Mathtrace – podręcznik

VII. Zastosowania: nauki przyrodnicze, ekonomia i optymalizacja

Spis treści

VII. Zastosowania: nauki przyrodnicze, ekonomia i optymalizacja

47. Chemia
48. Elektrotechnika
49. Biologia i medycyna
50. Ekonomia, finanse i ubezpieczenia
51. Programowanie liniowe, zagadnienie transportowe, przydziału i gry macierzowe
52. Grafy, sieci i logistyka
53. Psychometria

47. Chemia

Obliczenia chemiczne są w sekcji „Zastosowania” na ekranie głównym, dziedzina Chemia: uzgadnianie równania chemicznego, pH kwasu, zasady, soli lub kwasu wieloprotonowego, bufor, miareczkowanie z jego krzywą, równanie Arrheniusa i prawo Lamberta–Beera. W formularzu wybierasz zadanie i szukaną wielkość i wypełniasz wartości z jednostkami; ikona „?” wyjaśnia, skąd bierze się wzór. Małe stałe można wpisać jako 1.8e-5 lub 1,8·10^-5, wartości zmierzone (tabela temperatur, kalibracja) jako liczby oddzielone spacjami.

Równanie chemiczne można po prostu wpisać do wpisu ręcznego, np. Fe + O2 -> Fe2O3 (strzałka -> lub =, równowaga <=>), także z jonami MnO4^- i Fe^3+, nawiasami Ca(OH)2, hydratami CuSO4·5H2O i stanami (aq). Współczynniki to jądro macierzy bilansu pierwiastków (i ładunku): kroki zapisują równania bilansu, macierz, jej postać zredukowaną eliminacją Gaussa, współczynnik swobodny jako parametr i najmniejsze liczby całkowite, potem sprawdzenie. Rozpoznaje też równanie, którego nie da się uzgodnić (pierwiastek tylko po jednej stronie, substancja po złej stronie) lub którego bilans nie jest jednoznaczny.

pH jest obliczane dokładnie (dla słabego kwasu równaniem kwadratowym), obok ze szkolnym uproszczeniem i stopniem dysocjacji; dla kwasu wieloprotonowego bilans ładunku rozwiązuje się numerycznie, a wykres pokazuje udziały form kwasu w zależności od pH. Dla buforu z dodanym mocnym kwasem lub zasadą oblicza nową równowagę i zmianę pH. Miareczkowanie dostaje pH według obszaru krzywej (początek, obszar buforowy, punkt równoważnikowy, nadmiar titranta), a wykres pokazuje całą krzywą miareczkowania. Równanie Arrheniusa z dwóch pomiarów lub z tabeli przez regresję ln k względem 1/T; prawo Lamberta–Beera ze znanego ε, wzorca lub krzywej kalibracyjnej.

Przykłady

Uzgadnianie utleniania kwasu solnego nadmanganianem.

Input: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Wynik

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

Kroki

- Nieznane współczynniki oznaczamy literami
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Atomy nie powstają ani nie znikają – każdy pierwiastek ma po lewej tyle atomów co po prawej

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad a = c \\ \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = f \\ \mathrm{H}: &\quad b = 2f \\ \mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g \end{aligned}$$

- Układ jednorodny jako macierz – kolumna dla każdej substancji, produkty ze znakiem minus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Eliminacja Gaussa sprowadza macierz do zredukowanej postaci schodkowej

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

- Jeden współczynnik zostaje wolny, $g = t$; pozostałe wyrażamy przez niego

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Wybieramy $t = 5$ tak, aby wszystkie współczynniki były najmniejszymi liczbami całkowitymi:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Sprawdzenie – atomy po lewej i po prawej

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\ \mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\ \mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16 \end{aligned}$$

Jonowe równanie redoks z bilansem ładunku.

Input: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Wynik

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5$$

Kroki

- Nieznane współczynniki oznaczamy literami
  $a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$
- Atomy nie powstają ani nie znikają, a ładunek jest zachowany (wiersz q) – dla każdego pierwiastka i dla ładunku

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$

- Układ jednorodny jako macierz – kolumna dla każdej substancji, produkty ze znakiem minus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Eliminacja Gaussa sprowadza macierz do zredukowanej postaci schodkowej

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

- Jeden współczynnik zostaje wolny, $g = t$; pozostałe wyrażamy przez niego

$$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$

- Wybieramy $t = 4$ tak, aby wszystkie współczynniki były najmniejszymi liczbami całkowitymi:
  $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$
- Sprawdzenie – atomy i ładunek po lewej i po prawej

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH 0,1 M kwasu octowego (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Input: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Wynik

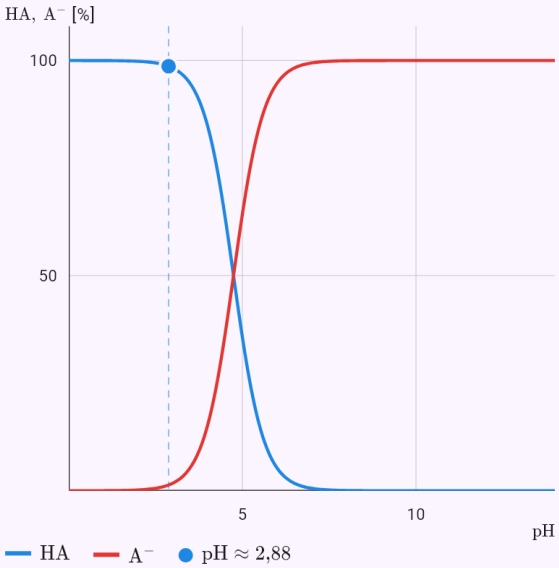
$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Kroki

- Szukane pH; dane: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- pH to ujemny logarytm dziesiętny ze stężenia jonów wodorowych (oksoniowych): pH = −log[H⁺]. Mocny kwas (HCl) dysocjuje całkowicie, więc [H⁺] = c; mocna zasada daje [OH⁻] = c i pH = 14 − pOH. Słaby kwas HA ⇌ H⁺ + A⁻ dysocjuje tylko częściowo, zgodnie ze stałą dysocjacji Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; prowadzi to do równania kwadratowego x² + Ka·x − Ka·c = 0. Sól słabego kwasu i mocnej zasady (octan sodu) reaguje z wodą jak zasada z Kb = Kw/Ka, sól słabej zasady (NH_4Cl) jak kwas. Dla kwasu wieloprotonowego (H_2SO_4, H_3PO_4) bilans ładunku rozwiązujemy numerycznie. W 25 °C Kw = 10⁻¹⁴.
  Równanie modelu
  $$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość
  $$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$
- Podstawiamy
  $$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{(1{,}8 \cdot 10^{-5})^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$
- Stopień dysocjacji: $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Stopień dysocjacji jest poniżej 5 %, więc uproszczenie c − x ≈ c dałoby to samo:
  $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- pH to ujemny logarytm stężenia H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

pH 0,1 M kwasu fosforowego i udziały jego form.

Input: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

13[one]; kind=polyprotic; constant=K)

Wynik

$$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

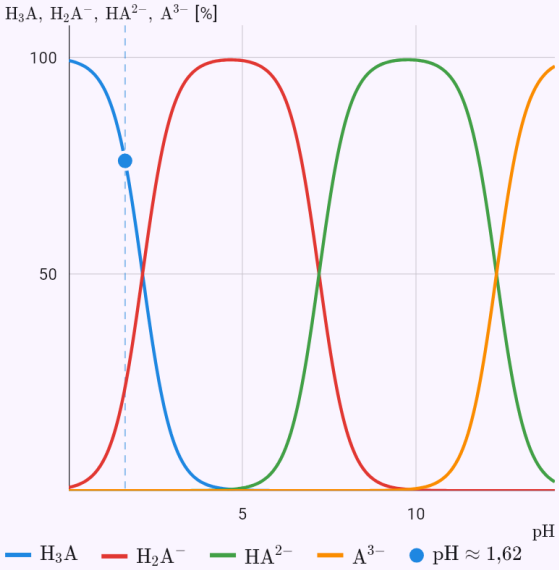
Kroki

- Szukane pH; dane
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- pH to ujemny logarytm dziesiętny ze stężenia jonów wodorowych (oksoniowych): pH = −log[H⁺]. Mocny kwas (HCl) dysocjuje całkowicie, więc [H⁺] = c; mocna zasada daje [OH⁻] = c i pH = 14 − pOH. Słaby kwas HA ⇌ H⁺ + A⁻ dysocjuje tylko częściowo, zgodnie ze stałą dysocjacji Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; prowadzi to do równania kwadratowego x² + Ka·x − Ka·c = 0. Sól słabego kwasu i mocnej zasady (octan sodu) reaguje z wodą jak zasada z Kb = Kw/Ka, sól słabej zasady (NH_4Cl) jak kwas. Dla kwasu wieloprotonowego (H_2SO_4, H_3PO_4) bilans ładunku rozwiązujemy numerycznie. W 25 °C Kw = 10^{-14}.
  Równanie modelu
  $$\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+ + H_2A^-} \rightleftharpoons \mathrm{2\,H^+ + HA^{2-}} \rightleftharpoons \mathrm{3\,H^+ + A^{3-}}$$
- Roztwór jest elektrycznie obojętny – bilans ładunku
  $$[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$$
- Stężenia form kwasu ze stałych dysocjacji
  $$[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1}\cdots K_{ai}\,h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$$
- Rozwiązujemy równanie numerycznie (bisekcją):
  $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › Metoda: bisekcja, 14 iteracji
- pH to ujemny logarytm stężenia H⁺:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- Druga stała jest znacznie mniejsza od pierwszej, więc pH wyznacza głównie pierwszy stopień – jak dla słabego kwasu jednoprotonowego

$$x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

- Udziały form kwasu przy tym pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Bufor octanowy po dodaniu 1 mmol mocnego kwasu.

Input: model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Wynik

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Kroki

- Szukane pH; dane
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Przeliczamy jednostki
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Stała z pK: $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Bufor to mieszanina słabego kwasu i jego soli (CH_3COOH + CH_3COONa) lub słabej zasady i jej soli (NH_3 + NH_4Cl). Stała dysocjacji daje równanie Hendersona–Hasselbalcha pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Dodany mocny kwas zamienia składnik zasadowy w kwasowy (A^- + H^+ → HA), zasada odwrotnie – stosunek składników zmienia się tylko trochę, więc pH prawie się nie zmienia. Bufor działa najlepiej przy stosunku od 0,1 do 10, czyli pH = pKa ± 1. Równanie modelu
  $$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Liczności składników buforu
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- Dodana substancja reaguje z jednym składnikiem buforu
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \to \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,\mathrm{m}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\frac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Podstawiamy: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log\frac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH przed dodaniem i jego zmiana:
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Miareczkowanie kwasu octowego wodorotlenkiem sodu – punkt równoważnikowy.

Input: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)

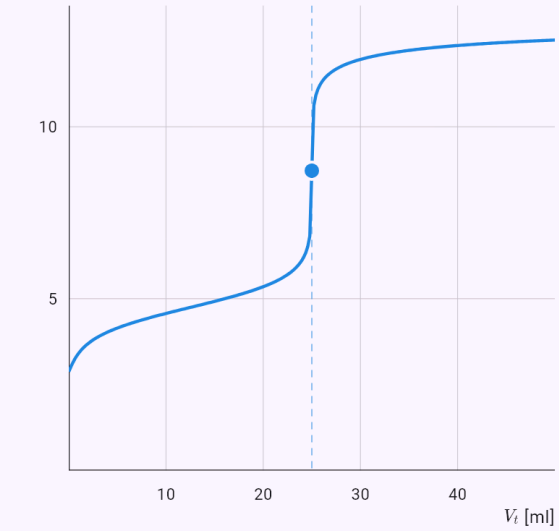
Wynik

$$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$$

Kroki

- Szukane pH; dane
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- Przy miareczkowaniu dodaje się z biurety titrant o znanym stężeniu, aż przereaguje cały analit. Punkt równoważnikowy następuje, gdy liczność titranta $c_t \cdot V_t$ jest równa liczności analitu: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Przed nim pH wyznacza nieprzereagowany analit (słaby kwas tworzy bufor), w nim powstała sól reagująca z wodą, po nim nadmiar titranta. Krzywa miareczkowania na wykresie jest obliczona dokładnie z bilansu ładunku. Równanie modelu: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Punkt równoważnikowy – tyle titranta co analitu
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Dodany titrant i objętość całkowita:
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Punkt równoważnikowy – przereagował cały analit.
- W punkcie równoważnikowym zostaje tylko powstała sól – jej reakcja z wodą
  $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH i pH (pH + pOH = 14)
  $\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Energia aktywacji z tabeli stałych szybkości.

Input: model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042

`0.0079[per_s]; input=table)`

Wynik

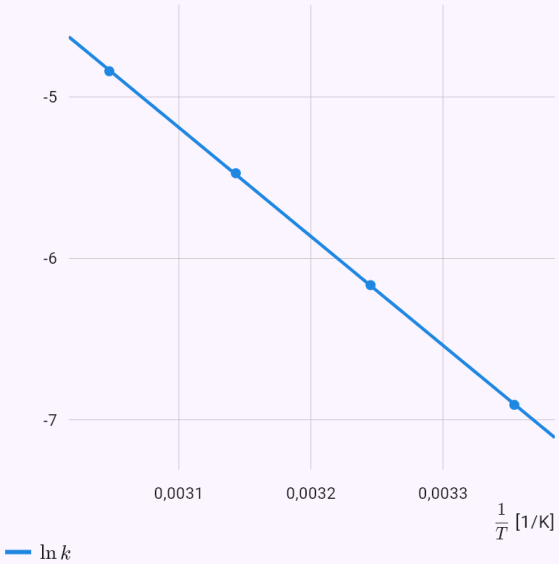
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Kroki

- Szukane E_a; dane
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Przeliczamy jednostki:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- Stała szybkości reakcji rośnie z temperaturą zgodnie z równaniem Arrheniusa k = A·e^(−Ea/RT), gdzie Ea to energia aktywacji – bariera energetyczna, którą muszą pokonać zderzające się cząsteczki – a A czynnik przedwykładniczy. Dwa pomiary dają $\ln(k_2/k_1) = (Ea/R)(1/T_1 - 1/T_2)$. Z większej liczby pomiarów Ea wynika z prostej regresji: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) to prosta względem 1/T (wykres Arrheniusa) o nachyleniu −Ea/R. Równanie modelu:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Logarytmowanie daje prostą
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Wartości do prostej regresji
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Prosta regresji metodą najmniejszych kwadratów
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $E_a = -bR$
- Podstawiamy:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Czynnik przedwykładniczy: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Stężenie próbki z krzywej kalibracyjnej.

Input: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299 0.452`

`0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

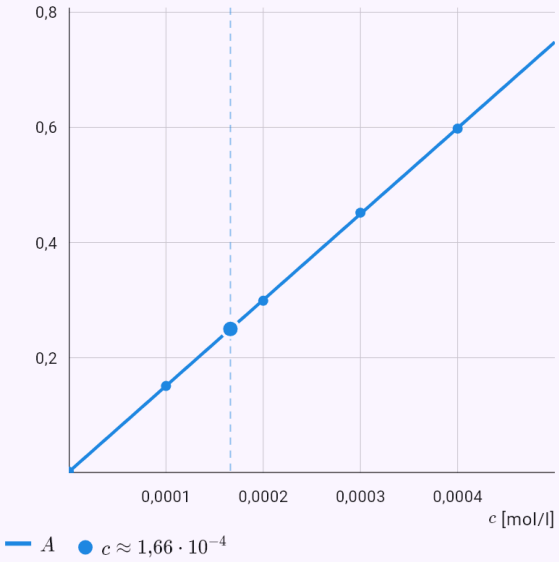
Wynik

$$c \approx 0{,}166\ \mathrm{mmol/l}$$

Kroki

- Szukane c; dane
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\ \mathrm{mmol/l},\quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Przeliczamy jednostki
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot 10^{-4};\ 3\cdot 10^{-4};\ 4\cdot 10^{-4}\right)\ \mathrm{mol/l}$
- Roztwór pochłania światło proporcjonalnie do stężenia substancji pochłaniającej i grubości warstwy: absorbancja A = ε·l·c (prawo Lamberta–Beera), gdzie ε to molowy współczynnik absorpcji, a l długość kuwety. Spektrofotometr mierzy transmitancję T – część przepuszczonego światła – i A = −log T. Nieznane stężenie wynika ze znanego ε, z porównania ze wzorcem o znanym stężeniu albo z prostej kalibracyjnej zmierzonej na kilku wzorcach (metoda najmniejszych kwadratów). Prawo obowiązuje dla roztworów rozcieńczonych. Równanie modelu: $A = \varepsilon\, l\, c$
- Prosta kalibracyjna metodą najmniejszych kwadratów
  $A = a + b\,c:\quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\mathrm{l/m}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $c = \dfrac{A - a}{b}$
- Podstawiamy: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot 10^{-4}\ \mathrm{mol/l}$
- Przeliczamy jednostki:
  $c \approx 1{,}662\cdot 10^{-4}\ \mathrm{mol/l} = 0{,}1662\ \mathrm{mmol/l}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Nawęglanie stali – czas dla 0,8 % węgla na głębokości 0,5 mm.

Input: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct]; cx=0.8[pct];`

x=0.5[mm]; process=carburizing)

Wynik

$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

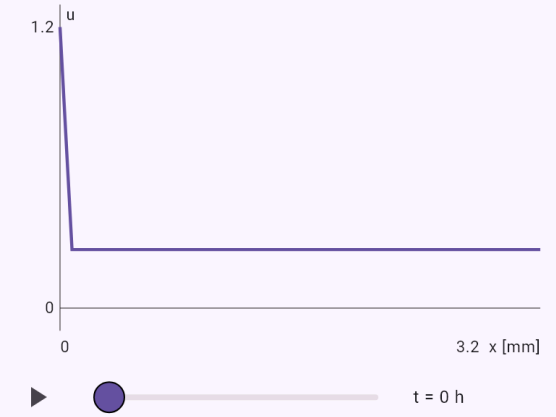
Kroki

- Szukane t; dane
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- Przeliczamy jednostki
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Substancja dyfunduje od powierzchni utrzymywanej w stężeniu c_s do ciała o stężeniu początkowym c_0 – np. węgiel do stali przy nawęglaniu. Obowiązuje równanie dyfuzji c_t = D·c_xx; dla ciała nieskończenie grubego w porównaniu z głębokością wnikania rozwiązuje się je transformatą Laplace'a w czasie: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) z uzupełniającą funkcją błędu. Z niego wynika stężenie na głębokości, głębokość wymaganego stężenia albo potrzebny czas. Równanie modelu
  $$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$$
- Rozwiązanie transformatą Laplace'a (ciało półnieskończone): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Odwrotna uzupełniająca funkcja błędu
  $$\operatorname{erfc} z = \frac{c - c_0}{c_s - c_0} = \frac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $t = \dfrac{x^2}{4Dz^2}$
- Podstawiamy
  $$t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$$

- Typowa głębokość wnikania to √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dwa razy większa głębokość wymaga czterokrotnego czasu.
- Przeliczamy jednostki: $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0 h

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Stężenie węgla na głębokości 0,5 mm po 7 godzinach.

Input: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct]; x=0.5[mm];`

```
t=7[h]; process=carburizing)
```

Wynik

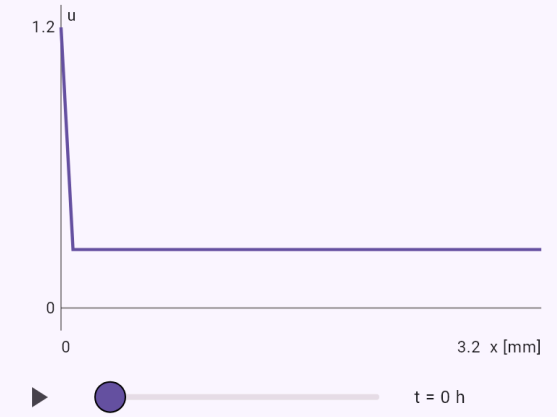
$c \approx 0{,}7988\,\%$

Kroki

- Szukane c; dane
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Przeliczamy jednostki
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Substancja dyfunduje od powierzchni utrzymywanej w stężeniu c_s do ciała o stężeniu początkowym c_0 – np. węgiel do stali przy nawęglaniu. Obowiązuje równanie dyfuzji c_t = D·c_xx; dla ciała nieskończenie grubego w porównaniu z głębokością wnikania rozwiązuje się je transformatą Laplace'a w czasie: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) z uzupełniającą funkcją błędu. Z niego wynika stężenie na głębokości, głębokość wymaganego stężenia albo potrzebny czas. Równanie modelu
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Rozwiązanie transformatą Laplace'a (ciało półnieskończone): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argument funkcji błędu
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \mathrm{erfc}$
- Podstawiamy:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$
- Typowa głębokość wnikania to √(Dt):
  $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Dwa razy większa głębokość wymaga czterokrotnego czasu.
- Przeliczamy jednostki: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0 h

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Znane ograniczenia

- pH i miareczkowania zakładają 25 °C (Kw = 10^{-14}) i roztwory rozcieńczone – współczynniki aktywności nie są obliczane.
- Miareczkowania tylko jednoprotonowego kwasu lub zasady mocnym titrantem; kwasy wieloprotonowe na razie tylko jako pH roztworu.
- Równanie chemiczne nie jest jeszcze rozpoznawane ze zdjęcia – wpisz je do wpisu ręcznego lub formularza.

48. Elektrotechnika

Obliczenia elektryczne są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Elektrotechnika: szeregowy i równoległy obwód RLC z prądem przemiennym, filtry RC i RL, obwód rezonansowy, dzielnik napięcia, mostek Wheatstone’a i kompensacja mocy biernej. W formularzu wybierasz połączenie i szukaną wielkość i wypełniasz wartości z jednostkami; ikona „?” wyjaśnia, skąd biorą się wzory. Napięcia i prądy to wartości skuteczne, liczby zespolone zapisuje się z j jak w elektrotechnice.

Dla każdego obwodu aplikacja rysuje jego schemat z wartościami elementów, a dla prądu przemiennego charakterystykę częstotliwościową na osi logarytmicznej – impedancję i fazę, dla filtrów wzmocnienie w decybelach (wykres Bodego). Kroki pokazują reaktancje, impedancję w postaci algebraicznej i biegunowej (50∠53.13° Ω), przesunięcie fazowe, prądy, napięcia na elementach i moc; wyjaśniają też, dlaczego napięcia na elementach sumują się jako wskazy.

Obwód szeregowo-równoległy można wpisać jako wyrażenie, np. R1 + (L1 || (R2 + C1)) z wartościami R1=100 L1=10m C1=1u (przedrostki m, u, n, k, M). Kroki upraszczają obwód grupa po grupie, potem wyznaczają napięcie i prąd każdego elementu. Dowolny obwód (także z mostkami i kilkoma źródłami) wpisuje się jako netlistę jak w SPICE – jeden element w wierszu z jego węzłami, węzeł 0 to masa; kroki układają prądowe prawo Kirchhoffa w węzłach, macierz układu i rozwiązują ją eliminacją Gaussa. Bez częstotliwości to prąd stały.

Przykłady

Szeregowy obwód RLC: moc czynna i bierna, współczynnik mocy.

