Mathtrace – podręcznik

VI. Zastosowania: fizyka i technika

Spis treści

VI. Zastosowania: fizyka i technika

42. Zastosowania równań różniczkowych

43. Fizyka

44. Statyka i wytrzymałość materiałów

45. Astronomia i astrofizyka

46. Zastosowania analizy zespolonej

42. Zastosowania równań różniczkowych

Zastosowania są w sekcji „Zastosowania” na ekranie głównym – kafelki dziedzin, które wybierzesz w ustawieniach (koło zębate, „Moje dziedziny”), i pojedyncze zastosowania przypięte pinezką na liście lub w formularzu; „Wszystkie zastosowania” pokazuje je wszystkie według dziedzin (zastosowanie może należeć do kilku dziedzin, np. obwód RC do fizyki i elektrotechniki). Równania różniczkowe używają formularza z 23 modelami: datowanie radiowęglowe, rozpad i czas połowicznego rozpadu, wzrost wykładniczy, łańcuch rozpadów, stygnięcie Newtona (także czas zgonu z dwóch pomiarów), kinetyka chemiczna rzędu 0–2, lek we krwi (jedna dawka, dawki powtarzane, wlew), alkohol we krwi, oszczędności i kredyty, obwody RC, RL i RLC, ciało na sprężynie, spadek z oporem powietrza, wypływ ze zbiornika, mieszanie w zbiorniku, wzrost logistyczny i Gompertza, eksploatowana populacja, epidemia SIR, drapieżnik i ofiara, dwa konkurujące gatunki i chemostat.

Wybierasz model, jego wariant i to, czego szukasz; stałe (czas połowicznego rozpadu ^{14}C, przyspieszenie grawitacyjne, …) są wstępnie wypełnione i można je zmienić. Każda wielkość i wynik mają jednostkę do wyboru – aplikacja przelicza wartości (przeliczenie jest krokiem). „?” przy modelu wyjaśnia, skąd bierze się jego równanie.

Kroki zaczynają się od ułożenia modelu (dlaczego to równanie), przechodzą do rozwiązania równania (rozdzielenie zmiennych, czynnik całkujący, równanie charakterystyczne), podstawiają warunki, wyznaczają szukaną wielkość i kończą podstawieniem liczb. Układy (SIR, drapieżnik i ofiara, konkurencja, chemostat) są rozwiązywane numerycznie metodą Rungego–Kutty, ich punkty równowagi i stabilność dokładnie. Wykres pokazuje wielkości w czasie z zaznaczoną odpowiedzią, dla układów także płaszczyznę fazową.

Przykłady

Wiek znaleziska z pozostałymi 35 % ¹⁴C.

Input: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Wynik

$$t \approx 8700\,\mathrm{r.}$$

Kroki

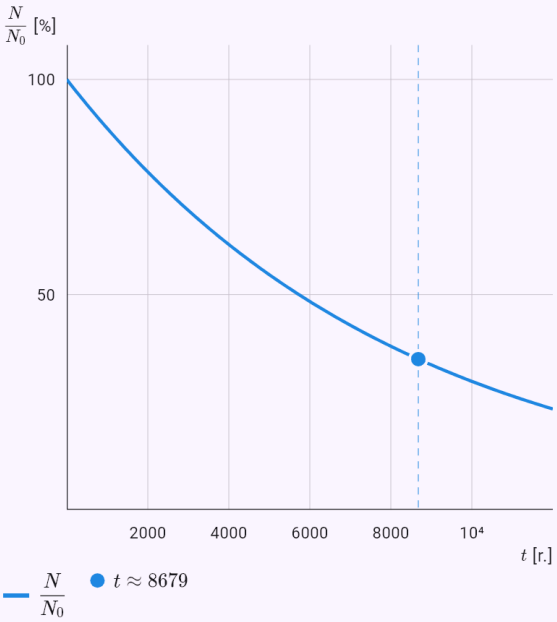
- Szukane t; dane: $T_{1/2} = 5730\,\mathrm{r.}$, $\dfrac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $\dfrac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Żywe organizmy pobierają węgiel z powietrza, więc zawierają ten sam udział promieniotwórczego izotopu ¹⁴C co atmosfera. Po śmierci pobieranie ustaje i ¹⁴C się rozpada. Liczba rozpadów w jednostce czasu jest proporcjonalna do liczby pozostałych jąder: dN/dt = −λN, gdzie λ to stała rozpadu. Rozwiązaniem jest N = N₀·e^(−λt), a połowa znika po czasie połowicznego rozpadu T½ = 5730 lat, więc λ = ln 2 / T½. Z pozostałego udziału ¹⁴C (albo ze zmierzonej aktywności względem żywej próbki) otrzymujemy wiek. Równanie modelu: $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Rozdzielamy zmienne: $\dfrac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Całkujemy obie strony: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Podstawiamy warunek początkowy $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- W czasie połowicznego rozpadu ilość maleje o połowę – stała rozpadu

$$N\left(T_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{r.}^{-1}$$

- Wyznaczamy szukaną wielkość: $t = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N}{N_0} = \dfrac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\dfrac{N_0}{N}$
- Podstawiamy: $t = \dfrac{5730}{\ln 2}\ln\dfrac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\mathrm{r.}$

- Laboratoria podają „wiek radiowęglowy” z okresem półrozpadu Libby’ego 5568 lat i przeliczają go krzywą kalibracyjną (zawartość ¹⁴C w atmosferze nie zawsze była taka sama) – rzeczywisty wiek może się więc nieco różnić.

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Czas zgonu: ciało miało 30 °C przy znalezieniu, 28 °C godzinę później, pokój 20 °C.

Input: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

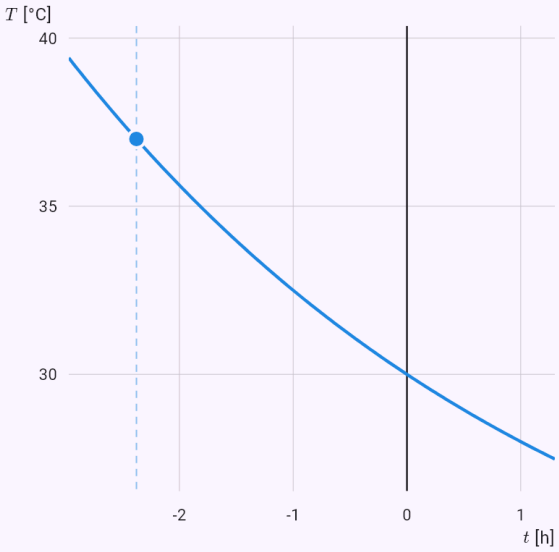
Wynik

$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$

Kroki

- Szukane t; dane $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad t_1 = 1\,\mathrm{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Ciało oddaje ciepło tym szybciej, im większa jest różnica temperatur: dT/dt = −k(T − T_a), gdzie T_a to temperatura otoczenia, a k zależy od ciała (rozmiar, materiał, przepływ powietrza). Rozwiązaniem jest T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt) – różnica maleje wykładniczo. k można wyznaczyć z dwóch pomiarów. Tak medycy sądowi szacują czas zgonu: mierzą temperaturę ciała przy znalezieniu i nieco później i obliczają, kiedy wynosiła 37 °C. Równanie modelu: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Rozdzielamy zmienne: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Całkujemy obie strony: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Podstawiamy warunek początkowy $T(0) = T_0$: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k z drugiego pomiaru $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Wyznaczamy szukaną wielkość $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Podstawiamy: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Czas ujemny oznacza przed pierwszym pomiarem (dla czasu zgonu: tyle godzin przed znalezieniem ciała).

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Lek 500 mg co 8 godzin – ustalony poziom między dawkami.

Input: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Wynik

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

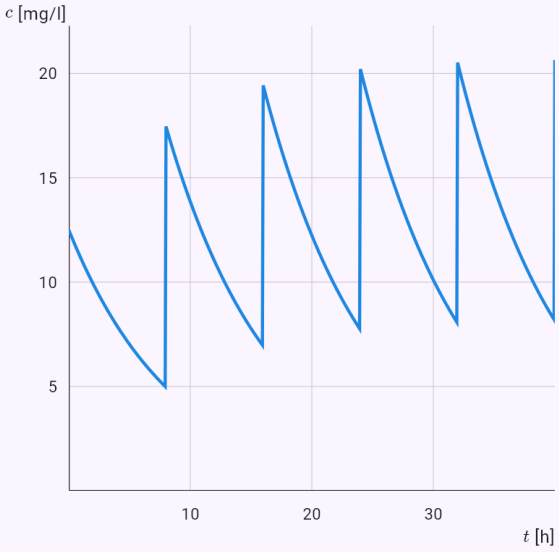
Kroki

- Szukane c_{max}; dane
  $D = 500\,\mathrm{mg}, \quad V = 40\,\mathrm{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}, \quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Lek we krwi rozprowadza się w objętości dystrybucji V; nerki i wątroba eliminują go z szybkością proporcjonalną do stężenia: dc/dt = −kc, k = ln 2 / T½ (biologiczny okres półtrwania). Po jednej dawce D jest c = (D/V)·e^(−kt). Przy dawkach powtarzanych co τ resztki się sumują (szereg geometryczny), a poziom ustala się między c_min a c_max. Wlew z szybkością R daje dc/dt = R/V − kc, a stężenie zbliża się do wartości ustalonej R/(kV). Równanie modelu: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Stężenie początkowe po dawce:
  $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Stała eliminacji z biologicznego okresu półtrwania:
  $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h^{-1}}$
- Rozdzielamy zmienne: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Całkujemy obie strony: $\ln|c| = -kt + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C: $c = Ce^{-kt}$
- Podstawiamy warunek początkowy $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $c = c_0 e^{-kt}$
- Część leku pozostała do następnej dawki:
  $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Wyznaczamy szukaną wielkość

$$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$$

- Podstawiamy: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Podstawiamy: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Współczynnik kumulacji (ile razy poziom ustalony przewyższa poziom jednej dawki): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Wykres



Jak wielkości zmieniają się w czasie.

Miesięczna rata kredytu 1 000 000 CZK na 20 lat przy 5 %.

Input: model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];

kind=loan)

Wynik

$$a \approx 6\,592\ \mathrm{CZK/mies.}$$

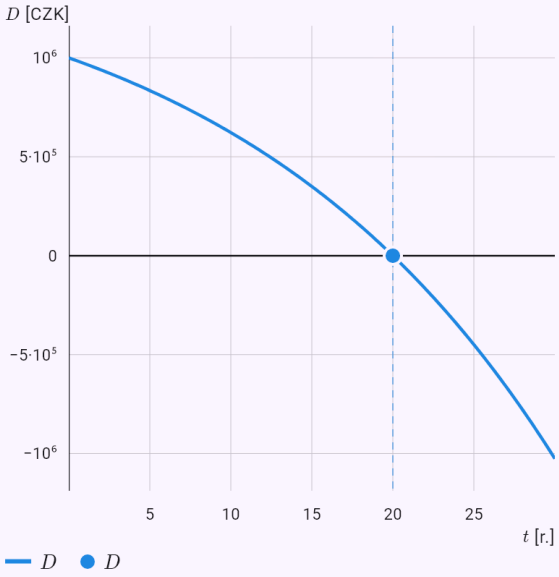
Kroki

- Szukane a; dane
  $D_0 = 1\,000\,000\ \mathrm{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{rocznie}, \quad t = 20\ \mathrm{r.},$
- Przeliczamy jednostki: $r = 5\,\%\ \text{rocznie} = 0{,}05\ \mathrm{r.}^{-1}$
- Przy kapitalizacji ciągłej odsetki narastają w każdej chwili proporcjonalnie do salda: dB/dt = rB, gdzie r to stopa roczna. Regularne wpłaty a podnoszą saldo (dB/dt = rB + a), spłaty kredytu obniżają dług (dD/dt = rD − a). Równanie rozwiązuje się przez rozdzielenie zmiennych, a rozwiązanie daje saldo, czas spłaty albo ratę (ciągły odpowiednik renty). Równanie modelu: $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Rozdzielamy zmienne: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Całkujemy obie strony: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C:
  $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Podstawiamy warunek początkowy $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Kapitalizacja ciągła to model – banki kapitalizują miesięcznie lub rocznie; wyniki różnią się tylko nieznacznie.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Podstawiamy

$$a = \frac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79\,100\ \mathrm{CZK/r.}$$

- Zapłacono łącznie: $a\,t = 1\,582\,000\ \mathrm{CZK}$
- Przeliczamy jednostki:
  $a \approx 79\,100\ \mathrm{CZK/r.} = 6\,592\ \mathrm{CZK/mies.}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Jak długo kondensator ładuje się do połowy napięcia źródła.

Input: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

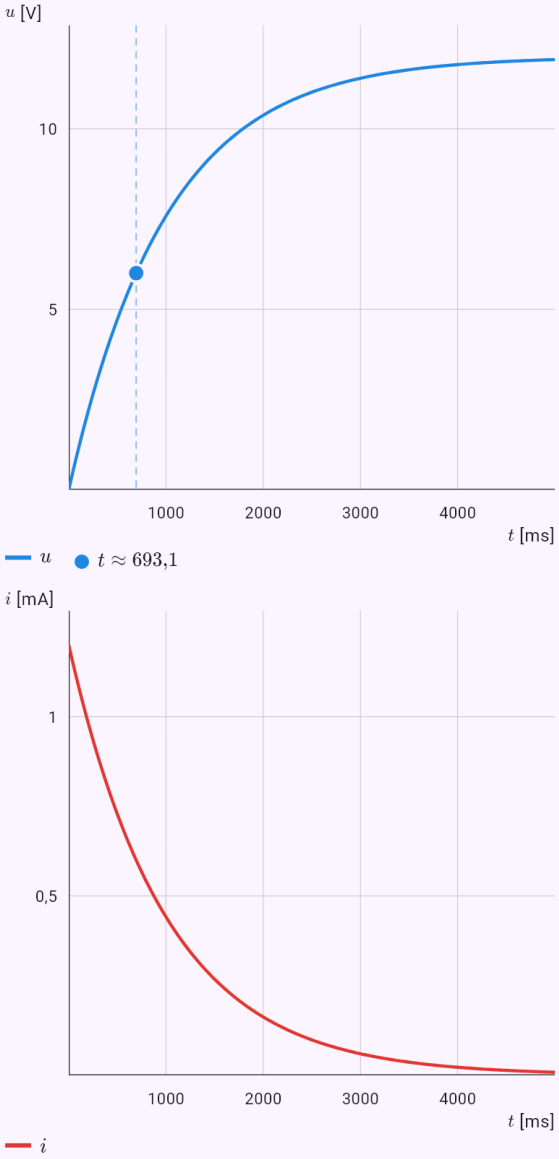
Wynik

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Kroki

- Szukane t; dane
  $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Przy ładowaniu kondensatora przez rezystor prawo Kirchhoffa daje U = Ri + u, a prąd ładuje kondensator: i = C·du/dt. Razem RC·du/dt + u = U. Napięcie zbliża się do napięcia źródła: u = U(1 − e^(−t/τ)), gdzie τ = RC to stała czasowa; prąd i = (U/R)·e^(−t/τ) maleje. Przy rozładowaniu u = U₀·e^(−t/τ). Równanie modelu:
  $RC\frac{du}{dt} + u = U$
- Stała czasowa: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Rozdzielamy zmienne: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Całkujemy obie strony: $\ln|u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C:
  $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Podstawiamy warunek początkowy $u(0) = 0$:
  $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Podstawiamy: $t = -1000 \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Tłumiona sprężyna – wychylenie po 1 s.

Input: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

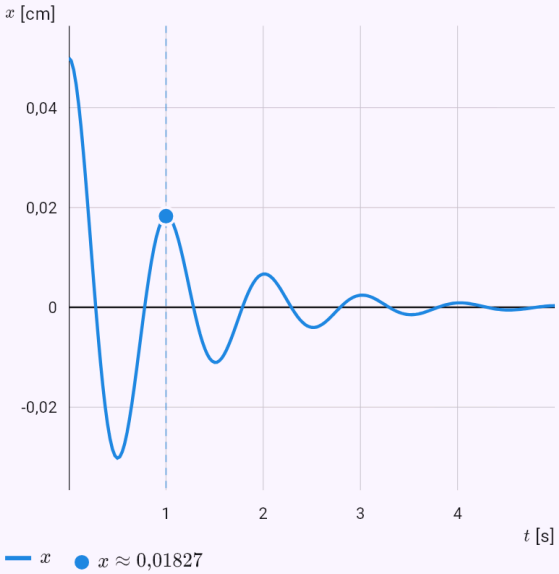
Wynik

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Kroki

- Szukane x; dane
  $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Przeliczamy jednostki: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Na ciało na sprężynie działa siła sprężyny −kx (prawo Hooke'a), tłumienie −b·v (opór proporcjonalny do prędkości) i ewentualnie siła wymuszająca $F_0 \cdot \cos \omega t$. Z drugiej zasady dynamiki $m \cdot x'' = -kx - b \cdot x' + F_0 \cdot \cos \omega t$, czyli $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – równanie liniowe 2. rzędu o stałych współczynnikach. Pierwiastki równania charakterystycznego mówią, czy ciało drga (tłumienie słabe), czy tylko wraca do położenia równowagi. Wymuszanie blisko częstości własnej $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ wywołuje rezonans. Równanie modelu:
  $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Częstość własna (bez tłumienia):
  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Współczynnik tłumienia: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Szukamy rozwiązań x = e^(λt); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λt) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego:
  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Tłumienie słabe (δ < ω_0; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): pierwiastki zespolone – drgania tłumione.
- Rozwiązanie równania jednorodnego:
  $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego:
  $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, stąd
  $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne):
  $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Podstawiamy: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Przeliczamy jednostki: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Epidemia z R_0 = 2,5 – szczyt i końcowa liczba zakażonych.

Input: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Wynik

$$I_{max} \approx 2340\,\text{os.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{os.}$$

Kroki

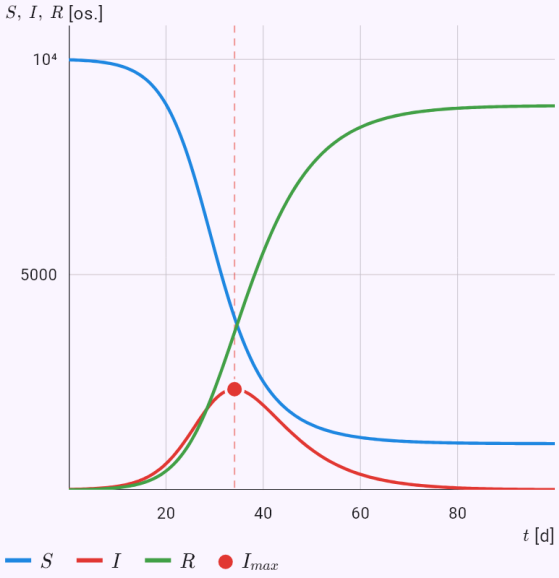
- Szukane t_{max}; dane
  $N = 10\,000\,\text{os.}, \quad I_0 = 10\,\text{os.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{d}$
- Populacja N dzieli się na podatnych S, zakażonych I i ozdrowiałych (odpornych) R. Zakażeń przybywa proporcjonalnie do spotkań podatnych z zakażonymi: β·S·I/N; zakażeni zdrowieją z szybkością γ = 1/D, gdzie D to czas trwania choroby. Układ S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI nie ma rozwiązania w funkcjach elementarnych – rozwiązuje się go numerycznie. Dokładnie wyprowadzamy jednak podstawowy współczynnik reprodukcji R_0 = β/γ, szczyt epidemii, końcową liczbę zakażonych i próg odporności zbiorowej 1 − 1/R_0.
  Równanie modelu
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Tempo zdrowienia: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Współczynnik transmisji: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- Suma S + I + R = N jest stała (równania sumują się do zera).
- Próg odporności zbiorowej (odsetek odpornych, przy którym choroba przestaje się szerzyć): $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- Epidemia się rozwija, bo początkowo
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Epidemia osiąga szczyt przy S = N/R_0; z równania dla dI/dS
  $$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$
- Rozwiązujemy równanie numerycznie (bisekcją)

$$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{os.}$$

- Łącznie choroba dotknie:
  $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{os.}\ (89{,}3\,\%)$
- Układu nie da się rozwiązać w funkcjach elementarnych – rozwiązujemy go numerycznie metodą Rungego–Kutty 4. rzędu z krokiem $0{,}05$ na $\langle 0;\ 100\rangle$
- › Metoda: metoda Rungego–Kutty 4. rzędu, 2000 kroków
- Z rozwiązania numerycznego: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

Wykres

W czasie | Płaszczyzna fazowa



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Drapieżnik i ofiara – punkt równowagi, jego stabilność i okres.

Input: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo];`

d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])

Wynik

$[x^*;\, y^*] \approx [80;\, 50]$

$T \approx 14{,}9\,\text{mies.}$

Kroki

- Szukane T; dane

  $a = 0{,}5\,\text{mies.}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{os.}\cdot\text{mies.})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{m}$

- Ofiary x mnożą się bez drapieżników (ax), drapieżniki y wymierają bez ofiar (−cy). Spotkania, proporcjonalne do iloczynu xy, zabierają ofiary (−bxy) i dają drapieżnikom pokarm (+dxy). Układ x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) ma punkt równowagi (c/d; a/b). Zlinearyzowany w nim ma czysto urojone wartości własne – populacje oscylują wokół równowagi, drapieżniki z opóźnieniem za ofiarami. Rozwiązuje się go numerycznie; punkty równowagi i całkę pierwszą wyprowadza się dokładnie. Równanie modelu

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Punkty równowagi – wszystkie pochodne są równe zeru

  $x(a - by) = 0,\ y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0;\, 0],\ \left[\frac{c}{d};\, \frac{a}{b}\right] \approx [80;$

- Stabilność przez linearyzację – macierz Jacobiego układu

  $J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$

- W $[0;\, 0]$ wartości własne $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – siodło (niestabilne).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- W $[80;\, 50]$ wartości własne $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – środek (oscylacje wokół równowagi).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Podzielenie równań i rozdzielenie zmiennych daje całkę pierwszą – wielkość stałą wzdłuż trajektorii: $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Ponieważ V nie zmienia się wzdłuż trajektorii, trajektorie są krzywymi zamkniętymi – populacje oscylują okresowo wokół równowagi.

- Okres małych drgań wokół równowagi (z wartości własnych): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{mies.}$

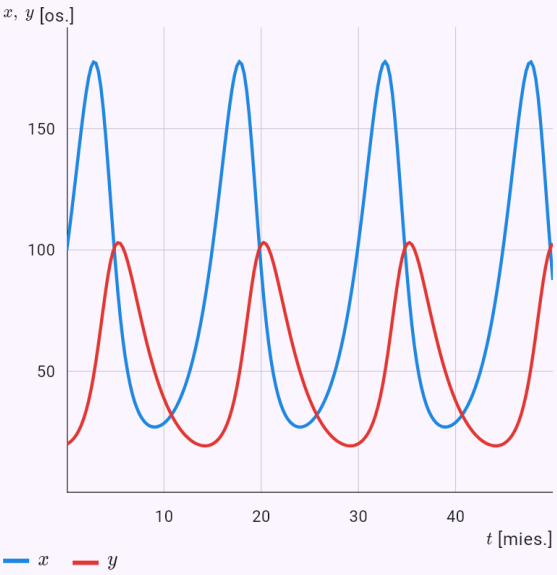
- Układu nie da się rozwiązać w funkcjach elementarnych – rozwiązujemy go numerycznie metodą Rungego–Kutty 4. rzędu z krokiem $0{,}0125$ na $\langle 0;\, 50\rangle$

- › Metoda: metoda Rungego–Kutty 4. rzędu, 4000 kroków

- Z rozwiązania numerycznego: $T \approx 14{,}95\,\text{mies.}$

Wykres

W czasie | Płaszczyzna fazowa



Jak wielkości zmieniają się w czasie.

Naczynie stożkowe: czas opróżnienia.

Input: model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

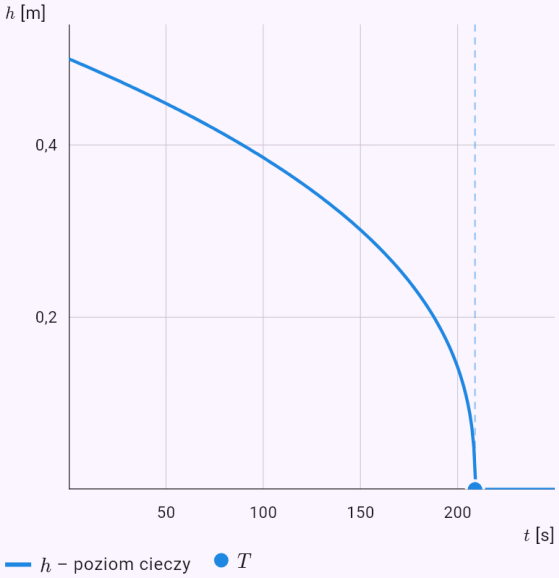
Wynik

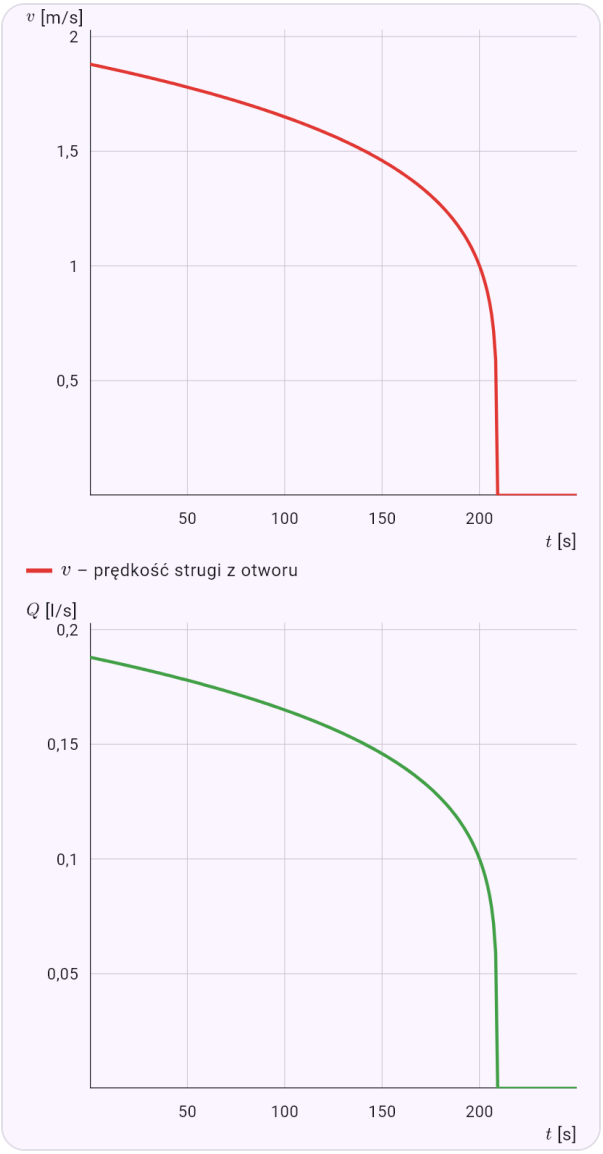
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

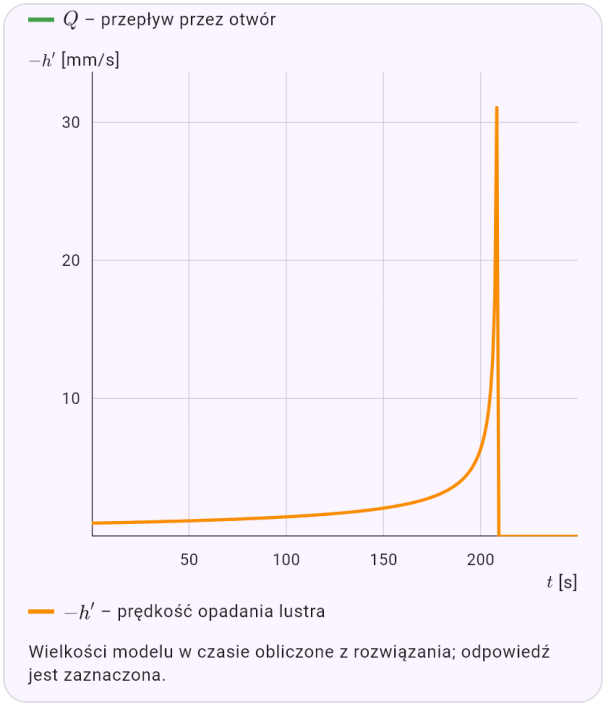
Kroki

- Szukane T; dane
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Naczynie obrotowe wybranego kształtu ma otwór w dnie. Ciecz wypływa z prędkością wynikającą z bilansu energii: Torricelli v = μ√(2gh), poprawiony dla dużego otworu (wyraz s²/S²), dla rury wylotowej o długości L (dodaje wysokość L, ale też tarcie z lepkości cieczy – laminarne lub turbulentne) oraz w naczyniu zamkniętym dla podciśnienia powietrza nad lustrem, które zwalnia wypływ aż do zatrzymania. W czasie dt wypływa objętość s·v·dt i lustro opada o dh, więc dt = −S(h)/(s·v) dh, a czas wynika z całkowania. Wykres pokazuje poziom, prędkość strugi i przepływ. Dla r = R·(h/H)^p bez rury i pokrywy dla porównania pokazany jest wzór. Przy r = k·h^(1/4) poziom opada równomiernie – tak działały zegary wodne. Równanie modelu
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Przekrój naczynia na wysokości h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Woda w 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Ciekła przy normalnym ciśnieniu od 0 do 100 °C.
- Rozdzielamy zmienne: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Prędkość strugi zależy od poziomu w skomplikowany sposób, więc całkę liczymy numerycznie.
- Dla porównania Torricelli bez poprawki na duży otwór:
  $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Podstawiamy: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Przeliczamy jednostki: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Wykres







Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Olej z naczynia kulistego przez rurę – poziom, prędkość strugi, natężenie przepływu i szybkość opadania poziomu.

Input: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

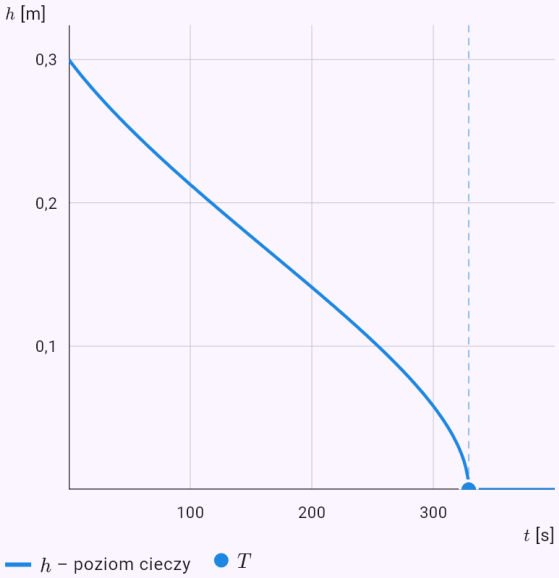
Wynik

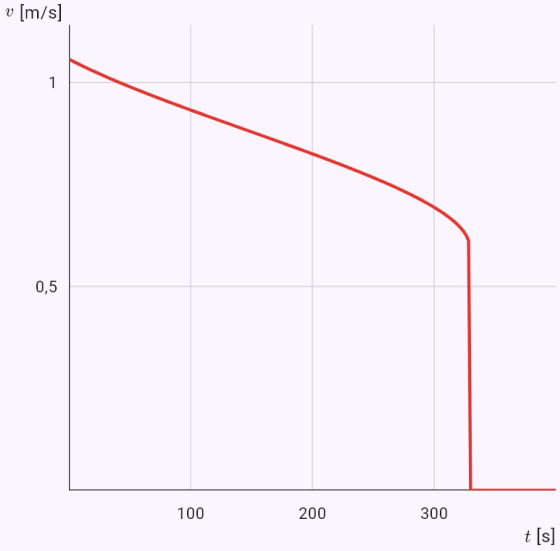
$$T \approx 5{,}48\ \text{min}$$

Kroki

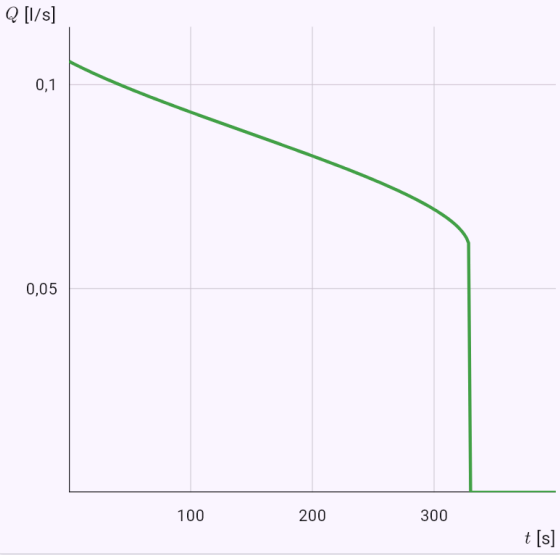
- Szukane T; dane
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Naczynie obrotowe wybranego kształtu ma otwór w dnie. Ciecz wypływa z prędkością wynikającą z bilansu energii: Torricelli v = μ√(2gh), poprawiony dla dużego otworu (wyraz s²/S²), dla rury wylotowej o długości L (dodaje wysokość L, ale też tarcie z lepkości cieczy – laminarne lub turbulentne) oraz w naczyniu zamkniętym dla podciśnienia powietrza nad lustrem, które zwalnia wypływ aż do zatrzymania. W czasie dt wypływa objętość s·v·dt i lustro opada o dh, więc dt = −S(h)/(s·v) dh, a czas wynika z całkowania. Wykres pokazuje poziom, prędkość strugi i przepływ. Dla r = R·(h/H)^p bez rury i pokrywy dla porównania pokazany jest wzór. Przy r = k·h^(1/4) poziom opada równomiernie – tak działały zegary wodne. Równanie modelu
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Przekrój naczynia na wysokości h: $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Olej słonecznikowy w 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Krzepnie około −17 °C i nie wrze – powyżej 200 °C się rozkłada; jego lepkość stromo spada z temperaturą.
- Rozdzielamy zmienne: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Prędkość strugi zależy od poziomu w skomplikowany sposób, więc całkę liczymy numerycznie.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Podstawiamy: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Przeliczamy jednostki: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

Wykres

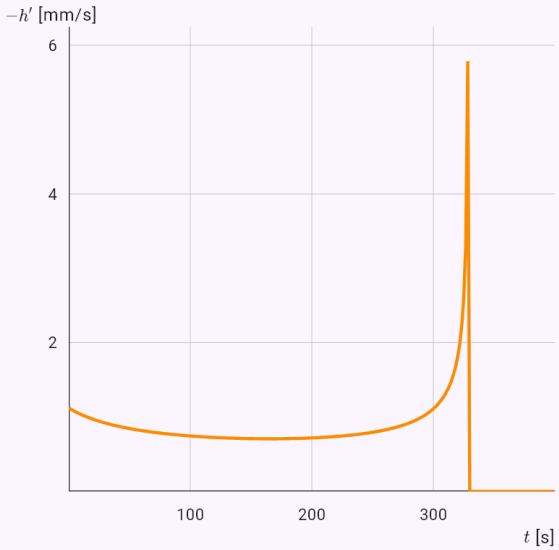




v – prędkość strugi z otworu



Q – przepływ przez otwór



$-h'$ – prędkość opadania lustra

Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Kształt naczynia, w którym poziom opada równomiernie.

Input: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

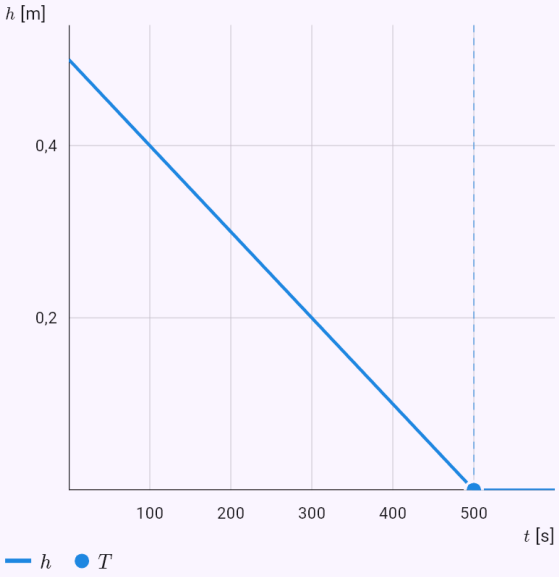
Wynik

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\text{cm}$$

Kroki

- Szukane $r(h_0)$; dane
  $s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\text{cm}, \quad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$
- Przeliczamy jednostki
  $s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
- Naczynie obrotowe wybranego kształtu ma otwór w dnie. Ciecz wypływa z prędkością wynikającą z bilansu energii: Torricelli v = μ√(2gh), poprawiony dla dużego otworu (wyraz s²/S²), dla rury wylotowej o długości L (dodaje wysokość L, ale też tarcie z lepkości cieczy – laminarne lub turbulentne) oraz w naczyniu zamkniętym dla podciśnienia powietrza nad lustrem, które zwalnia wypływ aż do zatrzymania. W czasie dt wypływa objętość s·v·dt i lustro opada o dh, więc dt = −S(h)/(s·v) dh, a czas wynika z całkowania. Wykres pokazuje poziom, prędkość strugi i przepływ. Dla r = R·(h/H)^p bez rury i pokrywy dla porównania pokazany jest wzór. Przy r = k·h^(1/4) poziom opada równomiernie – tak działały zegary wodne. Równanie modelu: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Poziom opada równomiernie, gdy przekrój jest proporcjonalny do √h, czyli r = k·h^(1/4). Taki kształt miały zegary wodne.
- Podstawiamy: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\text{m}$
- Przeliczamy jednostki: $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\text{m} = 24{,}46\,\text{cm}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

43. Fizyka

Obliczenia fizyczne są w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Fizyka. Silnik rakietowy ma pięć trybów: ciąg, impuls właściwy, wzór Ciołkowskiego, rakietę wielostopniową i prędkość wylotową z termodynamiki idealnej dyszy.

