Mathtrace – podręcznik

II. Algebra liniowa i geometria

Spis treści

II. Algebra liniowa i geometria

20. Obliczenia geometryczne

21. Macierze

22. Wektory

23. Proste i płaszczyzny

24. Zadania konstrukcyjne

20. Obliczenia geometryczne

Obwody i pola figur, objętości i pola powierzchni brył oblicza się formularzem jak w innych zastosowaniach (Zastosowania → Geometria): wybierz figurę i to, czego szukasz, i podaj wymiary z jednostkami. Figury: kwadrat, prostokąt, trójkąt (bok i wysokość na ten bok albo trzy boki – wzór Herona), równoległobok, romb, trapez, wielokąt foremny, koło, pierścień kołowy, łuk i wycinek, twierdzenie Pitagorasa i trójkąty podobne; bryły: sześcian, prostopadłościan, graniastosłup, walec, ostrosłup prawidłowy czworokątny, stożek i kula.

Rozwiązanie zapisuje wzór, podstawia i oblicza; gdy potrzebna jest wartość pośrednia (tworząca stożka, wysokość ściany bocznej ostrosłupa), pojawia się najpierw. Działa to też odwrotnie – promień z pola, krawędź z objętości, przyprostokątna z przeciwprostokątnej. Wynik jest dokładny z π i pierwiastkami oraz przybliżony (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Jednostki są przeliczane (cm na dm, dm³ na litry).

Przykłady

Pole koła – dokładnie z π i w przybliżeniu.

Input: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Wynik

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Kroki

- Okrąg to punkty w odległości r od środka, koło to okrąg z jego wnętrzem. Obwód o = 2πr = πd, pole S = πr². Liczba π ≈ 3,14159 to obwód przez średnicę – wynik dokładny (z π) i przybliżony. Wzory
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Szukane S; dane: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Podstawiamy: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Odwrotnie: promień z pola.

Input: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Wynik

$$r \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Okrąg to punkty w odległości r od środka, koło to okrąg z jego wnętrzem. Obwód o = 2πr = πd, pole S = πr². Liczba π ≈ 3,14159 to obwód przez średnicę – wynik dokładny (z π) i przybliżony. Wzory
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Szukane r; dane: $S = 50\,\mathrm{cm}^2$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Podstawiamy: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$

Trójkąt z trzech boków – wzór Herona.

Input: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Wynik

$$S = 6\,\mathrm{cm}^2$$

Kroki

- Pole trójkąta to połowa boku razy wysokość na ten bok: S = a·v_a/2. Z trzech boków wzorem Herona S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), gdzie s = (a + b + c)/2 to połowa obwodu. Boki muszą spełniać nierówność trójkąta – każde dwa razem dłuższe od trzeciego. Wzory
  $o = a + b + c$
  $S = \frac{a v_a}{2}$
  $s = \frac{a + b + c}{2}$
  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- Szukane S; dane: $a = 3\,\mathrm{cm},\ b = 4\,\mathrm{cm},\ c = 5\,\mathrm{cm}$
- Podstawiamy: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\mathrm{cm}$
- Podstawiamy: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\mathrm{cm}^2$

Przyprostokątna z przeciwprostokątnej.

Input: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Wynik

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów przyprostokątnych: c² = a² + b². Przeciwprostokątna c leży naprzeciw kąta prostego i jest najdłuższym bokiem; przyprostokątna to b = √(c² − a²). Wzory
  $$c^2 = a^2 + b^2$$
- Szukane b; dane: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Podstawiamy: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Pole powierzchni stożka – najpierw tworząca.

Input: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Wynik

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Kroki

- Stożek ma podstawę kołową o promieniu r i wysokość v. Jego objętość to jedna trzecia objętości walca: V = πr²v/3. Tworząca s jest przeciwprostokątną o przyprostokątnych r i v; powierzchnia boczna to wycinek koła S_{pl} = πrs, pole powierzchni S = πr² + πrs. Wzory
  $$V = \frac{\pi r^2 v}{3}$$
  $$s^2 = r^2 + v^2$$
  $$S_{pl} = \pi r s$$
  $$S = \pi r^2 + S_{pl}$$
- Szukane S; dane: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Podstawiamy: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Podstawiamy: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Podstawiamy: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Objętość sześcianu w litrach.

Input: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Wynik

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Kroki

- Sześcian ma sześć jednakowych ścian kwadratowych o krawędzi a. Objętość V = a³, pole powierzchni S = 6a², przekątna sześcianu u = a√3. Krawędź z objętości to jej pierwiastek sześcienny: a = ∛V. Wzory
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Szukane V; dane: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Podstawiamy: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Przeliczamy jednostki: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Znane ograniczenia

- Wciąż brakuje szkicu figury z wymiarami.

21. Macierze

Macierz zapisz w nawiasach kwadratowych jak w Matlabie: elementy oddzielone spacjami, wiersze średnikiem lub nowym wierszem. Element może być ułamkiem, pierwiastkiem lub literą. Klawisz z siatką na zakładce f(x) otwiera tabelę do wypełnienia komórka po komórce – albo do wklejenia ze schowka (komórki skopiowane z Excela lub Arkuszy Google) lub wczytania z pliku CSV.

Dla jednej macierzy chip mówi, co obliczyć: wyznacznik (2×2 ze wzoru, 3×3 regułą Sarrusa, w przeciwnym razie rozwinięciem względem wiersza lub kolumny albo sprowadzeniem do macierzy trójkątnej – metoda to też chip), macierz odwrotną (2×2 ze wzoru, w przeciwnym razie eliminacją Gaussa–Jordana z macierzą jednostkową obok), rząd (sprowadzenie do postaci schodkowej) lub transpozycję.

Kilka macierzy nazwij wielkimi literami, każdą w osobnym wierszu, a w ostatnim wierszu napisz, co obliczyć: sumę, różnicę, wielokrotność, iloczyn (wiersz razy kolumna, ze sprawdzeniem wymiarów), potęgę, transpozycję A^T, odwrotność A^-1, det(A), rank(A) – albo równanie macierzowe AX = B lub XA = B, które aplikacja rozwiązuje macierzą odwrotną. Układ równań dany macierzą (macierz rozszerzona, Ax = b) jest opisany w rozdziale Układy równań.

Jeśli macierz zawiera parametr (literę), aplikacja przeprowadza dyskusję jej rzędu według wartości parametru tak jak przy układzie – sprowadzenie do postaci schodkowej, podstawienie wartości krytycznych. Dla macierzy odwrotnej najpierw oblicza wyznacznik i warunek, dla jakich wartości parametru nie jest zerowy (odwrotność istnieje). Odwrotność 3×3 lub większą oblicza eliminacją Gaussa–Jordana albo – według chipu – macierzą dołączoną (dopełnienia algebraiczne, $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$).

Dla macierzy kwadratowej możesz też obliczyć wartości i wektory własne: wielomian charakterystyczny $\det(A - \lambda E)$ jest rozpisany jak wyznacznik, rozłożony na czynniki, a jego pierwiastki to wartości własne (czynnik kwadratowy przez wyróżnik, także zespolone; sześcienny bez pierwiastka wymiernego w przybliżeniu). Wektory własne to rozwiązania $(A - \lambda E)v = o$ operacjami na wierszach do zredukowanej postaci schodkowej; dla każdej wartości własnej aplikacja podaje jej krotność algebraiczną i geometryczną. Chip Diagonalizacja buduje też P i D ($A = PDP^{-1}$) albo wyjaśnia, dlaczego macierzy nie da się zdiagonalizować. Rozkład według wartości osobliwych $A = U\Sigma V^T$ (SVD) i pseudoodwrotność A^+ działają dla macierzy dowolnego rozmiaru: SVD przez wartości własne A^TA (AA^T dla macierzy szerokiej), unormowane wektory własne i obliczoną z nich drugą stronę; pseudoodwrotność macierzy pełnego rzędu ze wzoru $(A^TA)^{-1}A^T$, w przeciwnym razie z rozkładu $A^+ = V\Sigma^+U^T$ – a gdyby wartości osobliwe były zagnieżdżonymi pierwiastkami, dokładnie z rozkładu rzędowego $A = BC$ przez $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Aplikacja oblicza też wartości własne i diagonalizację macierzy z jednym parametrem (do 3×3): rozkłada wielomian charakterystyczny z parametrem, zapisuje wartości własne jako jego funkcje i znajduje szczególne wartości parametru – gdzie dwie wartości własne się pokrywają (dwa czynniki mają wspólny

pierwiastek, czynnik kwadratowy zerowy wyróżnik) lub gdzie ogólne obliczenie wektorów własnych dzieliłoby przez zero; mówi też, dla jakich wartości wartości własne są zespolone. Przypadek ogólny rozwiązuje z parametrem, wartości szczególne podstawia i omawia osobno. Chip Diagonalizacja odpowiada wtedy, dla jakich wartości parametru macierz jest diagonalizowalna.

Postać Jordana macierzy kwadratowej (chip Postać Jordana, zapis jordan(A)) wynika z rzędów potęg $(A - \lambda E)^k$: dają one liczbę i rozmiary klatek Jordana, łańcuchy wektorów własnych uogólnionych buduje się od wektora górnego do wektora własnego, a P, J są sprawdzane ($A = PJP^{-1}$). Postać Jordana daje też potęgę A^n dla ogólnego n (chip Potęga A^n, zapis A^n; potęga klatki z dwumianu Newtona, wynik typu $2^{n-1}(n + 2)$) lub dużej liczby (A^10) oraz eksponentę macierzy e^{At} i e^A (chip Eksponenta macierzy, zapis e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – przydatną dla układów równań różniczkowych $x' = Ax$; zespolone wartości własne są przepisywane na cosinusy i sinusy. Wielomian minimalny (chip Wielomian minimalny, zapis minpoly(A)) znajduje się, próbując kandydatów – dzielniki wielomianu charakterystycznego – od najniższego stopnia; aplikacja przypomina twierdzenie Cayleya–Hamiltona $p(A) = O$ i dla macierzy odwracalnej otrzymuje odwrotność z $m(A) = O$.

Jak to wpisać

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Elementy spacjami, wiersze średnikiem (lub w nowych wierszach wewnątrz nawiasów).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Nazwane macierze każda w wierszu, obliczenie w ostatnim wierszu.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Wyznacznik, odwrotność i transpozycja, rząd.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Wartości własne, diagonalizacja, rozkład według wartości osobliwych, pseudoodwrotność.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Postać Jordana, potęga ogólna, eksponenta macierzy, wielomian minimalny.

Przykłady

Wyznacznik 3×3 regułą Sarrusa.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Wyznacznik

Wynik

$$\det A = -3$$

Kroki

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8\\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10\\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80\\ &= -3\end{aligned}$$

Rozwinięcie względem kolumny z największą liczbą zer.

Input: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Rozwinięcie Laplace'a

Wynik

$$\det A = 25$$

Kroki

- Rozwinięcie względem kolumny 2, każdy element razy jego minor ze znakiem jego pozycji

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot(-5)\\ &= 25\end{aligned}$$

Macierz odwrotna eliminacją Gaussa–Jordana.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Macierz odwrotna

Wynik

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kroki

- Obok macierzy zapisujemy macierz jednostkową. Operacje na wierszach zamieniają lewą część w macierz jednostkową

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Po lewej macierz jednostkowa, po prawej macierz odwrotna

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rząd przez sprowadzenie do postaci schodkowej.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Rząd

Wynik

$$h(A) = 2$$

Kroki

- Operacje na wierszach

  $R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Operacje na wierszach $R_3 \to R_3 - R_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz w postaci schodkowej

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rząd to liczba niezerowych wierszy postaci schodkowej: $h(A) = 2$

Rząd macierzy z parametrem.

Input: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Rząd

Wynik

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Kroki

- Macierz zawiera parametr a – dowolną liczbę rzeczywistą. Rząd może zależeć od jego wartości, więc przechodzimy przez przypadki.
- Operacje na wierszach $R_1 \leftrightarrow R_2$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$
- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$
- Kontynuujemy z elementem $1-a$, który może być zerem – zakładamy więc $a \neq 1$; przypadek $a = 1$ rozpatrujemy osobno.
- Operacje na wierszach $R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$
- Operacje na wierszach $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$
- Kontynuujemy z elementem $a+2$, który może być zerem – zakładamy więc $a \neq -2$; przypadek $a = -2$ rozpatrujemy osobno.
- Macierz w postaci schodkowej
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$
- Dla $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Dla $a = 1$: $h(A) = 1$ – macierz po wstawieniu wartości
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Dla $a = -2$: $h(A) = 2$ – macierz po wstawieniu wartości
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna z parametrem przez macierz dołączoną.

Input: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Macierz dołączona

Wynik

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Założenia: $a \neq 1$

Kroki

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$ – macierz odwrotna istnieje dokładnie wtedy, gdy wyznacznik nie jest zerem, czyli dla $a \neq 1$
- Dopełnienia algebraiczne elementów (ze znakiem (−1)^(i+j))

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Macierz dołączona to transpozycja macierzy dopełnień algebraicznych; dzielimy ją przez wyznacznik

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Iloczyn, transpozycja, wielokrotność i różnica macierzy.

Input: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Wynik

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kroki

- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Transponujemy, wiersze stają się kolumnami
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Mnożymy każdy element przez liczbę
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Dodajemy (odejmujemy) elementy na tych samych pozycjach
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Równanie macierzowe AX = B przez macierz odwrotną.

Input: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Wynik

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Kroki

- Mnożymy równanie przez macierz odwrotną po stronie niewiadomej: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.
- Dla macierzy 2×2 zamieniamy elementy na przekątnej głównej, zmieniamy znaki dwóch pozostałych i dzielimy przez wyznacznik

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Wartości i wektory własne macierzy symetrycznej.

Input: `[2 1; 1 2]` Wartości własne

Wynik

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 3$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 3$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Niewymierne wartości własne przez wyróżnik.

Input: `[1 2; 3 4]` Wartości własne

Wynik

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki: $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Pierwiastki czynnika kwadratowego z wyróżnika

  $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

  $(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t \neq 0$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

  $(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t \neq 0$

Diagonalizacja A = PDP⁻¹.

Input: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalizacja

Wynik

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 11$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 11$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Macierz ma tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wierszy, więc jest diagonalizowalna: P ma wektory własne jako kolumny, D wartości własne na przekątnej w tej samej kolejności, a $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Macierz jest symetryczna: jej wartości własne są rzeczywiste, a wektory własne różnych wartości własnych są ortogonalne. Po unormowaniu tworzą ortogonalną P, $P^{-1} = P^T$

Macierz, której nie da się zdiagonalizować.

Input: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalizacja

Wynik

Macierzy nie da się zdiagonalizować – nie ma dość liniowo niezależnych wektorów własnych.

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 2, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 2$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 2$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Dla $\lambda = 1$ krotność geometryczna 1 jest mniejsza niż algebraiczna 2 – macierz nie ma dość liniowo niezależnych wektorów własnych, więc nie da się jej zdiagonalizować.

Wartości własne macierzy z parametrem – wartości szczególne i ich przypadki.

Input: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Wartości własne

Wynik

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Szczególne wartości parametru – pokrywają się tam dwie wartości własne albo obliczenie wektorów własnych dzieliłoby przez zero: $a = 1,\ a = 2$. To osobne przypadki ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Przypadek ogólny $a \neq 1,\ a \neq 2$: wartości własne są różne, więc macierz ma tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wierszy, i jest diagonalizowalna.
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = a$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = a$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Przypadek $a = 1$ – po wstawieniu do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 2, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 2$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_3 = 2$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Dla $\lambda = 1$ krotność geometryczna 1 jest mniejsza niż algebraiczna 2 – macierz nie ma dość liniowo niezależnych wektorów własnych, więc nie da się jej zdiagonalizować.
- Przypadek $a = 2$ – po wstawieniu do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_2 = 2$ (krotność algebraiczna 2, geometryczna 2 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Dla jakich wartości parametru macierz jest diagonalizowalna.

Input: `[0 1; a 0]` Diagonalizacja

Wynik

Macierz jest diagonalizowalna dla: $a \neq 0$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Pierwiastki czynnika kwadratowego z wyróżnika

$$\lambda^2 - a = 0: \ D = 4a, \ \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \ \sqrt{a}$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \ \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Szczególne wartości parametru – pokrywają się tam dwie wartości własne albo obliczenie wektorów własnych dzieliłoby przez zero: $a = 0$. To osobne przypadki ($a = 0: \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Dla $a \in (-\infty; \ 0)$ wyróżnik jest ujemny, a wartości własne są sprzężonymi liczbami zespolonymi (diagonalizowalna tylko nad liczbami zespolonymi).
- Przypadek ogólny $a \neq 0$: wartości własne są różne, więc macierz ma tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wierszy, i jest diagonalizowalna.
- Przypadek $a = 0$ – po wstawieniu do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 0$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wektory własne dla $\lambda_1 = 0$ (krotność algebraiczna 2, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

- Dla $\lambda = 0$ krotność geometryczna 1 jest mniejsza niż algebraiczna 2 – macierz nie ma dość liniowo niezależnych wektorów własnych, więc nie da się jej zdiagonalizować.

Rozkład według wartości osobliwych macierzy 2×3.

Input: `[3 2 2; 2 3 -2]` Rozkład według wartości osobliwych (SVD)

Wynik

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Kroki

- Rozkład według wartości osobliwych $A = U\Sigma V^T$: macierz ma więcej kolumn niż wierszy, więc zaczynamy od mniejszej AA^T – jej wartości własne to kwadraty wartości osobliwych, jej wektory własne tworzą U. Obliczamy AA^T
- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)
$$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$$
- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ
$$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$
- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$
- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda-9)(\lambda-25)$$
- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 25$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej
$$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 25$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)
$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Wektory własne dla $\lambda_2 = 9$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej
$$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne dla $\lambda_2 = 9$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 – liczba niewiadomych swobodnych)
$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Wartości osobliwe to pierwiastki kwadratowe z wartości własnych, w kolejności malejącej: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ ma wymiary A
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne unormowane (podzielone przez swoją długość); dla wielokrotnej wartości własnej najpierw zortogonalizowane procedurą Grama–Schmidta. Są kolumnami
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
- Kolumny V dla niezerowych wartości osobliwych, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$
- Brakujące kolumny V uzupełniają bazę ortonormalną – unormowane rozwiązania $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonalne do wcześniejszych kolumn
$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
- Rozkład według wartości osobliwych
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Pseudoodwrotność macierzy o niezależnych kolumnach.

Input: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoodwrotność

Wynik

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Kroki

- Kolumny macierzy są liniowo niezależne (rząd 2 = liczba kolumn), więc $A^T A$ jest odwracalna, a pseudoodwrotność daje wzór:
- $A^{+} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$
- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

- $\det A^T A = 3 \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.
- Dla macierzy 2×2 zamieniamy elementy na przekątnej głównej, zmieniamy znaki dwóch pozostałych i dzielimy przez wyznacznik

  $$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$$

Pseudoodwrotność macierzy osobliwej z jej rozkładu według wartości osobliwych.

