{B} = 62{,}5\ (n = 5)$
  $R_\mathrm{C} = 34\ (n = 5)$

- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład χ^2 z 2 stopniami swobody

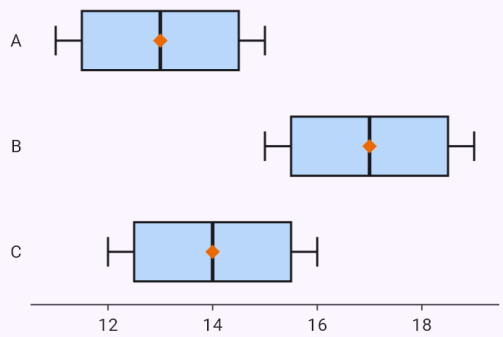
$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{15 \cdot 16}\left(\frac{23{,}5^2}{5}\right.$$
$$C = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N} = 1 - \frac{48}{3360} \approx 0{,}9857$$
$$H_c = \frac{H}{C} = \frac{8{,}145}{0{,}9857} \approx 8{,}263$$

- Wartość krytyczna na poziomie α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, obszar krytyczny $\chi^2 \geq 5{,}991$
- Wartość p: $p = P(\chi^2 \geq 8{,}263) \approx 0{,}01606$
- Ponieważ $p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.

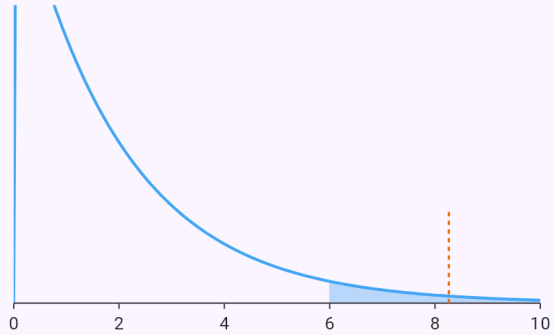
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Wielkość efektu ε² – część wariancji rang wyjaśniona przez grupy: $\varepsilon^2 = \frac{H}{N-1} = \frac{8{,}263}{14} \approx 0{,}5902$
- Test Kruskala–Wallisa to rangowy odpowiednik jednoczynnikowej ANOVA. Mówi tylko, że niektóre grupy się różnią – które, pokazuje porównanie par (test Manna–Whitneya z poprawką Bonferroniego).

Wykres

Wykres pudełkowy (mediana, kwartyle, wartości odstające; ◆ średnia)



Rozkład χ² – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 \approx 8{,}263$

Średnie trzech grup jednoczynnikową ANOVA.

Input: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

ANOVA (analiza wariancji)

Wynik

$$F \approx 8{,}667$$
$$p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$\eta^2 \approx 0{,}5909$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: średnie wszystkich grup są równe, alternatywna: co najmniej dwie się różnią

  $H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_3$

  $H_1: \exists\, i, j: \mu_i \neq \mu_j$

- Liczebności, średnie i odchylenia standardowe grup oraz średnia ogólna $\bar{x} \approx 14{,}67$

	n_j	$\bar{x}_j$	s_j
A	5	13	1,581
B	5	17	1,581
C	5	14	1,581
$\sum$	15	14,67	

- Analiza wariancji – suma kwadratów między grupami (B) i wewnątrz nich (W), stopnie swobody i średnie kwadraty

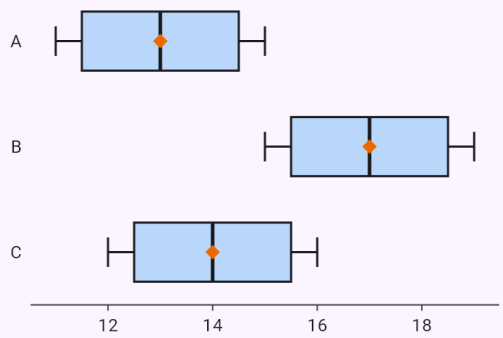
$$SS_B = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$
$$SS_W = \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