Ciąg jest obliczany z masowego natężenia przepływu i prędkości wylotowej, opcjonalnie z członem ciśnieniowym; wykres pokazuje wtedy, jak rośnie z wysokością w atmosferze wzorcowej. We wzorze Ciołkowskiego możesz szukać zmiany prędkości, potrzebnego paliwa, masy początkowej lub końcowej albo prędkości wylotowej. Wyniki są idealne, bez strat grawitacyjnych i aerodynamicznych.

Prawa Keplera mają własny formularz z pięcioma trybami: elipsa, pola, położenie w czasie, okres i prędkość z równania vis-viva. Wykres rysuje orbitę w rzeczywistej skali, a ciało porusza się po niej suwakiem lub przyciskiem odtwarzania. Dla drugiego prawa pokazuje kolorowe wycinki zakreślone w równych czasach.

Formularz o ciałach wzajemnie na siebie oddziałujących oblicza barycentrum, punkty Lagrange’a, pływy, rezonanse orbitalne i precesję peryhelium. Wykres barycentrum pokazuje oba ciała wokół [[barycenter|barycentrum]] B w rzeczywistej skali. Gdy okrąg większego ciała jest zbyt mały, by go zobaczyć na całym obrazie (Słońce wokół barycentrum Słońca i Jowisza), przełącznik „Szczegół przy barycentrum” pokazuje go powiększony, z promieniem R także z zarysem ciała – barycentrum leży tuż nad powierzchnią Słońca. Słynna historia: Uran zbaczał z przewidywanego toru, a w 1846 r. Le Verrier obliczył z tych zaburzeń, gdzie musi być nieznana planeta. Neptuna znaleziono potem prawie dokładnie tam.

Problem trzech ciał jest obliczany numerycznie w jednostkach, w których G = 1: okresowe rozwiązanie w kształcie ósemki, chaotyczny problem pitagorejski, w którym dwa prawie identyczne przebiegi w końcu się rozchodzą, i własne wartości. Zmiana energii całkowitej sprawdza dokładność.

Fizyka jądrowa w zastosowaniach służy wyłącznie celom pokojowym: laboratorium, medycynie i energetyce. Formularz Fizyka jądrowa oblicza aktywność próbki, równowagę promieniotwórczą, równania Batemana szeregu promieniotwórczego, energię wiązania z wykresem według liczby masowej, energię reakcji i energię paliwa w porównaniu z węglem.

Formularz Reaktor jądrowy pokazuje pokolenia neutronów jako ciąg geometryczny, okres reaktora z neutronami opóźnionymi i rozmiar rdzenia w jednogrupowym modelu dyfuzyjnym, tylko dla moderowanych siatek (grafit, lekka woda).

Balistyka oblicza lot pocisku dla fizyki szkolnej, sportu i myślistwa. W próżni są dokładne wzory z krokami; z oporem powietrza numeryczne rozwiązanie metodą Rungego-Kutty z wiatrem czołowym i bocznym, gęstością powietrza według wysokości i siłą Coriolisa. Wykres pokazuje widok z boku i

porównanie z próżnią, przy znosie bocznym także widok z góry. Dla pocisków naddźwiękowych współczynnik oporu pochodzi z przybliżonej krzywej według liczby Macha. Obliczany jest tylko lot, nie skutek w celu, a znos wirującego pocisku nie jest uwzględniony. Zadanie odwrotne znajduje oba kąty wyrzutu, płaski i stromy, dla danej odległości.

Samolot oblicza osiągi dla lotnictwa cywilnego i nauczania: lot poziomy na parabolicznej biegunowej oporu, rozbieg i dobieg numerycznie z wiatrem i wysokością, zakręt i lot ślizgowy. Opcjonalny efekt przypowierzchniowy zmniejsza opór indukowany. Model pomija ściśliwość powietrza, więc dla samolotów pasażerskich przy prędkości przelotowej wynik jest tylko orientacyjny. Prędkości i długości można też podać w węzłach i stopach.

Wejście w atmosferę oblicza przelot statku kosmicznego przez atmosferę numerycznie metodą Rungego-Kutty: prędkość, kąt toru lotu i wysokość nad kulistą Ziemią z atmosferą wzorcową. Wynikiem jest lądowanie, odbicie z powrotem w kosmos lub przekroczona granica, szczytowe przeciążenie (sprawdzone wzorem Allena i Eggersa), strumień ciepła w [[stagnationPoint|punkcie spiętrzenia]] i temperatura osłony z [[radiativeEquilibrium|równowagi radiacyjnej]]. Tryb Korytarz wejścia znajduje bisekcją płaską i stromą granicę kąta wejścia – przy powrocie od Księżyca [[entryCorridor|korytarz]] wychodzi szeroki na około 2°, z uwagą o Apollo 13. Ustawienia: Wostok, Apollo, Sojuz i Space Shuttle (z rzeczową uwagą o utracie Columbii). Jedynym sterowaniem jest stały [[bankAngle|kąt przechylenia]]; Ziemia w modelu się nie obraca. Interaktywne demo, w którym przechylasz siłę nośną w trakcie lotu, jest na mathtrace.app w sekcji „Wypróbuj sam”.

Ciała w wodzie to formularz do nauczania i zastosowań cywilnych: wypór i pływanie łącznie z balonem, ciśnienie z głębokością, równanie Bernoulliego, opadanie i wynurzanie z masą dodaną, zasięg i opadanie kuszy do łowiectwa podwodnego, napędzany pojazd podwodny, balast i statek. Współczynnik oporu kuli zależy od liczby Reynoldsa, a pęcherzyk ma własną korelację. Opór statku to tarcie według linii ITTC-57 plus dany współczynnik resztkowy, więc powyżej prędkości wypornościowych jest tylko orientacyjny. Dla statku możesz włączyć porównanie z ekranoplanem KM: praca przeciw oporowi na tonę i kilometr i wykres mocy według prędkości.

Synteza termojądrowa ma dwa formularze, oba wyłącznie do zastosowań cywilnych (elektrownie, laboratoria, Słońce i gwiazdy). Formularz Synteza termojądrowa oblicza energię reakcji (D-T, D-D, D-^{3}He i cyklu p-p Słońca) z jej podziałem między produkty, energię paliwa w porównaniu z rozszczepieniem uranu i z węglem, wysokość [[coulombBarrier|bariery kulombowskiej]] i [[gamowPeak|piku Gamowa]]. Reaktor termojądrowy nie może wymknąć się spod kontroli jak reaktor rozszczepieniowy: synteza nie ma masy krytycznej, a jeśli coś zawiedzie, plazma stygnie i reakcja sama ustaje.

Formularz Plazma termojądrowa oblicza [[lawsonCriterion|kryterium Lawsona]] z wykresem potrzebnego iloczynu potrójnego przy każdej temperaturze, wzmocnienie Q, szybkość reakcji ⟨σv⟩ jako całkę po rozkładzie Maxwella metodą Simpsona (w porównaniu z opublikowanym dopasowaniem Boscha i

Hale'a), gęstość mocy syntezy, stratę na promieniowanie hamowania i promień Larmora naładowanej cząstki w polu magnetycznym. Aplikacja nie oblicza dynamiki plazmy (magnetohydrodynamiki).

Akceleratory cząstek mają dwa formularze. Kinematyka relatywistyczna oblicza [[lorentzFactor|czynnik Lorentza]], prędkość, energię i pęd z prędkości lub energii kinetycznej oraz dylatację czasu z zasięgiem cząstek nietrwałych (mion, pion, kaon). Formularz Akceleratory cząstek porównuje energię zderzenia √s wiązek przeciwbieżnych i nieruchomej tarczy, oblicza promień zakrzywienia pierścienia i potrzebne pole oraz stratę na promieniowanie synchrotronowe. Menu wypełnia wartości LHC, LEP lub Tevatronu.

Przykłady

Ciąg silnika na poziomie morza, w porównaniu z próżnią.

Input: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa]; pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)`

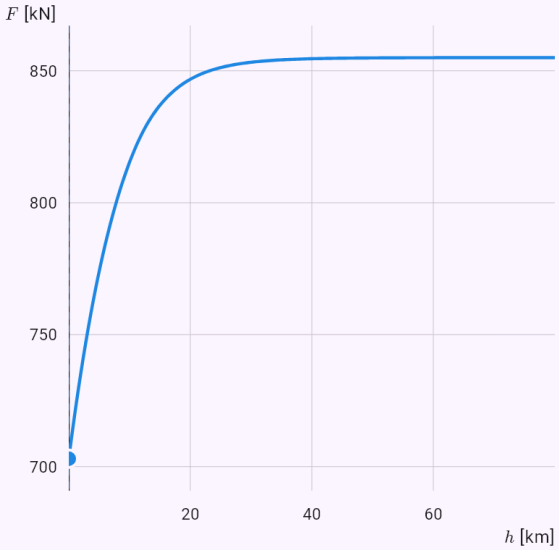
Wynik

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Kroki

- Szukane F; dane
  $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Przeliczamy jednostki
  $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Rakietę napędza odrzucanie masy: co sekundę masa Δm/Δt opuszcza ją z prędkością v_e, a zasada zachowania pędu daje ciąg $F = (\Delta m/\Delta t)\cdot v_e$. Jeśli ciśnienie gazu na wylocie dyszy p_e różni się od ciśnienia otoczenia p_a, dochodzi człon $(p_e - p_a)\cdot A_e$, dlatego ciąg rośnie z wysokością. Równanie modelu:
  $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Człon ciśnieniowy ciągu
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300)\cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Gaz jest w dyszy nadmiernie rozprężony ($p_e < p_a$), więc ciśnienie otoczenia obniża ciąg. Typowe przy starcie silnika zaprojektowanego na większe wysokości.
- Człon pędowy ciągu: $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Podstawiamy: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Impuls właściwy
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$$
- Ciąg w próżni: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- Przeliczamy jednostki: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Prędkość wylotowa z impulsu właściwego RP-1/LOX.

Input: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Wynik

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane v_e; dane: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- Impuls właściwy I_sp = v_e/g_0 mówi, przez ile sekund 1 kg paliwa może dawać ciąg równy ciężarowi 1 kg, więc porównuje paliwa. Równanie modelu: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Normalne przyspieszenie ziemskie: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $v_e = I_{sp} g_0$
- Podstawiamy: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Im wyższy impuls właściwy, tym mniej paliwa silnik spala przy tym samym ciągu. Typowe wartości w próżni: paliwo stałe ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Zmiana prędkości ze wzoru Ciołkowskiego.

Input: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

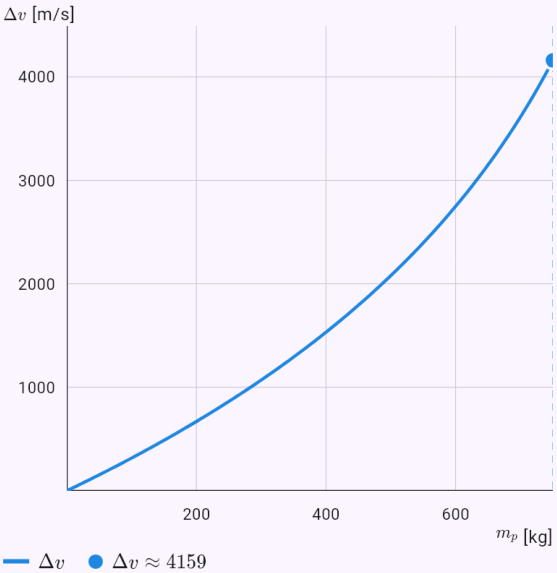
Wynik

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane Δv; dane: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- Pęd wyrzucanego paliwa przyspiesza rakietę: całkowanie m·dv = −v_e·dm daje wzór Ciołkowskiego Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Równanie modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Rozdzielamy zmienne: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Całkujemy obie strony: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Podstawiamy: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Stosunek mas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Udział paliwa w masie początkowej: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Wynik idealny bez strat grawitacyjnych i aerodynamicznych. Osiągnięcie niskiej orbity okołoziemskiej wymaga w rzeczywistości około 9,4 km/s.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Ile paliwa potrzebuje 1 t rakiety, by osiągnąć niską orbitę.

Input: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

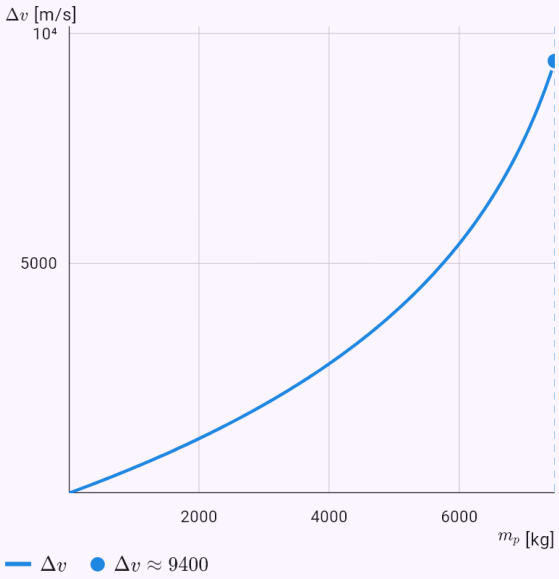
Wynik

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Kroki

- Szukane m_p; dane: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- Pęd wyrzucanego paliwa przyspiesza rakietę: całkowanie m·dv = −v$_e$·dm daje wzór Ciołkowskiego Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Równanie modelu: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Rozdzielamy zmienne: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Całkujemy obie strony: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $m_p = m_0 - m_f = m_f\left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1\right)$
- Podstawiamy: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1\right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Stosunek mas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Udział paliwa w masie początkowej: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Wynik idealny bez strat grawitacyjnych i aerodynamicznych. Osiągnięcie niskiej orbity okołoziemskiej wymaga w rzeczywistości około 9,4 km/s.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Rakieta trójstopniowa klasy Saturn V i co dają stopnie.

Input: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

421[s]; mL=45[t]; mode=staging)

Wynik

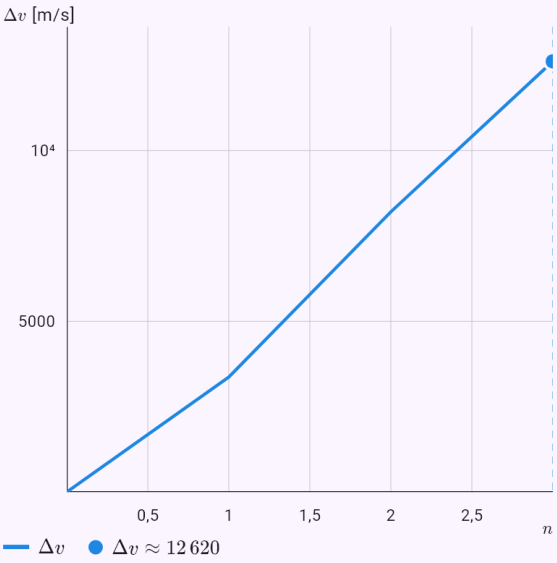
$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane Δv; dane
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sp}$
- Przeliczamy jednostki
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Każdy stopień dodaje prędkość według wzoru Ciołkowskiego, a jego puste zbiorniki są odrzucane, więc następny stopień nie wiezie już zbędnej masy. Przyrosty prędkości się sumują. Równanie modelu:
  $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Normalne przyspieszenie ziemskie: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Zmiana prędkości stopnia
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Zmiana prędkości stopnia
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Zmiana prędkości stopnia
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Dla porównania jeden stopień o tej samej masie i paliwie
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Dzięki odrzucaniu pustych stopni rakieta zyskuje o $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ więcej niż jeden stopień z tym samym paliwem.

- Wynik idealny bez strat grawitacyjnych i aerodynamicznych. Osiągnięcie niskiej orbity okołoziemskiej wymaga w rzeczywistości około 9,4 km/s.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Prędkość wylotowa silnika wodorowego z termodynamiki dyszy.

Input: model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];

`mode=nozzle; propellant=hydrogen)`

Wynik

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane v_e; dane

  $$T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$$

- Przeliczamy jednostki: $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- Prędkość wylotowa wynika z termodynamiki idealnej dyszy: rośnie z temperaturą komory spalania i maleje z masą molową spalin. Równanie modelu

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Uniwersalna stała gazowa: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Człon ekspansji

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Podstawiamy

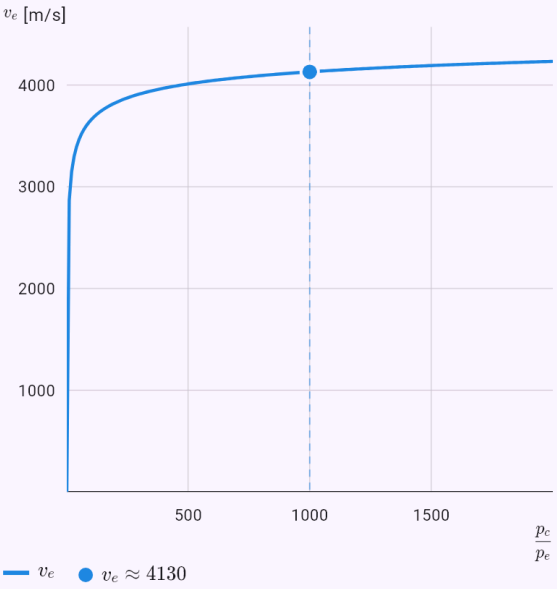
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Impuls właściwy: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Prędkość graniczna przy ekspansji do próżni:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- Prędkość wylotowa rośnie z √(T/M), dlatego wodór (lekkie spaliny) ma najwyższy impuls właściwy.
- Idealny przepływ izentropowy; rzeczywista dysza osiąga około 92–98 % tej wartości.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Peryhelium komety Halleya z wielkiej półosi i mimośrodu.

Input: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

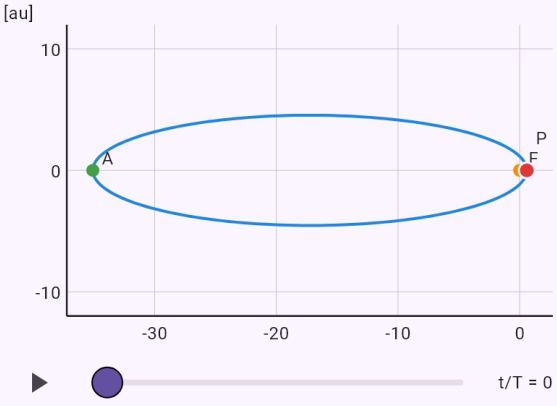
Wynik

$$r_p \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$$

Kroki

- Szukane r_p; dane: $a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad e = 0{,}9671$
- Pierwsze prawo Keplera: planeta porusza się po elipsie, w której jednym ognisku jest ciało centralne. Odległość r zależy od kąta θ od peryhelium; najmniejsza jest w peryhelium r_p = a(1 − e), największa w aphelium r_a = a(1 + e). Mimośród e mówi, jak wydłużona jest elipsa. Równanie modelu: $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $r_p = a(1-e)$
- Podstawiamy: $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\mathrm{au}$
- Odległość w aphelium: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\mathrm{au}$

Wykres



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Prędkość Ziemi w aphelium z drugiego prawa Keplera; wycinki równego czasu.

Input: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

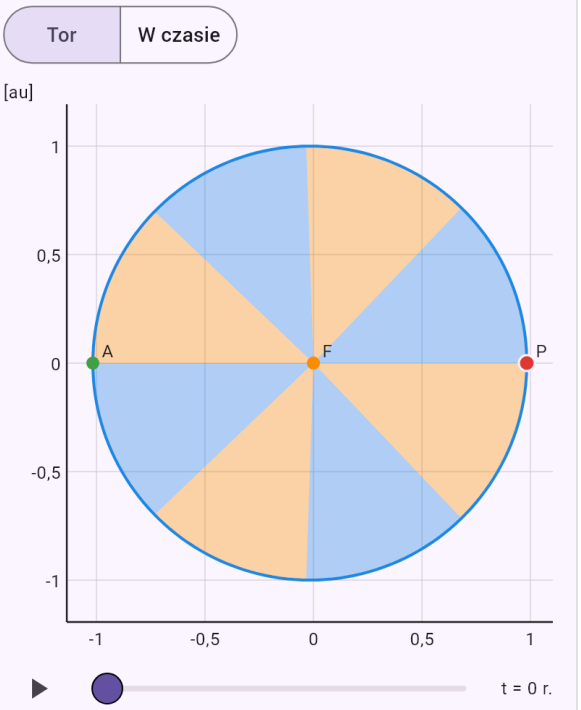
Wynik

$$v_a \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$$

Kroki

- Szukane v_a; dane
  $r_p = 0{,}9833\,\mathrm{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\mathrm{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\mathrm{km/s}$
- Drugie prawo Keplera: promień wodzący z ogniska zakreśla w równych czasach równe pola, bo moment pędu jest zachowany. Prędkość polowa jest stała, więc ciało jest najszybsze w peryhelium: v_p·r_p = v_a·r_a. Kolorowe wycinki na wykresie trwały tyle samo i mają to samo pole. Równanie modelu:
  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \mathrm{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $v_a = v_p \frac{r_p}{r_a}$
- Podstawiamy: $v_a = 30{,}29 \cdot \frac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\mathrm{km/s}$
- Stosunek prędkości: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Ciało jest najszybsze w peryhelium, a najwolniejsze w aphelium; dlatego Ziemia porusza się najszybciej w styczniu.

Wykres



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Gdzie jest kometa Halleya 10 lat po peryhelium (metoda Newtona).

Input: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr];`

`mode=position; body=halley)`

Wynik

$$\theta \approx 168\,^\circ$$

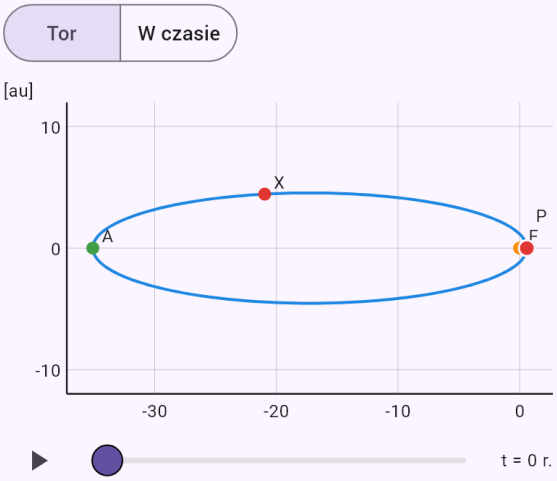
Kroki

- Szukane θ; dane
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{r.}, \quad t = 10\,\text{r.}$
- Gdzie ciało będzie w chwili t, wynika z równania Keplera M = E − e·sin E. Anomalia średnia M rośnie równomiernie z czasem; anomalii mimośrodowej E nie da się z niej wyrazić wzorem, więc znajduje ją metoda Newtona.
  Równanie modelu: $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Anomalia średnia: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- Równanie Keplera nie ma rozwiązania we wzorach, więc E znajdujemy numerycznie.
- Iteracja Newtona: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Krok: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Krok: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Krok: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Krok: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Krok: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Krok: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Anomalia mimośrodowa: $E \approx 1{,}78021$
- Anomalia prawdziwa

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Odległość od ogniska: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Wykres



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Wysokość orbity geostacjonarnej z trzeciego prawa Keplera.

Input: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

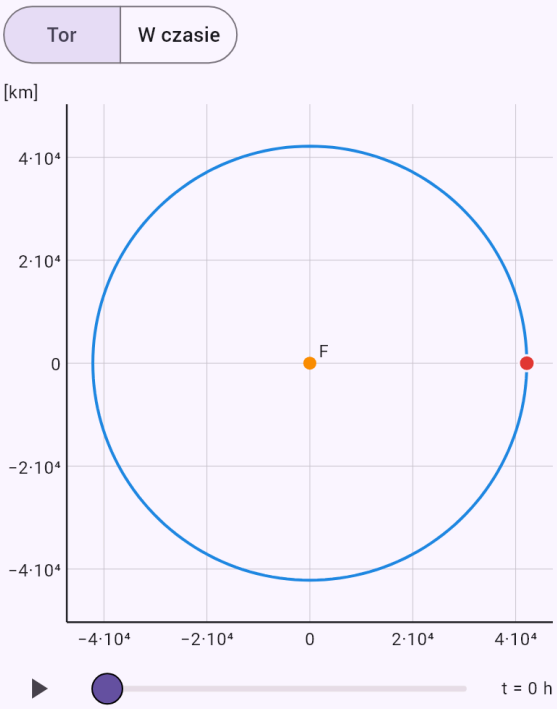
Wynik

$$h \approx 35\,790\,\mathrm{km}$$

Kroki

- Szukane h; dane
  $T = 86\,160\,\mathrm{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6378\,\mathrm{km}$
- Przeliczamy jednostki: $R = 6378\,\mathrm{km} = 6\,378\,000\,\mathrm{m}$
- Trzecie prawo Keplera: stosunek T²/a³ zależy tylko od masy ciała centralnego. Orbita księżyca daje więc masę planety, a żądany okres daje wysokość orbity, na przykład geostacjonarnej. Równanie modelu:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Podstawiamy
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $h = a - R$
- Podstawiamy:
  $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Obowiązuje dla krążącej masy pomijalnej wobec M; w przeciwnym razie należy użyć M + m.
- Przeliczamy jednostki: $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35\,790\,\mathrm{km}$

Wykres



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Prędkość komety Halleya w peryhelium z równania vis-viva.

Input: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg]; mode=visviva;`

`central=sun)`

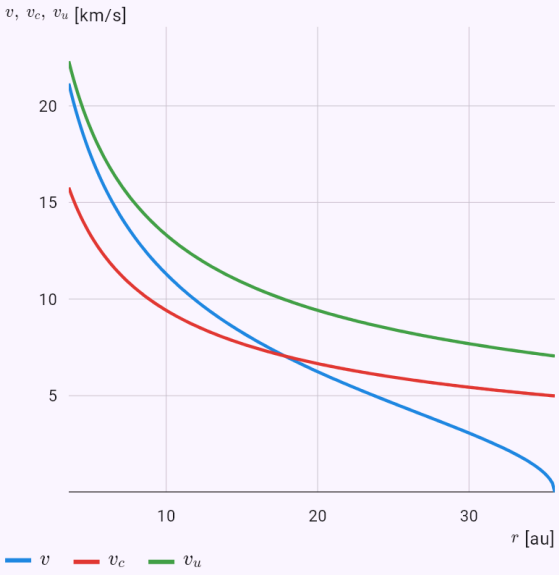
Wynik

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Kroki

- Szukane v; dane
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Przeliczamy jednostki
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- Wzór vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) wynika z zasady zachowania energii i daje prędkość w dowolnym miejscu orbity. Prędkość kołowa utrzymuje ciało na okręgu; prędkość ucieczki jest √2 razy większa i ciało już nie wraca. Równanie modelu: $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Podstawiamy
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Prędkość kołowa w tej odległości:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Prędkość ucieczki w tej odległości:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Przeliczamy jednostki: $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Barycentrum Słońca i Jowisza leży tuż nad powierzchnią Słońca; „Szczegół przy barycentrum” pokazuje Słońce krążące wokół niego.

Input: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)

Wynik

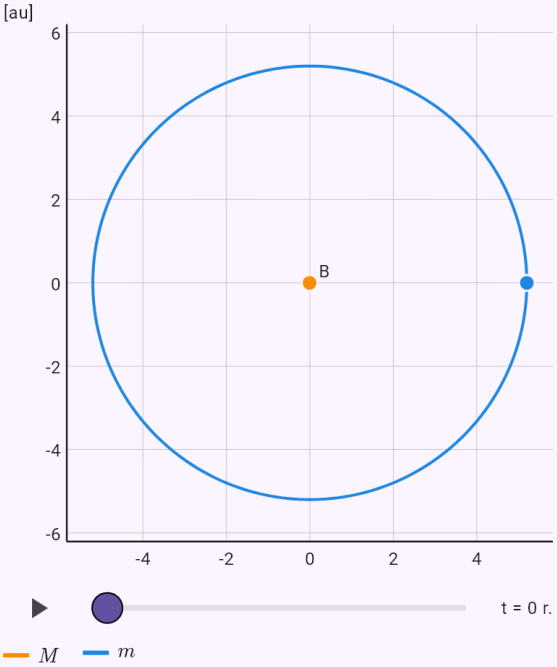
$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$

Kroki

- Szukane r_b; dane
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Przeliczamy jednostki
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- W rzeczywistości oba ciała krążą wokół wspólnego środka masy (barycentrum). Problem dwóch ciał sprowadza się do ruchu jednego ciała z masą zredukowaną, a trzecie prawo Keplera zawiera sumę M + m. Kołysanie gwiazdy wokół barycentrum zdradza egzoplanety. Równanie modelu
  $r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$
- Podstawiamy
  $r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
- Odległość drugiego ciała od barycentrum:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Barycentrum leży poza ciałem: $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Większe ciało samo zakreśla widoczny okrąg.
- Przeliczamy jednostki: $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Wykres

Tor | Szczegół przy barycentrum



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Odległość L2, gdzie pracuje Teleskop Jamesa Webba.

Input: model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

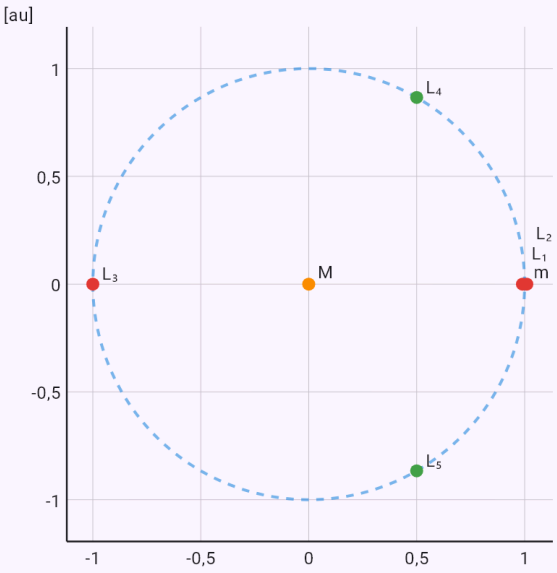
Wynik

$$r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mln km}$$

Kroki

- Szukane r_{L_2}; dane
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- W układzie obracającym się z ciałem m jest pięć miejsc, w których grawitacja obu ciał i siła odśrodkowa się równoważą. L1, L2 i L3 leżą na prostej przez ciała i znajduje się je numerycznie; L4 i L5 tworzą z obydwoma ciałami trójkąty równoboczne. Równanie modelu
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Stosunek mas: $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- W przybliżeniu dla małego m:
  $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{mln km}$
- Punkt Lagrange'a jest pierwiastkiem równania na prostej przez ciała, znalezionym bisekcją.
- Dokładnie z równania: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mln km}$
- L1, L2 i L3 są niestabilne: ciało musi utrzymywać położenie korektami, jak Teleskop Jamesa Webba w L2.
- L4 i L5 są stabilne, bo M/m > 25; Jowisz utrzymuje tam swoje trojańczyki.

Wykres



Ciała i ważne punkty w rzeczywistej skali.

Przyspieszenie pływowe wywołane przez Księżyc.

Input: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide; tideSource=moon)`

Wynik

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}^2$$

Kroki

- Szukane a_s; dane
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\text{kg}, \quad R = 6371\,\text{km}, \quad d = 384\,400\,\text{km}$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 6371\,\text{km} = 6\,371\,000\,\text{m}, \quad d = 384\,400\,\text{km} = 3{,}84$
- Bliższa strona ciała jest przyciągana silniej niż dalsza. Przyspieszenie pływowe 2GMR/d³ maleje z sześcianem odległości, dlatego Księżyc znaczy więcej niż o wiele masywniejsze Słońce. Równanie modelu: $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- Podstawiamy
  $$a_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{(3{,}844 \cdot 10^8)^3} \approx 1{,}099$$
- Dokładnie – różnica grawitacji na bliższej stronie i w środku
  $$\frac{GM}{(d-R)^2} - \frac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}^2$$
- Ciało przyciągające wywołuje dwa wybrzuszenia pływowe, na bliższej stronie i na przeciwnej, więc na jeden obrót przypadają dwa przypływy.
- Tarcie pływowe spowalnia obrót: Księżyc zwraca do Ziemi zawsze tę samą stronę i oddala się o około 3,8 cm rocznie.

Rezonans księżyców Io, Europy i Ganimedesa.

Input: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Wynik

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Kroki

- Dane: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Rezonans orbitalny występuje, gdy okresy są w stosunku małych liczb całkowitych; ciała spotykają się wtedy regularnie i na siebie wpływają. Przykłady: Io, Europa i Ganimedes 1 : 2 : 4, Neptun i Pluton 2 : 3. Przerwy Kirkwooda w pasie planetoid leżą w rezonansach z Jowiszem. Równanie modelu:
  $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Największe odchylenie od stosunku liczb całkowitych:
  $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Okresy są w stosunku małych liczb całkowitych: rezonans orbitalny.

Precesja peryhelium Merkurego według ogólnej teorii względności.

Input: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km]; e=0.2056[one]; mode=precession)`

Wynik

$$\Delta\varphi \approx 43''/100\ \mathrm{lat}$$

Kroki

- Szukane $\Delta\varphi$; dane
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km}, \quad e = 0{,}205$
- Przeliczamy jednostki:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$
- W ogólnej teorii względności peryhelium orbity powoli obraca się o 6πGM/(c²a(1 − e²)) na obieg. Dla Merkurego to 43" na stulecie – różnica, której mechanika Newtona nie umiała wyjaśnić. Równanie modelu:
  $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi G M}{c^2 a\left(1 - e^2\right)}$
- Obrót na jeden obieg
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1 - (0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Obiegi w ciągu 100 lat: $N = \dfrac{100\,\mathrm{r.}}{T} \approx 415{,}3$
- Podstawiamy: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43''/100\ \mathrm{lat}$
- Mechanika Newtona przewiduje dla Merkurego mniejszy obrót; pozostałe 43" na stulecie wyjaśniła dopiero ogólna teoria względności.

Okresowe rozwiązanie w kształcie ósemki trzech jednakowych ciał.

Input: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Wynik

$$E \approx -1{,}28714$$

Kroki

- Szukane E; dane: $t_k = 6{,}326$
- Trzy ciała w ogólności nie mają rozwiązania we wzorach. Istnieją jednak wyjątkowe orbity okresowe: w rozwiązaniu w kształcie ósemki (Chenciner i Montgomery, 2000) trzy jednakowe ciała gonią się po jednej krzywej w kształcie cyfry 8. Równanie modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- W ogólności trzy ciała nie mają rozwiązania we wzorach, więc ruch obliczamy numerycznie, w jednostkach, w których G = 1.
- Liczba kroków obliczenia: $N = 2748$
- Energia całkowita:

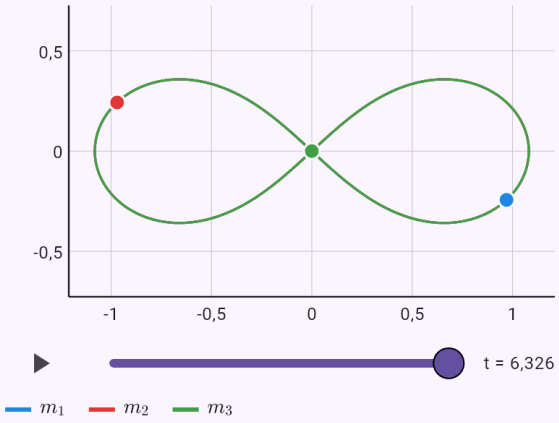
$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

- Względna zmiana energii (kontrola dokładności):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$$

- Trzy jednakowe ciała poruszają się po jednej krzywej w kształcie cyfry 8 i po okresie wracają na swoje miejsca.
- Największa odległość od startu po jednym okresie: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Wykres



Ciała w rzeczywistej skali. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź ruch.

Chaos: kiedy dwa prawie identyczne przebiegi się rozchodzą.

