Mathtrace – podręcznik

III. Analiza matematyczna

Spis treści

III. Analiza matematyczna

25. Granice
26. Pochodne
27. Badanie funkcji
28. Funkcje wielu zmiennych
    - Mapa twierdzeń całkowych
    - Fizyczne zastosowania twierdzeń całkowych
29. Wielomian Taylora
30. Całki nieoznaczone
    - Całki podstawowe i podstawienie
    - Całkowanie przez części
    - Funkcje wymierne
    - Funkcje trygonometryczne
    - Funkcje hiperboliczne
    - Pierwiastki
31. Całki oznaczone i ich zastosowania
    - Całka oznaczona
    - Całki niewłaściwe
    - Pole pod krzywą i między krzywymi
    - Długość łuku
    - Objętość bryły obrotowej
    - Pole powierzchni bryły obrotowej
    - Zastosowania z parametrami
    - Środek ciężkości
    - Krzywe parametryczne i krzywe we współrzędnych biegunowych
    - Krzywe dane równaniem
32. Szeregi nieskończone
    - Szeregi liczbowe

- Szeregi potęgowe
- Szeregi Taylora

33. Szeregi Fouriera

25. Granice

Mathtrace oblicza granicę funkcji jednej zmiennej w punkcie, w nieskończoności i granice jednostronne, a postępuje jak w szkole: najpierw próbuje podstawić do funkcji. Granica ciągu (n → ∞) działa tak samo – także symbol 1^∞ lub suma potęg z wyłączonym najszybciej rosnącym wyrazem.

Jeśli podstawienie daje symbol nieoznaczony (0/0, ∞/∞, …), wybiera przekształcenie według postaci funkcji – rozkład na czynniki i skracanie, mnożenie przez sprzężenie, dzielenie przez najwyższą potęgę, znaną granicę (sin x / x) lub regułę de l'Hospitala, w razie potrzeby wielokrotnie. Potęgę ze zmienną w podstawie i w wykładniku (symbole 0^0, ∞^0, 1^∞) zapisuje jako e^(g·ln f) i liczy granicę w wykładniku; gdzie funkcja jest określona tylko po jednej stronie punktu (x^(ln(x+1)) tylko dla x > 0), oblicza granicę z tej strony i to mówi. Chip „Reguła de l'Hospitala" wybiera regułę od razu; gdzie podstawienie nie daje symbolu nieoznaczonego, kroki wyjaśniają, dlaczego nie można jej użyć.

Inne litery w zadaniu (k w (1 + k/x)^x) są parametrami – stałymi, z którymi liczy ogólnie; gdy wynik zachodzi tylko dla dodatnich wartości parametru, mówi to. Litera może być też w punkcie granicy: lim (x² − a²)/(x − a) dla x → a = 2a. Granica z parametrem nie dostaje wykresu.

Granica nieskończona lub granica, która nie istnieje (granice jednostronne się różnią), nigdy nie jest podawana jako liczba – aplikacja mówi to słowami i pokazuje granice jednostronne. Wynik ma wykres funkcji w pobliżu punktu z zaznaczoną wartością granicy.

Dla granicy ciągu wykres pokazuje punkty a_1, a_2, a_3, … zamiast ciągłej krzywej.

Jak to wpisać

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Wpisana granica: po słowie lim w nawiasie zmienna, strzałka -> i punkt, potem funkcja.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Granica w nieskończoności: nieskończoność zapisuje się oo (minus nieskończoność -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Granica jednostronna: + (z prawej) lub − (z lewej) za punktem.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Ze zdjęcia albo w LaTeX-u tak, jak rozpozna to aparat.
`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	Granica ciągu w nieskończoności.

Przykłady

Symbol nieoznaczony 0/0 – rozkładamy licznik na czynniki i skracamy.

Input: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

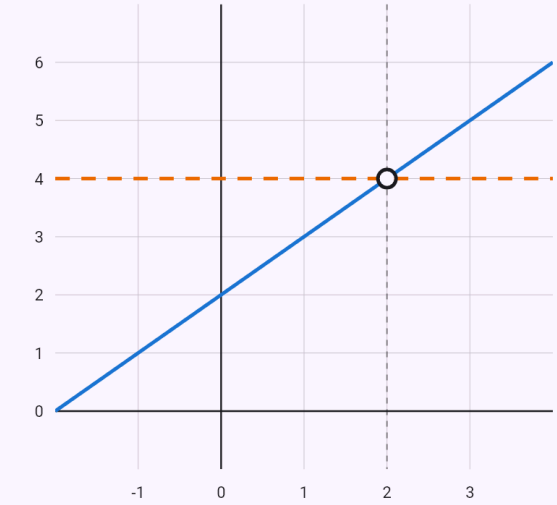
Wynik

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Kroki

- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Przekształcamy i skracamy
  $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Podstawiamy: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Wykres



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$y = 4$

Granica:

○ $(2; 4)$

Pusta kropka – wartość, do której funkcja się zbliża (w samym punkcie nie musi być określona); linia przerywana – granica.

Granica w nieskończoności – licznik i mianownik dzielone przez najwyższą potęgę.

Input: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Wynik

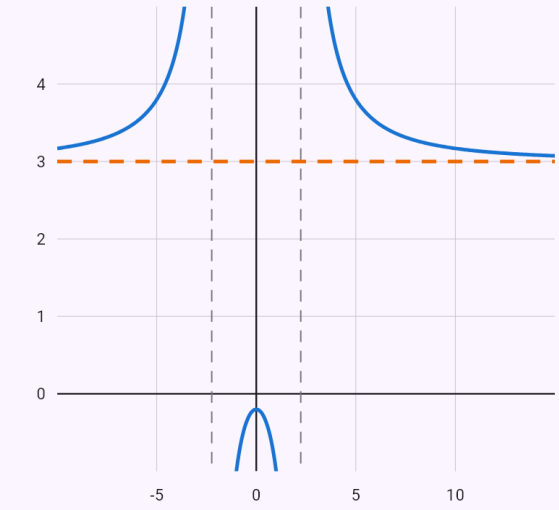
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Kroki

- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{\infty}{\infty}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Dzielimy licznik i mianownik przez x^2 – wyrazy typu c/x^n dążą do zera

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Wykres



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Pusta kropka – wartość, do której funkcja się zbliża (w samym punkcie nie musi być określona); linia przerywana – granica.

Znana granica sin x / x.

Input: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Wynik

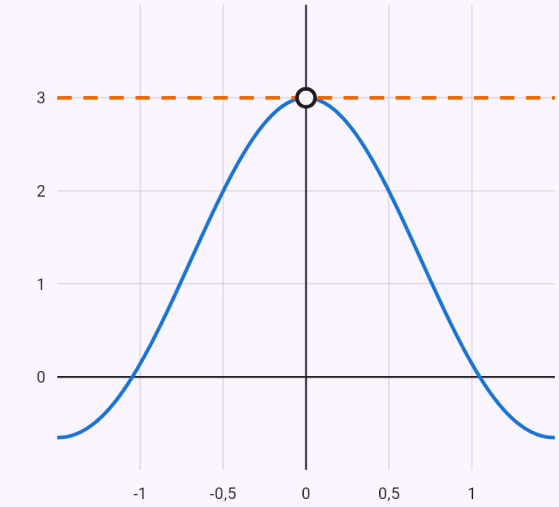
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Kroki

- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Korzystamy ze znanej granicy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Wykres



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Granica:

○ $(0; 3)$

Pusta kropka – wartość, do której funkcja się zbliża (w samym punkcie nie musi być określona); linia przerywana – granica.

Reguła de l’Hospitala, zastosowana dwa razy z rzędu.

Input: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Wynik

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Kroki

- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Reguła de l’Hospitala – różniczkujemy licznik i mianownik

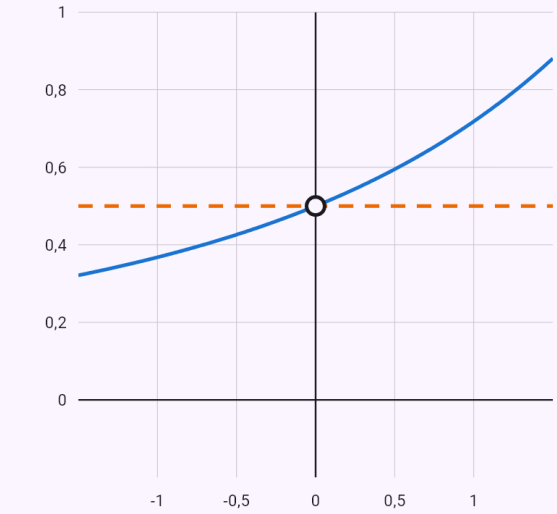
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Reguła de l’Hospitala – różniczkujemy licznik i mianownik

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Podstawiamy: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Wykres



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Granica:

$\circ\ \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Pusta kropka – wartość, do której funkcja się zbliża (w samym punkcie nie musi być określona); linia przerywana – granica.

Symbol nieoznaczony 0^0 – potęga zapisana jako e^(g·ln f); funkcja jest określona tylko dla x > 0, więc

granica prawostronna.

Input: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Wynik

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Kroki

- Na lewo od 0 funkcja nie jest określona, więc liczymy granicę prawostronną.
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony 0^0 – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Zmienna występuje i w podstawie, i w wykładniku – potęgę zapisujemy jako e do potęgi wykładnik razy logarytm podstawy i liczymy granicę w wykładniku

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x\cdot\ln(x+1)}$$
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $0\cdot\infty$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Zapisujemy iloczyn jako iloraz

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x\cdot\ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{\infty}{\infty}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Reguła de l'Hospitala – różniczkujemy licznik i mianownik

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Czynnik $x+1$ ma w punkcie wartość 1 – wyłączamy go przed granicę

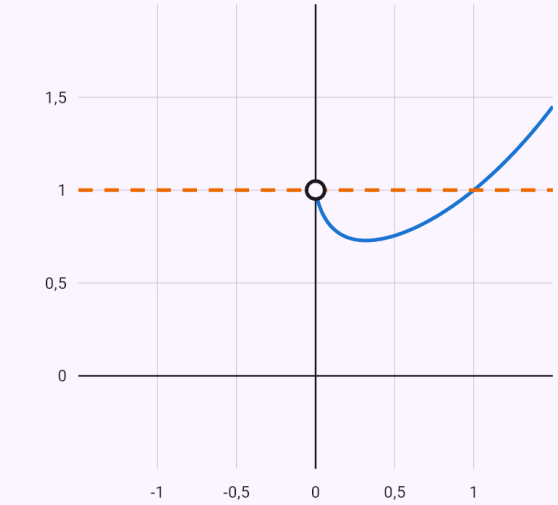
  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1\cdot\lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Reguła de l'Hospitala – różniczkujemy licznik i mianownik

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$

- Podstawiamy

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- Wstawiamy z powrotem granicę wykładnika:
  $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$

Wykres



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Granica:
○ $(0;1)$

Pusta kropka – wartość, do której funkcja się zbliża (w samym punkcie nie musi być określona); linia przerywana – granica.