Input: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF]; f=50[Hz];`

parts=rlc)

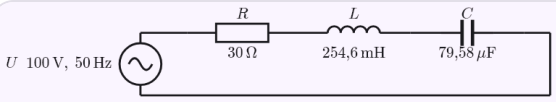
Wynik

$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
$Q \approx 160\,\mathrm{var}$
$S \approx 200\,\mathrm{VA}$
$\cos\varphi \approx 0{,}6$

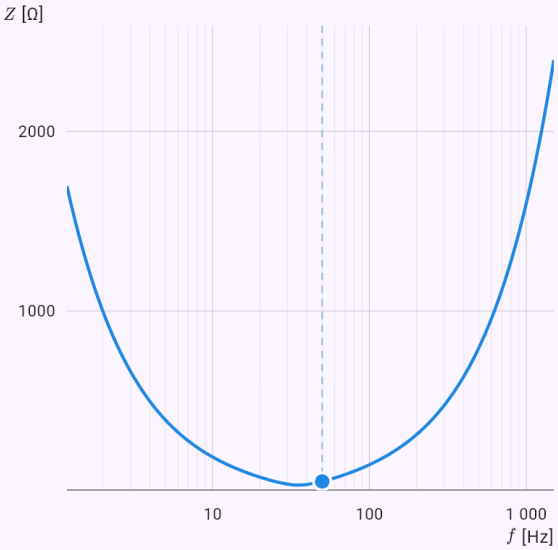
Kroki

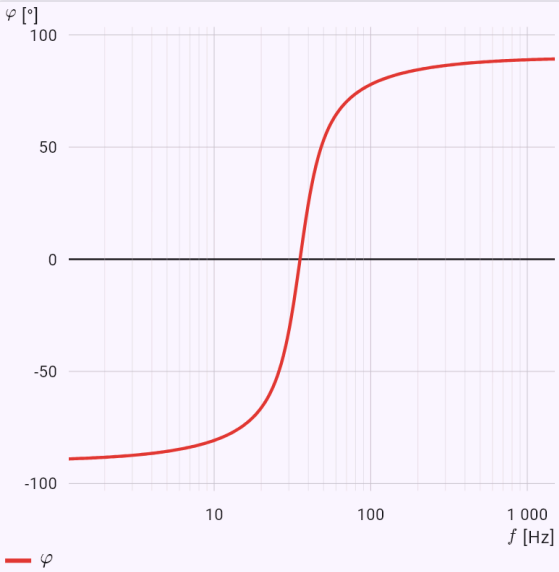
- Szukane P; dane
  $U = 100\,\mathrm{V}, \quad R = 30\,\Omega, \quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH}, \quad C = 79{,}5$
- Przeliczamy jednostki
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H}, \quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- W obwodzie prądu przemiennego cewka i kondensator stawiają prądowi opór zależny od częstotliwości – reaktancję: indukcyjna X_L = ωL rośnie z częstotliwością, pojemnościowa X_C = 1/(ωC) maleje (ω = 2πf). Napięcie na cewce wyprzedza prąd o 90°, na kondensatorze opóźnia się o 90°, więc nie dodają się arytmetycznie, ale jako wskazy – liczby zespolone z jednostką urojoną j: impedancja Z = R + j(X_L − X_C), jej moduł Z = √(R² + (X_L − X_C)²) i przesunięcie fazowe φ = arctg((X_L − X_C)/R). Prąd I = U/Z, moc czynna P = UI·cos φ. Napięcia i prądy to wartości skuteczne. Równanie modelu: $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Pulsacja: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Reaktancja indukcyjna cewki:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- Reaktancja pojemnościowa kondensatora
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Moduł impedancji – reaktancja i rezystancja to prostopadłe wskazy
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- Impedancja jako liczba zespolona (postać algebraiczna i wykładnicza)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Przesunięcie fazowe prądu względem napięcia:
  $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Obwód ma charakter indukcyjny – prąd opóźnia się względem napięcia.
- Częstotliwość rezonansowa: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- Prąd z prawa Ohma: $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Moc czynna, bierna i pozorna
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Współczynnik mocy: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Schemat obwodu



Charakterystyka częstotliwościowa





Oś pozioma jest logarytmiczna – każda działka to dziesięciokrotność częstotliwości. Kropki to dana częstotliwość i ważne punkty.

Równoległy obwód RLC: prądy gałęzi i prąd całkowity.

Input: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

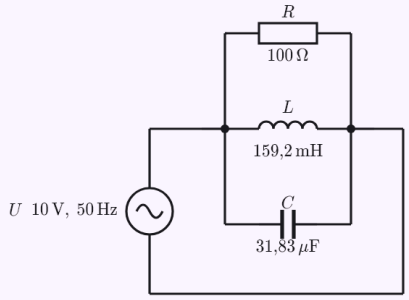
Wynik

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

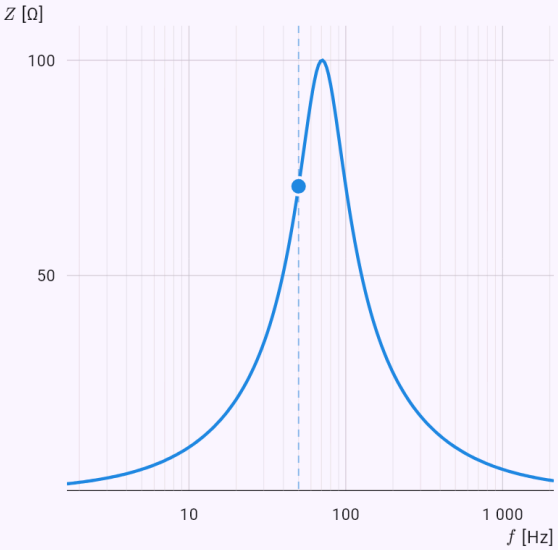
Kroki

- Szukane I; dane
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Przeliczamy jednostki
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- W obwodzie równoległym wszystkie gałęzie mają to samo napięcie, a prądy gałęzi dodają się jako wskazy. Zamiast impedancji dodają się więc ich odwrotności – admitancje: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). Prąd rezystora jest w fazie z napięciem, cewki opóźnia się o 90°, kondensatora wyprzedza o 90°. Prąd całkowity I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) może być mniejszy niż prądy gałęzi – w rezonansie prądy cewki i kondensatora się znoszą.
  Równanie modelu
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Pulsacja: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Reaktancja indukcyjna cewki:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Reaktancja pojemnościowa kondensatora
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admitancja – odwrotności impedancji gałęzi dodają się jako wskazy
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impedancja obwodu: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- Impedancja jako liczba zespolona (postać algebraiczna i wykładnicza)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Przesunięcie fazowe prądu względem napięcia
  $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Obwód ma charakter indukcyjny – prąd opóźnia się względem napięcia.
- Częstotliwość rezonansowa: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Prądy gałęzi – wszystkie gałęzie mają to samo napięcie
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- Prąd całkowity – suma wskazów prądów gałęzi:
  $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$
- Prądy gałęzi dodają się jako wskazy, nie arytmetycznie – prądy cewki i kondensatora są w przeciwfazie.

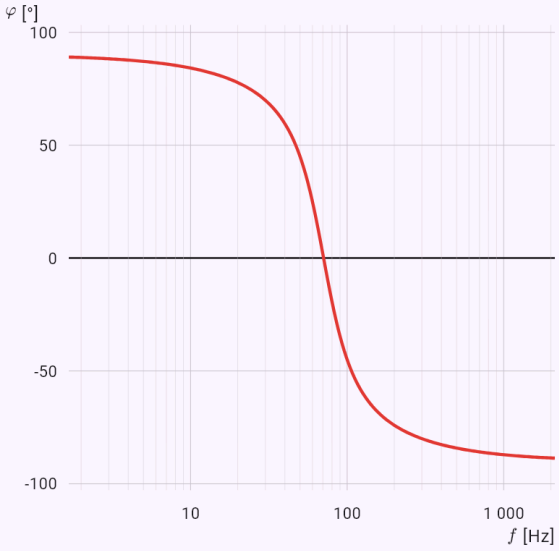
Schemat obwodu



Charakterystyka częstotliwościowa



Z Z ≈ 70,7 Ω



φ

Oś pozioma jest logarytmiczna – każda działka to dziesięciokrotność częstotliwości. Kropki to dana częstotliwość i ważne punkty.

Dolnoprzepustowy filtr RC: wzmocnienie w decybelach i wykres Bodego.

Input: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

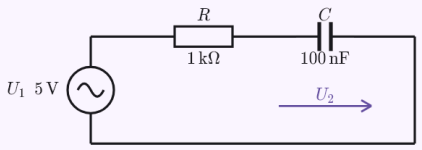
Wynik

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

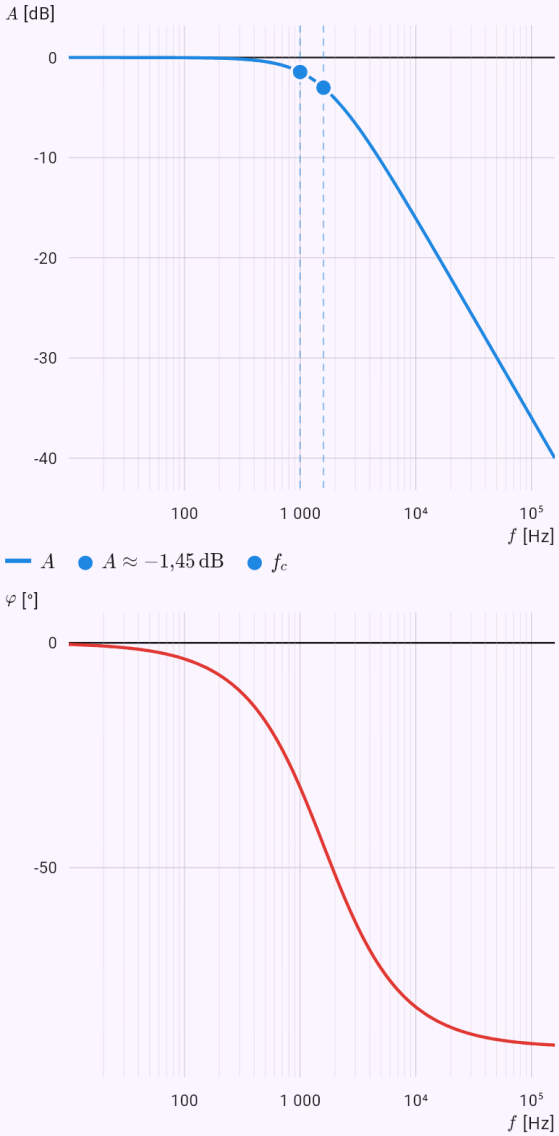
Kroki

- Dane
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad f = 1\,\mathrm{kHz}, \quad U_1 = 5\,\mathrm{V}$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad f = 1$
- Filtr pierwszego rzędu to dzielnik napięcia z rezystora i kondensatora (lub cewki). Dolnoprzepustowy (RC z wyjściem na kondensatorze) przepuszcza niskie częstotliwości i tłumi wysokie, górnoprzepustowy odwrotnie. Częstotliwość graniczna f_c = 1/(2πRC), dla RL f_c = R/(2πL): tam napięcie wyjściowe spada do 1/√2 ≈ 70,7 % (o 3 dB), a przesunięcie fazowe wynosi 45°. Transmitancja H = U_2/U_1 jest liczbą zespoloną; jej moduł w decybelach A = 20·log|H| i faza tworzą charakterystykę Bodego – powyżej częstotliwości granicznej filtr dolnoprzepustowy opada o 20 dB na dekadę. Równanie modelu
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Filtr dolnoprzepustowy: niskie częstotliwości przechodzą, wysokie są tłumione.
- Częstotliwość graniczna:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$
- Na częstotliwości granicznej wzmocnienie wynosi 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB), a przesunięcie fazowe 45°.
- Częstotliwość względem granicznej:
  $$\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$$
- Moduł wzmocnienia:
  $$|\hat{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$$
- Wzmocnienie w decybelach:
  $$A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
- Przesunięcie fazowe wyjścia względem wejścia:
  $$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Napięcie wyjściowe:
  $$U_2 = |\hat{H}|\, U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

Schemat obwodu



Charakterystyka częstotliwościowa



Oś pozioma jest logarytmiczna – każda działka to dziesięciokrotność częstotliwości. Kropki to dana częstotliwość i ważne punkty.

Szeregowy obwód rezonansowy: dobroć i pasmo.

Input: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

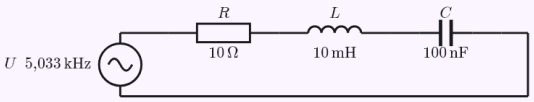
Wynik

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\text{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\text{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\text{Hz}$$

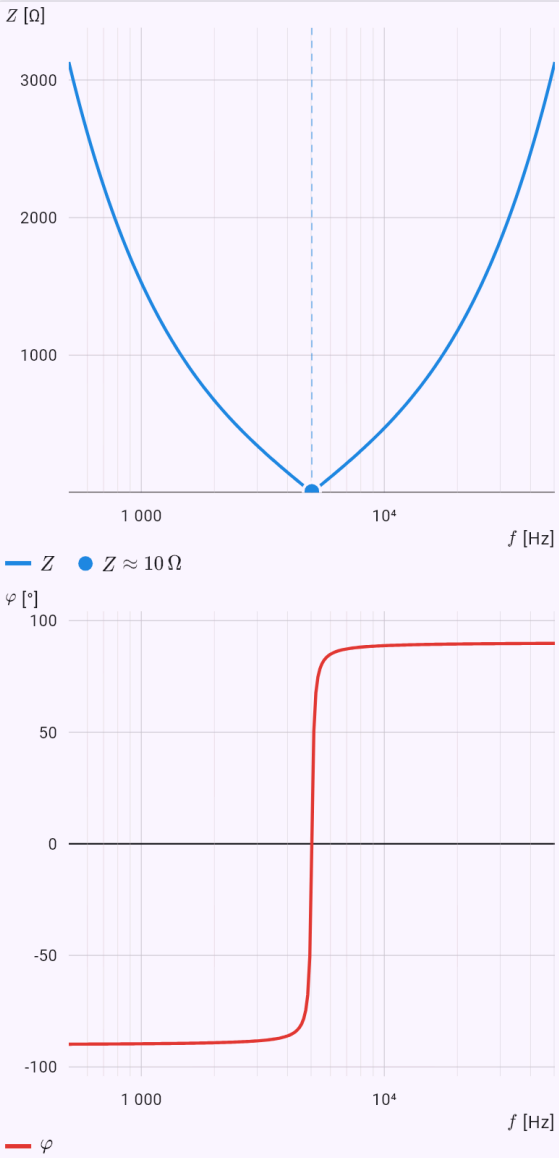
Kroki

- Dane: $L = 10\,\text{mH}, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Przeliczamy jednostki:
  $L = 10\,\text{mH} = 0{,}01\,\text{H}, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}$
- Przy częstotliwości rezonansowej $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ reaktancje cewki i kondensatora są równe i się znoszą. Obwód szeregowy ma wtedy najmniejszą impedancję (samo R) i największy prąd, równoległy największą impedancję. Ostrość rezonansu to dobroć Q – dla obwodu szeregowego $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ – i szerokość pasma $B = f_0/Q$ między częstotliwościami, przy których prąd spada do $1/\sqrt{2}$ maksimum. Strojenie: pojemność dla danej częstotliwości $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Równanie modelu: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- Podstawiamy: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\text{Hz}$
- W rezonansie reaktancje cewki i kondensatora się znoszą – obwód szeregowy ma najmniejszą impedancję i największy prąd.
- Dobroć
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Szerokość pasma: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\text{Hz}$
- Granice pasma (spadek do $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\text{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Schemat obwodu



Charakterystyka częstotliwościowa



Oś pozioma jest logarytmiczna – każda działka to dziesięciokrotność częstotliwości. Kropki to dana częstotliwość i ważne punkty.

Obciążony dzielnik napięcia.

Input: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

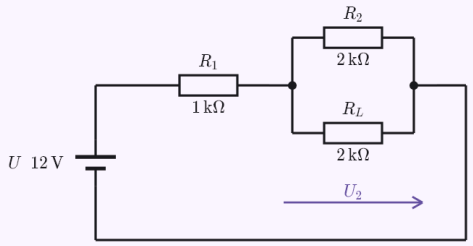
Wynik

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

Kroki

- Szukane U_2; dane
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Przeliczamy jednostki
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Dwa rezystory połączone szeregowo dzielą napięcie w stosunku swoich rezystancji: przez oba płynie ten sam prąd I = U/(R₁ + R₂), więc U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Obciążenie R_L jest równoległe do R₂ i obniża rezystancję dolnej części do R₂R_L/(R₂ + R_L) – napięcie wyjściowe obciążonego dzielnika jest niższe niż bez obciążenia. Równanie modelu:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- Obciążenie jest równoległe do R₂
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Podstawiamy: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- Bez obciążenia byłoby $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – obciążenie obniża napięcie wyjściowe.

Schemat obwodu



Równoważenie mostka Wheatstone’a.

Input: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

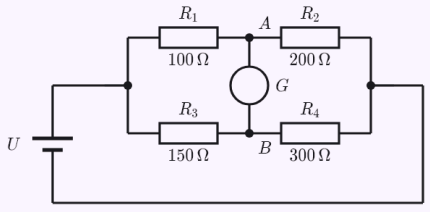
Wynik

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

Kroki

- Szukane R_4; dane:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Mostek Wheatstone’a to dwa dzielniki napięcia połączone równolegle z miernikiem między ich środkami (A i B). Mostek jest zrównoważony – przez miernik nie płynie prąd – gdy oba dzielniki dzielą napięcie w tym samym stosunku: R₁/R₂ = R₃/R₄. Tak dokładnie mierzy się nieznaną rezystancję. Niezrównoważony mostek daje napięcie U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – tak działają np. tensometry. Równanie modelu: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Mostek jest zrównoważony – A i B mają to samo napięcie i przez miernik nie płynie prąd.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Podstawiamy: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Schemat obwodu



Kondensator do poprawy współczynnika mocy z 0,7 do 0,95.

Input: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

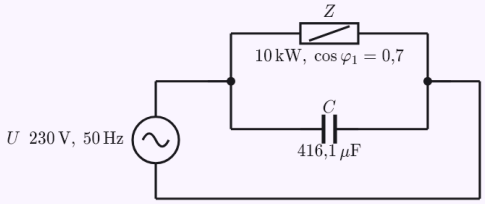
Wynik

$$C \approx 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$$

Kroki

- Szukane C; dane
  $P = 10\,\mathrm{kW}, \quad U = 230\,\mathrm{V}, \quad f = 50\,\mathrm{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Przeliczamy jednostki: $P = 10\,\mathrm{kW} = 10\,000\,\mathrm{W}$
- Odbiorniki z cewkami (silniki, transformatory) pobierają oprócz mocy czynnej P także moc bierną Q = P·tg φ, która niepotrzebnie obciąża linię większym prądem. Kondensator połączony równolegle dostarcza moc bierną przeciwnego znaku Q_C = Q₁ − Q₂ i podnosi współczynnik mocy z cos φ₁ do cos φ₂. Potrzebna pojemność C = Q_C/(ωU²), gdzie ω = 2πf. Moc czynna się nie zmienia, prąd z sieci maleje. Równanie modelu
  $$Q_C = P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2), \quad C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$
- Przesunięcia fazowe przed kompensacją i po niej
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Moce bierne – kondensator dostarcza różnicę
  $Q_1 = P\operatorname{tg}\varphi_1 \approx 10\,200\,\mathrm{var}$
  $Q_2 = P\operatorname{tg}\varphi_2 \approx 3287\,\mathrm{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\mathrm{var}$
- Pulsacja: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Podstawiamy: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$
- Prąd z sieci przed kompensacją i po niej
  $$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\mathrm{A}$$
- Przeliczamy jednostki: $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} = 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$

Schemat obwodu



Obwód jako wyrażenie – uproszczony, prąd każdego elementu.

Input: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Wynik

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\,\mathrm{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}$$

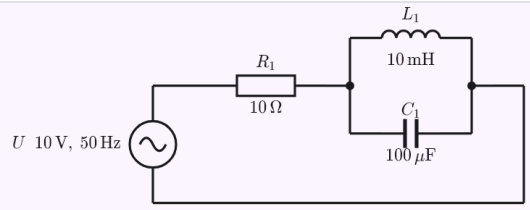
Kroki

- Połączenie (+ szeregowo, ‖ równolegle): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; dane wartości
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\mathrm{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}, \quad U = 10\,\mathrm{V}$
- Pulsacja: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Impedancje cewek i kondensatorów jako liczby zespolone (j to jednostka urojona)
  $\hat{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \mathrm{j}\,3{,}142\,\Omega$
  $\hat{Z}_{C_1} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\mathrm{j}\,31{,}83\,\Omega$
- Grupa równoległa – dodają się odwrotności impedancji
  $\hat{Z}_a = \dfrac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega$
- Grupa szeregowa – impedancje się dodają:
  $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Impedancja całkowita obwodu:
  $\hat{Z} = 10 + \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$
- Prąd źródła z prawa Ohma (napięcie źródła ma fazę 0°)
  $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \dfrac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$
- Przez wszystkie elementy grupy $\hat{Z}$ płynie ten sam prąd – ich napięcia
  $\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{V}$
  $\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\,\mathrm{V}$
- Wszystkie gałęzie grupy $\hat{Z}_a$ mają to samo napięcie – prądy gałęzi
  $\hat{I}_{L_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$
  $\hat{I}_{C_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\,\mathrm{A}$
- Elementy – impedancja, napięcie i prąd (moduł ∠ faza)

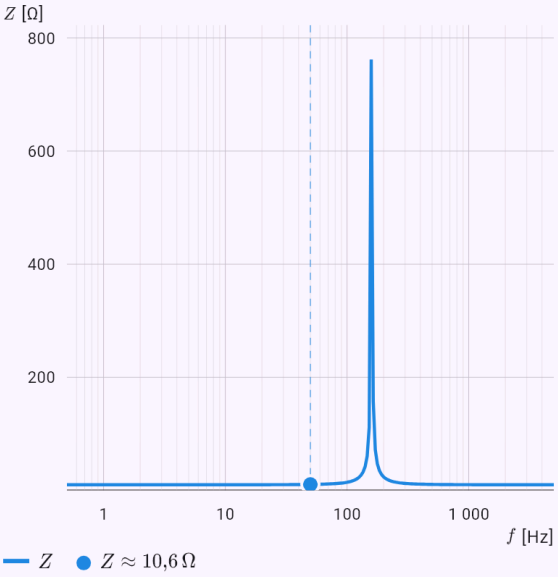
	$\hat{Z}\,[\Omega]$	$\hat{U}\,[\mathrm{V}]$	$\hat{I}\,[\mathrm{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\mathrm{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\mathrm{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

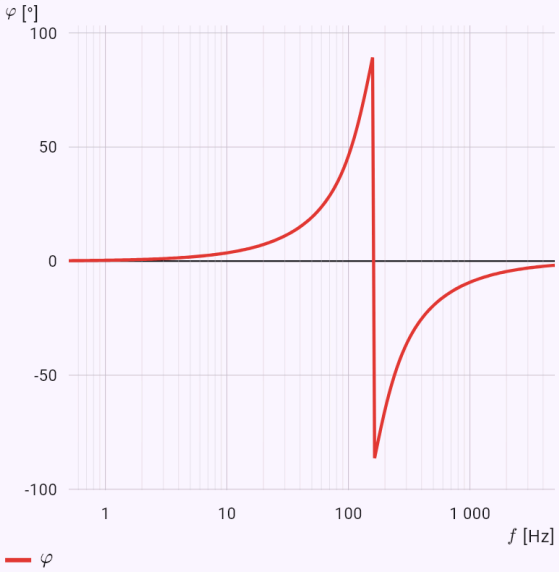
- Moc dostarczana przez źródło
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \mathrm{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

Schemat obwodu



Charakterystyka częstotliwościowa





Oś pozioma jest logarytmiczna – każda działka to dziesięciokrotność częstotliwości. Kropki to dana częstotliwość i ważne punkty.

Niezrównoważony mostek jako netlista – metoda potencjałów węzłowych.

