Mathtrace – podręcznik

I. Równania, nierówności i wyrażenia

Spis treści

I. Równania, nierówności i wyrażenia

1. Równania i nierówności liniowe
2. Równania kwadratowe
3. Równania wyższych stopni
4. Równania wymierne
5. Równania niewymierne
6. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne
7. Wartość bezwzględna
8. Równania i nierówności trygonometryczne
9. Nierówności i układy nierówności
10. Układy równań
11. Równania i nierówności z parametrem
12. Wyznaczanie litery ze wzoru
13. Upraszczanie wyrażeń
14. Podzielność i liczby pierwsze
15. Kąty w stopniach, minutach i sekundach
16. Procenty, stosunki i reguła trzech
17. Przeliczanie jednostek
18. Logika i zbiory
19. Liczby zespolone

1. Równania i nierówności liniowe

Aplikacja przekształca równanie liniowe tak, jak w szkole – wymnaża nawiasy, przenosi niewiadomą na jedną stronę i dzieli. Przy nierówności pilnuje zmiany znaku przy mnożeniu przez liczbę ujemną i zapisuje wynik jako przedział; wykres pokazuje obie strony jako proste i zaznacza rozwiązanie na osi x.

Z chipem „Szczegółowo” (lub na stałe przełącznikiem „Szczegółowe kroki równań” na ekranie głównym) kroki odpowiadają temu, jak równań uczy się w szkole podstawowej: ta sama operacja po obu stronach (/ −4x, / :2), pod nią wiersz pośredni i wynik. Niewiadoma przechodzi na tę stronę, gdzie jej współczynnik wychodzi dodatni.

Przykłady

Równanie z nawiasami.

Input: `3(x - 2) = 2x + 5`

Wynik

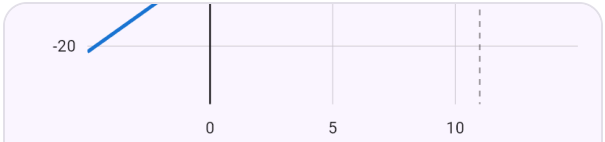
$x = 11$

Kroki

- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x - 11 = 0$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $x = 11$

Wykres





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(11; 27)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Nierówność – dzielenie przez liczbę ujemną zmienia znak.

Input: `2x - 3 < 5x + 6`

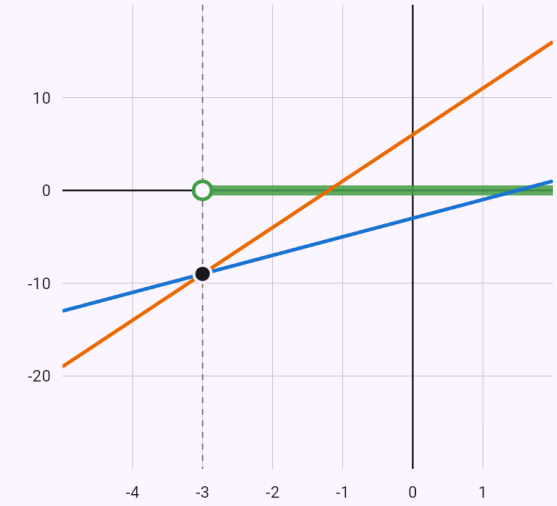
Wynik

$$x \in (-3;\, \infty)$$

Kroki

- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $-3x < 9$
- Dzielimy przez liczbę ujemną -3, znak nierówności zmienia się na przeciwny: $x > -3$

Wykres



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-3; -9)$

Szczegółowe kroki – ta sama operacja po obu stronach, rozpisana jak w szkole.

Input: `4x + 3 = 6x + 7` Szczegółowo

Wynik

$$x = -2$$

Kroki

- Odejmujemy $4x$ od obu stron

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

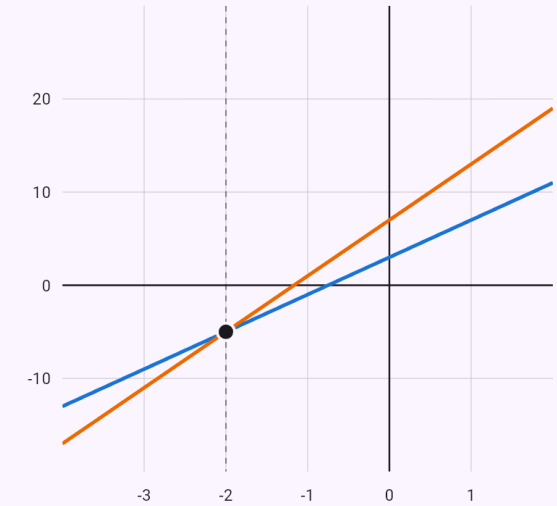
- Odejmujemy 7 od obu stron

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Dzielimy obie strony przez 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Wykres



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-2; -5)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Ułamki – obie strony pomnożone przez wspólny mianownik.

Input: `x/2 + x/3 = 10` Szczegółowo

Wynik

$$x = 12$$

Kroki

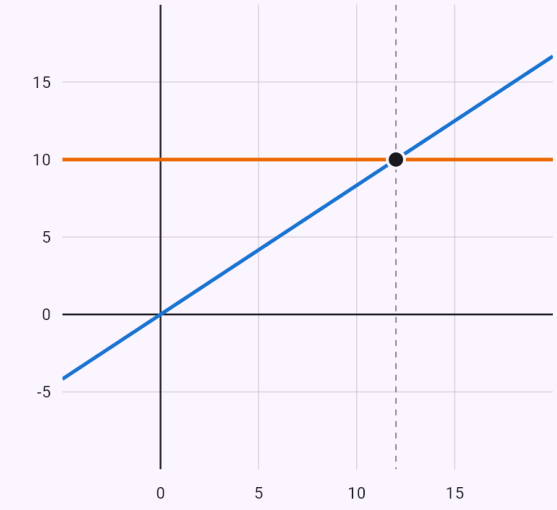
- Mnożymy obie strony przez 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Dzielimy obie strony przez 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Wykres



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(12; 10)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

2. Równania kwadratowe

Aplikacja sprowadza równanie kwadratowe do postaci ax² + bx + c = 0 i rozwiązuje je za pomocą wyróżnika i wzoru na pierwiastki; rozpoznaje też pierwiastek podwójny. Jeśli równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego, mówi to, a przycisk „Pokaż rozwiązanie zespolone” pokaże pierwiastki zespolone.

Przykłady

Dwa pierwiastki rzeczywiste.

Input: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Wynik

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Wykres



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(2; 0)$ ● $(3; 0)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Ujemny wyróżnik – pierwiastki zespolone.

Input: `x^2 + 2x + 5 = 0` Pokaż rozwiązanie zespolone

Wynik

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

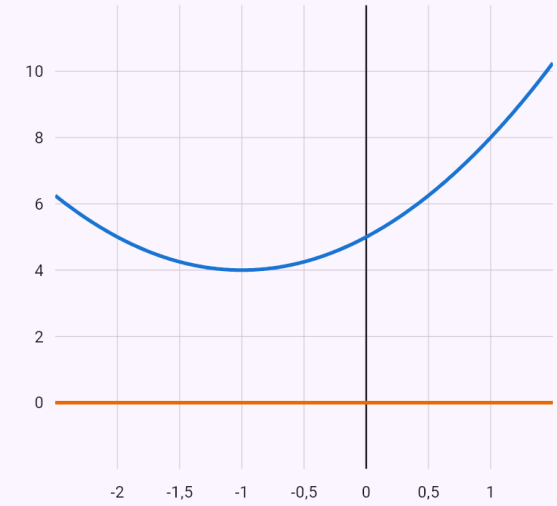
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Wyróżnik jest ujemny – w liczbach zespolonych:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Wykres



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Wykresy się nie przecinają – równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego.

3. Równania wyższych stopni

Równanie dwukwadratowe aplikacja zamienia podstawieniem na kwadratowe. Ogólne równanie wyższego stopnia rozkłada schematem Hornera: pierwiastków szuka wśród dzielników wyrazu wolnego, a każdy znaleziony pierwiastek wydziela, aż zostanie równanie kwadratowe.

Przykłady

Równanie dwukwadratowe podstawieniem y = x².

Input: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Wynik

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

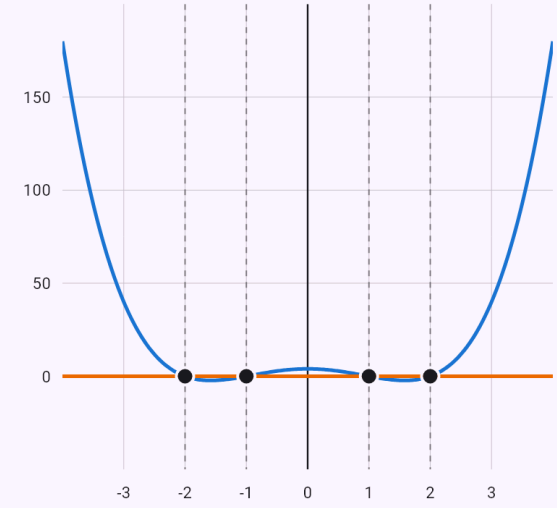
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Podstawienie $u = x^2$ zamienia równanie na kwadratowe: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Wykres



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(-2; 0)$ ● $(-1; 0)$ ● $(1; 0)$ ● $(2; 0)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Schemat Hornera – pierwiastki wśród dzielników wyrazu wolnego.

Input: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Wynik

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

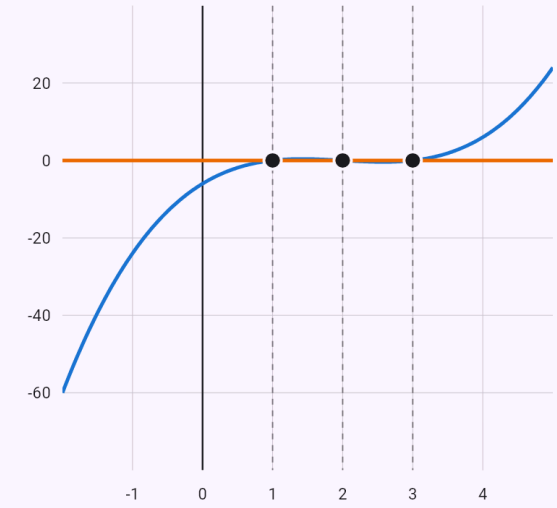
- Pierwiastkami wymiernymi mogą być tylko dzielniki wyrazu wolnego -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Schemat Hornera potwierdza pierwiastek $x = 1$ i dzieli przez niego wielomian:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Obliczamy wyróżnik:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

Wykres



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(1;0)$ ● $(2;0)$ ● $(3;0)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

4. Równania wymierne

Przy równaniu z niewiadomą w mianowniku aplikacja najpierw podaje założenia, potem mnoży równanie przez wspólny mianownik i je rozwiązuje. Pierwiastki porównuje z założeniami i odrzuca te, które ich nie spełniają.

Przykłady

Założenia, wspólny mianownik, równanie kwadratowe.

Input: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Wynik

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Założenia: $x \neq 1$

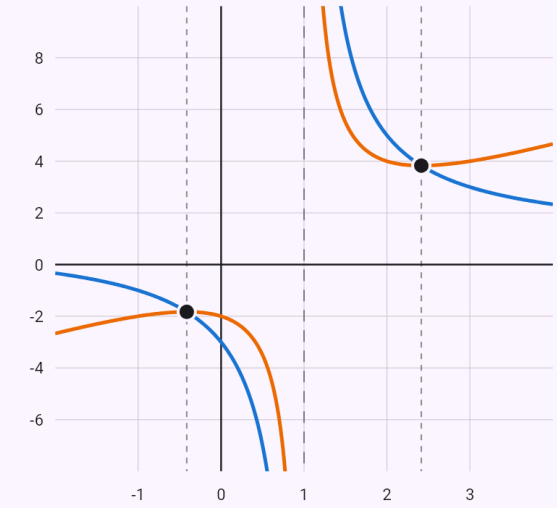
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Założenia – mianownik nie może być zerem: $x \neq 1$
- Mnożymy obie strony przez mianownik $x - 1$: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Pierwiastek $x = 1 - \sqrt{2}$ spełnia założenia.
- Pierwiastek $x = 1 + \sqrt{2}$ spełnia założenia.

Wykres



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

5. Równania niewymierne

Równanie z niewiadomą pod pierwiastkiem aplikacja rozwiązuje, izolując pierwiastek i podnosząc do kwadratu. Podnoszenie do kwadratu może dodać pierwiastki, które nie spełniają równania – dlatego zawsze następuje sprawdzenie, a pierwiastki, które go nie przejdą, są odrzucane.

Przykłady

Podnoszenie do kwadratu i sprawdzenie – jeden z pierwiastków nie spełnia równania.

Input: `sqrt(x+5) = x - 1`

Wynik

$x = 4$

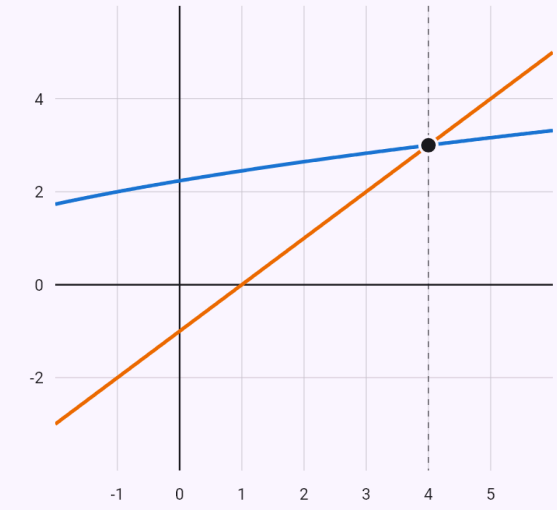
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Podnosimy obie strony do kwadratu (to nie jest przekształcenie równoważne, więc pierwiastki sprawdzamy): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Sprawdzenie dla $x = -1$: L = 2, P = -2, L ≠ P – pierwiastek nie pasuje.
- Sprawdzenie dla $x = 4$: L = 3, P = 3, L = P – pierwiastek pasuje.

Wykres



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(4; 3)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Znane ograniczenia

- Nierówności niewymierne nie są jeszcze rozwiązywane.

6. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

Równanie wykładnicze aplikacja rozwiązuje przez sprowadzenie do tej samej podstawy, logarytmowanie lub podstawienie; logarytmiczne przez połączenie logarytmów według reguł i usunięcie logarytmu, zawsze z założeniami. Nierówności rozwiązuje przez monotoniczność – dla podstawy mniejszej od 1 znak się zmienia. Logarytm ilorazu, którego licznik lub mianownik nie może być ujemny (pierwiastek), rozkłada po szkolnemu na różnicę logarytmów.

Równania o różnych podstawach: $a^x + b^x = c^x$ z podstawami z dwóch liczb pierwszych ($25^x + 10^x = 4^x$) dzieli się przez potęgę i podstawieniem $t = (5/2)^x$ zamienia na kwadratowe; logarytmy o różnych podstawach przelicza na jedną ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logarytmy, których podstawy są potęgami jednej liczby ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), przelicza na jedną podstawę ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), równanie mnoży, a logarytmy łączy. Logarytm z niewiadomą w podstawie ($\log_x 8 = 3$) usuwa z definicji ($x^3 = 8$) z założeniami $x > 0$, $x \neq 1$. Równanie z niewiadomą w podstawie i w wykładniku (x^(log x) = 100) rozwiązuje logarytmowaniem i podstawieniem t = log x. Nierówności z podstawieniem t = log(x + 1) i układy nierówności logarytmicznych i wykładniczych rozwiązuje jak pojedyncze nierówności – przez monotoniczność.

Równania i nierówności z funkcjami hiperbolicznymi przepisuje z definicji ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) na wykładnicze i rozwiązuje podstawieniem $t = e^x$; arsinh x = c rozwiązuje funkcją odwrotną (x = sinh c).

Przykłady

Podstawienie t = 2ˣ.

Input: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Wynik

$$x = 2$$

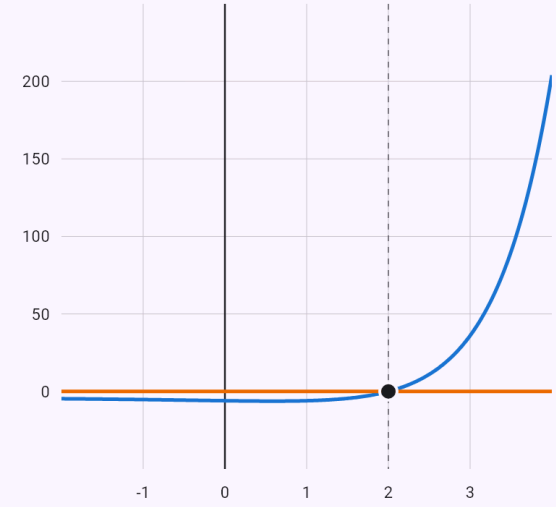
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Podstawiamy $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Równanie $2^x = -1$ nie ma rozwiązania rzeczywistego.
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Wykres



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(2; 0)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Łączenie logarytmów, założenia.

Input: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Wynik

$$x = 3$$

Założenia: $x > 1$

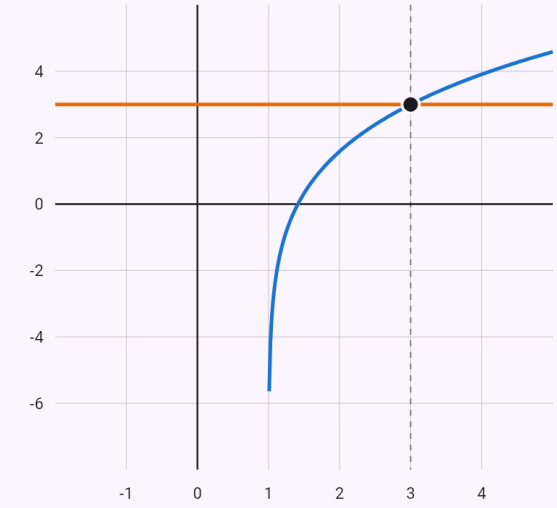
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Dziedzina – założenia: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Łączymy logarytmy zgodnie z prawami działań na logarytmach: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Opuszczamy logarytm: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - 9 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 6}{2}$
- Pierwiastek $x = -3$ nie spełnia założenia $x > 1$, więc nie jest rozwiązaniem.
- Pierwiastek $x = 3$ spełnia założenia.

Wykres



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(3; 3)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Różne podstawy – dzielimy przez 4^d, podstawiamy $t = (5/2)^d$.

Input: `25^d + 10^d = 4^d`

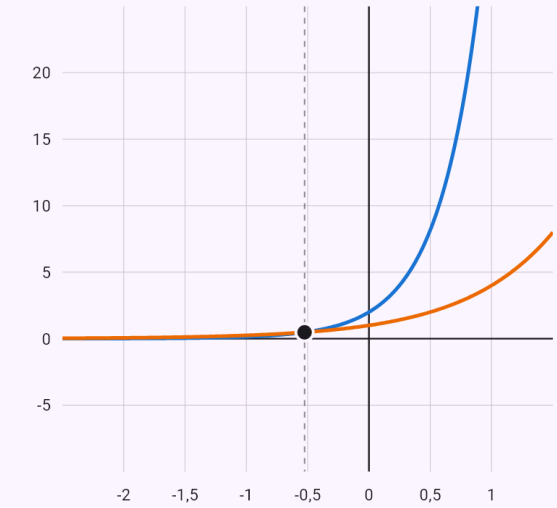
Wynik

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Kroki

- Dzielimy równanie przez dodatnie 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Podstawiamy $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Równanie $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nie ma rozwiązania rzeczywistego.
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Wykres



$y = 25^d + 10^d$

$y = 4^d$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość d.