	SS	df	MS	F
B	43,33	2	21,67	8,667
W	30	12	2,5	
$\sum$	73,33	14		

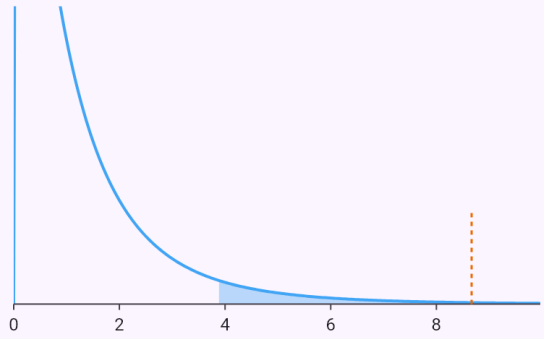
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład F z 2 i 12 stopniami swobody: $F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{21{,}67}{2{,}5} \approx 8{,}667$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $F_{0{,}95}(2;\, 12) \approx 3{,}885$, obszar krytyczny $F \geq 3{,}885$
- Wartość p: $p = P(F \geq 8{,}667) \approx 0{,}004687$
- Ponieważ $p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wielkość efektu η² – część wariancji wyjaśniona przez różnice między grupami (orientacyjnie 0,01 mały, 0,06 średni, 0,14 duży): $\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{43{,}33}{73{,}33} \approx 0{,}5909$
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- ANOVA zakłada niezależne grupy, w przybliżeniu normalny rozkład w każdej z nich i podobne wariancje. Gdy to nie zachodzi (małe grupy, wartości odstające, dane porządkowe), użyj testu Kruskala–Wallisa.
- Odrzucenie H_0 mówi tylko, że co najmniej dwie średnie się różnią. Które, pokazuje porównanie par (testy post hoc, np. testy t z poprawką Bonferroniego).

Wykres

Wykres pudełkowy (mediana, kwartyle, wartości odstające; ◆ średnia)



Rozkład F – zacieniowana część to obszar krytyczny, przerywana linia to statystyka testowa



$\alpha = 0{,}05$ $F \approx 8{,}667$

Test zgodności z oczekiwanymi udziałami 1 : 2 : 1.

Input: `data(30 50 20)` Test χ² · Oczekiwane udziały 1:2:1

Wynik

$$\chi^2 = 2$$
$$p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Hipoteza zerowa: kategorie mają dane udziały, alternatywna: co najmniej jeden udział się różni: $H_0: p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}5,\ p_3 = 0{,}25$
- Liczebności oczekiwane według danych udziałów $E_i = N \cdot p_i, \quad N = 100$ i wkłady kategorii

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	30	25	1
2	50	50	0
3	20	25	1
$\sum$	100	100	2

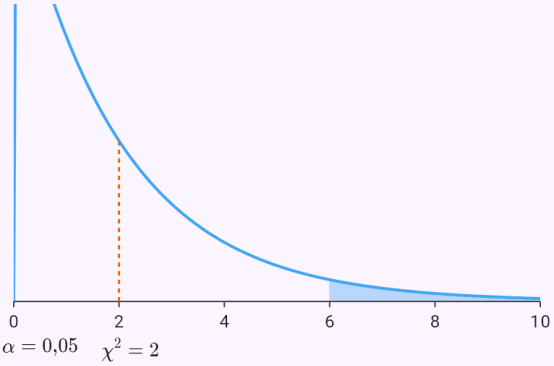
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład χ² z 2 stopniami swobody: $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1 + 0 + 1 = 2$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, obszar krytyczny $\chi^2 \geq 5{,}991$
- Wartość p: $p = P(\chi^2 \geq 2) \approx 0{,}3679$
- Ponieważ $p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$, nie odrzucamy hipotezy zerowej – dane nie dostarczają wystarczających dowodów przeciw niej.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa.

Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.