Granice jednostronne się różnią – granica nie istnieje.

Input: `lim(x->0) 1/x`

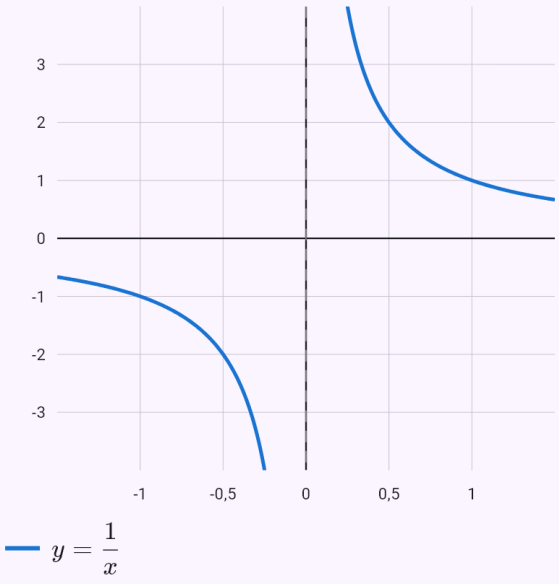
Wynik

Granica nie istnieje – granice jednostronne są różne.

Kroki

- Po podstawieniu wychodzi niezerowa liczba przez zero – granica jest nieskończona, jej znak z lewej i z prawej: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Granice jednostronne: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Wykres



Granica ciągu – wyłączamy najszybciej rosnący wyraz 9^n.

Input: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Wynik

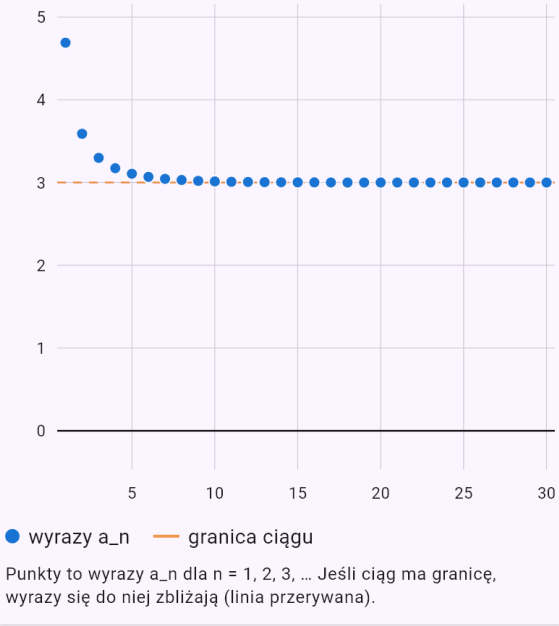
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Kroki

- Wyłączamy najszybciej rosnący wyraz 9^n – pozostałe podzielone przez niego dążą do zera

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Wykres



Punkty to wyrazy a_n dla n = 1, 2, 3, … Jeśli ciąg ma granicę, wyrazy się do niej zbliżają (linia przerywana).

Granica z parametrem k – znana granica (1 + 1/x)^x = e daje e^k.

Input: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Wynik

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Kroki

- Litery inne niż zmienna to parametry – ustalone liczby, które traktujemy jak stałe: k
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony 1^{∞} – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Podstawę zapisujemy jako $1+\frac{1}{t}$ z t = $\frac{x}{k}$, a potęgę jako $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ do potęgi k. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym dąży do e – znana granica $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Zostaje granica wykładnika

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Pochodne

Aplikacja różniczkuje według reguł – sumy, stałej, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej – i przy każdym kroku mówi, której reguły użyła. Radzi sobie też z pochodnymi wyższych rzędów i wartością pochodnej w punkcie. Funkcje podstawowe (x^2, $\sin x$, e^x, …) można też zróżniczkować z definicji, jako granicę ilorazu różnicowego. Wynik ma wykres funkcji i jej pochodnej.

Dla funkcji danej w postaci uwikłanej równaniem w x i y ($x^3 + y^3 = 3xy$) różniczkuje obie strony względem x (y jako funkcja x) i wyznacza y' albo używa wzoru $y' = -F_x / F_y$; znajduje też y'', a w danym punkcie styczną i normalną, i rysuje krzywą.

W punkcie osobliwym (krzywa przecina samą siebie lub ma ostrze) znajduje styczne z wyrazów najniższego stopnia równania – dla liścia Kartezjusza w początku układu x = 0 i y = 0.

Różniczka $df = f'(x)\,dx$, w punkcie z krokiem („differential √x, x0 = 4, dx = 0.1") z wartością przybliżoną $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. „approx √4.1" wybiera punkt $x_0 = 4$, gdzie wartość jest znana dokładnie, i porównuje oszacowanie z prawdziwą wartością.

Jak to wpisać

`(x^2 sin x)'`	Pochodna z primem za nawiasem.
`d/dx (e^x / x)`	Zapis d/dx, także ze zdjęcia (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Pochodne wyższych rzędów z większą liczbą primów albo z rzędem przy chipie „Zróżniczkuj".
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	Pochodna w punkcie albo uzupełnij punkt przy chipie.
`x^2 sin x`	Wyrażenie z chipem „Zróżniczkuj" – tam wybierzesz też rząd, punkt i metodę (według reguł / z definicji).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Równanie w x i y – chip „Pochodna funkcji uwikłanej" (rząd 1 lub 2, metoda, punkt $[x_0; y_0]$) lub „Wykres krzywej"; zapis diff(x^3+y^3=3xy, x).
`differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`	Różniczka w punkcie z krokiem (bez punktu ogólnie: differential x^2 sin x).
`approx √4.1`	Wartość przybliżona przez różniczkę.

Przykłady

Pochodna iloczynu.

Input: `(x^2 sin x)'`

Wynik

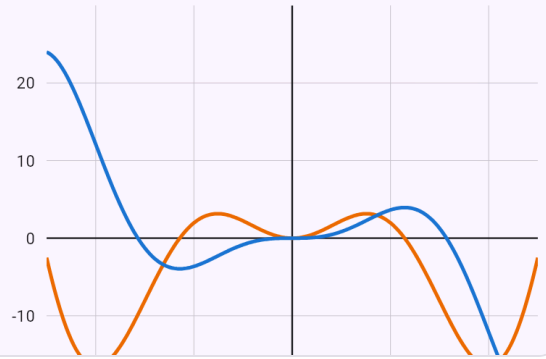
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

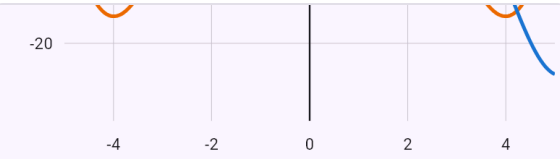
Kroki

- Pochodna iloczynu (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Wykres





$y = x^2 \sin x$

$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Tam, gdzie pochodna jest dodatnia, funkcja rośnie; gdzie jest ujemna, maleje. W miejscach zerowych pochodnej funkcja ma styczną poziomą.

Pochodna ilorazu.

Input: `d/dx (e^x / x)`

Wynik

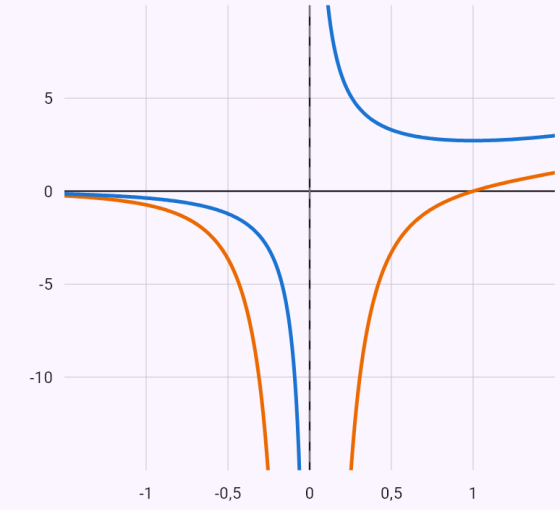
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Kroki

- Pochodna ilorazu (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Wykres



$y = \frac{e^x}{x}$

$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

Tam, gdzie pochodna jest dodatnia, funkcja rośnie; gdzie jest ujemna, maleje. W miejscach zerowych pochodnej funkcja ma styczną poziomą.

Druga pochodna.

Input: `(x^3 ln x)''`

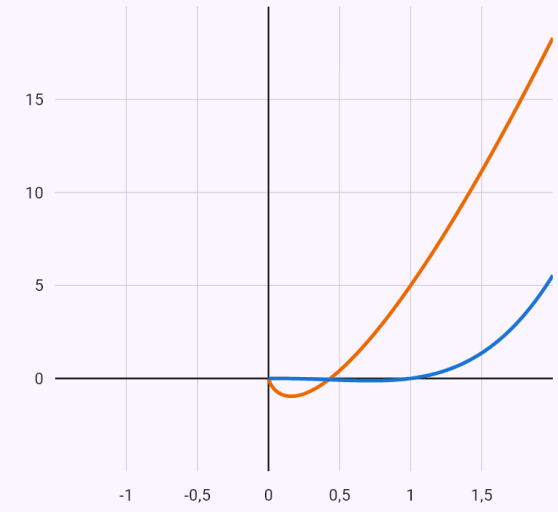
Wynik

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Kroki

- Pochodna rzędu 1: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Pochodna iloczynu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Pochodna rzędu 2: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- Pochodna sumy to suma pochodnych:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Wyłączamy stałą przed pochodną:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Pochodna iloczynu (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Podstawiamy:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Podstawiamy: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Upraszczamy: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Wykres



$y = x^3 \ln x$
$y'' = 5x + 6x \ln x$

Tam, gdzie druga pochodna jest dodatnia, funkcja jest wypukła (wygina się do góry); gdzie jest ujemna, jest wklęsła (wygina się w dół).

Pochodna z definicji, jako granica.

Input: `x^2` Zróżniczkuj → Z definicji

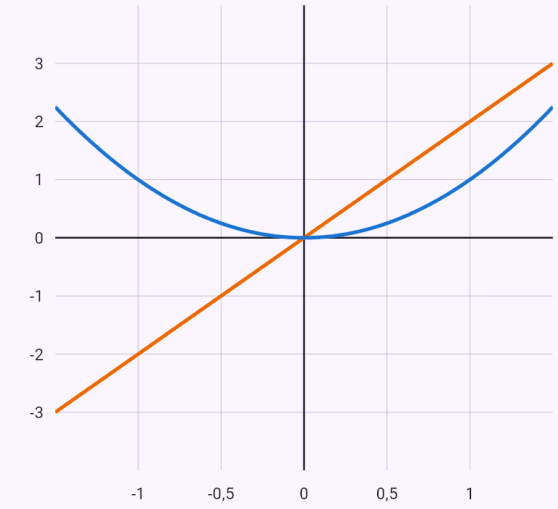
Wynik

$$y' = 2x$$

Kroki

- Pochodna z definicji
  $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- Po podstawieniu wychodzi symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ – wyrażenie trzeba przekształcić.
- Przekształcamy i skracamy
  $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$
- Podstawiamy: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Wykres



$y = x^2$
$y' = 2x$

Tam, gdzie pochodna jest dodatnia, funkcja rośnie; gdzie jest ujemna, maleje. W miejscach zerowych pochodnej funkcja ma styczną poziomą.