Podstawa mniejsza od 1 – znak nierówności się zmienia.

Input: `(1/2)^x > 8`

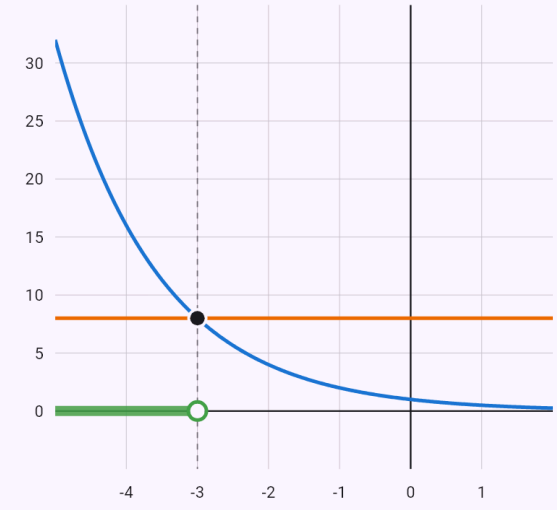
Wynik

$$x \in (-\infty;\ -3)$$

Kroki

- Zapisujemy obie strony jako potęgi o tej samej podstawie: $2^{-x} > 2^3$
- Funkcja wykładnicza o podstawie 2 jest rosnąca – wykładniki spełniają nierówność o tym samym znaku: $-x > 3$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $-x > 3$
- Dzielimy przez liczbę ujemną -1, znak nierówności zmienia się na przeciwny: $x < -3$
- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in (-\infty;\ -3)$

Wykres



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-3; 8)$

Tangens hiperboliczny z definicji – podstawienie t = e²ˣ.

Input: `tanh x = 1/2`

Wynik

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Podstawiamy definicje

$$\tanh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Podstawiamy $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Rozwiązujemy: $t = 3$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

Niewiadoma w podstawie – z definicji; pierwiastek −1 nie spełnia założeń.

Input: `log_x (2x+3) = 2`

Wynik

$$x = 3$$

Założenia: $x > 0,\ x \neq 1$

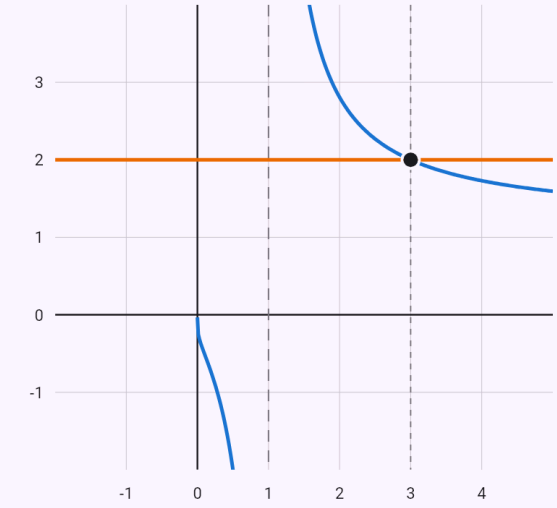
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Dziedzina – założenia: $x > 0,\ x \neq 1$
- Opuszczamy logarytm: $x^2 = 2x + 3$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- Pierwiastek $x = -1$ nie spełnia założenia $x > 0,\ x \neq 1$, więc nie jest rozwiązaniem.
- Pierwiastek $x = 3$ spełnia założenia.

Wykres



$y = \log_x(2x + 3)$
$y = 2$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(3; 2)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Niewiadoma w podstawie i w wykładniku – logarytmujemy, podstawiamy t = log x.

Input: `x^(log x) = 100`

Wynik

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Założenia: $x > 0$

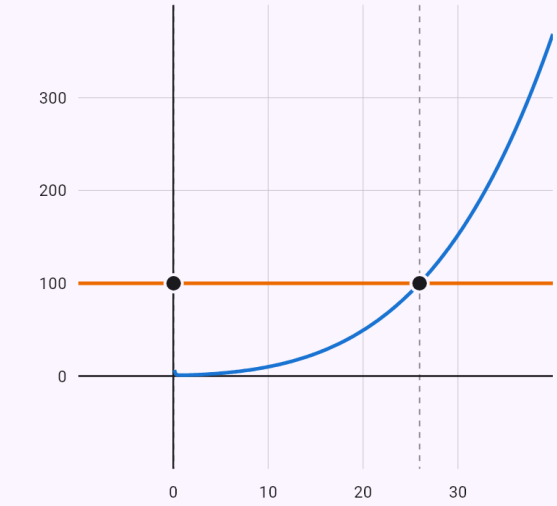
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Logarytmujemy obie strony:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Dziedzina – założenia: $x > 0$
- Podstawiamy $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Obliczamy wyróżnik:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej:
  $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej:
  $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- Pierwiastek $x = 10^{-\sqrt{2}}$ spełnia założenia.
- Pierwiastek $x = 10^{\sqrt{2}}$ spełnia założenia.

Wykres



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Logarytm ilorazu z pierwiastkiem – rozkład na różnicę logarytmów.

Input: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Wynik

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Założenia: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

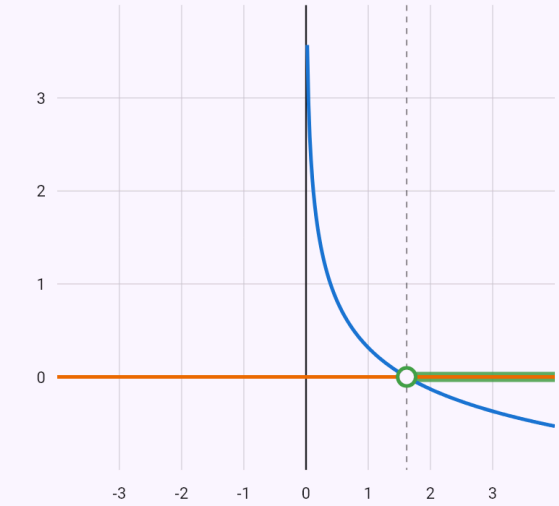
Kroki

- Jedna część ilorazu nie może być ujemna, więc iloraz jest dodatni dokładnie wtedy, gdy obie części są dodatnie – logarytm ilorazu rozkładamy więc na różnicę logarytmów, a odejmowany przenosimy na drugą stronę: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Dziedzina – założenia: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Logarytm o podstawie 3 jest rosnący – opuszczamy go i zachowujemy znak nierówności: $\sqrt{x+1} < x$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Dziedzina – założenia: $x \geq -1$
- Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

Wykres



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Znane ograniczenia

- Logarytmy o różnych podstawach, które nie są potęgami jednej liczby ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$), są rozwiązywane tylko numerycznie.
- Równania hiperboliczne prowadzące do równania 4. stopnia względem e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$) są rozwiązywane tylko numerycznie; nierówności z odwrotnymi funkcjami hiperbolicznymi nie są jeszcze obsługiwane.

7. Wartość bezwzględna

Równania i nierówności z wartościami bezwzględnymi aplikacja rozwiązuje na dwa sposoby, które wybierzesz chipem: „Z definicji” – skrót rozpisujący |a| = b lub |a| < b – i „Miejsca zerowe” – podział osi liczbowej na przedziały, na których każda wartość bezwzględna ma stały znak. Bez wyboru sama wybierze odpowiedniejszy.

Zagnieżdżone wartości bezwzględne (||x| − 2| = 1) rozwiązuje tak samo: z definicji krok po kroku od zewnątrz do środka, miejscami zerowymi od środka na zewnątrz – najpierw miejsca zerowe wewnętrznych wartości bezwzględnych, potem pozostałą wartość bezwzględną na każdym przedziale.

Nierówność |f| < |g| (po każdej stronie tylko wartość bezwzględna) można też rozwiązać chipem „Podnoszenie do kwadratu”: obie strony są nieujemne, więc podnosi się ją do kwadratu i rozwiązuje jako kwadratową. Samo wyrażenie z wartościami bezwzględnymi (|x − 1| + |x + 2|) upraszcza się przedziałami – miejsca zerowe, tabela znaków i wyrażenie bez wartości bezwzględnych na każdym przedziale. Po przecinku może nastąpić przedział (|x| − 2, x < 0): wyrażenie jest wtedy upraszczane tylko na nim.

Przykłady

Jedna wartość bezwzględna – rozpisana z definicji.

Input: `|2x - 1| = 5`

Wynik

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

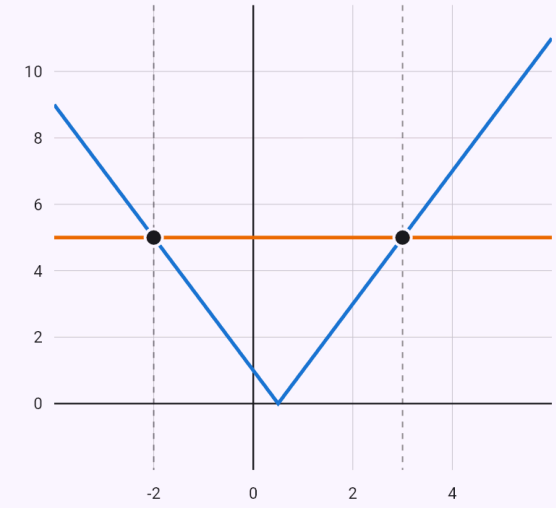
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Jest tylko jedna wartość bezwzględna, a po drugiej stronie liczba – wystarczy skorzystać z definicji.
- Z definicji $|2x - 1| = 5$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $2x - 1 = 5$ lub $2x - 1 = -5$
- Rozwiązujemy: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Rozwiązujemy: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Wykres



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(-2; 5)$ ● $(3; 5)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Dwie wartości bezwzględne – metoda miejsc zerowych.

Input: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Wynik

$$x \in (-3;\ 2)$$

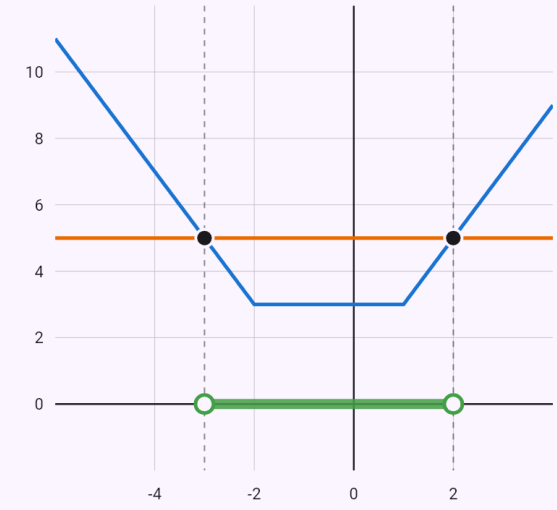
Kroki

- Wartości bezwzględne opuszczamy metodą miejsc zerowych: miejsca zerowe dzielą oś liczbową na przedziały, na każdym z nich wyrażenia wewnątrz mają stały znak.
- Miejsca zerowe wyrażeń wewnątrz wartości bezwzględnych:
  $x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1, \quad x + 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = -2$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\ -2)$	$\langle -2;\ 1)$	$\langle 1;\ \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na przedziale $(-\infty;\ -2)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Rozwiązujemy: $-2x - 1 < 5$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $-2x < 6$
- Dzielimy przez liczbę ujemną -2, znak nierówności zmienia się na przeciwny: $x > -3$
- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in (-3;\ \infty)$
- Część wspólna z przedziałem $(-\infty;\ -2)$: $x \in (-3;\ -2)$
- Na przedziale $\langle -2;\ 1)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- Niewiadoma się zredukowała i zostało prawdziwe zdanie $3 < 5$ – rozwiązaniem jest cały przedział $\langle -2;\ 1)$
- Na przedziale $\langle 1;\ \infty)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Rozwiązujemy: $2x + 1 < 5$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $2x < 4$
- Dzielimy przez liczbę dodatnią 2, znak nierówności się nie zmienia: $x < 2$
- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in (-\infty;\ 2)$
- Część wspólna z przedziałem $\langle 1;\ \infty)$: $x \in \langle 1;\ 2)$
- Rozwiązaniem jest suma wyników: $x \in (-3;\ 2)$

Wykres



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

● $(-3;\ 5)$ ● $(2;\ 5)$

Zagnieżdżona wartość bezwzględna – z definicji od zewnątrz do środka.

Input: `||x| - 2| = 1`

Wynik

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

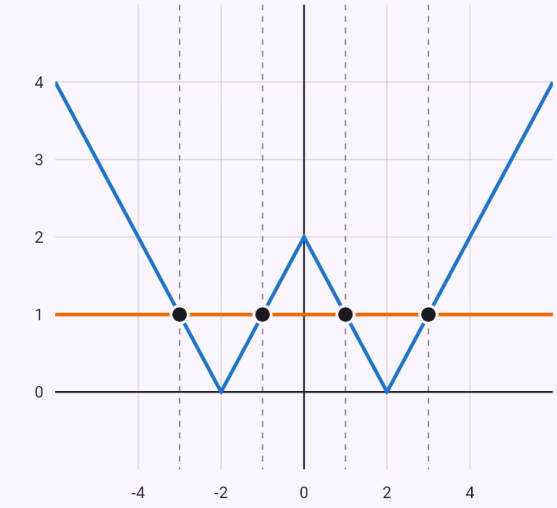
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

- Jest tylko jedna wartość bezwzględna, a po drugiej stronie liczba – wystarczy skorzystać z definicji.
- Z definicji $||x| - 2| = 1$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $|x| - 2 = 1$ lub $|x| - 2 = -1$
- Izolujemy wartość bezwzględną: $|x| = 3$
- Z definicji $|x| = 3$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 3$ lub $x = -3$
- Izolujemy wartość bezwzględną: $|x| = 1$
- Z definicji $|x| = 1$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 1$ lub $x = -1$

Wykres



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(-3; 1)$ ● $(-1; 1)$ ● $(1; 1)$ ● $(3; 1)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Wartości bezwzględne po obu stronach – podniesienie do kwadratu.

Input: `|x - 1| < |2x + 3|` Podnoszenie do kwadratu

Wynik

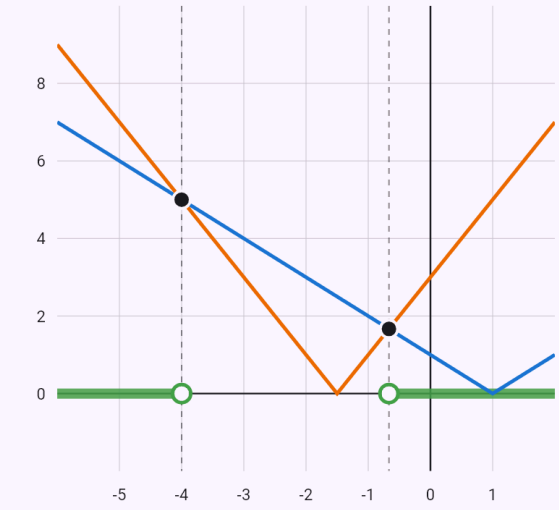
$$x \in (-\infty;\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3};\, \infty\right)$$

Kroki

- Po obu stronach są same wartości bezwzględne – obie są nieujemne, więc nierówność możemy podnieść do kwadratu (przekształcenie równoważne).
- Podnosimy obie strony do kwadratu:
  $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę:
  $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Rozkład na czynniki: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały:
  $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\, -4)$	$(-4;\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3};\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Wykres



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-4;\, 5)$
- $\left(-\frac{2}{3};\, \frac{5}{3}\right)$

Wyrażenie z wartościami bezwzględnymi – przedziałami.

Input: `|x - 1| + |x + 2|`

Wynik

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -2) \\ 3, & x \in \langle -2;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Kroki

- Wartości bezwzględne opuszczamy metodą miejsc zerowych: miejsca zerowe dzielą oś liczbową na przedziały, na każdym z nich wyrażenia wewnątrz mają stały znak.
- Miejsca zerowe wyrażeń wewnątrz wartości bezwzględnych:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\, -2)$	$\langle -2;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Na przedziale $(-\infty;\, -2)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków:
  $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Na przedziale $\langle -2;\, 1)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na przedziale $\langle 1;\, \infty)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków:
  $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Wyrażenie z wartościami bezwzględnymi na danym przedziale – przedziałami tylko tam.

Input: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Wynik

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1;\, \infty) \end{cases}$$

Kroki

- Wyrażenie upraszczamy tylko dla wartości z przedziału $(-1;\, \infty)$ – wartości bezwzględne opuszczamy według znaków wyrażeń wewnątrz nich.
- Miejsca zerowe wyrażeń wewnątrz wartości bezwzględnych:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-1;\, 1)$	$\langle 1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- Na przedziale $(-1;\, 1)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na przedziale $\langle 1;\, \infty)$ opuszczamy wartości bezwzględne według znaków:
  $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Znane ograniczenia

- Podniesienie do kwadratu jest oferowane tylko dla nierówności z jedną wartością bezwzględną po każdej stronie.

8. Równania i nierówności trygonometryczne

Aplikacja sprowadza równanie do równań podstawowych typu sin x = a i rozwiązuje je na okręgu jednostkowym: znajduje kąty jednego obrotu i dodaje wielokrotności okresu ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Okrąg jest narysowany bezpośrednio w krokach.

Preferuje znane wzory – na kąt podwojony i połówkowy, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, sumę na iloczyn –, potem rozkład na czynniki, podstawienie $t = \sin x$, dzielenie równania jednorodnego przez $\cos^n x$ i kąt pomocniczy dla $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Wynik jest też sprawdzany numerycznie na całym okresie.

Niewiadoma zapisana literą łacińską (x, t) jest w radianach, grecką (alpha, β, …) w stopniach – tak samo jak wpis ze znakiem ° (sin(x + 30°)). Aby dostać pierwiastki w danym przedziale, dopisz przedział po przecinku lub w następnym wierszu.

Nierówność rozwiązuje się łukiem okręgu jednostkowego, bardziej złożoną miejscami zerowymi na jednym okresie; wynikiem są przedziały z okresem.

Przykłady

Dwie gałęzie rozwiązań, kąty na okręgu jednostkowym.

Input: `sin x = 1/2`

Wynik

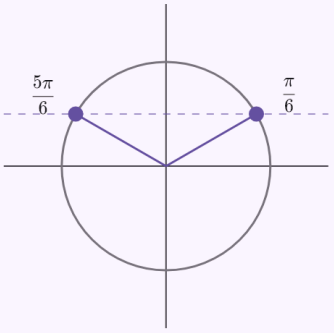
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

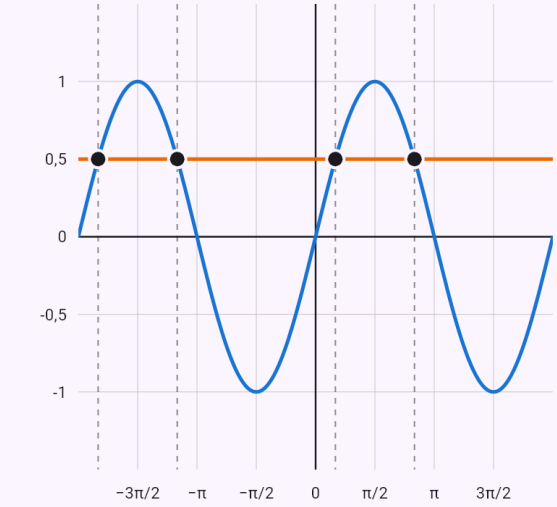
$$k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

- Równanie podstawowe $\sin x = \frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Wykres



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Podstawienie t = sin x i równanie kwadratowe.