- Test χ² pracuje na liczebnościach (liczbach przypadków), a nie na procentach czy średnich.

Wykres

Rozkład χ² – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



Regresja kwadratowa.

Input: `data(x y; 1 2.1; 2 3.9; 3 9.2; 4 15.8; 5 25.1; 6 36.2)` Korelacja i regresja · Kwadratowa

Wynik

$$\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$$

$$R^2 \approx 0{,}9997$$

Kroki

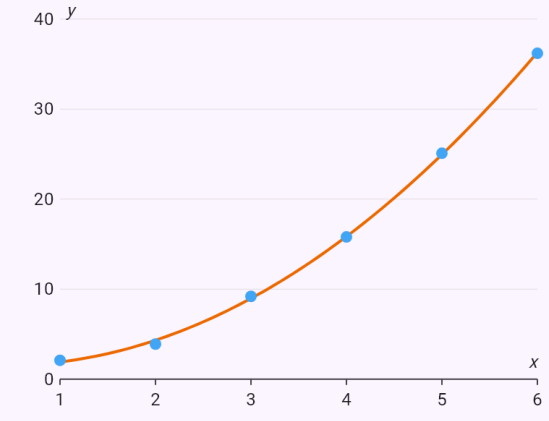
- Liczba wartości $n = 6$, dane posortowane
  $[1;\ 2{,}1],\ [2;\ 3{,}9],\ [3;\ 9{,}2],\ [4;\ 15{,}8],\ [5;\ 25{,}1],\ [6;\ 36{,}2]$
- Sumy i średnie
  $\sum x_i = 21$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum x_i^3 = 441$
  $\sum x_i^4 = 2275$
  $\sum y_i = 92{,}3$
  $\sum x_i y_i = 443{,}4$
  $\sum x_i^2 y_i = 2284$
- Równania normalne metody najmniejszych kwadratów dla ŷ = a + bx + cx²
  $$6a + 21b + 91c = 92{,}3$$
  $$21a + 91b + 441c = 443{,}4$$
  $$91a + 441b + 2275c = 2284$$
- Krzywa regresji: $\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$
- Współczynnik determinacji – krzywa wyjaśnia $99{,}97\,\%$ wariancji y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}3012}{874{,}5} \approx 0{,}9997$$

- Krzywa regresji ma sens tylko w zakresie zmierzonych x – poza nim (ekstrapolacja) oszacowanie może być bardzo niedokładne.

Wykres

Wykres rozrzutu z krzywą regresji



Regresja wykładnicza przez linearyzację.

Input: `data(x y; 0 2.0; 1 2.7; 2 3.7; 3 5.0; 4 6.8; 5 9.1)` Korelacja i regresja · Wykładnicza