Pochodna funkcji uwikłanej – liść Kartezjusza, styczna i normalna w [3/2; 3/2], druga pochodna.

Input: `x^3 + y^3 = 3xy` Pochodna funkcji uwikłanej, rząd 2, punkt [3/2; 3/2]

Wynik

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Założenia: $y^2 - x \neq 0$

Kroki

- Funkcja y = y(x) jest zadana równaniem $x^3 + y^3 = 3xy$ – różniczkujemy obie strony względem x, traktując y jako funkcję x (pochodna funkcji złożonej: np. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Różniczkujemy obie strony: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Wyrazy z y' na lewo, resztę na prawo, y' przed nawias: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Wyznaczamy y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- Druga pochodna – y' różniczkujemy znów względem x (y i y' są funkcjami x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

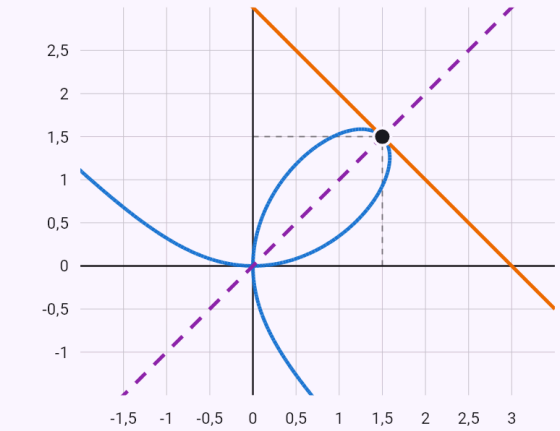
- Podstawiamy y'

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Na krzywej zachodzi $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – co wyrażenie upraszcza: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Punkt $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ leży na krzywej: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\, y=\frac{3}{2}} = 0$
- Pochodna w punkcie $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – współczynnik kierunkowy stycznej: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- Styczna: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- Normalna jest prostopadła do stycznej, jej współczynnik kierunkowy to 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- Druga pochodna w punkcie: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Wykres



$x^3 + y^3 = 3xy$
t: $y = 3 - x$
n: $y = x$

Krzywa zadana równaniem. W danym punkcie styczna (ciągła) i normalna (przerywana).

Różniczka √x w 4 z krokiem 0,1.

Input: `differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Wynik

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Kroki

- Różniczka – liniowa część przyrostu funkcji:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Różniczka w x_0 dla kroku h
  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Przyrost zastępujemy różniczką. Dokładna wartość to $2{,}0248457$, błąd oszacowania $0{,}00015$
  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Wartość przybliżona ∛27,1 przez różniczkę.

Input: `approx \sqrt[3]{27.1}`

Wynik

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Kroki

- Zapisujemy liczbę jako wartość funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w pobliżu $x_0 = 27$, gdzie ją znamy dokładnie; krok wynosi $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- Różniczka – liniowa część przyrostu funkcji:
  $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- Różniczka w x_0 dla kroku h
  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \frac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Przyrost zastępujemy różniczką. Dokładna wartość to $3{,}0036991$, błąd oszacowania $0{,}0000046$
  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Badanie funkcji

Aplikacja bada funkcję w zwykłej kolejności: dziedzina, parzystość lub nieparzystość, punkty przecięcia z osiami, znak funkcji, granice na krańcach dziedziny i asymptoty, pierwsza pochodna – monotoniczność i ekstrema (także przez wyższe pochodne), druga pochodna – wypukłość i punkty przegięcia, a na koniec zbiór wartości. Wszystko podsumowuje w przeglądzie i rysuje wykres z zaznaczonymi punktami.

Dla funkcji trygonometrycznej aplikacja znajduje okres, bada funkcję na jednym okresie i zapisuje wyniki z okresem (maksimum w $x = \pi/2 + 2k\pi$); jeśli okresowa jest tylko pochodna ($x + 2 \sin x$), ekstrema i monotoniczność powtarzają się z okresem. Wartości bezwzględne usuwa według znaków na przedziałach, a w ostrzach porównuje pochodne jednostronne; gdzie pochodna jest nieskończona, pokazuje styczną pionową. Zagnieżdżone wartości bezwzględne i sumy wartości bezwzględnych bada przedziałami; gdzie funkcja jest na przedziale stała, mówi to wraz z jej wartością (minimum w każdym punkcie przedziału).

Ekstrema globalne na przedziale domkniętym: „extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]” – aplikacja znajduje punkty stacjonarne i punkty bez pochodnej wewnątrz przedziału i porównuje wartości w nich i na końcach. Bez przedziału „extrema …” bada funkcję. Funkcję odwrotną („inverse of f(x) = …”) otrzymuje z rozwiązania $y = f(x)$ względem x, sprawdzonego złożeniem; wykres pokazuje f, f^{-1} i prostą $y = x$.

Wierzchołek paraboli („vertex of the parabola y = x^2 - 4x + 7”, wystarczy samo y = …) przez uzupełnienie do kwadratu – z osią, zbiorem wartości i przesunięciem wykresu $y = ax^2$. Funkcję złożoną zapisz z jej definicjami: „f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))”.

Wykres przez przesunięcia, rozciągnięcia i odbicia: „graph transformations y = 2sin(3(x - 1)) + 1” – aplikacja zaczyna od funkcji podstawowej (sin, cos, tg, ctg, e^x, a^x, ln, $\log_a$, pierwiastek, potęga, 1/x, |x|) i krok po kroku ściska ją lub rozciąga wzdłuż osi x, przesuwa w prawo lub w lewo, rozciąga wzdłuż osi y, odbija i przesuwa w górę lub w dół; także |f(x)| i f(|x|). Wykres pokazuje funkcję podstawową i wynikową.

Jak to wpisać

`analysis y = x^3 - 3x`	Ze słowem „analysis” przed funkcją.
`x^3 - 3x`	Funkcja z chipem „Zbadaj funkcję”.
`extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]`	Ekstrema globalne na przedziale domkniętym (także „max and min …, x ∈ [a, b]”).
`inverse of f(x) = (2x+1)/(x-3)`	Funkcja odwrotna (także „f^{-1}, f(x) = …”).

Przykłady

Wielomian – ekstrema i punkt przegięcia.

Input: `x^3 - 3x` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Parzystość: nieparzysta

Miejsca zerowe: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right],\ [0;\ 0],\ \left[\sqrt{3};\ 0\right]$

Rosnąca: $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$

Malejąca: $\langle -1;\ 1\rangle$

Maksimum lokalne: $[-1;\ 2]$

Minimum lokalne: $[1;\ -2]$

Wypukła: $\langle 0;\ \infty)$

Wklęsła: $(-\infty;\ 0\rangle$

Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – funkcja jest nieparzysta (jej wykres jest symetryczny względem początku układu).
- Punkty przecięcia z osią x:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, czyli
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right],\ [0;\ 0],\ \left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ \infty\right)$ i ujemna dla $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$
- Granice na krańcach dziedziny
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Brak asymptoty w ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Pierwsza pochodna:
  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- Punkty stacjonarne: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

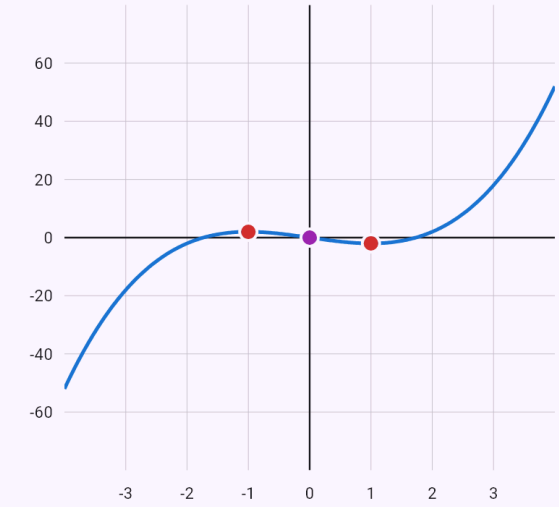
	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  Funkcja jest rosnąca na $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$ i malejąca na $\langle -1;\ 1\rangle$
- W $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – maksimum lokalne.
- W $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – minimum lokalne.
- Maksimum lokalne $[-1;\ 2]$, minimum lokalne $[1;\ -2]$
- Druga pochodna: $f''(x) = 6x$
- Kandydaci na punkty przegięcia: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  Funkcja jest wypukła na $\langle 0;\ \infty)$ i wklęsła na $(-\infty;\ 0\rangle$
- W $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – pierwsza niezerowa pochodna (od trzeciej wzwyż) jest rzędu nieparzystego: punkt przegięcia.
- Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Wykres



$y = x^3 - 3x$

Ważne punkty:

- maksimum $(-1; 2)$
- przegięcie $(0; 0)$
- minimum $(1; -2)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Funkcja wymierna – asymptoty.

Input: `x^2/(x - 1)` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = (-\infty;\ 0\rangle \cup \langle 4;\ \infty)$

Parzystość: ani parzysta, ani nieparzysta

Miejsca zerowe: $[0;\ 0]$

Rosnąca: $(-\infty;\ 0\rangle,\ \langle 2;\ \infty)$

Malejąca: $\langle 0;\ 1),\ (1;\ 2\rangle$

Maksimum lokalne: $[0;\ 0]$

Minimum lokalne: $[2;\ 4]$

Wypukła: $(1;\ \infty)$

Wklęsła: $(-\infty;\ 1)$

Asymptoty: $x = 1,\ y = x + 1$

Kroki

- Dziedzina – założenia $x \neq 1$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Dziedzina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nie jest symetryczna względem zera – funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in (1;\ \infty)$ i ujemna dla $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$
- Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Asymptoty pionowe (granica jest tam nieskończona): $x = 1$
- Asymptota w ±∞: $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – prosta $y = x + 1$
- Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Punkty stacjonarne: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

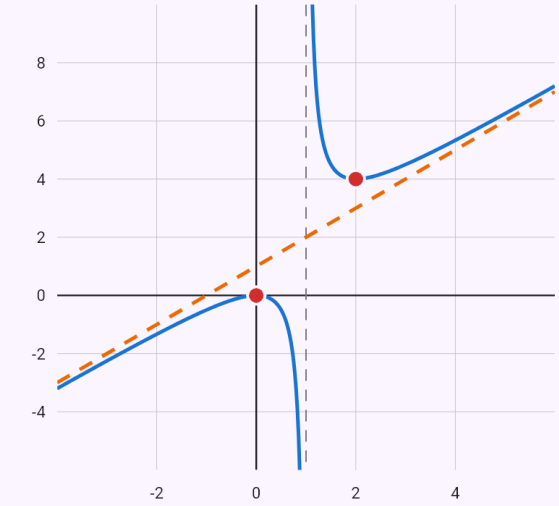
	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

  Funkcja jest rosnąca na $(-\infty;\ 0\rangle,\ \langle 2;\ \infty)$ i malejąca na $\langle 0;\ 1),\ (1;\ 2\rangle$
- W $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maksimum lokalne.
- W $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – minimum lokalne.
- Maksimum lokalne $[0;\ 0]$, minimum lokalne $[2;\ 4]$
- Druga pochodna: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- Równanie $f''(x) = 0$ nie ma rozwiązania.
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  Funkcja jest wypukła na $(1;\ \infty)$ i wklęsła na $(-\infty;\ 1)$
- Funkcja nie ma punktów przegięcia.
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = (-\infty;\ 0\rangle \cup \langle 4;\ \infty)$

Wykres



$y = \frac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Ważne punkty:

● maksimum $(0; 0)$ ● minimum $(2; 4)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Funkcja okresowa – wszystko na jednym okresie, wyniki z okresem.