Input: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Wynik

$$t_s \approx 42{,}9$$

Kroki

- Szukane t_s; dane: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Problem trzech ciał jest chaotyczny: drobna zmiana na początku rośnie, aż tory nie mają ze sobą nic wspólnego. Problem pitagorejski z masami 3, 4 i 5 jest obliczany dwukrotnie, za drugim razem z małym przesunięciem δ. Równanie modelu

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- W ogólności trzy ciała nie mają rozwiązania we wzorach, więc ruch obliczamy numerycznie, w jednostkach, w których G = 1.
- Liczba kroków obliczenia: $N = 52\,307$
- Energia całkowita:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

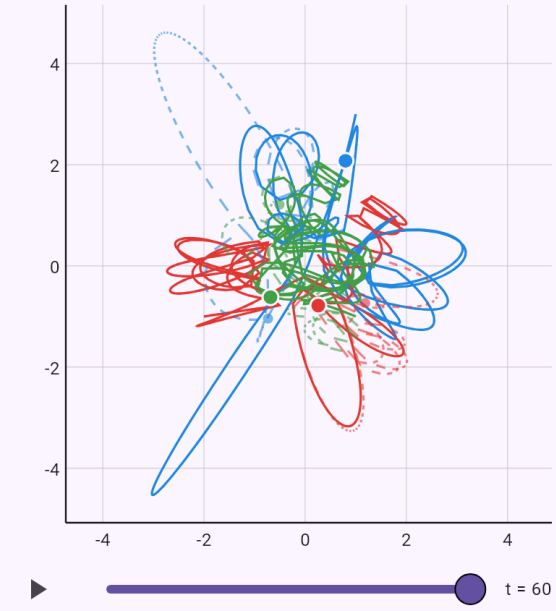
- Względna zmiana energii (kontrola dokładności):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

- Obliczany jest też drugi przebieg przesunięty o $\delta = 0{,}001$. Linie przerywane to ten przebieg; ich rozejście się pokazuje chaos. Linia prosta logarytmu w czasie oznacza wzrost wykładniczy.
- W chwili t_s położenie któregoś ciała różni się między obydwoma przebiegami o więcej niż 1.

Wykres

Tor | W czasie



Linia ciągła i przerywana to dwa przebiegi z minimalnie różnym startem.

Aktywność 1 g radu, około jednego kiura.

Input: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

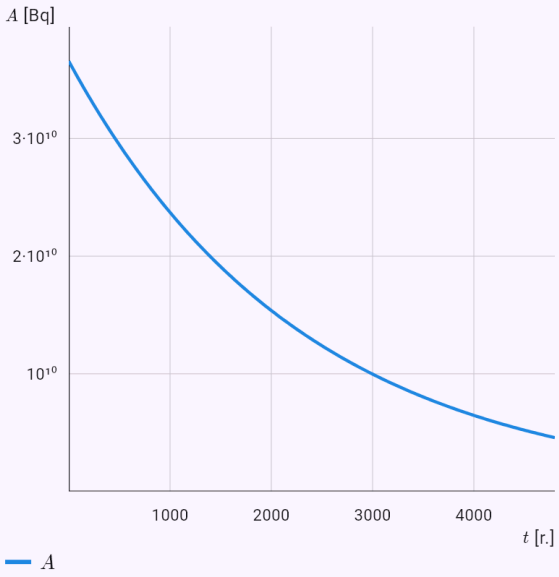
Wynik

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Kroki

- Szukane A; dane:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{r.}$
- Przeliczamy jednostki: $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{r.} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- Aktywność A = λN mówi, ile jąder rozpada się w ciągu sekundy. Liczba jąder N wynika z masy, masy molowej i stałej Avogadra, stała rozpadu λ z czasu połowicznego rozpadu. Równanie modelu:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- W czasie połowicznego rozpadu ilość maleje o połowę – stała rozpadu: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Liczba jąder: $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Podstawiamy
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Bekerel to jeden rozpad na sekundę. Historyczna jednostka kiur to mniej więcej aktywność 1 g radu, 3,7·10¹⁰ Bq.

Wykres



Jak wielkości zmieniają się w czasie.

Stosunek aktywności w szpitalnym generatorze Mo-99 / Tc-99m.

Input: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

generator=moTc)

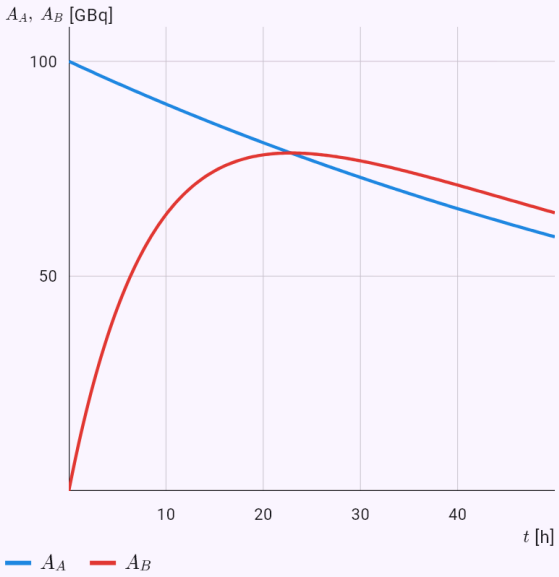
Wynik

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Kroki

- Szukane $\frac{A_B}{A_A}$; dane:
  $A_{A,0} = 100\,\mathrm{GBq}, \quad T_A = 66\,\mathrm{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\mathrm{h}$
- Gdy z długożyciowego jądra macierzystego powstaje krótkożyciowe pochodne, jego aktywność dogania macierzyste, a potem podąża za nim w stałym stosunku. Na tym opierają się szpitalne generatory radionuklidów. Równanie modelu
  $A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$
- W czasie połowicznego rozpadu ilość maleje o połowę – stała rozpadu: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$
- Podstawiamy: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Równowaga przejściowa: po kilku czasach połowicznego rozpadu jądra pochodnego stosunek aktywności jest stały.

Wykres



Jak wielkości zmieniają się w czasie.

Trójczłonowy szereg promieniotwórczy równaniami Batemana.

Input: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

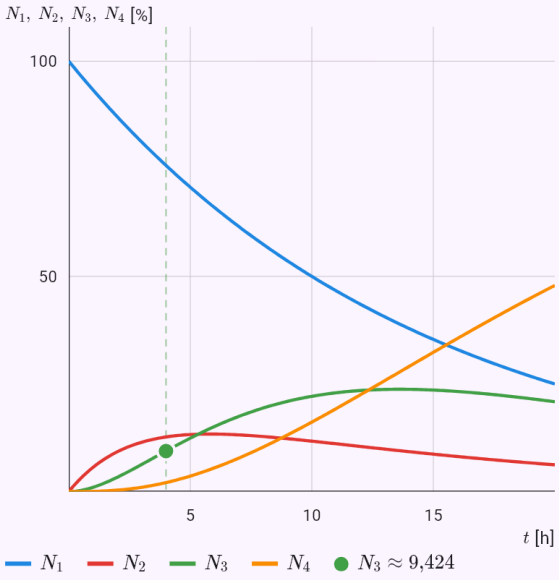
Wynik

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Kroki

- Szukane N_n; dane:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\mathrm{h}, \quad t = 4\,\mathrm{h}$
- Równania Batemana opisują szereg promieniotwórczy: każdy człon powstaje z poprzedniego i rozpada się w następny. To układ liniowych równań różniczkowych z rozwiązaniem w postaci zamkniętej. Równanie modelu:
  $N_k' = \lambda_{k-1} N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- W czasie połowicznego rozpadu ilość maleje o połowę – stała rozpadu
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Wyznaczamy szukaną wielkość
  $$N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j} (\lambda_l - \lambda_j)}$$
- Podstawiamy: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- Wykres pokazuje także trwały produkt końcowy; suma wszystkich członów jest stała.

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Energia wiązania na nukleon żelaza-56.

Input: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

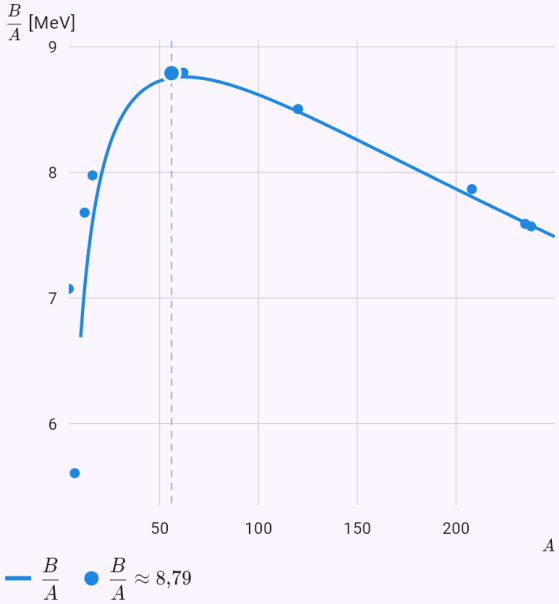
Wynik

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Kroki

- Szukane $\frac{B}{A}$; dane: $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Jądro waży mniej niż jego swobodne protony i neutrony. Według E = mc² różnicy Δm odpowiada energia wiązania. Jej krzywa na nukleon ma maksimum w pobliżu żelaza, dlatego energię uwalnia zarówno rozszczepienie ciężkich jąder, jak i synteza lekkich. Równanie modelu:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Defekt masy
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Równoważnik energetyczny: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Podstawiamy: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Energia wiązania na nukleon: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Energia rozszczepienia uranu-235.

Input: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Wynik

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Kroki

- Energia reakcji Q to różnica mas przed i po, przeliczona przez E = mc². Dodatnie Q oznacza, że energia się wydziela. Równanie modelu: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reakcja: $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Suma mas: $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Podstawiamy: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Ta energia wydziela się od razu; z rozpadami produktów rozszczepienia to około 200 MeV na rozszczepienie.

Ile węgla zastępuje 1 g uranu-235.

Input: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg]; mode=fuel)`

Wynik

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Kroki

- Szukane m_c; dane $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- Masa paliwa daje liczbę jąder, a energia jednego rozszczepienia energię całkowitą, którą można porównać ze spalaniem węgla. Równanie modelu: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Liczba jąder: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Podstawiamy $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Podstawiamy $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Obliczenie idealne: rzeczywisty reaktor wykorzystuje tylko kilka procent paliwa i zamienia na energię elektryczną około jednej trzeciej ciepła.

Liczba neutronów po 10 pokoleniach przy k = 1,05.

Input: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

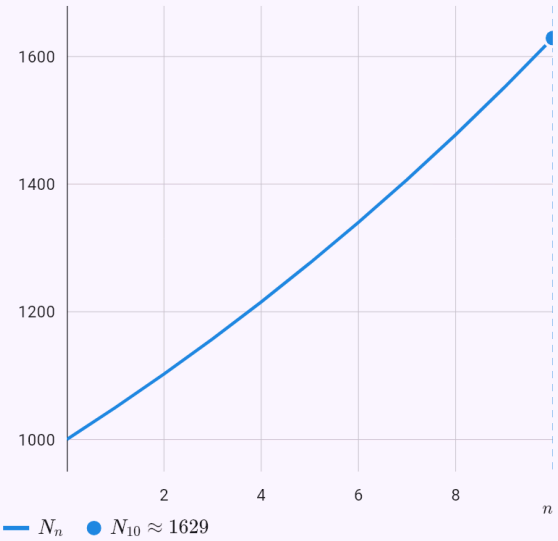
Wynik

$$N_n \approx 1629$$

Kroki

- Szukane N_n; dane: $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Współczynnik mnożenia k mówi, ile neutronów następnego pokolenia wywołuje jeden neutron. Liczba neutronów to ciąg geometryczny N_0k^n: przy k < 1 reakcja wygasa, przy k = 1 przebiega równomiernie, a przy k > 1 rośnie. Równanie modelu: $N_n = N_0k^n$
- Stan nadkrytyczny: k > 1, moc rośnie. Reaktor wchodzi w ten stan tylko krótko i bardzo nieznacznie, gdy ma zwiększyć moc.
- Podstawiamy: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Suma wszystkich pokoleń w stanie podkrytycznym.

Input: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

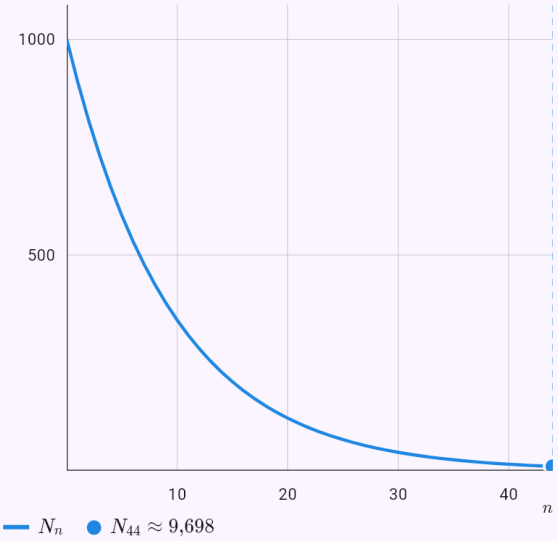
Wynik

$$S \approx 10\,000$$

Kroki

- Szukane S; dane: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Współczynnik mnożenia k mówi, ile neutronów następnego pokolenia wywołuje jeden neutron. Liczba neutronów to ciąg geometryczny N_0k^n: przy k < 1 reakcja wygasa, przy k = 1 przebiega równomiernie, a przy k > 1 rośnie. Równanie modelu: $N_n = N_0k^n$
- Stan podkrytyczny: k < 1, reakcja wygasa.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Podstawiamy: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Okres reaktora z neutronami opóźnionymi.

Input: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s];`

`mode=kinetics)`

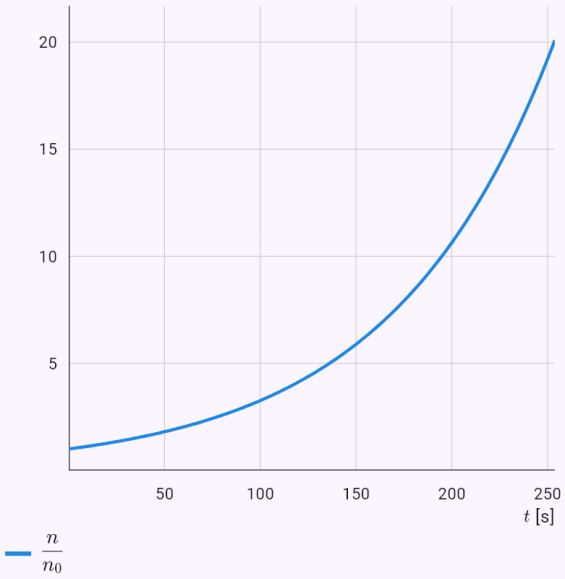
Wynik

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Kroki

- Szukane T; dane
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- Moc reaktora zmienia się wykładniczo z okresem T = ℓ/(k − 1). Neutrony opóźnione wydłużają średni czas pokolenia około tysiąc razy i właśnie dzięki temu reaktor da się sterować. Równanie modelu:
  $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \dfrac{\ell}{k-1}$
- Reaktywność: $\rho = \dfrac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Podstawiamy: $T_p = \dfrac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Średni czas pokolenia z neutronami opóźnionymi: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Podstawiamy: $T = \dfrac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Bez neutronów opóźnionych okres wynosiłby ułamek sekundy. Dzięki nim pręty sterujące mają czas reagować na zmiany mocy.
- Moc rośnie z tym okresem.

Wykres



Jak wielkości zmieniają się w czasie.

Promień kulistego rdzenia grafitowego.

Input: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite;`

`shape=sphere)`

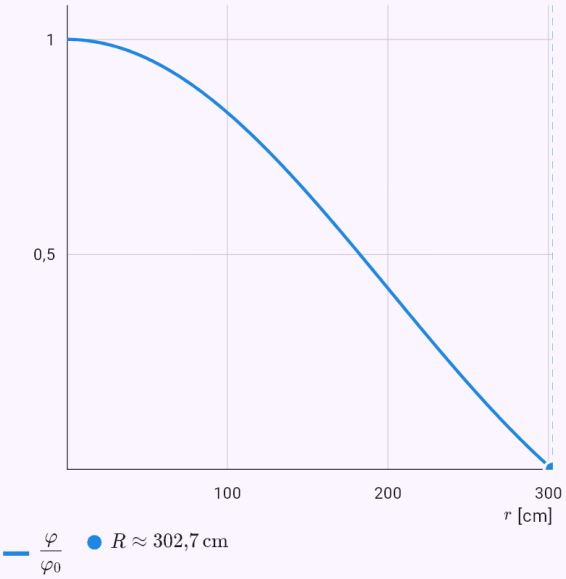
Wynik

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane R; dane: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- W jednogrupowym modelu dyfuzyjnym kształt strumienia neutronów musi spełniać $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0$. Rozmiar rdzenia reaktora wynika z tego, że strumień spada na brzegu do zera. To zagadnienie własne, przeznaczone dla moderowanych siatek reaktorów energetycznych. Równanie modelu:
  $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Parametr geometryczny (buckling):
  $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Równanie z symetrią sferyczną: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Podstawienie:
  $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Warunek brzegowy: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Podstawiamy: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Jednogrupowy model dyfuzyjny bez reflektora: rzeczywiste reaktory mają reflektor i dlatego są mniejsze. Ogólny kształt prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego.
- Przeliczamy jednostki: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Krawędź sześciennego rdzenia grafitowego.

Input: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite;`

shape=cube)

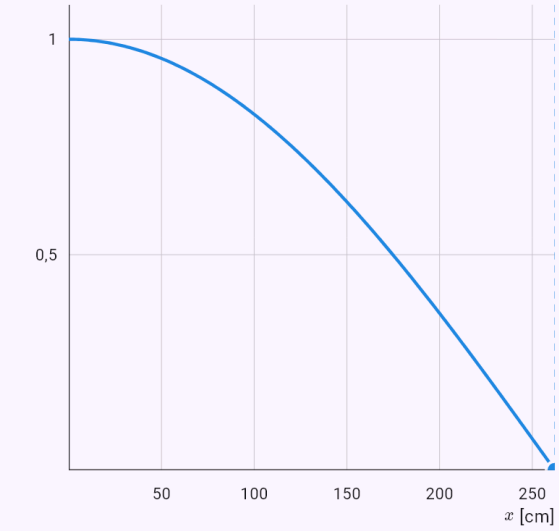
Wynik

$$a \approx 524{,}3\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Szukane a; dane: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- W jednogrupowym modelu dyfuzyjnym kształt strumienia neutronów musi spełniać $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0$. Rozmiar rdzenia reaktora wynika z tego, że strumień spada na brzegu do zera. To zagadnienie własne, przeznaczone dla moderowanych siatek reaktorów energetycznych. Równanie modelu:
  $$\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$
- Parametr geometryczny (buckling):
  $$B^2 = \frac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$$
- Rozdzielenie zmiennych w x, y, z
  $$\varphi = \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$
- Podstawiamy
  $$a = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\mathrm{cm}$$
- Jednogrupowy model dyfuzyjny bez reflektora: rzeczywiste reaktory mają reflektor i dlatego są mniejsze. Ogólny kształt prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Pręt miedziany o temperaturze 100 °C z końcami w 20 °C – środek po 10 minutach.

Input: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC]; Te=20[degC];`

x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)

Wynik

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

Kroki

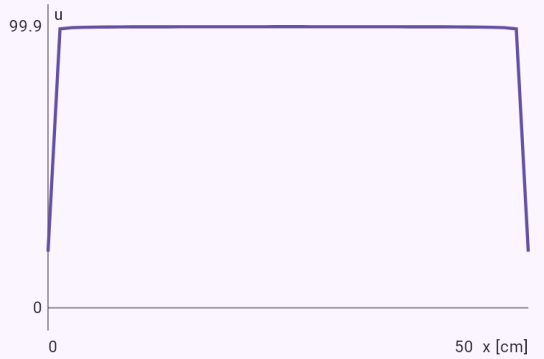
- Szukane T; dane
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e = $
- Przeliczamy jednostki
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- Temperatura w pręcie spełnia równanie przewodnictwa T_t = α·T_xx; dyfuzyjność cieplna α = λ/(ρc) mówi, jak szybko temperatura się wyrównuje. Na początku pręt ma wszędzie temperaturę T_0; od t = 0 jego końce są utrzymywane w T_e (albo jeden koniec jest izolowany). Rozwiązaniem metodą rozdzielenia zmiennych jest szereg Fouriera; każdy wyraz zanika wykładniczo, pierwszy najwolniej, ze stałą czasową τ. Oba końce są utrzymywane w T_e; środek pręta najdłużej zachowuje temperaturę. Równanie modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych (szereg Fouriera)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Stała czasowa najwolniejszego wyrazu
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$$

- Suma szeregu w punkcie: $S \approx 0{,}07967$
- Podstawiamy:
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0 min

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Pręt stalowy z jednym końcem izolowanym – po jakim czasie zostanie 5 % różnicy temperatur.

Input: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC]; Te=20[degC];`

p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)

Wynik

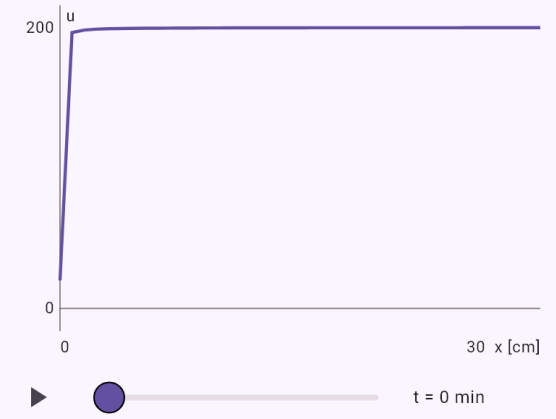
$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

Kroki

- Szukane t; dane
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Przeliczamy jednostki
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- Temperatura w pręcie spełnia równanie przewodnictwa T_t = α·T_xx; dyfuzyjność cieplna α = λ/(ρc) mówi, jak szybko temperatura się wyrównuje. Na początku pręt ma wszędzie temperaturę T₀; od t = 0 jego końce są utrzymywane w T_e (albo jeden koniec jest izolowany). Rozwiązaniem metodą rozdzielenia zmiennych jest szereg Fouriera; każdy wyraz zanika wykładniczo, pierwszy najwolniej, ze stałą czasową τ. Koniec x = 0 jest utrzymywany w T_e, a koniec x = L jest izolowany (nie przechodzi przez niego ciepło) – pręt zachowuje się jak połowa pręta dwa razy dłuższego; izolowany koniec najdłużej zachowuje temperaturę. Równanie modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych (szereg Fouriera)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -$
- Stała czasowa najwolniejszego wyrazu
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- Podstawiamy: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- Izolowany koniec jest najcieplejszy. Po pewnym czasie dominuje pierwszy wyraz szeregu, więc wystarczy jego zanik; dokładny czas wynika z całego szeregu.
- Przeliczamy jednostki: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Płyta miedziana 30 × 20 cm od 100 °C z krawędziami w 20 °C – temperatura w środku po 2 minutach.

Input: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)

Wynik

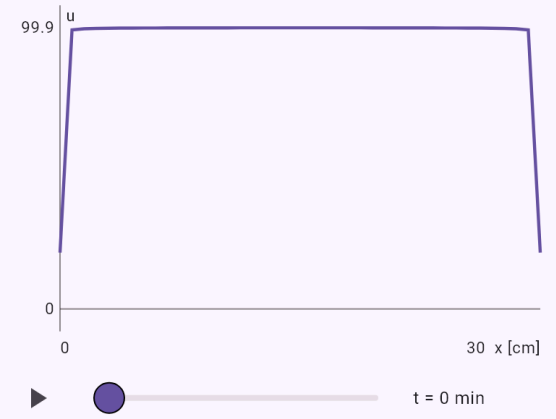
$$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

Kroki

- Szukane T; dane
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Przeliczamy jednostki
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- Temperatura w prostokątnej płycie a × b spełnia równanie przewodnictwa T_t = α(T_xx + T_yy). Płyta ma na początku wszędzie temperaturę T_0, a od t = 0 jej krawędzie są utrzymywane w T_e. Zagadnienie rozdziela się na dwa pręty: pozostała część różnicy temperatur jest iloczynem szeregów dla pręta długości a i pręta długości b – dlatego płyta stygnie szybciej niż każdy z prętów. Środek najdłużej zachowuje temperaturę.
  Równanie modelu
  $$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$$
- Rozdzielenie na dwa pręty – iloczyn dwóch szeregów Fouriera
  $$\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$$
- Stała czasowa najwolniejszego wyrazu
  $$\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Sumy obu szeregów w punkcie:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Podstawiamy
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$
- Wykres pokazuje temperaturę wzdłuż linii: $y = 10\,\mathrm{cm}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Płyta betonowa z jedną krawędzią izolowaną – po ilu godzinach zostanie 5 % różnicy temperatur.

Input: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Wynik

$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

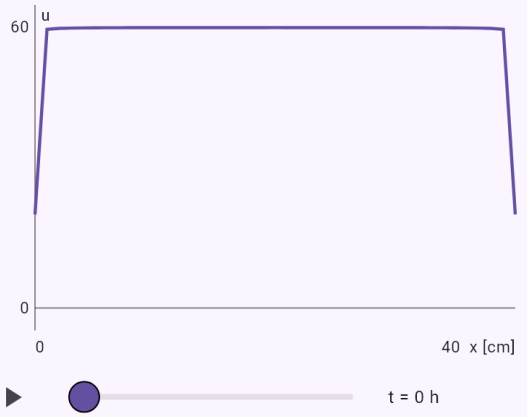
Kroki

- Szukane t; dane
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Przeliczamy jednostki
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- Temperatura w prostokątnej płycie a × b spełnia równanie przewodnictwa T_t = α(T_xx + T_yy). Płyta ma na początku wszędzie temperaturę T_0, a od t = 0 trzy krawędzie są utrzymywane w T_e, podczas gdy krawędź y = b jest izolowana (nie przechodzi przez nią ciepło). Zagadnienie rozdziela się na dwa pręty; izolowana krawędź działa jak oś symetrii płyty dwa razy wyższej. Środek izolowanej krawędzi najdłużej zachowuje temperaturę. Równanie modelu
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Rozdzielenie na dwa pręty – iloczyn dwóch szeregów Fouriera
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Stała czasowa najwolniejszego wyrazu
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Podstawiamy: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$

- Środek izolowanej krawędzi jest najcieplejszy. Po pewnym czasie dominuje iloczyn pierwszych wyrazów obu szeregów (16/π²)·e^(−t/τ), więc wystarczy jego zanik; dokładny czas wynika z całego szeregu.
- Wykres pokazuje temperaturę wzdłuż linii: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Wysoka struna E gitary – częstotliwość podstawowa.

Input: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

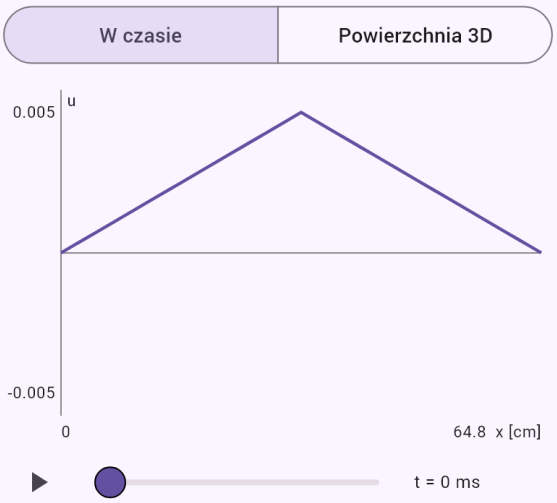
Wynik

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Kroki

- Szukane f_1; dane:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Przeliczamy jednostki
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Napięta struna z zamocowanymi końcami spełnia równanie falowe u_tt = c²·u_xx; prędkość fali c = √(F/μ) wynika z naciągu F i gęstości liniowej μ. Rozdzielenie zmiennych daje fale stojące sin(nπx/L) o częstotliwościach f_n = n·c/(2L). Szarpnięta struna ma kształt trójkąta – rozwija się go w szereg Fouriera, a każda harmoniczna drga z własną częstotliwością. Równanie modelu
  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$
- Prędkość fali: $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Mody struny (fale stojące)
  $X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$
- Podstawiamy: $f_1 = \frac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Wyższe częstotliwości są całkowitymi wielokrotnościami podstawowej (harmoniczne) – dlatego struna ma wyraźną wysokość dźwięku.

Wykres



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Szarpnięta struna – wychylenie w środku po 1 ms.

Input: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

x=32.4[cm]; t=1[ms])

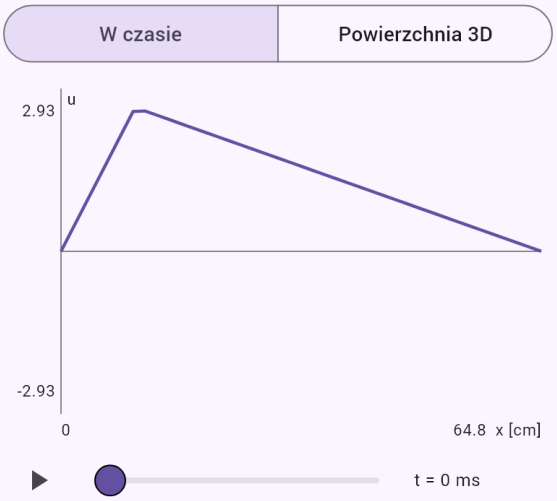
Wynik

$$u \approx -1{,}774\,\mathrm{mm}$$

Kroki

- Szukane u; dane
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}, \quad p = 10\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Napięta struna z zamocowanymi końcami spełnia równanie falowe u_tt = c²·u_xx; prędkość fali c = √(F/μ) wynika z naciągu F i gęstości liniowej μ. Rozdzielenie zmiennych daje fale stojące sin(nπx/L) o częstotliwościach f_n = n·c/(2L). Szarpnięta struna ma kształt trójkąta – rozwija się go w szereg Fouriera, a każda harmoniczna drga z własną częstotliwością. Równanie modelu
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Prędkość fali: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Mody struny (fale stojące)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Struna szarpnięta – szereg Fouriera
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Podstawiamy: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\mathrm{m}$
- Po jednym okresie kształt struny wraca:
  $T = \dfrac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\mathrm{s}$
- Przeliczamy jednostki: $u \approx -0{,}001774\,\mathrm{m} = -1{,}774\,\mathrm{mm}$

Wykres



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Bęben – częstotliwość modu (1, 1) z jedną średnicą węzłową.

Input: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

```
n=1[one])
```

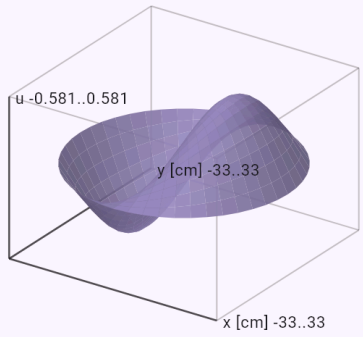
Wynik

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Kroki

- Szukane f_{mn}; dane
  $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Przeliczamy jednostki: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Kołowa membrana zamocowana na brzegu (naciąg bębna) spełnia równanie falowe u_tt = c²·Δu z prędkością c = √(T/σ). We współrzędnych biegunowych zmienne się rozdzielają: część kątowa to cos(mφ), radialna funkcja Bessela J_m(kr). Warunek na brzegu J_m(ka) = 0 daje k = j_mn/a, gdzie j_mn to n-ty pierwiastek J_m, oraz częstotliwości f_mn = j_mn·c/(2πa). Mod (m, n) ma m średnic węzłowych i n − 1 okręgów węzłowych. Równanie modelu
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a, \varphi, t) = 0$$
- Prędkość fali w membranie:
  $$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$
- Rozdzielenie we współrzędnych biegunowych – równanie Bessela
  $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- Brzeg membrany jest zamocowany:
  $$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$
- Podstawiamy: $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Wyższe mody nie są całkowitymi wielokrotnościami podstawowego. Dlatego bęben nie ma tak wyraźnej wysokości dźwięku jak struna.
  $$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Zasięg rzutu w próżni.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Wynik

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

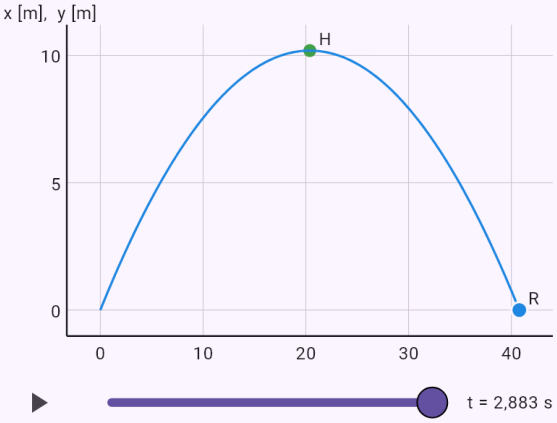
Kroki

- Szukane R; dane: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45^\circ$
- Bez oporu powietrza ruch rozkłada się na dwa niezależne: jednostajny w poziomie i jednostajnie przyspieszony w pionie. Tor jest parabolą, a każda wartość ma dokładny wzór. Równanie modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Czas lotu
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $R = v_{0x} T$
- Podstawiamy: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Przy równych wysokościach wyrzutu i lądowania obowiązują wzory szkolne
  $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
  $$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
  $$T = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

- Największy zasięg jest przy 45°; kąty α i 90° − α dają ten sam zasięg.

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Prędkość lądowania rzutu z wysokości.

Input: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

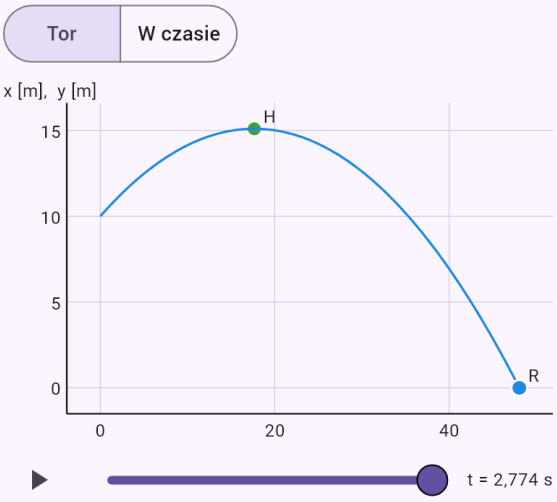
Wynik

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane v_k; dane:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Bez oporu powietrza ruch rozkłada się na dwa niezależne: jednostajny w poziomie i jednostajnie przyspieszony w pionie. Tor jest parabolą, a każda wartość ma dokładny wzór. Równanie modelu:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 20\cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Podstawiamy
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Wynika to z zasady zachowania energii mechanicznej i nie zależy od kąta.

Wykres



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Dwa kąty wyrzutu dla odległości 200 m.

Input: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Wynik

$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

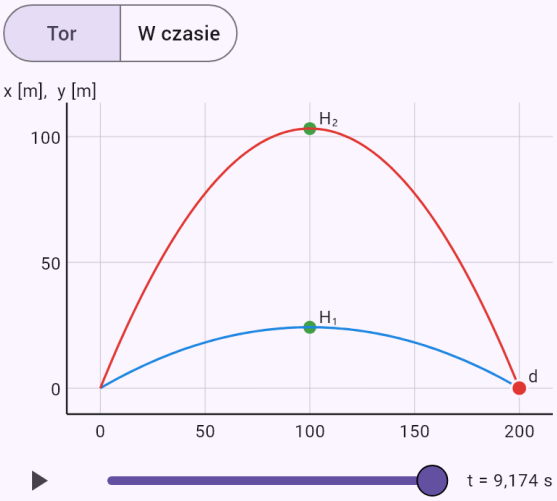
$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

Kroki

- Szukane α; dane: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- Odległość i wysokość celu podstawia się do równania toru. Z u = tg α staje się ono równaniem kwadratowym, zwykle o dwóch pierwiastkach: tor płaski i stromy.
  Równanie modelu
  $$h_k = h_0 + d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$$
- Równanie kwadratowe dla tg α
  $u = \mathrm{tg}\,\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$
  $$a = \frac{gd^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81 \cdot (200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$$
  $$c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$$
- Wyróżnik:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4 \cdot 78{,}48 \cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Pierwiastki: $u_{1,2} = \dfrac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Rozwiązanie
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Rozwiązanie
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$

- Na płaskim terenie oba kąty sumują się do 90°.

Wykres



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Zasięg piłki nożnej z oporem powietrza, w porównaniu z próżnią.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Wynik

$$R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane R; dane

  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ś

- Przeliczamy jednostki

  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$

- Na ciało działa grawitacja i opór powietrza, przeciwny do jego prędkości względem powietrza, więc do równań wchodzi też wiatr. Składowe prędkości są sprzężone i nie ma rozwiązania dokładnego, więc układ rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Równanie modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$

- Składowe prędkości wyrzutu

  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$

- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):

  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$

- Prędkość graniczna spadku swobodnego:

  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$

- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:

  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$

- Układ sześciu równań dla x, y, z i składowych prędkości rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; liczba kroków: $N = 1807$

- Przebieg lotu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Kluczowe wartości

  $H \approx 6{,}534\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$

- Ten sam rzut w próżni

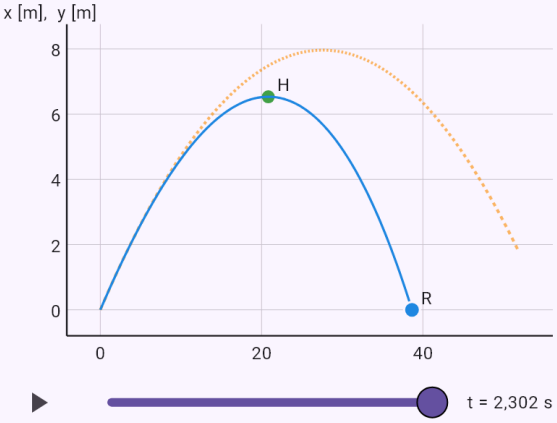
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$

- Zasięg w powietrzu jako część zasięgu w próżni:

  $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Wykres

Tor | W czasie



Linia ciągła to tor w powietrzu, przerywana tor w próżni. Osie mają różne skale.