Wynik

$$\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$$

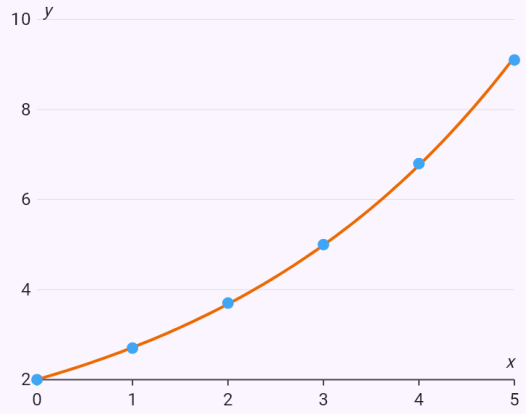
$$R^2 \approx 0{,}9998$$

Kroki

- Liczba wartości $n = 6$, dane posortowane
  $[0;\,2],\ [1;\,2{,}7],\ [2;\,3{,}7],\ [3;\,5],\ [4;\,6{,}8],\ [5;\,9{,}1]$
- Logarytmowanie zamienia model w prostą w zmiennych (u, v): $y = a\,e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$; przekształcone pary
  $[0;\,0{,}6931],\ [1;\,0{,}9933],\ [2;\,1{,}308],\ [3;\,1{,}609],\ [4;\,1{,}91$
- Współczynniki prostej regresji metodą najmniejszych kwadratów
  $$b = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum (u_i - \bar{u})^2} = \frac{5{,}324}{17{,}5} \approx 0{,}3042$$
  $$\ln a = \overline{\ln y} - b\bar{x} = 1{,}455 - 0{,}3042 \cdot 2{,}5 \approx 0{,}6943$$
- Współczynnik a z przekształcenia odwrotnego:
  $a = e^{0{,}6943} \approx 2{,}002$
- Krzywa regresji: $\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$
- Współczynnik determinacji – krzywa wyjaśnia $99{,}98\,\%$ wariancji y.
  $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}006563}{35{,}95} \approx 0{,}9998$$
- Współczynniki są dopasowane metodą najmniejszych kwadratów do przekształconych danych (logarytmów), a nie do wartości pierwotnych – wynik może się nieco różnić od regresji nieliniowej w programach statystycznych.
- Krzywa regresji ma sens tylko w zakresie zmierzonych x – poza nim (ekstrapolacja) oszacowanie może być bardzo niedokładne.

Wykres

Wykres rozrzutu z krzywą regresji



Prawostronny test t z wartości podsumowujących: n = 25, x̄ = 104, s = 15, μ_0 = 100.

Input: `model(ttest; find=test[one]; n=25[one]; mean=104[one]; sd=15[one]; mu0=100[one];`

```
alpha=0.05[one]; alternative=greater; sigma=sample)
```

Wynik

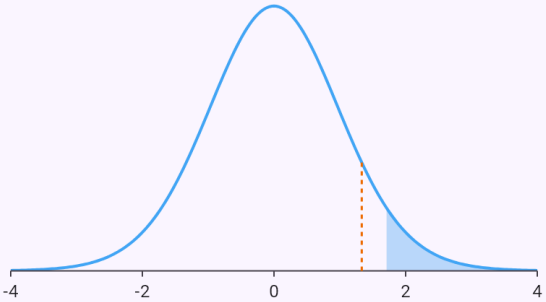
$$t \approx 1{,}333$$
$$p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Szukane t; dane:
  $n = 25, \quad \bar{x} = 104, \quad s = 15, \quad \mu_0 = 100, \quad \alpha = 0{,}05$
- Test t sprawdza, czy średnia populacji różni się od danej wartości μ₀. Statystyka testowa t = (x̄ − μ₀)/(s/√n) ma przy hipotezie zerowej rozkład t z n − 1 stopniami swobody; wartość p mówi, jak prawdopodobny byłby taki lub bardziej skrajny wynik, gdyby H_0 była prawdziwa. Przy znanym σ jest to test z. Równanie modelu: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- Hipoteza zerowa i alternatywna:
  $H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu > 100$
- Błąd standardowy: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład t z 24 stopniami swobody: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \frac{104 - 100}{3} \approx 1{,}333$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $t_{0{,}95}(24) \approx 1{,}711$, obszar krytyczny $t \geq 1{,}711$
- Wartość p: $p = P(T \geq 1{,}333) \approx 0{,}09747$
- Ponieważ $p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$, nie odrzucamy hipotezy zerowej – dane nie dostarczają wystarczających dowodów przeciw niej.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa.
- Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Dla małej próby (n < 30) rozkład t zakłada, że dane pochodzą z rozkładu w przybliżeniu normalnego. Przy danych silnie skośnych lub z wartościami odstającymi lepszy jest test nieparametryczny.

Wykres

Rozkład t – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 1{,}333$

Test t Welcha dwóch grup z wartości podsumowujących.