Input: `sin 2x + 2cos x` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Parzystość: ani parzysta, ani nieparzysta

Okres: $p = 2\pi$

Miejsca zerowe: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Rosnąca: $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Malejąca: $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Maksimum lokalne: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Minimum lokalne: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Wypukła:
$\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right.$

Wklęsła:
$\left\langle \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, \left\langle -\arcsin \right.$

Punkty przegięcia:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- Funkcja jest okresowa o okresie 2π – badamy ją na jednym okresie (od 0 do 2π) i wyniki powtarzamy z okresem, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – ani f(x), ani −f(x): funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 2$, czyli $[0;\ 2]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ i ujemna dla $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Funkcja okresowa (która nie jest stała) nie ma granicy w ±∞.
- Pierwsza pochodna: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Punkty stacjonarne

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(0;\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  Funkcja jest rosnąca na $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$ i malejąca na $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$
- Maksimum lokalne $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, minimum lokalne $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Druga pochodna: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Kandydaci na punkty przegięcia

  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja

jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi+\arcsin(\frac{1}{4}))$	$(\pi+\arcsin(\frac{1}{4});\ \frac{3}{}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkcja jest wypukła na i wklęsła na

$$\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi \right.$$

$$\left\langle \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi \right\rangle,\ \left\langle -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \right.$$

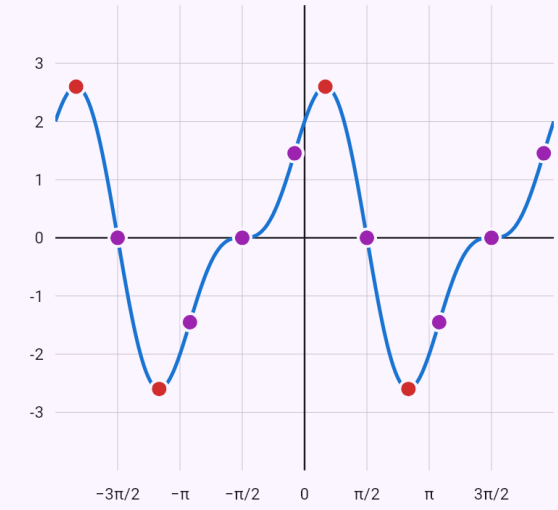
- Punkty przegięcia

$$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic:

$$\mathrm{ZW}_f=\left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

Wykres



$y=\sin 2x+2\cos x$

Ważne punkty:

- maksimum $\left(-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- przegięcie $\left(-\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- minimum $\left(-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- przegięcie $\left(-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- przegięcie $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- przegięcie $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- maksimum $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- przegięcie $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- minimum $\left(\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- przegięcie $\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- przegięcie $\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- przegięcie $\left(2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Tangens – asymptoty pionowe, zbiór wartości $\mathbb{R}$.

Input: `tg x` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Parzystość: nieparzysta

Okres: $p = \pi$

Miejsca zerowe: $[k\pi;\ 0]$

Rosnąca: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Wypukła: $\left\langle k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Wklęsła: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right\rangle$

Punkty przegięcia: $[k\pi;\ 0]$

Asymptoty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Kroki

- Dziedzina – założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Funkcja jest okresowa o okresie π – badamy ją na jednym okresie (od 0 do π) i wyniki powtarzamy z okresem, k $\in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ – funkcja jest nieparzysta (jej wykres jest symetryczny względem początku układu).
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, czyli $[k\pi;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in \left(k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ i ujemna dla $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right)$
- Funkcja okresowa (która nie jest stała) nie ma granicy w ±∞.
- Granice na krańcach dziedziny
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Asymptoty pionowe (granica jest tam nieskończona):
  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Pierwsza pochodna: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Równanie $f'(x) = 0$ nie ma rozwiązania – punktów stacjonarnych nie ma.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

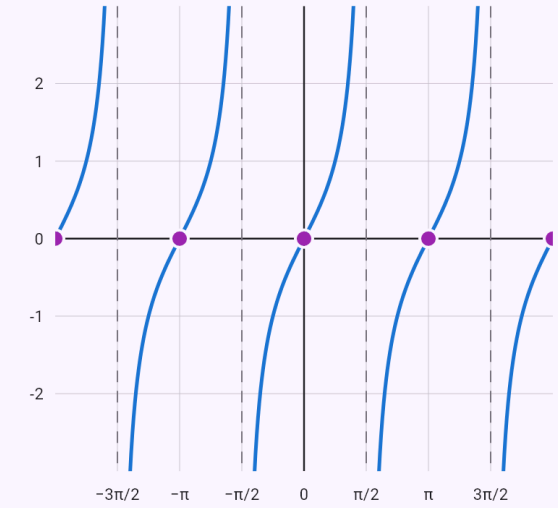
  Funkcja jest rosnąca na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- Funkcja nie ma ekstremów lokalnych.

- Druga pochodna: $f''(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
- Kandydaci na punkty przegięcia: $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(0;\,\frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\,\pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  Funkcja jest wypukła na $\left\langle k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ i wklęsła na $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right\rangle$
- Punkty przegięcia: $[k\pi;\ 0]$
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Wykres



$y = \operatorname{tg} x$

Ważne punkty:

- przegięcie $(-2\pi; 0)$
- przegięcie $(-\pi; 0)$
- przegięcie $(0; 0)$
- przegięcie $(\pi; 0)$
- przegięcie $(2\pi; 0)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Tangens hiperboliczny – asymptoty poziome y = ±1.

Input: `tanh x` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = (-1;\ 1)$

Parzystość: nieparzysta

Miejsca zerowe: $[0;\ 0]$

Rosnąca: $\mathbb{R}$

Wypukła: $(-\infty;\ 0\rangle$

Wklęsła: $\langle 0;\ \infty)$

Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$

Asymptoty: $y = -1,\ y = 1$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – funkcja jest nieparzysta (jej wykres jest symetryczny względem początku układu).
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in (0;\ \infty)$ i ujemna dla $x \in (-\infty;\ 0)$
- Granice na krańcach dziedziny
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Asymptota w -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – prosta $y = -1$
- Asymptota w +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – prosta $y = 1$
- Pierwsza pochodna: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- Równanie $f'(x) = 0$ nie ma rozwiązania – punktów stacjonarnych nie ma.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  Funkcja jest rosnąca na $\mathbb{R}$
- Funkcja nie ma ekstremów lokalnych.
- Druga pochodna: $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Kandydaci na punkty przegięcia: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  Funkcja jest wypukła na $(-\infty;\ 0\rangle$ i wklęsła na $\langle 0;\ \infty)$
- W $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – pierwsza niezerowa pochodna (od trzeciej wzwyż) jest rzędu nieparzystego: punkt przegięcia.
- Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = (-1;\ 1)$

Okresowa jest tylko pochodna – wartości ekstremów rosną z k.

Input: `x + 2sin x` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Parzystość: nieparzysta

Okres: $p = 2\pi$

Miejsca zerowe: $[0;\ 0]$

Rosnąca: $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Malejąca: $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Maksimum lokalne: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Minimum lokalne: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Wypukła: $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$

Wklęsła: $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$

Punkty przegięcia: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- Sama funkcja nie jest okresowa, ale jej pochodna tak (okres 2π) – monotoniczność, ekstrema i wypukłość powtarzają się z tym okresem, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – funkcja jest nieparzysta (jej wykres jest symetryczny względem początku układu).
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Granice na krańcach dziedziny
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Pierwsza pochodna: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Punkty stacjonarne
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

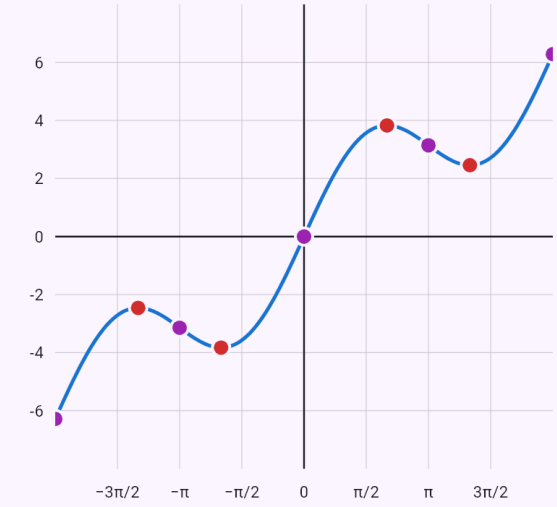
	$(0;\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  Funkcja jest rosnąca na $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$ i malejąca na $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$
- Maksimum lokalne $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, minimum lokalne $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Druga pochodna: $f''(x) = -2\sin x$
- Kandydaci na punkty przegięcia: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(0;\ \pi)$	$(\pi;\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  Funkcja jest wypukła na $\langle \pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi \rangle$ i wklęsła na $\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle$
- Punkty przegięcia: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Wykres



$y = x + 2\sin x$

Ważne punkty:

- przegięcie $(-2\pi; -2\pi)$
- maksimum $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- przegięcie $(-\pi; -\pi)$
- minimum $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- przegięcie $(0; 0)$
- maksimum $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- przegięcie $(\pi; \pi)$
- minimum $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- przegięcie $(2\pi; 2\pi)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Wartość bezwzględna – ostrza, pochodne jednostronne.