Input: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Wynik

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Kroki

- Macierz nie ma pełnego rzędu (rząd 1), więc pseudoodwrotność wynika z rozkładu według wartości osobliwych: $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- Rozkład według wartości osobliwych $A = U\Sigma V^T$: wartości własne A^TA to kwadraty wartości osobliwych, jej wektory własne tworzą V. Obliczamy A^TA
- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)
$$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$
- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ
$$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$
- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej
$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$
- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki
$$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda-25) = 0$$
- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 25$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej
$$\left(A^TA-\lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne dla $\lambda_1 = 25$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)
$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Wektory własne dla $\lambda_2 = 0$ to niezerowe rozwiązania układu jednorodnego; macierz w zredukowanej postaci schodkowej
$$\left(A^TA-\lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne dla $\lambda_2 = 0$ (krotność algebraiczna 1, geometryczna 1 − liczba niewiadomych swobodnych)
$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Wartości osobliwe to pierwiastki kwadratowe z wartości własnych, w kolejności malejącej: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ ma wymiary A
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Wektory własne unormowane (podzielone przez swoją długość); dla wielokrotnej wartości własnej najpierw zortogonalizowane procedurą Grama–Schmidta. Są kolumnami
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Kolumny U dla niezerowych wartości osobliwych, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Brakujące kolumny U uzupełniają bazę ortonormalną – unormowane rozwiązania $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonalne do wcześniejszych kolumn
$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Rozkład według wartości osobliwych
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Σ^+ to transponowana Σ z odwróconymi niezerowymi wartościami osobliwymi
$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Pseudoodwrotność
$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{} \end{pmatrix}$$

Pseudoodwrotność z rozkładu rzędowego A = BC.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoodwrotność

Wynik

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Kroki

- Macierz nie ma pełnego rzędu (rząd 2), a jej wartości osobliwe byłyby zagnieżdżonymi pierwiastkami, więc pseudoodwrotność liczymy dokładnie z rozkładu rzędowego A = BC – B to liniowo niezależne kolumny A, C niezerowe wiersze jej zredukowanej postaci schodkowej.
- Sprowadzamy macierz do zredukowanej postaci schodkowej; elementy wiodące są w kolumnach $1, 2$, B składa się z tych kolumn A, a C z niezerowych wierszy zredukowanej macierzy

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (- \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.
- Dla macierzy 2×2 zamieniamy elementy na przekątnej głównej, zmieniamy znaki dwóch pozostałych i dzielimy przez wyznacznik

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Mnożymy wiersz przez kolumnę (wymiary $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66 \cdot 93 - 78 \cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.
- Dla macierzy 2×2 zamieniamy elementy na przekątnej głównej, zmieniamy znaki dwóch pozostałych i dzielimy przez wyznacznik

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- Pseudoodwrotność

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Postać Jordana z dwiema klatkami jednej wartości własnej.

Input: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Postać Jordana

Wynik

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Dla $\lambda = 2$ (krotność algebraiczna 3) liczymy potęgi $A - \lambda E$ i ich rzędy h, aż rząd spadnie o krotność algebraiczną

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Klatek Jordana dla $\lambda = 2$ jest tyle, ile niezależnych wektorów własnych: $n - h(A-\lambda E)$ = 2. Liczba klatek rozmiaru co najmniej k to $h_{k-1} - h_k$, więc rozmiary klatek to $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Łańcuch długości 2 dla $\lambda = 2$: jego wektor szczytowy wybieramy w jądrze $(A-\lambda E)^k$ poza jądrem niższej potęgi i powłoką poprzednich łańcuchów i mnożymy go przez $A - \lambda E$ aż do wektora własnego

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Klatka rozmiaru 1 dla $\lambda = 2$ daje wektor własny

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Postać Jordana: kolumny P to wektory łańcuchów (każdy od swojego wektora własnego w górę), J ma wartości własne na przekątnej i jedynki nad nią wewnątrz klatek; $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Potęga A^n przez postać Jordana.

Input: `[3 1; -1 1]` Potęga A^n

Wynik

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Dla $\lambda = 2$ (krotność algebraiczna 2) liczymy potęgi $A - \lambda E$ i ich rzędy h, aż rząd spadnie o krotność algebraiczną

  $$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

  $$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = 0$$

- Klatek Jordana dla $\lambda = 2$ jest tyle, ile niezależnych wektorów własnych: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Liczba klatek rozmiaru co najmniej k to $h_{k-1} - h_k$, więc rozmiary klatek to 2: $J_2(2)$
- Łańcuch długości 2 dla $\lambda = 2$: jego wektor szczytowy wybieramy w jądrze $(A - \lambda E)^k$ poza jądrem niższej potęgi i powłoką poprzednich łańcuchów i mnożymy go przez $A - \lambda E$ aż do wektora własnego

  $$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Postać Jordana: kolumny P to wektory łańcuchów (każdy od swojego wektora własnego w górę), J ma wartości własne na przekątnej i jedynki nad nią wewnątrz klatek; $A = PJP^{-1}$

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Potęgę liczymy przez postać Jordana: $A^n = PJ^nP^{-1}$. Potęga klatki wynika z dwumianu Newtona – element o d miejsc nad przekątną to $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

  $$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Mnożymy macierze

  $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Eksponenta e^{At} – rozwiązanie układu x' = Ax.

Input: `A = [0 1; -2 -3]`

e^(At)

Wynik

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik 2×2 to iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$
- Klatka rozmiaru 1 dla $\lambda = -2$ daje wektor własny

  $$(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Klatka rozmiaru 1 dla $\lambda = -1$ daje wektor własny

  $$(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Wszystkie klatki Jordana mają rozmiar 1, więc J jest diagonalna, a macierz diagonalizowalna. Kolumny P to wektory własne, a $A = PJP^{-1}$

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Eksponentę liczymy przez postać Jordana: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. W klatce element o d miejsc nad przekątną to $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

- Mnożymy macierze

  $$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$$

- Dla t = 1

  $$e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$$

Wielomian minimalny, twierdzenie Cayleya–Hamiltona i odwrotność z niego.

Input: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Wielomian minimalny

Wynik

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Kroki

- Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego det(A − λE) = 0 (E to macierz jednostkowa). Na przekątnej odejmujemy λ

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Wielomian charakterystyczny rozłożony na czynniki

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Wartości własne (pierwiastek wielokrotny ma więcej nazw): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Wielomian minimalny dzieli wielomian charakterystyczny i ma wszystkie jego pierwiastki. Kandydaci od najniższego stopnia

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- Podstawiamy macierz – to nie jest macierz zerowa, więc ten kandydat nie jest wielomianem minimalnym.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Podstawiamy macierz – macierz zerowa; najniższy taki kandydat jest wielomianem minimalnym.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- Twierdzenie Cayleya–Hamiltona: każda macierz kwadratowa jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$$

- Macierz jest odwracalna (wyraz wolny wielomianu minimalnego nie jest zerem), więc m(A) = O daje macierz odwrotną

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Znane ograniczenia

- Macierze do 6×6.
- Wartości własne, diagonalizacja, rozkład według wartości osobliwych, postać Jordana, potęga A^n, eksponenta i wielomian minimalny dla macierzy do 4×4 i bez parametru; wartości własne i diagonalizacja z jednym parametrem do 3×3 (bez czynnika sześciennego z parametrem), wektory własne przypadku ogólnego tylko dla wartości własnych bez pierwiastka z parametru.
- Postać Jordana z krokami tylko dla wymiernych wartości własnych, w przeciwnym razie sam wynik; ogólna potęga A^n i e^{At} wymagają dokładnych wartości własnych (czynnik sześcienny bez pierwiastka wymiernego: tylko e^A w przybliżeniu).

22. Wektory

Wektor zapisz ze średnikami, każdy w osobnym wierszu: u = (1; 2; 3); jego nazwa może mieć indeks (F_1 = (3; 4)). Punkt zapisz z nawiasami kwadratowymi: A[1; 2; 3]. Wektory na płaszczyźnie mają dwie współrzędne, w przestrzeni trzy.

Pojedynczy punkt na płaszczyźnie jest przypisany do ćwiartki (lub osi) według znaków jego współrzędnych i narysowany. Przy dwóch punktach obok odległości |AB| jest chip „Środek odcinka” – współrzędne środka to średnie współrzędnych końców. Działają też słowa: „midpoint AB, A[1; 2], B[5; 6]”, „distance between A[1; 2] and B[4; 6]”, „quadrant A[3; −2]”.

Bez kolejnego wiersza chip mówi, co obliczyć: długość, sumę (wypadkową sił z jej wartością i kierunkiem), iloczyn skalarny (zero oznacza wektory prostopadłe), kąt (z cosinusa, dokładnie dla wartości z tablic, w przeciwnym razie w stopniach i minutach), iloczyn wektorowy (wyznacznikiem z i, j, k), pole równoległoboku i trójkąta, objętość równoległościanu i czworościanu iloczynem mieszanym albo liniową zależność. Dla punktów aplikacja najpierw buduje wektory AB, AC, AD od pierwszego punktu: dwa punkty dają odległość, trzy trójkąt, cztery czworościan.

W ostatnim wierszu możesz napisać wyrażenie: u + 2v, u·v (lub u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| i wektor AB z dwóch punktów. Wykres pokazuje wektory jako strzałki – na płaszczyźnie z siatką, w przestrzeni z osiami, które obracasz palcem; pole jest zacieniowane, a kąt zaznaczony łukiem.

Jak to wpisać

`u = (1; 2; 3)`	Wektor ze średnikami, każdy w osobnym wierszu.
`A[1; 2; 3]`	Punkt z nawiasami kwadratowymi.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Wyrażenie z wektorami w ostatnim wierszu.

Przykłady

Ćwiartka punktu.

Input: `A[3; -2]`

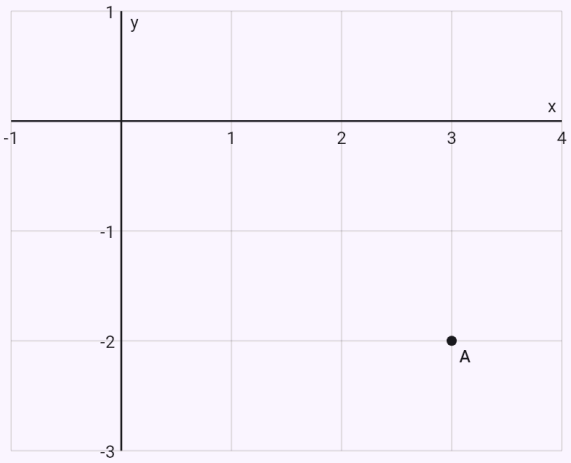
Wynik

$$A \in \mathrm{IV}$$

Kroki

- Punkt $A[3;\ -2]$ ma x dodatnie i y ujemne – leży w IV ćwiartce (prawy dolny róg).

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Środek odcinka.

Input: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Wynik

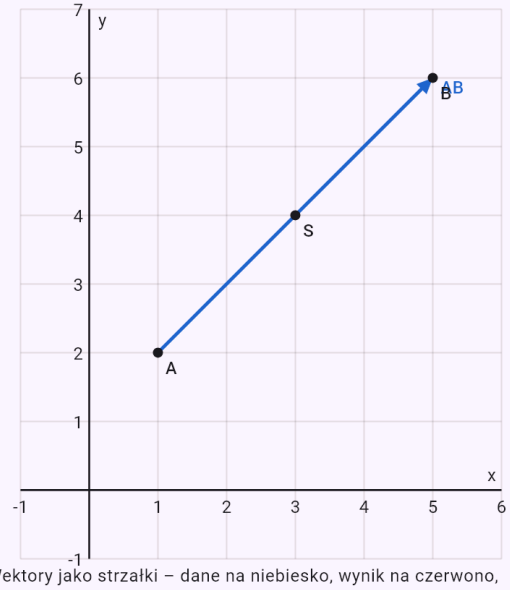
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Kroki

- Współrzędne środka odcinka to średnie współrzędnych końców

$$S_{AB} = \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] = \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] = [3;\ 4]$$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Długość wektora.

Input: `u = (1; 2; 3)`

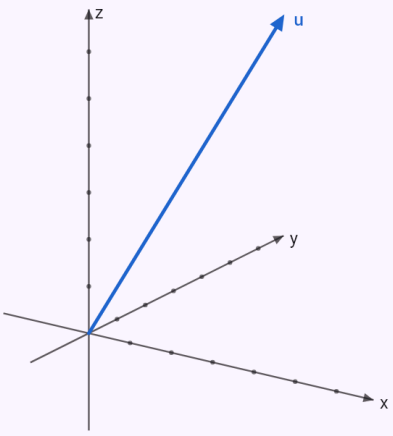
Wynik

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Kroki

- Długość wektora: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Kąt dwóch wektorów.

Input: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

Wynik

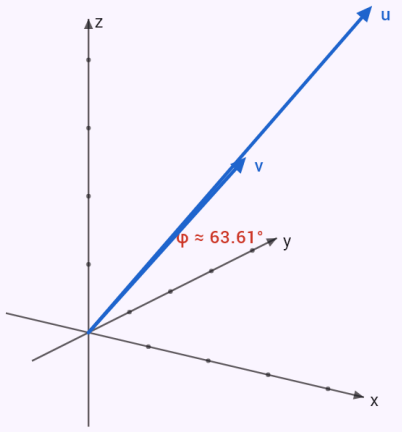
$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Kroki

- Iloczyn skalarny to suma iloczynów odpowiednich współrzędnych: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- Długość wektora: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Długość wektora: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Kąt wektorów z iloczynu skalarnego więc $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Suma i wielokrotność wektorów.

Input: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

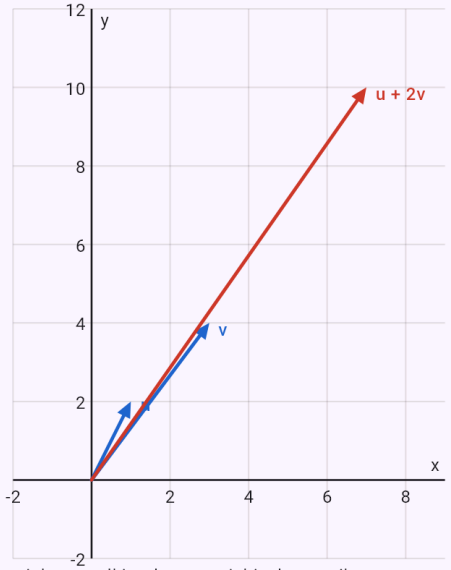
Wynik

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Kroki

- Wielokrotność wektora – każda współrzędna razy liczba: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Wektory dodaje się (odejmuje) współrzędna po współrzędnej: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Iloczyn wektorowy.

Input: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Iloczyn wektorowy

Wynik

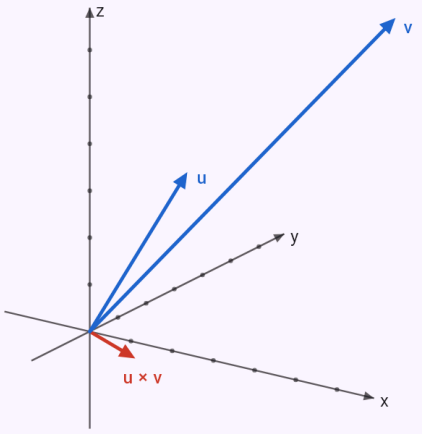
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Kroki

- Iloczyn wektorowy przez rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Pole trójkąta z trzech punktów.

Input: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Wynik

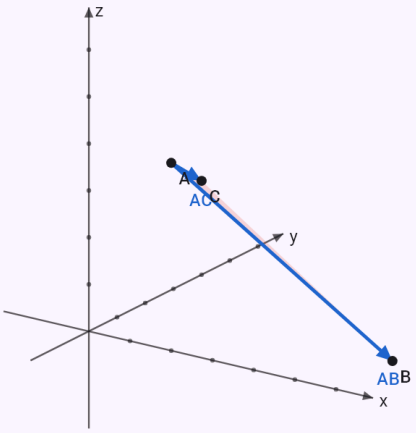
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Kroki

- Wektor z dwóch punktów – współrzędne punktu końcowego minus współrzędne początkowego
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$
- Wektor z dwóch punktów – współrzędne punktu końcowego minus współrzędne początkowego
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$
- Iloczyn wektorowy przez rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- Długość wektora
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- Pole równoległoboku to długość iloczynu wektorowego (w płaszczyźnie wartość bezwzględna wyznacznika):
  $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Trójkąt to połowa równoległoboku:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Objętość równoległościanu i czworościanu iloczynem mieszanym.

Input: `u = (1; 0; 2)`

`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Wynik

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Kroki

- Iloczyn mieszany jako wyznacznik ze współrzędnych wektorów

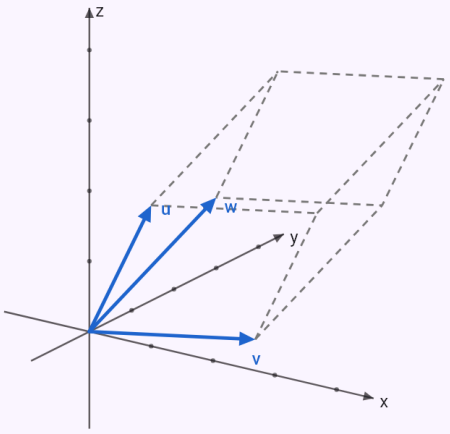
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0$$
$$= 13$$

- Objętość równoległościanu to wartość bezwzględna iloczynu mieszanego: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Czworościan ma jedną szóstą objętości równoległościanu: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Wypadkowa dwóch sił.

Input: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Suma (wypadkowa)

Wynik

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Kroki

- Wektory dodaje się (odejmuje) współrzędna po współrzędnej

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

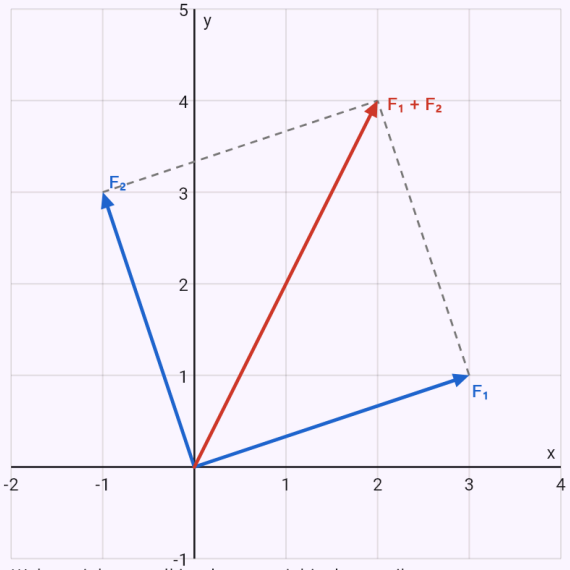
- Długość wektora

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- Kierunek wypadkowej – jej kąt z dodatnią półosią x:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2},\ \alpha \approx 63{,}43^\circ$$

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Liniowa zależność trzech wektorów.

Input: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Liniowa zależność

Wynik

Wektory są liniowo zależne.

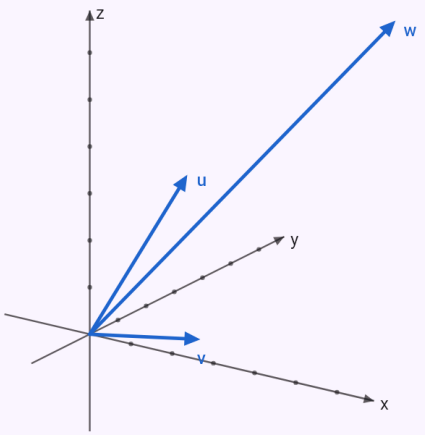
Kroki

- Reguła Sarrusa, iloczyny wzdłuż przekątnych głównych minus iloczyny wzdłuż pozostałych

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$
$$= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24$$
$$= 0$$

- Wyznacznik ze współrzędnych wektorów: $D = 0$. Niezerowy wyznacznik oznacza wektory liniowo niezależne, zerowy zależne.