Input: `model(twosample; find=test[one]; n1=30[one]; mean1=52[one]; sd1=8[one]; n2=28[one];`

```
mean2=47[one]; sd2=10[one]; alpha=0.05[one]; variances=welch; alternative=two)
```

Wynik

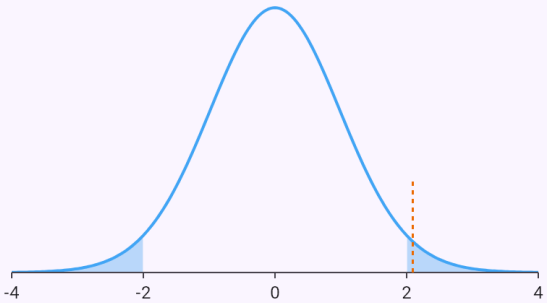
$$t \approx 2{,}093$$
$$p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$$

Kroki

- Szukane t; dane
  $n_1 = 30, \quad \bar{x}_1 = 52, \quad s_1 = 8, \quad n_2 = 28, \quad \bar{x}_2 = 47,$
- Porównanie średnich dwóch niezależnych grup. Test Welcha nie zakłada równych wariancji i jest dziś zalecanym wyborem; klasyczny test t z łączną wariancją zakłada, że obie grupy mają tę samą wariancję. Wystarczą liczebności, średnie i odchylenia standardowe grup. Równanie modelu: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- Hipoteza zerowa i alternatywna:
  $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 \colon \mu_1 \neq \mu_2$
- Błąd standardowy
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{28}} \approx 2{,}388$$
- Stopnie swobody Welcha–Satterthwaite'a
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 51{,}71$$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma rozkład t z $51{,}71$ stopniami swobody: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \dfrac{52 - 47}{2{,}388} \approx 2{,}093$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $t_{0{,}975}(51{,}71) \approx 2{,}007$, obszar krytyczny $|t| \geq 2{,}007$
- Wartość p: $p = 2\,P(T \geq 2{,}093) \approx 0{,}04124$
- Ponieważ $p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Test Welcha nie zakłada równych wariancji grup; jego stopnie swobody v nie muszą być całkowite.

Wykres

Rozkład t – obszar krytyczny zacieniowany, statystyka testowa przerywaną linią



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}093$

Rozkład normalny: P(X < 85) dla N(100; 15²).

Input: `model(normal; find=below[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; x=85[one])`

Wynik

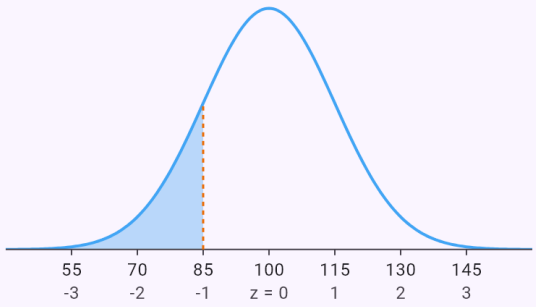
$$P(X < 85) \approx 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$$

Kroki

- Szukane P; dane: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad x = 85$
- Wiele wielkości (wzrost, wynik w teście, błąd pomiaru) zmienia się symetrycznie wokół średniej μ, tym rzadziej, im dalej od niej – rozkład normalny (Gaussa) N(μ; σ²) z odchyleniem standardowym σ. Prawdopodobieństwa obliczamy przez standaryzację, z = (x − μ)/σ, i dystrybuantę Φ standardowego rozkładu normalnego N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kwantyl to wartość, poniżej której leży dana część p. Równanie modelu
  $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
- Podstawiamy: $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$
- Podstawiamy
  $P(X < 85) = \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) \approx (1 - 0{,}8413) \approx 0$

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$P \approx 0{,}1587 \quad x = 85$

Odsetek osób o wzroście od 160 do 185 cm przy μ = 170, σ = 8.