Input: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Wynik

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

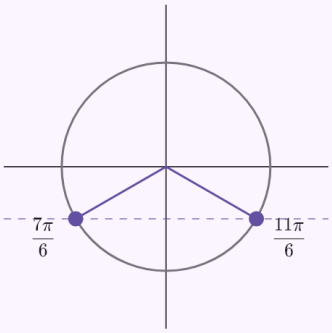
$$k \in \mathbb{Z}$$

Nie ma drogi dokładnej – metoda numeryczna pokazuje, skąd bierze się „≈":

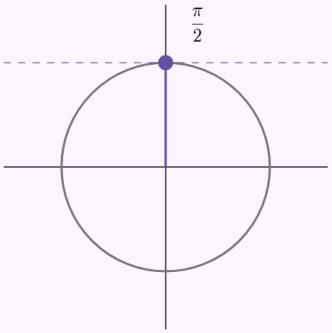
Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

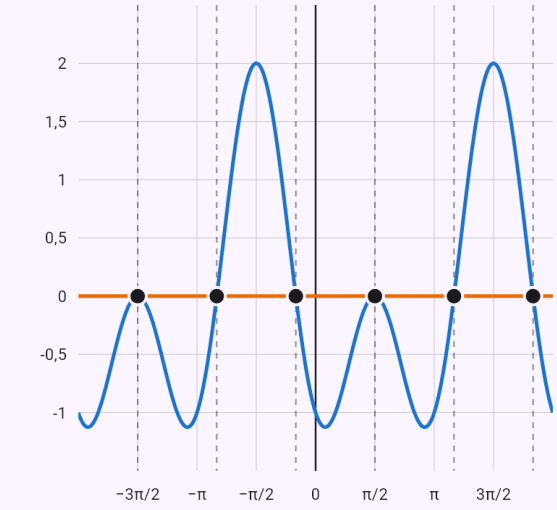
- Podstawiamy $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Równanie podstawowe $\sin x = -\frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Równanie podstawowe $\sin x = 1$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{2}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Wykres



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$

$y = 0$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Wzór na sin 2x i rozkład na czynniki.

Input: `sin 2x = cos x`

Wynik

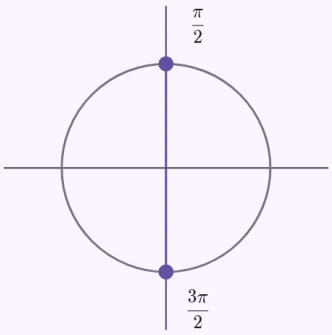
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Nie ma drogi dokładnej – metoda numeryczna pokazuje, skąd bierze się „≈":

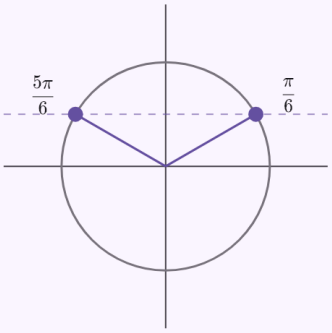
Σ Newton (styczne) | Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

Kroki

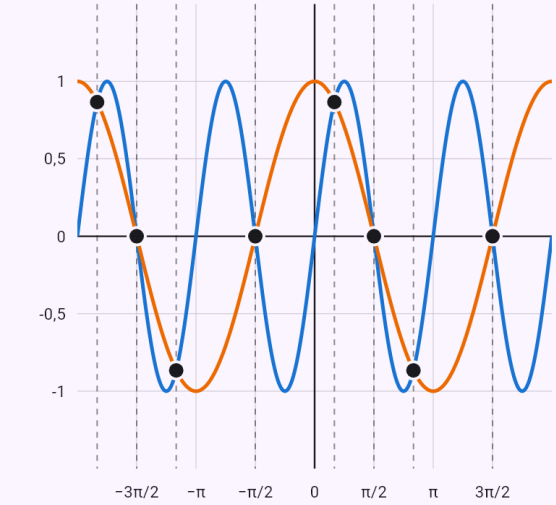
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Korzystamy ze wzoru $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Rozkładamy na czynniki – iloczyn jest równy zeru dokładnie wtedy, gdy jeden z czynników jest równy zeru: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Rozwiązujemy równanie $\cos x = 0$
- Równanie podstawowe $\cos x = 0$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Rozwiązujemy równanie $2\sin x - 1 = 0$
- Izolujemy funkcję trygonometryczną: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Równanie podstawowe $\sin x = \frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Wykres



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Kąt pomocniczy: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

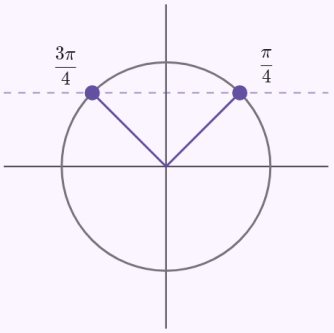
Input: `sin x + cos x = 1`

Wynik

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

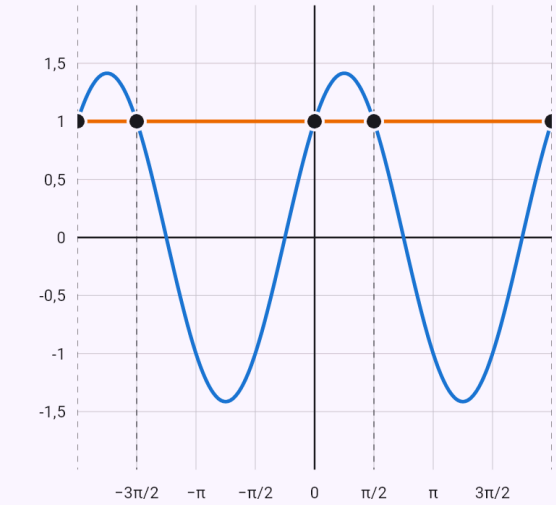
- Przenosimy wszystko na jedną stronę:
  $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Wprowadzamy kąt pomocniczy φ:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, gdzie
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Izolujemy funkcję trygonometryczną:
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Równanie podstawowe $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania:
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Wyznaczamy niewiadomą

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Wykres



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-2\pi; 1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$
- $(0; 1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Grecka litera – wynik w stopniach.

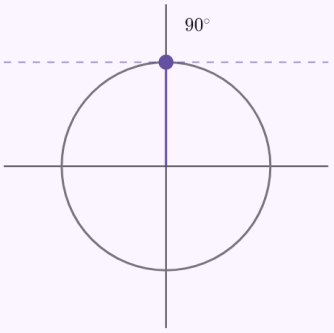
Input: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Wynik

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

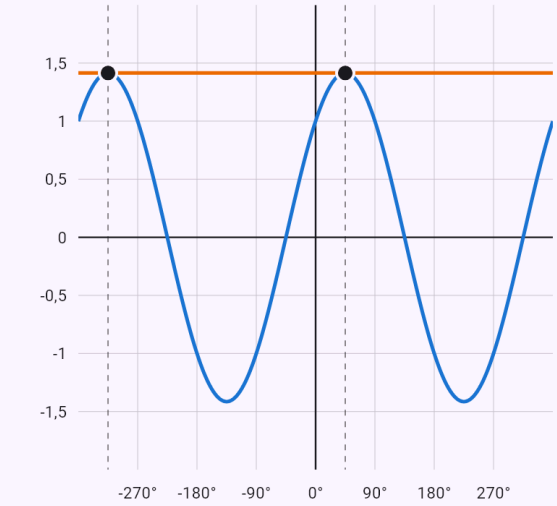
Kroki

- Przenosimy wszystko na jedną stronę:
  $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Wprowadzamy kąt pomocniczy φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, gdzie
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Izolujemy funkcję trygonometryczną: $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Równanie podstawowe $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty 90°; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Wyznaczamy niewiadomą
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Wykres



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(-315^\circ; \sqrt{2}\right)$
- $\left(45^\circ; \sqrt{2}\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Tylko pierwiastki w danym przedziale.

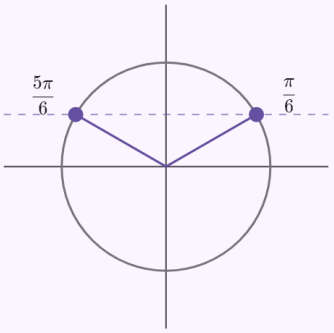
Input: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Wynik

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

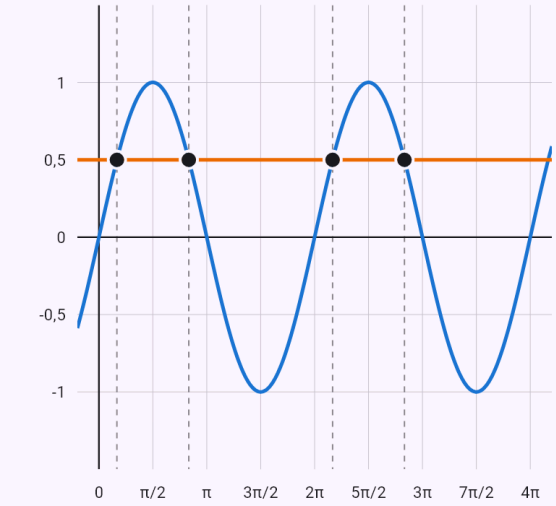
Kroki

- Równanie podstawowe $\sin x = \frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Rozwiązania w przedziale $x \in \langle 0;\ 4\pi)$
  $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Wykres



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Punkty przecięcia wykresów:

$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu równania – jego pierwsza współrzędna to wartość x.

Łuk okręgu jednostkowego, przedział wokół zera.

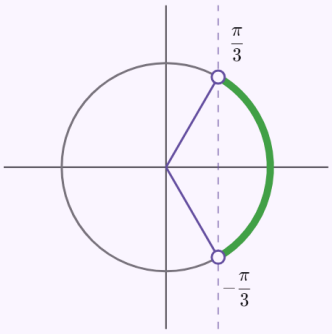
Input: `cos x > 1/2`

Wynik

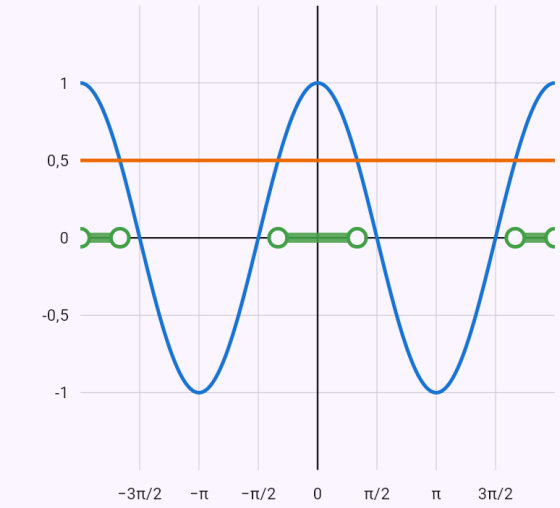
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

- Nierówność podstawowa $\cos x > \frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym zachodzi na wyróżnionym łuku; z okresem: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Wykres



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Miejsca zerowe na okresie i znak między nimi.

Input: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

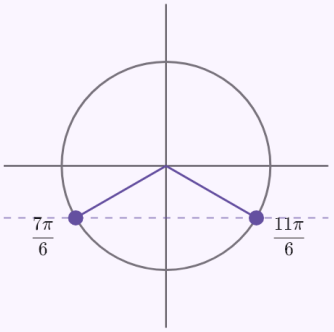
Wynik

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

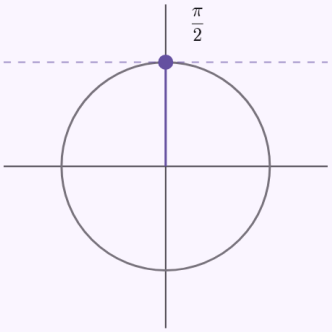
$$k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

- Najpierw rozwiązujemy równanie $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Podstawiamy $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Równanie podstawowe $\sin x = -\frac{1}{2}$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

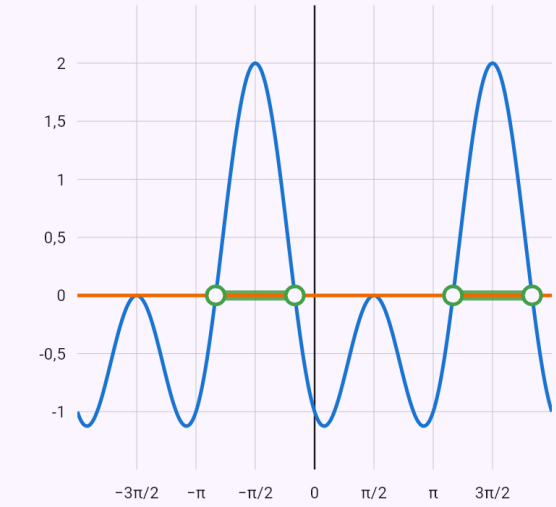


- Równanie podstawowe $\sin x = 1$: na okręgu jednostkowym spełniają je w obrębie jednego obrotu kąty $\frac{\pi}{2}$; dodając wielokrotności okresu, dostajemy wszystkie rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Funkcja ma okres 2π. Jej miejsca zerowe (i punkty, w których nie jest określona) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ dzielą jeden okres na przedziały; według znaku na nich nierówność zachodzi dla: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Wykres



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Znane ograniczenia

- Równania z niewiadomą także poza funkcją trygonometryczną (x = cos x) są rozwiązywane tylko numerycznie – metodą Newtona z tabelą iteracji (zob. Metody numeryczne), bez okresu.
- Podwójna nierówność trygonometryczna (−1/2 < sin x < 1/2) i funkcje trygonometryczne wewnątrz wartości bezwzględnej nie są jeszcze obsługiwane.

9. Nierówności i układy nierówności

Nierówności kwadratowe i wymierne aplikacja rozwiązuje miejscami zerowymi i tabelą znaków. Nierówność podwójną i układ nierówności rozwiązuje jako część wspólną rozwiązań poszczególnych nierówności, pokazaną na osi liczbowej. Układ nierówności z dwiema niewiadomymi rozwiązuje jako obszar na płaszczyźnie, zacieniowany na wykresie.

W układzie nierówności z dwiema niewiadomymi aplikacja podaje też wierzchołki obszaru – przecięcia brzegów z dokładnymi współrzędnymi. Układ równania i nierówności z jedną niewiadomą rozwiązuje się, rozwiązując równanie i podstawiając jego pierwiastki do nierówności; z dwiema niewiadomymi rozwiązaniem jest część krzywej równania leżąca w obszarze nierówności – wyróżniona na wykresie, jej punkty końcowe obliczone dokładnie. Układ można też zapisać w jednym wierszu, oddzielony średnikami ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Układ dwóch lub więcej równań z nierównościami jest rozwiązywany jako układ równań, a jego rozwiązania są podstawiane do nierówności; przy dwóch niewiadomych wykres pokazuje krzywe w obszarze nierówności, niespełniające przecięcia jako puste kółka.

Przykłady

Nierówność kwadratowa – miejsca zerowe i znaki.

Input: `x^2 - x - 6 > 0`

Wynik

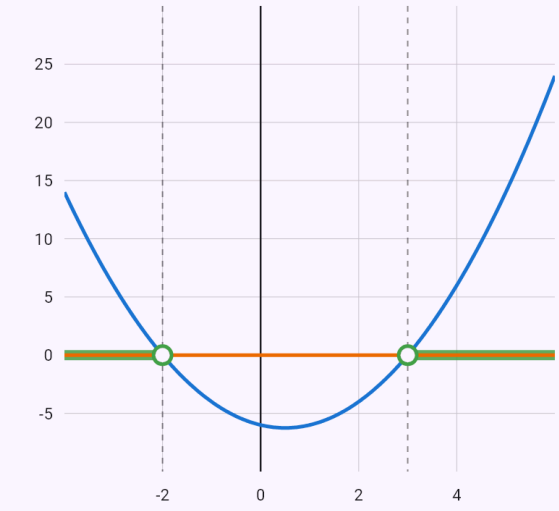
$$x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ \infty)$$

Kroki

- Rozkład na czynniki: $(x-3)(x+2) > 0$
- Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Wykres



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

● $(-2;\ 0)$ ● $(3;\ 0)$

Nierówność wymierna – mianownik nie może być zerem.

Input: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Wynik

$$x \in \langle -1;\ 3)$$

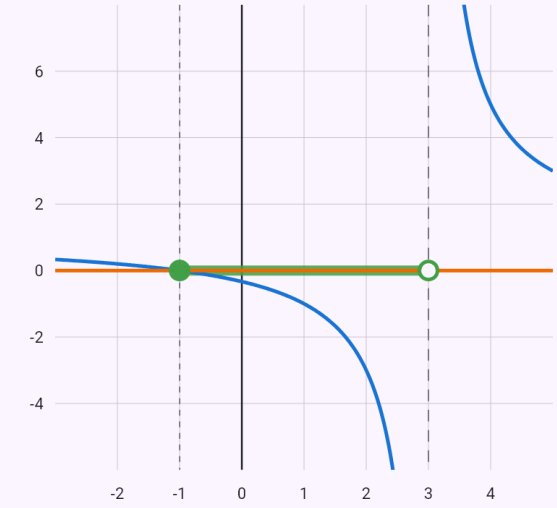
Założenia: $x \neq 3$

Kroki

- Założenia – mianownik nie może być zerem: $x \neq 3$
- Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Wykres



$y = \frac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $(-1; 0)$

Nierówność podwójna.

Input: `-1 <= 2x + 1 < 5`

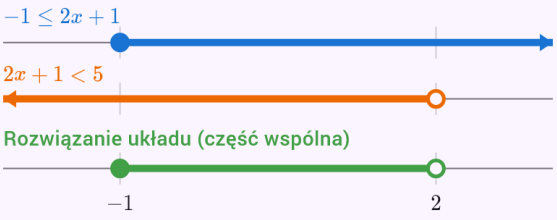
Wynik

$$x \in \langle -1;\ 2)$$

Kroki

- Nierówność 1: $-1 \leq 2x + 1$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $-2x \leq 2$
- Dzielimy przez liczbę ujemną -2, znak nierówności zmienia się na przeciwny: $x \geq -1$
- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in \langle -1;\ \infty)$
- Nierówność 2: $2x + 1 < 5$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $2x < 4$
- Dzielimy przez liczbę dodatnią 2, znak nierówności się nie zmienia: $x < 2$
- Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in (-\infty;\ 2)$
- Rozwiązanie układu to część wspólna rozwiązań nierówności: $x \in \langle -1;\ 2)$

Wykres



Każda nierówność ma na osi liczbowej własny wiersz, ich część wspólna jest zielona. Pełna kropka należy do rozwiązania, pusta nie.

Układ nierówności z dwiema niewiadomymi – obszar na płaszczyźnie i jego wierzchołki.