Wykres



Wektory jako strzałki – dane na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Znane ograniczenia

- Współrzędne są liczbami (bez parametru), najwyżej sześć; wykres tylko na płaszczyźnie i w przestrzeni.

23. Proste i płaszczyzny

Geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni. Punkt zapisz jak przy wektorach: A[1; 2]. Prostą lub płaszczyznę nazwij i jej równanie napisz po dwukropku, każdą w osobnym wierszu: ogólne (p: 2x + 3y − 5 = 0), kierunkowe (p: y = 2x + 1), parametryczne (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) lub wektorowe (p: X = A + t·u). W przestrzeni równanie w x, y, z to płaszczyzna (ρ: x + y + z = 1), tak samo równania parametryczne z dwoma parametrami; prostą w przestrzeni zapisz parametrycznie lub jako przecięcie dwóch płaszczyzn (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Klawisze p:, q: i ρ: są na klawiaturze funkcji.

Chip mówi, co obliczyć – oferta zależy od tego, co wpiszesz: jedna prosta lub płaszczyzna dostaje wszystkie postacie swojego równania, dwie ich wzajemne położenie z przecięciem, kątem i odległością, punkt i prosta (płaszczyzna) odległość, prostopadłą i równoległą przez punkt, rzut i punkt symetryczny. Same dwa lub trzy punkty dostają wśród chipów wektorów prostą AB, symetralną i środek ciężkości trójkąta z wysokościami (w przestrzeni płaszczyznę ABC).

Odległość aplikacja oblicza ze wzoru albo – z chipem „Przez rzut” – jak na ćwiczeniach: prostopadła przez punkt, jej spodek i długość odcinka. Dla prostych skośnych znajduje też ich wspólną prostopadłą. Kąty są dokładne dla wartości z tablic, w przeciwnym razie w stopniach i minutach. Zadanie możesz też napisać w ostatnim wierszu: angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). Wykres pokazuje proste i płaszczyzny; w przestrzeni obracasz go palcem.

Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie: przesunięcie o wektor, obrót wokół środka o kąt (w stopniach, dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), jednokładność ze środkiem i skalą oraz symetrie środkowa i osiowa. Przekształcić można punkt, wielokąt (punkty po kolei: translation(A, B, C, u) to trójkąt), prostą i okrąg (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Zadanie napisz w ostatnim wierszu albo wybierz chip „Przesunięcie”, „Obrót”, „Jednokładność” lub „Symetria” – wtedy kąt i skala idą do osobnego wiersza (φ = 90, κ = 2), a środkiem jest punkt S. Kroki pokazują przekształcenie we współrzędnych i obraz każdego punktu, dla prostej obrazy dwóch punktów, dla okręgu środek i promień; wykres zarówno oryginał, jak i obraz.

Krzywe stożkowe w położeniu osiowym (bez członu xy): uzupełnienie do kwadratów do postaci kanonicznej lub wierzchołkowej, środek i promień okręgu, środek, półosie, mimośród i ogniska elipsy i hiperboli (u hiperboli też asymptoty), wierzchołek, parametr, ognisko i kierownica paraboli; wykres pokazuje krzywą z jej punktami.

Styczną w punkcie stożkowej zapisz słowami – „tangent to x^2 + y^2 = 25 at [3; 4]” – a aplikacja znajdzie ją, „połowiąc” równanie. Wzajemne położenie stożkowej i prostej („position of x^2/9 + y^2/4 = 1 and y = x + 1”) wynika z podstawienia i wyróżnika: sieczna, styczna lub prosta rozłączna, z punktami przecięcia. Sferę (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) uzupełnia się do kwadratów, aby uzyskać jej środek i promień.

Postacie prostej obejmują postać odcinkową x/p + y/q = 1. Styczne z punktu zewnętrznego („tangents to the circle x^2 + y^2 = 25 from the point [7; 1]”) znajduje się wśród prostych przez punkt o nachyleniu k – styczna to ta, której wyróżnik jest zerowy; prostą pionową sprawdza się osobno. Styczne równoległe lub prostopadłe do prostej („… parallel to the line 3x + 4y = 0”, „… perpendicular to the line y = x”) mają ten sam wektor normalny i niewiadomą stałą c. Sferę zapisz z nazwą, a płaszczyznę, prostą lub punkt w następnym wierszu: z płaszczyzną odległość środka porównuje się z promieniem (okrąg przekroju z jego środkiem i promieniem, punkt styczności lub nic), równania parametryczne prostej się podstawia i rozstrzyga wyróżnik, w punkcie sfery znajduje się płaszczyznę styczną.

Jak to wpisać

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Prosta równaniem ogólnym, kierunkowym lub parametrycznym, każda w osobnym wierszu.
`p: X = A + t·u`	Prosta równaniem wektorowym z punktu i wektora.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Płaszczyzna równaniem ogólnym (w przestrzeni).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Prosta w przestrzeni jako przecięcie dwóch płaszczyzn.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	Zadanie w ostatnim wierszu.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Przekształcenie geometryczne: figury, potem wektor, środek i kąt lub skala albo środek lub oś symetrii.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Krzywa stożkowa – równanie drugiego stopnia w x i y.

Przykłady

Wszystkie postacie równania prostej z jej równań parametrycznych.

Input: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

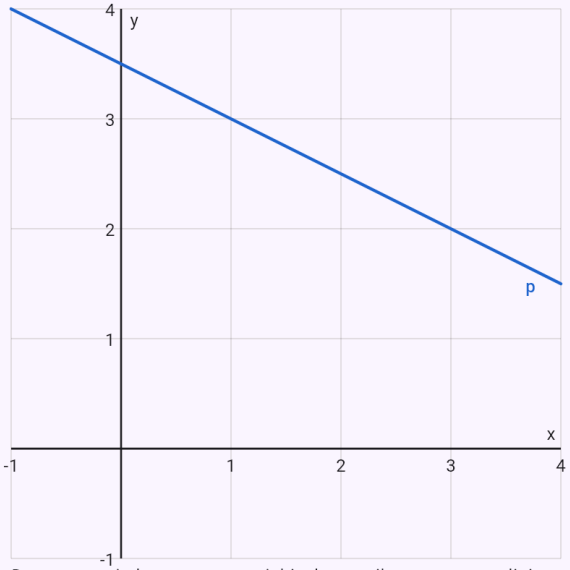
Wynik

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Kroki

- Równania parametryczne dają punkt (wyrazy stałe) i wektor kierunkowy (współczynniki przy parametrze): $P_p[1;\,3],\ \vec{u}_p = (2;\,-1)$
- Wektor normalny prostej jest prostopadły do jej kierunku – zamieniamy współrzędne i zmieniamy jeden znak: $\vec{u}_p = (2;\,-1)\ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\,2)$
- Równanie ogólne: współczynniki to współrzędne wektora normalnego, wyraz wolny wynika z punktu $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\,3] :\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0\ \Rightarrow\ c =$
- Postać kierunkowa – równanie ogólne rozwiązane względem y: $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Postać odcinkowa – mianowniki to odcinki odcięte na osiach x i y: $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Przecięcie dwóch prostych.

Input: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Wynik

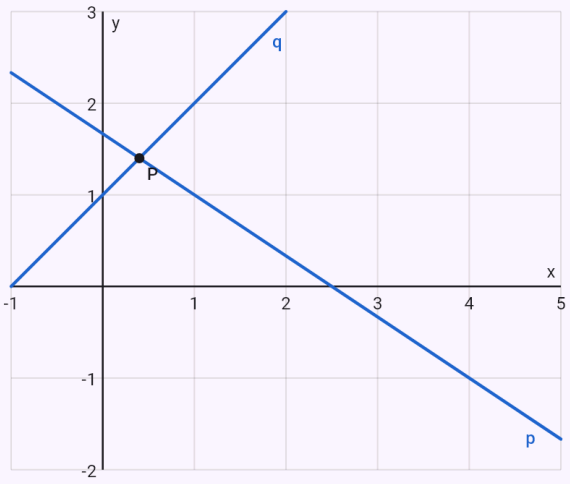
Proste przecinają się w:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Żaden wektor nie jest wielokrotnością drugiego – nie są równoległe
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- Punkt przecięcia rozwiązuje układ równań obu prostych (wzory Cramera)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$ <

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Odległość punktu od prostej ze wzoru.

Input: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

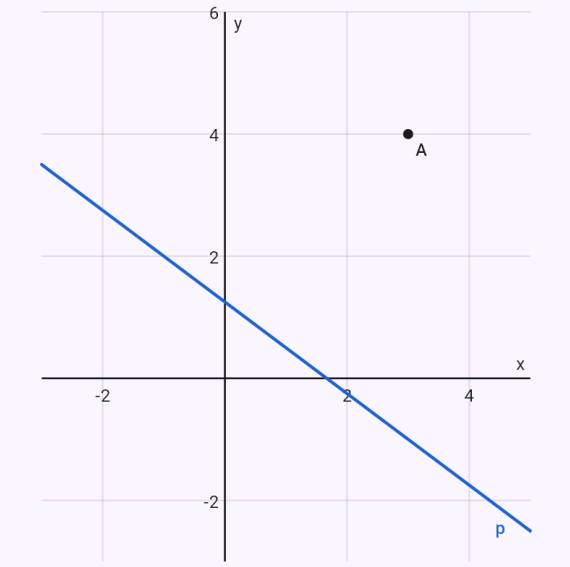
Wynik

$$v(A, p) = 4$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- Odległość punktu od prostej
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Ta sama odległość przez rzut.

Input: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Przez rzut

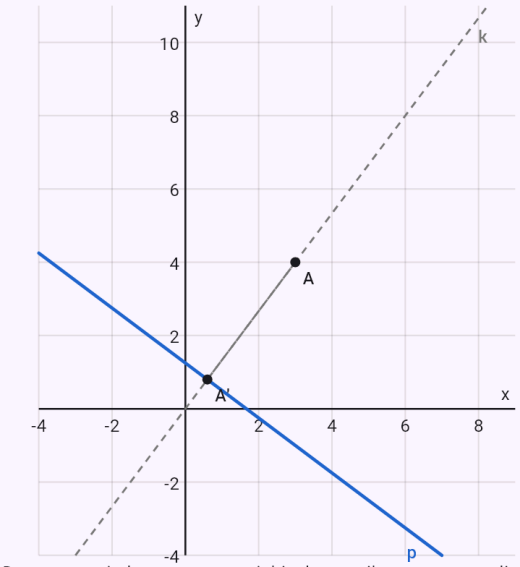
Wynik

$$v(A, p) = 4$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\, 4)$
- Prostopadła przez A do prostej p – wektor kierunkowy jednej prostej jest normalnym drugiej
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\, 4),\; k: x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Spodek prostopadłej A' to punkt, w którym spotyka p – podstawiamy i obliczamy t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- Odległość punktu od prostej
  $$v(A, p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Środek ciężkości, wysokości i ortocentrum trójkąta.

Input: `A[1; 2]`
`B[5; 2]`

C[3; 6] Środek ciężkości i wysokości

Wynik

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Kroki

- Środek ciężkości – średnia współrzędnych wierzchołków

  $T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$

- Wysokość z A jest prostopadła do przeciwległego boku – wektor boku jest jej wektorem normalnym, jej długość to odległość wierzchołka od boku

  $\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$

- Wysokość z B jest prostopadła do przeciwległego boku – wektor boku jest jej wektorem normalnym, jej długość to odległość wierzchołka od boku

  $\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$

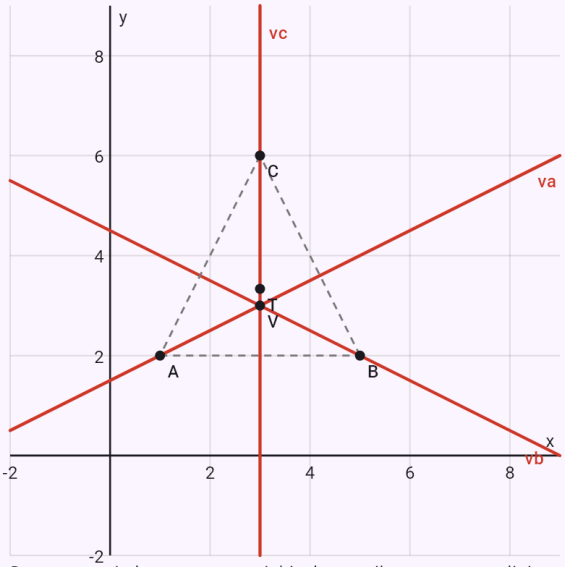
- Wysokość z C jest prostopadła do przeciwległego boku – wektor boku jest jej wektorem normalnym, jej długość to odległość wierzchołka od boku

  $\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$

- Ortocentrum – punkt przecięcia dwóch wysokości

  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Punkt odbity symetrycznie względem prostej.

Input: A[1; 2]

`p: x - y = 0` Symetria

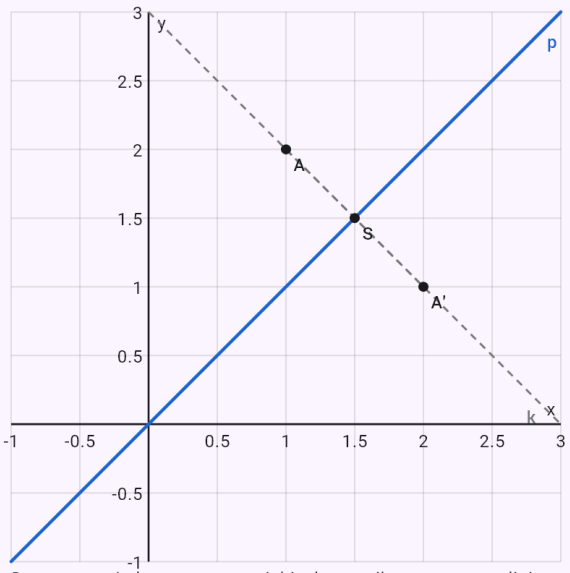
Wynik

$$A'[2;\ 1]$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- Prostopadła przez A do prostej p – wektor kierunkowy jednej prostej jest normalnym drugiej
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Spodek prostopadłej S to punkt, w którym spotyka p – podstawiamy i obliczamy t
  $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- Punkt symetryczny: środek (spodek prostopadłej) jest środkiem odcinka między punktem a jego obrazem
  $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Trójkąt przesunięty o wektor.

Input: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`translation(A, B, C, u)`

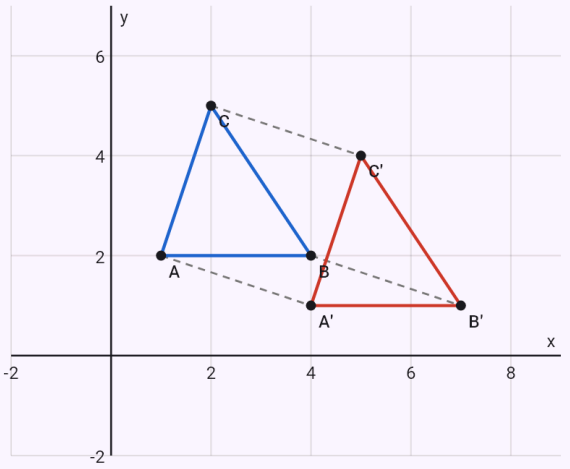
Wynik

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Kroki

- Przesunięcie o wektor: każdy punkt X przesuwa się o ten sam wektor, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- Obraz punktu: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- Obraz punktu: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- Obraz punktu: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Trójkąt obrócony o 90° wokół S.

Input: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

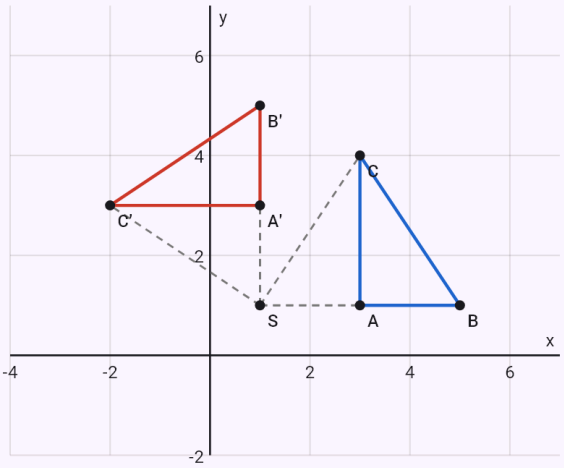
Wynik

$$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$$
$$C'[-2;\ 3]$$

Kroki

- Obrót wokół środka S o kąt φ (dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara): wektor X − S obracamy o φ i dodajemy do środka
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- Obraz punktu
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz punktu
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Obraz punktu
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Prosta i okrąg w jednokładności o skali 2.