Znos boczny piłki na wietrze, z widokiem z boku i z góry.

Input: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Wynik

$$z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane z; dane
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ś
- Przeliczamy jednostki
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Na ciało działa grawitacja i opór powietrza, przeciwny do jego prędkości względem powietrza, więc do równań wchodzi też wiatr. Składowe prędkości są sprzężone i nie ma rozwiązania dokładnego, więc układ rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Równanie modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Prędkość graniczna spadku swobodnego:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- Układ sześciu równań dla x, y, z i składowych prędkości rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; liczba kroków: $N = 1804$
- Przebieg lotu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

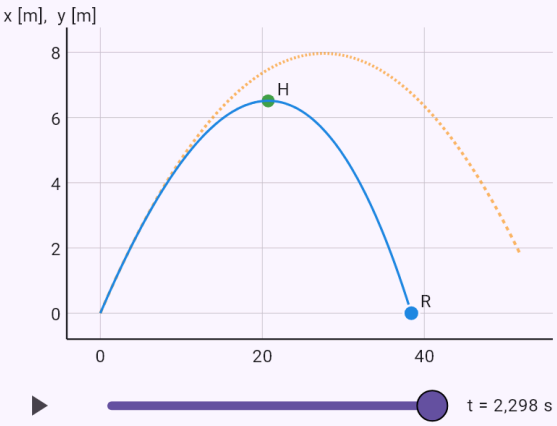
- Kluczowe wartości

$H \approx 6{,}51\,\mathrm{m}$
$T \approx 2{,}298\,\mathrm{s}$
$R \approx 38{,}4\,\mathrm{m}$
$v_k \approx 16{,}89\,\mathrm{m/s}$
$\varphi \approx 38{,}29^\circ$
$z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

- Ten sam rzut w próżni
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Zasięg w powietrzu jako część zasięgu w próżni:
  $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Wpływ wiatru: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\mathrm{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

Wykres

Widok z boku | Widok z góry | W czasie



Linia ciągła to tor w powietrzu, przerywana tor w próżni. Osie mają różne skale.

Sportowy karabinek małokalibrowy: prędkość na końcu lotu, krzywa G1.

Input: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Wynik

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane v_k; dane
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Przeliczamy jednostki
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Na ciało działa grawitacja i opór powietrza, przeciwny do jego prędkości względem powietrza, więc do równań wchodzi też wiatr. Składowe prędkości są sprzężone i nie ma rozwiązania dokładnego, więc układ rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Równanie modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Liczba Macha i współczynnik oporu przy wyrzucie:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Prędkość graniczna spadku swobodnego:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Układ sześciu równań dla x, y, z i składowych prędkości rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; liczba kroków: $N = 73$
- Przebieg lotu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

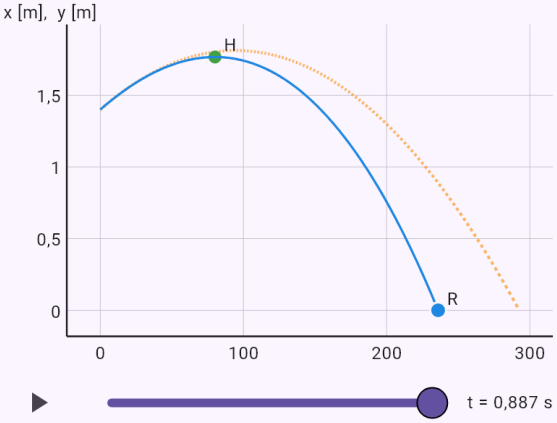
- Kluczowe wartości

$H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
$T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
$R \approx 236\,\mathrm{m}$
$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
$\varphi \approx 1{,}394^\circ$

- Ten sam rzut w próżni
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Zasięg w powietrzu jako część zasięgu w próżni:
  $\frac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Współczynnik oporu pochodzi z przybliżonej krzywej według liczby Macha; dla pocisku z krzywej G1 razy współczynnik kształtu. Pierwszeństwo mają tabele producenta. Znos wirującego pocisku nie jest uwzględniony.

Wykres

Tor | W czasie



Linia ciągła to tor w powietrzu, przerywana tor w próżni. Osie mają różne skale.

Sztucer myśliwski: zasięg z gęstością powietrza według wysokości.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

`cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)`

Wynik

$$R \approx 2365\,\mathrm{m}$$

Kroki

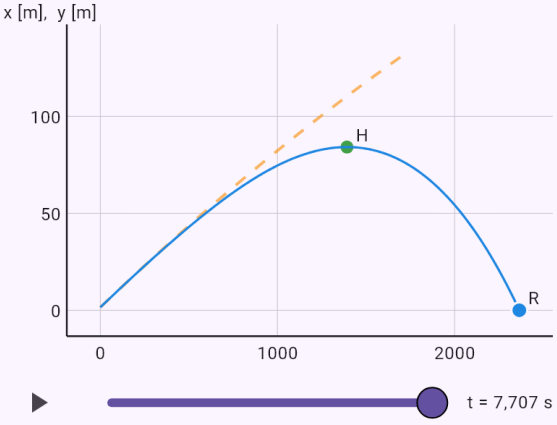
- Szukane R; dane
  $v_0 = 860\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad m = 9{,}72\,\mathrm{g},$
- Przeliczamy jednostki
  $m = 9{,}72\,\mathrm{g} = 0{,}00972\,\mathrm{kg}, \quad S = 48{,}1\,\mathrm{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Na ciało działa grawitacja i opór powietrza, przeciwny do jego prędkości względem powietrza, więc do równań wchodzi też wiatr. Składowe prędkości są sprzężone i nie ma rozwiązania dokładnego, więc układ rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Równanie modelu: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Gęstość powietrza według atmosfery wzorcowej:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\mathrm{kg/m^3}$
- Liczba Macha i współczynnik oporu przy wyrzucie:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Prędkość graniczna spadku swobodnego:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Układ sześciu równań dla x, y, z i składowych prędkości rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; liczba kroków: $N = 335$
- Przebieg lotu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Kluczowe wartości
  $H \approx 84{,}15\,\mathrm{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2365\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Ten sam rzut w próżni
  $R_v \approx 13\,110\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\mathrm{s}$
- Zasięg w powietrzu jako część zasięgu w próżni:
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Współczynnik oporu pochodzi z przybliżonej krzywej według liczby Macha; dla pocisku z krzywej G1 razy współczynnik kształtu. Pierwszeństwo mają tabele producenta. Znos wirującego pocisku nie jest uwzględniony.
- W trakcie lotu prędkość spadła poniżej prędkości dźwięku; w tym obszarze współczynnik oporu zmienia się najbardziej.

Wykres

Tor | W czasie



Linia ciągła to tor w powietrzu, przerywana tor w próżni. Osie mają różne skale.

Kula armatnia z fizyki szkolnej: odchylenie z powodu siły Coriolisa.

Input: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Wynik

$$z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$$

Kroki

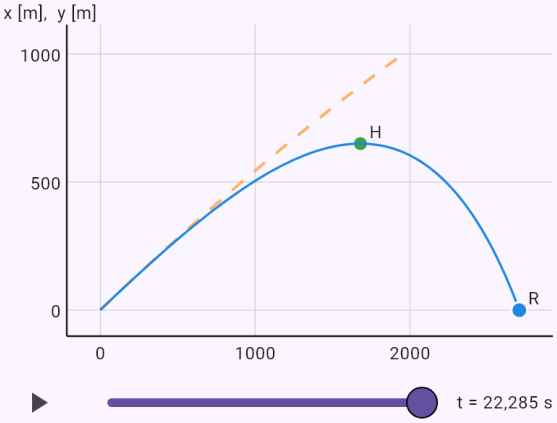
- Szukane z; dane
  $v_0 = 439\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad h_0 = 1\,\mathrm{m}, \quad m = 5580\,\mathrm{g},$
- Przeliczamy jednostki
  $m = 5580\,\mathrm{g} = 5{,}58\,\mathrm{kg}, \quad S = 10\,200\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0102\,\mathrm{m^2}$
- Na ciało działa grawitacja i opór powietrza, przeciwny do jego prędkości względem powietrza, więc do równań wchodzi też wiatr. Składowe prędkości są sprzężone i nie ma rozwiązania dokładnego, więc układ rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu. Równanie modelu
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Składowe prędkości wyrzutu
  $v_{0x} = 439\cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 439\sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Liczba Macha i współczynnik oporu przy wyrzucie:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\mathrm{kg/m}$
- Prędkość graniczna spadku swobodnego:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\mathrm{m/s}$
- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Prędkość kątowa Ziemi (siła Coriolisa):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
- Układ sześciu równań dla x, y, z i składowych prędkości rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; liczba kroków: $N = 1023$
- Przebieg lotu

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Kluczowe wartości
  $H \approx 650{,}1\,\mathrm{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2706\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Ten sam rzut w próżni
  $R_v \approx 17\,020\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 2457\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\mathrm{s}$
- Zasięg w powietrzu jako część zasięgu w próżni:
  $\frac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Wpływ siły Coriolisa
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Współczynnik oporu pochodzi z przybliżonej krzywej według liczby Macha; dla pocisku z krzywej G1 razy współczynnik kształtu. Pierwszeństwo mają tabele producenta. Znos wirującego pocisku nie jest uwzględniony.
- W trakcie lotu prędkość spadła poniżej prędkości dźwięku; w tym obszarze współczynnik oporu zmienia się najbardziej.

Wykres

Widok z boku | Widok z góry | W czasie



Linia ciągła to tor w powietrzu, przerywana tor w próżni. Osie mają różne skale.

Płaski i stromy kąt dla piłki z oporem powietrza.

Input: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic; projectile=ball;`

cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)

Wynik

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

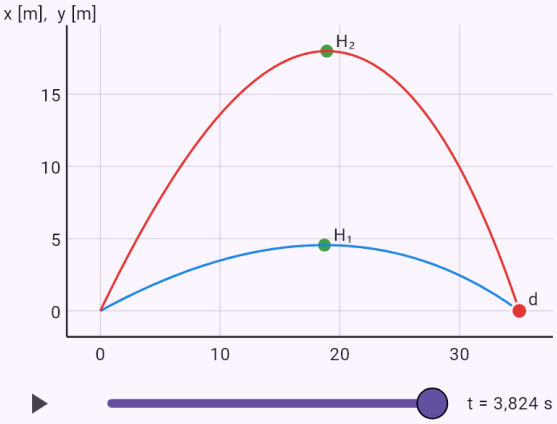
$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

Kroki

- Szukane α; dane
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Przeliczamy jednostki
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm^2} = 0{,}038\,\mathrm{m^2}$
- Z oporem powietrza nie ma wzoru. Obliczenie próbuje różnych kątów i patrzy, jak wysoko ciało leci w odległości celu. Kąty, przy których przechodzi dokładnie przez cel, znajduje bisekcja. Równanie modelu:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Stała oporu powietrza (współczynnik oporu):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Prędkość graniczna spadku swobodnego:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Opór powietrza wobec grawitacji przy wyrzucie:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Kąty znaleziono metodą strzałów: bisekcją wysokości w odległości d, czyli szukając pierwiastka
  $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Rozwiązanie
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Rozwiązanie
  $\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Prędkość przeciągnięcia lekkiego samolotu.

Input: model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

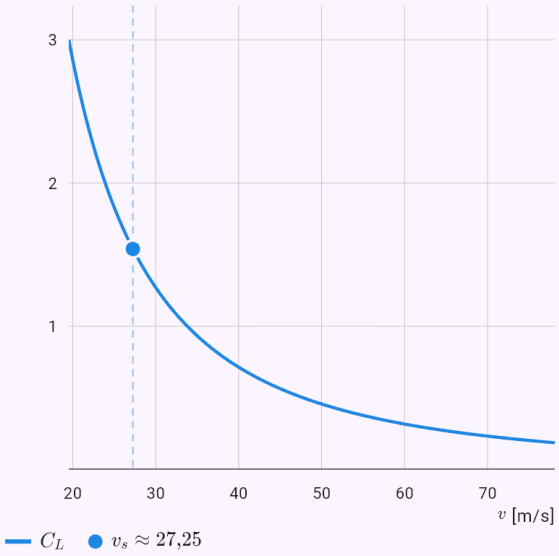
Wynik

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Kroki

- Szukane v_s; dane
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- W locie poziomym siła nośna równa się ciężarowi, a ciąg oporowi. Opór ma dwie części: opór szkodliwy rośnie z kwadratem prędkości, a opór indukowany z nią maleje, więc istnieje prędkość najmniejszego oporu. Równanie modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Ciężar samolotu: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Podstawiamy
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Przeliczamy jednostki: $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Opór w locie poziomym i wykres oporu szkodliwego i indukowanego.

Input: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

Wynik

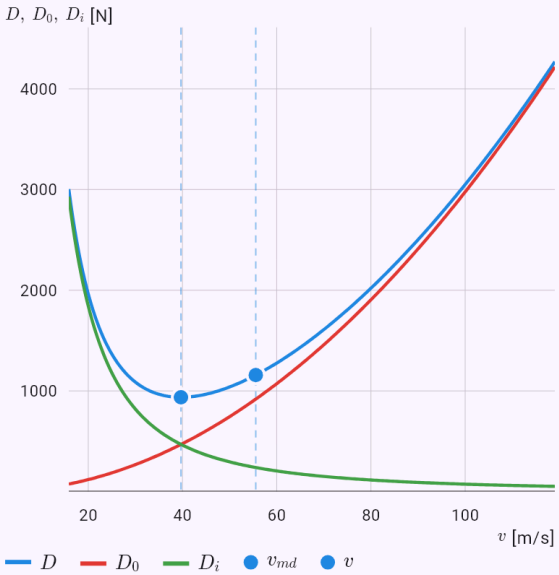
$$D \approx 1{,}158\,\mathrm{kN}$$

Kroki

- Szukane D; dane
  $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 1$
- Przeliczamy jednostki: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- W locie poziomym siła nośna równa się ciężarowi, a ciąg oporowi. Opór ma dwie części: opór szkodliwy rośnie z kwadratem prędkości, a opór indukowany z nią maleje, więc istnieje prędkość najmniejszego oporu. Równanie modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Ciężar samolotu: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Wydłużenie: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Współczynnik oporu indukowanego (współczynnik Oswalda e, biegunowa):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Ciśnienie dynamiczne
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\mathrm{Pa}$
- Potrzebny współczynnik siły nośnej:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Opór szkodliwy i indukowany:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\mathrm{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\mathrm{N}$
- Doskonałość przy tej prędkości: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $D = D_0 + D_i$

- Podstawiamy: $D \approx 1158\,\mathrm{N}$
- Przeliczamy jednostki: $D \approx 1158\,\mathrm{N} = 1{,}158\,\mathrm{kN}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Ekranoplan KM: ile oporu oszczędza efekt przypowierzchniowy.

Input: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

aircraft=km; air=constant; ground=on)

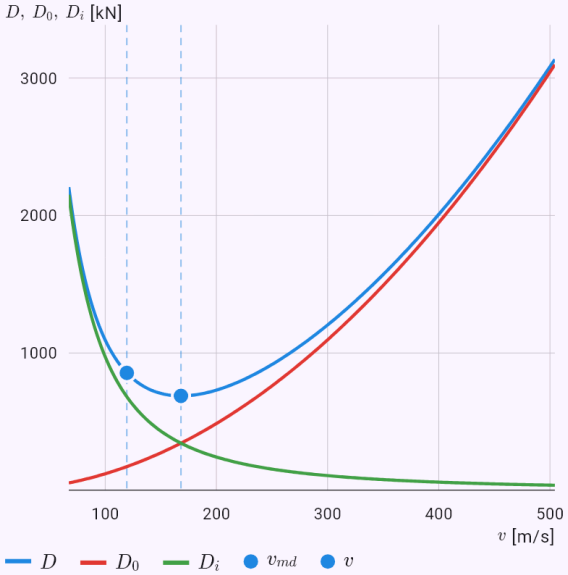
Wynik

$$D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$$

Kroki

- Szukane D; dane
  $v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad S = 662{,}5\,\mathrm{m^2}, \quad b$
- Przeliczamy jednostki: $v = 430\,\mathrm{km/h} = 119{,}4\,\mathrm{m/s}$
- W locie poziomym siła nośna równa się ciężarowi, a ciąg oporowi. Opór ma dwie części: opór szkodliwy rośnie z kwadratem prędkości, a opór indukowany z nią maleje, więc istnieje prędkość najmniejszego oporu. Równanie modelu:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Ciężar samolotu: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\mathrm{kN}$
- Wydłużenie: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Współczynnik oporu indukowanego (współczynnik Oswalda e, biegunowa):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- Efekt przypowierzchniowy zmniejsza opór indukowany
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Przyrost siły nośnej przy tym samym kącie natarcia (oszacowanie z teorii linii nośnej)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Empiryczny wzór McCormicka dla zwykłych skrzydeł. Dla skrzydła o małym wydłużeniu z płytami brzegowymi, jak w ekranoplanie, rzeczywisty efekt jest silniejszy.
- Ciśnienie dynamiczne
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\mathrm{Pa}$
- Potrzebny współczynnik siły nośnej:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Opór szkodliwy i indukowany
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\mathrm{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\mathrm{kN}$
- Doskonałość przy tej prędkości: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Opór zaoszczędzony dzięki efektowi przypowierzchniowemu:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\mathrm{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $D = D_0 + D_i$
- Podstawiamy: $D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$
- Przeliczamy jednostki: $D \approx 855\,600\,\mathrm{N} = 855{,}6\,\mathrm{kN}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Rozbieg lekkiego samolotu z wykresem prędkości i drogi.

Input: model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Wynik

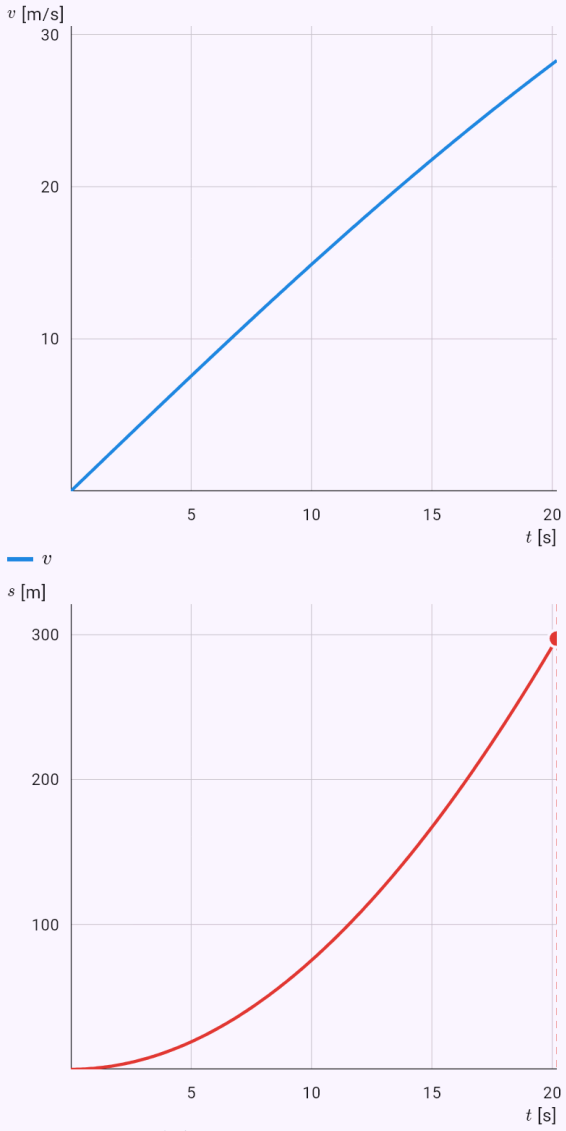
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane s_g; dane
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Przeliczamy jednostki: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- Samolot przyspiesza od spoczynku do prędkości oderwania pod działaniem ciągu, oporu powietrza i tarcia tocznego, które maleje wraz ze wzrostem siły nośnej. Równanie rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu; ciąg jest stałą średnią. Równanie modelu
  $m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = v$
- Ciężar samolotu: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Prędkość przeciągnięcia
  $v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$
- Prędkość oderwania względem powietrza:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Wydłużenie: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Współczynnik oporu indukowanego (współczynnik Oswalda e, biegunowa):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Współczynnik oporu na pasie:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Przyspieszenie na początku i na końcu
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$
- Równanie rozwiązano metodą Rungego-Kutty 4. rzędu, kroków: $N = 2172$
- Rozbieg szczegółowo

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Promień zakrętu przy przechyleniu 30°.

Input: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

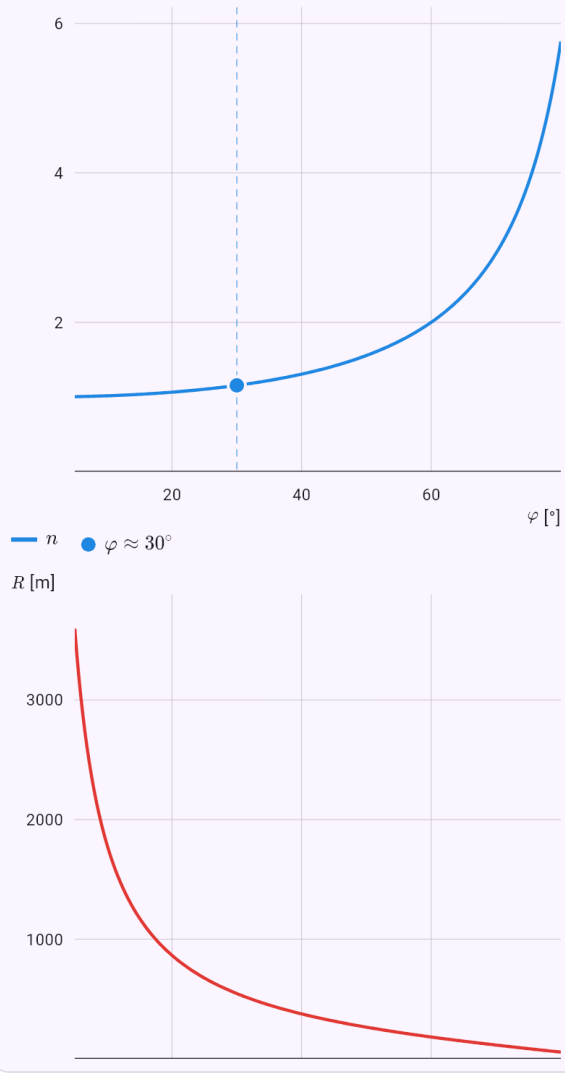
Wynik

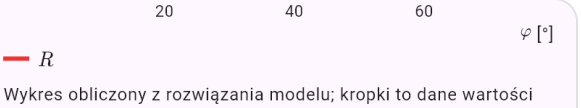
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane R; dane: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Przeliczamy jednostki: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- W zakręcie skoordynowanym pionowa część siły nośnej przenosi ciężar, a pozioma zakrzywia tor. Współczynnik obciążenia zależy tylko od przechylenia, promień także od prędkości. Równanie modelu:
  $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $R = \dfrac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}$
- Podstawiamy
  $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81 \cdot \mathrm{tg}\,30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

Wykres





Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Zasięg szybowca z wysokości 1000 m.

Input: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Wynik

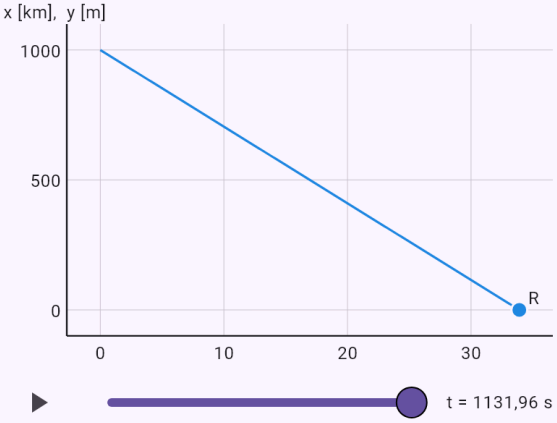
$$R \approx 33{,}91\,\mathrm{km}$$

Kroki

- Szukane R; dane
  $h = 1000\,\mathrm{m}, \quad m = 600\,\mathrm{kg}, \quad S = 17{,}95\,\mathrm{m}^2, \quad b = 17\,\mathrm{m}$
- Bez ciągu samolot opada po prostej, której nachylenie wyznacza stosunek siły nośnej do oporu. Zasięg z danej wysokości to wysokość razy doskonałość, największy przy prędkości najlepszego szybowania. Równanie modelu: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{D}{L} = \dfrac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \dfrac{v}{E}$
- Ciężar samolotu: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\mathrm{N}$
- Wydłużenie: $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Współczynnik oporu indukowanego (współczynnik Oswalda e, biegunowa):
  $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Współczynnik siły nośnej przy najlepszym szybowaniu:
  $C_L^* = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Prędkość najlepszego szybowania
  $v = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Największa doskonałość i najmniejszy opór
  $E_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Kąt szybowania: $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Zakładamy mały kąt szybowania, przy którym siła nośna praktycznie równa się ciężarowi, oraz stałą gęstość powietrza.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $R = hE$
- Podstawiamy: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\mathrm{m}$
- Przeliczamy jednostki: $R \approx 33\,910\,\mathrm{m} = 33{,}91\,\mathrm{km}$

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Apollo 13: przeciążenie przy wejściu pod kątem −6,20°.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km]; nlim=10[gn];`

gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])

Wynik

$$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$$

Kroki

- Szukane a_{max}; dane
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Jeden przelot przez atmosferę od wysokości wejścia h_0 (domyślnie 122 km) z danym kątem toru lotu γ_0 i stałym kątem przechylenia σ do wysokości h_k (otwarcie spadochronów, lot ślizgowy dla promu). Szczytowe przeciążenie porównujemy ze wzorem Allena i Eggersa dla wejścia balistycznego. Strumień ciepła w punkcie spiętrzenia wynika ze wzoru Suttona–Gravesa q = k·√(ρ/R_n)·v³, a temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej εσT⁴ = q. Równanie modelu
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Pole przekroju czołowego i współczynnik balistyczny
  $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Gęstość powietrza według atmosfery wzorcowej (izotermicznej powyżej 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Składowa pionowa siły nośnej przy kącie przechylenia σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Przechwycenie: statek zszedł do wysokości h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Szczytowe przeciążenie (numerycznie)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Wejście balistyczne bez siły nośnej dałoby według Allena i Eggersa dużo więcej – siła nośna zmniejsza przeciążenie
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$$
- Szczytowy strumień ciepła w punkcie spiętrzenia (Sutton–Graves) i całkowite ciepło na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$$
- Uproszczenia: Ziemia jest kulista i się nie obraca, C_D i L/D są stałe, a przechylenie σ jest takie samo przez cały lot (rzeczywiste sterowanie je zmienia). Strumień ciepła jest tylko konwekcyjny; przy powrocie od Księżyca dochodzi promieniowanie świecącej warstwy uderzeniowej. Osłona ablacyjna odprowadza część ciepła przez odparowanie, więc temperatura równowagi radiacyjnej jest oszacowaniem z góry.

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Korytarz wejścia kapsuły Apollo przy powrocie od Księżyca.

Input: model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];

`nlim=10[gn])`

Wynik

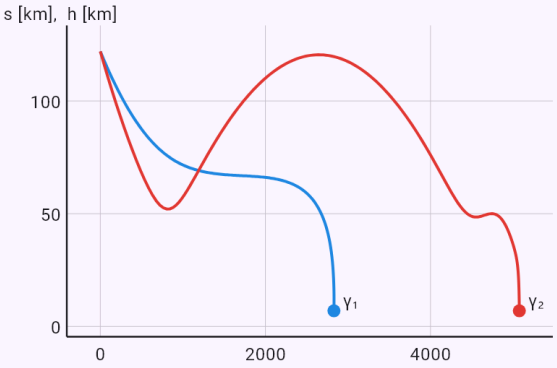
$$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$$
$$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$$
$$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$$

Kroki

- Szukane $\Delta\gamma$; dane
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Granice kąta wejścia bisekcją. Płaska granica to najpłaskie wejście, które z siłą nośną skierowaną w dół (σ = 180°) nie wzniesie się z powrotem nad wysokość wejścia; stroma granica to najbardziej strome wejście, które z siłą nośną w górę (σ = 0°) mieści się w danym przeciążeniu (i strumieniu ciepła, jeśli jest podany). Przy powrocie od Księżyca korytarz wychodzi szeroki tylko na około 2°. Apollo 13 (kwiecień 1970) wrócił po wybuchu zbiornika tlenu z modułem dowodzenia wyłączonym dla oszczędzania energii. Załoga korygowała tor ręcznym odpaleniem silnika modułu księżycowego, celując według Ziemi w celowniku okna, a ostatnia korekta mierzyła w środek korytarza. Planowany kąt wejścia wynosił −6,20°; komputer modułu dowodzenia włączono ponownie dopiero przed wejściem. Równanie modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Pole przekroju czołowego i współczynnik balistyczny
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Gęstość powietrza według atmosfery wzorcowej (izotermicznej powyżej 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Płaska granica korytarza (siła nośna w dół):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Stroma granica korytarza (siła nośna w górę):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Szerokość korytarza wejścia: $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Uproszczenia: Ziemia jest kulista i się nie obraca, C_D i L/D są stałe, a przechylenie σ jest takie samo przez cały lot (rzeczywiste sterowanie je zmienia). Strumień ciepła jest tylko konwekcyjny; przy powrocie od Księżyca dochodzi promieniowanie świecącej warstwy uderzeniowej. Osłona ablacyjna odprowadza część ciepła przez odparowanie, więc temperatura równowagi radiacyjnej jest oszacowaniem z góry.

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale.

Wostok: zejście balistyczne bez siły nośnej i 8–9 g.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg]; sigma=0[deg];`

`hk=7[km]; nlim=10[gn])`

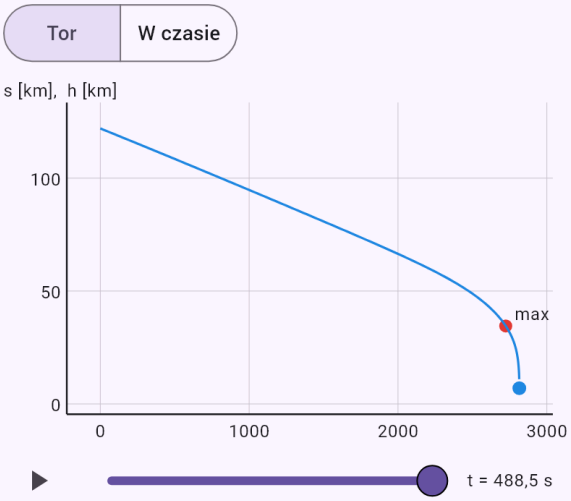
Wynik

$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

Kroki

- Szukane a_{max}; dane
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Jeden przelot przez atmosferę od wysokości wejścia h_0 (domyślnie 122 km) z danym kątem toru lotu γ_0 i stałym kątem przechylenia σ do wysokości h_k (otwarcie spadochronów, lot ślizgowy dla promu). Szczytowe przeciążenie porównujemy ze wzorem Allena i Eggersa dla wejścia balistycznego. Strumień ciepła w punkcie spiętrzenia wynika ze wzoru Suttona–Gravesa q = k·√(ρ/R_n)·v³, a temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej εσT⁴ = q. Równanie modelu
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Pole przekroju czołowego i współczynnik balistyczny
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Gęstość powietrza według atmosfery wzorcowej (izotermicznej powyżej 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Przechwycenie: statek zszedł do wysokości h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Szczytowe przeciążenie (numerycznie)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Sprawdzenie wzorem Allena i Eggersa dla wejścia balistycznego (bez grawitacji, atmosfera wykładnicza o wysokości skali H)
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$
- Szczytowy strumień ciepła w punkcie spiętrzenia (Sutton–Graves) i całkowite ciepło na m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Uproszczenia: Ziemia jest kulista i się nie obraca, C_D i L/D są stałe, a przechylenie σ jest takie samo przez cały lot (rzeczywiste sterowanie je zmienia). Strumień ciepła jest tylko konwekcyjny; przy powrocie od Księżyca dochodzi promieniowanie świecącej warstwy uderzeniowej. Osłona ablacyjna odprowadza część ciepła przez odparowanie, więc temperatura równowagi radiacyjnej jest oszacowaniem z góry.

Wykres



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Space Shuttle: temperatura osłony z równowagi radiacyjnej.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];`

```
sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])
```

Wynik

$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Kroki

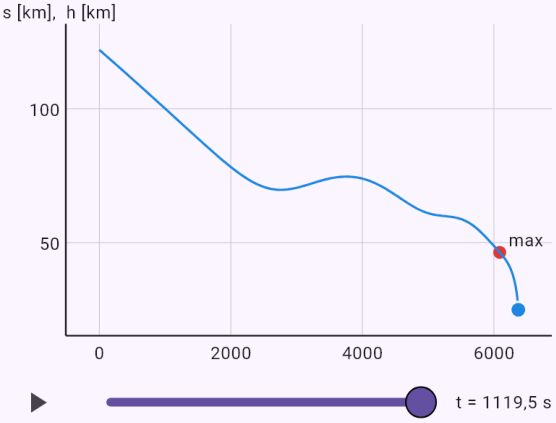
- Szukane T_{max}; dane
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Jeden przelot przez atmosferę od wysokości wejścia h_0 (domyślnie 122 km) z danym kątem toru lotu γ_0 i stałym kątem przechylenia σ do wysokości h_k (otwarcie spadochronów, lot ślizgowy dla promu). Szczytowe przeciążenie porównujemy ze wzorem Allena i Eggersa dla wejścia balistycznego. Strumień ciepła w punkcie spiętrzenia wynika ze wzoru Suttona–Gravesa q = k·√(ρ/R_n)·v³, a temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej εσT⁴ = q. Równanie modelu
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Space Shuttle wchodził pod kątem natarcia około 40° i pozbywał się nadmiaru siły nośnej przechylaniem wokół osi podłużnej (do około 70°); lądował jako szybowiec bez napędu. Wartości ustawienia są przybliżone. Jak skrajnie obciążona jest osłona termiczna, pokazała utrata Columbii (misja STS-107). Przy starcie 16 stycznia 2003 r. kawałek pianki izolacyjnej ze zbiornika zewnętrznego przebił panel ze wzmocnionego kompozytu węgiel-węgiel (RCC) na krawędzi natarcia lewego skrzydła. Krawędzie natarcia nagrzewają się podczas wejścia do około 1650 °C (około 3000 °F). 1 lutego 2003 r. gorąca plazma wniknęła przez wyrwę do skrzydła, konstrukcja się stopiła, a orbiter rozpadł się nad Teksasem; zginęło wszystkich siedmioro członków załogi.
- Pole przekroju czołowego i współczynnik balistyczny
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Gęstość powietrza według atmosfery wzorcowej (izotermicznej powyżej 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Składowa pionowa siły nośnej przy kącie przechylenia σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Przechwycenie: statek zszedł do wysokości h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Szczytowe przeciążenie (numerycznie)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Wejście balistyczne bez siły nośnej dałoby według Allena i Eggersa dużo więcej – siła nośna zmniejsza przeciążenie

$$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$

- Szczytowy strumień ciepła w punkcie spiętrzenia (Sutton–Graves) i całkowite ciepło na m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Temperatura powierzchni osłony z równowagi radiacyjnej (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Uproszczenia: Ziemia jest kulista i się nie obraca, C_D i L/D są stałe, a przechylenie σ jest takie samo przez cały lot (rzeczywiste sterowanie je zmienia). Strumień ciepła jest tylko konwekcyjny; przy powrocie od Księżyca dochodzi promieniowanie świecącej warstwy uderzeniowej. Osłona ablacyjna odprowadza część ciepła przez odparowanie, więc temperatura równowagi radiacyjnej jest oszacowaniem z góry.

Wykres

Tor | W czasie



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Jaka część góry lodowej jest pod powierzchnią.

Input: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float; fluid=sea;`

`body=ice)`

Wynik

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Kroki

- Szukane φ; dane: $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Na ciało w płynie działa siła wyporu równa ciężarowi wypartego płynu. Ciało pływające jest zanurzone w stosunku gęstości. To samo prawo unosi balon w powietrzu. Równanie modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Podstawiamy: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Przeliczamy jednostki: $\varphi \approx 0{,}8946 \ = 89{,}46\,\%$

Co uniesie balon na gorące powietrze.