Input: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

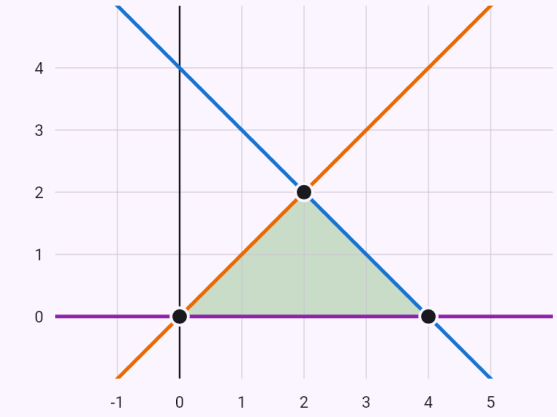
Wynik

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in \langle 0;\ \infty)$$

Kroki

- Nierówność 1: $x + y \leq 4$
- Brzegiem jest krzywa $x + y = 4$ – rysowana linią ciągłą, jej punkty należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny zawierająca ten punkt.
- Nierówność 2: $x - y \geq 0$
- Brzegiem jest krzywa $x - y = 0$ – rysowana linią ciągłą, jej punkty należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny zawierająca ten punkt.
- Nierówność 3: $y \geq 0$
- Brzegiem jest krzywa $y = 0$ – rysowana linią ciągłą, jej punkty należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny zawierająca ten punkt.
- Rozwiązanie układu to część wspólna tych obszarów – zacieniowana na wykresie.
- Wierzchołki obszaru (tam, gdzie spotykają się brzegi): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Wykres



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow\ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in \langle 0;\ \infty)$

Rozwiązaniem jest zacieniowany obszar. Brzeg ciągły do niego należy, przerywany nie.

Wierzchołki obszaru:

● $(0; 0)$ ● $(2; 2)$ ● $(4; 0)$

Nierówność w liczbach całkowitych – wypisane są liczby całkowite przedziału.

Input: `x^2 < 10`

Wynik

$$x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

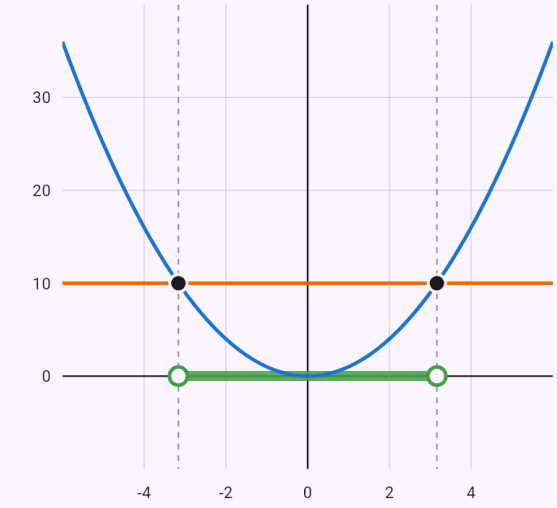
Kroki

- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - 10 < 0$
- Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Znaki na poszczególnych przedziałach:

	$(-\infty;\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10};\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- W liczbach rzeczywistych $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$; w $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Wykres



$y = x^2$
$y = 10$

Rozwiązanie nierówności – tam, gdzie zachodzi relacja między dwiema krzywymi

Punkty przecięcia wykresów:

- $\left(-\sqrt{10};\ 10\right)$
- $\left(\sqrt{10};\ 10\right)$

Równanie i nierówność – pierwiastki równania podstawione do nierówności.

Input: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Wynik

$$x = 3$$

Kroki

- Najpierw rozwiązujemy równanie $x^2 - x - 6 = 0$, potem jego pierwiastki podstawiamy do nierówności.
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- Pierwiastek $x = -2$ nie spełnia założenia $x > 0$, więc nie jest rozwiązaniem.
- Pierwiastek $x = 3$ spełnia założenia.

Okrąg i półpłaszczyzna – rozwiązaniem jest łuk, jego punkty końcowe do niego nie należą.

Input: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

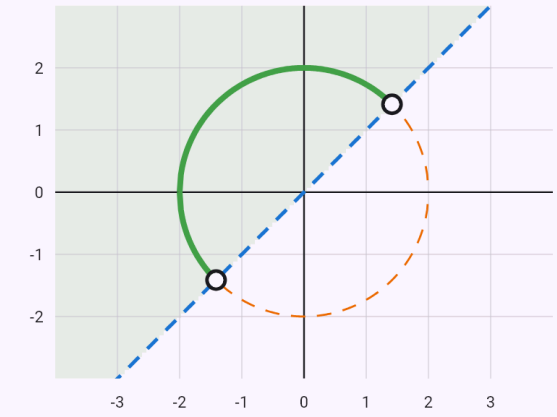
Wynik

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y > x$$

Kroki

- Rozwiązaniem są punkty krzywej $x^2 + y^2 = 4$ leżące w obszarze wyznaczonym przez nierówności. Najpierw znajdujemy ten obszar:
- Brzegiem jest krzywa $y = x$ – rysowana linią przerywaną, jej punkty nie należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[1;\ 0]$: $0 > 1$ nie zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny, która tego punktu nie zawiera.
- Końce części krzywej: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – na brzegu przerywanym, nie należą do rozwiązania.

Wykres



$y > x$

$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Rozwiązaniem jest część krzywej wyróżniona na zielono – ta, która leży w zacieniowanym obszarze. Pełny punkt końcowy należy do rozwiązania, pusty nie.

Punkty końcowe:

○ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

Okrąg i prosta z nierównością – przecięcie poniżej osi x nie spełnia warunku.

Input: `x^2 + y^2 = 25`

`x - y = 1`

`y > 0`

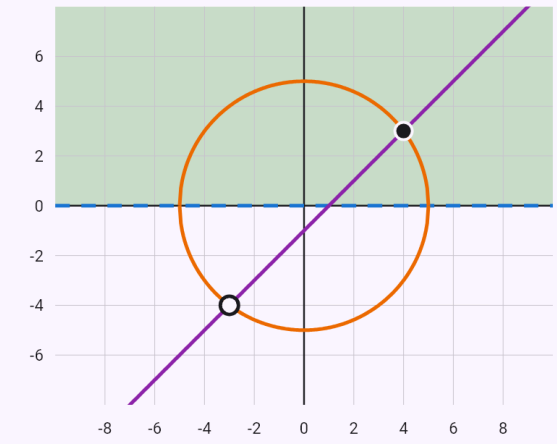
Wynik

$$x = 4$$
$$y = 3$$

Kroki

- Najpierw rozwiązujemy układ równań, potem jego rozwiązania podstawiamy do nierówności.
- Rozwiązanie $x = -3,\ y = -4$ nie spełnia nierówności $y > 0$, więc nie jest rozwiązaniem układu.
- Rozwiązanie $x = 4,\ y = 3$ spełnia nierówności.

Wykres



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0;\ \infty)$

$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Rozwiązaniami są punkty przecięcia krzywych w zacieniowanym obszarze (pełna kropka); pusta kropka nie spełnia nierówności.

Punkty przecięcia wykresów:

○ $(-3; -4)$ ● $(4; 3)$

10. Układy równań

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi aplikacja rozwiązuje metodą przeciwnych współczynników (dodawania) lub podstawiania, a większe układy eliminacją Gaussa – jako równania lub na macierzy (macierz rozszerzona i operacje na wierszach). Układ kwadratowy można też rozwiązać wzorami Cramera (wyznaczniki). Metodę wybierzesz chipem. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi dostaje też wykres, na którym rozwiązania są przecięciami prostych lub krzywych.

Liczby równań i niewiadomych nie muszą się zgadzać. Eliminacja Gaussa pokaże, kiedy układ nie ma rozwiązania (wychodzi równanie typu 0 = 1) i kiedy ma ich nieskończenie wiele: niewiadome, których równania nie wyznaczają, stają się parametrami t, s, … (wybranymi tak, by rozwiązanie nie miało ułamków), a rozwiązanie jest zapisane też w postaci wektorowej. W postaci macierzowej o liczbie rozwiązań rozstrzyga twierdzenie Kroneckera–Capellego – porównuje rząd macierzy, rząd macierzy rozszerzonej i liczbę niewiadomych. Dla układu jednorodnego (wszystkie prawe strony 0) aplikacja pokaże bazę przestrzeni rozwiązań.

Niewiadome mogą mieć indeks: x_1, x_1 lub x1. Układ można też podać macierzami – macierzą rozszerzoną z prawymi stronami za pionową kreską albo macierzą A, wektorem prawych stron b i równaniem Ax = b; niewiadomymi są wtedy x_1, x_2, …, a domyślną metodą jest eliminacja Gaussa na macierzy.

Układ może zawierać jeden lub dwa parametry – litery, które nie są niewiadomymi (niewiadome to x, y, z, u, v, w, t oraz x_1, x_2, …). Aplikacja przeprowadza wtedy dyskusję rozwiązalności według wartości parametrów: z chipem „Gauss – macierz” (domyślny dla trzech i więcej równań) sprowadza macierz rozszerzoną; tam, gdzie mnożyłaby przez wyrażenie z parametrem, które może być zerem, zakłada, że nim nie jest, a jego miejsca zerowe dokończy osobno po podstawieniu wartości – w każdym przypadku rozstrzyga twierdzenie Kroneckera–Capellego. Z chipem „Wzory Cramera” oblicza wyznaczniki jako wyrażenia z parametrem: wzory dla D ≠ 0, miejsca zerowe D podstawione. Przy dwóch parametrach są przypadki typu „b = 4, a ≠ 2” lub „a = b”.

Układ nieliniowy (np. okrąg i prosta) jest rozwiązany i narysowany, na razie bez rozwiązania krok po kroku.

Jak to wpisać

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Niewiadome z indeksem – x_1, x_1 i x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	Macierz rozszerzona – prawe strony za pionową kreską.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	Macierz układu, wektor prawych stron i równanie Ax = b.

Przykłady

Metoda przeciwnych współczynników (dodawania).

Input: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Przeciwnych współczynników

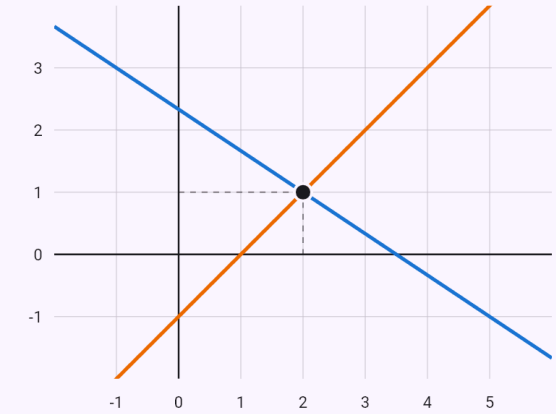
Wynik

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Kroki

- Mnożymy pierwsze równanie przez 1, a drugie przez -2, aby po dodaniu x się zredukowało
  $$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$
- Dodajemy równania, x się redukuje: $5y = 5$
- Rozwiązujemy: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Podstawiamy do równania 2: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Wykres



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(2; 1)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu układu – jego współrzędne to wartości x i y.

Trzy równania – eliminacja Gaussa.

Input: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Eliminacja Gaussa

Wynik

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Kroki

- Eliminujemy x z równań poniżej
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$
- Eliminujemy y z równań poniżej
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$
- Rozwiązujemy: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Podstawiamy do równania 2: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Podstawiamy do równania 1: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Wzory Cramera – wyznaczniki D, D_x, D_y.

Input: `2x + 3y = 7`

`x - y = 1` Wzory Cramera

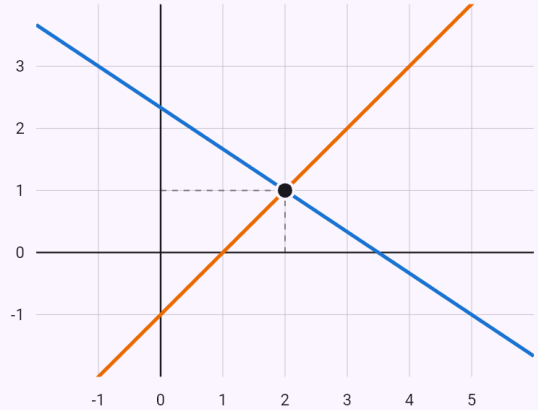
Wynik

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Kroki

- Obliczamy wyznacznik
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$
- Obliczamy wyznacznik
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$
- Obliczamy wyznacznik
$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$
- Ze wzorów Cramera: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Ze wzorów Cramera: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Wykres



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Punkty przecięcia wykresów:

- $(2; 1)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu układu – jego współrzędne to wartości x i y.

Nieskończenie wiele rozwiązań – twierdzenie Kroneckera–Capellego, parametr i postać wektorowa.

Input: `x + 2y + z = 3`

`2x + 4y + 3z = 7`

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – macierz

Wynik

Rozwiązań jest nieskończenie wiele.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Kroki

- Macierz uzupełniona układu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach
  $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Operacje na wierszach $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Równanie 0 = 0 zachodzi zawsze – pomijamy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Twierdzenie Kroneckera–Capellego:
  $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – rzędy są równe, ale mniejsze niż liczba niewiadomych, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Macierz schodkową (trójkątną) zapisujemy z powrotem jako równania

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Niewiadome, których równania nie wyznaczają, wybieramy jako parametry: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Rozwiązujemy: $z = 1$
- Podstawiamy do równania 1:
  $x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- Rozwiązanie w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Układ bez rozwiązania – wychodzi równanie, które nigdy nie zachodzi.

Input: `x + y + z = 2`

`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Wynik

Brak rozwiązań.

Kroki

- Eliminujemy x z równań poniżej

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

- Eliminujemy y z równań poniżej

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Otrzymaliśmy równanie $0 = 1$, które nie ma rozwiązania – układ więc nie ma rozwiązania.

Układ jednorodny – baza przestrzeni rozwiązań.

Input: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauss – macierz

Wynik

Rozwiązań jest nieskończenie wiele.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Układ jest jednorodny (wszystkie prawe strony są równe 0) – zawsze ma rozwiązanie zerowe (same zera); rozwiązanie niezerowe ma dokładnie wtedy, gdy rząd jego macierzy jest mniejszy niż liczba niewiadomych.
- Macierz uzupełniona układu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach
$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Zamieniamy równania 2 i 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Równanie 0 = 0 zachodzi zawsze – pomijamy je
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Twierdzenie Kroneckera–Capellego:
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – rzędy są równe, ale mniejsze niż liczba niewiadomych, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Macierz schodkową (trójkątną) zapisujemy z powrotem jako równania
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Niewiadome, których równania nie wyznaczają, wybieramy jako parametry: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Podstawiamy do równania 2: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Podstawiamy do równania 1: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- Rozwiązanie w postaci wektorowej
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Baza przestrzeni rozwiązań (wymiar 1)
$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Układ dany macierzą rozszerzoną.

Input: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Wynik

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Kroki

- Macierz uzupełniona układu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

- Twierdzenie Kroneckera–Capellego: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – rząd macierzy jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej i liczbie niewiadomych, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- Macierz schodkową (trójkątną) zapisujemy z powrotem jako równania
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Rozwiązujemy: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- Podstawiamy do równania 2: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- Podstawiamy do równania 1: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Układ z parametrem – macierz rozszerzona, przypadki a = 1 i a = −2.

Input: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – macierz

Wynik

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomymi są $x,\ y,\ z$, parametr a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Macierz uzupełniona układu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Zamieniamy równania 1 i 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Kontynuujemy z elementem $1 - a$, który może być zerem – zakładamy więc $a \neq 1$; przypadek $a = 1$ rozpatrujemy osobno.
- Zamieniamy równania 2 i 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Kontynuujemy z elementem $-a - 2$, który może być zerem – zakładamy więc $a \neq -2$; przypadek $a = -2$ rozpatrujemy osobno.
- Dla $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – układ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Dla $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$ – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań: $x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Dla $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – układ nie ma rozwiązania. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dwa parametry – dyskusja według a i b.

Input: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Wynik

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomymi są $x,\ y,\ z$, parametry $a,\ b$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozwiązanie zależy od ich wartości, więc przechodzimy przez przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Macierz uzupełniona układu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Operacje na wierszach $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Kontynuujemy z elementem $(a-2)(a-1)$, który może być zerem – zakładamy więc $a \neq 1,\ a \neq 2$; przypadek $a = 2,\ a = 1$ rozpatrujemy osobno.
- Dla $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Dla $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – układ nie ma rozwiązania. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Dla $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Dla $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – układ nie ma rozwiązania. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Dla $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Macierz po wstawieniu wartości
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Okrąg i prosta.

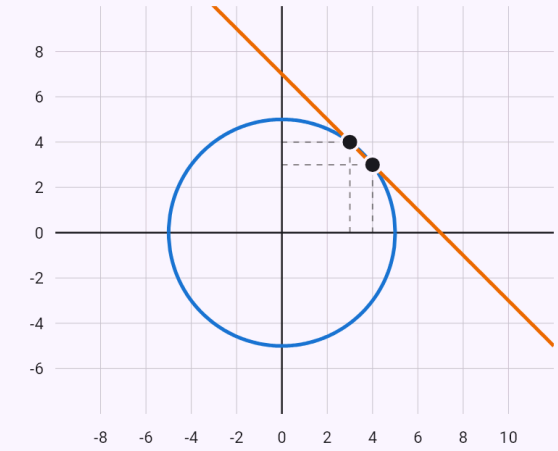
Input: `x^2 + y^2 = 25`

`x + y = 7`

Wynik

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Wykres



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Punkty przecięcia wykresów:

● $(3; 4)$ ● $(4; 3)$

Każdy punkt przecięcia odpowiada jednemu rozwiązaniu układu – jego współrzędne to wartości x i y.

Znane ograniczenia

- Układy nieliniowe są na razie bez rozwiązania krok po kroku.

11. Równania i nierówności z parametrem

Litera w równaniu oprócz niewiadomej to parametr – dowolna liczba rzeczywista, od której zależy rozwiązanie. Aplikacja przekształca równanie do postaci A·x = B (kwadratowe do A·x² + B·x + C = 0) i przeprowadza dyskusję rozwiązania według wartości parametru: gdzie współczynnik przy niewiadomej jest zerowy, gdzie wyróżnik jest dodatni, zerowy lub ujemny, gdzie założenia wykluczają pierwiastek i dla jakich wartości zadanie nie ma sensu. Wynik podsumowuje przypadki.

Aplikacja bierze niewiadomą w kolejności x, y, z, u, v, w, t; pozostałe litery są parametrami. Inną niewiadomą wybierz chipem „Niewiadoma” lub napisz ją po przecinku. Wykres pokazuje wszystkie rozwiązania jako krzywą (obszar dla nierówności) na płaszczyźnie parametr–niewiadoma; wartość parametru wybierz suwakiem i odczytaj rozwiązania z prostej pionowej.

Po przecinku możesz też zapytać o pierwiastki: „x^2 + px + 4 = 0, x > 0” – dla jakich p każdy pierwiastek jest dodatni (chip „Warunek zachodzi dla” przełącza na co najmniej jeden pierwiastek), „…, x = 3” – dla jakich p 3 jest pierwiastkiem. Pierwiastek równania liniowego podstawia się do warunku, kwadratowego przez wzory Viète’a. Układ dwóch równań liniowych z parametrem jest rozwiązywany wyznacznikami (wzory Cramera), z przypadkami jednego, żadnego i nieskończenie wielu rozwiązań. Nierówność kwadratowa lub wymierna jest dyskutowana według kolejności jej miejsc zerowych. Suwak wykresu zatrzymuje się dokładnie na wartościach krytycznych parametru, które są też wypisane pod wykresem. Układ z parametrem z większą liczbą równań, z dwoma parametrami lub metodą macierzową jest w rozdziale Układy równań.

W całce nieoznaczonej inne litery są stałymi – aplikacja dodaje, które nie mogą być zerem ($\int dx/(a - bx)^3$ dla $b \neq 0$). W granicy i całce oznaczonej litery też są parametrami – zob. rozdziały Granice i Całka oznaczona.

Jak to wpisać

`2ax + a = 4x`	Każda inna litera jest parametrem; niewiadomą jest x (lub y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, unknown q`	Niewiadomą lub parametr możesz nazwać po przecinku („a is a parameter”, „unknown q”).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Pytanie o pierwiastki po przecinku: dla jakich p każdy pierwiastek (lub co najmniej jeden) ma tę własność.