Input: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
homothety(p, k, S, 2)
```

Wynik

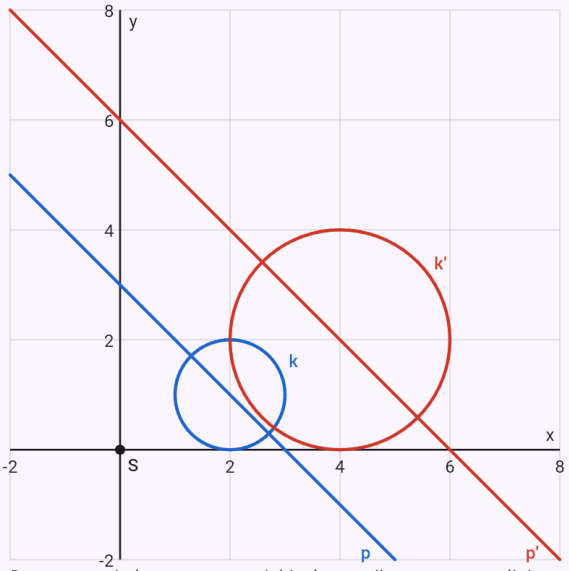
$$p' : x + y - 6 = 0$$

$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- Okrąg k – jego środek i promień z postaci kanonicznej (uzupełnienie do pełnych kwadratów)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Jednokładność o środku S i skali κ: wektor X − S mnożymy przez κ (ujemne κ umieszcza obraz po drugiej stronie środka): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- Obraz prostej p: przekształcamy dwa jej punkty, obrazem jest prosta przez ich obrazy – równoległa do pierwotnej
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- Wektor normalny prostej jest prostopadły do jej kierunku – zamieniamy współrzędne i zmieniamy jeden znak:
  $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- Równanie ogólne: współczynniki to współrzędne wektora normalnego, wyraz wolny wynika z punktu
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- Obraz okręgu k: przekształcamy środek, promień mnożymy przez |κ|
  $S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Okrąg odbity symetrycznie względem prostej – oś wybrana chipem.

Input: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Symetria

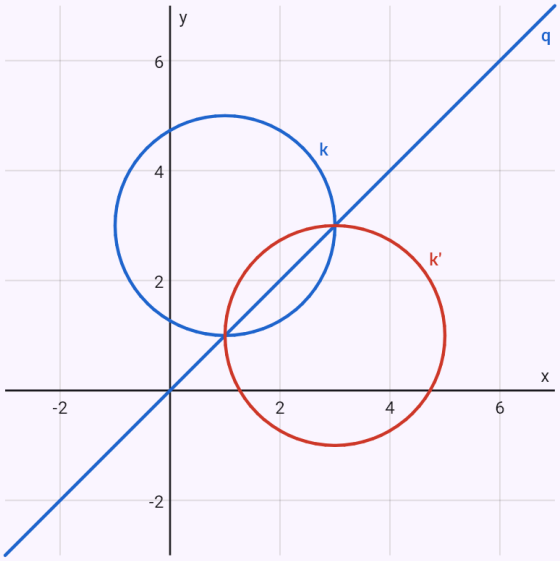
Wynik

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Kroki

- Okrąg k – jego środek i promień z postaci kanonicznej (uzupełnienie do pełnych kwadratów)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- Postać kierunkowa przepisana na równanie ogólne daje wektor normalny: $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Symetria osiowa: obraz leży na prostej prostopadłej do osi, która dzieli XX' na połowy – punkt przesuwa się o dwukrotność swojej odległości od osi wzdłuż wektora normalnego (a; b):
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- Obraz okręgu k: przekształcamy środek, promień się nie zmienia (przekształcenie jest izometrią):
  $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S'_k[3;\,1],\; r' = r = 2$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane.

Prosta przecięcia dwóch płaszczyzn.

Input: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Wynik

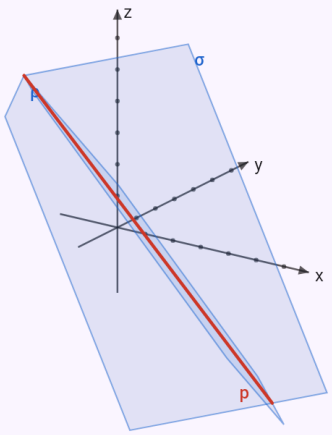
Płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej:

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Kroki

- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z):
  $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Żaden wektor nie jest wielokrotnością drugiego – nie są równoległe
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- Kierunek prostej przecięcia jest prostopadły do obu wektorów normalnych – ich iloczyn wektorowy
  $\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$
- Punkt P: wybieramy współrzędne, a pozostałą obliczamy z równania
  $z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$
- Prosta przecięcia – jej punkt i wektor kierunkowy:
  $p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Kąt prostej i płaszczyzny.

Input: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Kąt

Wynik

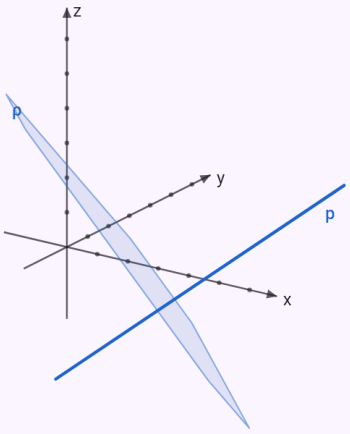
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Kroki

- Równania parametryczne dają punkt (wyrazy stałe) i wektor kierunkowy (współczynniki przy parametrze): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p = (1;\,2;\,1)$
- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- Kąt prostej i płaszczyzny: kąt kierunku i normalnej dopełnia go do 90°, stąd sinus więc $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Odległość i wspólna prostopadła prostych skośnych.

Input: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Odległość

Wynik

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Kroki

- Równania parametryczne dają punkt (wyrazy stałe) i wektor kierunkowy (współczynniki przy parametrze): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Równania parametryczne dają punkt (wyrazy stałe) i wektor kierunkowy (współczynniki przy parametrze): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- Odległość prostych skośnych

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- Wspólna prostopadła: X na pierwszej prostej i Y na drugiej z XY prostopadłym do obu kierunków – układ dla t i s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

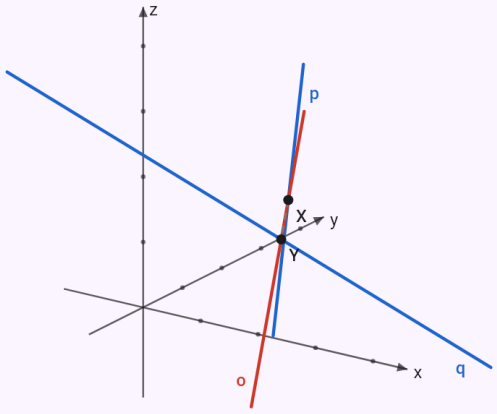
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Równania parametryczne – punkt plus parametr razy wektor kierunkowy:

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Okrąg – uzupełnienie do kwadratów, środek i promień.

Input: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Wynik

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

Kroki

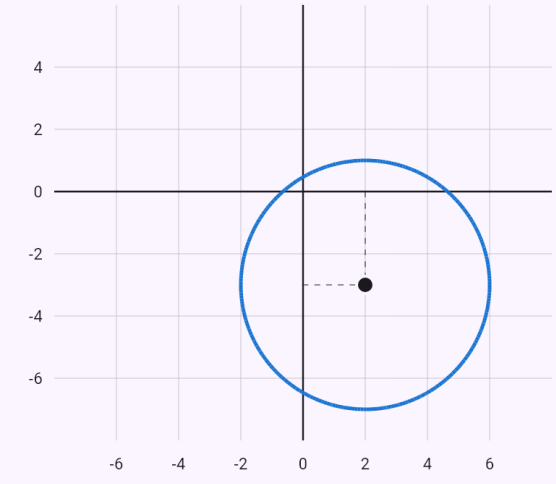
- Uzupełniamy do kwadratów

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- Równanie kanoniczne okręgu: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Środek $S = [2;\ -3]$, promień $r = 4$

Wykres



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Krzywa zadana równaniem w płaszczyźnie x, y.

Elipsa – półosie, mimośród i ogniska.

Input: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

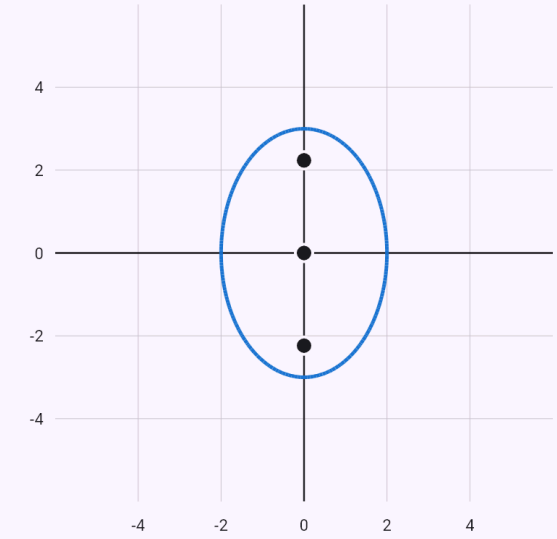
Wynik

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Kroki

- Równanie kanoniczne elipsy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Środek $S = [0;\ 0]$, półosie $a = 3,\ b = 2$ (oś wielka równoległa do osi y), mimośród liniowy $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, mimośród $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ogniska $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Wykres



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Krzywa zadana równaniem w płaszczyźnie x, y.

Hiperbola – ogniska i asymptoty.

Input: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

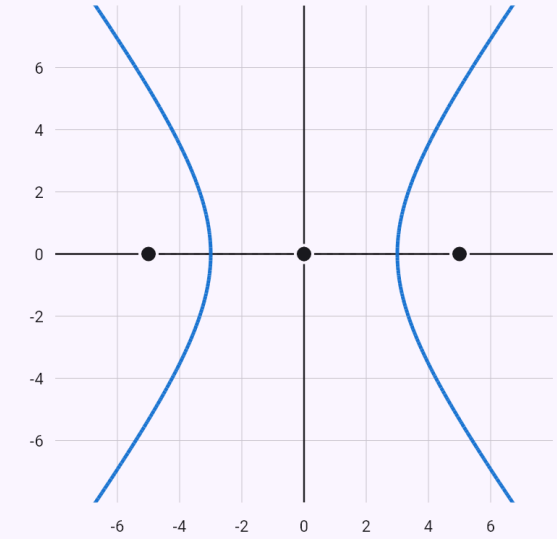
Wynik

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Kroki

- Równanie kanoniczne hiperboli: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Środek $S = [0;\ 0]$, półosie $a = 3,\ b = 4$ (oś rzeczywista równoległa do osi x), mimośród liniowy $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, mimośród $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, ogniska $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asymptoty $y = \pm\frac{4}{3}x$

Wykres



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Krzywa zadana równaniem w płaszczyźnie x, y.

Parabola – wierzchołek, ognisko i kierownica.

Input: `y^2 = 8x`

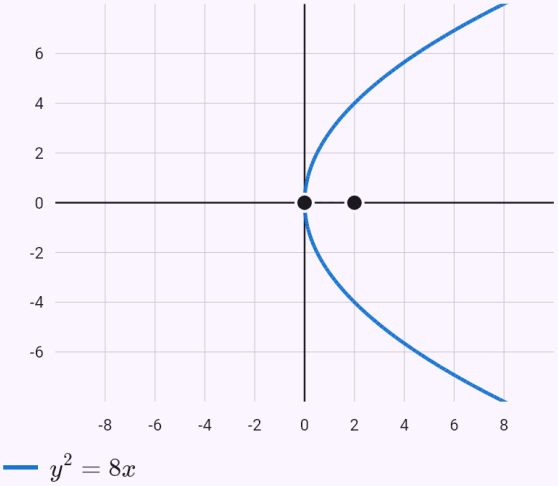
Wynik

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Kroki

- Równanie paraboli w postaci wierzchołkowej: $y^2 = 8x$
- Wierzchołek $V = [0;\ 0]$, parametr $p = 4$, oś równoległa do osi x, ognisko $F = [2;\ 0]$, kierownica $x = -2$

Wykres



$y^2 = 8x$

Krzywa zadana równaniem w płaszczyźnie x, y.

Styczna do okręgu w jego punkcie.

Input: `tangent to the circle x^2 + y^2 = 25 at [3; 4]`

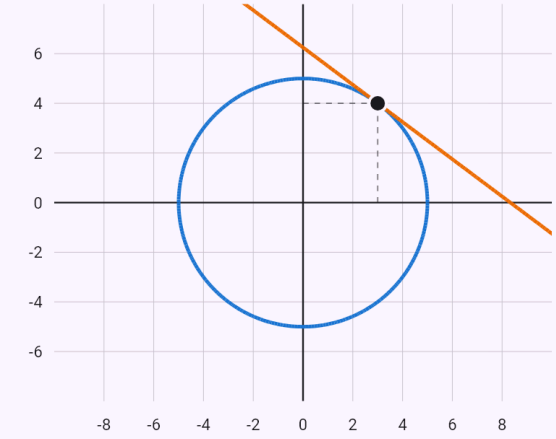
Wynik

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Kroki

- Punkt $T = [3;\ 4]$ leży na krzywej stożkowej – po podstawieniu: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- Styczna w punkcie $(x_0; y_0)$ krzywej stożkowej przez rozdwojenie: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \frac{x + x_0}{2}$, $y \to \frac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- Styczna: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Wykres



$x^2 + y^2 = 25$

$3x + 4y - 25 = 0$

Krzywa stożkowa i proste; zaznaczone punkty to punkty styczności, punkty przecięcia i dany punkt.

Styczne z punktu zewnętrznego – zerowy wyróżnik dla nachylenia k.

Input: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

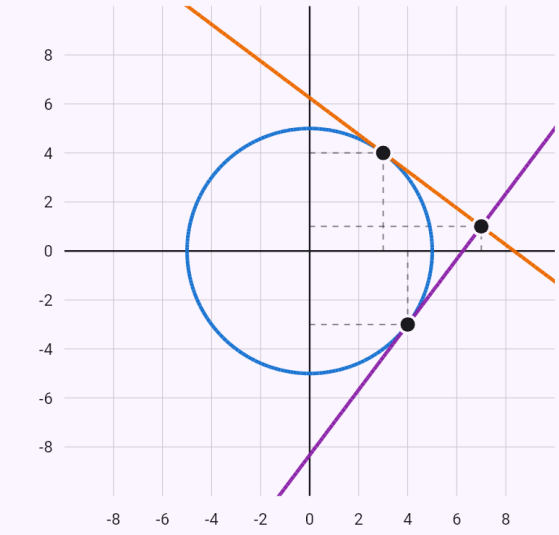
Wynik

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Kroki

- Punkt $M = [7;\ 1]$ nie leży na krzywej stożkowej – po podstawieniu: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, nie 0.
- Styczne szukamy wśród prostych przechodzących przez M o współczynniku kierunkowym k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Podstawiamy za y w równaniu krzywej stożkowej: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- Prosta jest styczną dokładnie wtedy, gdy równanie ma jeden (podwójny) pierwiastek – wyróżnik jest równy zeru: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Styczne: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; punkty styczności: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Wykres



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

Krzywa stożkowa i proste; zaznaczone punkty to punkty styczności, punkty przecięcia i dany punkt.

Styczne równoległe do prostej.

Input: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

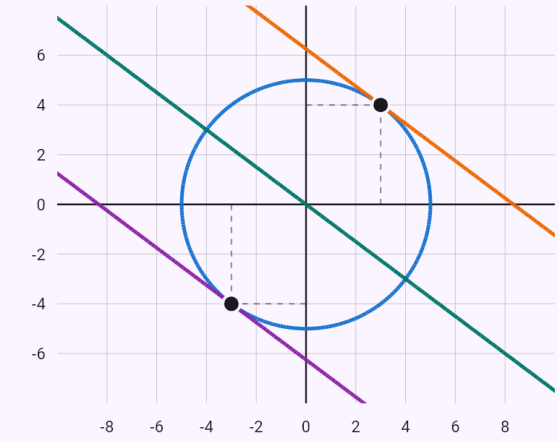
Wynik

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Kroki

- Styczne równoległe do prostej mają jej wektor normalny i różnią się tylko stałą c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Podstawiamy za y w równaniu krzywej stożkowej: $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- Prosta jest styczną dokładnie wtedy, gdy równanie ma jeden (podwójny) pierwiastek – wyróżnik jest równy zeru: $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Styczne: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; punkty styczności: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Wykres



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

Krzywa stożkowa i proste; zaznaczone punkty to punkty styczności, punkty przecięcia i dany punkt.

Wzajemne położenie elipsy i prostej.

Input: `position of x^2/9 + y^2/4 = 1 and y = x + 1`

Wynik

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

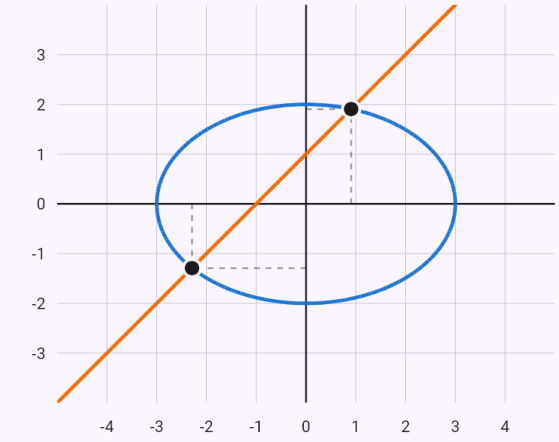
$$P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1+3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

Kroki

- Z prostej wyznaczamy y i podstawiamy do krzywej stożkowej: $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Wyróżnik $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ jest dodatni – prosta jest sieczną z dwoma punktami wspólnymi.
- Punkty przecięcia

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\right.}{13}\right.$$

Wykres



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

Krzywa stożkowa i proste; zaznaczone punkty to punkty styczności, punkty przecięcia i dany punkt.

Sfera – jej środek i promień.

Input: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Wynik

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Kroki

- Uzupełniamy do kwadratów

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- Postać kanoniczna sfery (ze środkiem): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Środek $S = [1;\ -2;\ 3]$, promień $r = 4$

Sfera i płaszczyzna – okrąg przekroju.

Input: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