Input: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Wynik

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Kroki

- Szukane m_p; dane $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Na ciało w płynie działa siła wyporu równa ciężarowi wypartego płynu. Ciało pływające jest zanurzone w stosunku gęstości. To samo prawo unosi balon w powietrzu. Równanie modelu: $F_b = \rho_f V g$
- Masa, którą gaz może unieść $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $m_p = m_v - m_0$
- Podstawiamy: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

Ciśnienie na dnie Rowu Mariańskiego.

Input: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

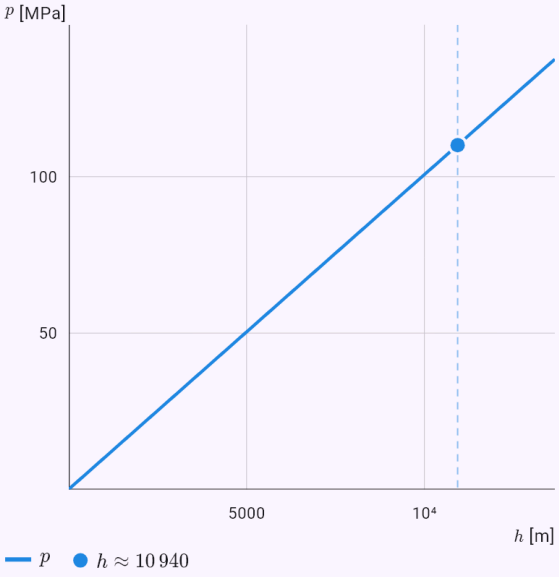
Wynik

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

Kroki

- Szukane p; dane: $h = 10\,940\,\text{m}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}^3$
- Ciśnienie rośnie liniowo z głębokością, o gęstość razy g razy głębokość. Na powierzchni dochodzi do niego ciśnienie atmosferyczne. Wodę traktujemy jako nieściśliwą. Równanie modelu: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Na dużej głębokości woda nieco się ściska, a jej gęstość zmienia się też z temperaturą i zasoleniem; wynik może się różnić o około 2 %.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Podstawiamy:
  $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\,\text{MPa}$
- Ile razy ciśnienie atmosferyczne: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Przeliczamy jednostki: $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\,\text{Pa} = 1101\,\text{bar}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Ciśnienie w przewężeniu rury.

Input: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa];`

`rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Wynik

$$p_2 \approx 170{,}1\,\mathrm{kPa}$$

Kroki

- Szukane p_2; dane
  $A_1 = 20\,\mathrm{cm}^2, \quad A_2 = 5\,\mathrm{cm}^2, \quad v_1 = 2\,\mathrm{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Przeliczamy jednostki
  $A_1 = 20\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}002\,\mathrm{m}^2, \quad A_2 = 5\,\mathrm{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2,$
- Wzdłuż linii prądu cieczy idealnej suma ciśnienia oraz energii kinetycznej i potencjalnej jednostki objętości jest stała. W przewężeniu prędkość rośnie, a ciśnienie maleje; jeśli osiągnie ciśnienie pary nasyconej, zaczyna się kawitacja. Równanie modelu:
  $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \mathrm{const}$
- Równanie ciągłości: $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \frac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\,\mathrm{m/s}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Podstawiamy
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - (}$
- Przeliczamy jednostki: $p_2 \approx 170\,100\,\mathrm{Pa} = 170{,}1\,\mathrm{kPa}$

Prędkość graniczna kamienia w wodzie i wykres rozruchu.

Input: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

`nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

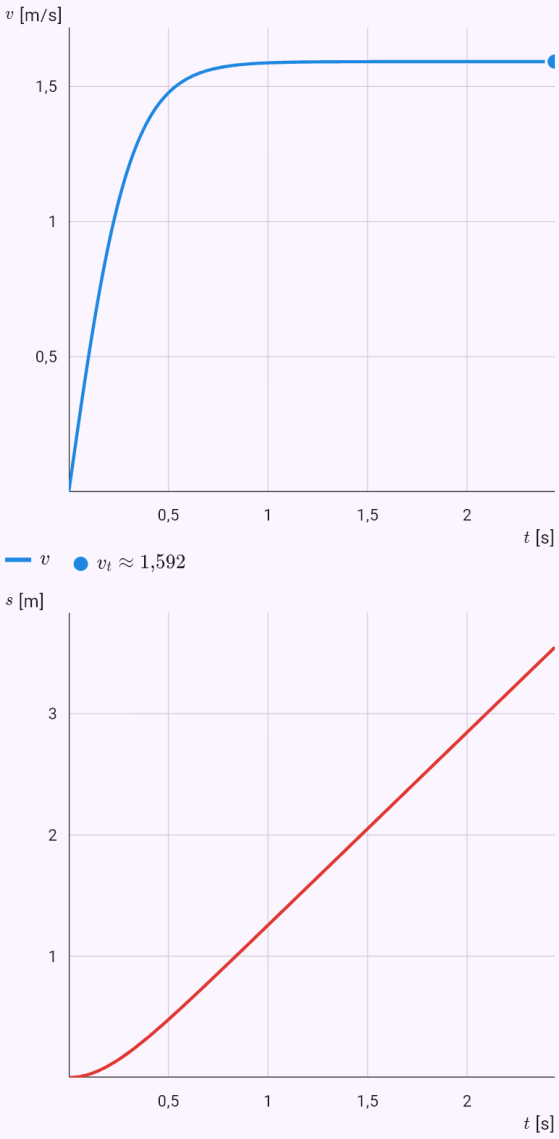
Wynik

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Kroki

- Szukane v_t; dane
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Przeliczamy jednostki: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Ciało opada lub się wynurza, aż opór zrównoważy różnicę jego ciężaru i wyporu, osiągając prędkość graniczną. Ruszając, musi też wprawić w ruch otaczającą wodę, co opisuje masa dodana. Równanie rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Równanie modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objętość, przekrój i masa kuli
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- Wypadkowa siła działa w dół, ciało opada:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Masa z masą dodaną:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Liczba Reynoldsa i współczynnik oporu przy prędkości granicznej: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Prędkość graniczna: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Stała czasowa rozruchu z masą dodaną i bez niej
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- Masa dodana zmienia tylko rozruch. Prędkość graniczna od niej nie zależy, bo w ruchu ustalonym nic nie przyspiesza.
- Podstawiamy: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Jak długo pęcherzyk wznosi się z głębokości 10 m.

Input: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)

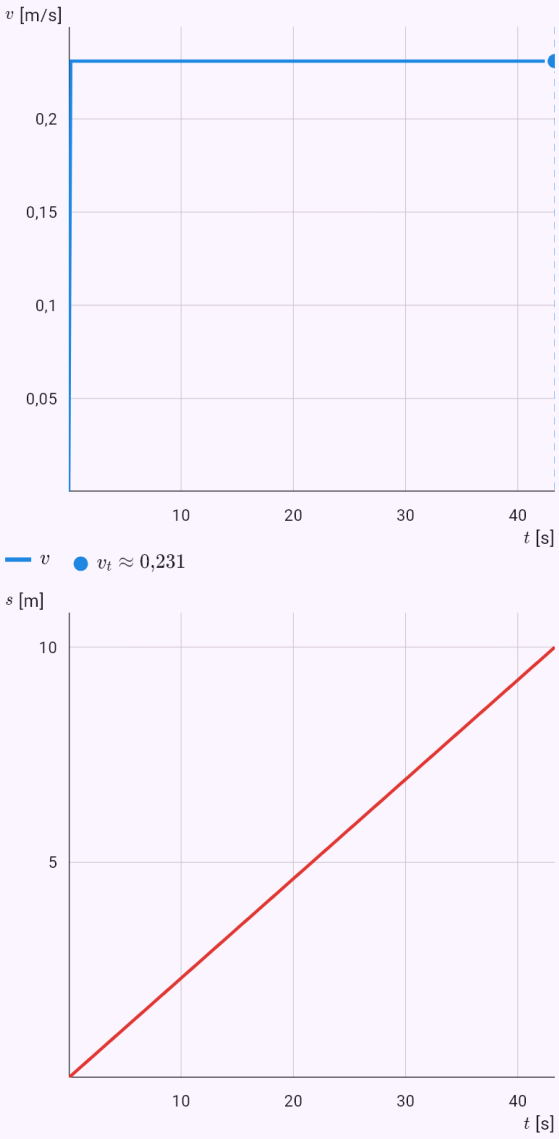
Wynik

$$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$$

Kroki

- Szukane t; dane
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Przeliczamy jednostki: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Ciało opada lub się wynurza, aż opór zrównoważy różnicę jego ciężaru i wyporu, osiągając prędkość graniczną. Ruszając, musi też wprawić w ruch otaczającą wodę, co opisuje masa dodana. Równanie rozwiązuje się numerycznie metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Równanie modelu:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Objętość, przekrój i masa kuli
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- Wypadkowa siła działa w górę, ciało się wynurza:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Masa z masą dodaną:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Liczba Eötvösa mówi, jak bardzo pęcherzyk się odkształca: $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Liczba Reynoldsa i współczynnik oporu przy prędkości granicznej: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Prędkość graniczna: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Stała czasowa rozruchu z masą dodaną i bez niej
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- Masa dodana zmienia tylko rozruch. Prędkość graniczna od niej nie zależy, bo w ruchu ustalonym nic nie przyspiesza.
- Korelacja Tomiyamy obowiązuje dla zwykłej, lekko zanieczyszczonej wody. W czystej wodzie małe pęcherzyki wznoszą się szybciej, a duże się rozpadają lub chybotają.
- Równanie rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu, liczba kroków: $N = 3363$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Opadnięcie strzały z kuszy na 5 m.

Input: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)

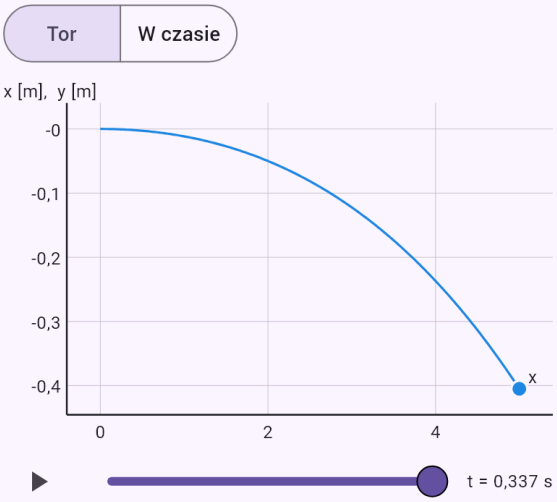
Wynik

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Szukane Δy; dane
  $x = 5\,\mathrm{m}, \quad v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\mathrm{kg}, \quad d = 7\,\mathrm{mm},$
- Przeliczamy jednostki: $d = 7\,\mathrm{mm} = 0{,}007\,\mathrm{m}$
- Kusza do łowiectwa podwodnego: smukłą strzałę hamuje głównie tarcie wzdłuż jej powierzchni, więc traci prędkość w ciągu kilku metrów. Opadanie wynika z ciężaru pomniejszonego o wypór. Równania rozwiązuje się numerycznie. Równanie modelu
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Współczynnik tarcia według linii ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Współczynnik oporu strzały: grot i tarcie wzdłuż niej:
  $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Droga, na której prędkość spada do około 37 %, i przyspieszenie w dół w wodzie
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\mathrm{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\mathrm{m/}$
- Równanie rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu, liczba kroków: $N = 1538$
- Model pomija opór linki, który dodatkowo skraca rzeczywisty zasięg. Masa dodana strzały wzdłuż jej osi jest pomijalna.
- Przeliczamy jednostki: $\Delta y \approx 0{,}405\,\mathrm{m} = 40{,}5\,\mathrm{cm}$

Wykres



Osie mają różne skale. Suwakiem lub przyciskiem odtwarzania śledź lot w czasie.

Zasięg drona podwodnego na baterii.

Input: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

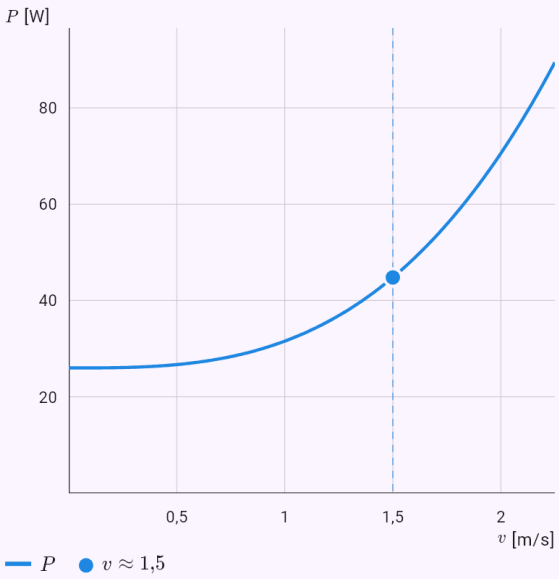
Wynik

$$R \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$$

Kroki

- Szukane R; dane
  $v = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\mathrm{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Przeliczamy jednostki: $E = 1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$
- W ruchu ustalonym ciąg równa się oporowi. Opór rośnie z kwadratem prędkości, a moc z jej sześcianem. Przy zasilaniu z baterii liczy się też stałe obciążenie przyrządów, więc istnieje prędkość największego zasięgu. Równanie modelu:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Współczynnik K oporu D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\mathrm{kg/m}$
- Potrzebna moc: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\mathrm{W}$
- Prędkość największego zasięgu:
  $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\mathrm{m/s}$
- Czas pracy na baterii: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\mathrm{h}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $R = v t_E$
- Podstawiamy: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$
- Przeliczamy jednostki: $R \approx 120\,500\,\mathrm{m} = 120{,}5\,\mathrm{km}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Historyczny okręt podwodny: moc rośnie z sześcianem prędkości.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

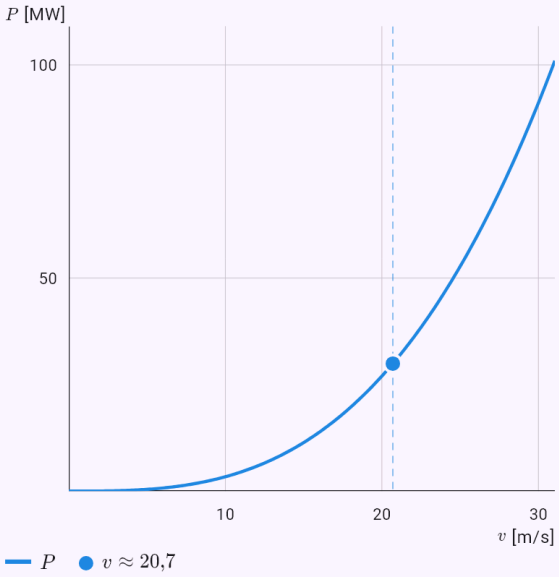
Wynik

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Kroki

- Szukane P; dane
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- W ruchu ustalonym ciąg równa się oporowi. Opór rośnie z kwadratem prędkości, a moc z jej sześcianem. Przy zasilaniu z baterii liczy się też stałe obciążenie przyrządów, więc istnieje prędkość największego zasięgu. Równanie modelu:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Współczynnik K oporu D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h$
- Podstawiamy: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- Moc rośnie z sześcianem prędkości: dwa razy większa prędkość wymaga ośmiokrotnej mocy:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Przeliczamy jednostki: $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Ile wody musi przyjąć okręt podwodny, by unosić się w toni.

Input: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Wynik

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Kroki

- Szukane m_b; dane
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Zanurzona jednostka unosi się w toni, gdy jej masa z balastem równa się masie wypartej wody. Wypuszczenie lub wpuszczenie wody sprawia, że się wynurza lub zanurza. Przedmuchanie zbiornika na głębokości wymaga więcej powietrza, bo musi pokonać otaczające ciśnienie. Równanie modelu: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Podstawiamy:
  $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Objętość wody balastowej: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- Przeliczamy jednostki: $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

Moc kontenerowca z oporem rozłożonym na części.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

Wynik

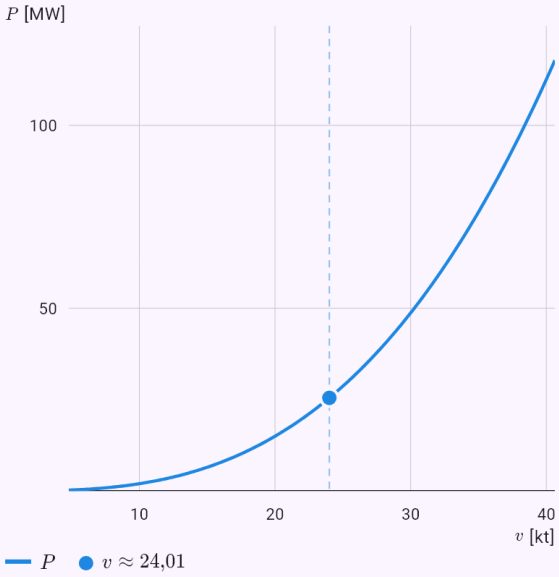
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Kroki

- Szukane P; dane
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- Zanurzenie wynika z wyporności, a stateczność poprzeczna z metacentrum. Opór ma część tarciową według linii ITTC-57 i część resztkową z danego współczynnika. Liczba Froude'a i prędkość kadłubowa pokazują, kiedy fale wzdłuż kadłuba zaczynają gwałtownie zwiększać opór. Równanie modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Liczby Froude'a i Reynoldsa
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Współczynnik tarcia według linii ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Opór tarcia i opór resztkowy
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Współczynnik resztkowy jest przyjęty jako stały. W rzeczywistości zmienia się z prędkością i pochodzi z badań modelowych.
- Opór całkowity: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Podstawiamy: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Przeliczamy jednostki: $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Wysokość metacentryczna: stateczność statku.

Input: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Wynik

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane GM; dane
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- Zanurzenie wynika z wyporności, a stateczność poprzeczna z metacentrum. Opór ma część tarciową według linii ITTC-57 i część resztkową z danego współczynnika. Liczba Froude'a i prędkość kadłubowa pokazują, kiedy fale wzdłuż kadłuba zaczynają gwałtownie zwiększać opór. Równanie modelu
  $Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Objętość wypartej wody i pole wodnicy (współczynnik pełnotliwości)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Wysokość środka wyporu nad stępką (wzór Morrisha)
  $KB = T - \frac{1}{3}\left(\frac{T}{2} + \frac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Wysokość metacentrum nad środkiem wyporu:
  $BM = \frac{I}{\nabla} = \frac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $GM = KB + BM - KG$
- Podstawiamy:
  $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Metacentrum jest nad środkiem ciężkości: statek jest stateczny poprzecznie.
- Obowiązuje dla małych kątów przechyłu. Moment wodnicy to oszacowanie z jej współczynnika, dokładne dla prostokąta; dla rzeczywistego statku wynik jest tylko pierwszym oszacowaniem.

Statek 544 t płynący obok ekranoplanu KM lecącego tuż nad wodą.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

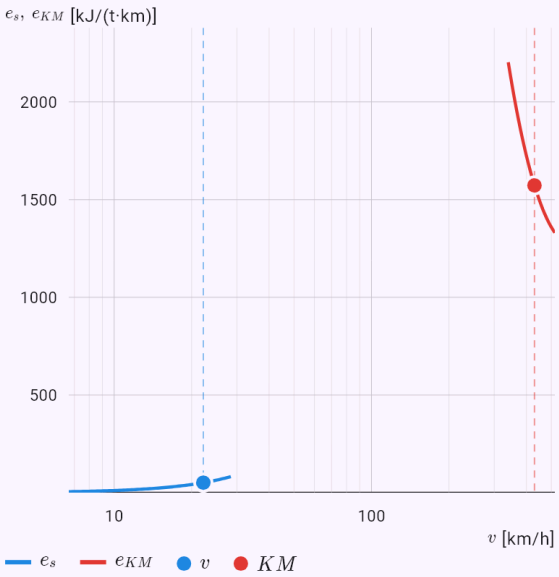
Wynik

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Kroki

- Szukane P; dane
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- Zanurzenie wynika z wyporności, a stateczność poprzeczna z metacentrum. Opór ma część tarciową według linii ITTC-57 i część resztkową z danego współczynnika. Liczba Froude'a i prędkość kadłubowa pokazują, kiedy fale wzdłuż kadłuba zaczynają gwałtownie zwiększać opór. Równanie modelu
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Liczby Froude'a i Reynoldsa
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Współczynnik tarcia według linii ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Opór tarcia i opór resztkowy
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Współczynnik resztkowy jest przyjęty jako stały. W rzeczywistości zmienia się z prędkością i pochodzi z badań modelowych.
- Ekranoplan KM w locie przelotowym (to samo obliczenie co w formularzu Samolot)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Praca przeciw oporowi na tonę i kilometr: statek i KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Ile razy więcej energii potrzebuje KM i ile razy jest szybszy: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM jest obliczany w efekcie przypowierzchniowym ze współczynnikiem McCormicka. Porównywana jest praca przeciw oporowi; pominięto sprawność silników, fale i pogodę.
- Opór całkowity: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Podstawiamy: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Przeliczamy jednostki: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Wykres



Oś pozioma jest logarytmiczna, bo prędkości różnią się wielokrotnie. Kropki to dana prędkość statku i prędkość przelotowa ekranoplanu.

Energia neutronu z D-T – podzielona według zasady zachowania pędu.

Input: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Wynik

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Kroki

- Energia jednej reakcji z mas atomowych. Przy dwóch produktach energia dzieli się zgodnie z zasadą zachowania pędu: lżejsza cząstka zabiera większą część. Równanie modelu: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reakcja: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \to {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Masy przed i po:
  $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Podstawiamy:
  $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Produkty rozlatują się z przeciwnymi pędami tej samej wielkości, więc ich energie kinetyczne są w odwrotnym stosunku ich mas.
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Podstawiamy:
  $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energia jądra helu: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Ile węgla zastępuje 1 g paliwa D-T.

Input: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Wynik

$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$

Kroki

- Szukane m_c; dane: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Przeliczamy jednostki: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Ile energii wyzwala dana ilość paliwa, w porównaniu z rozszczepieniem uranu-235 (około 200 MeV na jądro) i ze spalaniem węgla. Równanie modelu:
  $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reakcja: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energia jednej reakcji:
  $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Podstawiamy
  $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Podstawiamy: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Podstawiamy: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- Synteza nie ma masy krytycznej. Gdy coś zawiedzie, plazma stygnie i reakcja sama ustaje; reaktor nie może wymknąć się spod kontroli jak reaktor rozszczepieniowy.
- Przeliczamy jednostki: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Pik Gamowa cyklu p-p w jądrze Słońca.

Input: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one]; T=1.34[keV];`

```
mode=gamow; fusion=pp)
```

Wynik

$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

Kroki

- Szukane E_0; dane:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_BT = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- W rzeczywistości jądra przechodzą przez barierę tunelowo. Prawdopodobieństwo tunelowania e^(−√(E_G/E)) stromo rośnie z energią, podczas gdy szybkich jąder w rozkładzie Maxwella stromo ubywa. Ich iloczyn ma ostry pik Gamowa E_0, przy którym reakcje rzeczywiście zachodzą. Czynnik Gamowa przyjmujemy jako gotowy wzór, bo jego wyprowadzenie należy do mechaniki kwantowej. Równanie modelu

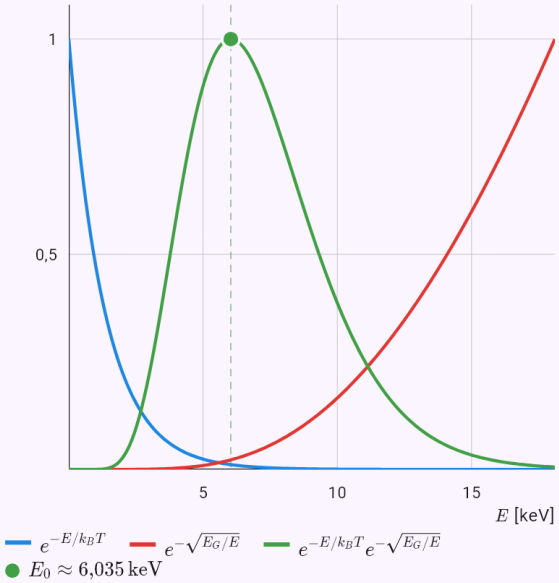
  $$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$
- Masa zredukowana

  $$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$
- Podstawiamy

  $$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$
- Podstawiamy

  $$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$
- Szerokość piku: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Położenie piku w wielokrotnościach k_BT: $\frac{E_0}{k_BT} \approx 4{,}503$
- Reakcje zachodzą głównie w wąskim paśmie energii wokół E_0, kilka razy większej niż średnia energia k_BT. Wykres pokazuje obie funkcje i ich iloczyn, każdą podzieloną przez jej maksimum.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Iloczyn potrójny z parametrami ITER, w porównaniu z warunkiem zapłonu.

Input: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s]; mode=lawson)`

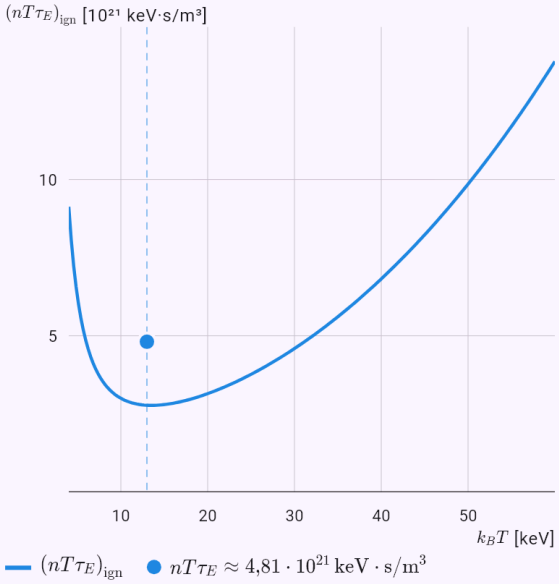
Wynik

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$$

Kroki

- Szukane $nT\tau_E$; dane
  $n = 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\,\mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\,\mathrm{s}$
- Kryterium Lawsona: plazma sama utrzymuje swoją temperaturę (zapłon), gdy grzanie cząstkami alfa z reakcji D-T pokrywa straty ciepła 3nk_BT/τ_E. Decyduje iloczyn potrójny gęstości n, temperatury T i czasu utrzymania energii τ_E. Jego minimum, około 3·10²¹ keV·s/m³, leży w pobliżu 14 keV. Równanie modelu
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Szybkość reakcji D-T (dopasowanie)
  $\langle\sigma v\rangle(13\,\mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$
- Podstawiamy
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12 \cdot (13)^2}{3520 \cdot 2{,}073 \cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s}$$
- Podstawiamy
  $nT\tau_E = 10^{20} \cdot 13 \cdot 3{,}7 \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$
- Iloczyn potrójny wystarcza do zapłonu: grzanie alfa pokrywa straty – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Najmniejszy potrzebny iloczyn potrójny, około 3·10²¹ keV·s/m³, leży w pobliżu 14 keV. Straty na promieniowanie hamowania są tu pominięte.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Szybkość reakcji D-T przy 10 keV jako całka metodą Simpsona.

Input: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Wynik

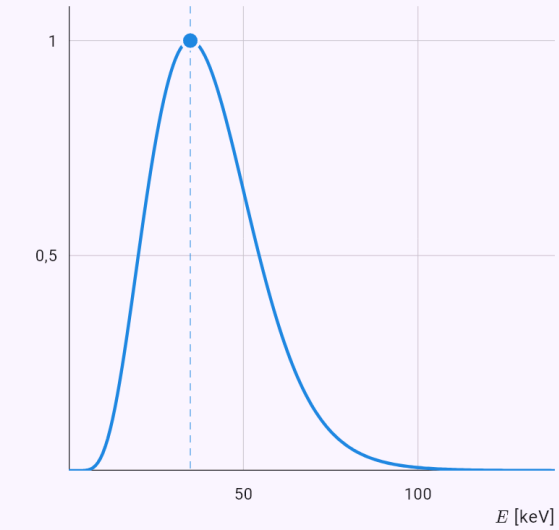
$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Kroki

- Szukane $\langle \sigma v \rangle$; dane: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- Szybkość reakcji ⟨σv⟩ to przekrój czynny σ(E) uśredniony po rozkładzie Maxwella prędkości. Liczymy ją jako całkę metodą Simpsona i porównujemy z opublikowanym dopasowaniem. Przekroje czynne pochodzą od Boscha i Hale'a (Nuclear Fusion, 1992). Równanie modelu
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$
- Reakcja: $^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} + n$
- Przekrój czynny (Bosch–Hale):
  $$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$$
- Metoda Simpsona: $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Całka
  $$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$
- Wartości w SI
  $$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2.$$
- Podstawiamy
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$
- Porównanie z dopasowaniem
  $$\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$$

- Funkcja podcałkowa liczy się głównie w okolicy piku Gamowa, więc wystarczy całkować do 40 k_BT. Różnica od dopasowania jest rzędu procenta.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Promień Larmora cząstki alfa z syntezy w polu 5 T.

Input: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T]; mode=larmor;`

`particle=alpha)`

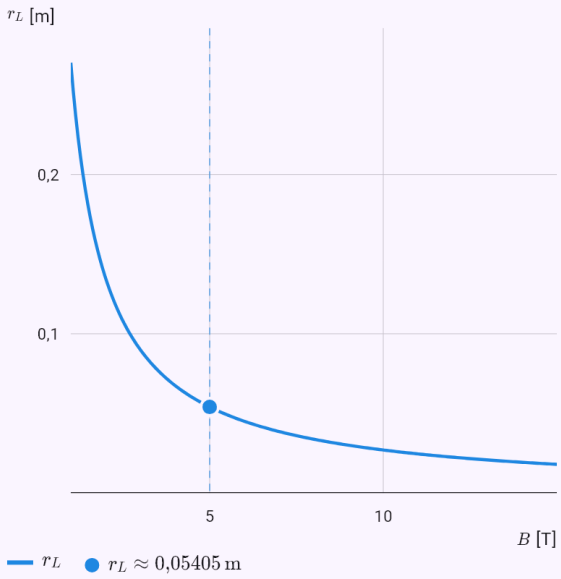
Wynik

$$r_L \approx 5{,}405\,\mathrm{cm}$$

Kroki

- Szukane r_L; dane:
  $m = 4{,}002\,\mathrm{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\mathrm{keV}, \quad B = 5\,\mathrm{T}$
- Cząstka naładowana w polu magnetycznym krąży wokół linii pola (promień Larmora), dlatego pole magnetyczne trzyma gorącą plazmę z dala od ścian. Obliczenie jest relatywistyczne; dla wolnych jonów γ ≈ 1. Równanie modelu: $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Masa: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Czynnik Lorentza i prędkość
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}04$
- Pęd
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$
- Podstawiamy
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\mathrm{m}$
- Jony w tokamaku krążą po promieniach od milimetrów do centymetrów, dlatego pole magnetyczne trzyma je z dala od ścian.
- Przeliczamy jednostki: $r_L \approx 0{,}05405\,\mathrm{m} = 5{,}405\,\mathrm{cm}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Czynnik Lorentza protonu w LHC.

Input: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Wynik

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

Kroki

- Szukane γ; dane:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Przeliczamy jednostki:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Z prędkości (jako ułamka c) lub energii kinetycznej oblicza γ, prędkość, energię całkowitą i pęd. Proton w LHC (6,8 TeV) jest wolniejszy od światła tylko o kilka metrów na sekundę. Równanie modelu
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Energia spoczynkowa: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Podstawiamy: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Prędkość: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- O ile wolniej niż światło:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Cząstka ultrarelatywistyczna: prawie cała jej energia jest kinetyczna, a prędkość różni się od c tylko nieznacznie.

Ile mionów z wysokości 15 km dociera do ziemi dzięki dylatacji czasu.

Input: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

Wynik

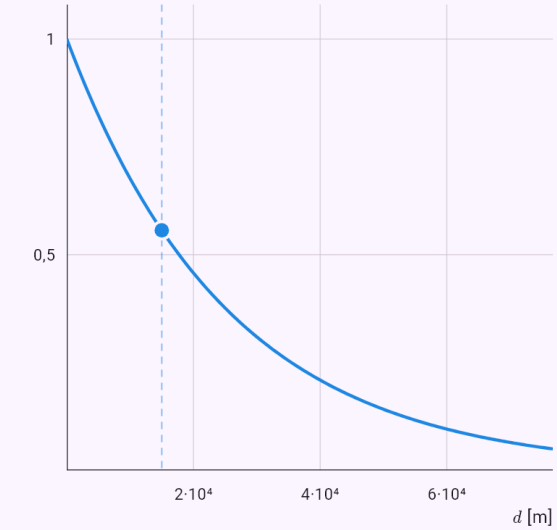
$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Kroki

- Szukane $\frac{N}{N_0}$; dane
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Przeliczamy jednostki
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Niestabilna cząstka rozpada się ze swoim własnym średnim czasem życia τ_0. W laboratorium jej czas płynie γ razy wolniej, więc doleci γ razy dalej. Bez dylatacji czasu miony powstałe 15 km wysoko w atmosferze prawie nie docierałyby do ziemi. Równanie modelu:
  $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Podstawiamy: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Prędkość: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Podstawiamy
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,1$
- Podstawiamy: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Część, która doleci bez dylatacji czasu:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- W układzie własnym cząstki czas nie zwalnia, ale odległość się skraca (skrócenie długości). Oba ujęcia dają tę samą liczbę rozpadów.

- Przeliczamy jednostki: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 = 55{,}64\,\%$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Energia zderzenia wiązki LHC z nieruchomą tarczą.

Input: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2]; mode=collision;`

machine=lhc)

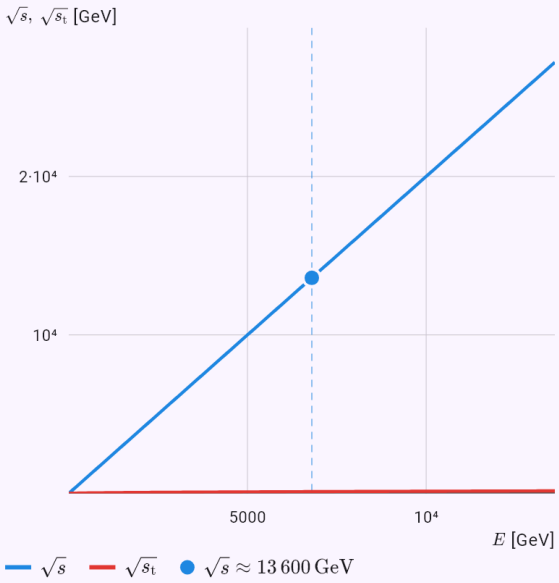
Wynik

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Kroki

- Szukane $\sqrt{s_t}$; dane:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- W przeciwbieżnych wiązkach cała energia obu cząstek idzie na zderzenie: √s = 2E. Wiązka skierowana na nieruchomą tarczę zużywa większość energii na ruch środka masy, a √s rośnie tylko z pierwiastkiem z E. Dlatego buduje się zderzacze. Równanie modelu:
  $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2(mc^2)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s to masa niezmiennicza układu: energia dostępna do wytwarzania nowych cząstek.
- Podstawiamy
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Przeciwbieżne wiązki: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Strata energii elektronu na obieg w LEP.

Input: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

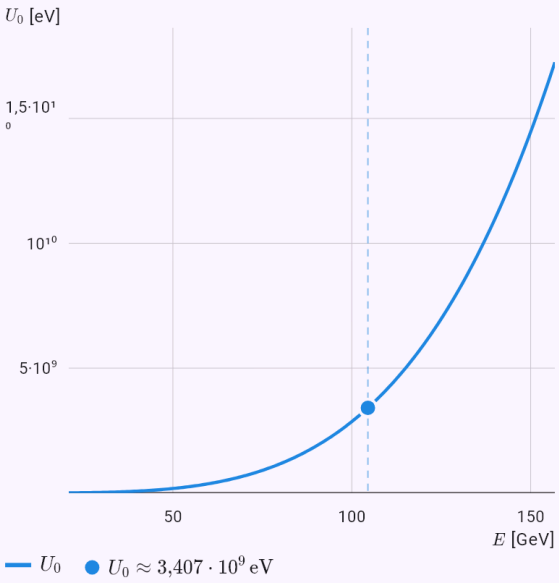
Wynik

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Kroki

- Szukane U_0; dane
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Przeliczamy jednostki: $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Cząstka naładowana na zakrzywionym torze promieniuje (promieniowanie synchrotronowe). Strata na jeden obieg rośnie z γ⁴, czyli przy tej samej energii jak 1/m⁴. Elektron traci 10¹³ razy więcej niż proton, dlatego LEP zatrzymał się na 104 GeV, a LHC przyspiesza protony. Równanie modelu: $U_0 = \dfrac{e^2\beta^3\gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Czynnik Lorentza: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Podstawiamy
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- W elektronowoltach: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\mathrm{eV}$
- Elektrony promieniują 10¹³ razy więcej niż protony o tej samej energii: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- Drugi rodzaj cząstek przy tej samej energii i promieniu: $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- Przeliczamy jednostki:
  $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

44. Statyka i wytrzymałość materiałów

Formularz Statyka (Zastosowania, dziedzina Technika) ma trzy tryby. Belka leży na osi x od 0 do L i jest podparta przegubem, podporą przesuwną lub utwierdzeniem; możesz ją obciążyć siłami pionowymi i ukośnymi, momentami i obciążeniem ciągłym – równomiernym, trójkątnym lub trapezowym. Kilka sił wpisuje się w jednym polu oddzielonych spacjami, ich położenia i kąty w tej samej kolejności. Przeguby wewnętrzne tworzą [[gerberBeam|belkę Gerbera]].