Input: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Wynik

$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

Kroki

- Elementy, węzły, które łączą, i ich wartości

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Niewiadomymi są napięcia węzłów względem masy i prądy źródeł napięciowych: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- Prądowe prawo Kirchhoffa – prądy wypływające z każdego węzła sumują się do zera

$$1:\ I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2:\ \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3:\ \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Źródła napięciowe wyznaczają napięcie między swoimi węzłami: $U_1 = 12$
- Układ równań liniowych jako macierz dla niewiadomych $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- Eliminacja Gaussa daje napięcia węzłów

$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

- Napięcie i prąd każdego elementu (od węzła + do węzła −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Znane ograniczenia

- Obwody są liniowe i w stanie ustalonym – stany przejściowe RC, RL i RLC są w zastosowaniach fizyki; diod, tranzystorów i wzmacniaczy operacyjnych jeszcze nie ma.
- Schemat jest rysowany dla formularzy i dla obwodu jako wyrażenia; netlista dostaje tabelę elementów i węzłów. Obwód nie jest rozpoznawany ze zdjęcia jego schematu.
- Netlista jest rozwiązywana albo przy prądzie stałym, albo przy jednej częstotliwości – źródeł o różnych częstotliwościach i superpozycji jeszcze nie ma.

49. Biologia i medycyna

Obliczenia z biologii, laboratorium i medycyny są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedziny Biologia i Medycyna: kinetyka enzymatyczna według Michaelisa i Menten (także z inhibitorem), równowaga Hardy’ego–Weinberga, rozcieńczenia i liczenie kolonii, potencjał błonowy według Nernsta i Goldmana oraz dawkowanie leków. Formularz wypełnia się jak przy innych zastosowaniach; ikona „?” wyjaśnia, skąd biorą się wzory.

Ze zmierzonych szybkości reakcji enzymatycznej wyznacza K_m i V_max dwa razy: po szkolnemu z prostej Lineweavera–Burka i dokładniej regresją nieliniową; wykres pokazuje punkty i obie krzywe. Dla równowagi Hardy’ego–Weinberga oblicza częstości alleli, oczekiwane liczebności i test χ^2 z liczebności genotypów, dla choroby recesywnej odsetek nosicieli z jej częstości.

Rozcieńczenia: objętość roztworu podstawowego z $c_1V_1 = c_2V_2$, rozcieńczenie seryjne i CFU/ml z liczby kolonii. Dawkowanie: dawka według masy ciała lub powierzchni ciała (Mosteller, Du Bois), szybkość wlewu w ml/h i kroplach na minutę oraz klirens kreatyniny według Cockcrofta i Gaulta. Obliczenia dawek są tylko orientacyjne i nie zastępują oceny lekarza.

Przykłady

K_m i V_max ze zmierzonych szybkości – Lineweaver–Burk i regresja nieliniowa.

Input: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

81[umol_l_min]; input=table)

Wynik

$$V_{max} \approx 99{,}85\ \mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\ \text{mmol/l}$$

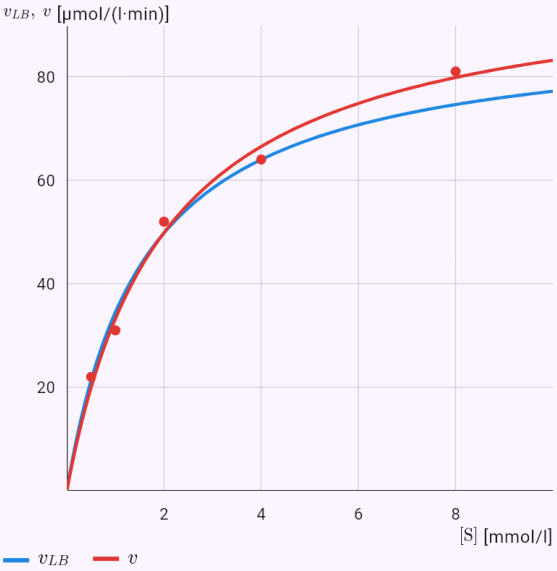
Kroki

- Dane
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\ \text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Enzym E wiąże swój substrat S i przekształca go w produkt. Szybkość v rośnie ze stężeniem substratu, ale się nasyca – najwyżej osiąga szybkość maksymalną V_max, gdy zajęte są wszystkie cząsteczki enzymu. Stała Michaelisa K_m to stężenie substratu przy połowie tej szybkości: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Ze zmierzonych szybkości stałe wyznacza się z prostej Lineweavera–Burka (1/v względem 1/[S], wyraz wolny 1/V_max, nachylenie K_m/V_max) albo dokładniej regresją nieliniową. Inhibitor: kompetycyjny podnosi pozorne K_m, niekompetycyjny obniża V_max, akompetycyjny obniża oba – zawsze o czynnik α = 1 + [I]/K_i. Równanie modelu: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Odwrotności do wykresu Lineweavera–Burka
  $\dfrac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \dfrac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Prosta regresji 1/v względem 1/[S]
  $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_{max}} + \dfrac{K_m}{V_{max}} \cdot \dfrac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Stałe z prostej (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \dfrac{1}{a} \approx 89{,}49\ \mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \dfrac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Regresja nieliniowa – metoda najmniejszych kwadratów na samej krzywej

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i} \right)^2 : \quad V_{max} \approx 99{,}85\ \mu\text{mol}/(\text{l}$$

- Wykres Lineweavera–Burka powiększa błędy przy małych stężeniach (duże 1/v) – wynikiem jest więc regresja nieliniowa; prosta to metoda szkolna i oszacowanie początkowe.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Szybkość reakcji z inhibitorem kompetycyjnym.

Input: model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

Wynik

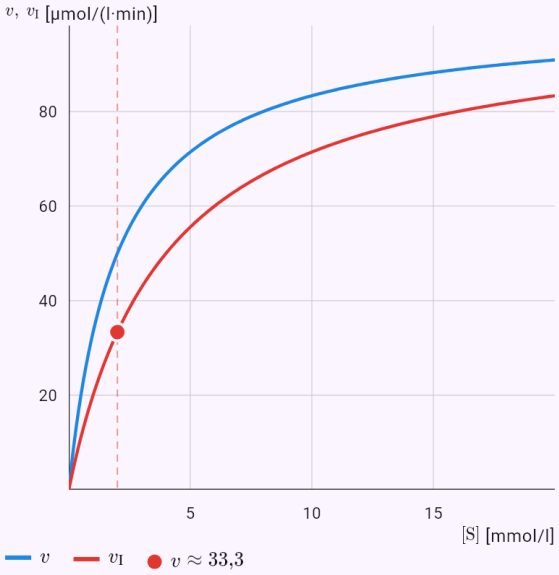
$$v \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$$

Kroki

- Szukane v; dane $V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}), \quad K_m = 2\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{S}] =$
- Enzym E wiąże swój substrat S i przekształca go w produkt. Szybkość v rośnie ze stężeniem substratu, ale się nasyca – najwyżej osiąga szybkość maksymalną V_max, gdy zajęte są wszystkie cząsteczki enzymu. Stała Michaelisa K_m to stężenie substratu przy połowie tej szybkości: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Ze zmierzonych szybkości stałe wyznacza się z prostej Lineweavera–Burka (1/v względem 1/[S], wyraz wolny 1/V_max, nachylenie K_m/V_max) albo dokładniej regresją nieliniową. Inhibitor: kompetycyjny podnosi pozorne K_m, niekompetycyjny obniża V_max, akompetycyjny obniża oba – zawsze o czynnik α = 1 + [I]/K_i. Równanie modelu: $v = \dfrac{V_{max}[\mathrm{S}]}{K_m + [\mathrm{S}]}$
- Czynnik inhibicji: $\alpha = 1 + \dfrac{[\mathrm{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Stałe pozorne z inhibitorem $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\mathrm{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\mathrm{mol}/$
- Inhibitor kompetycyjny konkuruje z substratem o centrum aktywne – podnosi pozorne K_m, V_max się nie zmienia (dużo substratu go wypiera).
- Podstawiamy $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\mathrm{mol}/(\mathrm{l}\cdot\mathrm{min})$

- Wysycenie enzymu: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Grupy krwi MN – częstości alleli i test χ² równowagi.

Input: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one]; aa=1303[one];`

input=counts)

Wynik

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Kroki

- Dane: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- W populacji, w której osobniki krzyżują się losowo i nie ma selekcji, mutacji ani migracji, częstości alleli pozostają stałe, a genotypy są w stosunku p² : 2pq : q², gdzie p i q (p + q = 1) to częstości alleli A i a. Z liczebności genotypów liczymy p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) i liczebności oczekiwane; test χ² (1 stopień swobody) pokazuje, czy populacja odbiega od równowagi. Przy cesze recesywnej znamy tylko udział homozygot q², więc q = √q², a udział nosicieli to 2pq. Równanie modelu: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Częstości alleli – każdy osobnik nosi dwa $p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$
- Liczebności oczekiwane w równowadze $E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n($
- Test zgodności χ² $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05 – odchylenie od równowagi Hardy'ego–Weinberga nie jest istotne.

Odsetek nosicieli choroby recesywnej o częstości 1 : 2500.

Input: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Wynik

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

Kroki

- Dane: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- W populacji, w której osobniki krzyżują się losowo i nie ma selekcji, mutacji ani migracji, częstości alleli pozostają stałe, a genotypy są w stosunku p² : 2pq : q², gdzie p i q (p + q = 1) to częstości alleli A i a. Z liczebności genotypów liczymy p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) i liczebności oczekiwane; test χ² (1 stopień swobody) pokazuje, czy populacja odbiega od równowagi. Przy cesze recesywnej znamy tylko udział homozygot q², więc q = √q², a udział nosicieli to 2pq. Równanie modelu: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Częstość allelu recesywnego z udziału homozygot $q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Częstości genotypów: $p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Nosiciele (heterozygoty) to $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Ile roztworu podstawowego na 50 ml rozcieńczonych dziesięciokrotnie.

Input: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Wynik

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Kroki

- Szukane V_1; dane:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Rozcieńczenie nie zmienia ilości (masy) rozpuszczonej substancji: $c_1V_1 = c_2V_2$. Objętość roztworu wyjściowego $V_1 = c_2V_2/c_1$ uzupełniamy więc rozpuszczalnikiem do V_2. W rozcieńczeniu seryjnym każdy krok rozcieńcza o ten sam czynnik d (np. 1 : 10); po n krokach stężenie wynosi c_0/d^n. W mikrobiologii z liczby N kolonii na płytce, na którą wysiano V_p ml rozcieńczenia D, liczba żywych komórek w próbce wyjściowej to CFU/ml = N·D/V_p (wiarygodne dla 30 do 300 kolonii). Równanie modelu:
  $c_1V_1 = c_2V_2$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- Podstawiamy: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Objętość rozpuszczalnika i rozcieńczenie:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Komórki w próbce z kolonii na płytce.

Input: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Wynik

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Kroki

- Szukane CFU; dane:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Rozcieńczenie nie zmienia ilości (masy) rozpuszczonej substancji: $c_1V_1 = c_2V_2$. Objętość roztworu wyjściowego $V_1 = c_2V_2/c_1$ uzupełniamy więc rozpuszczalnikiem do V_2. W rozcieńczeniu seryjnym każdy krok rozcieńcza o ten sam czynnik d (np. 1 : 10); po n krokach stężenie wynosi c_0/d^n. W mikrobiologii z liczby N kolonii na płytce, na którą wysiano V_p ml rozcieńczenia D, liczba żywych komórek w próbce wyjściowej to CFU/ml = N·D/V_p (wiarygodne dla 30 do 300 kolonii). Równanie modelu:
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Podstawiamy
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Spoczynkowy potencjał błonowy neuronu (Goldman).

Input: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Wynik

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Kroki

- Szukane V_m; dane
  $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Przeliczamy jednostki: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Jon, który błona przepuszcza, rozkłada się tak, że siła elektryczna równoważy dyfuzję zgodnie z gradientem stężenia. Napięcie równowagowe opisuje równanie Nernsta E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), gdzie c_o i c_i to stężenia na zewnątrz i wewnątrz komórki, z ładunek jonu, R stała gazowa, a F stała Faradaya (w 37 °C RT/F ≈ 26,7 mV). Spoczynkowy potencjał błonowy, tworzony przez kilka jonów, opisuje równanie Goldmana – stężenia ważone względnymi przepuszczalnościami P_K, P_Na, P_Cl (dla anionu $\mathrm{Cl^-}$ wnętrze i zewnętrze się zamieniają). Równanie modelu
  $$V_m = \frac{RT}{F}\ln\frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$$
- Stała RT/F w tej temperaturze:
  $$\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$$
- Ważone stężenia na zewnątrz (o) i wewnątrz (i)
  $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Podstawiamy: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln\frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Potencjał spoczynkowy jest bliski potencjałowi równowagowemu jonu o największej przepuszczalności – w spoczynku potasu.

Dawka cytostatyku według powierzchni ciała.

Input: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Wynik

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Kroki

- Szukane D; dane:
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Tylko orientacyjnie – nie zastępuje oceny lekarza, ulotki ani miejscowych standardów.
- Dawka według masy ciała D = d·m (mg/kg × kg); znane stężenie roztworu daje objętość V = D/c. Cytostatyki i dawki dla dzieci liczy się na powierzchnię ciała: wzór Mostellera S = √(wzrost·masa/3600) (cm, kg, m²), dla porównania Du Bois. Szybkość wlewu w ml/h to objętość podzielona przez czas, w kroplach na minutę razy jeszcze współczynnik kroplowy zestawu (zwykle 20 kropli/ml). Klirens kreatyniny według Cockcrofta i Gaulta szacuje czynność nerek: Cl = (140 − wiek)·masa/(72·S_cr) z kreatyniną w mg/dl (µmol/l podzielone przez 88,4), dla kobiet razy 0,85. Wyniki są tylko orientacyjne – nie zastępują oceny lekarza ani ulotki. Równanie modelu:
  $S = \sqrt{\dfrac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Powierzchnia ciała (Mosteller): $S = \sqrt{\dfrac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Du Bois dla porównania:
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Podstawiamy: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Klirens kreatyniny kobiety (Cockcroft–Gault).

Input: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Wynik

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Kroki

- Szukane Cl_{cr}; dane
  $a = 60\,\mathrm{r.}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Tylko orientacyjnie – nie zastępuje oceny lekarza, ulotki ani miejscowych standardów.
- Dawka według masy ciała D = d·m (mg/kg × kg); znane stężenie roztworu daje objętość V = D/c. Cytostatyki i dawki dla dzieci liczy się na powierzchnię ciała: wzór Mostellera S = √(wzrost·masa/3600) (cm, kg, m²), dla porównania Du Bois. Szybkość wlewu w ml/h to objętość podzielona przez czas, w kroplach na minutę razy jeszcze współczynnik kroplowy zestawu (zwykle 20 kropli/ml). Klirens kreatyniny według Cockcrofta i Gaulta szacuje czynność nerek: Cl = (140 − wiek)·masa/(72·S_cr) z kreatyniną w mg/dl (µmol/l podzielone przez 88,4), dla kobiet razy 0,85. Wyniki są tylko orientacyjne – nie zastępują oceny lekarza ani ulotki. Równanie modelu:
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Kreatynina w mg/dl (µmol/l podzielone przez 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Podstawiamy
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Znane ograniczenia

- Kinetyka enzymatyczna tylko dla jednego substratu w stanie ustalonym (Michaelis–Menten); enzymów allosterycznych (równanie Hilla) jeszcze nie ma.
- Hardy–Weinberg dla jednego genu z dwoma allelami; więcej alleli i geny sprzężone z X jeszcze nie.
- Dawkowanie jest tylko orientacyjne – nie uwzględnia interakcji leków, grup wiekowych ani korekt na funkcję narządów innych niż klirens kreatyniny.

50. Ekonomia, finanse i ubezpieczenia

Obliczenia finansowe i ekonomiczne są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Ekonomia: odsetki za dni (30E/360, ACT/360, ACT/365), weksel i jego dyskonto, renta wypłacana z oszczędności (czasowa, odroczona, wieczysta), oprocentowanie mieszane, oszczędności z wpłatą początkową i roczną kapitalizacją, kredyt spłacany ratami malejącymi, odsetki od lokaty (proste, składane, ciągłe, z podatkiem i inflacją), regularne oszczędzanie, kredyt z harmonogramem spłat i RRSO, obligacja, inwestycja (NPV, IRR, okres zwrotu), przeliczanie walut, próg rentowności, maksymalizacja zysku, równowaga rynkowa, model Leontiefa i łańcuchy Markowa oraz matematyka aktuarialna – tablice trwania życia, ubezpieczenie na życie, renty, rezerwy i ubezpieczenia majątkowe z systemem bonus-malus.

Inwestowanie w pożyczki P2P oblicza wartość portfela (gotówka na koncie i niespłacony kapitał) miesiąc po miesiącu: wpłaty są inwestowane w pełnych kwotach na pożyczkę, pożyczki spłacane są ratami równymi, platforma pobiera opłatę za udzielenie i część odsetek, straty to roczna stopa niewypłacalności; dla porównania wzór zamknięty z ciągłym reinwestowaniem. Odwrotnie znajduje miesięczną wpłatę lub czas do kwoty docelowej.

Kwoty mogą być w dowolnej walucie – wybierz ją w formularzu (domyślna jest waluta kraju telefonu); obliczenie od niej nie zależy. Przeliczanie walut bierze dzienne kursy Czeskiego Banku Narodowego (po czesku lub w telefonie ustawionym na Czechy) albo kursy referencyjne Europejskiego Banku Centralnego (w pozostałych językach) i przelicza dowolną parę przez wspólną walutę, pokazując źródło i datę kursów.

Kwoty w walucie zapisuje się według zwyczaju języka aplikacji i regionu w ustawieniach telefonu (2,431.50 USD; po polsku 2 431,50 zł; po czesku 2 431,50 Kč; po niemiecku 2.431,50, w Szwajcarii 2’431.50); tak samo data tabeli kursów.

Kroki pokazują wzory, podstawienie i wyniki pośrednie: stopę efektywną i realną, harmonogram spłat, wartość bieżącą przepływów, przychód i koszt krańcowy jako pochodne, nadwyżki jako całki, odwrotność Leontiefa i rozkład stacjonarny przez rozwiązanie układu. Matematyka aktuarialna korzysta z liczb komutacyjnych; rezerwa jest pokazana prospektywnie i retrospektywnie.

Przykłady

Lokata z miesięczną kapitalizacją, podatkiem od odsetek i inflacją.

Input: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Wynik

$$K_n \approx 152\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane:
  $K_0 = 100\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Przy oprocentowaniu prostym odsetki nalicza się zawsze od pierwotnej wpłaty: K_n = K₀(1 + pn). Przy składanym są dopisywane i też się oprocentowują: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), gdzie m to liczba kapitalizacji w roku (rocznie, półrocznie, kwartalnie, miesięcznie). Kapitalizacja ciągła to granica m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Podatek od odsetek d obniża stopę do p(1 − d). Efektywna stopa roczna porównuje częstotliwości. Dyskontowanie to rachunek odwrotny – ile wpłacić dziś. Przy inflacji π wartość realna to K_n/(1 + π)^n. Oprocentowanie mieszane (tak banki dopisują odsetki raz w roku) kapitalizuje pełne lata i dodaje odsetki proste za resztę ostatniego: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Równanie modelu:
  $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Kapitalizacje w roku: $m = 12$
- Stopa po podatku od odsetek:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Efektywna stopa roczna:
  $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Podstawiamy
  $K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Odsetki łącznie: $K_n - K_0 \approx 52\,844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Wartość realna (w dzisiejszych cenach):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113\,730{,}47\,\mathrm{CZK}$
- Realna stopa procentowa: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Stopa procentowa przewyższa inflację – realna wartość pieniędzy rośnie.

Miesięczne oszczędzanie przez 15 lat.

Input: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Wynik

$$S \approx 438\,907{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $a = 2\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Przy regularnym oszczędzaniu wpłacamy kwotę a w każdym okresie (miesiącu, roku). Każda wpłata oprocentowuje się przez inny czas, więc zaoszczędzona kwota to suma szeregu geometrycznego: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) dla wpłat na początku okresu (renta płatna z góry), bez pierwszego q dla wpłat na końcu (renta płatna z dołu); q = 1 + p/m, a N = mn to liczba wpłat. Równanie daje też potrzebną wpłatę albo czas. Opcjonalna wpłata początkowa K₀ oprocentowuje się przez cały czas – dochodzi K₀·q^N. Przy odsetkach dopisywanych raz w roku miesięczne wpłaty oprocentowują się w ciągu roku prosto – rok daje A = a(12 + p·13/2) dla wpłat na początku miesiąca, a(12 + p·11/2) na jego końcu – i kapitalizują się dopiero te roczne kwoty. Równanie modelu: $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Stopa po podatku od odsetek:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Czynnik oprocentowania na okres:
  $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Podstawiamy
  $S = 2\,000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438\,907{,}24\,\mathrm{C}$
- Wpłacono łącznie i odsetki
  $N \cdot a = 180 \cdot 2\,000 = 360\,000\,\mathrm{CZK}, \quad S - Na \approx 78\,90$

Kredyt hipoteczny 3 miliony na 25 lat – rata, harmonogram i RRSO.

Input: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Wynik

$$a \approx 17\,537{,}70\,\text{CZK}$$

$$\text{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Kroki

- Dane:
  $D = 3\,000\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15\,000$
- Przeliczamy jednostki: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Kredyt w ratach równych (annuitetowych) spłaca się jednakowymi ratami a. Każda rata pokrywa najpierw odsetki od salda, a reszta zmniejsza dług (kapitał), więc udział odsetek z czasem maleje. Wartość bieżąca wszystkich rat jest równa kredytowi, co daje a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Harmonogram spłat pokazuje odsetki, kapitał i pozostałe saldo każdej raty. RRSO uwzględnia też opłaty – to stopa, przy której wartość bieżąca rat jest równa faktycznie otrzymanej kwocie. Przy ratach malejących (stała część kapitałowa) dług maleje w każdym okresie o to samo M = D/N, a rata a_k = M + U_k maleje razem z odsetkami – płaci się mniej odsetek niż przy ratach równych, ale pierwsze raty są wyższe. Harmonogram pokazuje pierwszy rok i ostatnią ratę albo całość. Równanie modelu:
  $a = D\,\dfrac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \dfrac{p}{m}, \quad N = mn$
- Odsetki na okres:
  $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$
- Podstawiamy
  $a = 3\,000\,000 \cdot \dfrac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17\,537{,}70$
- Harmonogram spłat (U odsetki, M kapitał, D saldo)

k	a	U_k	M_k	D_k
1	17 537,70	12 500	5 037,70	2 994 962,30
2	17 537,70	12 479,01	5 058,69	2 989 903,61
3	17 537,70	12 457,93	5 079,77	2 984 823,84
4	17 537,70	12 436,77	5 100,94	2 979 722,90
5	17 537,70	12 415,51	5 122,19	2 974 600,71
6	17 537,70	12 394,17	5 143,53	2 969 457,18
7	17 537,70	12 372,74	5 164,96	2 964 292,22
8	17 537,70	12 351,22	5 186,48	2 959 105,73
9	17 537,70	12 329,61	5 208,09	2 953 897,64
10	17 537,70	12 307,91	5 229,79	2 948 667,85
11	17 537,70	12 286,12	5 251,59	2 943 416,26
12	17 537,70	12 264,23	5 273,47	2 938 142,79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	17 537,70	72,77	17 464,93	0

- Zapłacono łącznie i odsetki w tym
  $\sum a \approx 5\,261\,310{,}37\,\text{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2\,261\,310{,}37\,\text{CZ}$
- RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania z opłatami
  $D - F = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{a}{(1+\text{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \text{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$
- › Metoda: bisekcja, 14 iteracji

Oszczędzanie 1000 miesięcznie z wpłatą początkową i odsetkami kapitalizowanymi rocznie (jak uczy się w czeskich szkołach).