```
ρ: x + y + z = 1
```

Wynik

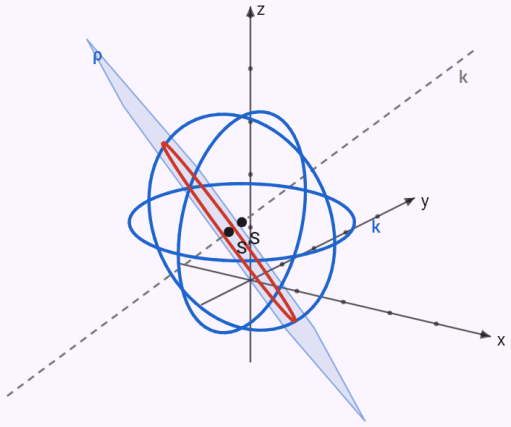
Płaszczyzna przecina sferę wzdłuż okręgu o środku i promieniu:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Kroki

- Uzupełnienie do pełnych kwadratów zamienia równanie sfery k na postać kanoniczną – środek i promień
  $k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow \ S[1;\ -2;\ 3$
- Równanie ogólne daje wektor normalny – współczynniki przy x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- Odległość punktu od płaszczyzny
  $v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$
- Odległość środka od płaszczyzny ρ jest mniejsza niż promień – płaszczyzna przecina sferę wzdłuż okręgu:
  $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$
- Prostopadła przez S do płaszczyzny ρ biegnie wzdłuż jej normalnej:
  $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$
- Spodek prostopadłej S' to punkt, w którym spotyka ρ – podstawiamy i obliczamy t
  $(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow \ t = -\frac{1}{3},\ S'\left[$
- Środkiem okręgu jest spodek prostopadłej poprowadzonej ze środka, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; promień z twierdzenia Pitagorasa
  $\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Sfera i prosta – punkty przecięcia.

Input: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Wynik

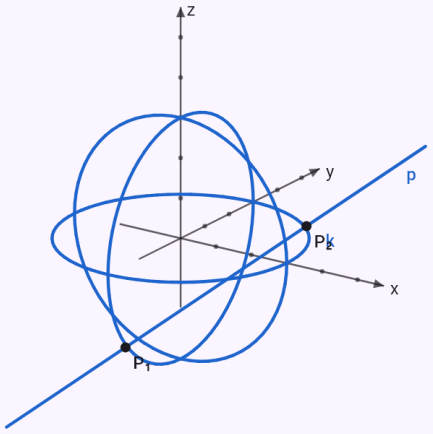
Prosta przecina sferę w dwóch punktach:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Kroki

- Uzupełnienie do pełnych kwadratów zamienia równanie sfery k na postać kanoniczną – środek i promień:
  $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- Równania parametryczne dają punkt (wyrazy stałe) i wektor kierunkowy (współczynniki przy parametrze):
  $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- Podstawiamy równania parametryczne prostej p do równania sfery
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- Wyróżnik $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ jest dodatni – prosta jest sieczną z dwoma punktami wspólnymi.
- Punkty przecięcia
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Wykres



Dane proste i płaszczyzny na niebiesko, wynik na czerwono, linie pomocnicze przerywane. Wektory w przestrzeni – obróć wykres, przeciągając go.

Znane ograniczenia

- Współrzędne i współczynniki są liczbami (bez parametru); stożkowe tylko w położeniu osiowym (bez członu xy).
- Przekształcenia geometryczne tylko na płaszczyźnie; okrąg jest na razie tylko przekształcany (bez odległości, położenia i stycznych).
- Wysokości trójkąta w przestrzeni tylko przez ich długości, bez równań i ich przecięcia.
- Nazwa prostej lub płaszczyzny to jedna litera (także z indeksem) – dlatego „a: 2x + 3 = 5” jest odczytywane jako prosta, a nie równanie.

24. Zadania konstrukcyjne

Zadania konstrukcyjne wpisuje się w formularzu – w sekcji „Zastosowania” na ekranie głównym, dziedzina Geometria (formularz „Zadania konstrukcyjne”). Podstawowym zadaniem jest trójkąt ABC z trzech elementów: trzech boków (bbb), dwóch boków i kąta między nimi (bkb), boku i dwóch kątów (kbk – trzeci kąt oblicza się z sumy 180°) albo dwóch boków i kąta naprzeciw jednego z nich (bbk). Długości są w centymetrach, kąty w stopniach.

Rozwiązanie odpowiada szkolnej praktyce: analiza (szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami), kroki konstrukcji w zapisie symbolicznym (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) i dyskusja liczby rozwiązań. Rysunek pod wynikiem przewija konstrukcję krok po kroku strzałkami – elementy dodane w kroku są wyróżnione kolorem. Wynik podaje też obliczone boki i kąty, więc możesz sprawdzić swój rysunek.

Dyskusja wyjaśnia, dlaczego zadanie nie ma rozwiązania (nierówność trójkąta, suma kątów, okrąg, który nie sięga półprostej) albo dlaczego ma dwa (bbk z kątem naprzeciw krótszego boku).

Trójkąt można też podać wysokością, środkową, promieniem okręgu opisanego lub wpisanego. Najpierw rysuje się bok, a trzeci wierzchołek leży tam, gdzie spotykają się dwa miejsca geometryczne: równoległa w odległości wysokości, okrąg wokół środka boku z promieniem równym środkowej, okrąg wokół końca, ramię kąta, łuk kąta nad bokiem lub okręgi opisane. Przy dwóch bokach i wysokości z ich wspólnego wierzchołka wysokość jest pierwsza; przy promieniu okręgu wpisanego, boku i kącie przy nim konstruuje się okrąg wpisany i styczną do niego.

Czworokąty: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez (AB ∥ CD) z boków a, b, c, d, przekątnych e, f, kątów α, β i wysokości v – elementy wybiera się w wierszach jak przy trójkącie. Zwykle najpierw jest trójkąt ABC lub ABD, a czwarty wierzchołek go uzupełnia; w przeciwnym razie przekątne dzielące się na połowy (w rombie prostopadłe), równoległa w odległości wysokości lub w trapezie trójkąt pomocniczy z przesunięcia boku AD lub przekątnej BD o wektor DC.

Miejsca geometryczne są w tym samym formularzu: symetralna odcinka, dwusieczna kąta, okrąg Talesa i łuki, z których odcinek widać pod danym kątem (dwa łuki symetryczne względem odcinka). Każde konstruuje się cyrklem i linijką krok po kroku; analiza wyjaśnia, dlaczego punkty leżą właśnie tam.

Okręgi i styczne: styczne z punktu do okręgu (punkty styczności na okręgu Talesa), wspólne styczne dwóch okręgów (przez okręgi pomocnicze z różnicą i sumą promieni), okrąg o danym promieniu styczny do ramion kąta, okręgi przez punkt styczne do prostej i okręgi przez dwa punkty. Dyskusja liczy rozwiązania według położenia – dwa okręgi mają na przykład cztery, trzy, dwie, jedną lub żadną wspólną styczną.

Zadania z warunkami: dana figura (odcinek AB, okrąg k i punkt A, prosta p i punkt A, okrąg k i prosta p, dwie przecinające się proste p, q) i dwa warunki, które szukany punkt musi spełniać – nad odcinkiem wierzchołek C trójkąta ABC, w przeciwnym razie punkt X. Warunki wybiera się w wierszach: odcinek jest widziany z punktu pod kątem (90° = okrąg Talesa), równo odległy od dwóch punktów lub dwóch prostych, odległość od punktu lub prostej, stosunek odległości od A i B (okrąg Apoloniusza), leży na prostej lub okręgu, prosta AX jest styczną do k, środek okręgu o promieniu ϱ stycznego do k, oraz A jest środkiem XY z Y na k lub p (symetria środkowa). Każdy warunek staje się miejscem geometrycznym punktów, szukany punkt jest w ich przecięciu; dyskusja liczy rozwiązania (nad odcinkiem w jednej półpłaszczyźnie, druga daje przystające odbicia lustrzane). Pod wynikiem są dla sprawdzenia odległości punktu od danych punktów i prostych.

Ogólne zależności między większą liczbą punktów (z okręgiem k lub bez): punkty A do H są dane wierszami zależności – punkt na k, środek, styczna do k, długość, stosunek długości, prostopadłość, równoległość, punkt na prostej, kąt i trójkąt (tylko co narysować). Zależności stają się równaniami we współrzędnych (środek S w początku układu, pierwszy punkt na osi x), rozwiązywanymi dokładnie, z pierwiastkami kwadratowymi. Wynikiem są długości między punktami (z okręgiem też jako wielokrotności r), sprawdzenie i liczba rozwiązań z dokładnością do przystawania. Gdy to możliwe, następuje szkolna konstrukcja: każdy punkt na dwóch miejscach geometrycznych – danym okręgu, odległości, prostej, stycznej, środku, symetrii środkowej – a obliczone długości konstruuje się jako przeciwprostokątną lub przyprostokątną trójkąta prostokątnego albo z twierdzenia o wysokości; rozwiązanie pokazuje też potęgę punktu i kąt między styczną a cięciwą, gdy zachodzą. W przeciwnym razie uczciwie tylko obliczenie i rysunek.

Przekroje brył: sześcian, prostopadłościan, graniastosłup i ostrosłup prawidłowy o podstawie o 3 do 6 bokach (wierzchołki ABC… i A'B'C'…, wierzchołek ostrosłupa V) oraz czworościan foremny ABCD. Płaszczyzna przekroju jest dana punktami X, Y, Z, po jednym w wierszu: AE=2 to punkt na odcinku AE w odległości 2 cm od A – odcinkiem może być krawędź, przekątna ściany lub bryły albo oś SS' (S, S' środki podstaw), a odległość większa od niego daje punkt na jego przedłużeniu; X: AB = 1:2 to punkt X dzielący AB w stosunku 1 : 2. W kolejnych wierszach można użyć punktów pomocniczych. Bryła jest w rzucie ukośnym z niewidocznymi krawędziami przerywanymi; trójkąt, pięciokąt lub sześciokąt foremny w podstawie rysuje się najpierw obok w rzeczywistej wielkości i przenosi do rzutu. Przekrój buduje się bok po boku według szkolnych reguł: punkty w jednej ścianie się łączy, równoległe ściany przecina się wzdłuż równoległych, prosta boku spotyka prostą krawędzi w punkcie pomocniczym T, który leży też w sąsiedniej ścianie, a prostą punktu wewnątrz bryły przenosi się do podstawy pomocniczą płaszczyzną pionową. Pod rysunkiem gotowy przekrój w przestrzeni można obracać palcem.

Przykłady

Trójkąt z trzech boków (bbb).

Input: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

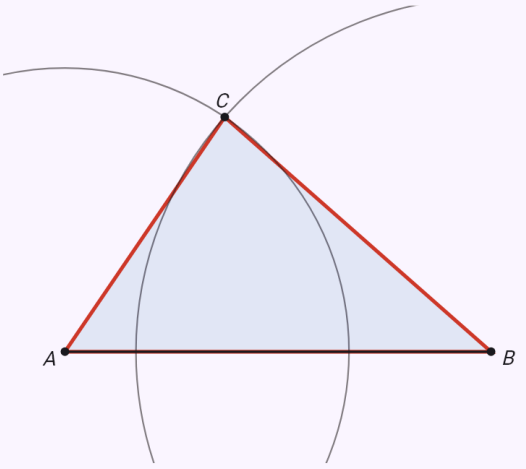
Wynik

$$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – okrąg l o środku B i promieniu a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – trzeci wierzchołek to punkt przecięcia.
- 5. $\triangle ABC$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: nierówność trójkąta $a + b > c$ jest spełniona, więc okręgi się przecinają. W jednej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez pierwszy bok zadanie ma jedno rozwiązanie (w drugiej jest jego przystające odbicie).

Wykres



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Dwa boki i kąt między nimi (bkb).

Input: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

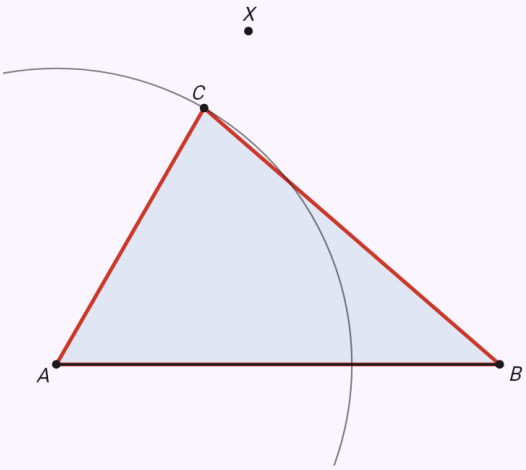
Wynik

$$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – konstruujemy kąt α; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – trzeci wierzchołek to punkt przecięcia.
- 5. $\triangle ABC$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w jednej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez pierwszy bok zadanie ma jedno rozwiązanie (w drugiej półpłaszczyźnie jest jego przystające odbicie).

Wykres



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Bok i dwa kąty, jeden z nich nie przy boku – trzeci kąt jest obliczany (kbk).

Input: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

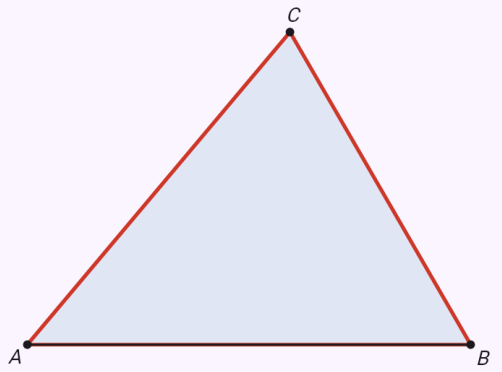
Wynik

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Trzeci kąt z sumy kątów w trójkącie: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 50^\circ$ – konstruujemy kąt α; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 60^\circ$ – konstruujemy kąt β; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{BY}$
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – trzeci wierzchołek to punkt przecięcia.
- 5. $\triangle ABC$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w jednej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez pierwszy bok zadanie ma jedno rozwiązanie (w drugiej półpłaszczyźnie jest jego przystające odbicie).

Wykres



Krok 5 z 5
5. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Kąt naprzeciw krótszego z dwóch boków – dwa rozwiązania (bbk).

Input: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Wynik

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

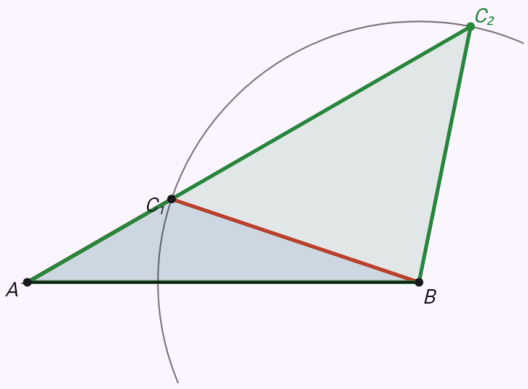
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – konstruujemy kąt α; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku B i promieniu a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – punkty przecięcia są dwa, każdy jest trzecim wierzchołkiem jednego trójkąta.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: okrąg przecina półprostą w dwóch punktach – w jednej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez pierwszy bok zadanie ma dwa rozwiązania, dwa różne trójkąty.

Wykres



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Boki łamiące nierówność trójkąta.

Input: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

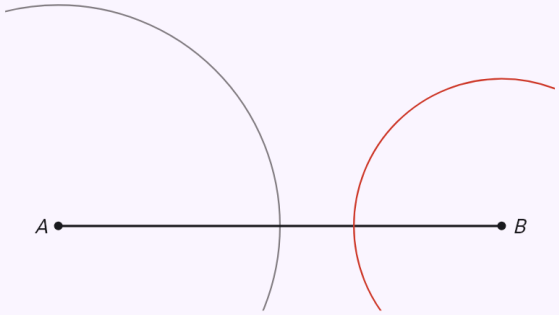
Wynik

Figury o danych elementach nie da się skonstruować.

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – okrąg l o środku B i promieniu a
- Dyskusja: nierówność trójkąta nie jest spełniona ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – okręgi się nie przecinają i trójkąta nie ma.

Wykres



Krok 3 z 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Bok c, wysokość i środkowa na niego – dwa rozwiązania.

Input: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Wynik

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

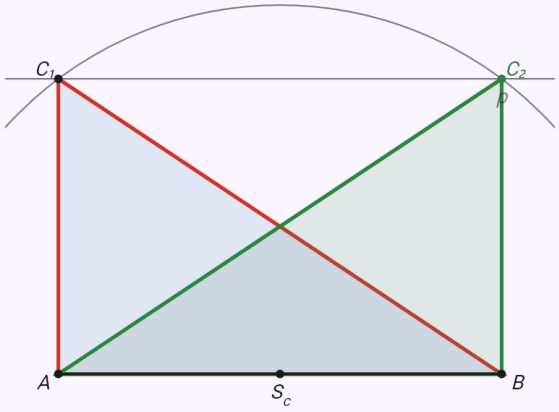
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – prosta p równoległa do AB w odległości v_c
- 3. $S_c;\ S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – środek S_c odcinka AB (tam, gdzie przecina go symetralna).
- 4. $k;\ k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – okrąg k o środku S_c i promieniu t_c
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in p \cap k$ – punkty przecięcia są dwa, każdy jest trzecim wierzchołkiem jednego trójkąta.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w półpłaszczyźnie nad pierwszym bokiem zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma tyle samo rozwiązań (w drugiej półpłaszczyźnie są ich przystające odbicia).

Wykres



Krok 6 z 6

6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Bok c, wysokość na niego i kąt naprzeciwległy – łuk kąta nad bokiem.

Input: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Wynik

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

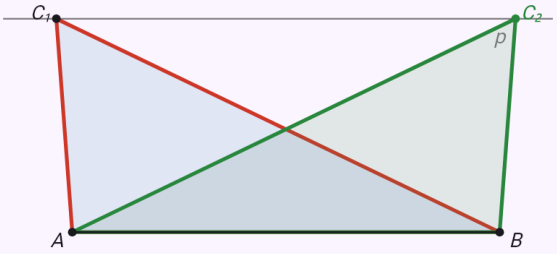
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – prosta p równoległa do AB w odległości v_c
- 3. $k;\ |\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – łuk k, z którego odcinek AB widać pod kątem γ (skonstruowany jak w „Łuki danego kąta").
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in p \cap k$ – punkty przecięcia są dwa, każdy jest trzecim wierzchołkiem jednego trójkąta.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w półpłaszczyźnie nad pierwszym bokiem zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma tyle samo rozwiązań (w drugiej półpłaszczyźnie są ich przystające odbicia).