Kroki zaczynają się od [[freeBody|uwolnienia od więzów]]: reakcje zastępują podpory, a rząd równań równowagi pokazuje [[staticDeterminacy|statyczną wyznaczalność]]. Gdy belka jest statycznie niewyznaczalna lub niewłaściwie podparta, aplikacja to mówi ze stopniem niewyznaczalności. Równania rozwiązuje się po jednym – zawsze to, w którym została jedna niewiadoma (moment względem podpory, dla belki Gerbera najpierw część za przegubem) – a niewykorzystane równanie służy do sprawdzenia.

Aplikacja podaje siły wewnętrzne N, T i M przedziałami między charakterystycznymi punktami i znajduje największy moment zginający z [[schwedlerTheorem|twierdzenia Schwedlera]]: tam, gdzie siła tnąca jest zerowa lub ma skok. Pod szkicem belki z obciążeniami i reakcjami są wykresy N, T i M w tej samej skali długości.

Tryb Ciało na płaszczyźnie oblicza reakcje ciała danego punktami podpór i punktami przyłożenia sił – na przykład drabiny opartej o ścianę. Dla podpory przesuwnej wybierasz kierunek reakcji kątem β.

Charakterystyki przekroju to pole, [[centroid|środek ciężkości]], momenty bezwładności z [[parallelAxisTheorem|twierdzenia Steinera]], [[sectionModulus|wskaźniki wytrzymałości]], a dla przekroju niesymetrycznego także [[principalAxes|osie główne]] – dla prostokąta, rury, kształtowników T, I, U, L i przekroju złożonego z prostokątów i kół z otworami. Rysunek pokazuje przekrój w rzeczywistej skali ze środkiem ciężkości i osiami. Zaokrąglenia kształtowników walcowanych są pominięte.

Formularz Cysterna z cieczą oblicza częściowo napełnioną cysternę przy hamowaniu, przyspieszaniu i w zakręcie. Powierzchnia przechyla się prostopadle do wypadkowej grawitacji i siły bezwładności (tg θ = a/g), środek ciężkości cieczy się przesuwa, a z nim środek całości. Naciski osi to reakcje belki na dwóch podporach; w zakręcie aplikacja oblicza [[loadTransferRatio|przeniesienie obciążenia]] na koła zewnętrzne i prędkość krytyczną, przy której cysterna się przewraca – w porównaniu z ładunkiem sztywnym, także z częstością własną [[sloshing|chlupotania]]. Interaktywne demo jest na mathtrace.app w sekcji „Wypróbuj sam”.

Formularz Projekt belki porównuje trzy warianty belki zginanej: najlżejszy kształtownik znormalizowany z tablic (IPE, HEB, rury okrągłe i prostokątne), optymalny stały przekrój wybranego kształtu (prostokąt, koło, rura z ograniczoną smukłością ścianki) i [[uniformStrengthBeam|belkę o równej wytrzymałości]]. Pilnuje wytrzymałości, dopuszczalnego ugięcia L/n i ścinania na swobodnym końcu; kroki pokazują, który warunek jest [[activeConstraint|aktywny]], a wykres przekrój, moment i ugięcie wzdłuż belki. Inspiracją

była praca dyplomowa z optymalizacji: ramię zaprojektowane optymalizacją wyszło dużo lżejsze niż ramię z tablic.

Przykłady

Belka swobodnie podparta z siłą i obciążeniem ciągłym na części: reakcje, przedziały i największy moment.

Input: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

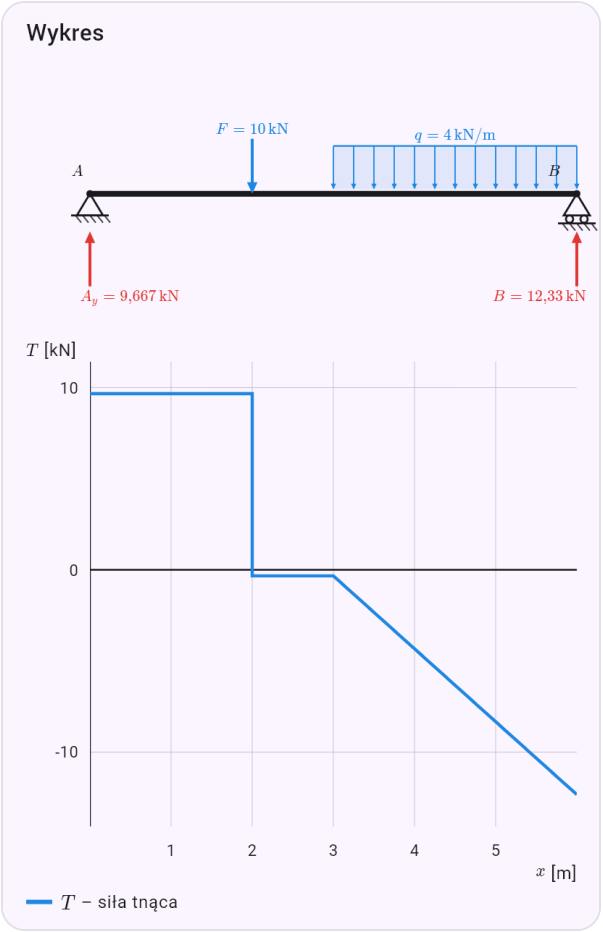
Wynik

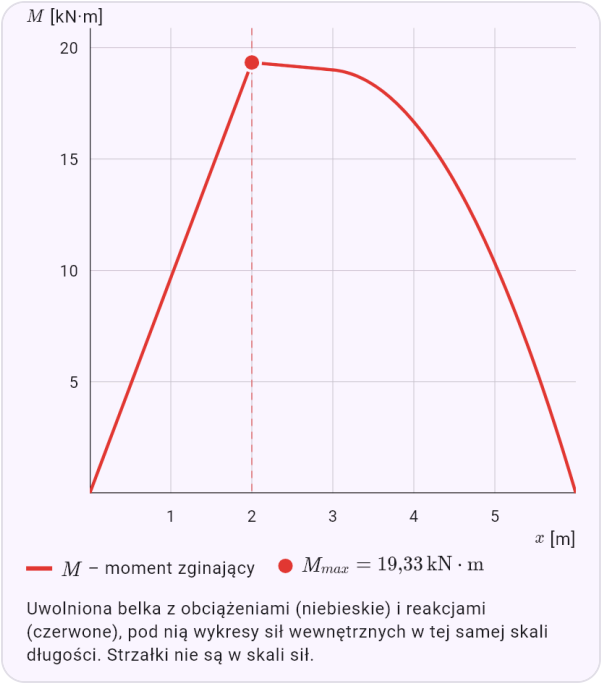
$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$

$x \approx 2\,\mathrm{m}$

Kroki

- Szukane M_{max}; dane
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- Belka leży na osi x od 0 do L. Podpora przegubowa nieprzesuwna przenosi siłę poziomą i pionową, przesuwna tylko siłę prostopadłą do swojego podłoża, utwierdzenie także moment. Siła tworzy z belką kąt α (90° = pionowo w dół), moment jest dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, obciążenie ciągłe dodatnie w dół. Przeguby wewnętrzne tworzą belkę Gerbera: moment zginający w przegubie jest równy zeru, co daje jedno równanie więcej. Wykresy N, T i M buduje się kawałek po kawałku z twierdzenia Schwedlera. Równanie modelu: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Wypadkowa obciążenia ciągłego (w środku ciężkości pola obciążenia):
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Nieznane reakcje: $A_x,\ A_y,\ B$
- Statycznie wyznaczalne: tyle niewiadomych, ile niezależnych równań (n niewiadomych, e równań, h rząd): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Suma sił poziomych:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Sprawdzenie równaniem niewykorzystanym:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Twierdzenie Schwedlera: pochodna momentu zginającego to siła tnąca, a pochodna siły tnącej to minus obciążenie ciągłe. Gdzie T jest równe zeru, M ma ekstremum.
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m): $x \in \langle 0;\ 2\rangle: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m):
  $x \in \langle 2;\ 3\rangle: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m)
  $x \in \langle 3;\ 6\rangle: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2$
- Największy moment zginający jest tam, gdzie siła tnąca skacze: $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Dodatni moment zginający wygina belkę w dół (dolne włókna rozciągane), ujemny w górę, zwykle nad podporą lub w utwierdzeniu.





Uwolniona belka z obciążeniami (niebieskie) i reakcjami (czerwone), pod nią wykresy sił wewnętrznych w tej samej skali długości. Strzałki nie są w skali sił.

Wspornik z siłą ukośną na końcu i obciążeniem równomiernym: reakcje pozioma i pionowa oraz moment utwierdzenia.

Input: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

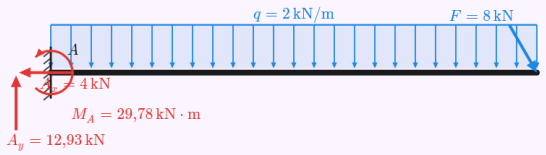
Wynik

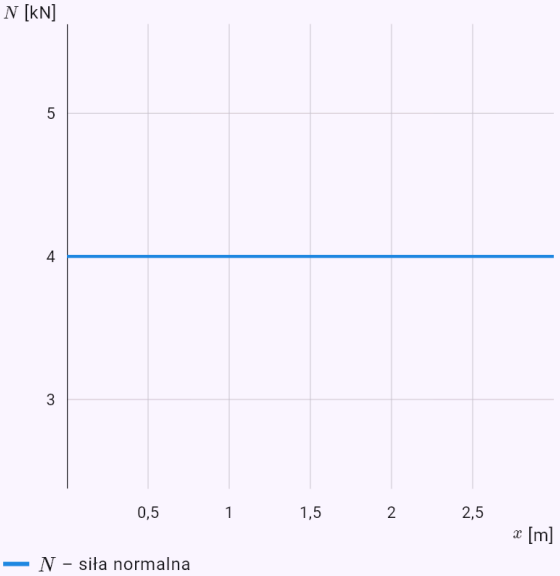
$$A_x = -4\,\text{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\text{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

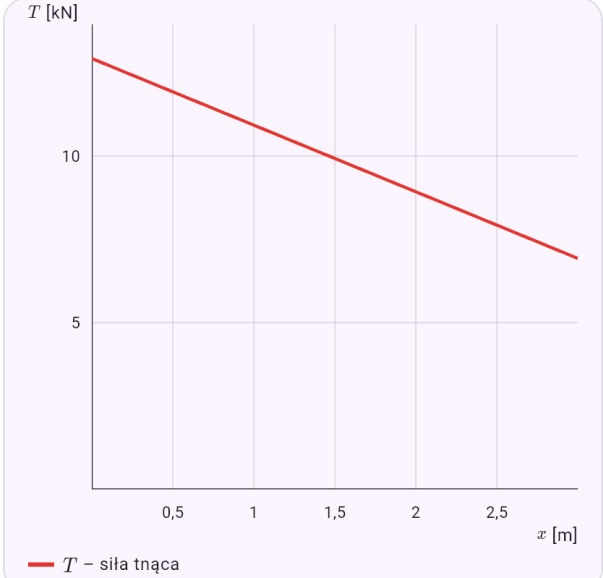
Kroki

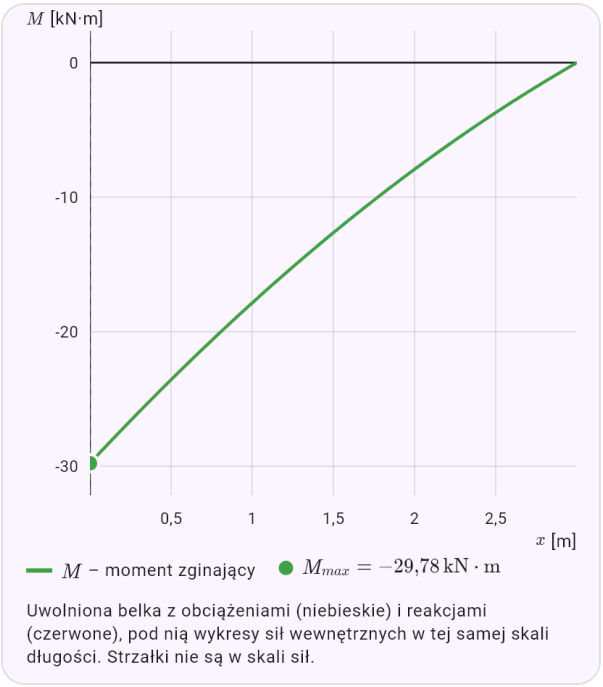
- Szukane R; dane
  $L = 3\,\text{m}, \quad F = 8\,\text{kN}, \quad x_F = 3\,\text{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- Belka leży na osi x od 0 do L. Podpora przegubowa nieprzesuwna przenosi siłę poziomą i pionową, przesuwna tylko siłę prostopadłą do swojego podłoża, utwierdzenie także moment. Siła tworzy z belką kąt α (90° = pionowo w dół), moment jest dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, obciążenie ciągłe dodatnie w dół. Przeguby wewnętrzne tworzą belkę Gerbera: moment zginający w przegubie jest równy zeru, co daje jedno równanie więcej. Wykresy N, T i M buduje się kawałek po kawałku z twierdzenia Schwedlera. Równanie modelu: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Wypadkowa obciążenia ciągłego (w środku ciężkości pola obciążenia):
  $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{m}$
- Składowe siły ukośnej:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\text{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\text{kN}$
- Nieznane reakcje: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Statycznie wyznaczalne: tyle niewiadomych, ile niezależnych równań (n niewiadomych, e równań, h rząd): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Suma sił poziomych:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\text{kN}$
- Suma sił pionowych
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

Wykres









Uwolniona belka z obciążeniami (niebieskie) i reakcjami (czerwone), pod nią wykresy sił wewnętrznych w tej samej skali długości. Strzałki nie są w skali sił.

Belka Gerbera na trzech podporach z przegubem: obliczenie zaczyna się od części za przegubem.

Input: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

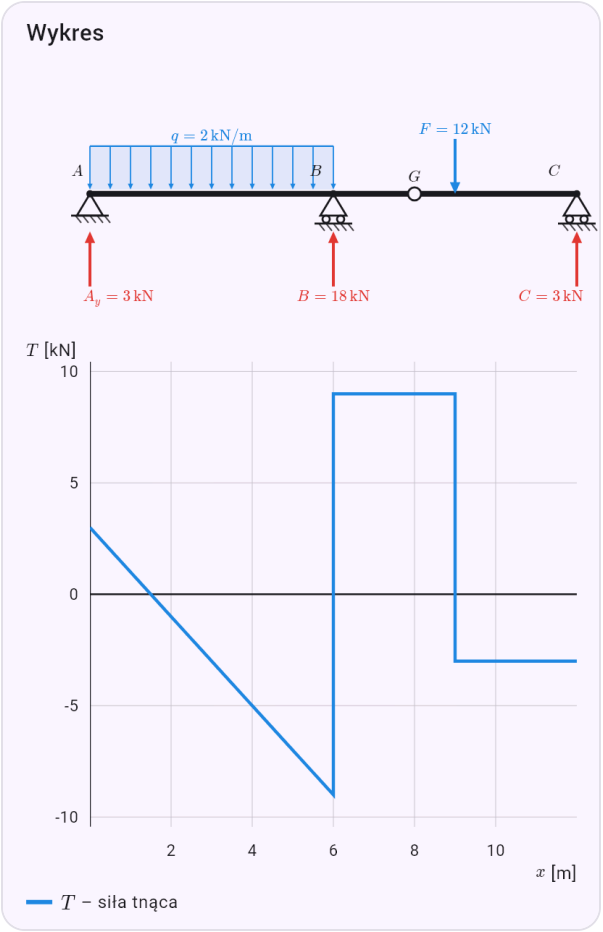
```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

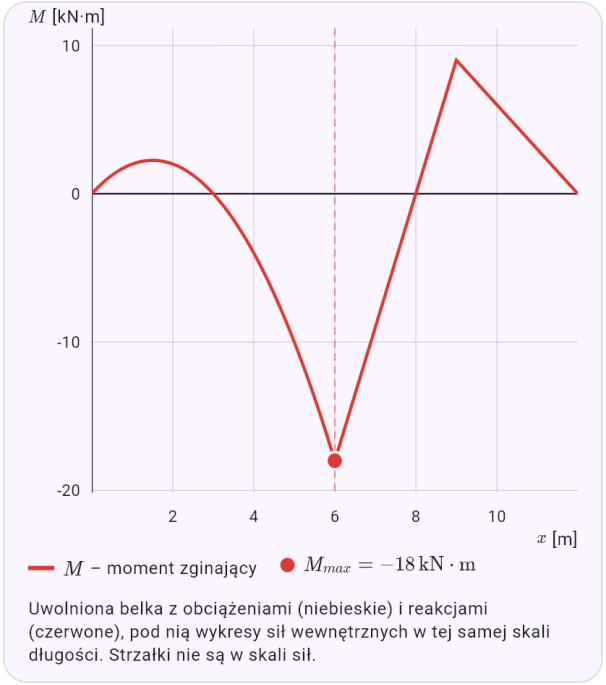
Wynik

$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane M_{max}; dane
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- Belka leży na osi x od 0 do L. Podpora przegubowa nieprzesuwna przenosi siłę poziomą i pionową, przesuwna tylko siłę prostopadłą do swojego podłoża, utwierdzenie także moment. Siła tworzy z belką kąt α (90° = pionowo w dół), moment jest dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, obciążenie ciągłe dodatnie w dół. Przeguby wewnętrzne tworzą belkę Gerbera: moment zginający w przegubie jest równy zeru, co daje jedno równanie więcej. Wykresy N, T i M buduje się kawałek po kawałku z twierdzenia Schwedlera. Równanie modelu: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Wypadkowa obciążenia ciągłego (w środku ciężkości pola obciążenia):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Nieznane reakcje: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Statycznie wyznaczalne: tyle niewiadomych, ile niezależnych równań (n niewiadomych, e równań, h rząd): $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Moment części na prawo od przegubu względem przegubu jest równy zeru:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Moment części na lewo od przegubu względem przegubu jest równy zeru
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Suma sił poziomych:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Sprawdzenie równaniem niewykorzystanym:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Twierdzenie Schwedlera: pochodna momentu zginającego to siła tnąca, a pochodna siły tnącej to minus obciążenie ciągłe. Gdzie T jest równe zeru, M ma ekstremum.
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m): $x \in \langle 0;\ 6\rangle: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m): $x \in \langle 6;\ 9\rangle: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Siły wewnętrzne w odcinku (x w m, siły w kN, momenty w kN·m): $x \in \langle 9;\ 12\rangle: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Największy moment zginający jest tam, gdzie siła tnąca skacze: $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Dodatni moment zginający wygina belkę w dół (dolne włókna rozciągane), ujemny w górę, zwykle nad podporą lub w utwierdzeniu.





Uwolniona belka z obciążeniami (niebieskie) i reakcjami (czerwone), pod nią wykresy sił wewnętrznych w tej samej skali długości. Strzałki nie są w skali sił.

Drabina oparta o gładką ścianę z ciężarem drabiny i człowieka: reakcje na ziemi i na ścianie.

Input: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

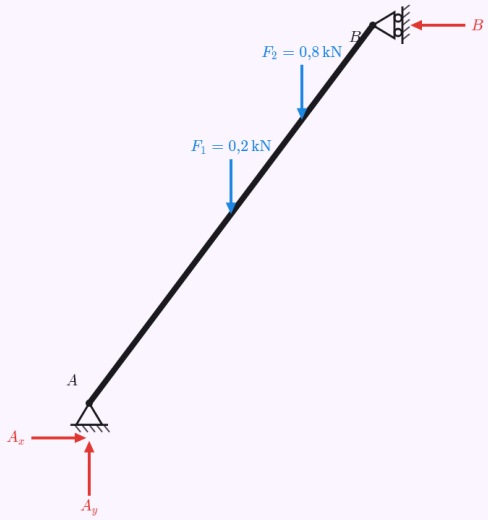
Wynik

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Kroki

- Szukane R; dane
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Ciało w płaszczyźnie dane punktami podpór i punktami przyłożenia sił (x w prawo, y w górę). Dla podpory przesuwnej kąt β daje kierunek reakcji: 90° od dołu, 0° od ściany po lewej w prawo, 180° od ściany po prawej w lewo. Przykład: drabina oparta o gładką ścianę – jej dół trzymany na podłodze przez tarcie (podpora nieprzesuwna), góra ślizga się po ścianie (podpora przesuwna). Równanie modelu:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Nieznane reakcje: $A_x,\ A_y,\ B$
- Statycznie wyznaczalne: tyle niewiadomych, ile niezależnych równań (n niewiadomych, e równań, h rząd): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Suma sił poziomych
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Suma momentów względem podpory – równanie z jedną niewiadomą
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Sprawdzenie równaniem niewykorzystanym:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Wykres



Uwolnione ciało: obciążenia na niebiesko, reakcje podpór na czerwono. Strzałki nie są w skali sił. Wartości reakcji są w wyniku.

Utwierdzenie z podporą przesuwną jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne.

Input: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

xF=2[m])

Wynik

$$s = n - h = 1$$

Kroki

- Szukane R; dane: $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- Belka leży na osi x od 0 do L. Podpora przegubowa nieprzesuwna przenosi siłę poziomą i pionową, przesuwna tylko siłę prostopadłą do swojego podłoża, utwierdzenie także moment. Siła tworzy z belką kąt α (90° = pionowo w dół), moment jest dodatni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, obciążenie ciągłe dodatnie w dół. Przeguby wewnętrzne tworzą belkę Gerbera: moment zginający w przegubie jest równy zeru, co daje jedno równanie więcej. Wykresy N, T i M buduje się kawałek po kawałku z twierdzenia Schwedlera. Równanie modelu: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Nieznane reakcje: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Statycznie niewyznaczalne: więcej niewiadomych niż niezależnych równań:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Nieznanych reakcji jest więcej, niż dają równania równowagi. Brakujące równania wynikają z odkształcenia (np. zerowe ugięcie nad podporą) – aplikacja jeszcze nie rozwiązuje belek statycznie niewyznaczalnych. Stopień s mówi, ile podpór jest nadliczbowych.

Wykres



Uwolniona belka z obciążeniami (niebieskie) i reakcjami (czerwone), pod nią wykresy sił wewnętrznych w tej samej skali długości. Strzałki nie są w skali sił.

Przekrój teowy: środek ciężkości, moment bezwładności i wskaźnik wytrzymałości.

Input: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm]; tf=20[mm];`

```
tw=20[mm])
```

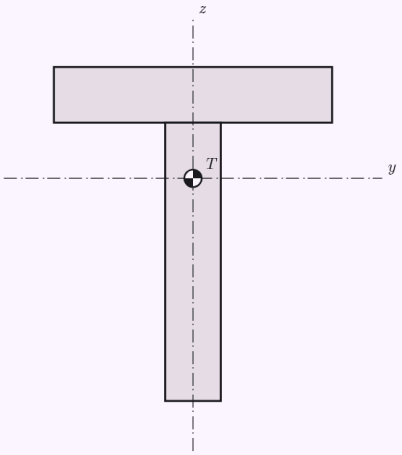
Wynik

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Kroki

- Szukane W_y; dane
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Przekrój dzielimy na prostokąty i koła, a otwory odejmujemy. Środek ciężkości to średnia ważona środków ciężkości części, momenty bezwładności względem osi przez niego wynikają z twierdzenia Steinera. Oś y jest pozioma, z pionowa, więc I_y decyduje o zginaniu w płaszczyźnie pionowej. Moment i odległość skrajnych włókien dają wskaźnik wytrzymałości W, dla przekroju niesymetrycznego (L) także osie główne. Zaokrąglenia kształtowników walcowanych są pominięte, więc wartości nieco różnią się od tablic.
  Równanie modelu
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Część przekroju
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Część przekroju
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Pole przekroju: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Środek ciężkości jako średnia ważona środków ciężkości części
  $y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$
- Momenty bezwładności całego przekroju
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Wskaźniki wytrzymałości (e = odległość skrajnych włókien od środka ciężkości)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$
- Promienie bezwładności
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$

Wykres



Przekrój w rzeczywistej skali ze środkiem ciężkości T i osiami y, z przez niego; dla przekroju niesymetrycznego także osie główne 1, 2.

Kątownik równoramienny L: moment dewiacyjny i osie główne pod kątem 45°.

Input: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm]; t=10[mm])`

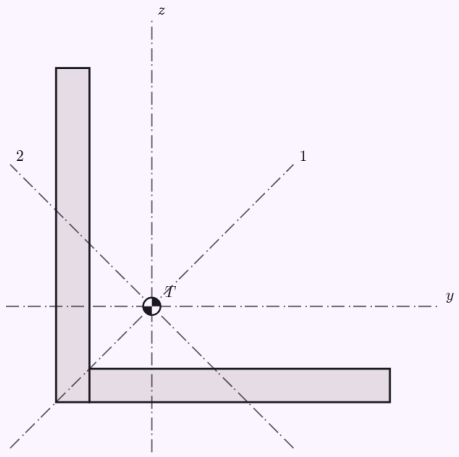
Wynik

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\mathrm{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\mathrm{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Kroki

- Szukane I_1; dane:
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad t = 10\,\mathrm{mm}$
- Przekrój dzielimy na prostokąty i koła, a otwory odejmujemy. Środek ciężkości to średnia ważona środków ciężkości części, momenty bezwładności względem osi przez niego wynikają z twierdzenia Steinera. Oś y jest pozioma, z pionowa, więc I_y decyduje o zginaniu w płaszczyźnie pionowej. Moment i odległość skrajnych włókien dają wskaźnik wytrzymałości W, dla przekroju niesymetrycznego (L) także osie główne. Zaokrąglenia kształtowników walcowanych są pominięte, więc wartości nieco różnią się od tablic. Równanie modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \mathbf{X}$$
- Część przekroju
  $1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Część przekroju
  $2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Pole przekroju: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\mathrm{mm}^2$
- Środek ciężkości jako średnia ważona środków ciężkości części
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\mathrm{mm}, \quad z_T =$$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\mathrm{mm}^4,$$
- Momenty bezwładności całego przekroju
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Moment dewiacji
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\mathrm{mm}^4$
- Główne momenty bezwładności
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Oś główna 1 obrócona od osi y
  $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Wskaźniki wytrzymałości (e = odległość skrajnych włókien od środka ciężkości)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Promienie bezwładności
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\mathrm{mm}$$

Wykres



Przekrój w rzeczywistej skali ze środkiem ciężkości T i osiami y, z przez niego; dla przekroju niesymetrycznego także osie główne 1, 2.

Płyta z mimośrodowym okrągłym otworem: przekrój złożony i przesunięty środek ciężkości.

Input: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm]; rh=100[mm];`

ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])

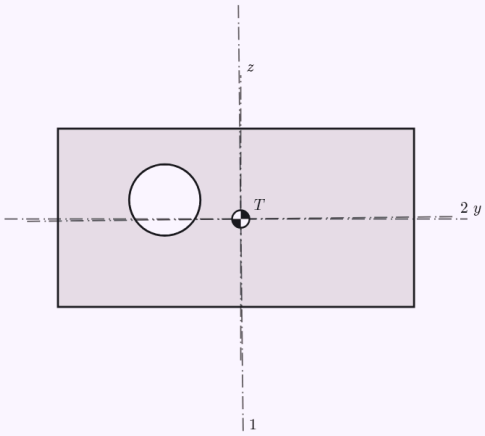
Wynik

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

Kroki

- Szukane I_y; dane
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- Przekrój dzielimy na prostokąty i koła, a otwory odejmujemy. Środek ciężkości to średnia ważona środków ciężkości części, momenty bezwładności względem osi przez niego wynikają z twierdzenia Steinera. Oś y jest pozioma, z pionowa, więc I_y decyduje o zginaniu w płaszczyźnie pionowej. Moment i odległość skrajnych włókien dają wskaźnik wytrzymałości W, dla przekroju niesymetrycznego (L) także osie główne. Zaokrąglenia kształtowników walcowanych są pominięte, więc wartości nieco różnią się od tablic. Równanie modelu
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \mathbf{Y}$$
- Część przekroju
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$
- Otwór (odjęty)
  $2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$
- Pole przekroju: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Środek ciężkości jako średnia ważona środków ciężkości części
  $$y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $$I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$
- Twierdzenie Steinera: własny moment części + jej pole × kwadrat odległości osi
  $$I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$$
- Momenty bezwładności całego przekroju
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Moment dewiacji
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$$
- Główne momenty bezwładności
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$$
- Oś główna 1 obrócona od osi y
  $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$$
- Wskaźniki wytrzymałości (e = odległość skrajnych włókien od środka ciężkości)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Promienie bezwładności
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$$

Wykres



Przekrój w rzeczywistej skali ze środkiem ciężkości T i osiami y, z przez niego; dla przekroju niesymetrycznego także osie główne 1, 2.

Cysterna w połowie napełniona wodą hamująca z opóźnieniem 5 m/s²: przednia oś przenosi o kilkadziesiąt procent więcej.

Input: model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

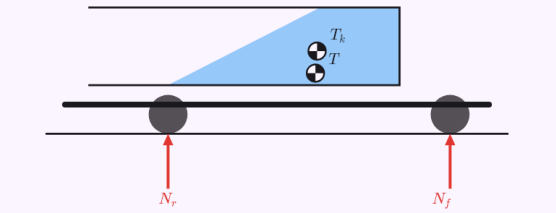
Wynik

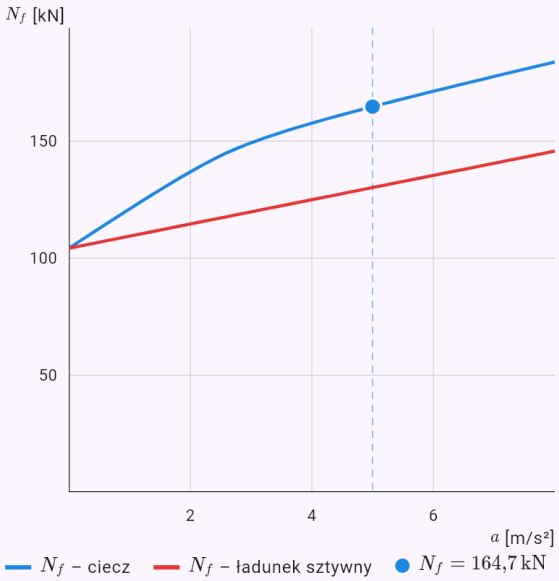
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Kroki

- Szukane N_f; dane
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Hamowanie z opóźnieniem a: ciecz napiera do przodu, jej powierzchnia przechyla się o kąt θ, a środek ciężkości przesuwa się do przodu i w górę. Naciski osi to reakcje belki na dwóch podporach z siłą bezwładności m·a w środku ciężkości. Równanie modelu: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g}$
- Objętość zbiornika i cieczy
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Przechył powierzchni – prostopadle do wypadkowej ciężaru i siły bezwładności
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Środek ciężkości cieczy przesuwa się do przodu i w górę
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Środek ciężkości całego pojazdu
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Naciski osi z momentów względem tylnej osi (siła bezwładności w środku ciężkości)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Przednia oś w spoczynku i w ruchu; z ładunkiem sztywnym
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Częstość własna pierwszej fali (chlupotanie)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- Model quasi-statyczny obowiązuje przy ustalonym hamowaniu. Po gwałtownym zatrzymaniu ciecz drga z okresem T, a jej uderzenia o koniec zbiornika mogą chwilowo jeszcze bardziej zwiększyć obciążenie; dlatego cysterny mają przegrody.

Wykres





Widok z boku z przechyloną powierzchnią, środkiem ciężkości cieczy T_k, całości T i naciskami osi; wykres pokazuje nacisk przedniej osi w zależności od opóźnienia dla cieczy i ładunku sztywnego.

Ta sama cysterna w zakręcie R = 60 m: prędkość krytyczna z cieczą i z ładunkiem sztywnym.

Input: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m];`

`H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

Wynik

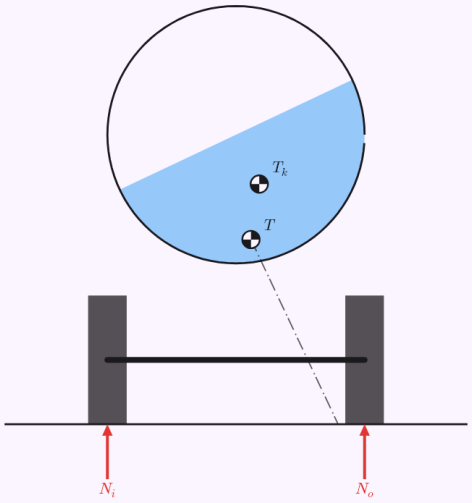
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

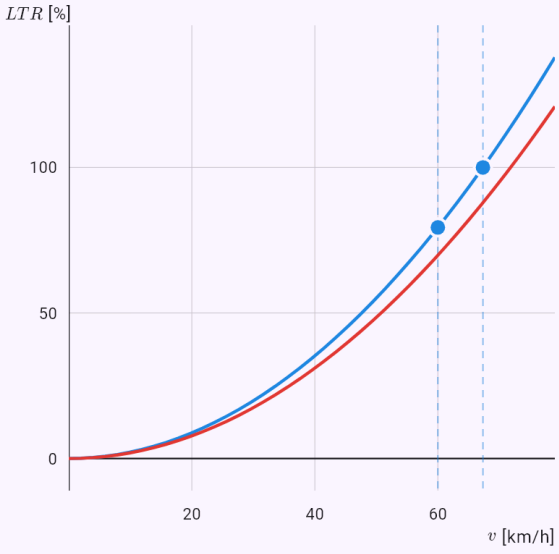
Kroki

- Szukane v_{krit}; dane
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Zakręt o promieniu R przy prędkości v: przyspieszenie dośrodkowe a = v²/R, ciecz przelewa się na zewnątrz, a z nią środek ciężkości. Pojazd przewraca się, gdy wypadkowa ciężaru i siły odśrodkowej przechodzi przez zewnętrzne koła (LTR = 100 %). Przechył nadwozia na sprężynach (k_r stopni na g) przesuwa środek ciężkości jeszcze bardziej na zewnątrz. Równanie modelu:
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Objętość zbiornika i cieczy
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Przyspieszenie dośrodkowe w zakręcie
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Przechył powierzchni – prostopadle do wypadkowej ciężaru i siły bezwładności
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Środek cieczy w przekroju poprzecznym (y na zewnątrz zakrętu): $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Przechył nadwozia przesuwa cały środek ciężkości jeszcze bardziej na zewnątrz
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Przeniesienie obciążenia na koła zewnętrzne
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Granica przewrócenia: wypadkowa przechodzi przez koła zewnętrzne
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Ładunek sztywny dla porównania:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Częstość własna pierwszej fali (chlupotanie)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L} \tanh \dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Rzeczywiste cysterny przewracają się już przy około 0,35–0,45 g: oprócz przechyłu na sprężynach uginają się opony, a ciecz drga także w zakręcie. Granica quasi-

statyczna to oszacowanie z góry.

Wykres





Widok z tyłu w zakręcie (na zewnątrz w prawo) z przechyloną powierzchnią, środkiem ciężkości i wypadkową; wykres pokazuje przeniesienie obciążenia na koła zewnętrzne w zależności od prędkości – przy 100 % koła wewnętrzne się unoszą.

Wspornik 2 m z siłą 10 kN: IPE 200 z tablic, optymalna rura i rura o równej wytrzymałości.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=250; lambda=50)
```

Wynik

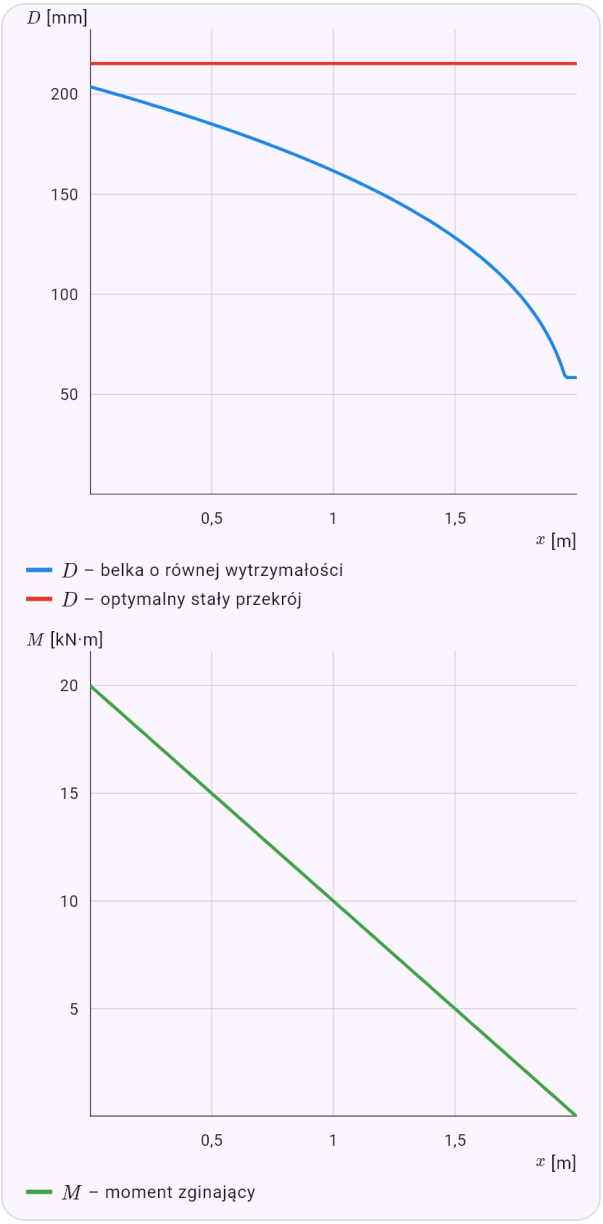
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

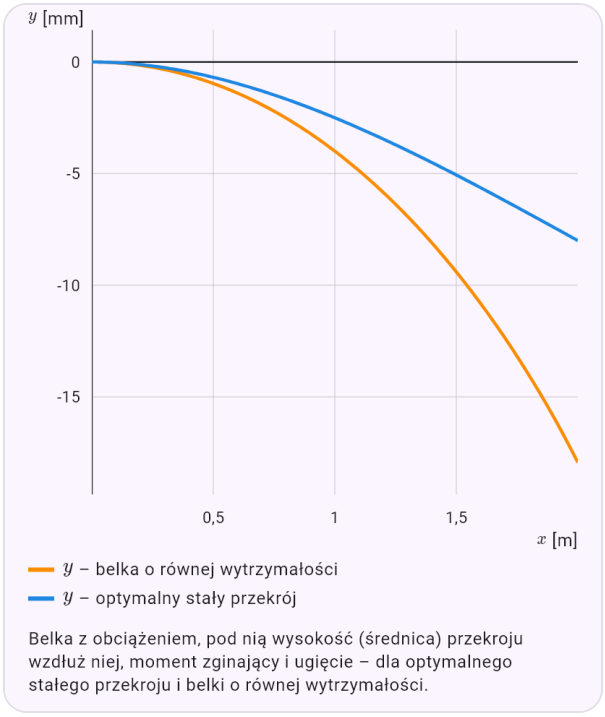
Kroki

- Szukane m; dane
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Wspornik o długości L z siłą F na swobodnym końcu albo obciążeniem ciągłym q na całej długości. Największy moment jest w utwierdzeniu. Równanie modelu
  $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \dfrac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$
- Największy moment zginający:
  $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Warunek wytrzymałości – najmniejszy wskaźnik wytrzymałości
  $W \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \dfrac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$
- Warunek ugięcia (całkowanie E·I·y'' = −M) – najmniejszy moment bezwładności
  $y_{max} = \dfrac{FL^3}{3EI} \le \dfrac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$
- Najlżejszy odpowiedni kształtownik każdej rodziny
  $\text{IPE}\,200:\ W = 194\,\text{cm}^3,\ I = 1943\,\text{cm}^4,\ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Według tablic – najlżejszy ze wszystkich
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Cieńsza ścianka daje mniejsze pole przy tym samym W, więc optimum jest na granicy smukłości: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 50$
- 2. Optymalny stały przekrój – najmniejszy rozmiar spełniający oba warunki
  $D_\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\dfrac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$
- Aktywny jest warunek ugięcia (naprężenie wychodzi mniejsze od dopuszczalnego): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Pole i masa przekroju optymalnego:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Belka o równej wytrzymałości – σ(x) = σ_dop wszędzie, najmniejszy przekrój na swobodnym końcu ze względu na ścinanie
  $D(x) = \sqrt[3]{\dfrac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\dfrac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$
- Masa i ugięcie belki o równej wytrzymałości
  $m = \rho\displaystyle\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$
- Belka o równej wytrzymałości pilnuje tylko naprężenia, więc jest bardziej podatna i przekracza dopuszczalne ugięcie. W praktyce jej przekrój się zwiększa albo stosuje się ją tam, gdzie decyduje wytrzymałość.
- Masy wariantów w porównaniu z kształtownikiem z tablic: $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$
- Ciężar własny belki jest pominięty; dla długich i ciężkich belek dodaje się do obciążenia ciągłego.