Input: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Wynik

$$S \approx 85\,206{,}62\ \mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $a = 1\,000, \quad K_0 = 20\,000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Przeliczamy jednostki: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Przy regularnym oszczędzaniu wpłacamy kwotę a w każdym okresie (miesiącu, roku). Każda wpłata oprocentowuje się przez inny czas, więc zaoszczędzona kwota to suma szeregu geometrycznego: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) dla wpłat na początku okresu (renta płatna z góry), bez pierwszego q dla wpłat na końcu (renta płatna z dołu); q = 1 + p/m, a N = mn to liczba wpłat. Równanie daje też potrzebną wpłatę albo czas. Opcjonalna wpłata początkowa K_0 oprocentowuje się przez cały czas – dochodzi K_0·q^N. Przy odsetkach dopisywanych raz w roku miesięczne wpłaty oprocentowują się w ciągu roku prosto – rok daje A = a(12 + p·13/2) dla wpłat na początku miesiąca, a(12 + p·11/2) na jego końcu – i kapitalizują się dopiero te roczne kwoty. Równanie modelu

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- Wpłaty z roku z odsetkami w ciągu roku:
  $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Czynnik oprocentowania na okres: $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Podstawiamy
  $S = 1\,000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20\,000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85\,206,$
- Wpłacono łącznie i odsetki
  $K_0 + N \cdot a = 20\,000 + 60 \cdot 1\,000 = 80\,000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$

Inwestowanie w pożyczki P2P: 2000 CZK miesięcznie przez 10 lat, 200 CZK na pożyczkę, z opłatą i stratami.

Input: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct]; L=200[one];`

M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)

Wynik

$$V \approx 318\,974{,}12\ \text{CZK}$$

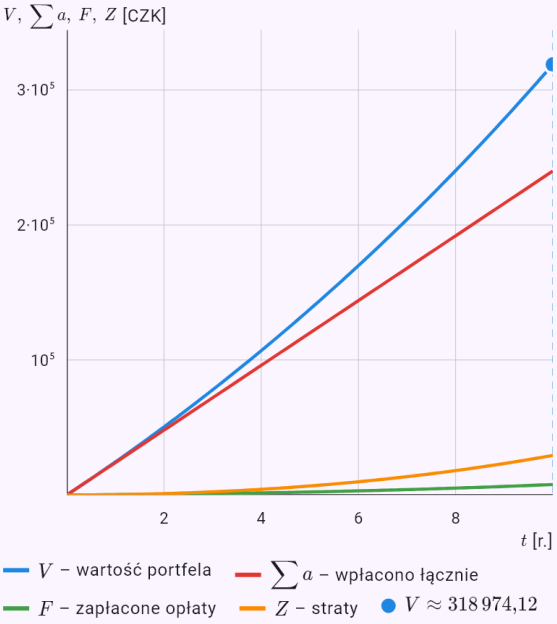
Kroki

- Dane
  $a = 2\,000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$
- Przeliczamy jednostki:
  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$
- Na platformie pożyczek P2P inwestor wpłaca co miesiąc kwotę a. Gotówka jest inwestowana w całych wielokrotnościach kwoty L na pożyczkę (np. 200 CZK), reszta czeka na koncie. Platforma potrąca z każdej inwestycji opłatę wstępną f, do pożyczki trafia L(1 − f). Pożyczki są spłacane w ratach równych s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) przez M miesięcy, i = p/12; platforma zatrzymuje udział g w odsetkach. Wskaźnik niespłacalności λ (rocznie) co miesiąc odpisuje część kapitału, λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Spłaty wracają na konto i są reinwestowane. Wartość portfela V = H + P to gotówka na koncie H plus pozostały kapitał w pożyczkach P. Obliczenie symuluje miesiąc po miesiącu i dla porównania podaje wzór zamknięty z ciągłą reinwestycją: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Zadanie odwrotne wyznacza miesięczną wpłatę albo czas potrzebny do wartości docelowej. To oszacowanie ze stałą stopą zwrotu – rzeczywisty wynik zależy głównie od strat. Stopa zwrotu podawana przez platformę jest często już po opłatach i stratach; wtedy nie wpisuj ich ponownie. To nie jest porada inwestycyjna. Równanie modelu
  $V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$
- Miesięczne odsetki, miesięczne straty i rata
  $i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$
- Podstawiamy
  $V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10\,735{,}19 + 308\,238{,}93 \approx 318\,97$
- Symulacja miesiąc po miesiącu – stan na koniec lat (k w miesiącach): wpłacono, kapitał w pożyczkach P, gotówka H, opłaty F, straty Z, wartość V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24 000	23 784,39	726,58	266	26
24	48 000	49 198,83	1 248,72	606	1 03
36	72 000	75 757,04	2 129,17	1 032	2 33
48	96 000	103 744,84	3 148,57	1 568	4 21
60	120 000	133 102,33	4 439,70	2 240	6 69
72	144 000	164 382,06	5 541,37	3 054	9 80
84	168 000	197 551,52	6 600,52	4 002	13 58
96	192 000	232 369,52	7 962,71	5 094	18 07
108	216 000	269 327,69	9 238,91	6 346	23 30
120	240 000	308 238,93	10 735,19	7 764	29 33

- Wpłacono, opłaty F, straty Z, odsetki netto U i zysk
  $\sum a = 240\,000\,\text{CZK}, \quad F = 7\,764\,\text{CZK}, \quad Z = 29\,337$
- Dla porównania: wzór zamknięty z ciągłą reinwestycją
  $r = p(1 - g)(1 - f) - \lambda - f\,\frac{24}{M + 1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$
- To oszacowanie ze stałą stopą zwrotu i stałym wskaźnikiem niespłacalności – rzeczywistość zależy głównie od strat. Stopa zwrotu podawana przez platformę jest często już po opłatach i stratach. To nie jest porada inwestycyjna.

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Kredyt w ratach malejących – raty spadające w porównaniu z ratami równymi.

Input: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Wynik

$$a_1 \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10\,041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $D = 1\,200\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Przeliczamy jednostki: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Kredyt w ratach równych (annuitetowych) spłaca się jednakowymi ratami a. Każda rata pokrywa najpierw odsetki od salda, a reszta zmniejsza dług (kapitał), więc udział odsetek z czasem maleje. Wartość bieżąca wszystkich rat jest równa kredytowi, co daje a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Harmonogram spłat pokazuje odsetki, kapitał i pozostałe saldo każdej raty. RRSO uwzględnia też opłaty – to stopa, przy której wartość bieżąca rat jest równa faktycznie otrzymanej kwocie. Przy ratach malejących (stała część kapitałowa) dług maleje w każdym okresie o to samo M = D/N, a rata a_k = M + U_k maleje razem z odsetkami – płaci się mniej odsetek niż przy ratach równych, ale pierwsze raty są wyższe. Harmonogram pokazuje pierwszy rok i ostatnią ratę albo całość. Równanie modelu

$$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\, i, \quad i = \frac{p}{m},$$

- Odsetki na okres: $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Podstawiamy: $M = \dfrac{1\,200\,000}{120} \approx 10\,000\,\mathrm{CZK}$
- Pierwsza i ostatnia rata

$$a_1 = M + D\, i \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1+i) \approx 10\,0$$

- Harmonogram spłat (U odsetki, M kapitał, D saldo)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15 000	5 000	10 000	1 190 000
2	14 958,33	4 958,33	10 000	1 180 000
3	14 916,67	4 916,67	10 000	1 170 000
4	14 875	4 875	10 000	1 160 000
5	14 833,33	4 833,33	10 000	1 150 000
6	14 791,67	4 791,67	10 000	1 140 000
7	14 750	4 750	10 000	1 130 000
8	14 708,33	4 708,33	10 000	1 120 000
9	14 666,67	4 666,67	10 000	1 110 000
10	14 625	4 625	10 000	1 100 000
11	14 583,33	4 583,33	10 000	1 090 000
12	14 541,67	4 541,67	10 000	1 080 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10 041,67	41,67	10 000	0

- Zapłacono łącznie i odsetki w tym:
  $\sum a_k \approx 1\,502\,500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302\,500\,\mathrm{CZK}$
- W porównaniu z ratami równymi – rata i odsetki łącznie:
  $a \approx 12\,727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327\,343{,}42\,\mathrm{CZK}$
- Spłata w ratach malejących oszczędza $24\,843{,}42\,\mathrm{CZK}$ odsetek, ale pierwsze raty są wyższe.

Odsetki za dni według 30E/360 z 15 % podatkiem.

Input: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-09-`

`20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Wynik

$$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$$
$$K_n \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $K_0 = 50\,000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Lokaty krótkoterminowe oprocentowuje się prosto przez t dni: u = K₀·p·t/B. Dni i długość roku B wynikają z konwencji liczenia dni: 30E/360 (czeskie i niemieckie banki i szkoły) liczy każdy miesiąc jako 30 dni (31. dzień jak 30.) i rok jako 360 dni, ACT/360 (Francja, Hiszpania, rynek pieniężny) faktyczne dni i rok 360, ACT/365 (Wielka Brytania) faktyczne dni i rok 365. Dni liczy się z dat wpłaty i wypłaty albo wpisuje bezpośrednio. Podatek od odsetek odejmuje się od odsetek. Rachunek odwrotny – ile wpłacić dziś na daną kwotę – to dyskontowanie.
  Równanie modelu: $u = K_0 \cdot p \cdot \frac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$

- Konwencja liczenia dni i długość roku:
  $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Dni (30E/360: miesiąc po 30 dni, 31. dzień jak 30.)
  $15{,}03{,}2026 \to 20{,}09{,}2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026)$ -
- Podstawiamy: $u = 50\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- Podatek od odsetek i odsetki po opodatkowaniu
  $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Odsetki łącznie: $K_n = K_0 + u' \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Dyskonto weksla – ile bank płaci 90 dni przed terminem.

Input: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Wynik

$$K \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$$
$$D \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $N = 100\,000, \quad d = 6\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Weksel to obietnica zapłaty kwoty nominalnej N w dniu płatności. Bank może go odkupić wcześniej (zdyskontować) i wypłaca kwotę pomniejszoną o dyskonto D = N·d·t/B, gdzie d to stopa dyskontowa, a t dni do płatności: K = N(1 − d·t/B). Dyskonto liczy się od kwoty końcowej, nie od wypłaconej, więc rzeczywista rentowność banku i = d/(1 − d·t/B) jest wyższa od stopy dyskontowej. Zwykłą konwencją jest ACT/360. Równanie modelu:
  $D = N \cdot d \cdot \frac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\frac{t}{B}\right)$
- Konwencja liczenia dni i długość roku:
  $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$

- Dni według kalendarza:
  $10{,}01{,}2026 \to 10{,}04{,}2026: \quad t = 90$
- Podstawiamy: $D = 100\,000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{90}{360} \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$
- Wypłacona kwota: $K = N - D \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$
- Rzeczywista rentowność banku: $i = \frac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- Dyskonto liczy się od kwoty końcowej – bank zarabia więc rzeczywiście więcej, niż wynosi stopa dyskontowa.

Miesięczna renta z 2 milionów na 20 lat, odroczona o 5 lat.

Input: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Wynik

$$a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $K = 2\,000\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Przeliczamy jednostki: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Renta wypłaca regularną kwotę a z kapitału K, który w tym czasie nadal się oprocentowuje. Wartość bieżąca N wypłat to K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m – ten sam wzór co przy spłacie kredytu. Wypłaty na początku okresów (renta płatna z góry) mnożą ją przez q. Renta odroczona zaczyna wypłacać po k latach, a kapitał rośnie w tym czasie do K·q^(mk). Renta wieczysta wypłaca tylko odsetki, a kapitał zostaje: K = a/(q − 1). Wynikiem jest wypłata, potrzebny kapitał albo to, jak długo wypłaty wystarczą. Równanie modelu:
  $$K = a\,\frac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Czynnik oprocentowania na okres:
  $$q = 1 + \frac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$$
- Zdyskontowane na okres odroczenia:
  $$q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- Podstawiamy: $a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$
- Kapitał na początku wypłat: $K\,q^{mk} \approx 2\,323\,233{,}56\ \mathrm{CZK}$

- Wypłaty (U odsetki, K saldo)

k	a	U_k	K_k
1	12 884,60	5 808,08	2 316 157,05
2	12 884,60	5 790,39	2 309 062,84
3	12 884,60	5 772,66	2 301 950,90
4	12 884,60	5 754,88	2 294 821,18
5	12 884,60	5 737,05	2 287 673,64
6	12 884,60	5 719,18	2 280 508,23
7	12 884,60	5 701,27	2 273 324,90
8	12 884,60	5 683,31	2 266 123,61
9	12 884,60	5 665,31	2 258 904,33
10	12 884,60	5 647,26	2 251 666,99
11	12 884,60	5 629,17	2 244 411,56
12	12 884,60	5 611,03	2 237 137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12 884,60	32,13	0

- Wypłacono łącznie i odsetki w tym
  $$\sum a \approx 3\,092\,303{,}41\ \mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1\,092\,303{,}41$$

Cena i duration obligacji.

Input: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct]; freq=annual;`

cur=EUR)

Wynik

$$P \approx 1\,044{,}52\,€$$

Kroki

- Dane: $N = 1\,000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Obligacja wypłaca w każdym okresie kupon C = c·N/m, a na końcu wartość nominalną N. Jej cena to wartość bieżąca tych płatności zdyskontowana rynkową rentownością y. Gdy rentowność rynkowa jest niższa od stopy kuponowej, obligacja kosztuje powyżej wartości nominalnej (z premią), w przeciwnym razie poniżej. Rentowność do wykupu to stopa, przy której wartość bieżąca płatności jest równa cenie – znajdowana numerycznie. Duration to ważony średni czas płatności i mierzy wrażliwość ceny na stopy procentowe. Równanie modelu
  $$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{k}} + \frac{N_{nom}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{N}}$$
- Kupon na okres: $C = \dfrac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,€, \quad N = 5$
- Podstawiamy
  $$P = 50 \cdot \frac{1 - 0{,}961538^{5}}{0{,}04} + \frac{1\,000}{1{,}04^{5}} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$$
- Rentowność rynkowa jest niższa od kuponu – obligacja kosztuje powyżej wartości nominalnej.
- Duration (Macaulaya i zmodyfikowana)
  $$D = \frac{1}{P}\sum_{k} t_k\, PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \approx 4{,}382$$

Wewnętrzna stopa zwrotu inwestycji.

Input: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

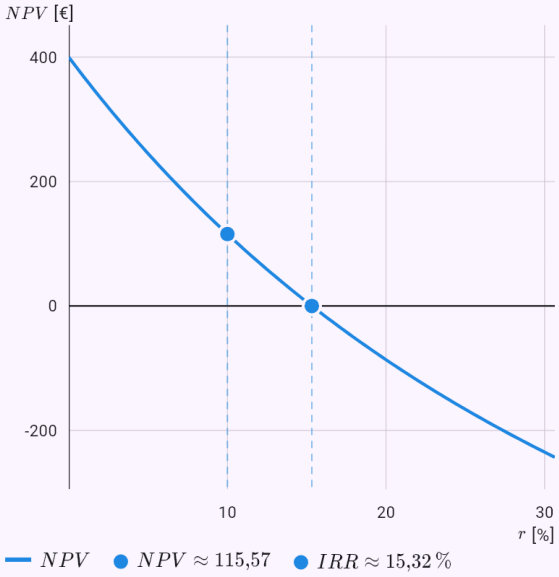
Wynik

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Kroki

- Dane:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Wartość bieżąca netto NPV sumuje przepływy pieniężne projektu CF_0, CF_1, … zdyskontowane wymaganą stopą zwrotu r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt z NPV > 0 zarabia więcej, niż wynosi wymagana stopa zwrotu. Wewnętrzna stopa zwrotu IRR to stopa, przy której NPV = 0 – pierwiastek równania wielomianowego, znajdowany numerycznie. Okres zwrotu to moment, w którym narastająca suma przepływów (prostych lub zdyskontowanych) przestaje być ujemna. Równanie modelu: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Wartość bieżąca netto
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^{1}} + \frac{400}{1{,}1^{2}} + \frac{500}{1{,}1^{3}} + \frac{200}{1{,}1^{4}} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt zarabia co najmniej wymaganą stopę zwrotu.
- Rozwiązujemy równanie numerycznie (bisekcją): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Metoda: bisekcja, 14 iteracji

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Euro na korony według dzisiejszego kursu ČNB.

Input: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Wynik

$$2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\,\mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane: $A = 100$
- Kurs walutowy to cena jednostki waluty obcej. Czeski Bank Narodowy (ČNB) publikuje kursy korony w każdy dzień roboczy, Europejski Bank Centralny kursy referencyjne euro. Kwotę przelicza się przez wspólną walutę: $A_2 = A_1 \cdot k_1/k_2$, gdzie k_1 i k_2 to wartości obu walut w koronach (ČNB) lub w euro (EBC) – kurs krzyżowy. Banki i kantory stosują własne kursy kupna i sprzedaży z marżą; wynik jest orientacyjny. Równanie modelu: $A_2 = A_1 \cdot \frac{k_1}{k_2}$
- Tabela kursów: $\mathrm{ČNB},\ 27{,}11{,}2026$
- Kursy: $1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$
- Podstawiamy: $A_2 = 100 \cdot \frac{24{,}435}{1} \approx 2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$
- Banki i kantory stosują własne kursy z marżą – wynik jest orientacyjny.

Maksimum zysku z przychodu i kosztu krańcowego.

Input: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

e=0.5[one]; cur=CZK)

Wynik

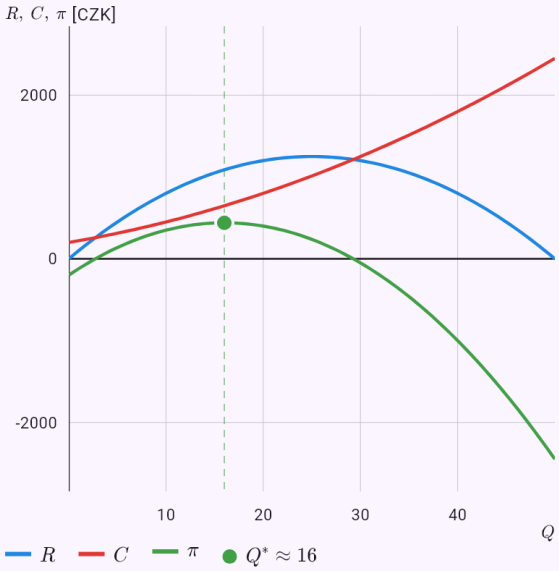
$$Q^* \approx 16$$
$$p^* \approx 68\,\mathrm{CZK}$$
$$\pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$$

Kroki

- Dane:
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Firma o liniowym popycie p = a − bQ ma przychód R = pQ i koszty C(Q) = F + cQ + eQ². Zysk π = R − C jest największy tam, gdzie jego pochodna jest zerowa, czyli przychód krańcowy jest równy kosztowi krańcowemu: MR = R'(Q) = MC = C'(Q). Druga pochodna potwierdza maksimum. Cenowa elastyczność popytu ε = (dQ/dp)·(p/Q) mówi, o ile procent zmieni się wielkość popytu, gdy cena zmieni się o 1 %; |ε| > 1 to popyt elastyczny.
  Równanie modelu:
  $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Przychód i koszty:
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Przychód krańcowy i koszt krańcowy (pochodne):
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Podstawiamy:
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- Druga pochodna zysku jest ujemna − maksimum:
  $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Cena i zysk w optimum:
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\mathrm{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$

- Cenowa elastyczność popytu: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Równowaga rynkowa, nadwyżki i podatek.

Input: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

`t=5[one]; cur=CZK)`

Wynik

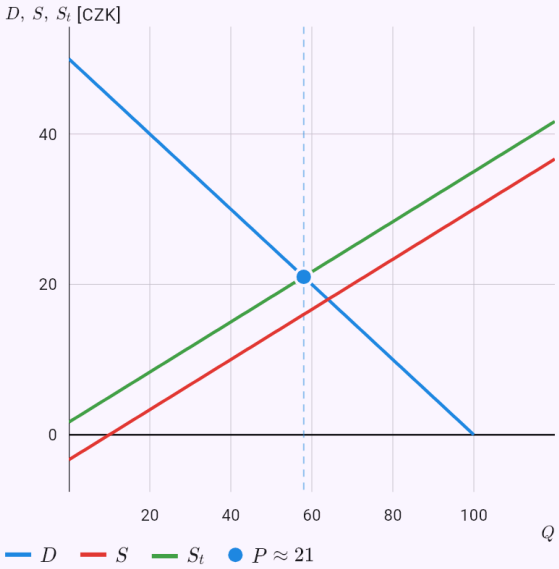
$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Kroki

- Dane: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- Popyt Q_D = a − bP maleje z ceną, podaż Q_S = c + dP rośnie. Rynek jest w równowadze tam, gdzie się spotykają: P* = (a − c)/(b + d). Nadwyżka konsumenta to pole między krzywą popytu a ceną (ile kupujący zapłaciliby więcej), nadwyżka producenta pole między ceną a krzywą podaży – obie to całki. Podatek t od jednostki przesuwa podaż w górę o t: kupujący płacą więcej, sprzedawcy dostają mniej, handluje się mniej i powstaje strata martwa. Równanie modelu:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Podstawiamy:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- Z podatkiem: cena kupujących i sprzedających
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Wpływy z podatku i strata martwa
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Nadwyżka konsumenta:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Nadwyżka producenta:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$

- Elastyczność popytu i podaży w równowadze
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Model Leontiefa trzech sektorów.

Input: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200`

```
150[one])
```

Wynik

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Kroki

- Dane
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Model Leontiefa opisuje gospodarkę n gałęzi, które zaopatrują się nawzajem. Element a_ij macierzy współczynników technicznych A mówi, ile produkcji gałęzi i zużywa gałąź j na jednostkę własnej produkcji. Produkcja globalna x musi pokryć zużycie pośrednie Ax i popyt końcowy y: x = Ax + y, więc x = (I − A)⁻¹y. Macierz odwrotna Leontiefa (I − A)⁻¹ pokazuje, ile musi wyprodukować każda gałąź na jednostkę popytu końcowego. Równanie modelu:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Współczynniki techniczne i popyt końcowy
  $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$
- Macierz I − A
  $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$
- Macierz odwrotna Leontiefa
  $(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$
- Podstawiamy: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Przepływy międzygałęziowe
  $x_{ij} = a_{ij}x_j:\ \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$

Długookresowe udziały klientów trzech marek.

Input: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])`

Wynik

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Kroki

- Dane:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Łańcuch Markowa przechodzi między stanami z prawdopodobieństwami p_ij, które zależą tylko od stanu obecnego (nie od historii). Wiersze macierzy przejścia P sumują się do 1. Rozkład po jednym kroku to $\pi_1 = \pi_0 P$, po n krokach $\pi_n = \pi_0 P^n$. Rozkład stacjonarny spełnia $\pi P = \pi$ i pokazuje długookresowe udziały stanów – klientów marek, klas bonus-malus, stanów maszyny. Równanie modelu: $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Macierz przejścia
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Układ dla rozkładu stacjonarnego
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3 \end{aligned}$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- W długim okresie rozkład ustala się na stacjonarnym niezależnie od początku (dla łańcucha regularnego).

Dalsze trwanie życia kobiety w wieku 65 lat.

Input: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Wynik

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

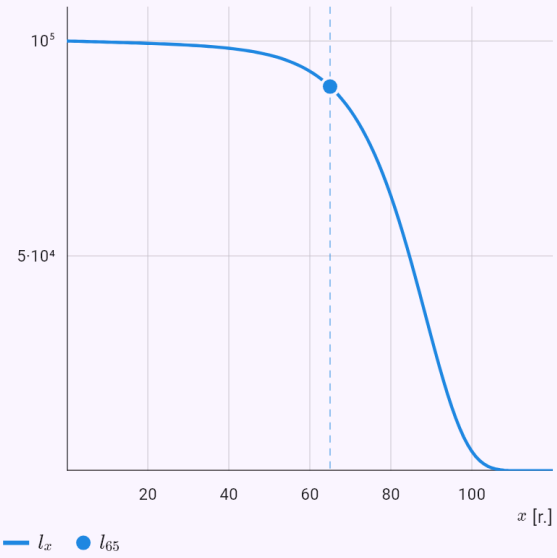
Kroki

- Dane: $x = 65$
- Tablica modelowa (Gompertz–Makeham) mniej więcej jak dla populacji czeskiej – dla dokładnych wyników podaj urzędowe q_x.
- Tablica trwania życia podaje, ile ze 100 000 noworodków (l_x) dożyje wieku x. Prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje jeszcze n lat, to ${}_np_x = l_{x+n}/l_x$, że umrze ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$. Przeciętne dalsze trwanie życia e_x to średnia liczba lat, które osoba w wieku x jeszcze przeżyje. Tablica modelowa według prawa Gompertza–Makehama $\mu(x) = A + Bc^x$ jest ustawiona mniej więcej jak populacja czeska; dokładne obliczenia korzystają z tablic urzędowych – podaj własne q_x. Równanie modelu

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\ge 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Dożywający z tablicy: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Podstawiamy: $e_{65} \approx 20{,}57$
- Średnio dożywają $85{,}57$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Roczna składka ubezpieczenia na życie i dożycie.