Wykres



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Bok, promień okręgu opisanego i drugi bok – dwa okręgi opisane.

Input: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Wynik

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

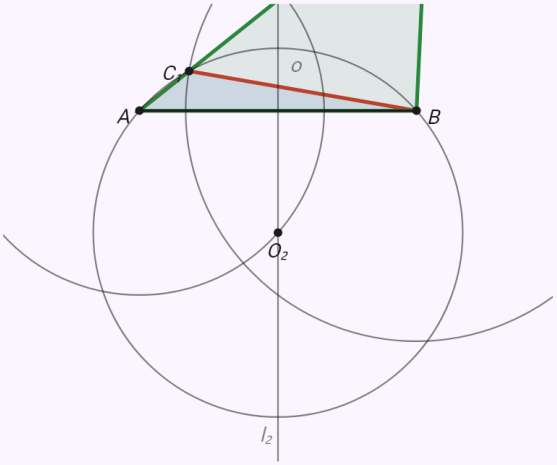
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – symetralna o odcinka AB, skonstruowana jak w „Symetralna odcinka".
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – punkty przecięcia O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – okrąg opisany l_1, l_2 o środku O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – okrąg m o środku B i promieniu a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – punkty przecięcia są dwa, każdy jest trzecim wierzchołkiem jednego trójkąta.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w półpłaszczyźnie nad pierwszym bokiem zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma tyle samo rozwiązań (w drugiej półpłaszczyźnie są ich przystające odbicia).

Wykres



Krok 8 z 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Dwa boki i wysokość z ich wspólnego wierzchołka – najpierw wysokość.

Input: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Wynik

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

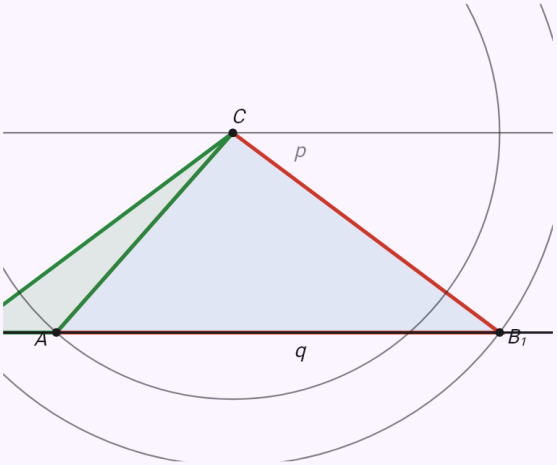
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – dowolna prosta q, na której leży bok AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – prosta p równoległa do q w odległości v_c
- 3. C; $C \in p$ – dowolny punkt C prostej p
- 4. k; $k(C;\, 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku C i promieniu b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – jeden z punktów przecięcia, A (drugi daje trójkąt przystający).
- 6. l; $l(C;\, 5\,\text{cm})$ – okrąg l o środku C i promieniu a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – punkty przecięcia są dwa, każdy jest trzecim wierzchołkiem jednego trójkąta.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: okrąg l przecina prostą q w dwóch punktach – zadanie ma dwa rozwiązania, dwa różne trójkąty (drugi punkt przecięcia okręgu k daje tylko przystające).

Wykres



Krok 8 z 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Bok, kąt przy nim i promień okręgu wpisanego – styczna przez okrąg Talesa.

Input: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

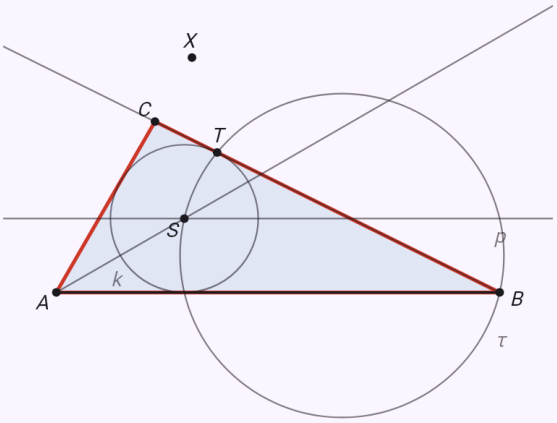
Wynik

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Kroki

- Analiza: szkic gotowego trójkąta z wyróżnionymi danymi elementami – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – konstruujemy kąt α; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $o;\ o = \overrightarrow{AY},\ |\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – dwusieczna o kąta α (skonstruowana jak w „Dwusieczna kąta"); leży na niej środek okręgu wpisanego.
- 4. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – prosta p równoległa do AB w odległości ϱ
- 5. $S;\ S \in o \cap p$ – punkt przecięcia S
- 6. $k;\ k(S;\ \varrho)$ – okrąg wpisany k o środku S
- 7. $\tau;\ \tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – okrąg Talesa τ nad odcinkiem BS
- 8. $T;\ T \in \tau \cap k$ – punkt styczności T stycznej z B (drugi punkt przecięcia to punkt styczności na pierwszym boku).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – styczna z punktu B do okręgu wpisanego.
- 10. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – trzeci wierzchołek to punkt przecięcia.
- 11. $\triangle ABC$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w jednej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez pierwszy bok zadanie ma jedno rozwiązanie (w drugiej półpłaszczyźnie jest jego przystające odbicie).

Wykres



Krok 11 z 11
11. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Prostokąt z boku i przekątnej – kąt prosty przy B.

Input: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

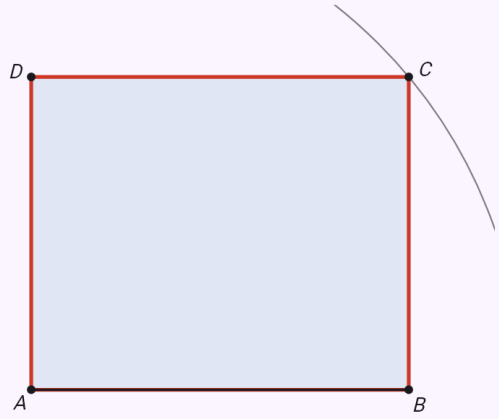
Wynik

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): bok AB z pozostałymi danymi elementami wyznacza trójkąt ABC lub ABD, konstruowany jak zadanie o trójkącie. Czwarty wierzchołek go uzupełnia – przeciwległe boki równoległoboku są równe i równoległe.
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$ – rysujemy bok a
- 2. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 90^\circ$ – konstruujemy kąt β; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{BY}$
- 3. $k;\ k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu e
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – punkt przecięcia C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – czwarty wierzchołek D: przeciwległe boki są równe, więc leży na okręgach o środkach C, A i promieniach $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: zadanie ma jedno rozwiązanie – każdy inny taki czworokąt jest do niego przystający.

Wykres



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Romb z przekątnych – wierzchołki na symetralnej AC.

Input: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

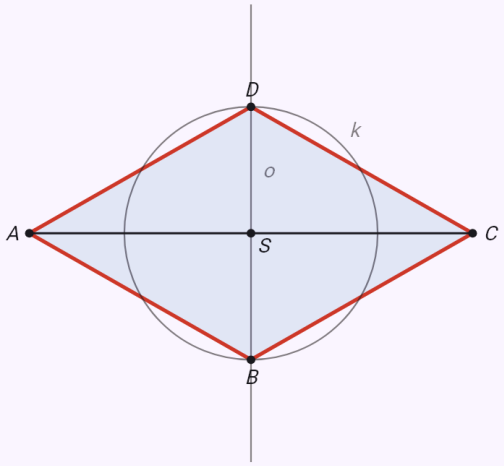
Wynik

$$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$$
$$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$$
$$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): przekątne kwadratu i rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy. Wierzchołki B i D leżą więc na symetralnej AC, w odległości połowy drugiej przekątnej od jej środka S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – rysujemy przekątną AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – symetralna o odcinka AC, skonstruowana jak w „Symetralna odcinka".
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – okrąg k o środku S i promieniu $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – punkty przecięcia B, D
- 5. $ABCD$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: zadanie ma jedno rozwiązanie – każdy inny taki czworokąt jest do niego przystający.

Wykres



Krok 5 z 5
5. $ABCD$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Równoległobok z dwóch boków i przekątnej – najpierw trójkąt ABC.

Input: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

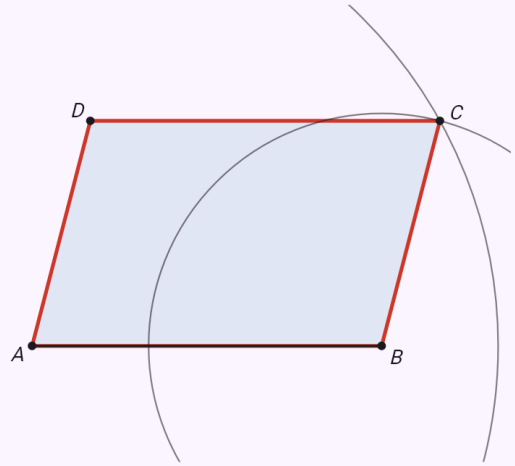
Wynik

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): bok AB z pozostałymi danymi elementami wyznacza trójkąt ABC lub ABD, konstruowany jak zadanie o trójkącie. Czwarty wierzchołek go uzupełnia – przeciwległe boki równoległoboku są równe i równoległe.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy bok a
- 2. $k;\ k(A;\ 8\,\text{cm})$ – okrąg k o środku A i promieniu e
- 3. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg l o środku B i promieniu b
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – punkt przecięcia C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – czwarty wierzchołek D: przeciwległe boki są równe, więc leży na okręgach o środkach C, A i promieniach $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: zadanie ma jedno rozwiązanie – każdy inny taki czworokąt jest do niego przystający.

Wykres



Krok 6 z 6
6. $ABCD$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Trapez z czterech boków – trójkąt pomocniczy EBC.

Input: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

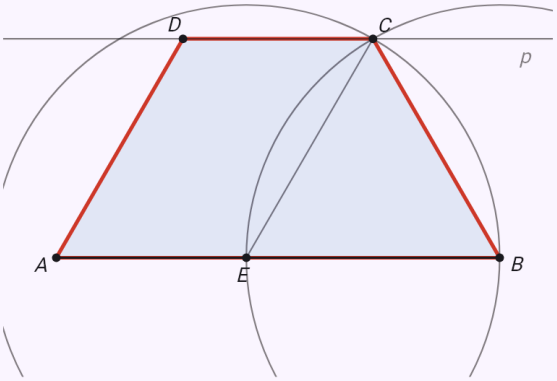
Wynik

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): przesunięcie boku AD o wektor DC daje trójkąt EBC z E na AB i |AE| = c. Jego boki to |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d, a kąty przy E i B to α i β. Konstruujemy go najpierw, a D dopełniamy na prostej równoległej do AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – rysujemy bok a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – punkt E w odległości $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg k o środku E i promieniu d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – okrąg l o środku B i promieniu b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – punkt przecięcia C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – wierzchołek D na prostej równoległej do AB przez C, w odległości $3\,\text{cm}$ od niego.
- 7. $ABCD$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: zadanie ma jedno rozwiązanie – każdy inny taki czworokąt jest do niego przystający.

Wykres



Krok 7 z 7
7. $ABCD$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Trapez z trzech boków i kąta – dwa rozwiązania.

Input: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Wynik

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

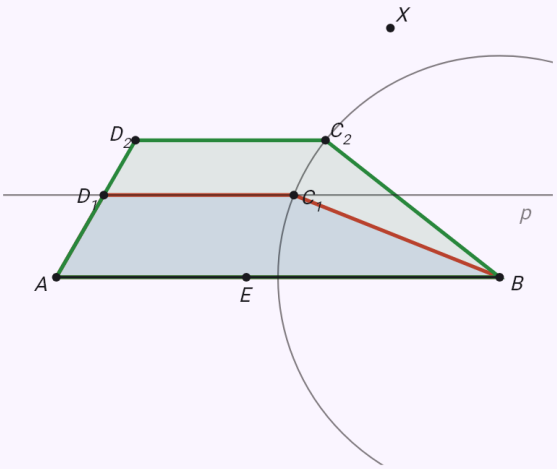
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Kroki

- Analiza ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): przesunięcie boku AD o wektor DC daje trójkąt EBC z E na AB i |AE| = c. Jego boki to |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d, a kąty przy E i B to α i β. Konstruujemy go najpierw, a D dopełniamy na prostej równoległej do AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – rysujemy bok a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – punkt E w odległości $3\,\text{cm}$ od A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – konstruujemy kąt α; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – okrąg k o środku B i promieniu b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – punkty przecięcia C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – wierzchołek D_1 na prostej równoległej do AB przez C_1, w odległości $3\,\text{cm}$ od niego.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – wierzchołek D_2 na prostej równoległej do AB przez C_2, w odległości $3\,\text{cm}$ od niego.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: punkty przecięcia są dwa – zadanie ma dwa rozwiązania, dwa różne czworokąty.

Wykres



Krok 8 z 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Symetralna odcinka AB długości 6 cm.

Input: `construction(segment_bisector; d=6)`

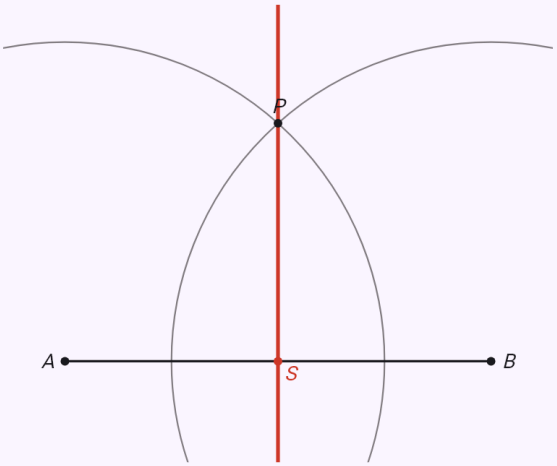
Wynik

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 6\,\text{cm}$): punkt X jednakowo odległy od A i B jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABX – leży na prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez jego środek, czyli na symetralnej.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy odcinek AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – okrąg k o środku A i promieniu $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – okrąg l o środku B i tym samym promieniu.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – punkty przecięcia P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – prosta o to symetralna: zbiór wszystkich punktów jednakowo odległych od A i B.

Wykres



Krok 5 z 5

$5.\ o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Dwusieczna kąta 70°.

Input: `construction(angle_bisector; phi=70)`

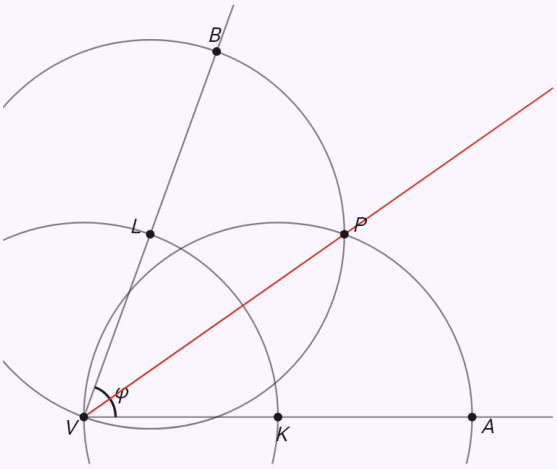
Wynik

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Kroki

- Analiza ($|\angle AVB| = 70^\circ$): punkt wewnątrz kąta jednakowo odległy od obu ramion leży na półprostej dzielącej kąt na połowy – na dwusiecznej kąta.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – rysujemy kąt $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – okrąg k o środku V i dowolnym promieniu.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – punkty przecięcia K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – okrąg m o środku K i promieniu $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – okrąg n o środku L i tym samym promieniu.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – punkt przecięcia P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – półprosta o to dwusieczna kąta: dzieli kąt na połowy, a jej punkty są jednakowo odległe od obu ramion.

Wykres



Krok 7 z 7

$7.\ o;\ o = \overrightarrow{VP}$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Okrąg Talesa nad odcinkiem 5 cm.

Input: `construction(thales; d=5)`

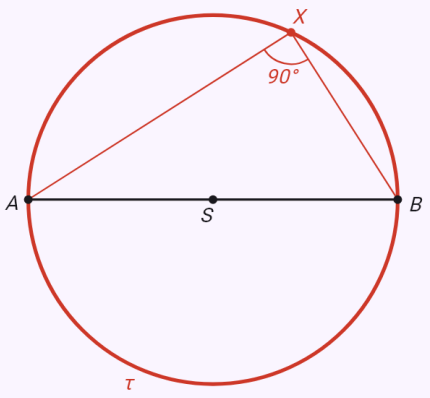
Wynik

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): z twierdzenia Talesa kąt AXB jest prosty dokładnie wtedy, gdy X leży na okręgu o średnicy AB (poza A i B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – rysujemy odcinek AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – środek S odcinka AB (tam, gdzie przecina go symetralna).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – okrąg Talesa τ o środku S i promieniu $\dfrac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; bez A i B jest szukanym zbiorem.

Wykres



Krok 3 z 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Punkty, z których odcinek 6 cm widać pod kątem 60°.

Input: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

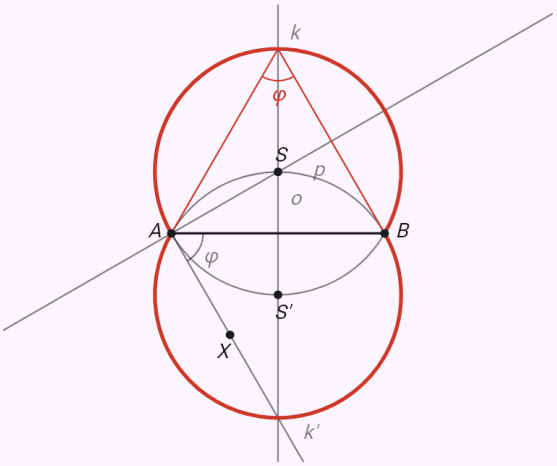
Wynik

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60^\circ$): punkty X, z których AB widać pod kątem φ, leżą na dwóch łukach symetrycznych względem AB. Kąt wpisany oparty na cięciwie AB jest równy kątowi między AB a styczną w A – środek łuku leży na symetralnej AB i na prostej prostopadłej do stycznej w A.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy odcinek AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – symetralna o odcinka AB, skonstruowana jak w „Symetralna odcinka".
- 3. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – konstruujemy kąt φ; jego ramieniem jest półprosta $\overrightarrow{AX}$
- 4. $p;\ p \perp AX,\ A \in p$ – prosta p prostopadła do półprostej $\overrightarrow{AX}$ w punkcie A
- 5. $S;\ S \in o \cap p$ – punkt przecięcia S
- 6. $k;\ k(S;\ |SA|)$ – okrąg k o środku S i promieniu $|SA|$
- 7. $k';\ k' = O_{AB}(k)$ – okrąg k', obraz k w symetrii względem prostej AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – łuki nad odcinkiem AB (bez A i B) są szukanym zbiorem: z każdego ich punktu AB widać pod kątem φ

Wykres



Krok 8 z 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Styczne z punktu odległego o 5 cm do okręgu o promieniu 3 cm.