Wykres







Belka z obciążeniem, pod nią wysokość (średnica) przekroju wzdłuż niej, moment zginający i ugięcie – dla optymalnego stałego przekroju i belki o równej wytrzymałości.

Prostokąt o równej wytrzymałości i stałej szerokości: jego wysokość wzdłuż belki to parabola, o jedną trzecią mniej materiału.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Wynik

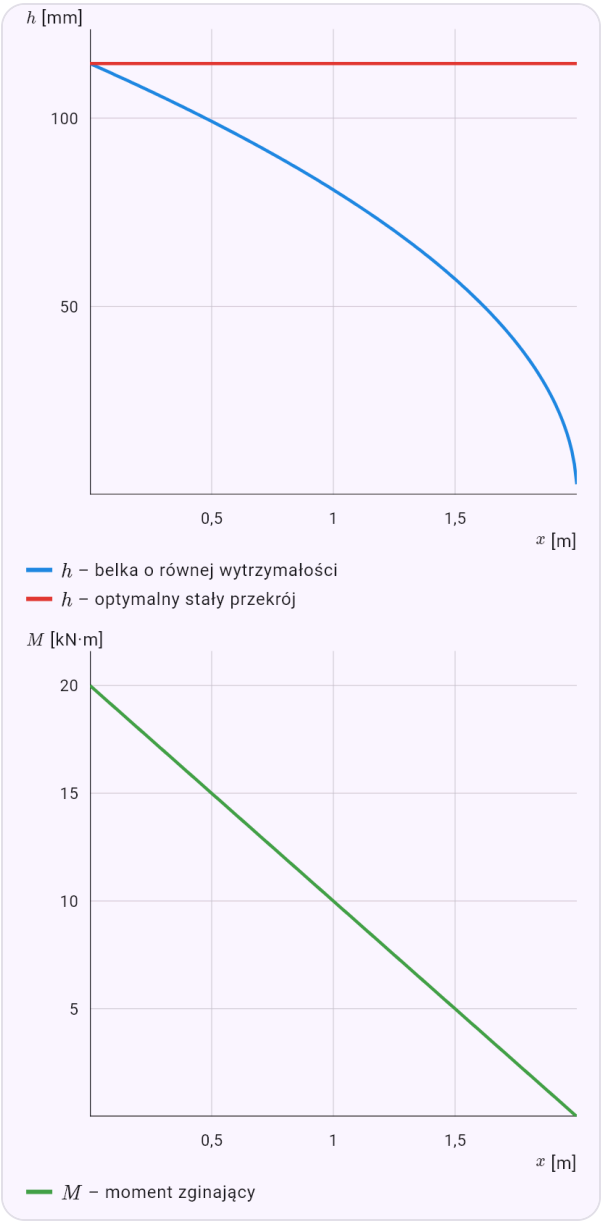
$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$
$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

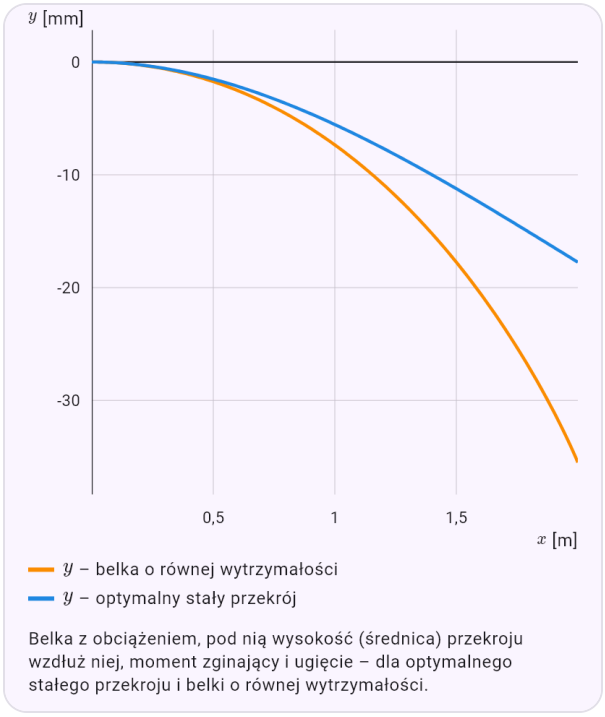
Kroki

- Szukane m; dane
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Wspornik o długości L z siłą F na swobodnym końcu albo obciążeniem ciągłym q na całej długości. Największy moment jest w utwierdzeniu. Równanie modelu
  $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \dfrac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$
- Największy moment zginający:
  $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Warunek wytrzymałości – najmniejszy wskaźnik wytrzymałości
  $W \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \dfrac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$
- Warunek ugięcia (całkowanie E·I·y'' = −M) – najmniejszy moment bezwładności
  $y_{max} = \dfrac{FL^3}{3EI} \le \dfrac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$
- Najlżejszy odpowiedni kształtownik każdej rodziny
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Według tablic – najlżejszy ze wszystkich
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Optymalny stały przekrój – najmniejszy rozmiar spełniający oba warunki
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\dfrac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- Aktywny jest warunek wytrzymałości (ugięcie wychodzi mniejsze od dopuszczalnego): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Pole i masa przekroju optymalnego:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Belka o równej wytrzymałości – σ(x) = σ_dop wszędzie, najmniejszy przekrój na swobodnym końcu ze względu na ścinanie
  $h(x) = \sqrt{\dfrac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \dfrac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$
- Masa i ugięcie belki o równej wytrzymałości
  $m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$
- Masy wariantów w porównaniu z kształtownikiem z tablic: $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Ciężar własny belki jest pominięty; dla długich i ciężkich belek dodaje się do obciążenia ciągłego.

Wykres







Belka z obciążeniem, pod nią wysokość (średnica) przekroju wzdłuż niej, moment zginający i ugięcie – dla optymalnego stałego przekroju i belki o równej wytrzymałości.

Belka swobodnie podparta 6 m z obciążeniem ciągłym: decyduje ugięcie.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

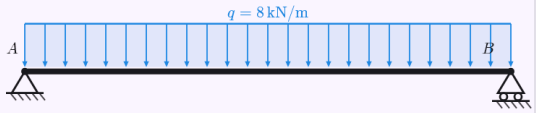
Wynik

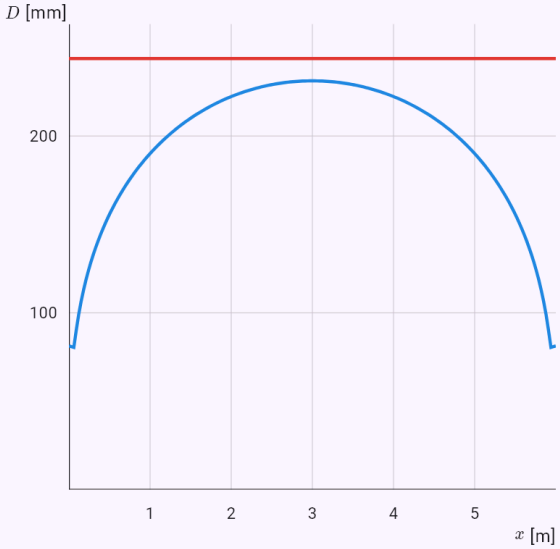
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Kroki

- Szukane m; dane
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Belka swobodnie podparta o długości L z siłą F w środku albo obciążeniem ciągłym q na całej długości. Największy moment jest w środku. Równanie modelu
  $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \dfrac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$
- Największy moment zginający:
  $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Warunek wytrzymałości – najmniejszy wskaźnik wytrzymałości
  $W \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \dfrac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$
- Warunek ugięcia (całkowanie E·I·y'' = −M) – najmniejszy moment bezwładności
  $y_{max} = \dfrac{5qL^4}{384EI} \le \dfrac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$
- Najlżejszy odpowiedni kształtownik każdej rodziny
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Według tablic – najlżejszy ze wszystkich
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Cieńsza ścianka daje mniejsze pole przy tym samym W, więc optimum jest na granicy smukłości: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 40$
- 2. Optymalny stały przekrój – najmniejszy rozmiar spełniający oba warunki
  $D_\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\dfrac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$
- Aktywny jest warunek ugięcia (naprężenie wychodzi mniejsze od dopuszczalnego): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Pole i masa przekroju optymalnego:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Belka o równej wytrzymałości – σ(x) = σ_dop wszędzie, najmniejszy przekrój na swobodnym końcu ze względu na ścinanie
  $D(x) = \sqrt[3]{\dfrac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\dfrac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$
- Masa i ugięcie belki o równej wytrzymałości
  $m = \rho\displaystyle\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$
- Belka o równej wytrzymałości pilnuje tylko naprężenia, więc jest bardziej podatna i przekracza dopuszczalne ugięcie. W praktyce jej przekrój się zwiększa albo stosuje się ją tam, gdzie decyduje wytrzymałość.
- Masy wariantów w porównaniu z kształtownikiem z tablic: $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$
- Ciężar własny belki jest pominięty; dla długich i ciężkich belek dodaje się do obciążenia ciągłego.

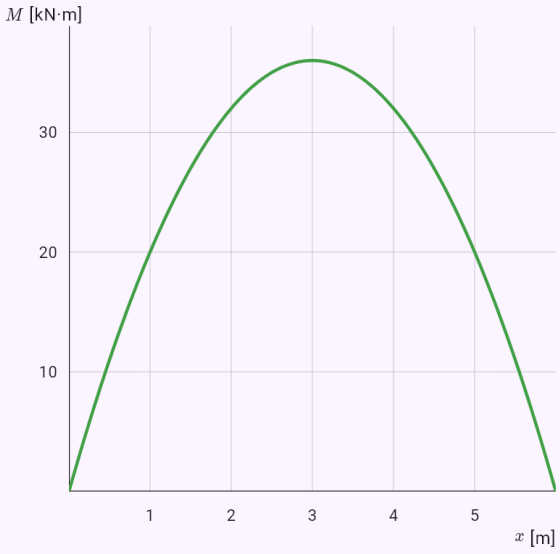
Wykres



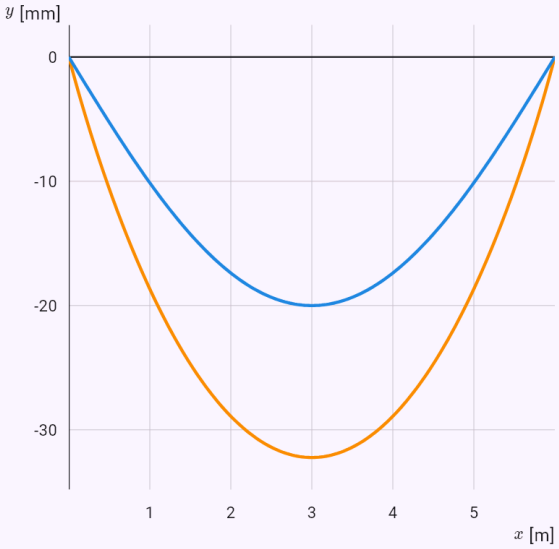


D – belka o równej wytrzymałości

D – optymalny stały przekrój



M – moment zginający



y – belka o równej wytrzymałości

y – optymalny stały przekrój

Belka z obciążeniem, pod nią wysokość (średnica) przekroju wzdłuż niej, moment zginający i ugięcie – dla optymalnego stałego przekroju i belki o równej wytrzymałości.

45. Astronomia i astrofizyka

Dziedzina Astronomia i astrofizyka jest w sekcji Zastosowania. Oprócz praw Keplera, wzajemnego oddziaływania ciał i problemu trzech ciał (opisanych w rozdziale Fizyka) ma formularze Czarne dziury, Gwiazdy neutronowe, Fale grawitacyjne, Wielkości gwiazdowe i odległości, Promieniowanie gwiazd, Przesunięcie ku czerwieni i prawo Hubble'a oraz Egzoplanety. Wzory są gotowe, a kroki pokazują podstawienie. Aplikacja nie rozwiązuje równań ogólnej teorii względności; używa tylko ich wyników dla nierotującej czarnej dziury.

Formularz Czarne dziury oblicza [[schwarzschildRadius|promień Schwarzschilda]], sferę fotonową i najbardziej wewnętrzną stabilną orbitę, „gęstość" czarnej dziury z wykresem w zależności od masy w skali logarytmicznej, prędkość ucieczki, grawitacyjną dylatację czasu i przesunięcie ku czerwieni (także dla dwóch zegarów, np. GPS), siłę pływową, temperaturę Hawkinga z czasem parowania i masę Sgr A* z orbity gwiazdy S2. Menu obiektów wypełnia Słońce, Ziemię, gwiazdę neutronową, gwiazdową czarną dziurę, Sgr A* lub M87*.

Gwiazdy neutronowe mają gęstość, grawitację na powierzchni, przyspieszenie obrotu przy zapadaniu z zasady zachowania momentu pędu i najkrótszy możliwy okres obrotu. Fale grawitacyjne dają częstotliwość z odległości krążącej pary (i odwrotnie) oraz energię wypromieniowaną przy połączeniu takim jak GW150914.

Podstawy wstępnego kursu astronomii: wzór Pogsona, moduł odległości z [[absoluteMagnitude|wielkością absolutną]] i paralaksą; prawo Wiena i Stefana-Boltzmanna [[blackBody|ciała doskonale czarnego]], stała słoneczna i temperatura równowagowa planety; dopplerowskie [[redshift|przesunięcie ku czerwieni]] i prawo Hubble'a z czasem Hubble'a; dla egzoplanet głębokość tranzytu, metoda prędkości radialnych i [[habitableZone|ekosfera]].

Prawa Keplera zyskały transfer Hohmanna między dwiema orbitami kołowymi (Δv i czas lotu), a wzajemne oddziaływanie ciał [[rocheLimit|granicę Roche'a]] i sferę Hilla.

Przykłady

Do jak małej kuli musiałaby zostać ściśnięta Ziemia, by stać się czarną dziurą.

Input: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Wynik

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

Kroki

- Szukane r_s; dane: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Przeliczamy jednostki:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Promień Schwarzschilda r_s = 2GM/c² to promień horyzontu zdarzeń. Ziemię trzeba by ścisnąć do kulki o średnicy około 18 mm, Słońce do kuli o promieniu 3 km. Światło może krążyć po sferze fotonowej w 1,5 r_s, a najbardziej wewnętrzna stabilna orbita materii (ISCO) leży w 3 r_s. Równanie modelu
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Podstawiamy
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Dla nierotującej czarnej dziury. Wokół rotującej (Kerra) ISCO i sfera fotonowa leżą bliżej.
- Przeliczamy jednostki: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

„Gęstość” czarnej dziury M87* – rzadsza niż powietrze.

Input: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

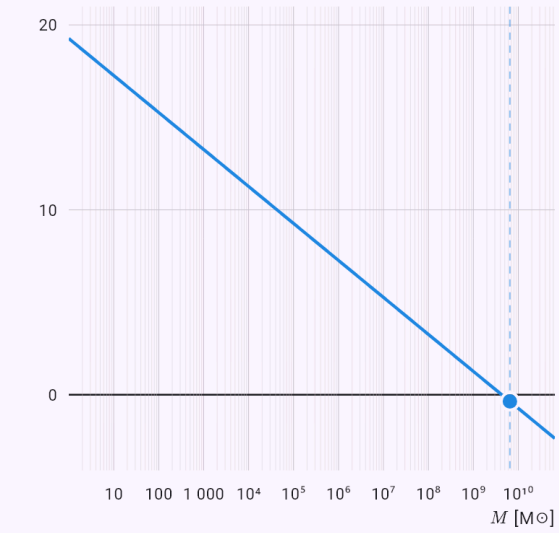
Wynik

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

Kroki

- Szukane ρ; dane: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Przeliczamy jednostki:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- Średnia „gęstość” wewnątrz horyzontu: masa podzielona przez objętość kuli o promieniu r_s. Maleje jak 1/M². Gwiazdowa czarna dziura jest gęstsza niż jądro atomowe, dziura o masie 10^8 mas Słońca ma gęstość wody, a M87* jest rzadsza niż powietrze. Wykres pokazuje masę w skali logarytmicznej. Równanie modelu: $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Podstawiamy
  $$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$$
- Dla porównania: jądro atomowe, woda i powietrze (około 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Rzadsza niż powietrze – „gęstość” to tylko średnia po objętości horyzontu.

Wykres



Oś pozioma jest logarytmiczna – każda kreska to dziesięciokrotność poprzedniej. Kropka to dana wartość albo odpowiedź.

Ile codziennie zyskują zegary satelitów GPS z powodu grawitacji.

Input: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

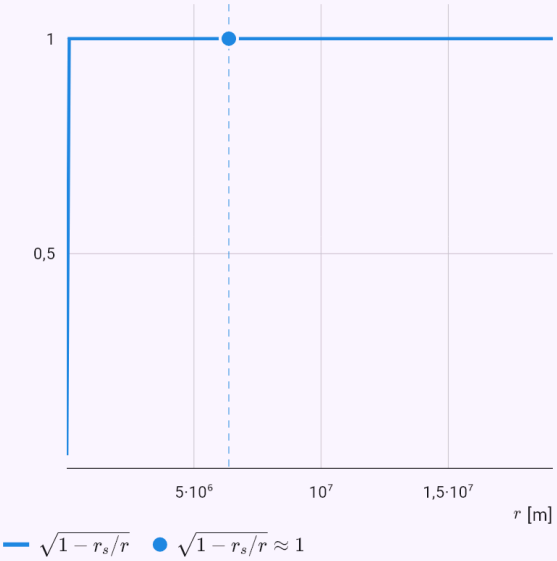
Wynik

$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Kroki

- Szukane Δt; dane
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Przeliczamy jednostki
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Zegary blisko masywnego ciała chodzą wolniej: dτ/dt = √(1 − r_s/r). Światło stamtąd przychodzi przesunięte ku czerwieni. Z drugą odległością r_2 tryb porównuje dwa zegary. Satelity GPS (r_2 = 26 571 km) zyskują względem ziemi około 45,7 µs na dobę. Równanie modelu
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Podstawiamy
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Opóźnienie na jednostkę czasu: $1 - \dfrac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Podstawiamy
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Porównanie dwóch zegarów w różnych odległościach; różnica dodatnia oznacza, że bliższy zegar chodzi wolniej.
- Przeliczamy jednostki: $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Siła pływowa działająca na człowieka na horyzoncie gwiazdowej czarnej dziury.

Input: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

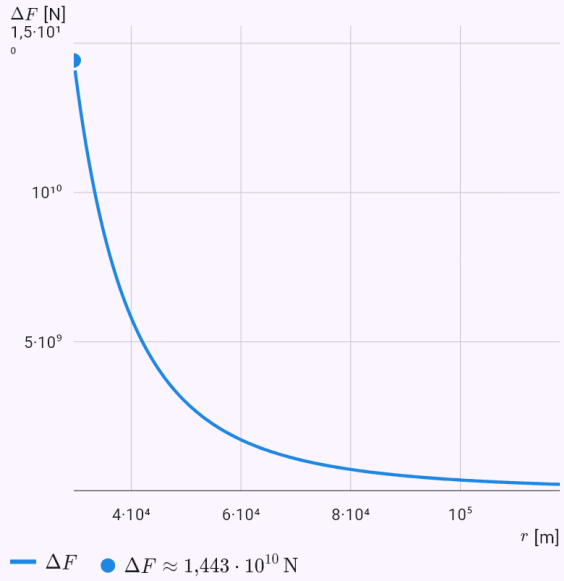
Wynik

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Kroki

- Szukane ΔF_s; dane: $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Przeliczamy jednostki: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- Siła pływowa to różnica grawitacji przy głowie i przy stopach. Gwiazdowa czarna dziura rozerwie człowieka na długo przed horyzontem („spaghettyfikacja"); na horyzoncie dużej czarnej dziury (Sgr A*) siła jest znikoma. Równanie modelu: $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- Podstawiamy $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Podstawiamy $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- W wielokrotnościach ciężaru ciała: $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- Siła pływowa znacznie przekracza to, co ciało wytrzyma – „spaghettyfikacja".

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Masa Sgr A* z orbity gwiazdy S2.

Input: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Wynik

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Kroki

- Szukane M; dane: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{r.}$
- Przeliczamy jednostki $a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{r.} = 5{,}065 \cdot$
- Gwiazda S2 okrąża centrum Galaktyki po elipsie o półosi wielkiej około 1 019 au w ciągu 16,05 roku. Trzecie prawo Keplera daje masę Sgr A*: około 4 milionów Słońc w obszarze mniejszym niż Układ Słoneczny. Za ten pomiar przyznano Nagrodę Nobla z fizyki 2020. Równanie modelu: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Podstawiamy $M = \dfrac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$
- W masach Słońca: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horyzont Sgr A* $r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \dfrac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Nagroda Nobla z fizyki 2020 (Genzel, Ghez) za odkrycie supermasywnego zwartego obiektu w centrum Galaktyki.
- Przeliczamy jednostki: $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

Okres obrotu jądra po zapadnięciu się w gwiazdę neutronową.

Input: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Wynik

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\mathrm{ms}$$

Kroki

- Szukane T_2; dane:
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km}, \quad R_2 = 12\,\mathrm{km}$
- Przeliczamy jednostki
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d} = 2\,195\,000\,\mathrm{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km} = 6{,}96 \cdot$
- Zasada zachowania momentu pędu: gdy jądro się kurczy, wiruje szybciej, a okres maleje z kwadratem promienia (jak łyżwiarka przyciągająca ręce). Tak rodzą się pulsary o okresach od milisekund do sekund. Równanie modelu
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- Gwiazdę traktujemy jako jednorodną kulę, która nie traci masy.
- Podstawiamy
  $T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$
- Ile razy szybciej wiruje: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Prawdziwe pulsary wirują wolniej (od milisekund do sekund): jądro przed zapadnięciem wiruje wolniej, a odrzucona otoczka unosi moment pędu.
- Przeliczamy jednostki: $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}6524\,\mathrm{ms}$

Energia wypromieniowana w falach grawitacyjnych przy połączeniu GW150914.

Input: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Wynik

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Kroki

- Szukane E; dane:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Przeliczamy jednostki
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- Po połączeniu powstaje czarna dziura lżejsza niż obie razem. Różnicę mas unoszą fale grawitacyjne jako energię E = Δm·c². Równanie modelu:
  $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Podstawiamy
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Wypromieniowana część masy:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- Podstawiamy
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$
- W porównaniu z całym życiem Słońca:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\mathrm{r.}} \approx 4438$
- LIGO wychwycił fale GW150914 z odległości 1,3 miliarda lat świetlnych; przesunęły jego zwierciadła o tysięczną część średnicy protonu.

Odległość Syriusza z modułu odległości.

Input: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod;`

`star=sirius)`

Wynik

$$d \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$$

Kroki

- Szukane d; dane: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- Absolutna wielkość gwiazdowa M to ta, którą gwiazda miałaby z odległości 10 pc. Moduł odległości m − M daje odległość, gdy znamy prawdziwą jasność gwiazdy (cefeidy, supernowe typu Ia). Równanie modelu: $m - M = 5 \log \frac{d}{10\ \mathrm{pc}}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $d = 10\ \mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Podstawiamy: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$
- W latach świetlnych: $d \approx 8{,}658\ \mathrm{l.ś.}$
- Pochłanianie światła przez pył międzygwiazdowy jest pominięte; z nim gwiazda wydaje się dalsza.

Długość fali maksimum promieniowania Słońca.

Input: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

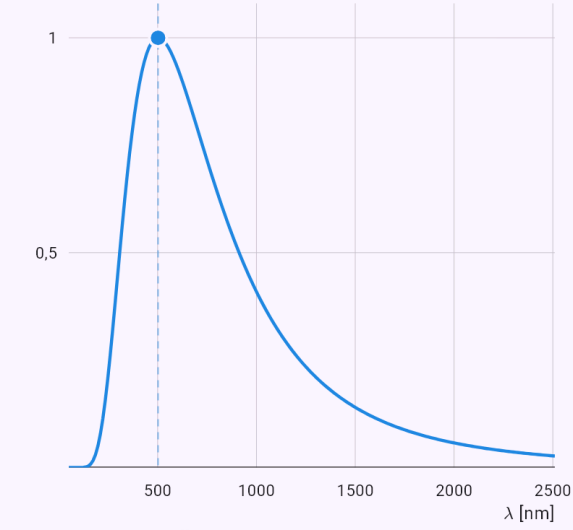
Wynik

$$\lambda_{\max} \approx 502\ \mathrm{nm}$$

Kroki

- Szukane $\lambda_{\max}$; dane: $T = 5772\ \mathrm{K}$
- Prawo przesunięć Wiena: długość fali, na której ciało promieniuje najwięcej, jest odwrotnie proporcjonalna do jego temperatury. Słońce ma maksimum w zieleni (około 500 nm), chłodna Betelgeza w podczerwieni, gorąca Wega w błękicie. Równanie modelu: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$
- Stała Wiena w nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\ \mathrm{nm \cdot K}$
- Podstawiamy: $\lambda_{\max} = \frac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\ \mathrm{nm}$
- Maksimum leży w świetle widzialnym.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Temperatura równowagowa Ziemi bez efektu cieplarnianego.

Input: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium;`

`planet=earth)`

Wynik

$$T_{\mathrm{eq}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

Kroki

- Szukane T_{eq}; dane: $L = 1\,L_{\odot}, \quad a = 1\,\mathrm{au}, \quad A = 0{,}306$
- Przeliczamy jednostki
  $L = 1\,L_{\odot} = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}, \quad a = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{n}$
- Stała słoneczna S to moc padająca na 1 m² w odległości a od gwiazdy. Planeta pochłania S(1 − A) swoim przekrojem πR² i wypromieniowuje σT⁴ całą powierzchnią 4πR². Równowaga daje jej temperaturę bez efektu cieplarnianego. Równanie modelu:
  $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eq}}^4$
- Podstawiamy
  $S = \dfrac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\mathrm{W/m^2}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Podstawiamy
  $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\mathrm{K}$
- Bez efektu cieplarnianego. Rzeczywista średnia temperatura Ziemi jest wyższa: $T_{\oplus} \approx 288\,\mathrm{K}$

Czas Hubble’a jako oszacowanie wieku Wszechświata.

Input: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Wynik

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{mld\ lat}$$

Kroki

- Szukane t_H; dane: $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$
- Prawo Hubble’a v = H_0·d. Odwrotność stałej Hubble’a (czas Hubble’a) szacuje wiek Wszechświata na około 14 miliardów lat; dokładny wiek 13,8 miliarda lat wynika z modelu rozszerzania. Równanie modelu:
  $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Stała Hubble’a w $\mathrm{s^{-1}}$
  $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086\cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Podstawiamy: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269\cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- W miliardach lat: $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{mld\ lat}$
- Czas Hubble’a to tylko oszacowanie wieku; rozszerzanie zwolniło, a teraz przyspiesza.
- Przeliczamy jednostki:
  $t_H \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{mld\ lat}$

Głębokość tranzytu Ziemi na tle Słońca.

Input: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit; exo=earth)`

Wynik

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

Kroki

- Szukane $\frac{\Delta F}{F}$; dane: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Przeliczamy jednostki:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Gdy planeta przechodzi przed swoją gwiazdą, zasłania część jej tarczy i jasność spada o stosunek pól (R_p/R_*)². Jowisz przyciemniłby Słońce o 1 %, Ziemia tylko o 84 milionowe (ppm). Równanie modelu:
  $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Podstawiamy: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- W milionowych częściach (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- Tranzyt widać tylko wtedy, gdy patrzymy na orbitę planety prawie z boku.
- Przeliczamy jednostki:
  $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

Czas transferu Hohmanna z Ziemi na Marsa.

Input: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

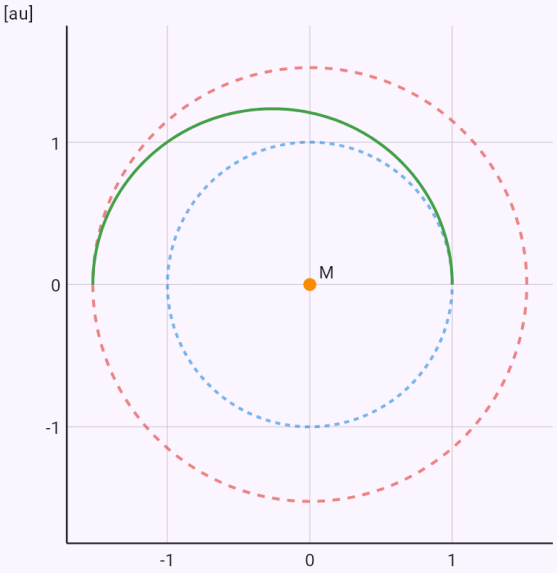
Wynik

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

Kroki

- Szukane t; dane
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Przeliczamy jednostki
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- Orbita transferowa Hohmanna to połowa elipsy styczna do początkowej i docelowej orbity kołowej. Dwa odpalenia silnika (Δv) przenoszą statek z jednej na drugą przy najmniejszym zużyciu paliwa. Lot z Ziemi na Marsa trwa w ten sposób około 259 dni. Równanie modelu
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Podstawiamy
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Podstawiamy
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- W dniach: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Na zewnątrz: przyspieszamy w kierunku lotu, potem przyspieszamy znowu na orbicie docelowej.
- Przeliczamy jednostki: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

Wykres



Ciała i ważne punkty w rzeczywistej skali.

Granica Roche'a Saturna dla lodowego księżyca – dlaczego są tam pierścienie.

Input: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Wynik

$$d_R \approx 129\,000\,\mathrm{km}$$

Kroki

- Szukane d_R; dane
  $R = 58\,230\,\mathrm{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3}, \quad \rho_m = 0{,}917\,\mathrm{g/}$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 58\,230\,\mathrm{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\mathrm{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3} =$
- Granica Roche'a: bliżej planety siły pływowe rozrywają księżyc trzymany w całości tylko własną grawitacją. Dlatego pierścienie Saturna leżą wewnątrz jego granicy Roche'a. Sztywny księżyc przetrwa bliżej niż płynny.
  Równanie modelu: $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\dfrac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Podstawiamy
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
- W promieniach planety: $\dfrac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Wewnątrz granicy Roche'a nie powstanie duży księżyc; są tam za to pierścienie (Saturn).
- Przeliczamy jednostki: $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 129\,000\,\mathrm{km}$

46. Zastosowania analizy zespolonej

Formularze w Zastosowaniach (dziedziny Fizyka, Elektrotechnika, Technika, Geometria i Analiza matematyczna) korzystają z funkcji zmiennej zespolonej z poprzedniego rozdziału. Każdy ma kroki z potencjałem zespolonym, odwzorowaniem lub biegunami i wykres na płaszczyźnie Gaussa.

Przepływ idealny i profil lotniczy: [[complexPotential|potencjał zespolony]] w(z), [[streamline|linie prądu]] jako poziomice Im w i ciśnienie z równania Bernoulliego. Opływ walca, także z cyrkulacją (punkty spiętrzenia, efekt Magnusa, siła nośna $L' = \rho U \Gamma$), ciało Rankine'a, przepływ w narożu i wir. Profil Żukowskiego powstaje z odwzorowania konforemnego $z = \zeta + b^2/\zeta$, [[kuttaCondition|warunek Kutty]] ustala cyrkulację, a twierdzenie Kutty–Żukowskiego siłę nośną; wykres pokazuje linie prądu wokół profilu i C_L w zależności od kąta natarcia.

Pola przez odwzorowania konforemne: kabel koncentryczny ($w = \ln z$ zamienia go w kondensator płaski – pojemność, indukcyjność i impedancja falowa), linia dwuprzewodowa przez homografię, potencjał w klinie między płytami i ustalona temperatura w półpłaszczyźnie; linie pola i ekwipotencjale na wykresie. Naprężenie wokół okrągłego otworu w płycie według Kirscha z potencjałami Kołosowa–Muschelishviliego daje [[stressConcentration|koncentrację naprężeń]] 3 przy rozciąganiu, 2 przy równym rozciąganiu w obu kierunkach i 4 przy ścinaniu. Odwzorowanie Merkatora to logarytm zespolony rzutu stereograficznego: skala $1/\cos\varphi$, indykatrysy Tissota i [[loxodrome|loksodroma]] jako prosta wobec ortodromy.

Sterowanie i sygnały: stabilność pętli $K \cdot e^{(-s\tau)}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ z [[nyquistCriterion|kryterium Nyquista]] (zasada argumentu, zapas wzmocnienia i fazy, wykres Bodego) i z [[rootLocus|linii pierwiastkowych]] (asymptoty, punkt rozejścia, wzmocnienie krytyczne). Projekt filtra [[butterworthFilter|Butterwortha]] i Czebyszewa z biegunów na okręgu i elipsie, cyfrowy filtr drugiego rzędu z biegunami i zerami na płaszczyźnie z, odpowiedź impulsowa przez residua i charakterystyka częstotliwościowa na okręgu jednostkowym. Krzywa rezonansowa oscylatora mechanicznego lub obwodu RLC z odległości $i\omega$ od biegunów, [[qualityFactor|dobroć]] i pasmo. Obwody prądu przemiennego ze wskazami są w rozdziale Elektrotechnika.