Input: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct]; S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Wynik

$$P \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$$

Kroki

- Dane: $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1\,000\,000$
- Przeliczamy jednostki: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Tablica modelowa (Gompertz–Makeham) mniej więcej jak dla populacji czeskiej – dla dokładnych wyników podaj urzędowe q_x.
- Składka netto wynika z zasady równoważności: wartość bieżąca składek jest równa wartości bieżącej przyszłych świadczeń. Za pomocą liczb komutacyjnych $D_x = v^x l_x$, N_x, C_x i M_x ($v = 1/(1+i)$, i to techniczna stopa procentowa) jednorazowa składka netto ubezpieczenia terminowego na n lat to $(M_x - M_{x+n})/D_x$, ubezpieczenia na dożycie D_{x+n}/D_x, ubezpieczenia na życie i dożycie ich suma; renta $\ddot{a} = (N_x - N_{x+n})/D_x$. Składka roczna dzieli przez rentę $\ddot{a}$. Rezerwa w roku t to wartość bieżąca przyszłych świadczeń minus przyszłych składek (prospektywnie) – i wychodzi taka sama jak zgromadzone składki otrzymane minus wypłacone świadczenia (retrospektywnie). Równanie modelu

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k\ge x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k\ge$$

- Liczby komutacyjne

$$D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$$

- Jednorazowa składka netto

$$A_{x:\overline{20|}} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20|}} \approx 622\,543{,}08\ \text{CZK}$$

- Składka roczna

$$\ddot{a}_{x:\overline{20|}} \approx 15{,}4757, \quad P = \frac{S \cdot A_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} \approx 40\,227{,}05\ \text{CZK}$$

System bonus-malus i średni poziom składki.

Input: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Wynik

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Kroki

- Dane: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- W ubezpieczeniach majątkowych (samochody, mienie) oczekiwane roczne szkody ubezpieczonego to E[S] = λ·m, gdzie λ to średnia liczba szkód w roku, a m średnia szkoda. Składka ryzyka dostaje narzut θ na koszty i bezpieczeństwo. System bonus-malus zmienia składkę według historii szkód: rok bez szkody przesuwa do lepszej klasy, szkoda z powrotem. Klasy tworzą łańcuch Markowa; jego rozkład stacjonarny daje długookresowe udziały klas i przeciętny poziom składki. Równanie modelu: $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Rok bez szkody przesuwa o klasę w dół (zniżka), szkoda z powrotem do pierwszej klasy.
- Macierz przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

- Układ dla rozkładu stacjonarnego

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

- Długookresowe udziały klas:
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Podstawiamy: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Znane ograniczenia

- Tablice trwania życia są modelowe (Gompertz–Makeham, w przybliżeniu jak populacja czeska); dla dokładnych wyników podaj własne q_x z oficjalnych tablic.
- Kursy są referencyjne – banki i kantory stosują własne kursy i opłaty.
- Mikroekonomia z liniowym popytem i kwadratowymi kosztami; ogólnych funkcji danych wzorem jeszcze nie ma.
- Konwencje nie przesuwają dat ze względu na święta – odsetki są za dni między podanymi datami; kredyt nie ma nadpłat ani zmian oprocentowania.
- Inwestowanie w pożyczki P2P to oszacowanie ze stałą stopą zwrotu i stałą stopą niewypłacalności; pomija windykację, wcześniejsze spłaty, rynek wtórny i podatki. To nie jest porada inwestycyjna.

51. Programowanie liniowe, zagadnienie transportowe, przydziału i gry macierzowe

Zadania optymalizacyjne są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Logistyka i sieci (programowanie liniowe także w Ekonomii): programowanie liniowe i całkowitoliczbowe, zagadnienie transportowe i zagadnienie przydziału. Program liniowy można też wpisać lub sfotografować, np. max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – ograniczenia w osobnych wierszach lub po średniku, min zamiast max, a słowo integer czyni go programem całkowitoliczbowym.

Kroki pokazują postać standardową ze zmiennymi swobodnymi i sztucznymi oraz tablice simpleksowe w dokładnych ułamkach z zaznaczonym elementem centralnym. Ograniczenia ≥ i = domyślnie obsługuje metoda dwufazowa; chip wybiera metodę dużego M. Optimum ma program dualny, ceny dualne ograniczeń i analizę wrażliwości (przedziały współczynników funkcji celu i prawych stron). Przy dwóch zmiennych aplikacja rysuje obszar dopuszczalny, wierzchołki z wartościami funkcji celu i warstwicę przez optimum. Program całkowitoliczbowy jest rozwiązywany metodą podziału i ograniczeń, a przez drzewo podziału przechodzisz strzałkami jako przez graf.

Zagadnienie transportowe jest dane macierzą kosztów jednostkowych, podażą dostawców i popytem odbiorców; zagadnienie niezbilansowane dostaje fikcyjnego dostawcę lub odbiorcę. Rozwiązanie początkowe daje metoda kąta północno-zachodniego, minimalnego kosztu lub aproksymacja Vogla, optimum metoda MODI z potencjałami i cyklami zamkniętymi; plan przewozów jest pokazany też jako graf. Zagadnienie przydziału rozwiązuje metoda węgierska – redukcja wierszy i kolumn, pokrycie zer liniami i wybór niezależnych zer; radzi sobie też z maksimum i macierzą prostokątną.

Dwuosobowe gry macierzowe (dziedzina Logistyka i sieci albo zapis game(3 -1 2; -2 4 1) – wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B): gra o sumie zerowej najpierw szuka punktu siodłowego (maksymin = minimaks), potem skreśla strategie zdominowane i oblicza strategie mieszane wzorem dla gry 2 × 2, graficznie dla 2 × n i m × 2 (dolna i górna obwiednia prostych) i programowaniem liniowym z tablicami simpleksowymi dla większej – problem dualny daje strategię drugiego gracza. Wynikiem są optymalne strategie obu graczy i wartość gry w dokładnych ułamkach. Gra dwumacierzowa (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), wypłaty A | wypłaty B) pokazuje najlepsze odpowiedzi i równowagi Nasha w strategiach czystych, dla gry 2 × 2 także równowagę mieszaną.

Przykłady

Plan produkcji metodą simpleks z cenami dualnymi i wrażliwością.

Input: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Wynik

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Kroki

- Program liniowy

  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \le 4$
  $2x_2 \le 12$
  $3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $x_1, x_2 \ge 0$

- Nie podano warunków nieujemności – zakładamy $x_1, x_2 \ge 0$
- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a

  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- Tablica simpleksowa 1: wchodzi x_2 (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_2 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	**2**	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	-3	-5	0	0	0	0	

- Tablica simpleksowa 2: wchodzi x_1 (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_3 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	**3**	0	0	-1	1	6	2
z	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- Tablica 3: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe):
  $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\quad z_{max} = 36$
- Program dualny – zmienna dualna dla każdego ograniczenia, ograniczenie dla każdej zmiennej

  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \ge 3$
  $2y_2 + 2y_3 \ge 5$
  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Ceny dualne (optymalne zmienne dualne) z ostatniej tablicy: o ile zmienia się optimum, gdy prawa strona ograniczenia wzrośnie o 1. Ograniczenie z luzem ($b_i - a_i x > 0$) ma cenę dualną 0.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- Optimum programu dualnego równa się optimum prymalnego: $w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$
- Analiza wrażliwości – przedziały współczynników funkcji celu, w których to samo rozwiązanie pozostaje optymalne

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2}\rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

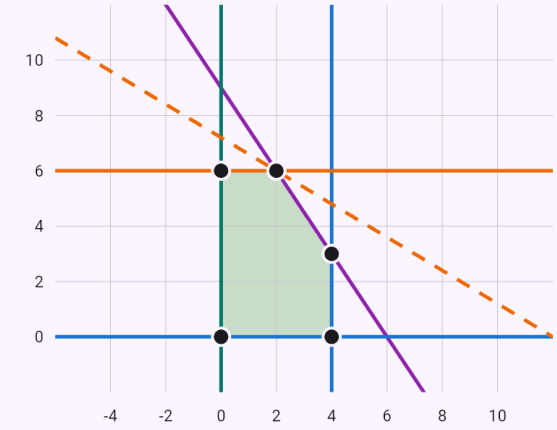
- Przedziały prawych stron, w których ta sama baza pozostaje optymalna (ceny dualne obowiązują tylko tam)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18\rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24\rangle$

- Rozwiązanie graficzne: obszar dopuszczalny jest wielokątem, a optimum leży w wierzchołku. Wartości funkcji celu w wierzchołkach (★ optimum)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Wykres



- $x \le 4 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty;\ 4\rangle$
- $2y \le 12 \ \Leftrightarrow\ y \in (-\infty;\ 6\rangle$
- $3x + 2y \le 18 \ \Leftrightarrow\ y \le 9 - \frac{3x}{2}$
- $x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \langle 0;\ \infty)$
- $y \ge 0 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 0;\ \infty)$
- $z = 36 \ \Leftrightarrow\ 3x + 5y = 36$

Rozwiązaniami są punkty przecięcia krzywych w zacieniowanym obszarze (pełna kropka); pusta kropka nie spełnia nierówności.

Punkty przecięcia wykresów:

● $(0;0)$ ● $(0;6)$ ● $(2;6)$ ● $(4;0)$ ● $(4;3)$

Wpisany program – rozwiązanie graficzne dla dwóch zmiennych.

Input: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Wynik

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Kroki

- Program liniowy

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \le 4$
  $x + 3y \le 6$
  $x, y \ge 0$

- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- Tablica simpleksowa 1: wchodzi x (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_1 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- Tablica 2: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe):
  $x = 4,\ y = 0, \quad z_{max} = 12$

- Program dualny – zmienna dualna dla każdego ograniczenia, ograniczenie dla każdej zmiennej

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \ge 3$
  $u_1 + 3u_2 \ge 2$
  $u_1, u_2 \ge 0$

- Ceny dualne (optymalne zmienne dualne) z ostatniej tablicy: o ile zmienia się optimum, gdy prawa strona ograniczenia wzrośnie o 1. Ograniczenie z luzem ($b_i - a_i x > 0$) ma cenę dualną 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- Optimum programu dualnego równa się optimum prymalnego: $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Analiza wrażliwości – przedziały współczynników funkcji celu, w których to samo rozwiązanie pozostaje optymalne

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

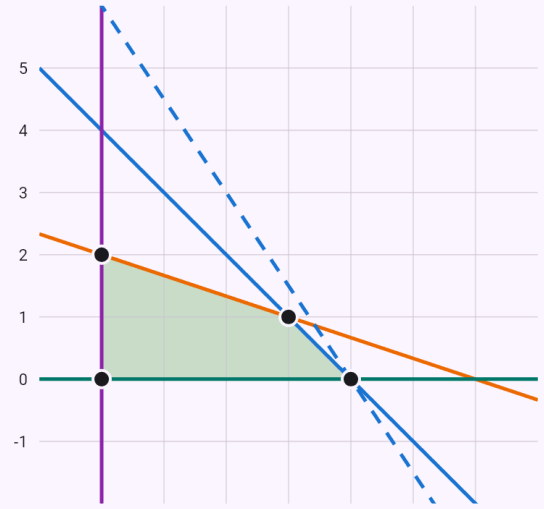
- Przedziały prawych stron, w których ta sama baza pozostaje optymalna (ceny dualne obowiązują tylko tam)

	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- Rozwiązanie graficzne: obszar dopuszczalny jest wielokątem, a optimum leży w wierzchołku. Wartości funkcji celu w wierzchołkach (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Wykres



Rozwiązaniami są punkty przecięcia krzywych w zacieniowanym obszarze (pełna kropka); pusta kropka nie spełnia nierówności.

Punkty przecięcia wykresów:

● $(0;0)$ ● $(0;2)$ ● $(3;1)$ ● $(4;0)$

Minimum z ograniczeniami ≥ metodą dwufazową.

Input: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Wynik

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Kroki

- Program liniowy
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Nie podano warunków nieujemności – zakładamy $x, y \geq 0$

- Minimum znajdujemy jako maksimum funkcji przeciwnej: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Faza pierwsza: zmienne sztuczne nie są prawdziwym rozwiązaniem, więc najpierw sprowadzamy je do zera – minimalizujemy ich sumę $\min w = a_1 + a_2$

- Tablica simpleksowa 1: wchodzi y (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi a_2 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- Tablica simpleksowa 2: wchodzi x (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi a_1 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- Faza pierwsza kończy się z w = 0 – zmienne sztuczne są zerowe i je usuwamy. Faza druga kontynuuje z prawdziwą funkcją celu.

- Tablica 3: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe):
  $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Program dualny – zmienna dualna dla każdego ograniczenia, ograniczenie dla każdej zmiennej
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Ceny dualne (optymalne zmienne dualne) z ostatniej tablicy: o ile zmienia się optimum, gdy prawa strona ograniczenia wzrośnie o 1. Ograniczenie z luzem ($b_i - a_i x > 0$) ma cenę dualną 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum programu dualnego równa się optimum prymalnego: $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analiza wrażliwości – przedziały współczynników funkcji celu, w których to samo rozwiązanie pozostaje optymalne

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3\rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6\rangle$

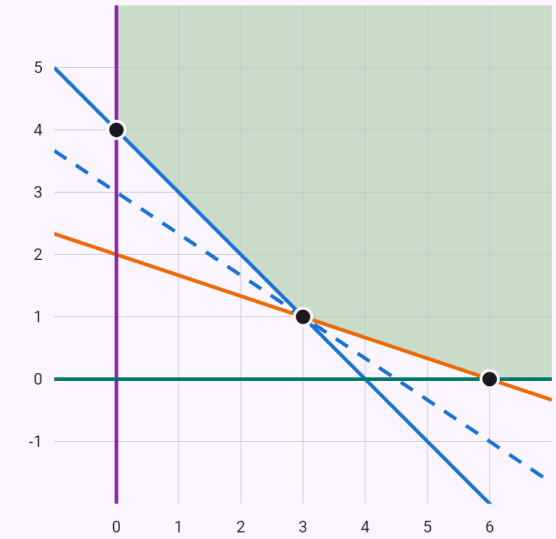
- Przedziały prawych stron, w których ta sama baza pozostaje optymalna (ceny dualne obowiązują tylko tam)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Rozwiązanie graficzne: obszar dopuszczalny jest wielokątem, a optimum leży w wierzchołku. Wartości funkcji celu w wierzchołkach (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Wykres



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$

$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$

$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Rozwiązaniami są punkty przecięcia krzywych w zacieniowanym obszarze (pełna kropka); pusta kropka nie spełnia nierówności.

Punkty przecięcia wykresów:

● $(0;4)$ ● $(3;1)$ ● $(6;0)$

Ten sam program metodą dużego M.

Input: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Wynik

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Kroki

- Program liniowy

  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Nie podano warunków nieujemności – zakładamy $x, y \geq 0$
- Minimum znajdujemy jako maksimum funkcji przeciwnej: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Metoda dużego M: zmienne sztuczne wchodzą do funkcji celu z dużą karą −M, aby metoda simpleks wypchnęła je z bazy: $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$
- Tablica simpleksowa 1: wchodzi y (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi a_2 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- Tablica simpleksowa 2: wchodzi x (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi a_1 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- Tablica 3: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Program dualny – zmienna dualna dla każdego ograniczenia, ograniczenie dla każdej zmiennej

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Ceny dualne (optymalne zmienne dualne) z ostatniej tablicy: o ile zmienia się optimum, gdy prawa strona ograniczenia wzrośnie o 1. Ograniczenie z luzem ($b_i - a_i x > 0$) ma cenę dualną 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Optimum programu dualnego równa się optimum prymalnego: $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analiza wrażliwości – przedziały współczynników funkcji celu, w których to samo rozwiązanie pozostaje optymalne

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1\rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2\rangle$

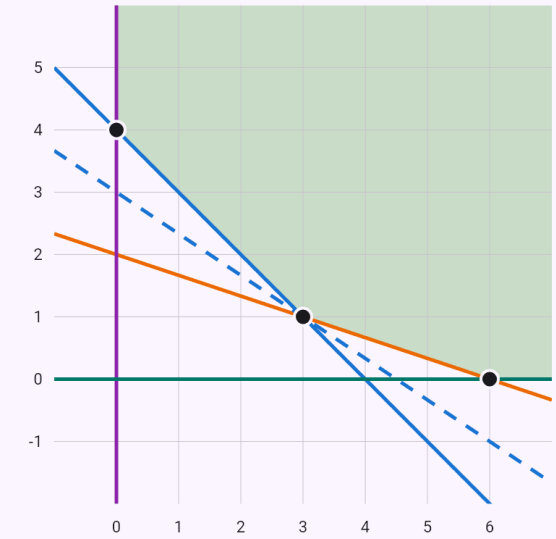
- Przedziały prawych stron, w których ta sama baza pozostaje optymalna (ceny dualne obowiązują tylko tam)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- Rozwiązanie graficzne: obszar dopuszczalny jest wielokątem, a optimum leży w wierzchołku. Wartości funkcji celu w wierzchołkach (★ optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Wykres



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$

$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle 0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in \langle 0;\ \infty)$

$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Rozwiązaniami są punkty przecięcia krzywych w zacieniowanym obszarze (pełna kropka); pusta kropka nie spełnia nierówności.

Punkty przecięcia wykresów:

● $(0; 4)$ ● $(3; 1)$ ● $(6; 0)$

Rozwiązanie całkowitoliczbowe metodą podziału i ograniczeń.

Input: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Wynik

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

Kroki

- Program liniowy

  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \le 24$
  $x + 2y \le 6$
  $x, y \ge 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$

- Nie podano warunków nieujemności – zakładamy $x, y \ge 0$
- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a

  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$

- Tablica simpleksowa 1: wchodzi x (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_1 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	-5	-4	0	0	0	

- Tablica simpleksowa 2: wchodzi y (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_2 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- Tablica 3: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe):

  $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- Program jest całkowitoliczbowy – stosujemy metodę podziału i ograniczeń. Powyższe rozwiązanie bez warunku całkowitoliczbowości to korzeń drzewa P_0.
- Węzły drzewa (w głąb, najpierw gałąź ≤): zmienna ułamkowa dzieli się na dwie gałęzie; × – brak rozwiązania dopuszczalnego, z ≤ z* – gałąź nie pobije najlepszego znalezionego rozwiązania (odcięta), ✓ – rozwiązanie całkowitoliczbowe.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \le 1,\ y \ge 2$
P_1	$y \le 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \le 3,\ x \ge 4$
P_2	$x \le 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \ge 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \ge 2$	$2,\ 2$	18	$z \le z^*$

- Najlepsze rozwiązanie całkowitoliczbowe:

  $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Wykres



Start

$P_0:\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Zagadnienie transportowe – metoda Vogla i MODI.

Input: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Wynik

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Kroki

- Koszty jednostkowe, podaż dostawców a_i i popyt odbiorców b_j

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- Podaż równa się popytowi – zagadnienie jest zbilansowane: $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- Aproksymacja Vogla: w każdym kroku obliczamy kary – różnicę dwóch najniższych kosztów w każdym wierszu i kolumnie – i w wierszu lub kolumnie z największą karą (w ramce) przydzielamy do najtańszego pola.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	$\boxed{22}$	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	$\boxed{21}$		10	10	$(1,1)$
3	40	20	$\boxed{50}$			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	$\boxed{50}$	$(1,4)$
5		20				40	$\boxed{60}$	$(2,4)$
6		$\boxed{40}$				40		$(2,3)$

- Rozwiązanie początkowe (mała liczba to koszt, pogrubiona ilość) – koszt $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- Iteracja MODI 1: potencjały z $u_i + v_j = c_{ij}$ w polach zajętych ($u_1 = 0$), w polach pustych $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (w nawiasach). Najbardziej ujemne d = -18 jest w polu $(2,2)$ – zostaje zajęte. Cykl zamknięty $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, przesuwamy θ = 2 (najmniejszą ilość w polach oznaczonych −).

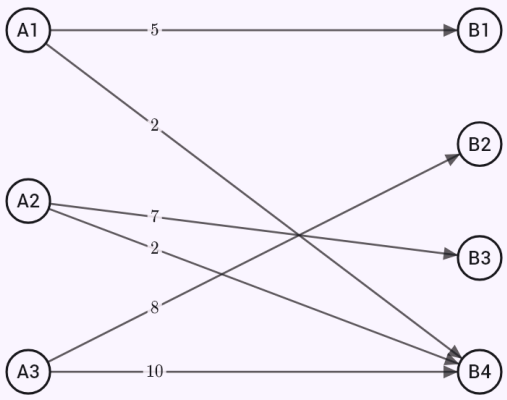
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}\boxed{-18}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	-10	10		

- Żadne d_{ij} nie jest ujemne – plan przewozów jest optymalny.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	8	10		

- Łączny koszt: $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Wykres



Start
$\sum$=779

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Niezbilansowane zagadnienie transportowe z fikcyjnym odbiorcą.

Input: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Wynik

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Kroki

- Koszty jednostkowe, podaż dostawców a_i i popyt odbiorców b_j

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- Podaż przewyższa popyt ($\sum a_i = 110, \quad \sum b_j = 90$) – dodajemy fikcyjnego odbiorcę B_4^* z popytem 20 i zerowymi kosztami (towar pozostały u dostawców).
- Rozwiązanie początkowe metodą kąta północno-zachodniego: od lewego górnego pola przydzielamy jak najwięcej i przesuwamy się w prawo lub w dół (mała liczba to koszt, pogrubiona ilość), koszt $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

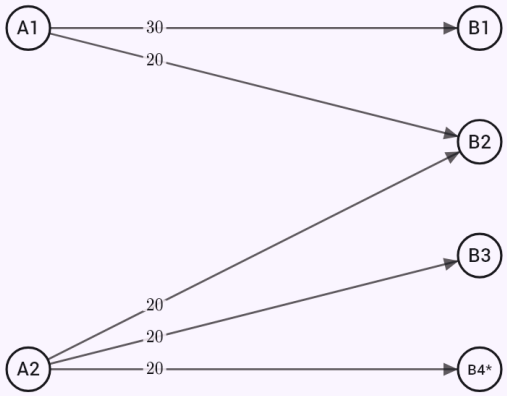
	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}.$	$^{0}.$	50
A_2	$^{5}.$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60
b_j	30	40	20	20	

- Żadne d_{ij} nie jest ujemne – plan przewozów jest optymalny.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	-1		

- Pewne d_{ij} jest zerowe – istnieje inne rozwiązanie optymalne o tym samym koszcie.
- Łączny koszt: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Wykres



Start
$\sum = 440$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Przydział pracowników do zadań najmniejszym kosztem.