Przykłady

Równanie liniowe – brak rozwiązania dla a = 2.

Input: `2ax + a = 4x`

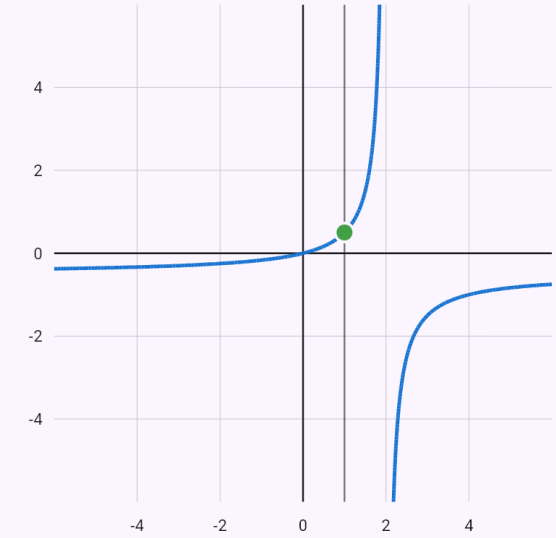
Wynik

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomą jest x, parametr a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez poszczególne przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Przekształcamy do postaci podstawowej: $2(a-2)x = -a$
- Dla $a \neq 2$ jest $2(a-2)$ różne od zera, więc możemy przez nie dzielić: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Dla $a = 2$ współczynnik przy niewiadomej jest równy zeru: $0 \cdot x = -2$, więc $x \in \emptyset$

Wykres



$2ax + a = 4x$

Każdy punkt (a; x) krzywej jest rozwiązaniem. Dla wybranej wartości a rozwiązania leżą na prostej pionowej – przesuń ją suwakiem.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Równanie kwadratowe – dyskusja według wyróżnika.

Input: `x^2 + 6x + p = 0`

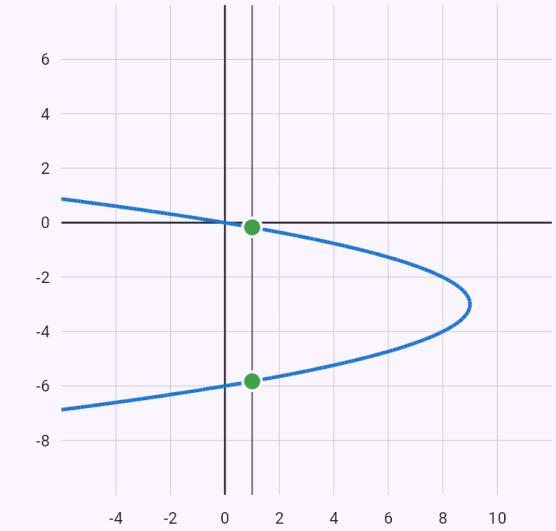
Wynik

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomą jest x, parametr p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez poszczególne przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Przekształcamy do postaci podstawowej:
  $x^2 + 6x + p = 0$
- Wyróżnik zależny od parametru:
  $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Dla $p < 9$ jest D > 0 i równanie ma dwa różne pierwiastki:
  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Dla $p > 9$ jest D < 0 i równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego.
- Dla $p = 9$ jest D = 0 i równanie ma jeden pierwiastek podwójny: $x = -3$

Wykres



$x^2 + 6x + p = 0$

Każdy punkt (p; x) krzywej jest rozwiązaniem. Dla wybranej wartości p rozwiązania leżą na prostej pionowej – przesuń ją suwakiem.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Nierówność – znak współczynnika decyduje o kierunku.

Input: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

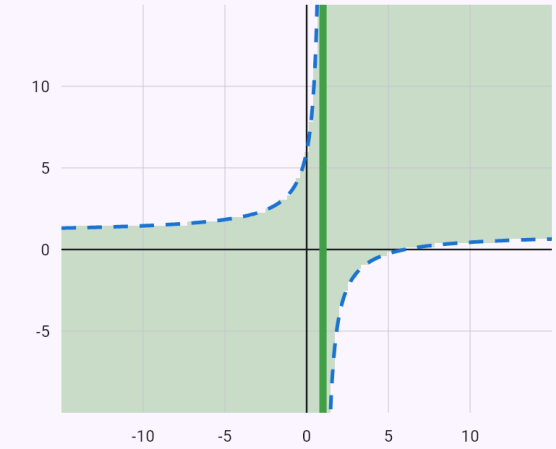
Wynik

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomą jest x, parametr p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez poszczególne przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Przekształcamy do postaci podstawowej: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Dla $p < 1$ jest $2(1-p)$ dodatnie – dzielenie zachowuje znak nierówności: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Dla $p > 1$ jest $2(1-p)$ ujemne – dzielenie zmienia znak nierówności na przeciwny: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Dla $p = 1$ współczynnik przy niewiadomej jest równy zeru: $0 \cdot x < 10$, więc $x \in \mathbb{R}$

Wykres



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{p-6}{p-1}$

Zacieniowany obszar zawiera wszystkie rozwiązania (p; x). Dla wybranej wartości p rozwiązaniem jest wyróżniona część prostej pionowej – przesuń ją suwakiem.

p = 1

$p = 1$

Oba pierwiastki większe od 1 – wyróżnik i wzory Viète'a.

Input: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

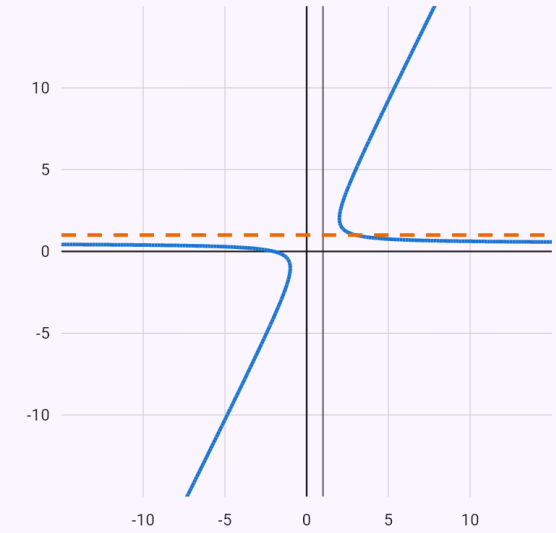
Wynik

$$2 \leq p < 3$$

Kroki

- Niewiadomą jest x, parametr p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez poszczególne przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Przekształcamy do postaci podstawowej: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Wyróżnik zależny od parametru $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p-2$
- Dla $p \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$ jest D > 0 i równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Dla $-1 < p < 2$ jest D < 0 i równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego.
- Dla $p = -1$ jest D = 0 i równanie ma jeden pierwiastek podwójny: $x = -1$
- Dla $p = 2$ jest D = 0 i równanie ma jeden pierwiastek podwójny: $x = 2$
- Szukamy wartości parametru, dla których każdy pierwiastek równania spełnia $x > 1$ (i jakiś pierwiastek istnieje).
- Ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- Równanie musi mieć pierwiastki rzeczywiste: $D \geq 0$, więc $p \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 2;\ \infty)$
- Warunek dla sumy: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, więc $p > 1$
- Warunek dla iloczynu: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, więc $p < 3$
- Warunek zachodzi dla $2 \leq p < 3$

Wykres



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Każdy punkt (p; x) krzywej jest rozwiązaniem. Dla wybranej wartości p rozwiązania leżą na prostej pionowej – przesuń ją suwakiem.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1: \quad x \in \emptyset$

Układ z parametrem – wyznaczniki; proste się przecinają, są równoległe lub się pokrywają.

Input: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Wynik

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Kroki

- Niewiadomymi są $x,\ y$, parametr a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Przekształcamy do postaci podstawowej

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Układ rozwiązujemy wyznacznikami (wzory Cramera)

  $$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$$

  $$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$$

  $$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

- Dla $a \neq -1,\ a \neq 1$ jest D ≠ 0 – układ ma jedno rozwiązanie (proste się przecinają):

  $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$

- Dla $a = -1$ jest D = 0 i układ nie ma rozwiązania (proste są równoległe).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Dla $a = 1$ jest D = 0 i oba równania opisują tę samą prostą – nieskończenie wiele rozwiązań:

  $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Nierówność wymierna – według kolejności miejsca zerowego p i punktu 1.

Input: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Wynik

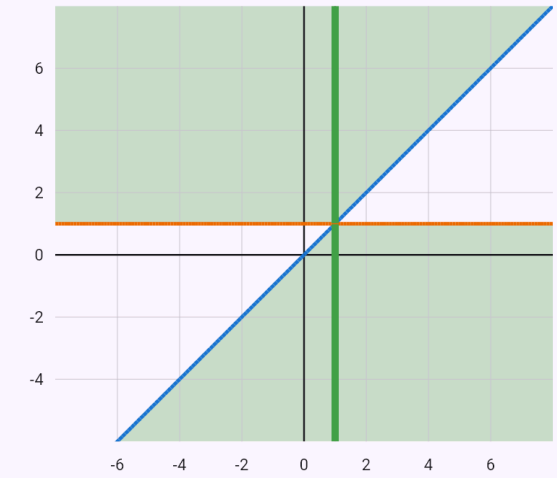
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\, p) \cup (1;\, \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty;\, 1) \cup (1;\, \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty;\, 1) \cup (p;\, \infty), & p > 1 \end{cases}$$

Założenia: $x \neq 1$

Kroki

- Niewiadomą jest x, parametr p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiązanie zależy od jego wartości, więc przechodzimy przez poszczególne przypadki (dyskusja rozwiązania).
- Założenia – mianownik nie może być zerem: $x \neq 1$
- Przekształcamy do postaci podstawowej: $\frac{x-p}{x-1} > 0$
- Miejsca zerowe licznika: p; mianownik jest równy zeru dla 1
- Dla $p < 1$ – według kolejności miejsc zerowych i znaków na przedziałach: $x \in (-\infty;\, p) \cup (1;\, \infty)$
- Dla $p > 1$ – według kolejności miejsc zerowych i znaków na przedziałach: $x \in (-\infty;\, 1) \cup (p;\, \infty)$
- Dla $p = 1$ rozwiązujemy $\frac{x-1}{x-1} > 0$: $x \in (-\infty;\, 1) \cup (1;\, \infty)$

Wykres



$\frac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

Zacieniowany obszar zawiera wszystkie rozwiązania (p; x). Dla wybranej wartości p rozwiązaniem jest wyróżniona część prostej pionowej – przesuń ją suwakiem.

p = 1

$p = 1$

Znane ograniczenia

- Pełna dyskusja przedziałami tylko z jednym parametrem, przy większej liczbie parametrów przypadki ogólne.
- Pytania o pierwiastki tylko dla równań liniowych i kwadratowych; układy z parametrem tylko dwa równania liniowe; parametr pod pierwiastkiem lub w logarytmie jeszcze nie.

12. Wyznaczanie litery ze wzoru

Wzór z matematyki, fizyki lub chemii (m = ρV, S = πr², v = s/t) przekształca się tak, aby wybrana litera stała sama po jednej stronie. Pozostałe litery są danymi wielkościami – aplikacja pracuje z nimi jak ze znanymi liczbami. Kroki to przekształcenia równoważne jak w szkole: przenoszenie wyrazów na drugą stronę, mnożenie przez mianownik, dzielenie, wyłączanie przed nawias, pierwiastkowanie, odwrotności.

Literę do wyznaczenia wybiera się chipem „Wyznacz”; bez wyboru aplikacja wyznacza pierwszą literę po stronie wzoru. Wynikiem jest wzór z założeniami – to, przez co dzieli, nie może być zerem (V = m/ρ dla ρ ≠ 0). Wielkości we wzorze są dodatnie, więc pierwiastek ma tylko wartość dodatnią: r = √(S/π).

Równanie w x i y jest rozwiązywane względem y (prosta 2x + y = x + 2y to y = x); pozostałe równania w x i y mają wśród chipów pochodnej, całki i wykresu „Wyznacz y” i „Wyznacz x”. Tutaj pierwiastek daje oba znaki: x² + y² = 25 to y = ±√(25 − x²).

Równań z parametrem (2ax + a = 4x, niewiadoma x) nie przekształca się jako wzoru, lecz rozwiązuje z dyskusją – zob. poprzedni rozdział.

Jak to wpisać

`m = ρV`	Wzór – wielkość sama po jednej stronie, wielkie i małe litery (E, I, V to wielkości).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indeksy z podkreślnikiem (R_1, v_0), litery greckie (ρ, rho, \rho), π to stała.
`2x + y = x + 2y`	Równanie w x i y – rozwiązane względem y.

Przykłady

Gęstość – dzielenie przez wielkość z założeniem ρ ≠ 0.

Input: `m = ρV`

Wynik

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Założenia: $\rho \neq 0$

Kroki

- Wyznaczamy V. Pozostałe litery ($m,\ \rho$) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż V zostanie samo po jednej stronie.
- Zamieniamy strony równania: $\rho V = m$
- Dzielimy obie strony przez ρ, które nie może być zerem ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Pole trapezu – mnożenie przez dwa, dzielenie przez wysokość, przeniesienie a.

Input: `S = (a + c)/2 · v`

Wynik

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Założenia: $v \neq 0$

Kroki

- Wyznaczamy c. Pozostałe litery ($S,\ a,\ v$) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż c zostanie samo po jednej stronie.
- Zamieniamy strony równania: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Mnożymy obie strony przez 2: $v(a+c) = 2S$
- Dzielimy obie strony przez v, które nie może być zerem ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Odejmujemy a od obu stron: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Sprowadzamy do wspólnego mianownika: $c = \frac{2S - av}{v}$

Pole koła – pierwiastkowanie, promień jest dodatni.

Input: `S = πr^2`

Wynik

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Kroki

- Wyznaczamy r. Pozostałe litery (S) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż r zostanie samo po jednej stronie.
- Zamieniamy strony równania: $\pi r^2 = S$
- Dzielimy obie strony przez π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Pierwiastkujemy obie strony. r jest wielkością, a wielkości są dodatnie – zostaje tylko pierwiastek dodatni: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Rezystory równolegle – wspólny mianownik i odwrotności.

Input: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Wynik

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Założenia: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Kroki

- Wyznaczamy R_1. Pozostałe litery ($R,\ R_2$) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż R_1 zostanie samo po jednej stronie.
- Założenia – mianownik nie może być zerem: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Zamieniamy strony równania: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Odejmujemy $\frac{1}{R_2}$ od obu stron: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Sprowadzamy do wspólnego mianownika: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Jeśli dwa wyrażenia są równe, to równe są też ich odwrotności: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Prosta – wyrazy z y na lewo, pozostałe na prawo.

Input: `2x + y = x + 2y`

Wynik

$$y = x$$

Kroki

- Wyznaczamy y. Pozostałe litery (x) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż y zostanie samo po jednej stronie.
- Wyrazy z y przenosimy na lewą stronę, pozostałe na prawą (ze znakiem przeciwnym) i redukujemy

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Mnożymy obie strony przez (-1): $y = x$

Okrąg rozwiązany względem y – pierwiastek z ±.

Input: `x^2 + y^2 = 25`

Wynik

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Kroki

- Wyznaczamy y. Pozostałe litery (x) traktujemy jak znane liczby, a równanie zmieniamy przekształceniami równoważnymi, aż y zostanie samo po jednej stronie.
- Odejmujemy x^2 od obu stron: $y^2 = 25 - x^2$
- Wyciągamy pierwiastek kwadratowy z obu stron; liczba i liczba do niej przeciwna mają ten sam kwadrat, stąd ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Znane ograniczenia

- Litera tylko w potęgach, ułamkach i pierwiastkach; jeszcze nie w funkcjach (sin, log, wykładnik) ani podniesiona do kwadratu razem z samą sobą ($s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ względem t).

13. Upraszczanie wyrażeń

Wyrażenie bez znaku równości aplikacja przekształca według wybranego chipu: upraszcza je (wyrażenie wymierne do wspólnego mianownika i skrócone, z założeniami), wymnaża, rozkłada na czynniki (wyłączaniem wspólnego czynnika, wzorami i schematem Hornera) albo rozkłada na ułamki proste – jak na papierze, z równaniami na nieznane współczynniki. Rozkład na czynniki jest nad liczbami całkowitymi; jeśli wyrażenie rozkłada się dalej nad liczbami rzeczywistymi (przez pierwiastki niewymierne), pokazuje to następny krok. Pierwiastek z jednomianu wyłącza się częściowo – przy pierwiastku parzystego stopnia z wartością bezwzględną tam, gdzie podstawa może być ujemna. Działają też liczby zespolone – iloraz przez pomnożenie przez sprzężenie.

Wyrażenia liczbowe z ułamkami są rozwiązywane krok po kroku jak w szkole: najpierw najbardziej wewnętrzne nawiasy (okrągłe, kwadratowe lub klamrowe), licznik i mianownik ułamka piętrowego osobno, potem potęgi, mnożenie i dzielenie (przez ułamek jako mnożenie przez odwrotność, także z dwukropkiem lub ÷), a dodawanie do wspólnego mianownika na końcu. Liczbę mieszaną wpisz ze spacją – 2 1/3 (ze zdjęcia też 2⅓) – a aplikacja najpierw zamieni ją na ułamek; iloczyn dwóch liczb pisz zawsze z kropką. Wynik większy od 1 jest pokazany też jako liczba mieszana.

Wielomian dzielony przez wielomian zapisz z dwukropkiem: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). Aplikacja dzieli pisemnie jak na papierze – dzieli wyrazy najwyższego stopnia, mnoży dzielnik przez wynik i odejmuje – i pokazuje iloraz, resztę i sprawdzenie; dla dzielnika x − a oferuje też schemat Hornera. Ułamek p/q jest upraszczany jak wcześniej; dzielenie wybierzesz chipem „Dzielenie wielomianów”.

Dwumian Newtona: k-ty wyraz rozwinięcia („5th term of (2x - 1/x)^8”) i wyraz bez x („term without x in (x + 1/x)^10”) z wyrazu ogólnego. Permutacje P(5) i z powtórzeniami P′(2, 3, 1) są obliczane przez silnie.

O kombinatorykę można też zapytać krótkim zdaniem (na razie po angielsku): „How many ways can we choose 3 of 10?” (z dopiskiem „order matters”, „with repetition”), „In how many ways can 5 people be arranged?” (także wokół okrągłego stołu), „How many three-digit even numbers can be made from the digits 0-5 without repetition?” i „How many words can be formed from the letters of the word BANANA?”. Także dwa klasyczne zadania z prawdopodobieństwa: paradoks dnia urodzin (co najmniej dwie z n osób mają urodziny tego samego dnia) i szatniarz, który zgubi numerki (nikt nie dostanie własnego płaszcza – albo listy w kopertach).

Przykłady

Wyrażenie liczbowe z ułamkami – najpierw mnożenie, potem wspólny mianownik.

Input: `2/3 - 1/6*2` Uprość

Wynik

$$\frac{1}{3}$$

Kroki

- Najpierw mnożenie i dzielenie: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Zagnieżdżone nawiasy od najbardziej wewnętrznego.

Input: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Wynik

$$7$$

Kroki

- Najpierw najbardziej wewnętrzny nawias: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Po podstawieniu: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Najpierw najbardziej wewnętrzny nawias: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Po podstawieniu: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Najpierw najbardziej wewnętrzny nawias: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Po podstawieniu: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Mnożymy – licznik przez licznik, mianownik przez mianownik – i skracamy: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Ułamek piętrowy – licznik i mianownik osobno, potem razy odwrotność.