Input: `|x^2 - 1|` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \langle 0;\ \infty)$

Parzystość: parzysta

Miejsca zerowe: $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$

Rosnąca: $\langle -1;\ 0\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$

Malejąca: $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 0;\ 1\rangle$

Maksimum lokalne: $[0;\ 1]$

Minimum lokalne: $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$

Wypukła: $(-\infty;\ -1\rangle$, $\langle 1;\ \infty)$

Wklęsła: $\langle -1;\ 1\rangle$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- Wartości bezwzględne opuszczamy na każdym przedziale według znaków ich argumentów

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty;\ -1) \\ 1 - x^2, & x \in \langle -1;\ 1) \\ x^2 - 1, & x \in \langle 1;\ \infty) \end{cases}$$

- – funkcja jest parzysta (jej wykres jest symetryczny względem osi y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Punkty przecięcia z osią x:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, czyli $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 1$, czyli $[0;\ 1]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Funkcja jest dodatnia dla
$x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ \infty)$ i ujemna dla $x \in \emptyset$

- Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Brak asymptoty w -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Brak asymptoty w +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Punkty stacjonarne: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- W $x = -1$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), wykres ma tam załamanie.
- W $x = 1$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), wykres ma tam załamanie.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Funkcja jest rosnąca na $\langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$ i malejąca na $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle$

- W $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maksimum lokalne.
- Maksimum lokalne $[0;\ 1]$, minimum lokalne $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Druga pochodna

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

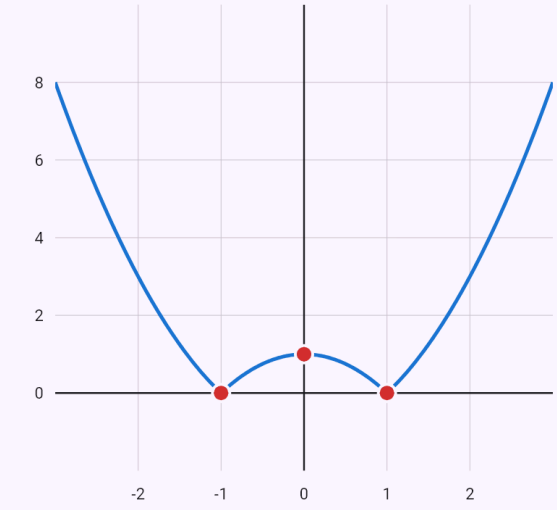
- Równanie $f''(x) = 0$ nie ma rozwiązania.
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcja jest wypukła na $(-\infty;\ -1\rangle,\ \langle 1;\ \infty)$ i wklęsła na $\langle -1;\ 1\rangle$

- Funkcja nie ma punktów przegięcia.
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \langle 0;\ \infty)$

Wykres



$y = |x^2 - 1|$

Ważne punkty:

- minimum $(-1; 0)$
- maksimum $(0; 1)$
- minimum $(1; 0)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Pierwiastek sześcienny – styczna pionowa w zerze.

Input: `x^(1/3)` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Parzystość: nieparzysta

Miejsca zerowe: $[0;\ 0]$

Rosnąca: $\mathbb{R}$

Wypukła: $(-\infty;\ 0\rangle$

Wklęsła: $\langle 0;\ \infty)$

Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – funkcja jest nieparzysta (jej wykres jest symetryczny względem początku układu).
- Punkty przecięcia z osią x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 0$, czyli $[0;\ 0]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Funkcja jest dodatnia dla $x \in (0;\ \infty)$ i ujemna dla $x \in (-\infty;\ 0)$
- Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Brak asymptoty w -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Brak asymptoty w +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ale $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Pierwsza pochodna: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- Równanie $f'(x) = 0$ nie ma rozwiązania – punktów stacjonarnych nie ma.
- W $x = 0$ pochodna jest nieskończona ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – wykres ma tam styczną pionową.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

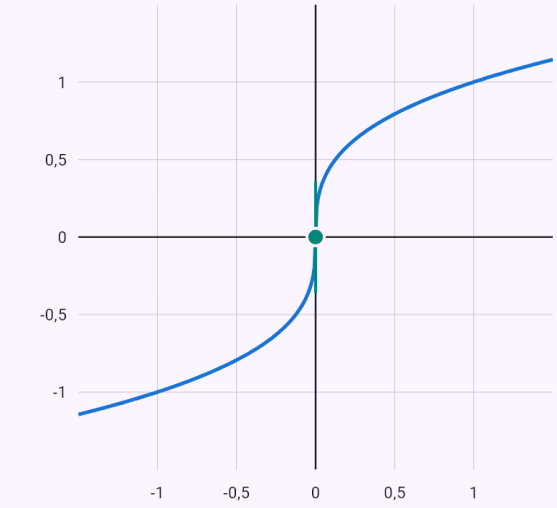
	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  Funkcja jest rosnąca na $\mathbb{R}$
- Funkcja nie ma ekstremów lokalnych.
- Druga pochodna: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- Równanie $f''(x) = 0$ nie ma rozwiązania.
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  Funkcja jest wypukła na $(-\infty;\ 0\rangle$ i wklęsła na $\langle 0;\ \infty)$
- Punkty przegięcia: $[0;\ 0]$
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \mathbb{R}$

Wykres



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Ważne punkty:

● przegięcie $(0; 0)$ ● styczna pionowa $(0; 0)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Zagnieżdżona wartość bezwzględna – przedziałami, funkcja parzysta.

Input: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \langle 0;\ \infty)$

Parzystość: parzysta

Miejsca zerowe: $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$

Rosnąca: $\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Malejąca: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

Maksimum lokalne: $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$

Minimum lokalne: $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$

Wypukła: $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

Wklęsła: $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- Wartości bezwzględne opuszczamy na każdym przedziale według znaków ich argumentów

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty;\ -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in \langle -3;\ 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in \langle 0;\ 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in \langle 3;\ \infty) \end{cases}$$

- – funkcja jest parzysta (jej wykres jest symetryczny względem osi y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Punkty przecięcia z osią x:
$f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, czyli $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 3$, czyli $[0;\ 3]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Funkcja jest dodatnia dla
$x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ \infty)$ i ujemna dla $x \in \emptyset$

- Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Brak asymptoty w -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- Brak asymptoty w +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+}{|x|\left|-x^2 + \right.}$$

- Punkty stacjonarne: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- W $x = -3$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), wykres ma tam załamanie.
- W $x = 0$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), wykres ma tam załamanie.
- W $x = 3$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), wykres ma tam załamanie.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Funkcja jest rosnąca na i malejąca na
$\langle -3;\ -1\rangle,\ \langle 0;\ 1\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$

$(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle -1;\ 0\rangle,\ \langle 1;\ 3\rangle$

- W $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – maksimum lokalne.
- W $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – maksimum lokalne.
- Maksimum lokalne $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$, minimum lokalne $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$
- Druga pochodna

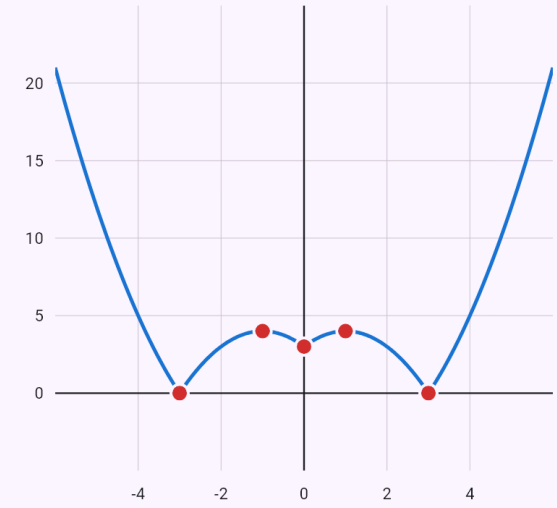
$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- Równanie $f''(x) = 0$ nie ma rozwiązania.
- Znak drugiej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja jest wypukła, gdzie ujemna, wklęsła:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 0)$	$(0;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

  Funkcja jest wypukła na $(-\infty;\ -3\rangle,\ \langle 3;\ \infty)$ i wklęsła na $\langle -3;\ 0\rangle,\ \langle 0;\ 3\rangle$
- Funkcja nie ma punktów przegięcia.
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \langle 0;\ \infty)$

Wykres



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Ważne punkty:

- minimum $(-3; 0)$
- maksimum $(-1; 4)$
- minimum $(0; 3)$
- maksimum $(1; 4)$
- minimum $(3; 0)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Suma wartości bezwzględnych – stały kawałek i dwie asymptoty ukośne.

Input: `|x - 2| + |x + 3|` Zbadaj funkcję

Wynik

Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości: $\mathrm{ZW}_f = \langle 5;\ \infty)$

Parzystość: ani parzysta, ani nieparzysta

Rosnąca: $\langle 2;\ \infty)$

Malejąca: $(-\infty;\ -3\rangle$

Stała: $\langle -3;\ 2\rangle$

Minimum lokalne: $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\ 2\rangle$

Asymptoty: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Kroki

- Dziedzina: $D_f = \mathbb{R}$
- Wartości bezwzględne opuszczamy na każdym przedziale według znaków ich argumentów

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\ -3) \\ 5, & x \in \langle -3;\ 2) \\ 2x + 1, & x \in \langle 2;\ \infty) \end{cases}$$

- − ani f(x), ani −f(x): funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- Równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązania – wykres nie przecina osi x.
- Punkt przecięcia z osią y: $f(0) = 5$, czyli $[0;\ 5]$
- Znak funkcji między jej miejscami zerowymi i punktami spoza dziedziny:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f(x)$	$+$

Funkcja jest dodatnia dla $x \in \mathbb{R}$ i ujemna dla $x \in \emptyset$

- Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Funkcja nie ma asymptot pionowych.
- Asymptota w -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – prosta $y = -2x - 1$
- Asymptota w +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – prosta $y = 2x + 1$
- Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

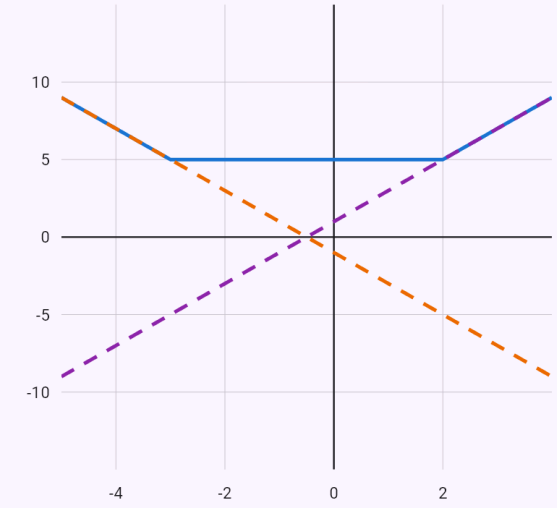
- Równanie $f'(x) = 0$ nie ma rozwiązania – punktów stacjonarnych nie ma.
- W $x = -3$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), wykres ma tam załamanie.
- W $x = 2$ pochodna nie istnieje – pochodne jednostronne są różne ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), wykres ma tam załamanie.
- Znak pierwszej pochodnej – gdzie jest dodatnia, funkcja rośnie, gdzie ujemna, maleje:

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 2)$	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

Funkcja jest rosnąca na $\langle 2;\ \infty)$ i malejąca na $(-\infty;\ -3\rangle$. Na $\langle -3;\ 2\rangle$ jest stała (f' = 0).

- Minimum lokalne $f(x) = 5,\ x \in \langle -3;\ 2\rangle$, brak maksimum lokalnego.
- Druga pochodna: $f''(x) = 0$
- Druga pochodna jest równa zeru – wykres jest (częścią) prostej, nie jest ani wypukły, ani wklęsły.
- Zbiór wartości – z monotoniczności, ekstremów i granic: $\mathrm{ZW}_f = \langle 5;\ \infty)$

Wykres



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Ekstrema globalne na przedziale – punkty stacjonarne i końce.