Input: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Wynik

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Kroki

- Koszty – wiersze to pracownicy (maszyny), kolumny zadania

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Odejmujemy minimum każdego wiersza $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- Odejmujemy minimum każdej kolumny $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

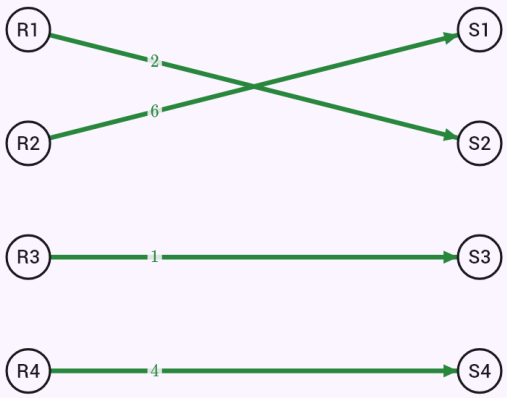
- Do pokrycia zer potrzeba 4 linii – wybieramy niezależne zera, po jednym w każdym wierszu i kolumnie (w ramce).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- Przydział z pierwotnymi kosztami – łącznie $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Wykres



Przydział z największym zyskiem.

Input: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Wynik

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Kroki

- Koszty – wiersze to pracownicy (maszyny), kolumny zadania

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Szukamy maksimum – zamieniamy je na minimum, odejmując każdy element od największego, 9.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- Odejmujemy minimum każdego wiersza $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- Odejmujemy minimum każdej kolumny $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

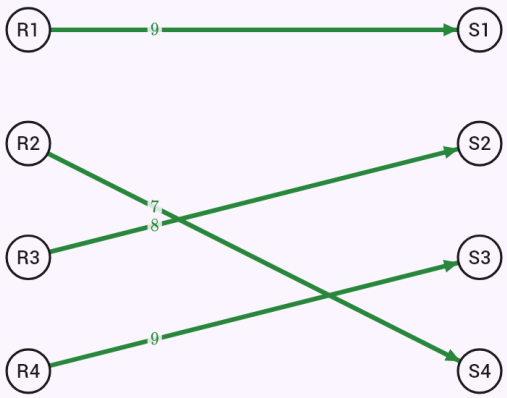
- Do pokrycia zer potrzeba 4 linii – wybieramy niezależne zera, po jednym w każdym wierszu i kolumnie (w ramce).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- Przydział z pierwotnymi kosztami – łącznie $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Wykres



Gra z punktem siodłowym – maksymin równa się minimaksowi.

Input: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Wynik

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Kroki

- Macierz wypłat (3×3): wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B, liczby to wygrane A (przegrane B). A chce jak najwięcej, B jak najmniej.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- Szukamy punktu siodłowego: minimum każdego wiersza (co A może sobie zagwarantować), maksimum każdej kolumny (B nie przegra więcej).
$\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 2$ – maksymin jest równy minimaksowi, gra ma punkt siodłowy.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
max	6	2	6	

- Optymalne strategie czyste (punkty siodłowe): (A_1, B_2); wartość gry $v = 2$

Gra 2 × 2 bez punktu siodłowego – strategie mieszane ze wzoru.

Input: `game(3 -1; -2 4)`

Wynik

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Kroki

- Macierz wypłat (2×2): wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B, liczby to wygrane A (przegrane B). A chce jak najwięcej, B jak najmniej.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Szukamy punktu siodłowego: minimum każdego wiersza (co A może sobie zagwarantować), maksimum każdej kolumny (B nie przegra więcej).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – punktu siodłowego nie ma. Gracze użyją strategii mieszanych – każdej strategii czystej z pewnym prawdopodobieństwem.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Gra 2 × 2 bez punktu siodłowego (strategie A_1, A_2 i B_1, B_2): A gra pierwszy wiersz z prawdopodobieństwem p tak, aby oczekiwana wygrana była taka sama przeciw obu kolumnom, B pierwszą kolumnę z prawdopodobieństwem q podobnie. Dla macierzy (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Optymalne strategie mieszane: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; wartość gry $v = 1$

Strategie zdominowane skreślane po kolei.

Input: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Wynik

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Kroki

- Macierz wypłat (3×3): wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B, liczby to wygrane A (przegrane B). A chce jak najwięcej, B jak najmniej.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- Szukamy punktu siodłowego: minimum każdego wiersza (co A może sobie zagwarantować), maksimum każdej kolumny (B nie przegra więcej).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ _ punktu siodłowego nie ma. Gracze użyją strategii mieszanych – każdej strategii czystej z pewnym prawdopodobieństwem.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- Strategia A_3 jest zdominowana przez A_1 – ta daje graczowi A w każdej kolumnie co najmniej tyle samo. A jej nie wybierze, skreślamy ją

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- Strategia B_3 jest zdominowana przez B_1 – przy tamtej gracz B w żadnym wierszu nie przegra więcej. B jej nie wybierze, skreślamy ją

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Gra 2 × 2 bez punktu siodłowego (strategie A_1, A_2 i B_1, B_2): A gra pierwszy wiersz z prawdopodobieństwem p tak, aby oczekiwana wygrana była taka sama przeciw obu kolumnom, B pierwszą kolumnę z prawdopodobieństwem q podobnie. Dla macierzy (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Optymalne strategie mieszane: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; wartość gry $v = 1$

Gra 2 × 4 graficznie – maksimum dolnej obwiedni.

Input: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Wynik

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Kroki

- Macierz wypłat (2 × 4): wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B, liczby to wygrane A (przegrane B). A chce jak najwięcej, B jak najmniej.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- Szukamy punktu siodłowego: minimum każdego wiersza (co A może sobie zagwarantować), maksimum każdej kolumny (B nie przegra więcej).
$\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ – punktu siodłowego nie ma. Gracze użyją strategii mieszanych – każdej strategii czystej z pewnym prawdopodobieństwem.

	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

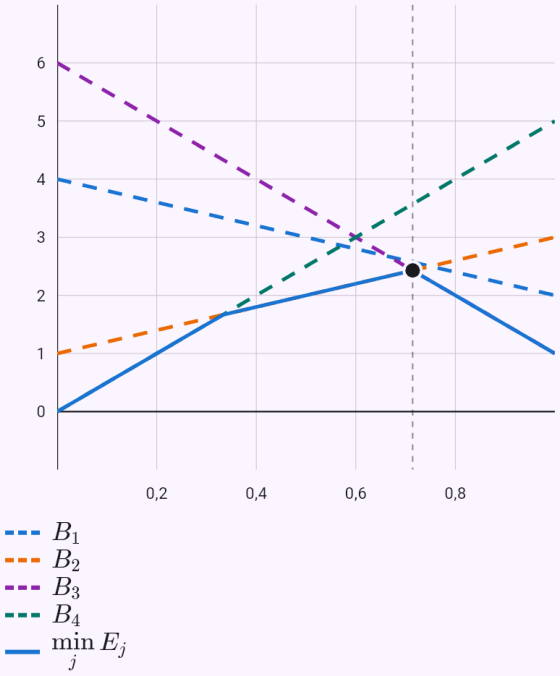
- Metoda graficzna: A gra pierwszy wiersz z prawdopodobieństwem p, drugi z 1 − p. Oczekiwana wygrana A przeciw każdej strategii B to prosta względem p; B wybiera najniższą, więc A szuka najwyższego punktu dolnej obwiedni prostych – maksimum
$p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Proste

$$B_1: \; E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \; E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \; E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \; E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- Optimum leży tam, gdzie przecinają się proste B_2, B_3. B miesza je z prawdopodobieństwami w i 1 − w tak, aby A było obojętne, który wiersz gra:
$2w + (-5)(1-w) = 0 \;\Rightarrow\; w = \frac{5}{7}$

- Optymalne strategie mieszane: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; wartość gry $v = \frac{17}{7}$

Wykres



Proste to oczekiwane wygrane gracza A przeciw strategiom B przy zmianie p; wyróżniona dolna obwiednia to to, co A może sobie zagwarantować, punkt to jej maksimum.

Kamień, papier, nożyce programowaniem liniowym – każda strategia z prawdopodobieństwem 1/3.

Input: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Wynik

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\text{-}\right.$$

Kroki

- Macierz wypłat (3×3): wiersze to strategie gracza A, kolumny gracza B, liczby to wygrane A (przegrane B). A chce jak najwięcej, B jak najmniej.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	1
A_2	1	0	-1
A_3	-1	1	0

- Szukamy punktu siodłowego: minimum każdego wiersza (co A może sobie zagwarantować), maksimum każdej kolumny (B nie przegra więcej). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ _ punktu siodłowego nie ma. Gracze użyją strategii mieszanych – każdej strategii czystej z pewnym prawdopodobieństwem.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	-1	1	-1
A_2	1	0	-1	-1
A_3	-1	1	0	-1
max	1	1	1	

- Do każdego elementu dodajemy k = 2, aby były dodatnie – strategie optymalne się nie zmieniają, wartość rośnie o k.
- Większa gra staje się zadaniem programowania liniowego. Gracz B: max Σ y⃞ przy warunkach Σ⃞ a'⃞⃞·y⃞ ≤ 1, y⃞ ≥ 0, gdzie $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Jego zadanie dualne należy do gracza A.
- Program liniowy

  $\max z = y_1 + y_2 + y_3$

  $2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$

  $3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$

  $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$

  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Postać standardowa: do ograniczenia ≤ dodajemy zmienną swobodną s, od ograniczenia ≥ ją odejmujemy i dodajemy zmienną sztuczną a, do równości tylko sztuczną. Bazę początkową tworzą s i a

  $2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$

  $3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$

  $y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$

- Tablica simpleksowa 1: wchodzi y_1 (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_2 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	

- Tablica simpleksowa 2: wchodzi y_3 (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_1 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- Tablica simpleksowa 3: wchodzi y_2 (najbardziej ujemne $z_j - c_j$), wychodzi s_3 (najmniejszy iloraz b/a); element centralny jest w ramce.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-$
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- Tablica 4: żadne $z_j - c_j$ nie jest ujemne – rozwiązanie jest optymalne.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- Rozwiązanie optymalne odczytane z ostatniej tablicy (zmienne niebazowe są zerowe)

  $y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$

- Program dualny – zmienna dualna dla każdego ograniczenia, ograniczenie dla każdej zmiennej

  $\min v = u_1 + u_2 + u_3$

  $2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$

  $u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$

  $3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$

  $u_1, u_2, u_3 \geq 0$

- Ceny dualne (optymalne zmienne dualne) z ostatniej tablicy: o ile zmienia się optimum, gdy prawa strona ograniczenia wzrośnie o 1. Ograniczenie z luzem ($b_i - a_i x > 0$) ma cenę dualną 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- Optymum programu dualnego równa się optimum prymalnego: $v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$

- Analiza wrażliwości – przedziały współczynników funkcji celu, w których to samo rozwiązanie pozostaje optymalne

	c_j	
y_1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Przedziały prawych stron, w których ta sama baza pozostaje optymalna (ceny dualne obowiązują tylko tam)

	b_i	
1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Z optimum: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Strategie to optymalne y (dla gracza A ceny dualne) pomnożone przez v'.

- Optymalne strategie mieszane: $p^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; wartość gry $v = 0$

Gra dwumacierzowa (konflikt płci) – dwie czyste i jedna mieszana równowaga Nasha.

Input: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Wynik

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Kroki

- Gra dwumacierzowa (2×2): każda komórka zawiera (wypłatę A, wypłatę B), a każdy gracz chce mieć swoją jak największą.

	B_1	B_2
A_1	$(2,\ 1)$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$(1,\ 2)$

- Najlepsze odpowiedzi: w każdej kolumnie podkreślamy największą wypłatę A, w każdym wierszu nadkreślamy największą wypłatę B. Komórki z obydwoma (w ramce) to równowagi Nasha w strategiach czystych: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- Równowaga mieszana: A wybiera p tak, aby B było obojętne, którą kolumnę gra, B wybiera q tak, aby A było obojętne, który wiersz gra (oczekiwane wypłaty $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow \ p = \frac{2}{3}$$

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow \ q = \frac{1}{3}$$

Znane ograniczenia

- Najwyżej 12 zmiennych i 15 ograniczeń; programy całkowitoliczbowe do 6 zmiennych. Wszystkie zmienne muszą być nieujemne – zmienne swobodne nie są jeszcze obsługiwane.
- Zagadnienia transportowe i przydziału do 8 × 8.
- Gry macierzowe do 6 × 6; mieszana równowaga Nasha gry dwumacierzowej tylko dla gier 2 × 2.

52. Grafy, sieci i logistyka

Zadania na grafach i sieciach są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Logistyka i sieci: najkrótsza ścieżka (algorytmy Dijkstry, Bellmana–Forda i Floyda–Warshalla), minimalne drzewo rozpinające (Kruskal, Prim), maksymalny przepływ i minimalny przekrój, arbitraż walutowy jako szukanie cyklu ujemnego i ścieżka krytyczna projektu (CPM, PERT).

Graf wpisujesz w polu wielowierszowym, jedna krawędź w wierszu – A-B 4 to krawędź nieskierowana o wadze 4, A->B 4 skierowana, dla przepływu A->B 3/7 dany przepływ i przepustowość; bez liczby krawędź ma wagę 1. Zamiast krawędzi możesz wkleić macierz wag wiersz po wierszu (-, ∞ lub 0 oznacza brak krawędzi), opcjonalnie z wierszem nazw wierzchołków nad nią. Wierzchołki można nazwać literą lub słowem (PHA, Boston). Czynności projektu podaje się nazwą, czasem trwania i poprzednikami (D 5 B C), dla PERT z trzema oszacowaniami (B 3/4/11 A).

Dla arbitrażu możesz zamiast własnych kursów wybrać dzisiejszą tabelę kursów ČNB lub EBC – wystarczy wypisać waluty (CZK EUR USD GBP). Z jedną tabelą arbitraż nigdy nie wychodzi (kroki pokazują dlaczego); z obiema tabelami naraz każda para walut bierze lepszy kurs i może wyjść cykl powyżej 1. Przycisk „Wypełnij kursy do edycji” wstawia kursy jednej tabeli do pola Kursy walut – edytuj je na przykład według kursów kupna i sprzedaży kantoru.

Kroki pokazują tabelę iteracji jak w podręcznikach – etykiety stałe i tymczasowe Dijkstry, przebiegi Bellmana–Forda, macierz Floyda–Warshalla po każdym wierzchołku, posortowane krawędzie Kruskala, ścieżki powiększające przepływu, przejście w przód i wstecz CPM. Pod wynikiem jest graf, przez który przechodzisz krok po kroku strzałkami: czerwony to zmiana w kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik.

Przykłady

Najkrótsza ścieżka algorytmem Dijkstry.

Input: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2; from=A;`

`to=F; method=dijkstra)`

Wynik

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

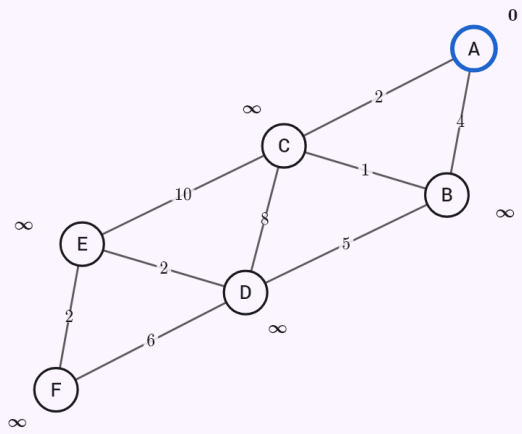
Kroki

- Graf nieskierowany o 6 wierzchołkach i 9 krawędziach.
- Algorytm Dijkstry: w każdym kroku wierzchołek o najmniejszej etykiecie tymczasowej staje się stały (w ramce), a etykiety jego sąsiadów obniżamy, jeśli przez niego prowadzi krótsza ścieżka (pogrubione); indeks dolny to poprzednik.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- Ścieżka odczytana wstecz po poprzednikach: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, jej długość $2+1+5+2+2 = 12$

Wykres



Start
$d(\mathrm{A}) = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Ujemna waga krawędzi – algorytm Bellmana–Forda.

Input: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Wynik

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

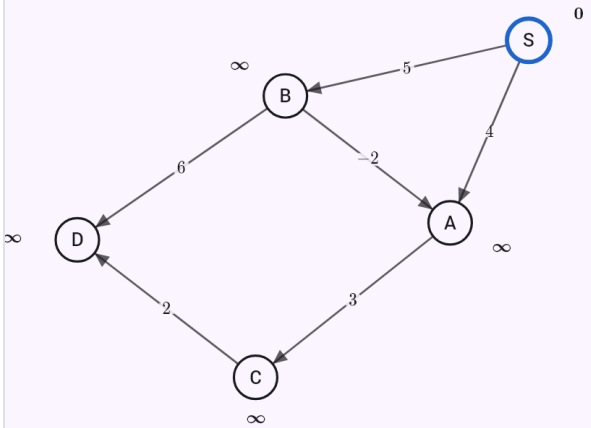
Kroki

- Graf skierowany o 5 wierzchołkach i 6 krawędziach.
- Algorytm Bellmana–Forda: w każdym przebiegu próbujemy skrócić ścieżkę przez każdą krawędź, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; zmienione etykiety są pogrubione, indeks dolny to poprzednik.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- W przebiegu 2 żadna etykieta już się nie zmieniła – odległości są ostateczne.
- Ścieżka odczytana wstecz po poprzednikach: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, jej długość $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Wykres



Start
$d(\mathrm{S}) = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Odległości między wszystkimi parami wierzchołków.

Input: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Wynik

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Kroki

- Graf skierowany o 4 wierzchołkach i 6 krawędziach.
- Algorytm Floyda–Warshalla zaczyna od macierzy wag krawędzi (∞ – brak krawędzi)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Dopuszczamy wierzchołek A jako przystanek: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; skrócone odległości są pogrubione.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Dopuszczamy wierzchołek B jako przystanek: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; skrócone odległości są pogrubione.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

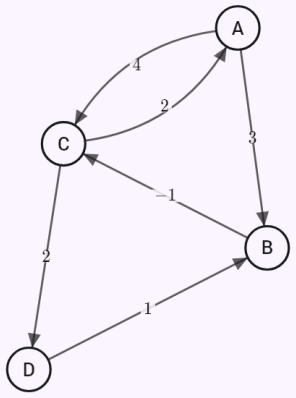
- Dopuszczamy wierzchołek C jako przystanek: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; skrócone odległości są pogrubione.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Dopuszczamy wierzchołek D jako przystanek: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; skrócone odległości są pogrubione.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Wykres



Start
$D^{(0)}$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Minimalne drzewo rozpinające algorytmem Kruskala.

Input: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G 9;`

`F-G 11; method=kruskal)`

Wynik

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

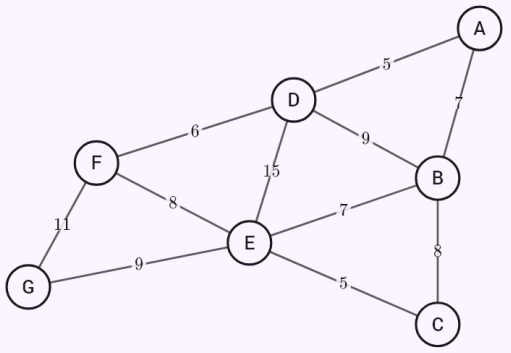
Kroki

- Graf nieskierowany o 7 wierzchołkach i 11 krawędziach.
- Algorytm Kruskala: krawędzie posortowane od najtańszej, każdą dodajemy (✓), chyba że zamyka cykl (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- Łączna waga krawędzi drzewa:
  $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Wykres



Start

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Najkrótsza sieć łącząca stolice regionów algorytmem Prima.

Input: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Wynik

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

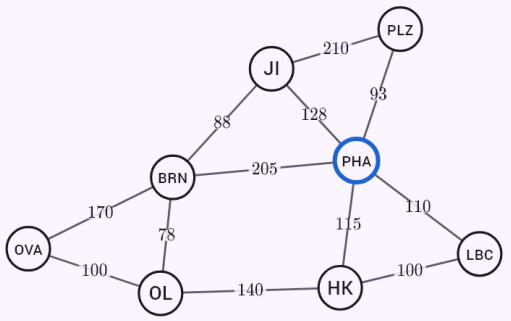
Kroki

- Graf nieskierowany o 8 wierzchołkach i 12 krawędziach.
- Algorytm Prima z wierzchołka PHA: w każdym kroku dołączamy najtańszą krawędź prowadzącą z drzewa do wierzchołka poza nim.

		w
1	$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ}$	93
2	$\mathrm{PHA}-\mathrm{LBC}$	110
3	$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK}$	100
4	$\mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$	128
5	$\mathrm{JI}-\mathrm{BRN}$	88
6	$\mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$	78
7	$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$	100

- Łączna waga krawędzi drzewa:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Wykres



Start
PHA

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Maksymalny przepływ i minimalny przekrój.

Input: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Wynik

$$f_{max} = 23$$

$$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$$

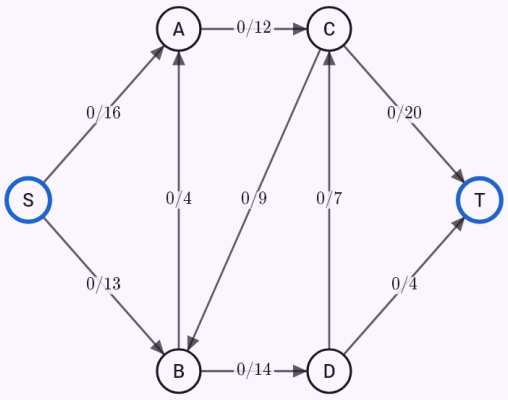
Kroki

- Szukamy maksymalnego przepływu ze źródła S do ujścia T, zaczynając od przepływu o wartości 0
- Ścieżka powiększająca 1 (najkrótsza w sieci residualnej): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Przepływ rośnie o najmniejszą przepustowość residualną $\min(16, 12, 20) = 12$; jego wartość wynosi teraz 12
- Ścieżka powiększająca 2 (najkrótsza w sieci residualnej): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Przepływ rośnie o najmniejszą przepustowość residualną $\min(13, 14, 4) = 4$; jego wartość wynosi teraz 16
- Ścieżka powiększająca 3 (najkrótsza w sieci residualnej): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Przepływ rośnie o najmniejszą przepustowość residualną $\min(9, 10, 7, 8) = 7$; jego wartość wynosi teraz 23
- Nie ma już ścieżki powiększającej – w sieci residualnej ze źródła można dojść tylko do wierzchołków $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Przepływ po krawędziach (f) i ich przepustowości (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Krawędzie wychodzące ze zbioru S tworzą minimalny przekrój: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Wszystkie są pełne, a ich łączna przepustowość $12 + 7 + 4 = 23$ równa się maksymalnemu przepływowi.

Wykres



Start
$f = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Zyskowny cykl wymian trzech walut.

Input: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24; USD-`

```
>GBP 0.7)
```

Wynik

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Kroki

- Kursy i wagi krawędzi $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

- Cykl przynosi zysk, gdy iloczyn jego kursów jest większy od 1 – w logarytmach to cykl ujemny wag

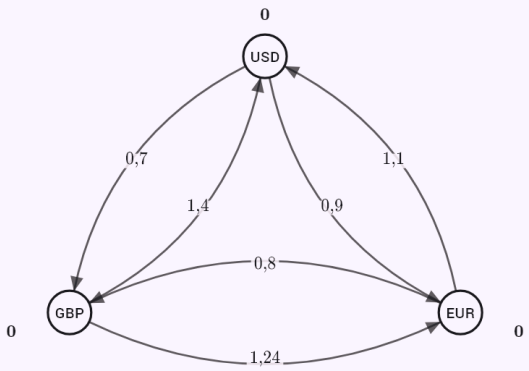
$$r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$$

- Algorytm Bellmana–Forda startuje ze wszystkich walut naraz (wszystkie etykiety 0); zmienione etykiety są pogrubione, indeks dolny to poprzednik.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{\mathrm{GBP}}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Etykiety zmieniają się jeszcze w n-tym przebiegu – poprzedniki prowadzą do cyklu ujemnego $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Iloczyn kursów $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, zysk $0{,}8\,\%$: z 1000 jednostek po jednym okrążeniu robi się 1008

Wykres



Start
$d = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Spójne kursy jako macierz – brak arbitrażu.

Input: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Wynik

Brak arbitrażu – żaden cykl wymian nie przynosi zysku.