Input: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Wynik

$$\frac{10}{21}$$

Kroki

- Najpierw osobno licznik i mianownik ułamka piętrowego: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Najpierw osobno licznik i mianownik ułamka piętrowego: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Po podstawieniu: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Ułamek piętrowy: licznik razy odwrotność mianownika $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Liczby mieszane – na ułamki i wynik także jako liczba mieszana.

Input: `2 1/3 + 1 1/2`

Wynik

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Kroki

- Liczby mieszane zamieniamy na ułamki – część całkowita razy mianownik plus licznik $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Po podstawieniu: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Sprowadzamy do wspólnego mianownika: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Wynik jako liczba mieszana: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Upraszczanie wyrażenia wymiernego.

Input: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Uprość

Wynik

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Założenia: $x \neq -1$

Kroki

- Założenia – mianownik nie może być zerem: $x \neq -1$
- Rozkładamy licznik i mianownik na czynniki: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Skracamy wspólny czynnik $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Wymnażanie.

Input: `(x + 2)^3` Wymnóż

Wynik

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Kroki

- Wymnażamy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Rozkład na czynniki schematem Hornera.

Input: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Rozłóż na czynniki

Wynik

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Kroki

- Pierwiastkami wymiernymi mogą być tylko dzielniki wyrazu wolnego -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Schemat Hornera potwierdza pierwiastek $x = 1$ i dzieli przez niego wielomian:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Po podstawieniu widać, że ci kandydaci nie są pierwiastkami: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Schemat Hornera potwierdza pierwiastek $x = 2$ i dzieli przez niego wielomian:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Ułamki proste.

Input: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Ułamki proste

Wynik

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Założenia: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Kroki

- Założenia – mianownik nie może być zerem: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Rozkładamy mianownik na czynniki: $(x-1)(x+2)$
- Szukamy rozkładu w postaci: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Mnożymy obie strony przez mianownik $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Podstawiamy $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Podstawiamy $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Częściowe wyłączenie spod pierwiastka, z wartością bezwzględną.

Input: `sqrt(8a^5 b^2)` Uprość

Wynik

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Kroki

- Wyłączamy, co się da, spod pierwiastka – potęgi pod nim wychodzą przed pierwiastek (przy pierwiastku stopnia parzystego jako wartość bezwzględna tam, gdzie podstawa może być ujemna): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Dzielenie liczb zespolonych.

Input: `(3+4i)/(1-2i)` Postać algebraiczna

Wynik

$$-1+2i$$

Kroki

- Mnożymy ułamek przez liczbę sprzężoną z mianownikiem, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Równanie z silniami – założenia, skracanie i sprawdzenie pierwiastków.

Input: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Wynik

$$x = 5$$

Kroki

- Założenia: silnie i symbole Newtona istnieją tylko dla liczb całkowitych nieujemnych – każdy argument (dla symbolu Newtona n, k i n − k) musi być liczbą całkowitą ≥ 0: $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Silnie zapisujemy przez najmniejszą, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), i skracamy; symbol Newtona jako iloczyn:
  $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2+x = 30$
- Zostaje równanie bez silni, wszystko po jednej stronie:
  $x^2+x-30 = 0$
- Pierwiastki równania to $x = -6,\ x = 5$; założenia spełnia $x = 5$

Dzielenie pisemne – iloraz, reszta i sprawdzenie.

Input: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Wynik

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Kroki

- Krok 1 – dzielimy wyrazy najwyższego stopnia $2x^3:x^2=2x$, mnożymy dzielnik przez wynik $2x\cdot\left(x^2+1\right)=2x^3+2x$ i odejmujemy, zostaje $3x^2-3x+5$
- Krok 2 – dzielimy wyrazy najwyższego stopnia $3x^2:x^2=3$, mnożymy dzielnik przez wynik $3\cdot\left(x^2+1\right)=3x^2+3$ i odejmujemy, zostaje $-3x+2$
- Dzielenie pisemne $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- Iloraz to $2x+3$, reszta $-3x+2$
- Sprawdzenie – iloraz razy dzielnik plus reszta daje dzielną: $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

Dzielenie przez x − 1 schematem Hornera.

Input: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Schemat Hornera

Wynik

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Kroki

- Schemat Hornera dla $x=1$ – na górze współczynniki dzielnej, pod nimi bieżące sumy; ostatnia liczba to reszta

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- Iloraz to x^2+x-1, reszta 0
- Sprawdzenie – iloraz razy dzielnik plus reszta daje dzielną: $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Równanie z symbolem Newtona C(n, 2) – także V(n, k), C', V' z powtórzeniami.

Input: `C(n, 2) = 45`

Wynik

$$n = 10$$

Kroki

- Założenia: silnie i symbole Newtona istnieją tylko dla liczb całkowitych nieujemnych – każdy argument (dla symbolu Newtona n, k i n − k) musi być liczbą całkowitą ≥ 0: $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Silnie zapisujemy przez najmniejszą, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), i skracamy; symbol Newtona jako iloczyn: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Zostaje równanie bez silni, wszystko po jednej stronie: $n^2 - n - 90 = 0$
- Pierwiastki równania to $n = -9,\ n = 10$; założenia spełnia $n = 10$

Wybór k z n w zdaniu – kombinacje.

Input: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Wynik

$$120$$

Kroki

- Wybieramy 3 z 10, kolejność nie ma znaczenia i nic się nie powtarza – liczba kombinacji:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Parzyste liczby trzycyfrowe – dwa przypadki według ostatniej cyfry.

Input: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Wynik

52

Kroki

- Liczby mają 3 cyfr wybranych z $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Zero nie może stać na początku. Cyfry nie mogą się powtarzać. Liczba jest parzysta dokładnie wtedy, gdy jej ostatnia cyfra jest parzysta.
- Ostatnia cyfra to 0 – na pozostałe miejsca zostają wszystkie pozostałe cyfry: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- Ostatnia cyfra to odpowiednia cyfra różna od 0 – wtedy na początku nie może stać ani zero, ani ona: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Dodajemy oba przypadki: $20 + 32 = 52$

Słowa z liter słowa – permutacje z powtórzeniami.

Input: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Wynik

151200

Kroki

- Słowo ma 10 liter; liczymy, ile razy występuje każda z nich: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Słowa to permutacje z powtórzeniami – zamiana równych liter daje to samo słowo: $P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$

Paradoks dnia urodzin przez zdarzenie przeciwne.

Input: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Wynik

$P(A) \approx 0{,}5073$

Kroki

- Zdarzenie przeciwne A' jest łatwiejsze: wszystkie 23 osób ma urodziny w różne dni (365 dni, każdy jednakowo prawdopodobny).
- Prawdopodobieństwo, że wszystkie urodziny są różne $P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- Szukane prawdopodobieństwo to dopełnienie do jedynki: $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Zgubione numerki z szatni – nieporządki.

Input: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Wynik

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Kroki

- Sposoby, w których nikt nie dostaje swojego, to nieporządki (permutacje bez punktów stałych) – ich liczba z zasady włączeń i wyłączeń
  $D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$
- Wszystkich sposobów jest n!, prawdopodobieństwo to iloraz: $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Przy większej liczbie osób prawdopodobieństwo prawie się nie zmienia: $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

Wyraz bez x w rozwinięciu dwumianu.

Input: `term without x in (x + 1/x)^10`

Wynik

$$T_6 = 252$$

Kroki

- Ogólny $(k+1)$-szy wyraz rozwinięcia dwumianu:
  $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- Wyraz bez x ma wykładnik x równy zeru:
  $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- Szukany wyraz, numer 6: $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Podzielność i liczby pierwsze

Samą liczbę całkowitą aplikacja rozkłada na czynniki pierwsze – dzieli kolejno przez najmniejsze liczby pierwsze i zapisuje 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; dla liczby pierwszej pokazuje, że nie dzieli jej żadna liczba pierwsza do jej pierwiastka. Test możesz też zapisać jako isprime(97).

Największy wspólny dzielnik gcd(60, 90) i najmniejsza wspólna wielokrotność lcm(18, 30) wynikają z rozkładów na czynniki pierwsze albo z chipem „Algorytm Euklidesa” z dzielenia z resztą. Rozszerzony algorytm Euklidesa z tabelą daje tożsamość Bézouta bezout(240, 46): gcd(240, 46) = 240·u + 46·v.

Dzielniki liczby divisors(36) idą w parach 1·36, 2·18, … aż do pierwiastka, ich liczba jest sprawdzana rozkładem. Cechy podzielności divisibility(1236) tworzą tabelę dla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 25 (ostatnia cyfra, suma cyfr, suma naprzemienna…); jeden dzielnik zapisuje się divisibility(1236, 7), zdaniem „is 1236 divisible by 7” (na razie po angielsku) lub 7 | 1236 – dla dzielnika bez szkolnej cechy dzieli się z resztą. Liczby pierwsze do 200 daje sito Eratostenesa („primes up to 50”). Równanie liniowe ax + by = c w liczbach całkowitych („3x + 5y = 1, x, y ∈ $\mathbb{Z}$” albo chip $\mathbb{Z}$) rozwiązuje się tożsamością Bézouta – wszystkie rozwiązania $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Arytmetyka modularna: reszta 17 mod 5, odwrotność 3^(-1) mod 11 (z rozszerzonego algorytmu Euklidesa, ze sprawdzeniem) i potęga 7^13 mod 13 przez wielokrotne podnoszenie do kwadratu. Na nich opiera się RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) oblicza n, φ(n), klucz prywatny d, potem szyfruje wiadomość i z powrotem ją odszyfrowuje; e i m można pominąć.

Jak to wpisać

`360, factor(360), isprime(97)`	Rozkład na czynniki pierwsze, test pierwszości.
`gcd(60, 90), lcm(18, 30)`	Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność.
`divisors(36), divisibility(1236), divisibility(1236, 7)`	Dzielniki liczby i cechy podzielności – wszystkie lub jeden dzielnik (także zdanie „is 1236 divisible by 7”, 7 | 1236).
`primes up to 50`	Liczby pierwsze do n (najwyżej 200) sitem Eratostenesa; także primes(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Równanie liniowe w liczbach całkowitych (diofantyczne); także diophantine(3, 5, 1).

`bezout(240, 46)`	Tożsamość Bézouta.
`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Reszta, odwrotność i potęga modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA z małymi liczbami.

Przykłady

Rozkład na czynniki pierwsze przez kolejne dzielenie.

Input: `360`

Wynik

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Kroki

- Dzielimy 360 kolejno przez najmniejsze liczby pierwsze, aż zostanie 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Rozkład na czynniki pierwsze: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Liczba pierwsza – żaden dzielnik do pierwiastka.

Input: `97`

Wynik

Liczba jest pierwsza.

Kroki

- Wystarczy sprawdzić liczby pierwsze do $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – żadna z nich nie dzieli 97, więc jest to liczba pierwsza.

NWD z rozkładów na czynniki pierwsze.

Input: `gcd(60, 90)`

Wynik

$$\mathrm{NWD}\,(60, 90) = 30$$

Kroki

- Rozkład na czynniki pierwsze: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Rozkład na czynniki pierwsze: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Największy wspólny dzielnik to iloczyn wspólnych czynników pierwszych z najmniejszymi wykładnikami: $\mathrm{NWD}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

NWW przez NWD algorytmem Euklidesa.

Input: `lcm(60, 90)` Algorytm Euklidesa

Wynik

$$\mathrm{NWW}\,(60, 90) = 180$$

Kroki

- Algorytm Euklidesa – dzielimy większą liczbę przez mniejszą z resztą, potem dzielnik przez resztę, aż reszta wyniesie 0; ostatnia niezerowa reszta to największy wspólny dzielnik

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{NWD}\,(60, 90) = 30$$

- Najmniejsza wspólna wielokrotność to iloczyn liczb podzielony przez ich największy wspólny dzielnik

$$\mathrm{NWW}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{NWD}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Dzielniki w parach, ich liczba z rozkładu.

Input: `dělitelé(36)`

Wynik

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Kroki

- Dzielników szukamy parami d · 36/d – wystarczy sprawdzić d do 6, drugi dzielnik pary wynika z pierwszego

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Sprawdzenie liczby dzielników z rozkładu na czynniki pierwsze – wykładniki powiększone o 1 mnożymy: $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

Tabela cech podzielności.

Input: `dělitelnost(1236)`

Wynik

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Kroki

- Cechy podzielności: 2, 5, 10 – ostatnia cyfra; 4, 25 – dwie ostatnie cyfry; 8 – trzy ostatnie cyfry; 3, 9 – suma cyfr; 6 = 2 · 3 i 12 = 3 · 4 – oba naraz; 7 – odcinamy ostatnią cyfrę i od reszty odejmujemy jej podwojenie; 11 – naprzemienna suma cyfr

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Podzielność przez siedem – odcinanie ostatniej cyfry.

Input: `dělitelnost(1309, 7)`

Wynik

$$7 \mid 1309$$

Kroki

- Podzielność przez 7: odcinamy ostatnią cyfrę, od reszty odejmujemy jej podwojenie i powtarzamy, aż zostaną najwyżej dwie cyfry – ta liczba jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy pierwotna (dla dużych liczb dzielenie bywa szybsze):
  $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Sito Eratostenesa.

Input: `prvočísla do 50`

Wynik

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Kroki

- 2 jest liczbą pierwszą – skreślamy wszystkie jej wielokrotności; mniejsze są już skreślone, więc zaczynamy od $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 jest liczbą pierwszą – skreślamy wszystkie jej wielokrotności; mniejsze są już skreślone, więc zaczynamy od $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 jest liczbą pierwszą – skreślamy wszystkie jej wielokrotności; mniejsze są już skreślone, więc zaczynamy od $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 jest liczbą pierwszą – skreślamy wszystkie jej wielokrotności; mniejsze są już skreślone, więc zaczynamy od $7^2 = 49$: 49
- Sito Eratostenesa: wystarczy skreślić wielokrotności liczb pierwszych do pierwiastka z 50. Pozostałe liczby to liczby pierwsze – jest ich 15

1	[2]	[3]	4	[5]	6	[7]	8	9	10
[11]	12	[13]	14	15	16	[17]	18	[19]	20
21	22	[23]	24	25	26	27	28	[29]	30
[31]	32	33	34	35	36	[37]	38	39	40
[41]	42	[43]	44	45	46	[47]	48	49	50

Tożsamość Bézouta rozszerzonym algorytmem Euklidesa.

Input: `bezout(240, 46)`

Wynik

$$\mathrm{NWD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 4($$

Kroki

- Rozszerzony algorytm Euklidesa – każdą resztę r zapisujemy jako r = 240·u + 46·v; nowy wiersz to przedostatni wiersz minus q razy ostatni

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	-5
6	1	-4	21
4	1	5	-26
2	2	-9	47
0			

- Ostatni niezerowy wiersz tabeli daje tożsamość Bézouta: $\mathrm{NWD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Równanie diofantyczne tożsamością Bézouta.

Input: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Wynik

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

- Rozwiązujemy $3x + 5y = 1$ w liczbach całkowitych. Ma rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy największy wspólny dzielnik 3 i 5 dzieli prawą stronę.
- Rozszerzony algorytm Euklidesa – każdą resztę r zapisujemy jako r = 5·u + 3·v; nowy wiersz to przedostatni wiersz minus q razy ostatni

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	-1
1	2	-1	2
0			

- Ostatni niezerowy wiersz tabeli daje tożsamość Bézouta: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- Tożsamość Bézouta pomnożona przez 1 daje jedno rozwiązanie: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, więc $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Wszystkie rozwiązania: do x dodajemy wielokrotności 5, a jednocześnie do y wielokrotności -3 (lewa strona się nie zmienia); przesunięte do najmniejszego nieujemnego $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Sprawdzenie: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Potęga modulo n przez wielokrotne podnoszenie do kwadratu.

Input: `7^13 mod 13`

Wynik

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Kroki

- Zapisujemy wykładnik jako sumę potęg 2:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Wielokrotnie podnosimy do kwadratu, biorąc reszty modulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Mnożymy potrzebne potęgi, na bieżąco biorąc reszty modulo 13
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – klucze, szyfrowanie i odszyfrowanie.

Input: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Wynik

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Kroki

- Moduł: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- Funkcja Eulera: $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Algorytm Euklidesa – dzielimy większą liczbę przez mniejszą z resztą, potem dzielnik przez resztę, aż reszta wyniesie 0; ostatnia niezerowa reszta to największy wspólny dzielnik

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{NWD}\,(120, 7) = 1$$

- Wykładnik publiczny e musi być względnie pierwszy z φ(n): $\mathrm{NWD}\,(7, 120) = 1$ – jest.
- Rozszerzony algorytm Euklidesa – każdą resztę r zapisujemy jako r = 120·u + 7·v; nowy wiersz to przedostatni wiersz minus q razy ostatni

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- Wykładnik prywatny d to odwrotność e modulo φ(n): $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Klucz publiczny $(n, e) = (143, 7)$, klucz prywatny $(n, d) = (143, 103)$
- Szyfrujemy wiadomość m: $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Zapisujemy wykładnik jako sumę potęg 2: $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Wielokrotnie podnosimy do kwadratu, biorąc reszty modulo 143

$9^1 \equiv 9$

$9^2 \equiv 9^2 = 81$

$9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$

- Mnożymy potrzebne potęgi, na bieżąco biorąc reszty modulo 143

$9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$

$\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$

$126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$

$53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$

- Odszyfrowujemy – wraca pierwotna wiadomość: $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Zapisujemy wykładnik jako sumę potęg 2: $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Wielokrotnie podnosimy do kwadratu, biorąc reszty modulo 143

$48^1 \equiv 48$

$48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$

$48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$

$48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$

$48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$

$48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$

$48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$

- Mnożymy potrzebne potęgi, na bieżąco biorąc reszty modulo 143

$48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$

$\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$

$113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$

$92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$

$100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$

$27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Znane ograniczenia

- Rozkład na czynniki pierwsze działa dla liczb do 10^{18}; większa liczba pierwsza jest tylko potwierdzana testem.
- RSA to szkolny przykład z małymi liczbami (n = p·q do około biliona), a nie prawdziwe szyfrowanie.

15. Kąty w stopniach, minutach i sekundach

Sam kąt jest przeliczany na wszystkie postacie: stopnie, minuty i sekundy (5,5° = 5°30′), stopnie dziesiętne, minuty, sekundy i radiany – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Tylko jedną postać daje „= ?′”, „= ? °”, „= ?″” lub „= ? rad”. Radiany na stopnie: „π/6 rad”.

Kąty dodaje się i odejmuje jak w szkole – osobno stopnie, minuty i sekundy; 60′ przenosi się jako 1°, a gdy minut brakuje, jeden stopień rozmienia się na 60′. Mnoży się je i dzieli przez liczbę: 100° : 3 dzieli się stopniowo, resztę stopni zamienia na minuty, a resztę minut na sekundy.

Minuty i sekundy zapisuje się z ′ i ″ (na klawiaturze aplikacji) albo z apostrofem i cudzysłowem: 25°30'15". Stopnie z funkcją (sin 30°) należą do rozdziału Równania trygonometryczne.

Jak to wpisać

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Kąt – stopnie, minuty, sekundy, także stopnie dziesiętne.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Suma, różnica, wielokrotność i iloraz przez liczbę.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Jedna postać przeliczenia, radiany na stopnie.

Przykłady

Stopnie dziesiętne we wszystkich postaciach.

Input: `5,5°`

Wynik

$$5^\circ 30' = 330' = 19800'' = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$$

Kroki

- Część dziesiętna stopnia przechodzi na minuty (1° = 60'), część dziesiętna minuty na sekundy (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- Na minuty: stopnie razy 60 (1° = 60') plus minuty: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- Na sekundy: minuty razy 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- Na radiany: 180° = π rad, więc stopnie razy π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$

Suma – 60' przeniesione jako 1°.