Input: `extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]`

Wynik

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

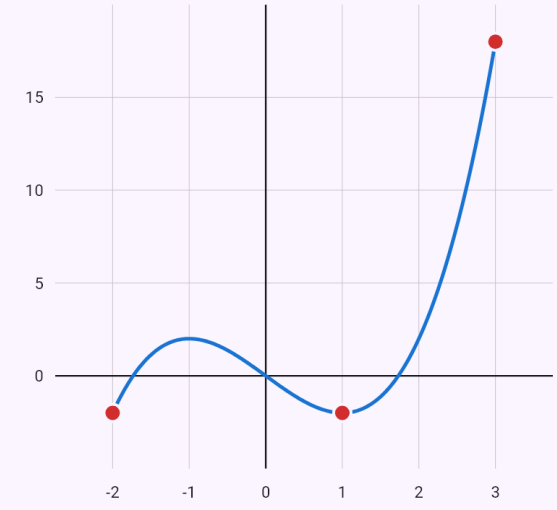
Kroki

- Pochodna: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Punkty stacjonarne ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; wszystkie leżą w przedziale $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Funkcja ciągła osiąga na przedziale domkniętym wartość największą i najmniejszą (twierdzenie Weierstrassa) – w punkcie stacjonarnym, w punkcie bez pochodnej lub na końcu przedziału. Porównujemy wartości

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- Największa wartość na $\langle -2;\ 3 \rangle$ to $f(3) = 18$, najmniejsza $f(-2) = f(1) = -2$

Wykres



$y = x^3 - 3x$

Ważne punkty:

- maksimum $(3; 18)$
- minimum $(-2; -2)$
- minimum $(1; -2)$

Ekstrema lokalne na czerwono, punkty przegięcia na fioletowo, pusty okrąg – punkt, w którym funkcja nie jest określona; asymptoty linią przerywaną.

Funkcja odwrotna do funkcji homograficznej, ze sprawdzeniem.

Input: `inverse of f(x) = (2x+1)/(x-3)`

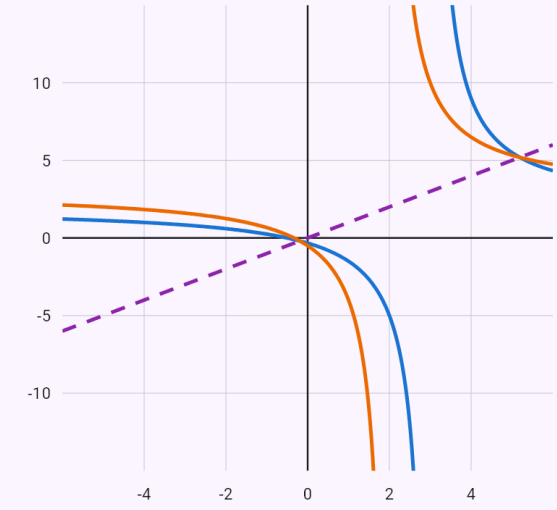
Wynik

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Kroki

- Funkcja $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, warunki jej dziedziny: $x - 3 \neq 0$
- Rozwiązujemy $y = f(x)$ względem x: $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$
- Zamieniamy x i y: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Dziedziną funkcji odwrotnej jest zbiór wartości f: $x - 2 \neq 0$
- Sprawdzenie przez złożenie: $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

Wykres



$y = \frac{2x+1}{x-3}$

f^{-1}

$y = x$

Wykres funkcji odwrotnej jest symetryczny do wykresu f względem prostej y = x.

Wierzchołek paraboli przez uzupełnienie do kwadratu.

Input: `vertex of the parabola y = x^2 - 4x + 7`

Wynik

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Kroki

- Uzupełniamy do pełnego kwadratu:
  $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Wierzchołek $V = [2;\ 3]$, oś $x = 2$; ramiona paraboli są skierowane w górę, zbiór wartości $H(f) = \langle 3; \infty)$
- Wykres to wykres $y = x^2$ przesunięty o wektor $(2;\ 3)$

Wykres sinusa przez ściśnięcie, przesunięcie i rozciągnięcie.

Input: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

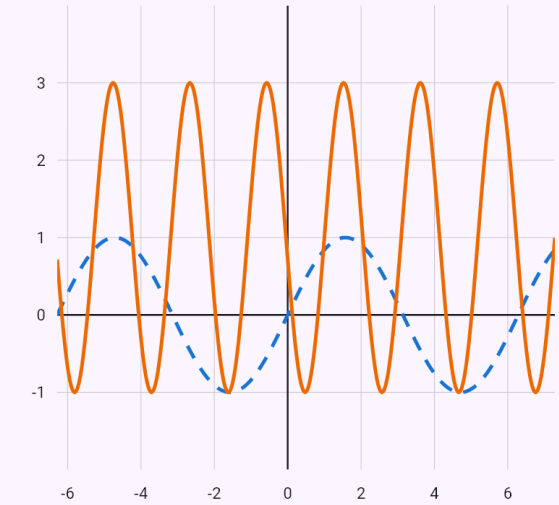
Wynik

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Kroki

- Zaczynamy od wykresu funkcji podstawowej $y = \sin x$
- Ściskamy wykres wzdłuż osi x 3 razy (w stronę osi y):
  $y = \sin\left(3x\right)$
- Przesuwamy wykres o 1 w prawo wzdłuż osi x:
  $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Rozciągamy wykres wzdłuż osi y 2 razy:
  $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Przesuwamy wykres o 1 w górę wzdłuż osi y:
  $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Wykres



$y = \sin x$
$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Przerywany: wykres funkcji podstawowej; ciągły: wykres wynikowy.

Pierwiastek przesunięty i odbity względem osi x.

Input: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

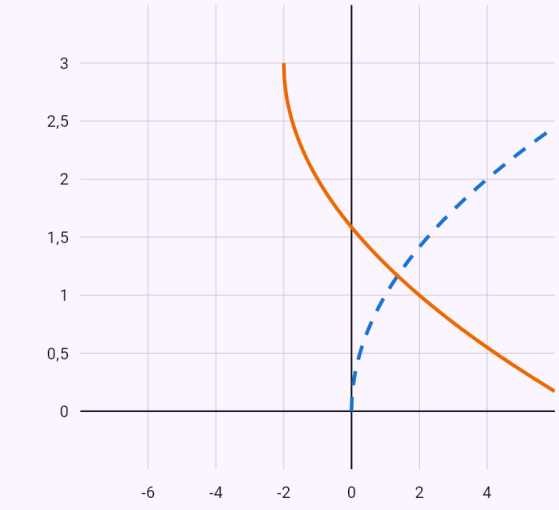
Wynik

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Kroki

- Zaczynamy od wykresu funkcji podstawowej $y = \sqrt{x}$
- Przesuwamy wykres o 2 w lewo wzdłuż osi x:
  $y = \sqrt{x+2}$
- Odbijamy wykres symetrycznie względem osi x:
  $y = -\sqrt{x+2}$
- Przesuwamy wykres o 3 w górę wzdłuż osi y:
  $y = -\sqrt{x+2} + 3$

Wykres



$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x+2} + 3$

Przerywany: wykres funkcji podstawowej; ciągły: wykres wynikowy.

Funkcja złożona f(g(x)).

Input: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Wynik

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Kroki

- Do funkcji zewnętrznej f wstawiamy za x funkcję wewnętrzną g:
  $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Znane ograniczenia

- Funkcja bez choćby okresowej pochodnej (x·sin x) jest badana tylko numerycznie na ⟨−2π; 2π⟩, bez okresu; funkcje cyklometryczne (arcsin, arctg) nie są jeszcze obsługiwane.
- Ekstrema globalne tylko na przedziale domkniętym i dla funkcji ciągłej; funkcja odwrotna tylko tam, gdzie wyraża ją wzór – dla funkcji nieróżnowartościowej (x²) nie szuka się jeszcze odwrotnej na części dziedziny.

28. Funkcje wielu zmiennych

Pochodne cząstkowe (pierwsze i drugie, mieszane) i gradient funkcji dwóch lub trzech zmiennych – różniczkujemy względem jednej zmiennej, pozostałe są stałymi.

Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych: punkty stacjonarne z f_x = 0, f_y = 0, każdy rozstrzygnięty wyznacznikiem hesjanu D = f_xx·f_yy − f_xy² (minimum, maksimum, siodło). Ekstrema warunkowe z jednym warunkiem („extrema of xy, x + y = 1") metodą Lagrange'a i hesjanem obrzeżonym.

Pochodna kierunkowa (gradient razy wektor jednostkowy), różniczka zupełna z wartością przybliżoną i płaszczyzna styczna do powierzchni. Całkę podwójną wpisuje się granicami iterowanymi lub jako obszar nierówności; aplikacja dzieli obszar na części normalne, pokazuje całkę wewnętrzną i zewnętrzną i rysuje obszar; przełącznik 3D pokazuje nad nim powierzchnię funkcji podcałkowej. Chipy pod wynikiem zmieniają kolejność całkowania i przełączają na współrzędne biegunowe.

Analiza wektorowa: dywergencja, rotacja (dla pola płaskiego jedna liczba $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$), laplasjan i potencjał pola potencjalnego – aplikacja najpierw sprawdza, że rotacja jest zerowa, potem znajduje φ, całkując kolejno składowe, i sprawdza ∇φ = F. Pole wpisuje się jako wektor (P; Q; R) lub (P; Q), także z wersorami i, j, k albo nazwane „F = …" w osobnym wierszu. Dla pola płaskiego wykres pokazuje strzałki pola i poziomice potencjału. Chipy pod wynikiem przełączają między dywergencją, rotacją i potencjałem tego samego pola.

Całki krzywoliniowe: niezorientowane ∫_C f ds (długość krzywej, masa drutu) i zorientowane ∫_C F·dr (praca siły, cyrkulacja $\oint$ wokół krzywej zamkniętej). Krzywą podaje się parametryzacją r(t) lub ustawieniem – odcinek, okrąg, wykres y = f(x), łamana; kroki pokazują wektor styczny, podstawienie do pola i całkę względem t. Dla pola potencjalnego aplikacja sprawdza wynik potencjałem φ(B) − φ(A) (niezależność od drogi), dla zamkniętej krzywej płaskiej (okrąg, elipsa, wielokąt wypukły) twierdzeniem Greena – oblicza też całkę podwójną po obszarze wewnątrz. Chipy pod wynikiem przełączają, która droga jest główna. Formularz „Całka krzywoliniowa" (sekcja „Zastosowania", dziedzina Analiza funkcji wielu zmiennych) oferuje ustawienia krzywych; wykres pokazuje krzywą z jej orientacją nad strzałkami pola i obszar Greena, krzywą przestrzenną w 3D, obracaną palcem.