Input: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Wynik

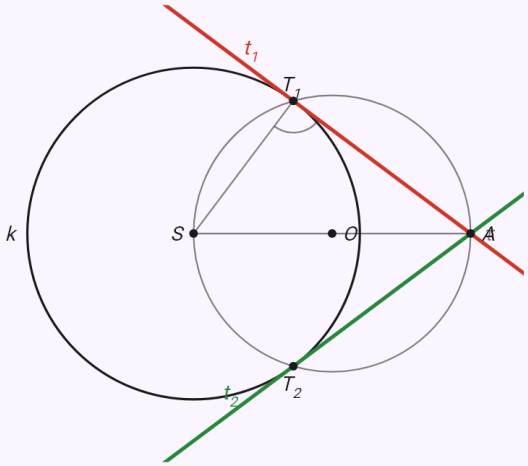
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\mathrm{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Kroki

- Analiza ($r = 3\,\mathrm{cm},\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$): styczna jest prostopadła do promienia w punkcie styczności T, więc kąt STA jest prosty. Punkty styczności leżą więc na okręgu Talesa nad SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\mathrm{cm})$ – okrąg k o środku S i promieniu $3\,\mathrm{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\mathrm{cm}$ – punkt A w odległości $5\,\mathrm{cm}$ od S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – środek O odcinka SA (tam, gdzie przecina go symetralna).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – okrąg Talesa τ nad odcinkiem SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – punkty styczności T_1, T_2 to punkty przecięcia okręgów k i τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – styczne t_1, t_2 z punktu A
- Dyskusja: punkt A leży na zewnątrz okręgu – przechodzą przez niego dwie styczne, symetryczne względem prostej SA.

Wykres



Krok 6 z 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Cztery wspólne styczne dwóch rozłącznych okręgów.

Input: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

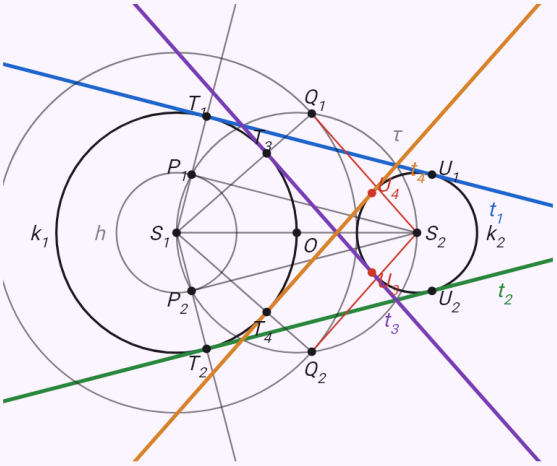
Wynik

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): przesunięta równolegle w stronę środków o mniejszy promień styczna zewnętrzna jest styczna do okręgu pomocniczego wokół środka większego okręgu o promieniu $|r_1 - r_2|$ i przechodzi przez środek mniejszego. Dla stycznej wewnętrznej promień okręgu pomocniczego to $r_1 + r_2$. Styczne ze środka do okręgu pomocniczego znajdujemy okręgiem Talesa nad odcinkiem środków.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – okrąg k_1 o środku S_1 i promieniu $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – okrąg k_2 o środku S_2 i promieniu $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – środek O odcinka S_1S_2 (tam, gdzie przecina go symetralna).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – okrąg Talesa τ nad odcinkiem S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – okrąg pomocniczy h o środku S_1 i promieniu równym różnicy promieni, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – punkty przecięcia P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – punkty styczności T_1, T_2 to punkty, w których $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ przecinają okrąg k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – zewnętrzne styczne wspólne t_1, t_2 przez punkty T_1, T_2, równoległe do S_2P_1, S_2P_2; są styczne także do drugiego okręgu.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – okrąg pomocniczy h' o środku S_1 i promieniu równym sumie promieni, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – punkty przecięcia Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – punkty styczności T_3, T_4 to punkty, w których S_1Q_1, S_1Q_2 przecinają okrąg k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – wewnętrzne styczne wspólne t_3, t_4 przez punkty T_3, T_4, równoległe do S_2Q_1, S_2Q_2
- Dyskusja: okręgi leżą rozłącznie ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – mają dwie zewnętrzne i dwie wewnętrzne styczne wspólne.

Wykres



Krok 12 z 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Okrąg o promieniu 2 cm styczny do ramion kąta 60°.

Input: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Wynik

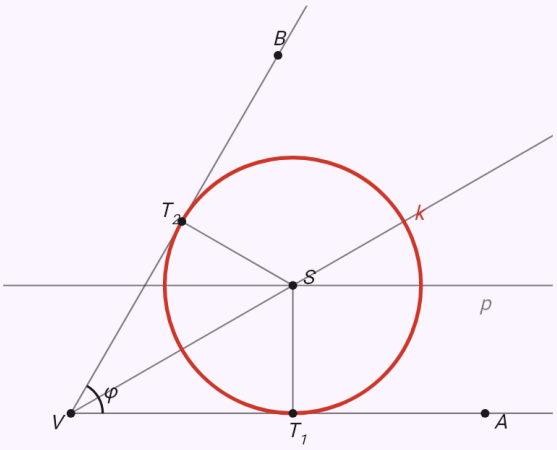
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\mathrm{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Analiza ($\varphi = 60^\circ,\ r = 2\,\mathrm{cm}$): środek jest w odległości r od obu ramion – na dwusiecznej kąta i na prostej równoległej do ramienia w odległości r. Punkty styczności to spodki prostopadłych poprowadzonych ze środka do ramion.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60^\circ$ – rysujemy kąt $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – dwusieczna o kąta $\angle AVB$ (skonstruowana jak w „Dwusieczna kąta"); jej punkty są jednakowo odległe od obu ramion.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\mathrm{cm}$ – prosta p równoległa do VA w odległości r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – punkt przecięcia S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – punkty styczności T_1, T_2 to spodki prostopadłych poprowadzonych ze środka S do VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\mathrm{cm})$ – szukany okrąg k o środku S i promieniu $2\,\mathrm{cm}$
- Dyskusja: dwusieczna i prosta równoległa zawsze przecinają się w jednym punkcie – zadanie ma jedno rozwiązanie.

Wykres



Krok 6 z 6

6. $k;\ k(S;\ 2\,\mathrm{cm})$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Okręgi przez punkt styczne do prostej – dwa rozwiązania.

Input: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Wynik

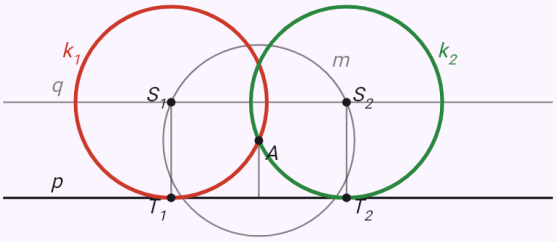
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): środek jest w odległości r od prostej p, więc leży na prostej q równoległej do p w odległości r po stronie A. Jest też w odległości r od A, więc leży również na okręgu m(A; r).
- 1. p – dowolna prosta p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – punkt A w odległości $1{,}5\,\text{cm}$ od p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – prosta q równoległa do p w odległości r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – okrąg m o środku A i promieniu $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – punkty przecięcia S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – punkty styczności T_1, T_2 to spodki prostopadłych poprowadzonych ze środka S_1, S_2 do p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – szukane okręgi k_1, k_2 o środkach S_1, S_2 i promieniu $2{,}5\,\text{cm}$
- Dyskusja: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – okrąg m przecina prostą równoległą q w dwóch punktach, zadanie ma dwa rozwiązania.

Wykres



Krok 7 z 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Okręgi o danym promieniu przez dwa punkty – dwa rozwiązania, symetryczne względem AB.

Input: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Wynik

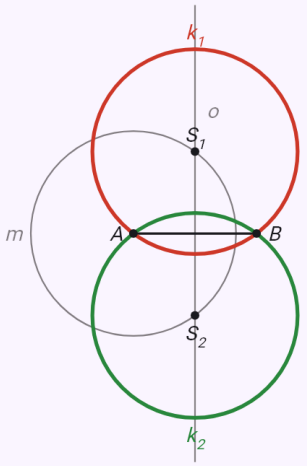
$$k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 6\,\mathrm{cm},\ r = 5\,\mathrm{cm}$): środek jest w odległości r zarówno od A, jak i od B – na symetralnej AB i na okręgu m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – rysujemy odcinek AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – symetralna o odcinka AB, skonstruowana jak w „Symetralna odcinka".
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\mathrm{cm})$ – okrąg m o środku A i promieniu $5\,\mathrm{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – punkty przecięcia S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$ – szukane okręgi k_1, k_2 o środkach S_1, S_2 i promieniu $5\,\mathrm{cm}$
- Dyskusja: $|AB| = 6\,\mathrm{cm} < 2r = 10\,\mathrm{cm}$ – okrąg m przecina symetralną w dwóch punktach, zadanie ma dwa rozwiązania, symetryczne względem AB.

Wykres



Krok 5 z 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\mathrm{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\mathrm{cm})$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Wierzchołek C, z którego AB widać pod kątem 60°, na wysokości 3 cm – łuki i równoległe.

Input: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Wynik

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

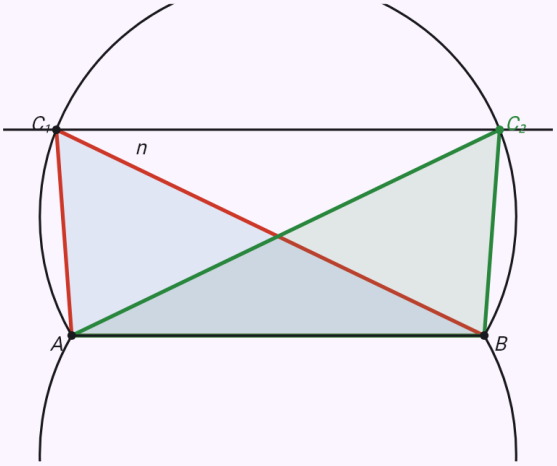
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 6\,\text{cm}$): szkic gotowego trójkąta ABC z wyróżnionymi danymi relacjami. Każda z dwóch relacji daje zbiór punktów, na którym leży wierzchołek C – C jest więc w ich części wspólnej.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy dany odcinek AB.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – punkty, z których odcinek AB widać pod kątem 60°, leżą na dwóch łukach m, m' symetrycznych względem AB (skonstruowanych jak w „Łuki danego kąta").
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – punkty w odległości $3\,\text{cm}$ od prostej AB leżą na dwóch prostych n, n' do niej równoległych, po jednej z każdej strony.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – szukane punkty to punkty przecięcia obu zbiorów.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w półpłaszczyźnie nad AB zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma 2 rozwiązań (w przeciwnej półpłaszczyźnie ich przystające odbicia).

Wykres



Krok 5 z 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Stosunek |AC| : |BC| = 2 i |BC| = 3 cm – okrąg Apoloniusza.

Input: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

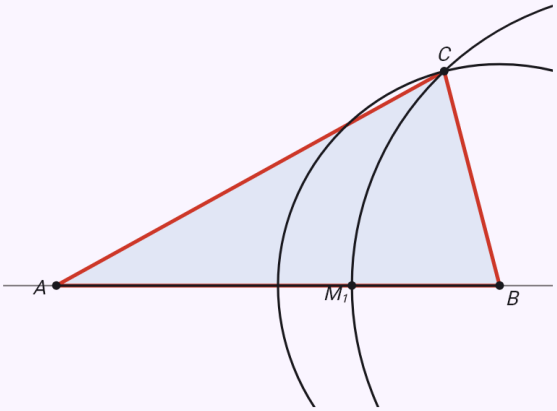
Wynik

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Kroki

- Analiza ($|AB| = 6\,\text{cm}$): szkic gotowego trójkąta ABC z wyróżnionymi danymi relacjami. Każda z dwóch relacji daje zbiór punktów, na którym leży wierzchołek C – C jest więc w ich części wspólnej.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – rysujemy dany odcinek AB.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – punkty, których odległości od końców odcinka AB są w stosunku 2, leżą na okręgu Apoloniusza. Najpierw punkty M_1 (wewnątrz odcinka) i M_2 (na jego przedłużeniu) dzielące AB w tym stosunku.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – okrąg Apoloniusza m to okrąg Talesa o średnicy M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – punkty w odległości $3\,\text{cm}$ od punktu B leżą na okręgu n o środku B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – szukany punkt to punkt przecięcia obu zbiorów.
- 6. $\triangle ABC$ – łączymy wierzchołki.
- Dyskusja: w półpłaszczyźnie nad AB zbiory punktów mają jeden punkt wspólny – zadanie ma jedno rozwiązanie (w przeciwnej półpłaszczyźnie jego przystające odbicie).

Wykres



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Punkty styczności stycznych z A – AX styczna i X na okręgu.

Input: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

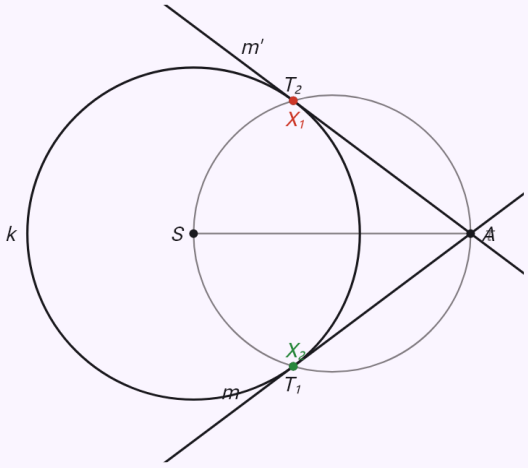
Wynik

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza $(k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm})$: szkic z danym okręgiem k, punktem A i szukanym punktem X, dane relacje wyróżnione. Każda z dwóch relacji daje zbiór punktów – X leży w ich części wspólnej.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – rysujemy dany okrąg k i punkt A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – prosta AX ma być styczna do k: punkty styczności leżą na okręgu Talesa τ o średnicy SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ przecina k w punktach styczności T_1, T_2, przez które przechodzą styczne m, m'
- Punkt X ma leżeć na okręgu k – zbiorem punktów jest sam okrąg k, już narysowany.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – szukane punkty to punkty przecięcia obu zbiorów.
- Dyskusja: zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma 2 rozwiązań.

Wykres



Krok 4 z 4

$4.\ X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Środki okręgów o promieniu 1 cm stycznych zarówno do okręgu k, jak i do prostej p.

Input: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

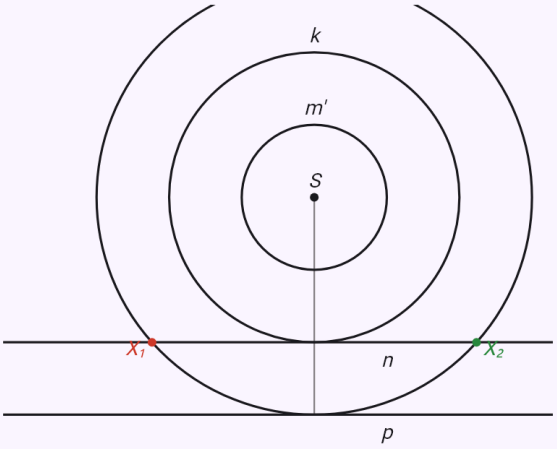
Wynik

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: szkic z danym okręgiem k, prostą p i szukanym punktem X, dane relacje wyróżnione. Każda z dwóch relacji daje zbiór punktów – X leży w ich części wspólnej.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – rysujemy dany okrąg k i prostą p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – okrąg o promieniu $1\,\text{cm}$ jest styczny do k zewnętrznie, gdy jego środek jest w odległości r + ϱ od S, a wewnętrznie, gdy jest w odległości |r − ϱ| od S: środki leżą na okręgach m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – punkty w odległości $1\,\text{cm}$ od prostej p leżą na dwóch prostych n, n' do niej równoległych, po jednej z każdej strony.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – szukane punkty to punkty przecięcia obu zbiorów.
- Dyskusja: zbiory punktów mają 2 punktów wspólnych – zadanie ma 2 rozwiązań.

Wykres



Krok 4 z 4

$4.\ X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Środki okręgów o promieniu 1,5 cm stycznych do dwóch przecinających się prostych – cztery

rozwiązania.

Input: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

Wynik

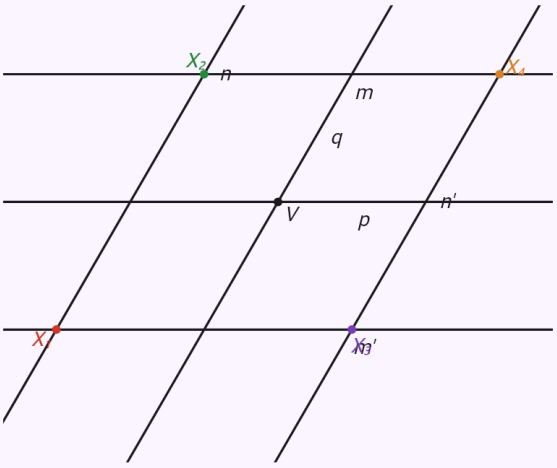
$$X_1:\ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2:\ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3:\ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4:\ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($|\angle(p,q)| = 60^\circ$): szkic z danymi prostymi p, q i szukanym punktem X, dane relacje wyróżnione. Każda z dwóch relacji daje zbiór punktów – X leży w ich części wspólnej.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60^\circ$ – rysujemy dane proste p, q przecinające się w V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – punkty w odległości $1{,}5\,\text{cm}$ od prostej p leżą na dwóch prostych m, m' do niej równoległych, po jednej z każdej strony.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – punkty w odległości $1{,}5\,\text{cm}$ od prostej q leżą na dwóch prostych n, n' do niej równoległych, po jednej z każdej strony.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – szukane punkty to punkty przecięcia obu zbiorów.

- Dyskusja: zbiory punktów mają 4 punktów wspólnych – zadanie ma 4 rozwiązań.

Wykres



Krok 4 z 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Okrąg k(S; 2 cm), AC styczna, k okrąg opisany na ABD, D środek BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Input: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