Input: `model(normal; find=between[one]; mu=170[one]; sigma=8[one]; a=160[one]; b=185[one])`

Wynik

$$P(160 < X < 185) \approx 0{,}864 = 86{,}4\,\%$$

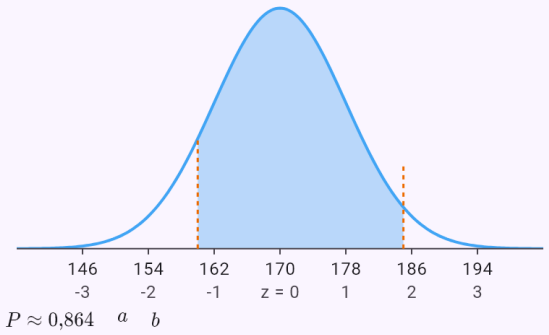
Kroki

- Szukane P; dane:
  $\mu = 170, \quad \sigma = 8, \quad a = 160, \quad b = 185$
- Wiele wielkości (wzrost, wynik w teście, błąd pomiaru) zmienia się symetrycznie wokół średniej μ, tym rzadziej, im dalej od niej – rozkład normalny (Gaussa) N(μ; σ²) z odchyleniem standardowym σ. Prawdopodobieństwa obliczamy przez standaryzację, z = (x − μ)/σ, i dystrybuantę Φ standardowego rozkładu normalnego N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kwantyl to wartość, poniżej której leży dana część p. Równanie modelu
  $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $z_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
- Podstawiamy:
  $z_a = \dfrac{160 - 170}{8} = -1{,}25, \quad z_b = \dfrac{185 - 170}{8} = 1{,}875$
- Podstawiamy

$$P(160 < X < 185) = \Phi(1{,}875) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}9696$$

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



Kwantyl: wynik, poniżej którego leży 95 % populacji.

Input: `model(normal; find=quantile[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; p=95[pct])`

Wynik

$x \approx 124{,}7$

Kroki

- Szukane x; dane: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad p = 95\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $p = 95\,\% = 0{,}95$
- Wiele wielkości (wzrost, wynik w teście, błąd pomiaru) zmienia się symetrycznie wokół średniej μ, tym rzadziej, im dalej od niej – rozkład normalny (Gaussa) N(μ; σ²) z odchyleniem standardowym σ. Prawdopodobieństwa obliczamy przez standaryzację, z = (x − μ)/σ, i dystrybuantę Φ standardowego rozkładu normalnego N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kwantyl to wartość, poniżej której leży dana część p. Równanie modelu

$$X \sim N\left(\mu;\, \sigma^2\right)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$$

- Wyznaczamy szukaną wielkość

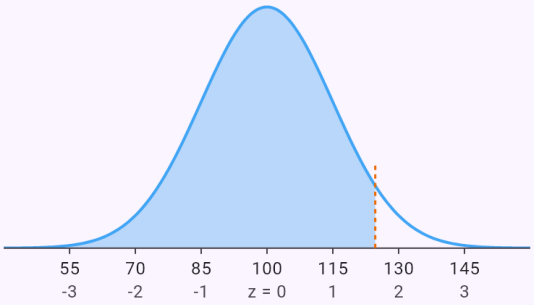
$$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow x = \mu + z_p\sigma, \quad z_p = $$

- Podstawiamy

$$z_{0{,}95} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645, \quad x = 100 + 1{,}645 \cdot 15 \approx 1$$

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$p = 0{,}95 \quad x \approx 124{,}7$

Znane ograniczenia

- Kwartyle to mediany połówek (metoda szkolna); programy statystyczne (Excel, SPSS) używają innych wzorów i przy małych danych mogą dać nieco inne wartości.
- Porównania par grup po ANOVA lub teście Kruskala–Wallisa (post hoc) i wieloczynnikowa ANOVA nie są jeszcze dostępne – pary porównaj testem t lub testem Manna–Whitneya z poprawką Bonferroniego; regresje nieliniowe są obliczane przez linearyzację.
- Dane wpisuje się tylko ręcznie, siatką lub plikiem CSV – aplikacja nie rozpoznaje jeszcze tabeli ze zdjęcia.

Wygenerowano z aplikacji Mathtrace