Odpowiedź i linie: oscylator Lorentza daje współczynnik załamania i absorpcję ośrodka; bieguny w dolnej półpłaszczyźnie oznaczają przyczynowość i [[kramersKronig|relacje Kramersa–Kroniga]], które aplikacja sprawdza numeryczną całką w sensie wartości głównej. Naturalna szerokość linii widmowej wynika z transformaty Fouriera fali tłumionej. [[smithChart|Wykres Smitha]]: współczynnik odbicia jako homografia, współczynnik fali stojącej, impedancja wejściowa linii, transformator ćwierćfalowy i dopasowanie stubem.

Zabawki na mathtrace.app w sekcji „Wypróbuj sam": zbiory Mandelbrota i Julii oraz baseny Newtona – iteracja na płaszczyźnie zespolonej, którą możesz przesuwać i powiększać.

Przykłady

Wirujący walec: cyrkulacja przesuwa punkty spiętrzenia poniżej osi poziomej.

Input: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Wynik

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

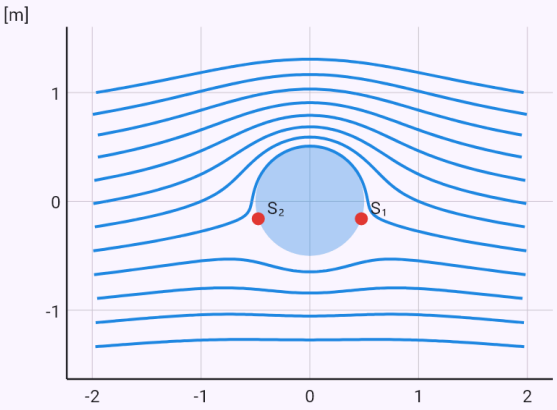
Kroki

- Szukane θ_s; dane
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Opływ walca: strumień U(z + R²/z), ewentualnie z wirem o cyrkulacji Γ (wirujący walec). Na powierzchni prędkość wynosi 2U·sin θ, po bokach dwa razy więcej niż w strumieniu. Cyrkulacja przesuwa punkty spiętrzenia w dół i daje siłę nośną z twierdzenia Kutty–Żukowskiego, L' = ρUΓ na metr długości. Równanie modelu:
  $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- Prędkość sprzężona to pochodna potencjału
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- Na powierzchni walca prędkość jest styczna
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Największa prędkość na powierzchni:
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Punkty spiętrzenia (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Współczynnik ciśnienia z równania Bernoulliego
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Siła nośna na metr długości (twierdzenie Kutty–Żukowskiego): $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Wirujący walec lub piłka z cyrkulacją dostaje siłę nośną prostopadłą do strumienia – efekt Magnusa, który zakrzywia podkręconą piłkę. Statki Flettnera wykorzystują go do napędu.

Wykres

Linie prądu | Wykres



Linie ciągłe to linie prądu, przerywane ekwipotencjale (tylko bez cyrkulacji). Tam, gdzie linie prądu są gęstsze, płyn płynie szybciej.

Profil Żukowskiego 12 % z wygięciem 2 % przy kącie natarcia 4°.

Input: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m]; tc=12[pct];`

```
fc=2[pct]; aoa=4[deg])
```

Wynik

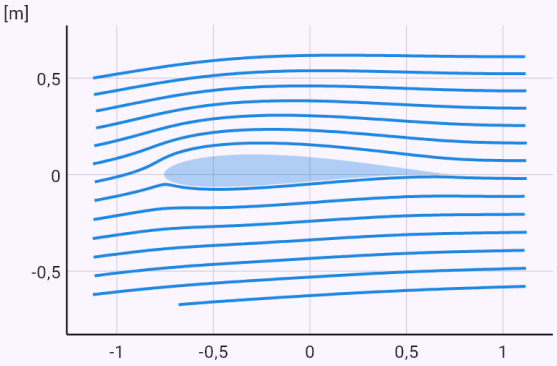
$$C_L \approx 0{,}7243$$

Kroki

- Szukane C_L; dane
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Profil Żukowskiego powstaje z odwzorowania konforemnego z = ζ + b²/ζ okręgu przechodzącego przez punkt ζ = b. Przesunięcie środka w lewo daje grubość, w górę – wygięcie. Opływ okręgu przenosi się na profil, cyrkulację wyznacza warunek Kutty (przepływ gładko opuszcza ostrą krawędź spływu), a siłę nośną twierdzenie Kutty–Żukowskiego. Wychodzi znane C_L ≈ 2π(α + β), jak dla cienkiego profilu. Osiągi całego samolotu są w formularzu Samolot. Równanie modelu
  $z = \zeta + \dfrac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}$
- Okrąg w płaszczyźnie ζ, z którego powstaje profil
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Cyrkulacja z warunku Kutty na krawędzi spływu
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Siła nośna na metr długości (twierdzenie Kutty–Żukowskiego): $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Współczynnik siły nośnej, w nawiasie teoria cienkiego profilu
  $C_L = \dfrac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \dfrac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$
- Płyn idealny: obowiązuje dla małych kątów natarcia bez oderwania przepływu (dla typowych profili mniej więcej do 10–15°). Rzeczywiste skrzydło o skończonej rozpiętości ma mniejszą siłę nośną z powodu oporu indukowanego (formularz Samolot).

Wykres

Linie prądu | Wykres



Linie prądu wokół profilu w rzeczywistej skali. Krawędź spływu jest po prawej – przepływ opuszcza ją gładko (warunek Kutty); nad profilem linie prądu są gęstsze, a ciśnienie niższe.

Ciało Rankine’a – szerokość daleko z tyłu wynosi Q/U.

Input: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

Wynik

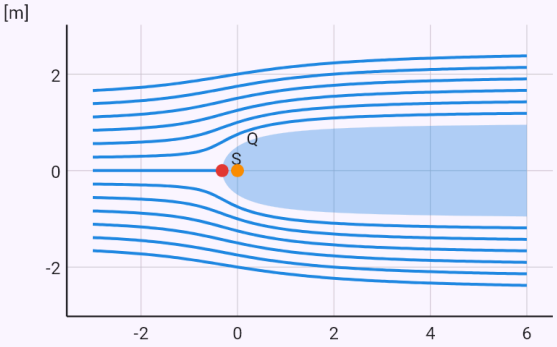
$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Kroki

- Szukane d; dane: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Źródło o wydajności Q (m²/s na metr głębokości) w strumieniu o prędkości U. Rozdzielająca linia prądu ψ = Q/2 otacza półciało Rankine’a, kształtem przypominające przód filaru mostu lub dziób. Z przodu jest punkt spiętrzenia; daleko z tyłu ciało ma szerokość Q/U. Równanie modelu: $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- Prędkość sprzężona to pochodna potencjału: $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Punkt spiętrzenia przed źródłem: $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Rozdzielająca linia prądu – zarys ciała: $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Szerokość ciała daleko z tyłu: $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Największa prędkość na powierzchni ciała (numerycznie) $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$

- Ciało Rankine’a to pierwsze oszacowanie opływu zaokrąglonego przodu (filar, kadłub, krawędź natarcia). W płynie idealnym za ciałem nie ma śladu aerodynamicznego.

Wykres



Linie ciągłe to linie prądu, przerywane ekwipotencjale (tylko bez cyrkulacji). Tam, gdzie linie prądu są gęstsze, płyn płynie szybciej.

Kabel koncentryczny RG-58: impedancja falowa około 50 Ω.

Input: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

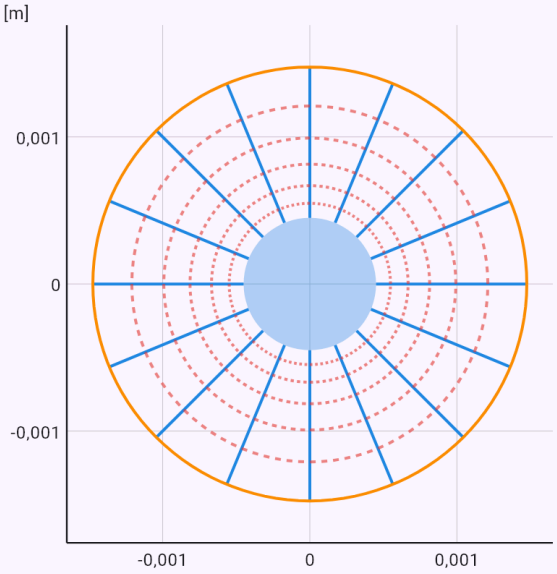
Wynik

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Kroki

- Szukane Z_0; dane:
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Przeliczamy jednostki
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm} = 0{,}001$
- Kabel koncentryczny: logarytm w = ln z rozwija pierścień a < |z| < b w prostokąt o szerokości 2π i wysokości ln(b/a). Kabel staje się kondensatorem płaskim, a pojemność, indukcyjność i impedancja falowa wynikają od razu. Równanie modelu: $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Obraz pierścienia w płaszczyźnie w = ln z – prostokąt
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Potencjał jest liniowy względem Re w
- Pojemność jak kondensatora płaskiego:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Indukcyjność i impedancja falowa linii
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Kabel RG-58 (przewód 0,9 mm, polietylen 2,95 mm) ma około 50 Ω i 100 pF/m. Impedancja falowa zależy tylko od stosunku b/a, więc kable cienkie i grube mają tak samo 50 lub 75 Ω.

Wykres



Linie ciągłe to linie pola, przerywane ekwipotencjale; przecinają się pod kątem prostym. Przewodniki są wypełnione lub pogrubione.

Pojemność linii dwuprzewodowej przez homografię.

Input: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

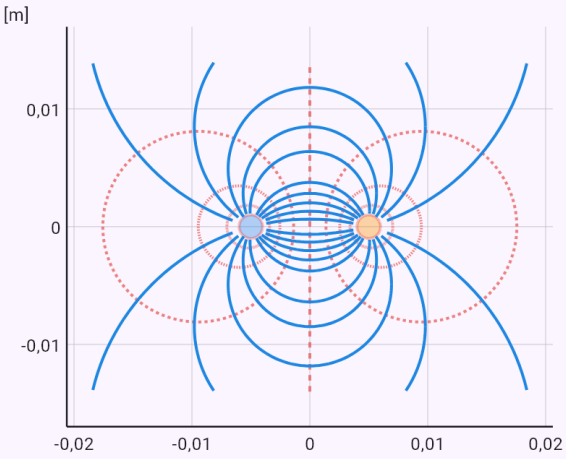
Wynik

$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Kroki

- Szukane C'; dane: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Przeliczamy jednostki:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Linia dwuprzewodowa (dwa równoległe przewody): homografia w = (z − h)/(z + h) zamienia okręgi przewodów we współśrodkowe okręgi – kabel koncentryczny. Ekwipotencjale to okręgi Apoloniusza, linie pola to okręgi przechodzące przez punkty ±h. Równanie modelu
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Obrazy przewodów to współśrodkowe okręgi
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Pojemność linii dwuprzewodowej
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Indukcyjność i impedancja falowa linii
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$
- Płaski kabel symetryczny do anten miał kiedyś 300 Ω, skrętka w kablach danych około 100 Ω. Wzór obowiązuje dla przewodów daleko od innych przewodników.

Wykres



Linie ciągłe to linie pola, przerywane ekwipotencjale; przecinają się pod kątem prostym. Przewodniki są wypełnione lub pogrubione.

Ustalona temperatura w półpłaszczyźnie z gorącą i zimną częścią brzegu.

Input: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC]; x=0.5[m];`

```
y=1[m])
```

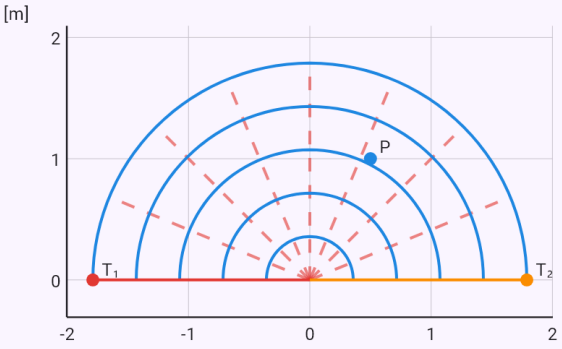
Wynik

$$T \approx 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Kroki

- Szukane T; dane
  $T_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Ustalone przewodzenie ciepła w półpłaszczyźnie y > 0, której brzeg ma po lewej temperaturę T_1, a po prawej T_2. Temperatura jest harmoniczna jak potencjał w klinie 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Izotermy to półproste z początku układu, ciepło płynie po półokręgach. Równanie modelu
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Funkcja harmoniczna o danych wartościach na brzegu
- Kąt punktu: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^{\circ}$
- Temperatura w punkcie:
  $$T = 20 + \frac{80}{\pi}\cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Na przykład grunt pod granicą dwóch powierzchni o różnych temperaturach. W początku układu temperatura brzegu skacze z T_1 na T_2, więc strumień rośnie tam bez ograniczeń.

Wykres



Przerywane półproste to izotermy, ciągłe półokręgi linie przepływu ciepła.

Okrągły otwór w rozciąganej płycie: współczynnik koncentracji naprężeń 3.

Input: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

Wynik

$$K_t \approx 3$$

Kroki

- Szukane K_t; dane: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Rozciąganie σ_x w jednym kierunku: na brzegu otworu w poprzek obciążenia 3σ_x, wzdłuż obciążenia −σ_x (ściskanie). Równanie modelu

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$$

- Potencjały zespolone Kołosowa–Muschelišviliego dla rozciągania σ

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$

- Na brzegu otworu naprężenie promieniowe jest zerowe, naprężenie obwodowe

$$r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$

- Naprężenie obwodowe wokół otworu (Kirsch)

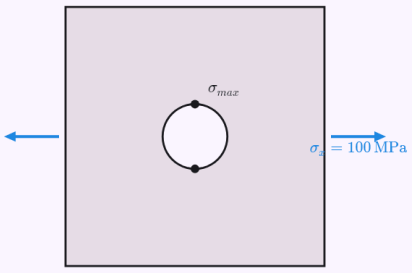
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

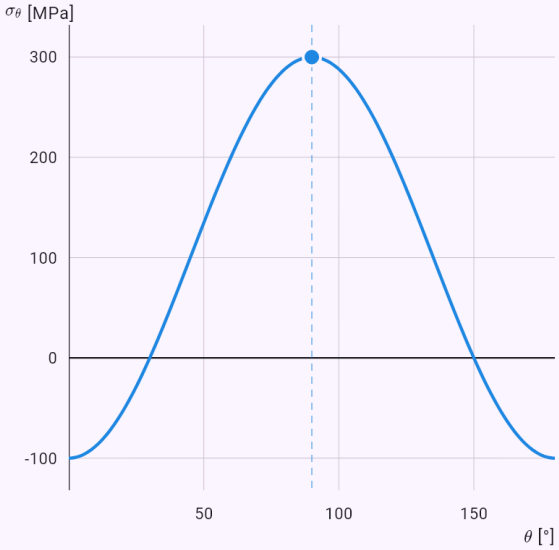
- Największe naprężenie i współczynnik koncentracji

$$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$

- W odległości dwóch promieni od środka naprężenie jest już tylko o 22 % wyższe niż w płycie – koncentracja jest lokalna.
- Obowiązuje dla materiału sprężystego i otworu małego względem płyty (szerokość co najmniej pięć razy większa niż średnica). W wąskim pasie K_t jest mniejsze, ale naprężenie w osłabionym przekroju większe.

Wykres





σ_θ – naprężenie obwodowe na brzegu otworu

$\sigma_{max} = 300\,\mathrm{MPa}$

Płyta z otworem i obciążające ją naprężenie (strzałki nie są w skali). Wykres pokazuje naprężenie obwodowe na brzegu otworu w zależności od kąta θ od osi x; kropki na otworze to miejsca największego naprężenia.

Na szerokości 60° długości na mapie są podwojone.

Input: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

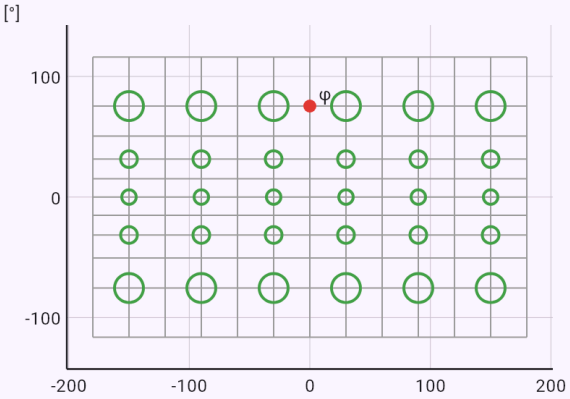
Wynik

$$k \approx 2$$

Kroki

- Szukane k; dane: $\varphi = 60^\circ$
- Odległość równoleżnika φ od równika na mapie o szerokości W i skala k = 1/cos φ. Koła Tissota na wykresie są na globusie jednakowe. Równanie modelu
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$
- Mapa jest konforemna, długości rosną jednakowo we wszystkich kierunkach: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$
- Skala na równoleżniku φ: $k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$
- Pola rosną jak k², na 60° czterokrotnie. Bieguny nie mieszczą się na mapie, leżą w nieskończoności.

Wykres



Południki co 30° i równoleżniki co 15°. Koła Tissota są na globusie jednakowe, a na mapie rosną jak 1/cos φ – kształt jest zachowany, pole nie.

Praga – Nowy Jork: ortodroma i dłuższa loksodroma.

Input: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg]; lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Wynik

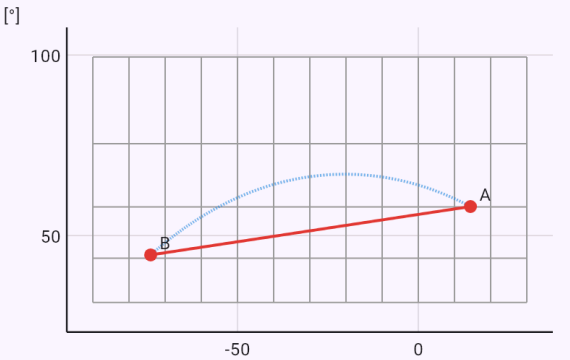
$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Kroki

- Szukane d; dane
$$\varphi_1 = 50{,}08^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71^\circ, \quad \lambda_2 = -$$
- Loksodroma między dwoma miejscami (szerokość i długość geograficzna, zachód ujemnie): jej kurs, długość i porównanie z ortodromą – najkrótszą drogą. Równanie modelu
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$
- Mapa jest konforemna, długości rosną jednakowo we wszystkich kierunkach: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$
- Na mapie loksodroma jest prosta – jej kurs z różnic współrzędnych
$$\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$$
- Długość loksodromy: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos \alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Ortodroma (najkrótsza droga na sferze)
$$d = 2R \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$$

- Loksodroma jest dłuższa niż ortodroma, ale można nią płynąć stałym kursem. Samoloty dalekiego zasięgu latają po ortodromach i stale zmieniają kurs.

Wykres



Linia ciągła to loksodroma (stały kurs), przerywana krzywa to ortodroma (najkrótsza droga), obie w odwzorowaniu Merkatora.

Zapas fazy pętli z trzema inercjami.

Input: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s]; T2=1[s]; T3=1[s])`

Wynik

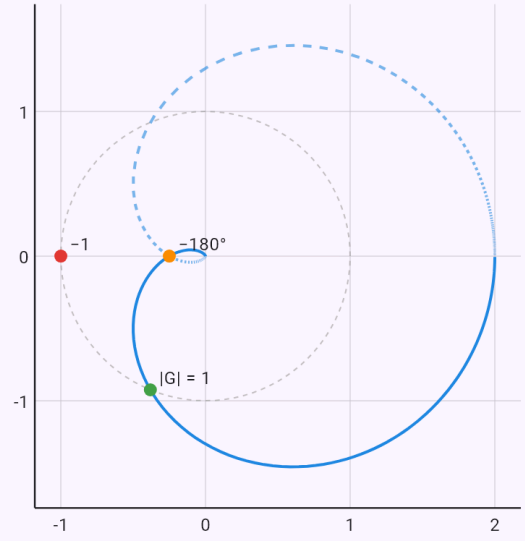
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Kroki

- Szukane φ_m; dane:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Kryterium Nyquista wynika z zasady argumentu: liczba okrążeń punktu −1 przez krzywą G(iω) to różnica niestabilnych biegunów układu zamkniętego i otwartego. Dla stabilnego układu otwartego krzywa nie może okrążać −1. Jak daleko od niego pozostaje, pokazują zapas wzmocnienia i zapas fazy. Równanie modelu
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Zasada argumentu: N okrążeń −1, Z niestabilnych biegunów układu zamkniętego, P otwartego:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Częstotliwość, przy której faza osiąga −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Zapas wzmocnienia i wzmocnienie krytyczne
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Częstotliwość, przy której |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Zapas fazy: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- Krzywa nie okrąża −1 – układ zamknięty jest stabilny:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Typowe wymaganie: zapas wzmocnienia co najmniej 6 dB i zapas fazy 30–60°. Opóźnienie wciąż zabiera fazę, dlatego obiekt z opóźnieniem trudniej regulować.

Wykres

Charakterystyka Nyquista | Wykres



Krzywa ciągła to G(iω) dla ω > 0, przerywana jej odbicie dla ujemnych ω, przerywany okrąg |G| = 1. Układ zamknięty jest stabilny, gdy krzywa nie okrąża −1.

Linie pierwiastkowe z integratorem: wzmocnienie krytyczne 3.

Input: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

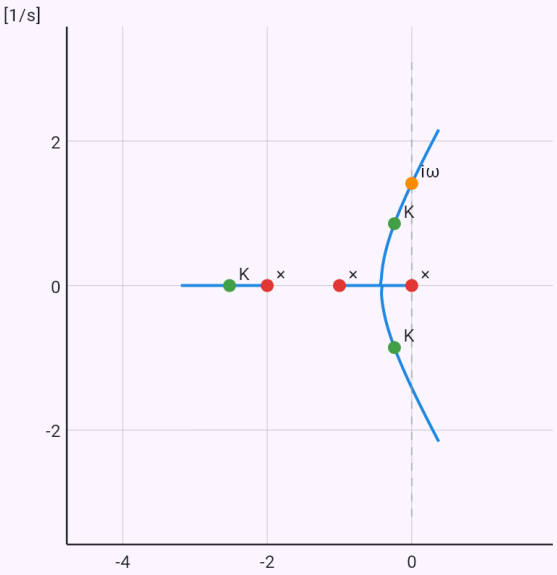
Wynik

$$K_{krit} \approx 3$$

Kroki

- Szukane K_{krit}; dane: $K = 1, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\mathrm{s}$
- Linie pierwiastkowe: jak przesuwają się bieguny układu zamkniętego, gdy wzmocnienie K rośnie od zera. Gałęzie zaczynają się w biegunach układu otwartego, odchodzą wzdłuż asymptot, a na osi urojonej układ traci stabilność (wzmocnienie krytyczne z warunku Routha–Hurwitza). Równanie modelu:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Bieguny układu otwartego (początki gałęzi):
  $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asymptoty gałęzi: środek i kąty
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Punkt rozejścia na osi rzeczywistej:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Przecięcie osi urojonej – granica stabilności
  $s = i\omega: \quad \mathrm{Im}\, D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\mathrm{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Dane wzmocnienie jest mniejsze niż krytyczne – stabilny: $K = 1 < K_{krit}$
- Bieguny układu zamkniętego dla danego K:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Wykres



Gałęzie pokazują bieguny układu zamkniętego przy rosnącym K: zaczynają się w biegunach układu otwartego (×), punkty K to bieguny dla danego wzmocnienia, iω to przecięcie osi urojonej.

Rząd filtra Czebyszewa potrzebny dla 40 dB oktawę wyżej.

Input: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB]; fs=2000[Hz];`

```
As=40[dB])
```

Wynik

$$n \approx 5$$

Kroki

- Szukane n; dane

  $$f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($$

- Czebyszew: zafalowanie A_p w paśmie przepustowym, za to bardziej strome przejście do pasma zaporowego niż filtr Butterwortha tego samego rzędu. Równanie modelu

  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

- Parametr zafalowania: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Wymagany rząd (zaokrąglony w górę)

- Bieguny na półelipsie

  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$$

- Bieguny (względem ω_c)

  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28$$

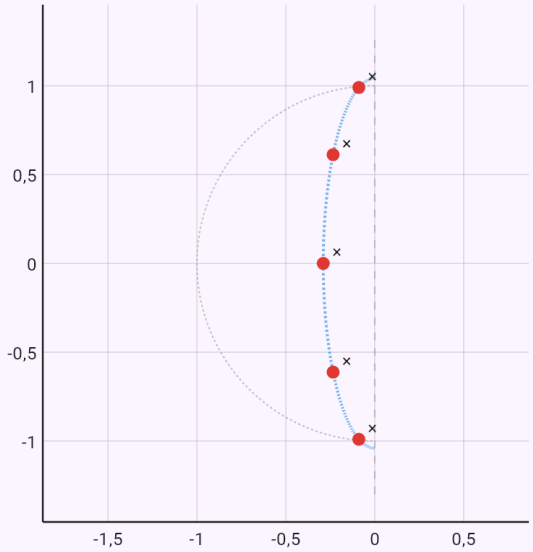
- Transmitancja – wszystkie bieguny po lewej, filtr jest stabilny

  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$

- Czebyszew płaci za stromość zafalowaniem i gorszym opóźnieniem grupowym – gorzej zachowuje kształt impulsów.

Wykres

Bieguny | Wykres



Bieguny w płaszczyźnie zespolonej s (×); układ stabilny ma je na lewo od osi urojonej.

Odpowiedź impulsowa filtra cyfrowego z biegunami zespolonymi przez residua.

Input: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Wynik

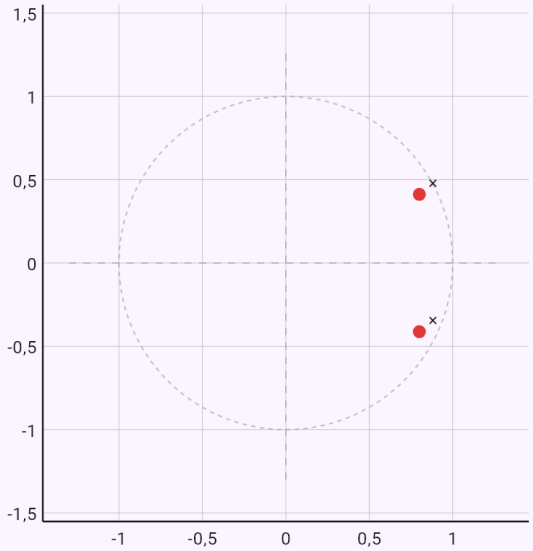
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Kroki

- Szukane $h[n]$; dane:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Filtr cyfrowy oblicza wyjście z kilku ostatnich próbek: y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. Jego transmitancja to funkcja wymierna H(z) (transformata Z). Filtr jest stabilny, gdy wszystkie bieguny leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Odpowiedź impulsowa wynika z odwrotnej transformaty Z przez residua: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n-1}]. Charakterystyka częstotliwościowa to H na okręgu jednostkowym, z = e^(iΩ). Równanie modelu
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Równanie różnicowe filtru:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Bieguny transmitancji
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Bieguny wewnątrz okręgu jednostkowego – filtr jest stabilny: $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Odwrotna transformata Z przez residua:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Sprzężone bieguny zespolone dają tłumione drgania
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \vartheta$
- Wartość odpowiedzi: $h[10] = -0{,}6596$

Wykres

Bieguny i zera | Wykres



Bieguny (×) i zera (○) transmitancji w płaszczyźnie z z okręgiem jednostkowym. Filtr jest stabilny, gdy wszystkie bieguny są wewnątrz.

Dobroć oscylatora z położenia jego biegunów.

Input: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Wynik

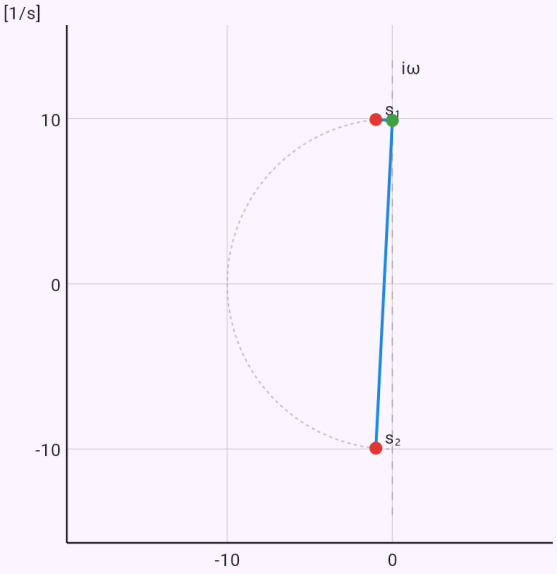
$$Q \approx 5$$

Kroki

- Szukane Q; dane:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Masa na tłumionej sprężynie wymuszana siłą harmoniczną. X/X$_0$ to amplituda względem ugięcia statycznego pod tą samą siłą. Równanie modelu:
  $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Bieguny transmitancji
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplituda z odległości od biegunów
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Szczyt krzywej rezonansowej
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Dobroć i szerokość pasma
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- W pobliżu rezonansu krzywa ma kształt lorentzowski
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Dlatego maszyny nie mogą długo pracować przy częstotliwości własnej swojej ramy, a mosty sprawdza się pod kątem wzbudzania przez pieszych i wiatr.

Wykres

Bieguny | Wykres



Bieguny w płaszczyźnie zespolonej s (×); układ stabilny ma je na lewo od osi urojonej.

Współczynnik załamania poniżej rezonansu oscylatora Lorentza, sprawdzony relacją Kramersa–

Kroniga.

Input: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

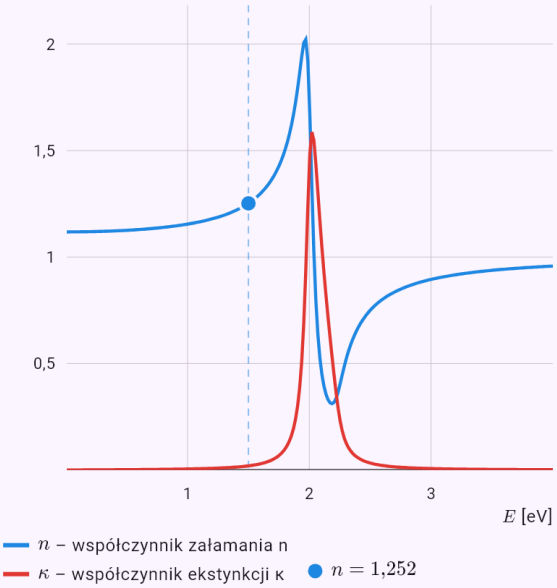
Wynik

$$n \approx 1{,}252$$

Kroki

- Szukane n; dane
  $E_0 = 2\,\text{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\text{eV}, \quad E_p = 1\,\text{eV}, \quad E = 1{,}5\,\text{eV}$
- Współczynnik załamania n i współczynnik ekstynkcji κ z n + iκ = √(1 + χ). Energia fotonu E, rezonans E_0, szerokość Γ i siła oscylatora E_p w elektronowoltach.
  Równanie modelu: $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Bieguny podatności leżą w dolnej półpłaszczyźnie
  $E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4}} - \dfrac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$
- Przyczynowość: relacja Kramersa–Kroniga
  $\operatorname{Im} E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^{\infty} \dfrac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$
- Podatność przy danej energii: $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Sprawdzenie: χ' z całki po χ'' (numerycznie) i bezpośrednio: $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Zespolony współczynnik załamania:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Długość fali i współczynnik absorpcji
  $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 826{,}6\,\text{nm}, \quad \alpha = \dfrac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\text{m}^{-1}$
- Poniżej rezonansu współczynnik załamania rośnie z energią – dyspersja normalna, dzięki której pryzmat rozszczepia światło na barwy.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Naturalna szerokość linii D sodu – około 10 MHz.

Input: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

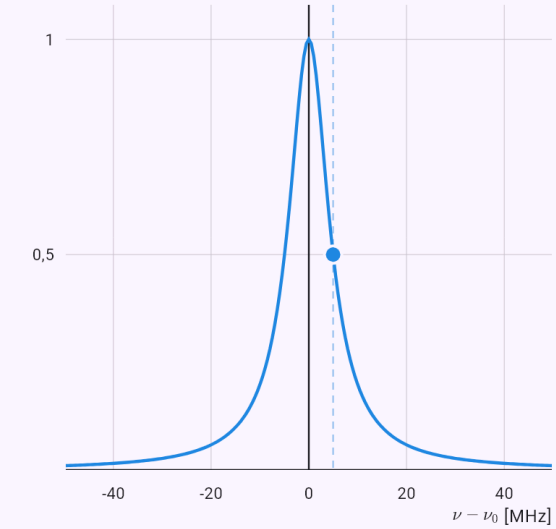
Wynik

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$

Kroki

- Szukane $\Delta\nu$; dane: $\tau = 16\,\mathrm{ns}$
- Wzbudzony atom emituje falę zanikającą wykładniczo z czasem życia τ. Jej transformata Fouriera (residuum w jednym biegunie) daje lorentzowski kształt linii o pełnej szerokości Δν = 1/(2πτ) – naturalna szerokość linii widmowej. Równanie modelu:
  $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Transformata Fouriera zanikającej fali
  $$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$
- Lorentzowski kształt linii i jego szerokość
  $I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$
- Naturalna szerokość linii:
  $$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\mathrm{ns}} = 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$
- Linia D sodu (τ ≈ 16 ns) ma naturalną szerokość około 10 MHz. Rzeczywiste linie w gazie są dodatkowo poszerzone przez efekt Dopplera i zderzenia.

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Dopasowanie obciążenia 100 Ω do linii 50 Ω zwartym stubem.

Input: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

Wynik

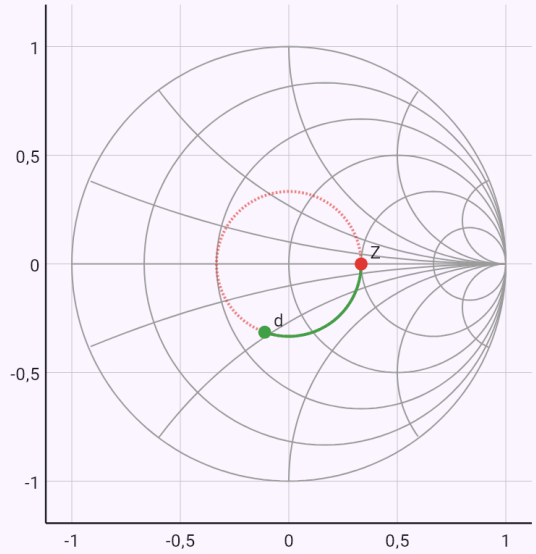
$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

Kroki

- Szukane d; dane
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Współczynnik odbicia Γ = (Z − Z_0)/(Z + Z_0) na linii o impedancji falowej Z_0 jest homografią. Odwzorowuje prawą półpłaszczyznę impedancji na koło jednostkowe – wykres Smitha. Przesunięcie wzdłuż linii w stronę generatora to obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara po okręgu |Γ| = const, pół długości fali to pełny obrót. Stąd współczynnik fali stojącej, impedancja wejściowa linii, transformator ćwierćfalowy i dopasowanie odcinkiem linii (stubem). Równanie modelu
  $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{z-1}{z+1}, \quad z = \dfrac{Z_L}{Z_0}$
- Znormalizowana impedancja obciążenia: $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Współczynnik odbicia:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Współczynnik fali stojącej i tłumienie odbicia
  $PSV = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$
- Długość fali na linii: $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Znormalizowana admitancja obciążenia: $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Miejsce, w którym część rzeczywista admitancji wynosi 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Długość zwartego stubu kompensującego susceptancję
  $y_s = -j\,\mathrm{ctg}\,\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arcctg}\,(0{,}707$
- Stub to kawałek linii zakończony zwarciem, dołączony równolegle. Przy wybranej częstotliwości linia przed nim nie widzi wtedy odbicia.

Wykres



Okręgi stałej rezystancji i łuki stałej reaktancji (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). Przerywany okrąg ma promień |Γ| (stały WFS), kolorowy łuk to przesunięcie wzdłuż linii w stronę generatora.

Znane ograniczenia

- Przepływ jest idealny: bez lepkości, oderwania i śladu. Model nie daje ani oporu, ani zachowania przy dużych kątach natarcia.
- Odwzorowania konforemne są tylko dla wymienionych kształtów; ogólny kształt przewodników lub profilu (przekształcenie Schwarza–Christoffela) nie jest jeszcze obsługiwany.
- Transmitancja pętli ma stałą postać z trzema inercjami i najwyżej dwoma integratorami; zera w liczniku i niestabilna pętla otwarta nie są jeszcze obsługiwane.
- Filtr cyfrowy jest drugiego rzędu, filtry analogowe tylko dolnoprzepustowe.