Kroki

- Kursy i wagi krawędzi $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	0,04	3,2189
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	0,0432	3,1419
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	25	−3,2189
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	1,08	−0,076961
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	23,1481	−3,1419
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	0,925926	0,076961

- Cykl przynosi zysk, gdy iloczyn jego kursów jest większy od 1 – w logarytmach to cykl ujemny wag
$r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- Algorytm Bellmana–Forda startuje ze wszystkich walut naraz (wszystkie etykiety 0); zmienione etykiety są pogrubione, indeks dolny to poprzednik.

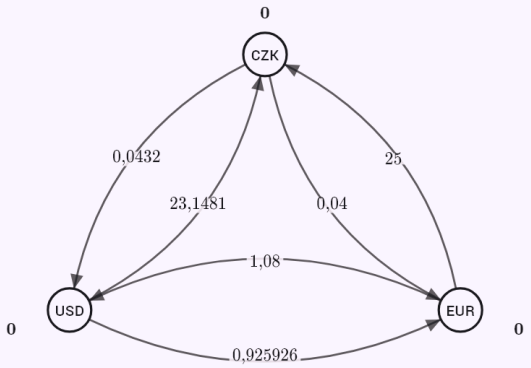
	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- W przebiegu 2 żadna etykieta już się nie zmieniła – odległości są ostateczne.

- Nawet w n-tym przebiegu żadna etykieta się nie zmieniła – nie ma cyklu ujemnego, a więc ani arbitrażu. Potencjały p = −d to logarytmy spójnych „cen" walut: każdy kurs spełnia $\ln r \le p(\text{cel}) - p(\text{źródło})$.

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Wykres



Start
$d = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Kursy jednej tabeli (ČNB) – nigdy arbitraż.

Input: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Wynik

Brak arbitrażu – żaden cykl wymian nie przynosi zysku.

Kroki

- Kursy z tabeli kursów: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27{,}11{,}2026$
- Tabela podaje wartość jednej jednostki każdej waluty w walucie bazowej CZK (k) – i jej logarytm p = ln k

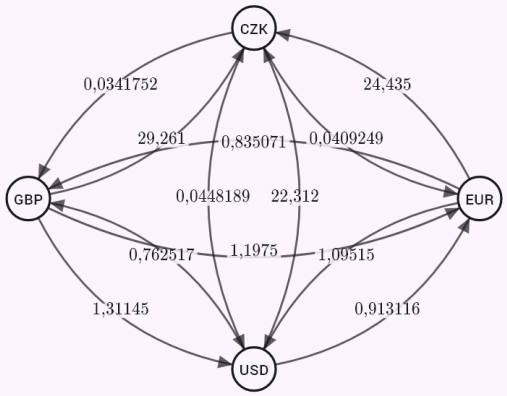
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$	$3{,}3763$

- Kurs między dwiema walutami to kurs krzyżowy przez walutę bazową: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Na każdym cyklu wartości k się skracają, a iloczyn kursów wynosi dokładnie 1. Kursy jednej tabeli ($\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB}$) są spójne, więc nigdy nie dają arbitrażu – pokazują to logarytmy p = ln k, „ceny" walut.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- ČNB i EBC publikują tylko kursy średnie (referencyjne), bez kursów kupna i sprzedaży. Z kursami kantoru (kupno i sprzedaż) każdy cykl przynosi stratę.

Wykres



Kursy ČNB i EBC razem – drobny „zysk” między kursami referencyjnymi.

Input: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Wynik

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}0009332 \; (+0{,}09332\,\%)$$

Kroki

- Kursy z tabeli kursów:
  $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27{,}11{,}2026; \quad \mathrm{ECB},\ 27{,}11{,}2026$
- Dla każdej pary walut bierzemy lepszy z dwóch kursów – ČNB albo EBC (ostatnia kolumna tabeli). Drugi nie poprawiłby żadnego cyklu.
- Kursy i wagi krawędzi $w = -\ln r$

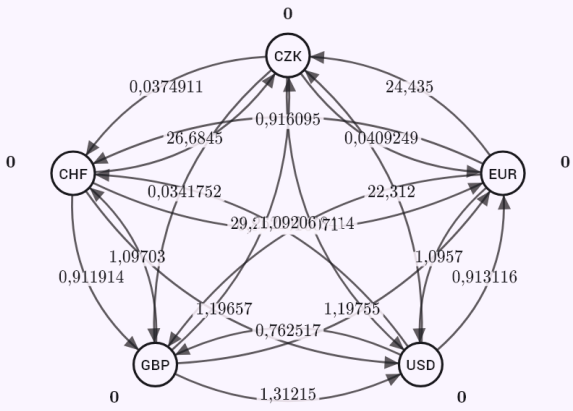
	r	$w = -\ln r$	
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}0409249$	$3{,}196$	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	$0{,}0448414$	$3{,}1046$	ECB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}0341752$	$3{,}3763$	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{CHF}$	$0{,}0374911$	$3{,}2837$	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	$24{,}435$	$-3{,}196$	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}0957$	$-0{,}091393$	ECB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}835071$	$0{,}18024$	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CHF}$	$0{,}916095$	$0{,}087635$	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	$22{,}312$	$-3{,}1051$	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}913116$	$0{,}090892$	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}762517$	$0{,}27113$	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF}$	$0{,}836501$	$0{,}17853$	ČNB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CZK}$	$29{,}2621$	$-3{,}3763$	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}19755$	$-0{,}18028$	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}31215$	$-0{,}27167$	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CHF}$	$1{,}09703$	$-0{,}092604$	ČNB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{CZK}$	$26{,}6845$	$-3{,}2841$	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}09206$	$-0{,}088066$	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$	$1{,}19657$	$-0{,}17946$	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}911914$	$0{,}092209$	ECB

- Cykl przynosi zysk, gdy iloczyn jego kursów jest większy od 1 – w logarytmach to cykl ujemny wag
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- Algorytm Bellmana–Forda startuje ze wszystkich walut naraz (wszystkie etykiety 0); zmienione etykiety są pogrubione, indeks dolny to poprzednik.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}272064}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}272996}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}273929}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}274862}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}275795}$

- Etykiety zmieniają się jeszcze w n-tym przebiegu – poprzedniki prowadzą do cyklu ujemnego $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Iloczyn kursów $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, zysk $0{,}09332\,\%$: z 1000 jednostek po jednym okrążeniu robi się $1000{,}933$
- Cykl wychodzi tylko między kursami referencyjnymi dwóch banków, ustalanymi o różnych porach i inaczej zaokrąglanymi. Po tych kursach nikt nie handluje – zysku nie da się w praktyce uzyskać.

Wykres



Start
$d = 0$

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Ścieżka krytyczna i zapasy czynności.

Input: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Wynik

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Kroki

- Czynności, ich czasy trwania i poprzedniki

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Przejście do przodu: czynność zaczyna się najwcześniej, gdy zakończą się wszystkie jej poprzedniki (ES = największe EF poprzedników), i kończy się w EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- Czas trwania projektu to najpóźniejsze z najwcześniejszych zakończeń: $T = 14$
- Przejście wstecz: czynność musi się zakończyć najpóźniej wtedy, gdy muszą się zacząć jej następniki (LF = najmniejsze LS następników), i zacząć najpóźniej w LS = LF − t.

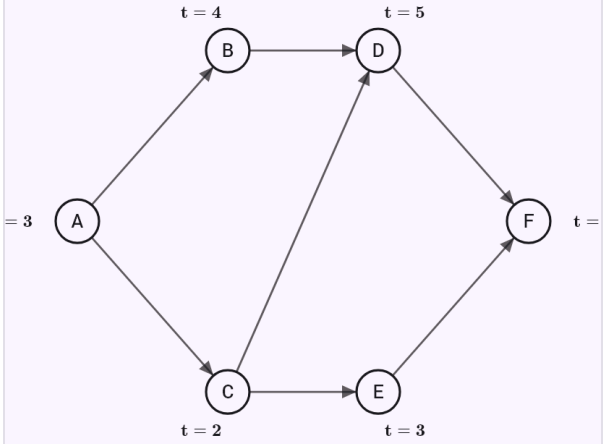
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- Zapas każdej czynności; czynności krytyczne (★) nie mają żadnego

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- Ścieżka krytyczna – opóźnienie którejkolwiek z jej czynności opóźnia cały projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Wykres



Start

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

PERT – prawdopodobieństwo ukończenia projektu w terminie.

Input: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Wynik

$$T = 13$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$$
$$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$$

Kroki

- Czynności, ich czasy trwania i poprzedniki

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT: oczekiwane czasy trwania i wariancje z trzech oszacowań

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Przejście do przodu: czynność zaczyna się najwcześniej, gdy zakończą się wszystkie jej poprzedniki (ES = największe EF poprzedników), i kończy się w EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- Czas trwania projektu to najpóźniejsze z najwcześniejszych zakończeń: $T = 13$
- Przejście wstecz: czynność musi się zakończyć najpóźniej wtedy, gdy muszą się zacząć jej następniki (LF = najmniejsze LS następników), i zacząć najpóźniej w LS = LF − t.

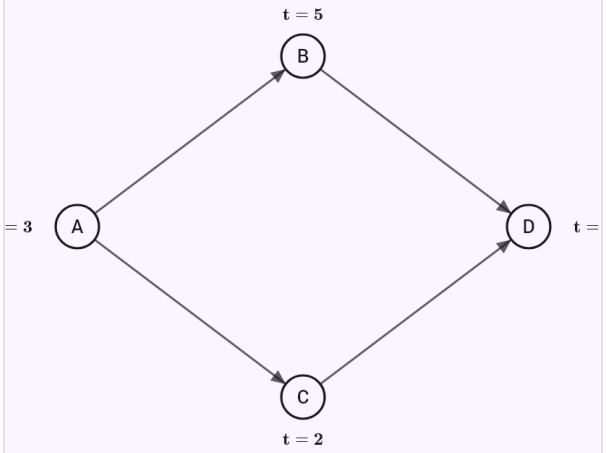
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- Zapas każdej czynności; czynności krytyczne (★) nie mają żadnego

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- Ścieżka krytyczna – opóźnienie którejkolwiek z jej czynności opóźnia cały projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- Wariancja czasu trwania projektu to suma wariancji na ścieżce krytycznej:
  $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- Czas trwania ma w przybliżeniu rozkład normalny – prawdopodobieństwo ukończenia w terminie:
  $$P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15 - 13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$$

Wykres



Start

Strzałkami przechodź przez algorytm krok po kroku. Czerwony to zmiana w tym kroku, niebieski to, co już ustalone, zielony wynik. Przy wierzchołkach są ich etykiety (odległość, najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy).

Znane ograniczenia

- Graf może mieć najwyżej 30 wierzchołków i 200 krawędzi; macierze Floyda–Warshalla wierzchołek po wierzchołku są pokazywane do 6 wierzchołków, dla większych grafów tylko macierz końcowa.
- Szukanie arbitrażu znajduje jeden zyskowny cykl (niekoniecznie najbardziej zyskowny); różnice poniżej 0,0001 % liczą się jako zaokrąglenie kursów.

- ČNB i EBC publikują tylko kursy średnie (referencyjne), po których nikt nie handluje; „zysk” z obu tabel naraz to setne części procenta i nie da się go w praktyce uzyskać.
- Przy obu tabelach tylko waluty, które publikują oba banki (żaden nie publikuje rubla rosyjskiego).
- Wkrótce trasowanie pojazdów, problem plecakowy, zapasy i kolejki; programowanie liniowe, zagadnienie transportowe i przydziału mają własny rozdział.

53. Psychometria

Obliczenia psychometryczne do interpretacji wyników testów (według podręcznika „Psychometria kliniczna – od liczby do interpretacji”) są w formularzu „Statystyka i psychometria” – sekcja „Zastosowania” na ekranie głównym, dziedzina Psychologia. Wybierz zadanie, skalę i to, czego szukasz, i wypełnij zmierzone wartości; skala wypełnia z góry średnią i odchylenie standardowe normy (IQ 100; 15, T 50; 10, przeliczony 10; 3, z 0; 1, sten 5,5; 2, stanin 5; 2), „Własna” pozwala podać normę innego testu. Ikona „?” wyjaśnia, skąd bierze się wzór.

Pomoc bezpośrednio w aplikacji: ikona „?” każdego zadania w formularzu wyjaśnia, co oblicza i skąd bierze się wzór. Wynik pokazuje kroki jeden po drugim, a terminy fachowe w nich (kappa Cohena, krzywa ROC, przedział ufności, wartość p, centyl, wynik prawdziwy, wartości predykcyjne …) są podkreślone kropkami – dotknięcie terminu pokazuje jego krótkie wyjaśnienie prostymi słowami, często z przykładem. Uwagi na końcu kroków mówią, jak interpretować wynik i na co uważać.

Przeliczanie wyników standaryzowanych: $z = (X - M)/SD$, a z niego T, IQ, wynik przeliczony, sten i stanin (zaokrąglone do liczby całkowitej w zakresie skali) oraz centyl. Wynik i centyl: ranga centylowa $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ przy założeniu rozkładu normalnego, a z powrotem wynik danego centyla.

Błąd standardowy pomiaru $SEM = SD \cdot \sqrt{(1 - r)}$ z rzetelności r. Przedział ufności wokół wyniku otrzymanego $X \pm z \cdot SEM$ przy 80, 90, 95 lub 99 % ($z = 1{,}28$; 1,645; 1,96; 2,576). Oszacowany wynik prawdziwy $T' = M + r(X - M)$ – regresja do średniej – z przedziałem wokół T' i błędem standardowym oszacowania $SEE = SD \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

Istotność różnicy dwóch wyników jednej skali (np. indeksów WAIS): błąd standardowy różnicy $SE_diff = SD \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ i różnica krytyczna $z \cdot SE_diff$. Wartości predykcyjne testu z twierdzenia Bayesa: PPV i NPV z czułości, swoistości i częstości występowania – albo z tabeli 2×2 (prawdziwie i fałszywie dodatnie i ujemne), opcjonalnie z częstością występowania w populacji, w której test jest stosowany – z ilorazami wiarygodności LR^+ i LR^-.

Wzór Spearmana–Browna (w tym samym formularzu) daje rzetelność testu wydłużonego k razy, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, albo odwrotnie, ile razy wydłużyć test dla docelowej rzetelności – przy podanej obecnej liczbie pozycji także potrzebne pozycje. Poprawka Bonferroniego daje surowszy poziom $\alpha' = \alpha/m$ dla m porównań, z prawdopodobieństwem fałszywie istotnego wyniku bez poprawki i poprawką Šidáka.

Rzetelność i zgodność z danych pomiarowych pochodzą z chipów data(…) lub z „Jako dane” siatki (wklejone z Excela, plik CSV): alfa Cronbacha – pozycje w kolumnach, respondenci w wierszach – z analizą pozycji (korelacja pozycji z resztą testu, alfa po usunięciu pozycji); ICC – oceniający w kolumnach, osoby w wierszach – wszystkie sześć postaci według Shrouta i Fleissa z tabeli analizy wariancji; kappa Cohena z dwóch kolumn ocen (kategorie jako liczby) lub z kwadratowej tabeli zgodności; krzywa ROC i AUC z kolumny wyników i kolumny stanu 0/1 (1 = zaburzenie) przez U Manna–

Whitneya, z punktem odcięcia według indeksu Youdena i wykresem krzywej ROC. Alfa, ICC, kappa i AUC mają przedział ufności (90, 95 lub 99 % chipem): alfa według Feldta, ICC z rozkładu F, kappa z asymptotycznego błędu standardowego, AUC według Hanleya i McNeila. Dla kategorii uporządkowanych kappa jest obliczana też z wagami liniowymi lub kwadratowymi. Krzywa ROC może też powstać z dwóch kolumn wyników dwóch grup (pierwsza dodatnia, dowolnej długości), z testem Manna–Whitneya dodanym do AUC. Trzy kolumny – wyniki dwóch testów i stan – porównuje test DeLonga, obie krzywe na jednym wykresie.

Kroki kończą się uwagą interpretacyjną: centyle są porządkowe (nie dodaje się ich ani nie uśrednia), przeliczenie na centyl obowiązuje tylko dla wyniku o rozkładzie normalnym, istotna różnica nie musi być nietypowa (częstość bazowa rozbieżności), wartości predykcyjne zależą od częstości występowania. Wykres pokazuje krzywą normalną z zaznaczonym wynikiem, przedziałem lub obszarem krytycznym.

Przykłady

IQ 85 we wszystkich skalach: z = −1, T = 40, wynik przeliczony 7.

Input: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Wynik

$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

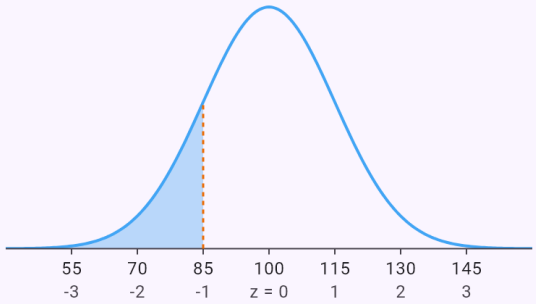
Kroki

- Dane: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Wyniki standaryzowane mówią, jak daleko wynik leży od średniej normy, w odchyleniach standardowych. Najpierw z = (X − M)/SD, potem druga skala: T = 50 + 10z, IQ = 100 + 15z, wynik przeliczony = 10 + 3z, sten = 5,5 + 2z (1–10), stanin = 5 + 2z (1–9). Centyl to procent populacji osiągającej wynik niższy – obowiązuje tylko dla wyniku o rozkładzie normalnym. Równanie modelu: $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Podstawiamy: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Podstawiamy: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Podstawiamy: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Podstawiamy: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Podstawiamy $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Podstawiamy: $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$

- Steny i staniny to liczby całkowite – wartość jest zaokrąglona i utrzymana w zakresie skali (1–10, 1–9).
- Podstawiamy: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- Przeliczenie na centyl obowiązuje tylko dla wyniku o rozkładzie normalnym. Dla testów o rozkładzie skośnym (np. czasy w TMT) odczytaj centyl z tabeli norm.
- Centyle to skala porządkowa – ich kroki nie są równe (w środku 50. i 60. centyl są blisko siebie w wyniku, na krańcach daleko). Centyli się więc nie dodaje, nie uśrednia ani nie odejmuje.

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$PR \approx 16 \quad X = 85$

IQ 130 to 98. centyl.

Input: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Wynik

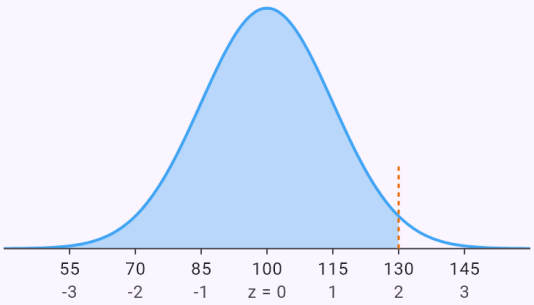
$$PR \approx 98$$

Kroki

- Szukane PR; dane: $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Centyl (ranga centylowa) mówi, jaki procent grupy normalizacyjnej uzyskał wynik niższy. Przy założeniu rozkładu normalnego wynika z wyniku z przez dystrybuantę: PR = 100·Φ(z); wynik z centyla przez kwantyl z = Φ⁻¹(PR/100). Równanie modelu:
  $$PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Podstawiamy: $z = \frac{130 - 100}{15} = 2$
- Podstawiamy: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- Przeliczenie na centyl obowiązuje tylko dla wyniku o rozkładzie normalnym. Dla testów o rozkładzie skośnym (np. czasy w TMT) odczytaj centyl z tabeli norm.
- Centyle to skala porządkowa – ich kroki nie są równe (w środku 50. i 60. centyl są blisko siebie w wyniku, na krańcach daleko). Centyli się więc nie dodaje, nie uśrednia ani nie odejmuje.

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$PR \approx 98 \quad X = 130$

Wynik T 16. centyla.

Input: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Wynik

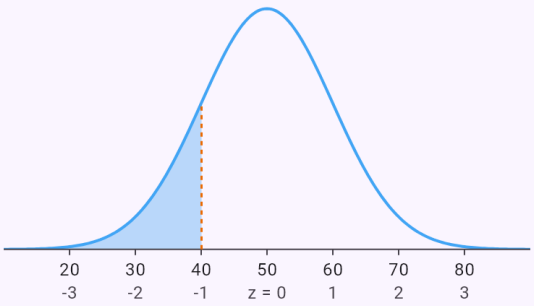
$$X \approx 40{,}1$$

Kroki

- Szukane X; dane: $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Przeliczamy jednostki: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Centyl (ranga centylowa) mówi, jaki procent grupy normalizacyjnej uzyskał wynik niższy. Przy założeniu rozkładu normalnego wynika z wyniku z przez dystrybuantę: PR = 100·Φ(z); wynik z centyla przez kwantyl z = Φ⁻¹(PR/100). Równanie modelu:
  $PR = 100 \cdot \Phi\left(\dfrac{X - M}{SD}\right)$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $z = \Phi^{-1}\left(\dfrac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- Podstawiamy
  $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- Przeliczenie na centyl obowiązuje tylko dla wyniku o rozkładzie normalnym. Dla testów o rozkładzie skośnym (np. czasy w TMT) odczytaj centyl z tabeli norm.
- Centyle to skala porządkowa – ich kroki nie są równe (w środku 50. i 60. centyl są blisko siebie w wyniku, na krańcach daleko). Centyli się więc nie dodaje, nie uśrednia ani nie odejmuje.

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

Błąd standardowy pomiaru testu o rzetelności 0,97.

Input: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Wynik

$$SEM \approx 2{,}6$$

Kroki

- Szukane SEM; dane: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Żaden pomiar nie jest dokładny: wynik otrzymany X = wynik prawdziwy T + błąd E. Błąd standardowy pomiaru SEM = SD·√(1 − r) mówi, o ile typowo wynik otrzymany różni się od prawdziwego; r to rzetelność testu (test-retest, α Cronbacha). Im wyższa rzetelność, tym mniejszy błąd. Równanie modelu: $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Błąd standardowy pomiaru:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

95-procentowy przedział ufności wokół IQ 95.

Input: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Wynik

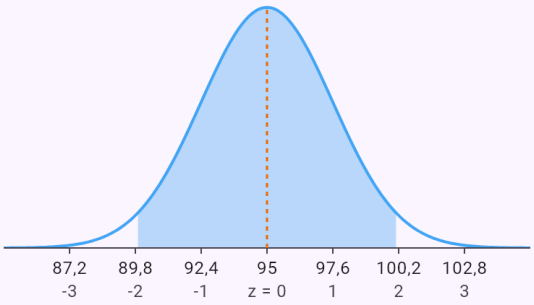
$95\,\%:\ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle$

Kroki

- Szukane X; dane: $X = 95,\quad SD = 15,\quad r_{xx} = 0{,}97$
- Wokół wyniku otrzymanego zaznaczamy pas, w którym z daną ufnością leży wynik prawdziwy: X ± z·SEM, przy z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) lub 2,576 (99 %). Wynik należy odczytywać jako przedział, a nie dokładną liczbę. Równanie modelu
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Błąd standardowy pomiaru:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Wartość krytyczna standardowego rozkładu normalnego:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Podstawiamy
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow \langle 89{,}91;\ 100{,}1\rangle$
- Przedział jest zbudowany wokół wyniku otrzymanego. Dokładniejszy (zwłaszcza dla wyników skrajnych) jest przedział wokół oszacowanego wyniku prawdziwego – model „Oszacowany wynik prawdziwy”.

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$95\,\%:\ \langle 89{,}9;\ 100{,}1\rangle \quad X = 95$

Oszacowany wynik prawdziwy IQ 74 przy rzetelności 0,92.