Input: `25°30’ + 18°45’`

Wynik

$$44^\circ 15'$$

Kroki

- Dodajemy osobno stopnie, minuty i sekundy: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Każde 60" daje 1', a każde 60' daje 1° – przenosimy: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Różnica – jeden stopień rozmieniony na 60′.

Input: `25°15′ - 18°45′`

Wynik

$$6^\circ 30'$$

Kroki

- Minut (sekund) jest mniej, niż odejmujemy – jeden stopień (minutę) rozmieniamy na 60' (60"):
  $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Odejmujemy osobno stopnie, minuty i sekundy:
  $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Dzielenie przez liczbę, reszta w minutach.

Input: `100° : 3`

Wynik

$$33^\circ 20'$$

Kroki

- Dzielimy stopniowo: stopnie, resztę zamienioną na minuty dodajemy; minuty, resztę na sekundy; sekundy

$$100^\circ : 3 = 33^\circ,\ 1^\circ = 60'$$
$$60' : 3 = 20'$$
$$\Rightarrow\ 100^\circ : 3 = 33^\circ 20'$$

Radiany na stopnie.

Input: `π/6 rad`

Wynik

$$30^\circ$$
$$= 1800'$$
$$= 108000''$$

Kroki

- Z radianów na stopnie: π rad = 180°, więc razy 180°/π:
  $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- Na minuty: stopnie razy 60 (1° = 60') plus minuty:
  $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- Na sekundy: minuty razy 60 (1' = 60"):
  $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Znane ograniczenia

- Równania z kątami w minutach (x + 25°30′ = 90°) jeszcze nie.

16. Procenty, stosunki i reguła trzech

Procenty wpisuje się krótko, bez treści zadania: część „20 % of 480”, podstawę „15 % = 45”, stopę „96 of 480 = ? %”, podwyżkę i obniżkę „480 + 15 %”, „480 − 20 %” oraz wartość pierwotną przed zmianą „x − 20 % = 384”. Aplikacja liczy przez 1 %, jak uczy się dziś w szkole (1 % = 480 : 100 = 4,8); chip „Wzór” przełącza na część = podstawa · stopa ze stopą jako ułamkiem dziesiętnym (480 · 0,2).

Stosunek „12 : 18” jest skracany do 2 : 3, całość dzielona w stosunku („300 in the ratio 2 : 3 : 5” – części zsumowane, jedna część, udziały), a proporcja „3 : 4 = x : 20” rozwiązywana przez iloczyny wyrazów skrajnych i środkowych. Stosunek ułamków („2/3 : 4/9”) najpierw mnoży się przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników; wewnątrz dłuższego wyrażenia dwukropek dzieli.

Regułę trzech zapisuje się jak w szkole – dwa wiersze z trzema kropkami (lub ..., →): „10 kg … 250 Kč, 12 kg … x”, jednostki można pominąć. Domyślnie proporcjonalność prosta, chip „Odwrotna” (lub słowo „inverse” po przecinku) dla odwrotnej. Procent prosty: interest(kapitał, stopa %, lata, podatek %) – podatek jest opcjonalny. Procent składany: compound interest(kapitał, stopa %, lata, podatek %, częstotliwość) – podatek i częstotliwość (annually, semiannually, quarterly, monthly, continuously) są opcjonalne; więcej zadań (oszczędności, kredyty, odsetki za dni) jest w Zastosowaniach, rozdział Ekonomia.

Jak to wpisać

`20 % of 480, 15 % = 45, 96 of 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Procenty – część, podstawa, stopa, zmiana, wartość pierwotna.
`12 : 18, 300 in the ratio 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Stosunek skrócony, podział w stosunku, proporcja.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	Reguła trzech – proporcjonalność prosta i odwrotna.
`interest(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Procent prosty z podatkiem.
`compound interest(10000, 3 %, 5, 15 %, monthly)`	Procent składany z podatkiem i częstotliwością kapitalizacji.

Przykłady

Część przez 1 %.

Input: `20 % z 480`

Wynik

$$96$$

Kroki

- Najpierw 1 % – podstawę (całość, 100 %) dzielimy przez 100: $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Szukane procenty to tyle razy 1 %: $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Obniżka ze wzoru.

Input: `480 - 20 %` Wzór część = podstawa · stopa

Wynik

$$384$$

Kroki

- Wartość obniżona = podstawa · (1 − stopa), $20\,\% = 0{,}2$: $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Pierwotna cena przed rabatem.

Input: `x - 20 % = 384`

Wynik

$$x = 480$$

Kroki

- Wartość pierwotna to 100 %; po obniżce zostaje mniej procent – znana wartość: $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % to znana wartość podzielona przez jej liczbę procent: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- Podstawa to 100 %, sto razy 1 %: $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Podział w stosunku.

Input: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Wynik

$$60,\ 90,\ 150$$

Kroki

- Całość dzielimy na tyle części, ile wynosi suma wyrazów: $2 + 3 + 5 = 10$
- Jedna część to: $300 : 10 = 30$
- Każdy udział ma tyle części, ile mówi jego wyraz: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; sprawdzenie $60 + 90 + 150 = 300$

Stosunek ułamków.

Input: `2/3 : 4/9`

Wynik

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Kroki

- Usuwamy ułamki – każdy wyraz stosunku razy najmniejsza wspólna wielokrotność mianowników, 9 $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$
- Stosunek skrócony – wszystkie wyrazy podzielone przez ich największy wspólny dzielnik 2: $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Proporcjonalność odwrotna.

Input: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Odwrotna

Wynik

$$x = 8\,\text{dní}$$

Kroki

- Reguła trzech. Proporcjonalność odwrotna – ile razy więcej jednego, tyle razy mniej drugiego, strzałki przeciwnie

$$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

- Według strzałek proporcja – drugi stosunek odwrócony: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Procent prosty z 15 % podatkiem.

Input: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Wynik

$$10000 + 510 = 10510$$

Kroki

- Odsetki = kapitał · p/100 · czas w latach:
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Od odsetek płaci się podatek $15\,\%$, zostają odsetki netto:
  $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Na końcu kapitał z odsetkami: $10000 + 510 = 10510$

Procent składany z 15 % podatkiem, kapitalizacja miesięczna.

Input: `compound interest(10000, 3 %, 5, 15 %, monthly)`

Wynik

$$K_n \approx 11\,358{,}31$$

Kroki

- Dane: $K_0 = 10\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Przeliczamy jednostki:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Przy oprocentowaniu prostym odsetki nalicza się zawsze od pierwotnej wpłaty: K_n = K₀(1 + pn). Przy składanym są dopisywane i też się oprocentowują: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), gdzie m to liczba kapitalizacji w roku (rocznie, półrocznie, kwartalnie, miesięcznie). Kapitalizacja ciągła to granica m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Podatek od odsetek d obniża stopę do p(1 − d). Efektywna stopa roczna porównuje częstotliwości. Dyskontowanie to rachunek odwrotny – ile wpłacić dziś. Przy inflacji π wartość realna to K_n/(1 + π)^n. Oprocentowanie mieszane (tak banki dopisują odsetki raz w roku) kapitalizuje pełne lata i dodaje odsetki proste za resztę ostatniego: K_n = K₀(1 + p·f)^k·(1 + p·f), n = k + f. Równanie modelu:
  $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Kapitalizacje w roku: $m = 12$
- Stopa po podatku od odsetek:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Efektywna stopa roczna:
  $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Podstawiamy:
  $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11\,358{,}31$
- Odsetki łącznie: $K_n - K_0 \approx 1\,358{,}31$

Znane ograniczenia

- Na razie bez zadań z treścią – zadanie trzeba zapisać krótko; procent składany z regularnymi wpłatami i więcej zadań finansowych jest w formularzach w Zastosowaniach.

17. Przeliczanie jednostek

Przeliczenie zapisuje się jako „5 m² = ? cm²” (lub „5 m2 to cm2”). Aplikacja zapisuje zależność przeliczeniową i mnoży przez nią (na mniejszą jednostkę) albo dzieli (na większą); dla jednostek dziesiętnych dodaje, o ile miejsc przesuwa się przecinek. Dla pól i objętości wyjaśnia, dlaczego liczba jest potęgą: 1 m = 100 cm, więc 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Długość od mm do km, pole od mm² do km² oraz ar i hektar, objętość od mm³ do m³ oraz ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), masa od mg do t, czas s, min, h, d – także złożony „1 h 30 min” i wynik w godzinach i minutach –, prędkość km/h i m/s (1 m/s = 3,6 km/h) oraz temperatura °C, K, °F według ich wzorów.

Jak to wpisać

`5 m² = ? cm²`, `3.5 l to m³`, `1 h 30 min = ? min`	Wartość z jednostką, „= ?” (lub „to”) i jednostka docelowa.

Przykłady

Pole – liczba jest kwadratem.

Input: `5 m² = ? cm²`

Wynik

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Kroki

- Dla pól i objętości przeliczamy oba (wszystkie trzy) wymiary – liczbę dla długości podnosimy do potęgi $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Na mniejszą jednostkę – jest ich więcej, więc mnożymy: $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Mnożenie przez jedynkę z zerami (tu 4) przesuwa przecinek w prawo o tyle miejsc, ile jest zer; brakujące miejsca uzupełniamy zerami.

Litry na metry sześcienne.

Input: `3,5 l = ? m³`

Wynik

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Kroki

- Zależność przeliczeniowa: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- Na większą jednostkę – jest ich mniej, więc dzielimy: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Dzielenie przez jedynkę z zerami (tu 3) przesuwa przecinek w lewo o tyle miejsc, ile jest zer; brakujące miejsca uzupełniamy zerami.

Minuty na godziny, także w godzinach i minutach.

Input: `150 min = ? h`

Wynik

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Kroki

- Zależność przeliczeniowa: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- Na większą jednostkę – jest ich mniej, więc dzielimy: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- W godzinach i minutach: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Prędkość – podzielona przez 3,6.

Input: `72 km/h = ? m/s`

Wynik

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Zależność przeliczeniowa: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- Na większą jednostkę – jest ich mniej, więc dzielimy: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Temperatura według jej wzoru.

Input: `20 °C = ? K`

Wynik

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Kroki

- Temperatur nie przelicza się przez wielokrotność, lecz wzorem (skale mają różne zera):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logika i zbiory

Zdanie ze spójnikami ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ jest oceniane tabelą prawdy – kolumna dla każdego spójnika, jedynki dla prawdy – a aplikacja mówi, czy jest tautologią, sprzecznością, czy tylko jest spełnialne; dla spełnialnego dodaje dysjunkcyjną i koniunkcyjną postać normalną i postać uproszczoną.

Z chipem „Negacja” aplikacja neguje zdanie krok po kroku prawami De Morgana oraz negacjami implikacji i równoważności. Zdanie z kwantyfikatorami (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) neguje bezpośrednio – kwantyfikator ogólny staje się szczegółowym, nierówność przeciwną. Dla implikacji oferuje też kontrapozycję i implikację odwrotną.

Zbiory dane elementami ({1, 2, 3}) lub jako przedziały ((1; 5), ⟨3; 7)) oraz ich suma, iloczyn, różnica, dopełnienie w przestrzeni U i różnica symetryczna są obliczane działanie po działaniu. Zbiory wypisane dostają diagram Venna z elementami w jego obszarach, przedziały wynik na osi liczbowej.

Bez elementów (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) aplikacja sprawdza równość wyrażeń zbiorowych tabelą przynależności i diagramami Venna obu stron; samo wyrażenie, (A \ B) ∪ (B \ C), jest zacieniowane na diagramie Venna. Rozstrzyga też, czy zachodzi 3 ∈ A lub A ⊆ B.

Jak to wpisać

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Spójniki z klawiatury aplikacji (zakładka ∧∪) lub ze zdjęcia (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Implikacja i równoważność jako strzałki ze zwykłej klawiatury. &, | i ! nie są odczytywane jako spójniki – to wartość bezwzględna i silnia.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Kwantyfikatory z dziedziną (∈ ℝ) lub warunkiem (> 0), zdanie po dwukropku.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	Zadanie jako słowo – negacja, kontrapozycja i implikacja odwrotna (także negace, obmena, obracena).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Zbiór przez elementy (oddzielone przecinkami, średnikami przy przecinku dziesiętnym), przedział, przestrzeń U; każda definicja w osobnym wierszu lub po przecinku.

`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	Suma, iloczyn, różnica (także \), dopełnienie A', różnica symetryczna; iloczyn ma pierwszeństwo przed pozostałymi.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Element zbioru i podzbiór – prawda lub fałsz.

Przykłady

Tautologia – implikacja jest równoważna swojej kontrapozycji.

Input: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Wynik

Zdanie jest tautologią – prawdziwe przy każdym wartościowaniu.

Kroki

- Tabela prawdy (1 – prawda, 0 – fałsz), kolumna dla każdego spójnika

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- W ostatniej kolumnie są same jedynki – zdanie jest prawdziwe przy każdym wartościowaniu, to tautologia.

Zdanie spełnialne z jego postaciami normalnymi.

Input: `(p ∨ q) ⇒ r`

Wynik

Zdanie jest spełnialne – prawdziwe tylko przy niektórych wartościowaniach. Uproszczona równoważna postać:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Kroki

- Tabela prawdy (1 – prawda, 0 – fałsz), kolumna dla każdego spójnika

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- W ostatniej kolumnie są jedynki i zera – zdanie jest spełnialne, ale nie jest tautologią.
- Postać uproszczona: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; pełna dysjunkcyjna postać normalna – alternatywa wierszy, w których jest prawdziwe
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- Koniunkcyjna postać normalna – z wierszy, w których jest fałszywe
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Negacja prawami De Morgana krok po kroku.

Input: `p ∧ (q ⇒ r)` Negacja

Wynik

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Kroki

- Negacja: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Prawo De Morgana, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$:
  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- Negacja implikacji, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$:
  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Negacja zdania z kwantyfikatorem.

Input: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Wynik

$$\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$$

Kroki

- Negacja: $\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 > 0\right)$
- Negacja „dla wszystkich … zachodzi” daje „istnieje taki, dla którego nie zachodzi”: $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \neg\left(x^2 + 1 > 0\right)$
- Negacja równości lub nierówności to relacja przeciwna ($<$ na $\geq$, $=$ na $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Kontrapozycja.

Input: `p ⇒ ¬q` Kontrapozycja

Wynik

$$q \Rightarrow \neg p$$

Kroki

- Kontrapozycją $A \Rightarrow B$ jest $\neg B \Rightarrow \neg A$ – jest z nią równoważna: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, po uproszczeniu negacji $q \Rightarrow \neg p$

Dopełnienie sumy z diagramem Venna.

Input: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

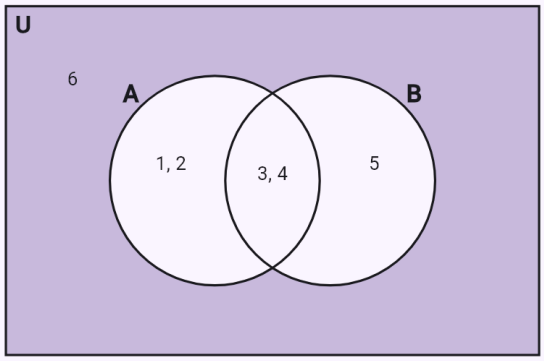
Wynik

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Kroki

- Dane: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Dane: $B = \{3, 4, 5\}$
- Dane: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Suma – elementy należące do co najmniej jednego ze zbiorów: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Dopełnienie – elementy przestrzeni nienależące do zbioru: $(A \cup B)' = \{6\}$

Wykres



Iloczyn przedziałów na osi liczbowej.

Input: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

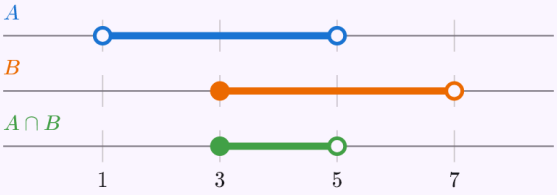
Wynik

$$A \cap B = \langle 3;\ 5)$$

Kroki

- Dane: $A = (1;\ 5)$
- Dane: $B = \langle 3;\ 7)$
- Iloczyn (część wspólna) – elementy należące do obu zbiorów: $A \cap B = \langle 3;\ 5)$

Wykres



Każdy dany zbiór ma na osi własny wiersz, wynik jest na zielono. Pełna kropka należy do zbioru, pusta nie.

Prawo rozdzielności tabelą przynależności.

Input: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Wynik

Równość zachodzi – obie strony to ten sam zbiór.

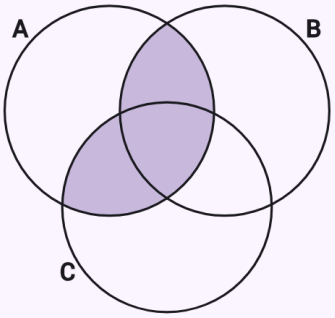
Kroki

- Tabela przynależności – dla każdej możliwości przynależności elementu do zbiorów (1 – należy) porównujemy obie strony

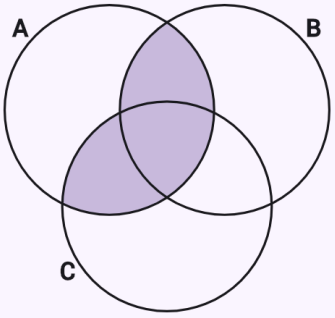
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Wykres

$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



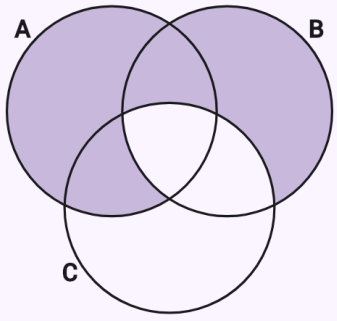
Wyrażenie zbiorowe na diagramie Venna.

Input: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Wynik

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

Wykres



Znane ograniczenia

- Tabela prawdy dla najwyżej 5 zmiennych (32 wiersze), diagram Venna dla najwyżej 4 zbiorów.
- Zbiory dane własnością ($\{x \in \mathbb{R}: x^2 < 4\}$) nie są jeszcze odczytywane – zapisz je jako przedziały.

19. Liczby zespolone

Liczbę zespoloną zapisz z jednostką urojoną i: 1 - i√3 (lub 1 - i*sqrt(3)), w postaci trygonometrycznej 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) lub cis(pi/3), w postaci wykładniczej 3e^(i pi/4); kąty mogą być też w stopniach (cos 60° + i sin 60°). Liczby można nazwać, każdą w osobnym wierszu (z_1 = 1 + i), z wyrażeniem w ich nazwach w ostatnim wierszu (z_1/z_2, z^8).

Dla jednej liczby aplikacja oblicza moduł $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ i argument φ – z wartości cosinusa i sinusa z tablic, w przeciwnym razie przez kąt ostry z $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ i ćwiartkę (dokładnie z arctg i w przybliżeniu w radianach i stopniach) – i zapisuje postacie trygonometryczną i wykładniczą. Liczba w postaci trygonometrycznej jest zamieniana na algebraiczną. Argument leży w $\langle 0; 2\pi)$; chip „Argument główny” przełącza go na $(-\pi; \pi\rangle$. Wykres pokazuje liczbę na płaszczyźnie zespolonej jako wektor z łukiem argumentu.