Całki potrójne: granicami iterowanymi, po bryle z nierówności (∭_V, także ze zdjęcia) albo formularzem „Całka potrójna" (sekcja „Zastosowania", dziedzina Analiza funkcji wielu zmiennych) z ustawieniami prostopadłościan, kula, walec, stożek, bryła między wykresami i nierówności. Aplikacja opisuje bryłę jako obszar normalny – zmienna najbardziej wewnętrzna między dwiema powierzchniami nad rzutem – i oblicza trzy całki jedna po drugiej (twierdzenie Fubiniego). We współrzędnych walcowych i sferycznych pokazuje podstawienie z jakobianem (r, ρ² sin θ) i granice w nowych zmiennych; gdy współrzędne kartezjańskie nie dają dokładnego wyniku, przechodzi na nie sama, a dla kuli, walca lub x² + y² w zadaniu

oferuje je chip. Formularz oblicza też objętość, masę z gęstością ρ, środek ciężkości i moment bezwładności względem osi. Obracany wykres 3D pokazuje bryłę.

Litery inne niż x, y, z (promień r, wysokość h, krawędzie a, b, c) są dodatnimi parametrami: wynikiem jest wzór, np. V = 4/3 πr³ dla kuli ball(r) – obok promienia r współrzędna walcowa jest zapisywana ϱ – albo V = abc dla prostopadłościanu. Aplikacja sprawdza wzór numerycznie dla kilku wartości parametrów; obraz 3D bryły jest rysowany dla wartości 1.

Całki powierzchniowe: niezorientowane ∬_S f dS (pole powierzchni, masa powłoki) i zorientowane – strumień ∬_S F·n dS. Powierzchnię podaje się ustawieniem – wykres z = g(x, y) nad obszarem D, sfera, półsfera, walec, stożek (cała powierzchnia z kołami lub sama powierzchnia boczna) – albo parametryzacją r(u, v). Kroki pokazują wektory styczne r_u, r_v, wektor normalny r_u × r_v z jego orientacją (na zewnątrz dla powierzchni zamkniętej, w górę dla wykresu, w przeciwnym razie według parametryzacji; do wyboru na zewnątrz, do wewnątrz, w górę, w dół), element powierzchni i całkę podwójną po parametrach; powierzchnię zamkniętą sumuje się z jej części. Strumień przez powierzchnię zamkniętą jest sprawdzany twierdzeniem Gaussa (całka potrójna z dywergencji), strumień rotacji twierdzeniem Stokesa – całką krzywoliniową wzdłuż brzegu; chipy pod wynikiem przełączają główną drogę. Formularz „Całka powierzchniowa” (sekcja „Zastosowania”, dziedzina Analiza funkcji wielu zmiennych) oferuje ustawienia powierzchni; obracany wykres 3D pokazuje powierzchnię z jej normalnymi, strzałki pola i brzeg.

Druty i powłoki: formularze całki krzywoliniowej i powierzchniowej (wybór „Co obliczyć”) oraz zapis quantity=mass / centroid / inertia obliczają masę drutu lub powłoki z gęstością f (puste = 1), jej środek ciężkości i moment bezwładności względem osi (axis=x, y, z). Planimetr lineint(area; C) oblicza pole wewnątrz zamkniętej krzywej płaskiej jako ½∮ x dy − y dx i sprawdza je twierdzeniem Greena.

Jak to wpisać

`partial derivatives x^2 y + y^3`	Wszystkie pierwsze pochodne cząstkowe (z „second” drugie).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Jedna pochodna cząstkowa (także \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	Gradient.
`extrema of x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.
`extrema of xy, x + y = 1`	Ekstrema warunkowe – funkcja i warunek po przecinku.

`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Pochodna kierunkowa: funkcja, punkt, kierunek (także słowami).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Różniczka zupełna; punkt i przyrosty h są opcjonalne (także słowami).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Płaszczyzna styczna w punkcie, dla z = f(x, y) lub F(x, y, z) = 0 (także słowami).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Całka podwójna granicami iterowanymi (także \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Całka podwójna po obszarze nierówności (także \iint_D ..., D: ...); możesz dodać order=dxdy lub polar.
`div(x y; y z; z x)`	Dywergencja pola (także ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, słowami „divergence”).
`∇×(y z; x z; x y)`	Rotacja (także rot, curl, \nabla \times); dla pola (P; Q) jedna liczba.
`Δ(x^2 y + y^3)`	Laplasjan funkcji dwóch lub trzech zmiennych (także laplace(...), ∇², \Delta).
`potential (2x + y; x + 2y)`	Potencjał pola potencjalnego (także potential(...)); pole może być nazwane: „div F, F = (y; x; 0)”.
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Całka krzywoliniowa – pole (P; Q) lub funkcja f, potem krzywa: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); także cw (zgodnie z ruchem wskazówek zegara), method=green / method=potential (także słowami „line integral … along …”). Za krzywą także quantity=mass / centroid / inertia (z axis=…); area zamiast funkcji oblicza pole wewnątrz krzywej zamkniętej.
`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	Masa drutu z gęstością f, quantity=centroid jego środek ciężkości, quantity=inertia jego moment bezwładności (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	Planimetr – pole wewnątrz zamkniętej krzywej płaskiej z całki wzdłuż jej brzegu (twierdzenie Greena).

`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	Ze zdjęcia ∮_C lub ∫_C z P dx + Q dy, F·dr lub f ds; krzywa po przecinku lub w następnym wierszu (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Całka niezorientowana – krzywa parametrycznie z zakresem parametru (także t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Całka potrójna – funkcja, potem bryła nierównościami lub ustawieniem ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); współrzędne cart, cyl, sph, kolejność order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (z axis=x). Słowami „triple integral of z over V: …”, „volume of the solid …”, „mass of the solid … with density …”, „centroid of the solid …”, „moment of inertia of the solid … about the z-axis”.
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Ze zdjęcia ∭ (\iiint_V) z dV lub dx dy dz; bryła po przecinku (V: …) lub pod całką.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Granicami iterowanymi – trzy całki z rzędu, różniczki na końcu lub zaraz za ich całką.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Całka powierzchniowa – funkcja f, pole (P; Q; R) lub curl(P; Q; R), potem powierzchnia: graph(z = …; nierówności D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (sama powierzchnia boczna), closed (półsfera z podstawą), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. Słowami „surface integral of … over …”, „flux of … through …”. Z funkcją f także quantity=mass / centroid / inertia (z axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	Ze zdjęcia ∬_S lub ∯_S z f dS, F·dS lub F·n dS; powierzchnia po przecinku lub w następnym wierszu: S: x² + y² + z² = R² (z z ≥ 0 półsfera), x² + y² = R² z ograniczeniami z (powierzchnia boczna walca), z = g(x, y) z nierównościami, r(u, v) z zakresami parametrów.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z),`	Strumień rotacji (∇ × F, rot F, curl F) – pole nazwane osobno; sprawdzany twierdzeniem Stokesa.

`S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	Masa, środek ciężkości lub moment bezwładności powłoki z gęstością powierzchniową f.

Przykłady

Drugie pochodne cząstkowe, także mieszana.

Input: `second partial derivatives x^2 y + y^3`

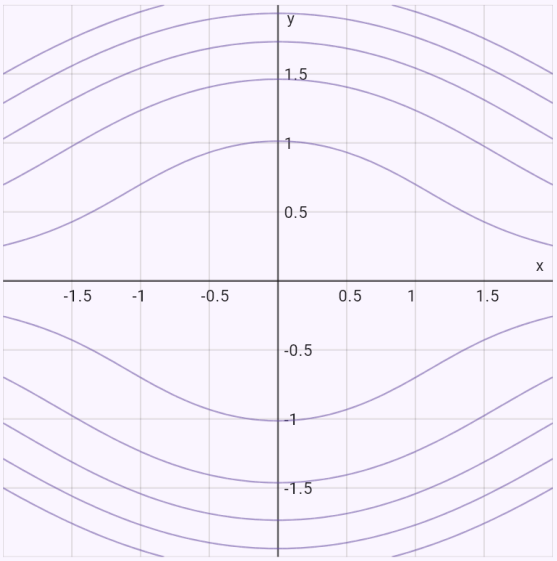
Wynik

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Kroki

- Pochodna cząstkowa względem x – pozostałe zmienne są stałymi: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- Pochodna cząstkowa względem y – pozostałe zmienne są stałymi: $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- Pochodna cząstkowa względem xx – pozostałe zmienne są stałymi: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- Pochodna cząstkowa względem xy – pozostałe zmienne są stałymi: $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- Pochodna cząstkowa względem yy – pozostałe zmienne są stałymi: $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Wykres



Poziomice f.

Ekstrema lokalne – punkt siodłowy i minimum.

Input: `extrema of x^3 - 3xy + y^3`

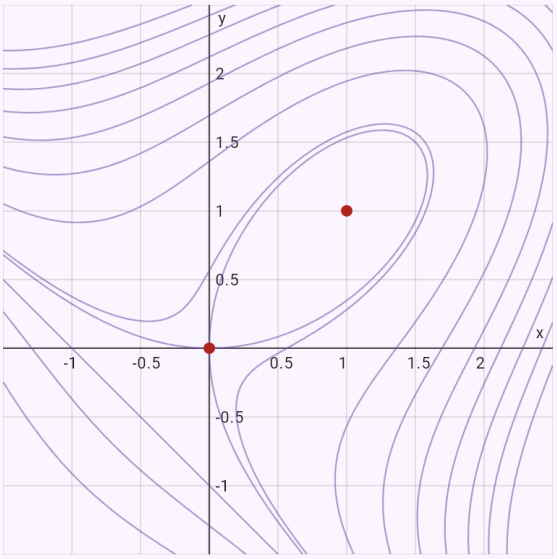
Wynik

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Kroki

- Pochodna cząstkowa względem x – pozostałe zmienne są stałymi: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- Pochodna cząstkowa względem y – pozostałe zmienne są stałymi: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Punkty stacjonarne $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ rozwiązują układ, w którym obie pochodne cząstkowe są zerowe
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Drugie pochodne cząstkowe $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ i wyznacznik hesjanu
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- W $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – punkt siodłowy, brak ekstremum ($f(0;\ 0) = 0$).
- W $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ i $f_{xx} = 6 > 0$ – minimum lokalne $f(1;\ 1) = -1$

Wykres



Poziomice f.

Ekstremum warunkowe metodą Lagrange'a.