```
ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)
```

Wynik

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

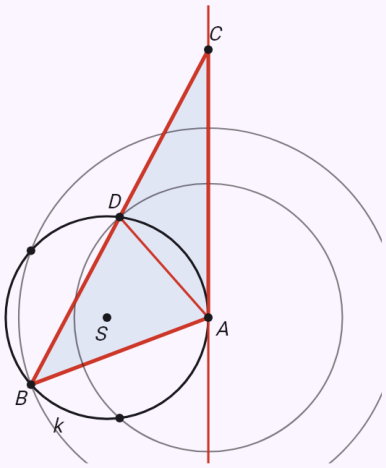
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Kroki

- Analiza ($k(S;\,2\,\text{cm})$): relacje zapisujemy we współrzędnych. Środek S w początku układu, a punkt A na dodatniej półosi x, A = (r; 0) – każde rozwiązanie można obrócić do tego położenia. Niewiadomymi są współrzędne pozostałych punktów.
- Punkt leży na okręgu k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Punkt leży na okręgu k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Punkt leży na okręgu k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Środek odcinka ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B+x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B+y_C}{2}$
- Prosta $\overleftrightarrow{AC}$ jest styczna do k – jej odległość od środka S wynosi r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Stosunek długości ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ to wynikowa figura – jej wierzchołki nie mogą być współliniowe.
- Układ rozwiązujemy dokładnie (bez zaokrągleń). Ma 2 różnych położeń punktów (żadne się nie pokrywają), 1 z dokładnością do przystawania.
- Sprawdzenie: po podstawieniu rozwiązania wszystkie relacje są spełnione.
- Z rozwiązania: potęga punktu C względem k – kwadrat stycznej jest równy iloczynowi odcinków siecznej: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Z rozwiązania: kąt dopisany do cięciwy AD jest równy kątowi wpisanemu opartemu na niej: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41^\circ$
- 1. $k;\ k(S;\,2\,\text{cm})$ – rysujemy dany okrąg k.
- 2. $A;\ A \in k$ – dowolny punkt A okręgu k.
- Długość $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ konstruujemy jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego o danej przeciwprostokątnej: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. $B;\ B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – punkt B to jeden z punktów przecięcia zbiorów (ich liczba: 2).
- Długość $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ konstruujemy jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego o danej przeciwprostokątnej: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. $D;\ D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – punkt D to jeden z punktów przecięcia zbiorów (ich liczba: 2).
- 5. $C;\ C = S_D(B)$ – punkt C symetryczny do B względem środka D (symetria środkowa).
- 6. $\triangle ABC$ – gotowa figura.
- Dyskusja: relacje spełnia 2 położeń punktów, wszystkie przystające (symetryczne) – z dokładnością do przystawania zadanie ma jedno rozwiązanie.

Wykres



Krok 6 z 6
6. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Trójkąt prostokątny bez okręgu: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, kąt prosty przy C.

Input: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

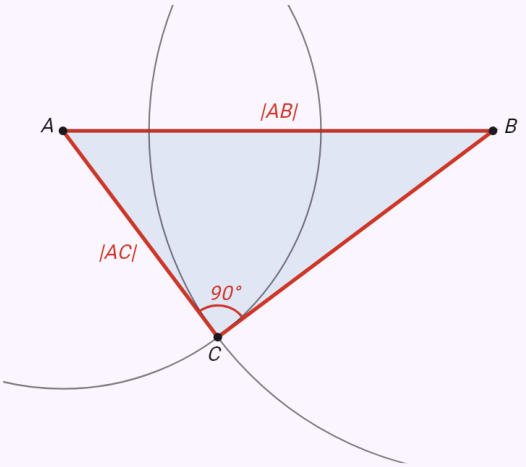
Wynik

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza: relacje zapisujemy we współrzędnych. Punkt A w początku układu, a punkt B na dodatniej półosi x – każde rozwiązanie można przesunąć i obrócić do tego położenia. Niewiadomymi są współrzędne pozostałych punktów.
- Długość ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- Długość ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- Kąt ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ to wynikowa figura – jej wierzchołki nie mogą być współliniowe.
- Układ rozwiązujemy dokładnie (bez zaokrągleń). Ma 2 różnych położeń punktów (żadne się nie pokrywają), 1 z dokładnością do przystawania.
- Sprawdzenie: po podstawieniu rozwiązania wszystkie relacje są spełnione.
- 1. A – dowolny punkt A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – punkt B w obliczonej odległości od A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – punkt C to jeden z punktów przecięcia zbiorów (ich liczba: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – gotowa figura.
- Dyskusja: relacje spełnia 2 położeń punktów, wszystkie przystające (symetryczne) – z dokładnością do przystawania zadanie ma jedno rozwiązanie.

Wykres



Krok 4 z 4
4. $\triangle ABC$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój sześcianu – przeciwległe ściany wzdłuż równoległych.

Input: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Wynik

$$XYZK$$

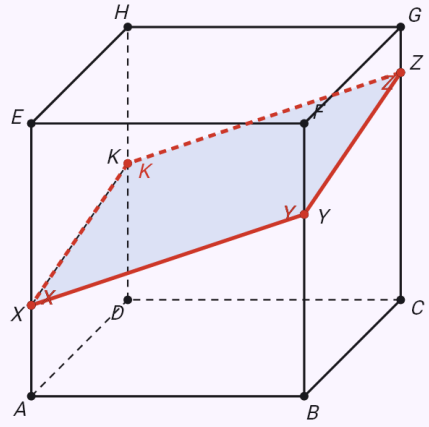
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku według trzech reguł: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; równoległe ściany są przecięte wzdłuż równoległych odcinków; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – rysujemy sześcian $ABCDEFGH$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AE w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi BF w odległości $4\,\text{cm}$ od wierzchołka B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi CG w odległości $5\,\text{cm}$ od wierzchołka C
- 5. XY – punkty X, Y leżą w ścianie $ABFE$, łączymy je.
- 6. YZ – punkty Y, Z leżą w ścianie $BCGF$, łączymy je.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – ściana $CDHG$ jest równoległa do ściany $ABFE$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do YX przez Z; przecina ona krawędź DH w K
- 8. XK – punkty X, K leżą w ścianie $ADHE$, łączymy je.
- 9. $XYZK$ – przekrój jest czworokątem $XYZK$

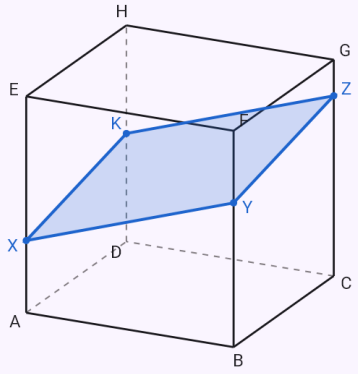
Wykres



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Sześciokąt foremny przez środki krawędzi – punkt pomocniczy T_1.

Input: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Wynik

$$XYMZKL$$

$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

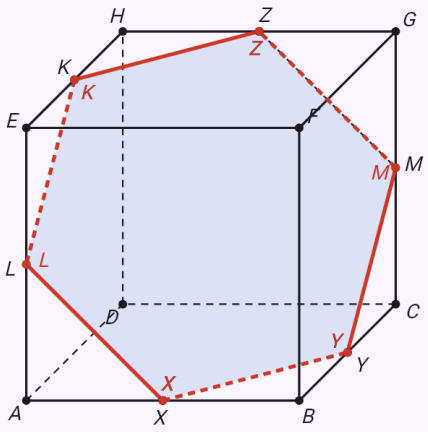
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku według trzech reguł: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; równoległe ściany są przecięte wzdłuż równoległych odcinków; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – rysujemy sześcian $ABCDEFGH$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AB w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi BC w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi GH w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka G
- 5. XY – punkty X, Y leżą w ścianie $ABCD$, łączymy je.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – ściana $EFGH$ jest równoległa do ściany $ABCD$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do XY przez Z; przecina ona krawędź EH w K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – przedłużamy bok ZK i krawędź EF; ich punkt wspólny T_1 leży w płaszczyźnie ściany $EFGH$ i ściany $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – prosta XT_1 leży w płaszczyźnie ściany $ABFE$; przecina krawędź AE w L
- 9. KL – punkty K, L leżą w ścianie $ADHE$, łączymy je.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – ściana $CDHG$ jest równoległa do ściany $ABFE$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do XL przez Z; przecina ona krawędź CG w M
- 11. YM – punkty Y, M leżą w ścianie $BCGF$, łączymy je.
- 12. $XYMZKL$ – przekrój jest sześciokątem $XYMZKL$

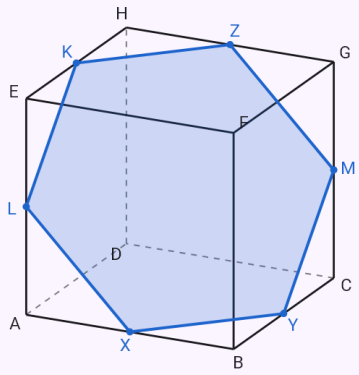
Wykres



Krok 12 z 12
12. $XYMZKL$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Ostrosłup przecięty płaszczyzną środków dwóch krawędzi bocznych i krawędzi podstawy.

Input: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Wynik

$$XYKZL$$

$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

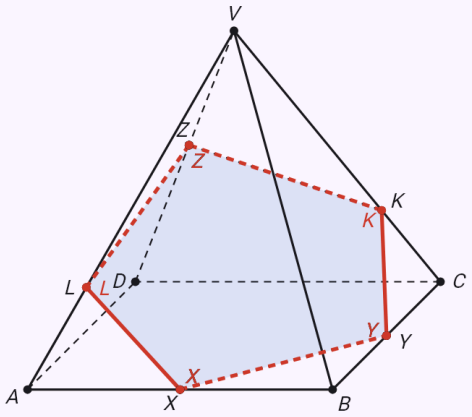
$$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$$

$$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; bok równoległy do krawędzi innej ściany oznacza, że płaszczyzna przecina tę ścianę wzdłuż prostej do niej równoległej; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDV;\ a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – rysujemy ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDV$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AB w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi BC w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka B
- 4. $Z;\ Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi DV w odległości $4\,\text{cm}$ od wierzchołka D
- 5. XY – punkty X, Y leżą w ścianie $ABCD$, łączymy je.
- 6. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – przedłużamy bok XY i krawędź CD; ich punkt wspólny T_1 leży w płaszczyźnie ściany $ABCD$ i ściany CDV
- 7. $ZK;\ K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – prosta ZT_1 leży w płaszczyźnie ściany CDV; przecina krawędź CV w K
- 8. YK – punkty Y, K leżą w ścianie BCV, łączymy je.
- 9. $T_2;\ T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – przedłużamy bok YK i krawędź BV; ich punkt wspólny T_2 leży w płaszczyźnie ściany BCV i ściany ABV
- 10. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – prosta XT_2 leży w płaszczyźnie ściany ABV; przecina krawędź AV w L
- 11. ZL – punkty Z, L leżą w ścianie DAV, łączymy je.
- 12. $XYKZL$ – przekrój jest pięciokątem $XYKZL$

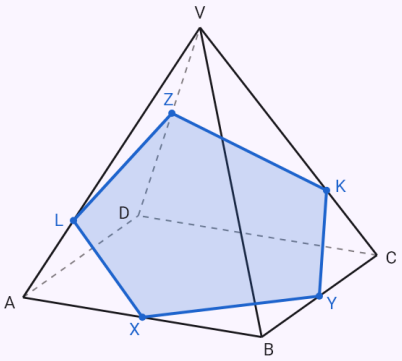
Wykres



Krok 12 z 12
12. $XYKZL$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Punkt na przedłużeniu krawędzi – Y 2 cm za wierzchołkiem B.

Input: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Wynik

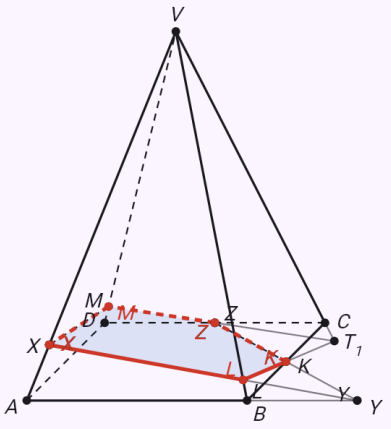
$$XLKZM$$
$$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$
$$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$
$$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; bok równoległy do krawędzi innej ściany oznacza, że płaszczyzna przecina tę ścianę wzdłuż prostej do niej równoległej; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDV;\ a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – rysujemy ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDV$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AV w odległości $1\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 3. $Y;\ Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – punkt Y na półprostej AB w odległości $6\,\text{cm}$ od wierzchołka A, za wierzchołkiem B – poza bryłą.
- 4. $Z;\ Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi CD w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka C
- 5. $ZK;\ ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – punkty YZ leżą w płaszczyźnie ściany $ABCD$; ich prosta przecina ścianę wzdłuż odcinka ZK
- 6. $XL;\ XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – punkty XY leżą w płaszczyźnie ściany ABV; ich prosta przecina ścianę wzdłuż odcinka XL
- 7. KL – punkty K, L leżą w ścianie BCV, łączymy je.
- 8. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – przedłużamy bok KL i krawędź CV; ich punkt wspólny T_1 leży w płaszczyźnie ściany BCV i ściany CDV
- 9. $ZM;\ M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – prosta ZT_1 leży w płaszczyźnie ściany CDV; przecina krawędź DV w M
- 10. XM – punkty X, M leżą w ścianie DAV, łączymy je.

- 11. $XLKZM$ – przekrój jest pięciokątem $XLKZM$

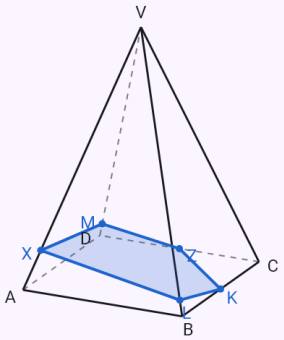
Wykres



Krok 11 z 11
11. $XLKZM$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Punkt wewnątrz bryły na jej przekątnej – pomocnicza płaszczyzna pionowa.

Input: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Wynik

$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$

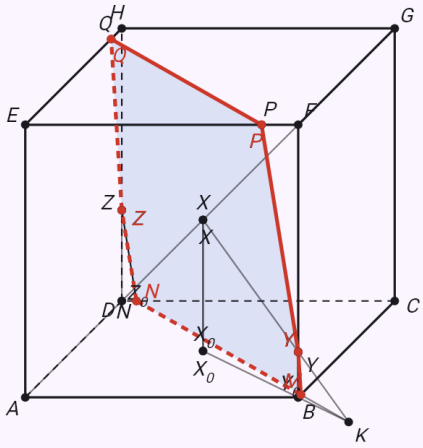
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$

$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku według trzech reguł: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; równoległe ściany są przecięte wzdłuż równoległych odcinków; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – rysujemy sześcian $ABCDEFGH$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – punkt X na odcinku AG w odległości $5\,\text{cm}$ od punktu A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi BF w odległości $1\,\text{cm}$ od wierzchołka B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi DH w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – punkt X leży wewnątrz bryły, więc korzystamy z pomocniczej płaszczyzny pionowej prostej XY: rzutujemy punkty na podstawę (X_0Y_0), a proste XY i X_0Y_0 przecinają się w K, gdzie prosta XY przebija płaszczyznę podstawy $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – punkt X leży wewnątrz bryły, więc korzystamy z pomocniczej płaszczyzny pionowej prostej XZ: rzutujemy punkty na podstawę (X_0Z_0), a proste XZ i X_0Z_0 przecinają się w L, gdzie prosta XZ przebija płaszczyznę podstawy $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – punkty KL leżą w płaszczyźnie ściany $ABCD$; ich prosta przecina ścianę wzdłuż odcinka MN
- 8. ZN – punkty Z, N leżą w ścianie $CDHG$, łączymy je.
- 9. YM – punkty Y, M leżą w ścianie $BCGF$, łączymy je.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – ściana $ABFE$ jest równoległa do ściany $CDHG$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do NZ przez Y; przecina ona krawędź EF w P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – ściana $EFGH$ jest równoległa do ściany $ABCD$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do MN przez P; przecina ona krawędź EH w Q
- 12. ZQ – punkty Z, Q leżą w ścianie $ADHE$, łączymy je.
- 13. $QPYMNZ$ – przekrój jest sześciokątem $QPYMNZ$

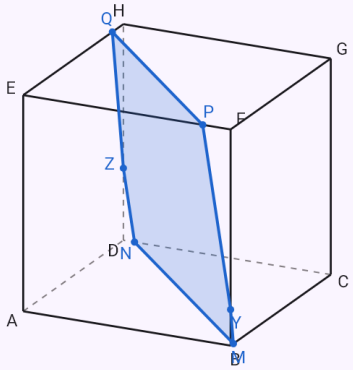
Wykres



Krok 13 z 13
13. $QPYMNZ$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Punkt X dzieli krawędź AB w stosunku 1 : 2.

Input: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Wynik

$$XYZK$$

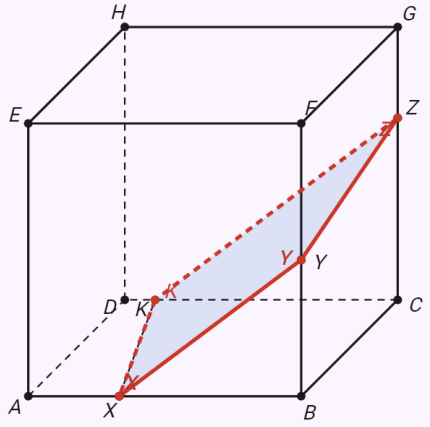
$$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 6\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku według trzech reguł: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; równoległe ściany są przecięte wzdłuż równoległych odcinków; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – rysujemy sześcian $ABCDEFGH$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – punkt X dzieli odcinek AB w stosunku $1 : 2$; to daje punkt X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi BF w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi CG w odległości $4\,\text{cm}$ od wierzchołka C
- 5. XY – punkty X, Y leżą w ścianie $ABFE$, łączymy je.
- 6. YZ – punkty Y, Z leżą w ścianie $BCGF$, łączymy je.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – ściana $CDHG$ jest równoległa do ściany $ABFE$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do XY przez Z; przecina ona krawędź CD w K
- 8. XK – punkty X, K leżą w ścianie $ABCD$, łączymy je.
- 9. $XYZK$ – przekrój jest czworokątem $XYZK$

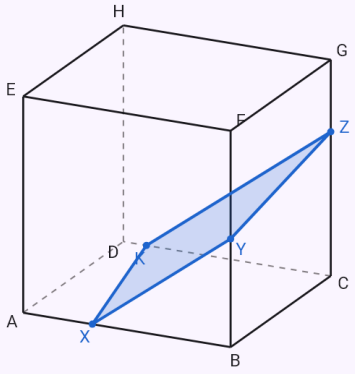
Wykres



Krok 9 z 9
9. $XYZK$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Przekrój graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego – najpierw podstawa w rzeczywistej wielkości.

Input: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

Wynik

$$XMYNZL$$

$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

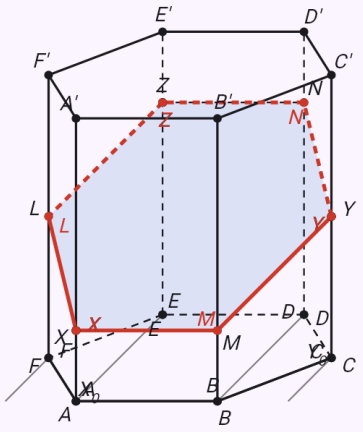
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$

$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Kroki

- Analiza ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku według trzech reguł: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; równoległe ściany są przecięte wzdłuż równoległych odcinków; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – obok rysujemy podstawę $ABCDEF$ w rzeczywistej wielkości: sześciokąt foremny o boku a, bok AB na osi x (punkty A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – z wierzchołków C, D, E, F prowadzimy prostopadłe do prostej AB; ich spodki przenosimy bez zmiany na oś x i od nich odkładamy połowę długości prostopadłej (głębokość) pod kątem 45° – podstawa $ABCDEF$ w rzucie ukośnym.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – rysujemy graniastosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AA' w odległości $1\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi CC' w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi EE' w odległości $3\,\text{cm}$ od wierzchołka E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – punkty XY nie leżą w jednej ścianie, więc korzystamy z pomocniczej płaszczyzny pionowej prostej XY: rzutujemy punkty na podstawę (X_0Y_0), a proste XY i X_0Y_0 przecinają się w K, gdzie prosta XY przebija płaszczyznę podstawy $ABCDEF$
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – punkty ZK leżą w płaszczyźnie ściany $EFF'E'$; ich prosta przecina ścianę wzdłuż odcinka ZL
- 9. XL – punkty X, L leżą w ścianie $FAA'F'$, łączymy je.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – ściana $BCC'B'$ jest równoległa do ściany $EFF'E'$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do LZ przez Y; przecina ona krawędź BB' w M
- 11. XM – punkty X, M leżą w ścianie $ABB'A'$, łączymy je.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – ściana $CDD'C'$ jest równoległa do ściany $FAA'F'$, więc przekrój przecina ją wzdłuż prostej równoległej do XL przez Y; przecina ona krawędź DD' w N
- 13. ZN – punkty Z, N leżą w ścianie $DEE'D'$, łączymy je.
- 14. $XMYNZL$ – przekrój jest sześciokątem $XMYNZL$

Wykres

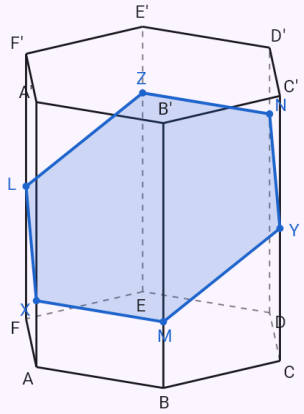


Krok 14 z 14

14. $XMYNZL$

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Przekrój czworościanu foremnego przez środki trzech krawędzi.

Input: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Wynik

XYZ

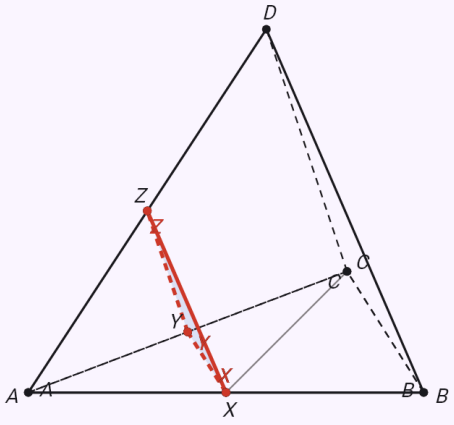
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Kroki

- Analiza ($a = 4\,\text{cm}$): płaszczyzna przekroju jest wyznaczona przez punkty X, Y, Z. Przekrój konstruujemy bok po boku: dwa punkty przekroju w jednej ścianie łączymy; bok równoległy do krawędzi innej ściany oznacza, że płaszczyzna przecina tę ścianę wzdłuż prostej do niej równoległej; przedłużona prosta boku przecina prostą krawędzi w punkcie leżącym w płaszczyznach obu ścian przy tej krawędzi.
- 1. $ABC;\ a = 4\,\text{cm}$ – obok rysujemy podstawę ABC w rzeczywistej wielkości: trójkąt równoboczny o boku a, bok AB na osi x (punkty A_0, B_0, …).
- 2. $ABC;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – z wierzchołków C prowadzimy prostopadłe do prostej AB; ich spodki przenosimy bez zmiany na oś x i od nich odkładamy połowę długości prostopadłej (głębokość) pod kątem 45° – podstawa ABC w rzucie ukośnym.
- 3. $ABCD;\ a = 4\,\text{cm}$ – rysujemy czworościan foremny $ABCD$ w rzucie ukośnym (głębokość pod kątem 45°, skrócona o połowę), krawędzie niewidoczne linią przerywaną.
- 4. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – punkt X na krawędzi AB w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 5. $Y;\ Y \in AC,\ |AY| = 2\,\text{cm}$ – punkt Y na krawędzi AC w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 6. $Z;\ Z \in AD,\ |AZ| = 2\,\text{cm}$ – punkt Z na krawędzi AD w odległości $2\,\text{cm}$ od wierzchołka A
- 7. XY – punkty X, Y leżą w ścianie ABC, łączymy je.
- 8. XZ – punkty X, Z leżą w ścianie ABD, łączymy je.
- 9. YZ – punkty Y, Z leżą w ścianie CAD, łączymy je.
- 10. XYZ – przekrój jest trójkątem XYZ

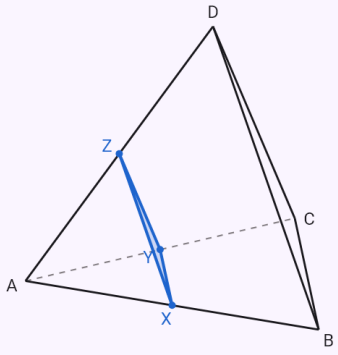
Wykres



Krok 10 z 10
10. XYZ

Analiza pokazuje szkic gotowej konstrukcji z danymi elementami. Potem strzałkami przejdź konstrukcję krok po kroku – elementy dodane w danym kroku są wyróżnione.

Przekrój w przestrzeni – obróć go palcem



Znane ograniczenia

- Na razie trójkąt (boki, kąty, wysokość i środkowa na dany bok, promienie r i ϱ w powyższych kombinacjach), cztery podstawowe miejsca geometryczne, pięć zadań z okręgami i stycznymi, czworokąty w kombinacjach z podpowiedzi formularza oraz przekroje sześcianu, prostopadłościanu, graniastosłupów i ostrosłupów prawidłowych (podstawa o 3 do 6 bokach) i czworościanu foremnego; ogólny czworokąt, wysokości i środkowe na inne boki i kolejne bryły pojawią się później.

- Zadania z warunkami przyjmują dokładnie dwa warunki do jednej z pięciu danych figur; zależności między większą liczbą punktów podaje się jako ogólne zależności.
- Ogólne zależności: najwyżej 8 punktów i 10 zależności, konstrukcja tylko z katalogu ruchów; analiza typu „trójkąty podobne” nie jest zautomatyzowana.
- Wpisywane tylko w formularzu – nie słowami ani ze zdjęcia.

Wygenerowano z aplikacji Mathtrace