Input: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Wynik

$$T' \approx 76{,}1$$

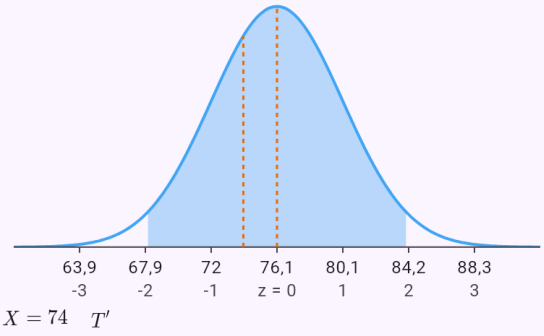
$$95\,\%:\ \langle 68{,}1;\ 84{,}1\rangle$$

Kroki

- Szukane T'; dane:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- Dla wyników skrajnych wynik prawdziwy szacuje się bliżej średniej (regresja do średniej): T' = M + r(X − M). Przedział ufności buduje się wtedy wokół T' z błędem standardowym oszacowania SEE = SD·√(r(1 − r)) – dokładniej niż wokół wyniku otrzymanego, zwłaszcza przy niskiej rzetelności. Równanie modelu
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Podstawiamy: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- Oszacowanie wyniku prawdziwego jest bliżej średniej niż wynik otrzymany – zmierzony ponownie, skrajny wynik wyszedłby prawdopodobnie mniej skrajny.
- Błąd standardowy oszacowania wyniku prawdziwego:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Wartość krytyczna standardowego rozkładu normalnego:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Podstawiamy
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow \langle 68{,}1;\ 84{,}06\rangle$

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



Dwa indeksy 112 i 97 – czy różnica jest istotna?

Input: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Wynik

$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

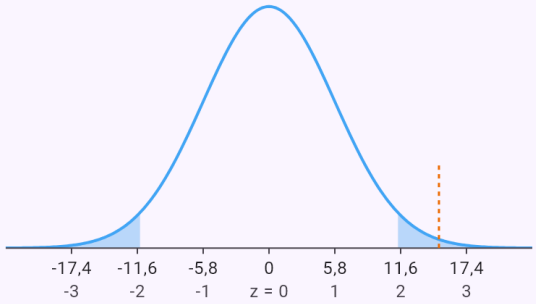
Kroki

- Szukane D; dane:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Czy dwa wyniki (np. indeksy WAIS) różnią się bardziej, niż spowodowałby błąd pomiaru? Błąd standardowy różnicy SE_diff = SD·√(2 − r_{11} − r_{22}), różnica krytyczna z·SE_diff. Różnica, która ją osiąga, jest istotna statystycznie – co nie znaczy, że jest nietypowa.
  Równanie modelu
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Błąd standardowy różnicy:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Wartość krytyczna standardowego rozkładu normalnego:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Różnica krytyczna: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Podstawiamy:
  $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- Różnica osiąga wartość krytyczną – jest istotna statystycznie (nie wyjaśnia jej sam błąd pomiaru).
- Istotna różnica nie musi być nietypowa: tak duże różnice

indeksów często ma 20–30 % próby normalizacyjnej (częstość bazowa rozbieżności). Dla interpretacji liczy się też jej częstość w normie.

Wykres

Gęstość rozkładu normalnego, zacieniowane pole to szukane prawdopodobieństwo



$95\,\%$ $D = 15$

Badanie przesiewowe o czułości 92,5 % i swoistości 74,6 % przy częstości 2 %.

Input: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

input=rates)

Wynik

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Kroki

- Szukane PPV; dane:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- Czułość (Se) to odsetek chorych, których test wykrywa, swoistość (Sp) odsetek zdrowych, których poprawnie wyklucza. W praktyce liczy się prawdopodobieństwo zaburzenia przy wyniku dodatnim – dodatnia wartość predykcyjna PPV. Z twierdzenia Bayesa zależy ona od częstości występowania p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), ujemna NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Równanie modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Podstawiamy
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Podstawiamy
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Ilorazy wiarygodności:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Wartości predykcyjne zależą od częstości występowania: przy niskiej częstości większość wyników dodatnich jest fałszywie dodatnia nawet dla dobrego testu. Dodatni wynik badania przesiewowego wymaga potwierdzenia.

Wartości predykcyjne z tabeli 2×2.

Input: model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)

Wynik

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Kroki

- Szukane PPV; dane:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Czułość: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Swoistość: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Częstość występowania w próbie:
  $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- Czułość (Se) to odsetek chorych, których test wykrywa, swoistość (Sp) odsetek zdrowych, których poprawnie wyklucza. W praktyce liczy się prawdopodobieństwo zaburzenia przy wyniku dodatnim – dodatnia wartość predykcyjna PPV. Z twierdzenia Bayesa zależy ona od częstości występowania p: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), ujemna NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Równanie modelu
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Podstawiamy
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Podstawiamy
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Ilorazy wiarygodności:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Wartości predykcyjne zależą od częstości występowania: przy niskiej częstości większość wyników dodatnich jest fałszywie dodatnia nawet dla dobrego testu. Dodatni wynik badania przesiewowego wymaga potwierdzenia.

Spójność wewnętrzna czteropozycyjnego kwestionariusza.

Input: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Alfa Cronbacha

Wynik

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ \langle 0{,}765;\ 0{,}990\rangle$$

Kroki

- Liczba pozycji (kolumn) k = 4, liczba respondentów (wierszy) 6
- Wariancje pozycji z próby i ich suma

  $s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$

  $$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Wynik łączny każdego respondenta (suma jego odpowiedzi): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. Wariancja wyników łącznych: $s_X^2 \approx 24{,}17$
- Alfa Cronbacha – spójność wewnętrzna jest doskonała.

  $$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Analiza pozycji – średnia, wariancja, korelacja pozycji z resztą testu i alfa po usunięciu pozycji

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- 95-procentowy przedział ufności według Feldta – iloraz (1 − α)/(1 − α□) ma rozkład F z n − 1 i (n − 1)(k − 1) stopniami swobody

  $F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$

  $F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$

  $$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

  $$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Orientacyjnie dla α: ≥ 0,9 doskonała, ≥ 0,8 dobra, ≥ 0,7 akceptowalna spójność wewnętrzna. Do badań wystarcza około 0,7; decyzje o jednostce (diagnostyka) wymagają co najmniej 0,9.
- Wysokie α nie oznacza, że test mierzy jedną cechę, i rośnie już przez samą liczbę pozycji. Jeśli α wzrasta po usunięciu pozycji (ostatnia kolumna tabeli), pozycja prawdopodobnie nie należy do skali.

Zgodność czterech oceniających przy sześciu osobach (przykład Shrouta i Fleissa).

Input: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (rzetelność między oceniającymi)

Wynik

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \;\; \langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \;\; \langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \;\; \langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \;\; \langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \;\; \langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \;\; \langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$$

Kroki

- Liczba ocenianych osób (wierszy) 6, liczba oceniających (kolumn) k = 4, średnia ogólna $\bar{x} = 5{,}292$
- Analiza wariancji – sumy kwadratów SS, stopnie swobody df i średnie kwadraty MS między osobami (R), między oceniającymi (C), resztowe (E) i wewnątrz osób (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Model jednoczynnikowy – każdą osobę mogą oceniać inni oceniający

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Model dwuczynnikowy z losowymi oceniającymi – zgodność bezwzględna

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Model dwuczynnikowy ze stałymi oceniającymi – spójność

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- 95-procentowe przedziały ufności z rozkładu F (Shrout i Fleiss) – ilorazy średnich kwadratów i ich granice

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\, 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\, 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\, 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\, 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Wszystkie sześć ICC z ich 95-procentowymi przedziałami ufności

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$\langle -0{,}133;\, 0{,}723 \rangle$
$ICC(1,4)$	0,443	$\langle -0{,}884;\, 0{,}912 \rangle$
$ICC(2,1)$	0,290	$\langle 0{,}019;\, 0{,}761 \rangle$
$ICC(2,4)$	0,620	$\langle 0{,}071;\, 0{,}927 \rangle$
$ICC(3,1)$	0,715	$\langle 0{,}342;\, 0{,}946 \rangle$
$ICC(3,4)$	0,909	$\langle 0{,}676;\, 0{,}986 \rangle$

- Którego ICC użyć: ICC(1,·) – każdą osobę oceniają inni oceniający; ICC(2,·) – oceniający są losową próbą i liczy się zgodność bezwzględna; ICC(3,·) – stali oceniający, liczy się spójność. ICC(·,1) obowiązuje dla jednego oceniającego, ICC(·,k) dla średniej z k oceniających. Orientacyjnie (Koo i Li): poniżej 0,5 słaba, 0,5–0,75 umiarkowana, 0,75–0,9 dobra, powyżej 0,9 doskonała rzetelność.
- ICC(3,k) równa się alfie Cronbacha tych samych danych (oceniający jako pozycje).
- Przedział ufności ICC bywa szeroki przy małej liczbie osób – nawet wysokie ICC może mieć niską dolną granicę. Przedziały ICC(2,·) są przybliżone (stopnie swobody Satterthwaite'a).
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Zgodność dwóch lekarzy w trzech kategoriach diagnostycznych.

Input: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)` Kappa Cohena

Wynik

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\% : \ \langle 0{,}256;\ 0{,}986 \rangle$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Kroki

- Pary ocen tworzą tabelę zgodności (wiersze oceniający A, kolumny oceniający B, zgodność na przekątnej)

$A \backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Zgodność obserwowana – odsetek przypadków na przekątnej: $p_o = \dfrac{\sum n_{ii}}{N} = \dfrac{4+3+2}{12} = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$
- Zgodność oczekiwana przypadkowo – z sum wierszy i kolumn

  $p_e = \dfrac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \dfrac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{12^2} = \dfrac{49}{144} \approx 0{,}3403$
- Kappa Cohena – zgodność jest znaczna (Landis i Koch).

$\kappa = \dfrac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$

- 95-procentowy przedział ufności z asymptotycznego błędu standardowego (Fleiss, Cohen i Everitt)

  $SE \approx 0{,}1861$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow \langle 0{,}256;\ 0{,}986 \rangle$
- κ koryguje zgodność o zgodność oczekiwaną przypadkowo: 0 oznacza zgodność czysto przypadkową, 1 zgodność doskonałą. Gdy przeważa jedna kategoria, κ wychodzi niskie nawet przy wysokim odsetku zgodności – dlatego podaje się też p_o.
- Kategorie są traktowane jako nominalne – każda niezgodność waży tyle samo. Kategorie uporządkowane (np. stopień nasilenia) wymagają ważonego κ, które mniejszą niezgodność karze słabiej.

Te same diagnozy z wagami kwadratowymi – sąsiednie kategorie liczą się jako zgodność częściowa.

Input: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa Cohena, Wagi kwadratowe

Wynik

$$\kappa_w \approx 0{,}7955$$

$$95\,\%: \ \langle 0{,}576;\ 1{,}000 \rangle$$

$$p_o = 0{,}9375$$

$$p_e \approx 0{,}6944$$

Kroki

- Pary ocen tworzą tabelę zgodności (wiersze oceniający A, kolumny oceniający B, zgodność na przekątnej)

$A \backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Kwadratowe wagi zgodności – mała niezgodność kosztuje mało, duża dużo: $w_{ij} = 1 - \dfrac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- Ważona zgodność obserwowana – liczebności tabeli razy wagi: $p_o = \dfrac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \dfrac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$
- Ważona zgodność oczekiwana przypadkowo – z sum wierszy i kolumn z wagami: $p_e = \dfrac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \dfrac{100}{144} \approx 0{,}6944$
- Ważona kappa Cohena – zgodność jest znaczna (Landis i Koch). $\kappa_w = \dfrac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \dfrac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$
- 95-procentowy przedział ufności z asymptotycznego błędu standardowego (Fleiss, Cohen i Everitt) $SE \approx 0{,}1119$ $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow \langle 0{,}576;\ 1{,}000 \rangle$

- κ koryguje zgodność o zgodność oczekiwaną przypadkowo: 0 oznacza zgodność czysto przypadkową, 1 zgodność doskonałą. Gdy przeważa jedna kategoria, κ wychodzi niskie nawet przy wysokim odsetku zgodności – dlatego podaje się też p_o.
- Ważona kappa uwzględnia też zgodność częściową: oceny różniące się o jeden stopień nie są pełną niezgodnością. Przy wagach kwadratowych ważona kappa zbliża się do ICC; dobrze jest podać, jakich wag użyto.

Kappa Cohena z tabeli zgodności 2×2.

Input: `data(20 5; 10 15)` Kappa Cohena

Wynik

$$\kappa = 0{,}4$$

$$95\,\% : \ \langle 0{,}151;\ 0{,}649 \rangle$$

$$p_o = 0{,}7$$

$$p_e = 0{,}5$$

Kroki

- Tabela zgodności (wiersze oceniający A, kolumny oceniający B, zgodność na przekątnej) z sumami wierszy i kolumn

$A \backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- Zgodność obserwowana – odsetek przypadków na przekątnej: $p_o = \dfrac{\sum n_{ii}}{N} = \dfrac{20 + 15}{50} = \dfrac{35}{50} = 0{,}7$
- Zgodność oczekiwana przypadkowo – z sum wierszy i kolumn

  $p_e = \dfrac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \dfrac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \dfrac{1250}{2500} = 0{,}5$

- Kappa Cohena: $\kappa = \dfrac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \dfrac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – zgodność jest dostateczna (Landis i Koch).
- 95-procentowy przedział ufności z asymptotycznego błędu standardowego (Fleiss, Cohen i Everitt)

  $SE \approx 0{,}127$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow \langle 0{,}151;\ 0{,}649 \rangle$

- κ koryguje zgodność o zgodność oczekiwaną przypadkowo: 0 oznacza zgodność czysto przypadkową, 1 zgodność doskonałą. Gdy przeważa jedna kategoria, κ wychodzi niskie nawet przy wysokim odsetku zgodności – dlatego podaje się też p_o.

Jak dobrze wynik testu oddziela pacjentów (stan 1) od osób zdrowych (stan 0).

Input: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` Krzywa ROC i AUC

Wynik

$$AUC \approx 0{,}9167$$

$$95\,\%:\ \langle 0{,}706;\ 1{,}000\rangle$$

$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$

$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Kroki

- Przypadki dodatnie (stan 1) i ujemne (stan 0): $n_1 = 4,\quad n_0 = 6$
- Wszystkie wyniki porządkujemy i nadajemy im rangi. Suma rang przypadków dodatnich: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- U Manna–Whitneya – liczba par (dodatni, ujemny), w których przypadek dodatni ma wyższy wynik: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- Pole pod krzywą ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – zdolność rozróżniania testu jest wybitna.
- 95-procentowy przedział ufności według Hanleya i McNeila

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$

$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$

$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$

$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow \langle 0{,}706;\ 1{,}0$$

- Hipoteza zerowa: test nie rozróżnia (AUC = 0,5), alternatywna: rozróżnia – test Manna–Whitneya: $H_0\colon AUC = 0{,}5,\quad H_1\colon AUC \neq 0{,}5$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma standardowy rozkład normalny: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, obszar krytyczny $|z| \ge 1{,}96$
- Wartość p: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Ponieważ $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Punkt odcięcia o największym indeksie Youdena to 14 (wynik ≥ 14 jest dodatni)

$$Se = 1$$

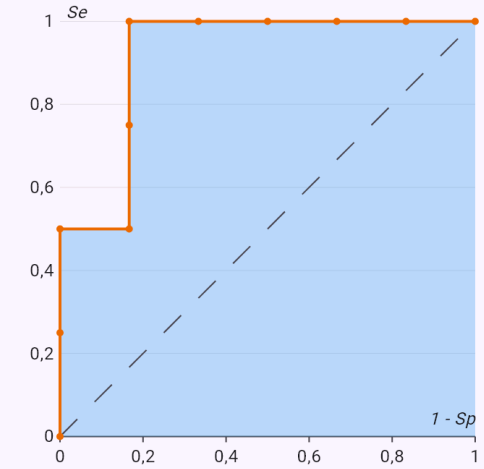
$$Sp \approx 0{,}8333$$

$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$$

- AUC to prawdopodobieństwo, że losowo wybrany przypadek dodatni ma wyższy wynik niż losowo wybrany ujemny (0,5 – test nie rozróżnia, 1 – rozróżnia doskonale). Punkt odcięcia według indeksu Youdena to tylko jedna z możliwości – w praktyce wybiera się go też według kosztu wyników fałszywie dodatnich i fałszywie ujemnych.
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Wykres

Krzywa ROC – zacieniowane pole to AUC, przerywana przekątna to test, który nie rozróżnia



Wyniki pacjentów i osób zdrowych w dwóch grupach różnej liczebności, z testem Manna–Whitneya.

Input: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` Krzywa ROC i AUC

Wynik

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%:\ \langle 0{,}787;\ 1{,}000\rangle$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Kroki

- Grupa dodatnia $\mathrm{pacienti}$ i grupa ujemna zdravi: $n_1 = 5,\quad n_0 = 7$
- Wszystkie wyniki porządkujemy i nadajemy im rangi. Suma rang przypadków dodatnich: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- U Manna–Whitneya – liczba par (dodatni, ujemny), w których przypadek dodatni ma wyższy wynik: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5\cdot 6}{2} = 33$
- Pole pod krzywą ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5\cdot 7} \approx 0{,}9429$ – zdolność rozróżniania testu jest wybitna.
- 95-procentowy przedział ufności według Hanleya i McNeila

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1-1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + \cdots}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow \langle 0{,}787;\ 1,$$

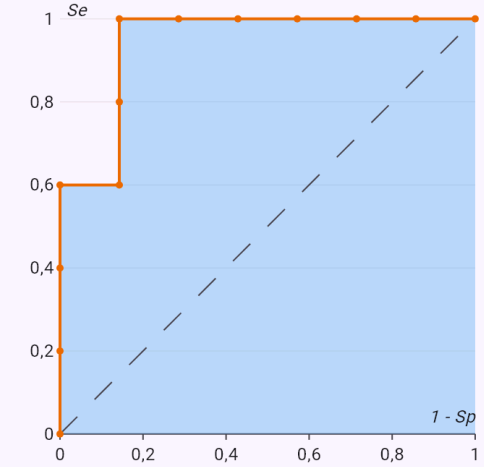
- Hipoteza zerowa: test nie rozróżnia (AUC = 0,5), alternatywna: rozróżnia – test Manna–Whitneya: $H_0\colon AUC = 0{,}5,\quad H_1\colon AUC \neq 0{,}5$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma standardowy rozkład normalny: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, obszar krytyczny $|z| \ge 1{,}96$
- Wartość p: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Ponieważ $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, odrzucamy hipotezę zerową – wynik jest istotny statystycznie.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- Punkt odcięcia o największym indeksie Youdena to 14 (wynik ≥ 14 jest dodatni)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8571$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$$

- AUC to prawdopodobieństwo, że losowo wybrany przypadek dodatni ma wyższy wynik niż losowo wybrany ujemny (0,5 – test nie rozróżnia, 1 – rozróżnia doskonale). Punkt odcięcia według indeksu Youdena to tylko jedna z możliwości – w praktyce wybiera się go też według kosztu wyników fałszywie dodatnich i fałszywie ujemnych.
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Wykres

Krzywa ROC – zacieniowane pole to AUC, przerywana przekątna to test, który nie rozróżnia



Dwa testy na tych samych osobach – czy rozróżniają równie dobrze? (test DeLonga)

Input: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16 1;`

16 8 0; 10 13 0)

Krzywa ROC i AUC

Wynik

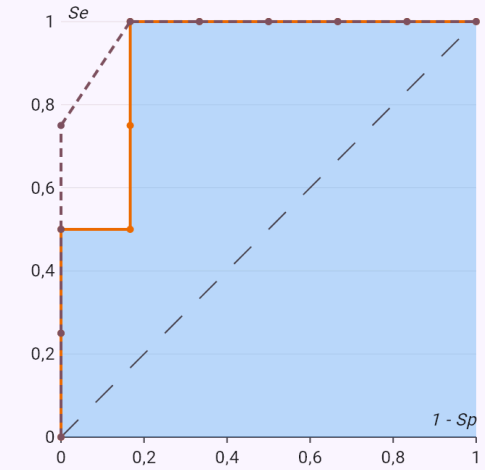
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ \langle -0{,}277;\ 0{,}152 \rangle$$

Kroki

- Dwa testy A i B na tych samych przypadkach, stan dodatni 1: $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Pola pod krzywymi ROC obu testów i ich błędy standardowe (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- Wariancja różnicy według DeLonga – testy są na tych samych przypadkach, więc odejmujemy ich kowariancję (korelacja AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- Hipoteza zerowa: oba testy rozróżniają jednakowo, alternatywna: różnią się
  H_0: $AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  H_1: $AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- Statystyka testowa – przy H_0 ma standardowy rozkład normalny
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- Wartość krytyczna na poziomie α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, obszar krytyczny $|z| \geq 1{,}96$
- Wartość p: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Ponieważ $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, nie odrzucamy hipotezy zerowej – dane nie dostarczają wystarczających dowodów przeciw niej.
- Wartość p to prawdopodobieństwo wyniku co najmniej tak skrajnego jak obserwowany, jeśli H_0 jest prawdziwa – a nie prawdopodobieństwo, że H_0 jest prawdziwa. Nieodrzucenie H_0 nie oznacza, że H_0 jest prawdziwa; istotność statystyczna nic nie mówi o wielkości ani praktycznym znaczeniu różnicy.
- 95-procentowy przedział ufności różnicy dwóch AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- Test DeLonga porównuje AUC dwóch testów na tych samych przypadkach – uwzględnia, że są skorelowane. Nieistotna różnica nie oznacza, że testy są równie dobre, tylko że dane nie wykazały różnicy.
- Uwaga: danych jest mało, oszacowania (zwłaszcza wariancji i kwartyli) są niepewne.

Wykres

Krzywe ROC obu testów – pierwsza ciągła z zacieniowanym polem, druga przerywana



O ile wydłużyć test 20-pozycyjny o rzetelności 0,7, by osiągnąć 0,9.

Input: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Wynik

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Kroki

- Szukane k; dane: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Dłuższy test mierzy rzetelniej: wydłużony k razy o pozycje tej samej jakości (równoległe), zyskuje rzetelność według wzoru Spearmana–Browna r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Odwrotnie mówi, ile razy wydłużyć test, aby osiągnąć docelową rzetelność. Wzór koryguje też rzetelność połówkową (k = 2). Równanie modelu:
  $$k = \frac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$$
- Podstawiamy
  $$k = \frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$$
- Potrzebne pozycje:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- Wzór zakłada, że dodane pozycje są tak dobre jak pierwotne (równoległe). Rzeczywisty zysk jest zwykle mniejszy, a dłuższy test bardziej też męczy badanego.

Skorygowany poziom dla 10 porównań.

Input: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Wynik

$$\alpha' = 0{,}005$$

Kroki

- Szukane α'; dane: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Przy m testach na poziomie α rośnie prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wyjdzie istotny przypadkiem: 1 − (1 − α)^m. Poprawka Bonferroniego ocenia więc każdy test na surowszym poziomie α' = α/m. Poprawka Šidáka 1 − (1 − α)^(1/m) jest nieco mniej surowa. Równanie modelu: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Podstawiamy: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Prawdopodobieństwo co najmniej jednego fałszywie istotnego wyniku bez poprawki: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1-0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Poprawka Šidáka $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1-0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- Poprawka Bonferroniego jest konserwatywna: chroni przed fałszywie istotnymi wynikami, ale przy wielu porównaniach łatwo przeoczy rzeczywistą różnicę. Mniej surowe są np. metoda Holma lub kontrola FDR (Benjamini–Hochberg).

Znane ograniczenia

- Centyl wynika z rozkładu normalnego – dla testów skośnych (czasy w TMT) poprawny jest tylko centyl z tabeli norm.
- Przedziały ufności są asymptotyczne lub przybliżone – przy małych próbach (do 10–20 przypadków) traktuj je tylko orientacyjnie.
- Zadanie słowami lub ze zdjęcia (zadanie z podręcznika) nie jest jeszcze obsługiwane – wartości trafiają do formularza.

Wygenerowano z aplikacji Mathtrace