Potęgę typu (1 + i)^10 oblicza się wzorem de Moivre’a z argumentem zredukowanym o wielokrotności 2π; iloczyn i iloraz przez moduły i argumenty. Chipy wybierają „Postać trygonometryczna” (dla potęgi „Wzór de Moivre’a”) lub „Postać algebraiczna”; dzielenie liczb algebraicznych przez sprzężenie jest w rozdziale Upraszczanie wyrażeń. Pierwiastek root(3, 8i) i równanie dwumienne $z^3 = 8i$ dają wszystkie n pierwiastków ze wzoru $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; na wykresie są wierzchołkami n-kąta foremnego. Równanie z niewiadomą z jest od razu rozwiązywane w liczbach zespolonych; chip „Rozwiąż w:” przełącza je na $\mathbb{R}$. Równanie kwadratowe o współczynnikach zespolonych ($z^2 + i = 2z$) rozwiązuje się uzupełnieniem do kwadratu, $(z - 1)^2 = 1 - i$, a zespolony pierwiastek kwadratowy znajduje się jako a + bi przez porównanie części rzeczywistych i urojonych.

Równanie ze sprzężeniem $\bar{z}$ (klawisz $\bar{z}$ wpisuje conj(z), zdjęcie daje \bar{z}), z |z|, Re z i Im z rozwiązuje się podstawieniem z = x + yi: aplikacja zapisuje obie strony jako a + bi, porównuje części rzeczywiste i urojone i rozwiązuje powstały układ dwóch równań w x i y – z jednego równania wyznacza zmienną i podstawia do drugiego, a jeśli rozkłada się na czynniki (y(2x + 1) = 0), rozwiązanie dzieli się na przypadki. Rozwiązania są pokazane jako punkty płaszczyzny zespolonej. Jeśli części urojone zgadzają się same ($|z - 1| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $|z - i| < |z + 1|$), wynikiem jest zbiór punktów: aplikacja podnosi moduły do kwadratu, uzupełnia do kwadratów i opisuje okrąg (koło, zewnętrze okręgu), prostą, półpłaszczyznę lub symetralną. Kilka warunków, każdy w osobnym wierszu lub oddzielone przecinkami ($|z| \leq 2$, $\operatorname{Re} z > 0$), i nierówność podwójna ($1 < |z - 1| \leq 2$) są rysowane jako ich część wspólna – zacieniowany obszar; ciągły brzeg należy do zbioru, przerywany nie.

Jak to wpisać

`1 - i*sqrt(3)`	Postać algebraiczna z jednostką urojoną i.

`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	Postać trygonometryczna, w skrócie cis φ.
`3e^(i pi/4)`	Postać wykładnicza.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Nazwane liczby, każda w osobnym wierszu, i wyrażenie w nich.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Wszystkie pierwiastki n-tego stopnia, równanie dwumienne.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Sprzężenie, część rzeczywista i urojona.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej, kilka warunków wiersz po wierszu.

Przykłady

Moduł, argument z wartości z tablic, postacie trygonometryczna i wykładnicza.

Input: `1 - i*sqrt(3)`

Wynik

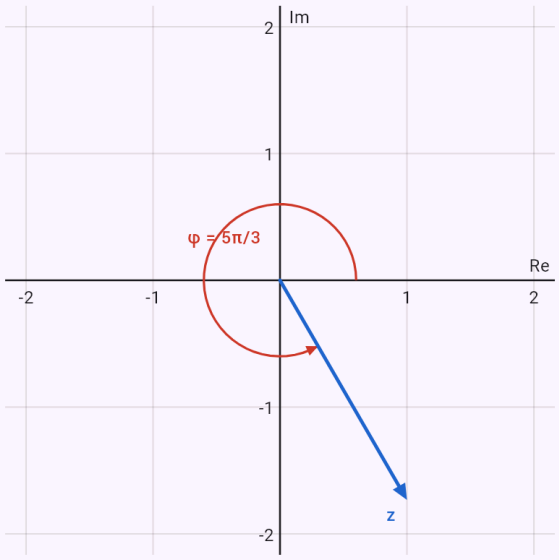
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Kroki

- Moduł |z| = √(a² + b²):
  $$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- Argument φ z cos φ = a/|z| i sin φ = b/|z| – wartości z tabeli
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- Postać trygonometryczna z = |z|(cos φ + i sin φ):
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- Postać wykładnicza $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Argument spoza tablic – kąt ostry i ćwiartka.

Input: `-3 + 4i`

Wynik

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

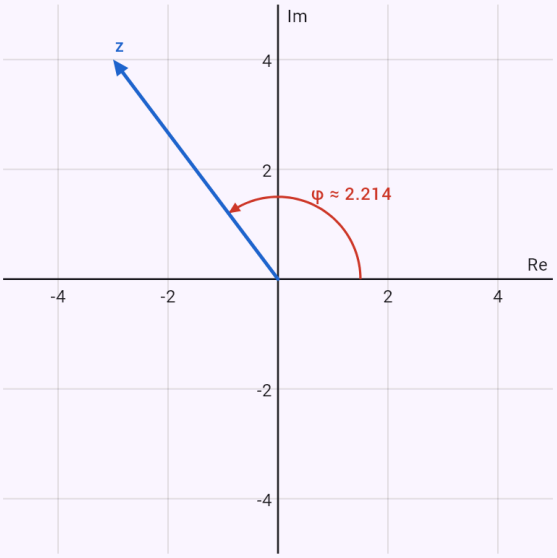
$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Kroki

- Moduł |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- Kąt ostry α z tg α = |b/a|. Liczba leży w ćwiartce 2, więc argument to
  $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$

  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- Postać trygonometryczna z = |z|(cos φ + i sin φ)
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$
- Postać wykładnicza $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Z postaci trygonometrycznej na algebraiczną.

Input: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Wynik

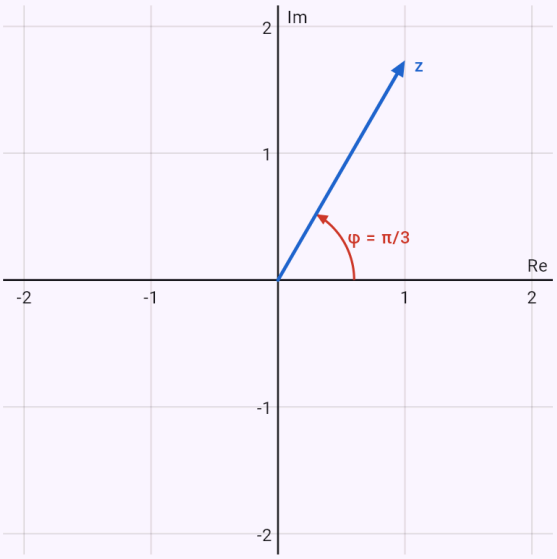
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Kroki

- Liczba jest dana w postaci trygonometrycznej (wykładniczej) – odczytujemy jej moduł i argument
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- Postać algebraiczna – po podstawieniu wartości cosinusa i sinusa i wymnożeniu
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- Postać wykładnicza $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Wzór de Moivre’a.

Input: `(1 + i)^10` Wzór de Moivre’a

Wynik

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

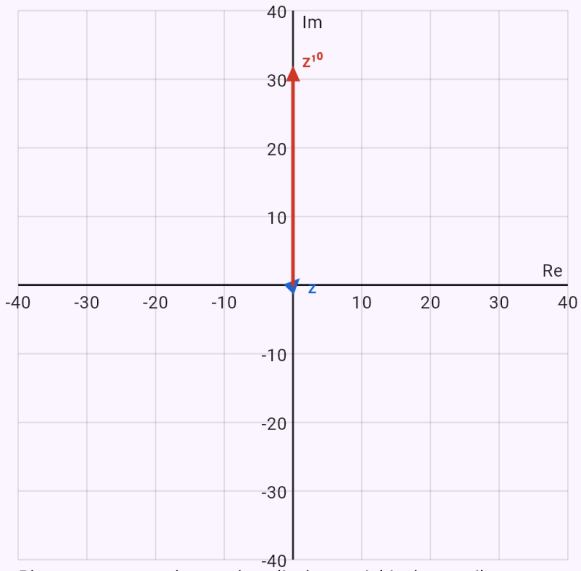
Kroki

- Moduł |z| = √(a² + b²): $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ z cos φ = a/|z| i sin φ = b/|z| – wartości z tabeli

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Wzór de Moivre’a z^n = $|z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- Argument sprowadzony do $\langle 0; 2\pi)$ przez wielokrotność kąta pełnego: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- Postać algebraiczna – po podstawieniu wartości cosinusa i sinusa i wymnożeniu: $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Iloraz w postaci trygonometrycznej.

Input: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Postać trygonometryczna

Wynik

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Kroki

- Moduł |z| = √(a² + b²): $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument φ z cos φ = a/|z| i sin φ = b/|z| – wartości z tabeli

  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- Moduł |z| = √(a² + b²):

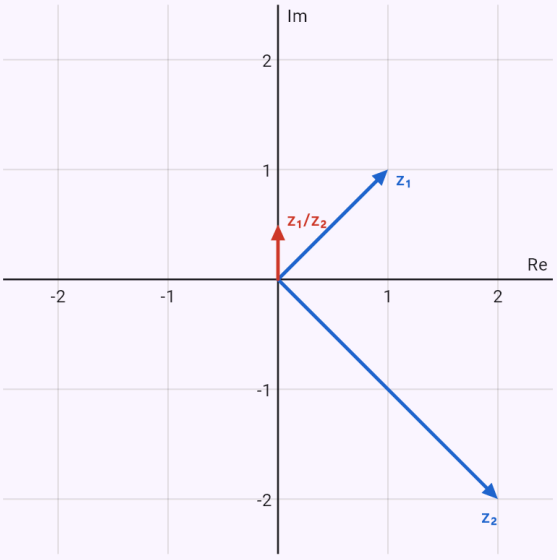
  $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Argument φ z cos φ = a/|z| i sin φ = b/|z| – wartości z tabeli

  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Przy dzieleniu moduły się dzielą, a argumenty odejmują

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- Argument sprowadzony do $\langle 0;2\pi)$ przez wielokrotność kąta pełnego: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- Postać algebraiczna – po podstawieniu wartości cosinusa i sinusa i wymnożeniu

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Równanie dwumienne – trzy pierwiastki w wierzchołkach trójkąta.

Input: `z^3 = 8i`

Wynik

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

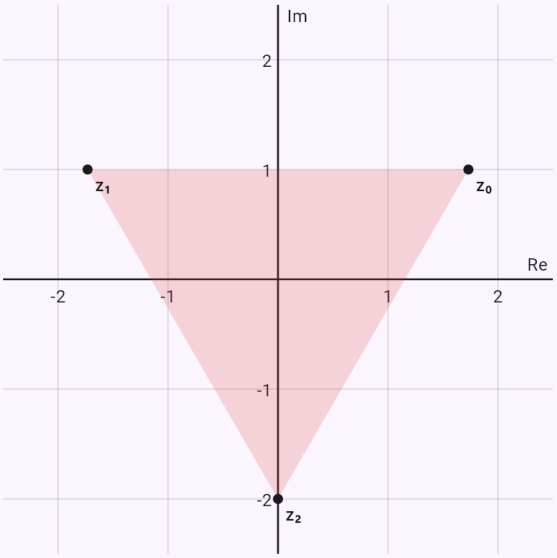
Kroki

- Równanie dwumienne $z^n = a$ – jego pierwiastki to wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z a: $z^3 = 8i$
- Moduł |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Liczba leży na osi – jej argument od razu: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Wszystkie 3 pierwiastki ze wzoru $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Dla k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Dla k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Dla k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- Na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki są wierzchołkami 3-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku 0 i promieniu 2

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Równanie ze sprzężeniem – porównane części rzeczywiste i urojone.

Input: `z + 2conj(z) = 3 - i`

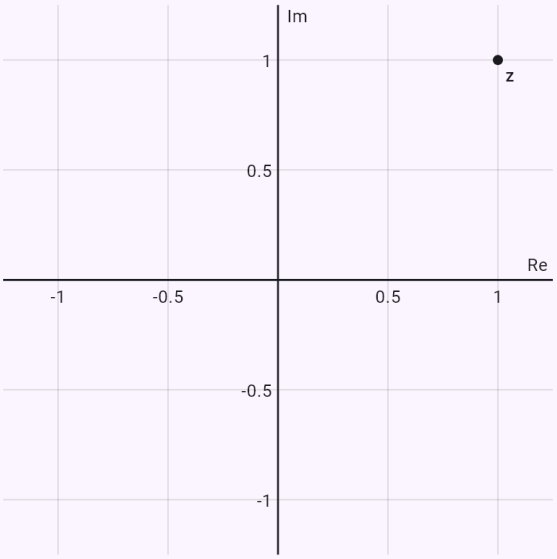
Wynik

$$z = 1 + i$$

Kroki

- Podstawiamy z = x + yi z x i y rzeczywistymi: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obie strony zapisujemy w postaci a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Dwie liczby zespolone są równe, gdy równe są ich części rzeczywiste i ich części urojone: $3x = 3$ i $-y = -1$
- Podstawiamy $y = 1$ do drugiego równania: $3x = 3$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $3x - 3 = 0$
- Wyrazy z niewiadomą zostawiamy po lewej, resztę przenosimy na prawo: $3x = 3$
- Dzielimy przez współczynnik 3: $x = 1$

Wykres



Płaszczyzna zespolona (Gaussa) – rozwiązania jako punkty: część rzeczywista na osi poziomej, część urojona na pionowej.

Równanie z² = z̄ – rozkład na czynniki i przypadki, cztery punkty.

Input: `z^2 = conj(z)`

Wynik

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

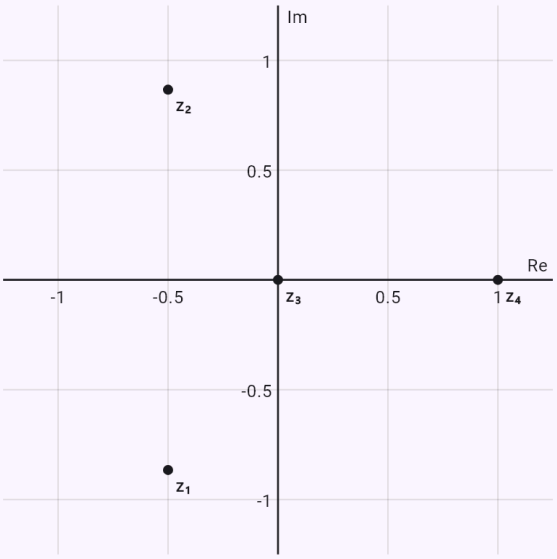
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Newton (styczne) Σ Bisekcja Σ Sieczne Σ Regula falsi Σ Punkt stały

Kroki

- Podstawiamy z = x + yi z x i y rzeczywistymi: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Obie strony zapisujemy w postaci a + bi: $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Dwie liczby zespolone są równe, gdy równe są ich części rzeczywiste i ich części urojone: $x^2 - y^2 = x$ i $2xy = -y$
- Rozkładamy równanie na czynniki – iloczyn jest równy zeru, gdy jeden z czynników jest równy zeru
  $2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$
- Podstawiamy $x = -\frac{1}{2}$ do drugiego równania: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Podstawiamy $y = 0$ do drugiego równania: $x^2 = x$
- Przenosimy wszystko na jedną stronę: $x^2 - x = 0$
- Obliczamy wyróżnik: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Podstawiamy do wzoru na pierwiastki równania kwadratowego: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona (Gaussa) – rozwiązania jako punkty: część rzeczywista na osi poziomej, część urojona na pionowej.

Część wspólna koła i półpłaszczyzny – zacieniowany obszar, przerywany brzeg nie należy.

Input: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

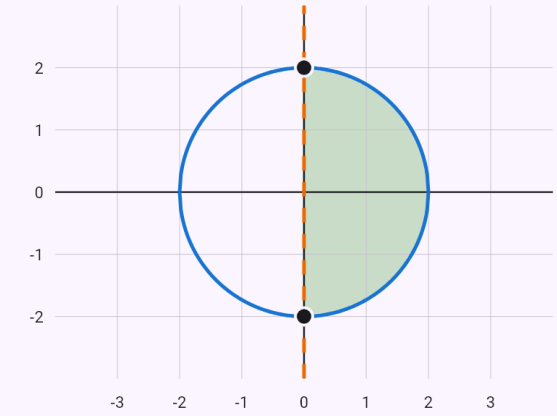
Wynik

$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Kroki

- Podstawiamy z = x + yi z x i y rzeczywistymi: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{Re} z = x$
- Warunek 1 dla x i y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Obie strony są nieujemne, więc podnosimy je do kwadratu: $x^2 + y^2 \leq 4$
- To koło o środku 0 i promieniu 2 razem z okręgiem brzegowym.
- Warunek 2 dla x i y: $x > 0$
- To półpłaszczyzna na prawo od prostej $x = 0$, bez prostej brzegowej.
- Nierówność 1: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Brzegiem jest krzywa $x^2 + y^2 = 4$ – rysowana linią ciągłą, jej punkty należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny zawierająca ten punkt.
- Nierówność 2: $x > 0$
- Brzegiem jest krzywa $x = 0$ – rysowana linią przerywaną, jej punkty nie należą do rozwiązania.
- Podstawiamy punkt $[1;\ 0]$: $1 > 0$ zachodzi – rozwiązaniem jest część płaszczyzny zawierająca ten punkt.
- Rozwiązanie układu to część wspólna tych obszarów – zacieniowana na wykresie.
- Wierzchołki obszaru (tam, gdzie spotykają się brzegi): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Wykres



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
$\operatorname{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Płaszczyzna zespolona (Gaussa) – x = Re z na osi poziomej, y = Im z na pionowej. Zbiorem punktów jest zacieniowany obszar. Brzeg ciągły do niego należy, przerywany nie.

Punkty równo odległe od i i od −1 – symetralna.

Input: `|z - i| = |z + 1|`

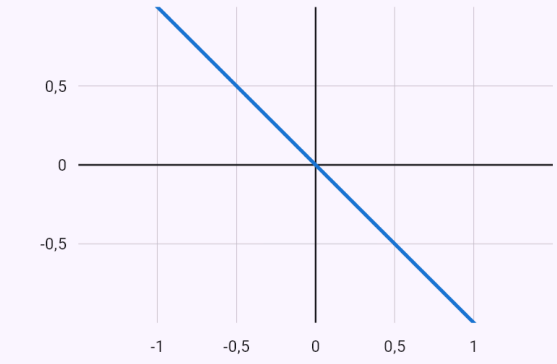
Wynik

$$y = -x$$

Kroki

- Podstawiamy z = x + yi z x i y rzeczywistymi: $z = x + yi$
- Warunek dla x i y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Obie strony są nieujemne, więc podnosimy je do kwadratu: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- To punkty jednakowo odległe od i i -1 – symetralna odcinka między i i -1: $y = -x$

Wykres



$|z - i| = |z + 1|$

Płaszczyzna zespolona (Gaussa) – x = Re z na osi poziomej, y = Im z na pionowej. Zbiorem punktów jest narysowana linia.

Znane ograniczenia

- Pierwiastki, których argument nie jest wartością z tablic, są podawane w postaci trygonometrycznej i w przybliżeniu w algebraicznej.
- Zbiór punktów jest opisywany, gdy jest okręgiem (kołem), prostą (półpłaszczyzną) lub symetralną; inne stożkowe ($\operatorname{Im} z^2 = 2$) są tylko rysowane, a suma modułów ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, elipsa) nie jest jeszcze obsługiwana.
- Układ w x i y, którego nie da się rozwiązać przez wyznaczenie jednej niewiadomej, jest rozwiązywany bez kroków.

Wygenerowano z aplikacji Mathtrace