Input: `extrema of xy, x + y = 1`

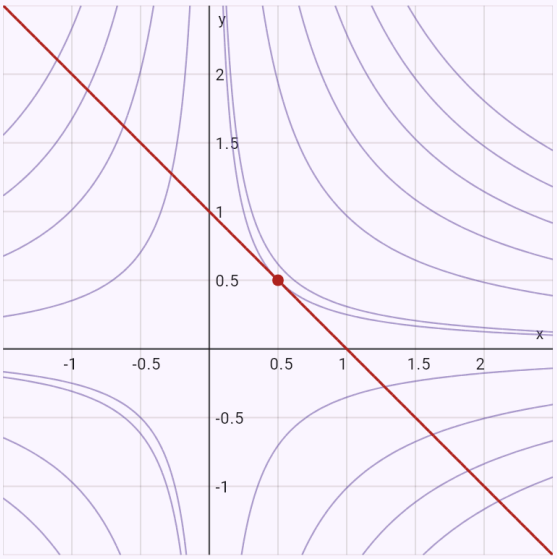
Wynik

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Kroki

- Funkcja Lagrange'a z mnożnikiem λ:
  $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Jej pochodne cząstkowe są zerowe i warunek jest spełniony
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Kandydaci na ekstremum warunkowe (rozwiązania układu): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- W $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ ($\lambda = \frac{1}{2}$) hesjan obrzeżony jest dodatni – warunkowe maksimum lokalne $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Wykres



Poziomice f.

Pochodna kierunkowa i najszybszy wzrost.

Input: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

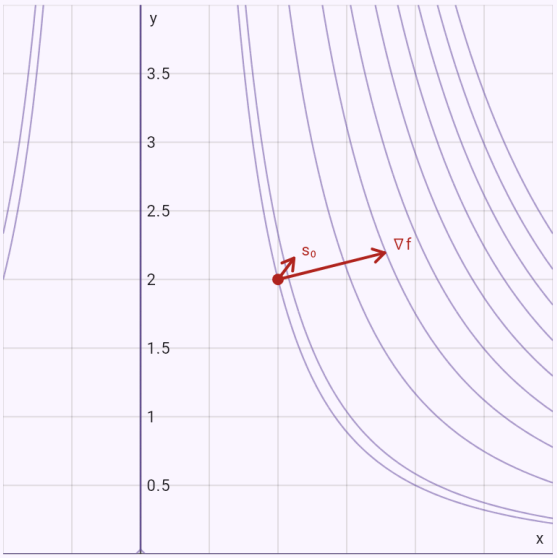
Wynik

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Kroki

- Pochodna cząstkowa względem x – pozostałe zmienne są stałymi: $f_x = 2xy$
- Pochodna cząstkowa względem y – pozostałe zmienne są stałymi: $f_y = x^2$
- Zamieniamy kierunek na wektor jednostkowy: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Gradient w $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- Pochodna kierunkowa to iloczyn skalarny gradientu i wektora jednostkowego $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- Najszybszy wzrost jest w kierunku gradientu, z szybkością $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Wykres



Poziomice f. Strzałka ∇f wskazuje kierunek najszybszego wzrostu.

Płaszczyzna styczna do paraboloidy.

Input: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

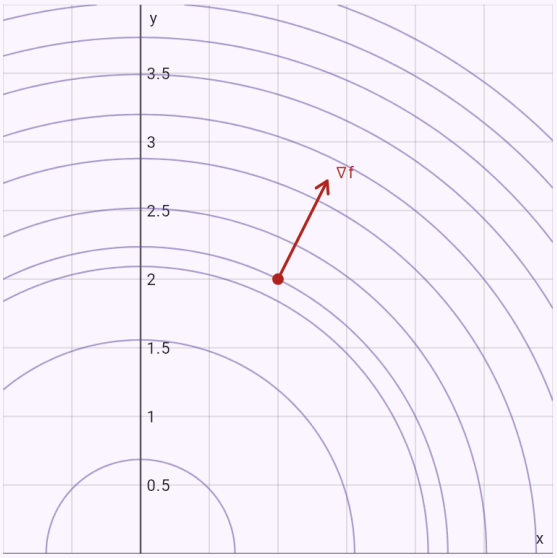
Wynik

$$z = 2x + 4y - 5$$

Kroki

- Pochodna cząstkowa względem x – pozostałe zmienne są stałymi: $f_x = 2x$
- Pochodna cząstkowa względem y – pozostałe zmienne są stałymi: $f_y = 2y$
- Trzecia współrzędna punktu styczności: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Podstawiamy do płaszczyzny stycznej $z - z_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)$: $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Wektor normalny płaszczyzny: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Wykres



Poziomice f. Strzałka ∇f wskazuje kierunek najszybszego wzrostu.

Całka podwójna po trójkącie.

Input: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Wynik

$$\frac{1}{8}$$

Kolejność całkowania:

✓ dy dx | dx dy

Współrzędne:

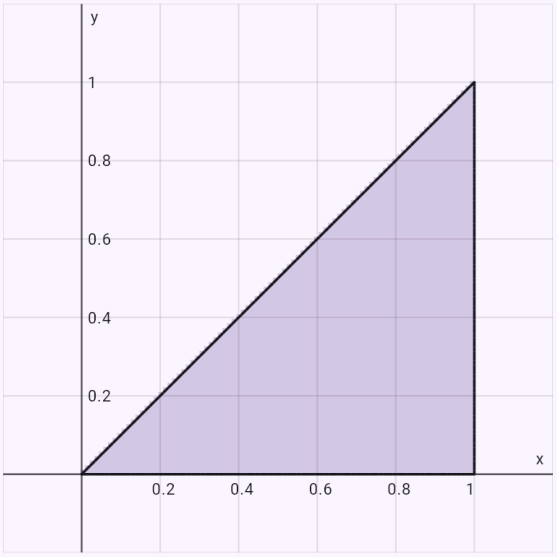
✓ Kartezjańskie | Biegunowe

Kroki

- Opisujemy obszar jako obszar normalny:
  $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- Całka wewnętrzna względem y (druga zmienna jest stałą): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- Całka zewnętrzna względem x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Wykres

✓ 2D | 3D



Obszar całkowania.

Całka wewnętrzna nie jest elementarna – aplikacja sama zamienia kolejność.

Input: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Wynik

$$\frac{e-1}{2}$$

Kolejność całkowania:

✓ dx dy | dy dx

Współrzędne:

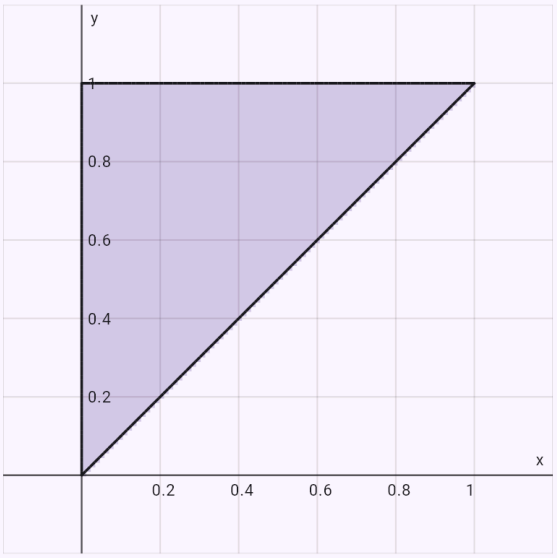
✓ Kartezjańskie | Biegunowe

Kroki

- Całka wewnętrzna względem y nie ma elementarnej funkcji pierwotnej, więc zamieniamy kolejność całkowania.
- Opisujemy obszar jako obszar normalny: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną: $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- Całka wewnętrzna względem x (druga zmienna jest stałą): $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- Całka zewnętrzna względem y: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Wykres

✓ 2D | 3D



Obszar całkowania.

Ćwiartka koła we współrzędnych biegunowych.

Input: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Wynik

$$\frac{\pi}{8}$$

Współrzędne:

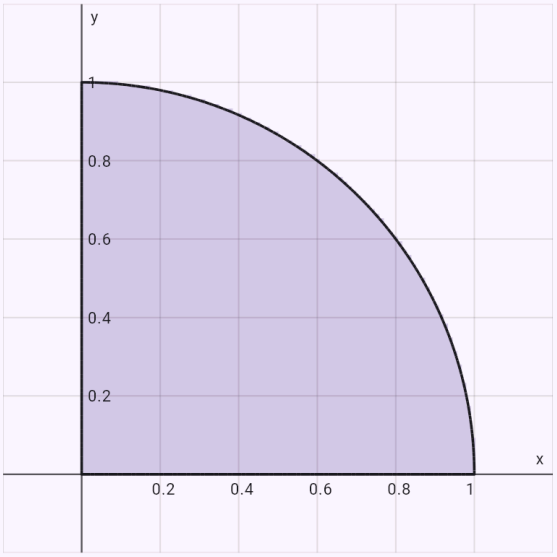
Kartezjańskie | ✓ Biegunowe

Kroki

- Współrzędne biegunowe:
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, gdzie r to jakobian przekształcenia. Funkcja podcałkowa: $f \cdot r = r^3$
- Obszar we współrzędnych biegunowych:
  $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- Całka wewnętrzna względem r (druga zmienna jest stałą): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- Całka zewnętrzna względem φ
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Wykres

✓ 2D | 3D



Obszar całkowania.

Dywergencja pola w przestrzeni jako suma trzech pochodnych cząstkowych.

Input: `div(x y; y z; z x)`

Wynik

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Dla tego pola oblicz:

✓ dywergencję | rotację | potencjał

Kroki

- Pole wektorowe i jego składowe:
  $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- Pochodna cząstkowa względem x – pozostałe zmienne są stałymi: $\frac{\partial P}{\partial x} = y$
- Pochodna cząstkowa względem y – pozostałe zmienne są stałymi: $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$
- Pochodna cząstkowa względem z – pozostałe zmienne są stałymi: $\frac{\partial R}{\partial z} = x$
- Dywergencja to suma pochodnych cząstkowych składowych, każdej względem „jej" zmiennej
  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

Rotacja płaskiego wiru – strzałki pola krążą wokół początku układu.

Input: `rot(-y; x)`

Wynik

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

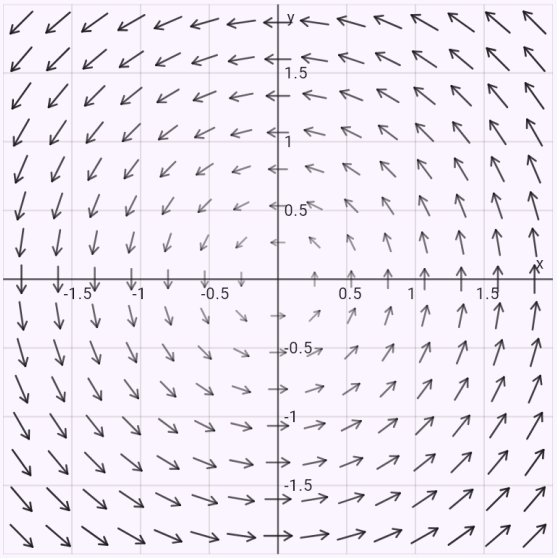
Dla tego pola oblicz:

dywergencję | ✓ rotację | potencjał

Kroki

- Pole wektorowe i jego składowe:
  $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Dla pola płaskiego rotacja jest jedną liczbą – składową z, ∂Q/∂x − ∂P/∂y
  $(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Wykres



Strzałki pokazują kierunek i natężenie pola (dłuższa i ciemniejsza = silniejsze).

Funkcja harmoniczna – laplasjan jest zerowy.

Input: `Δ(x^2 - y^2)`

Wynik

$$\Delta f = 0$$

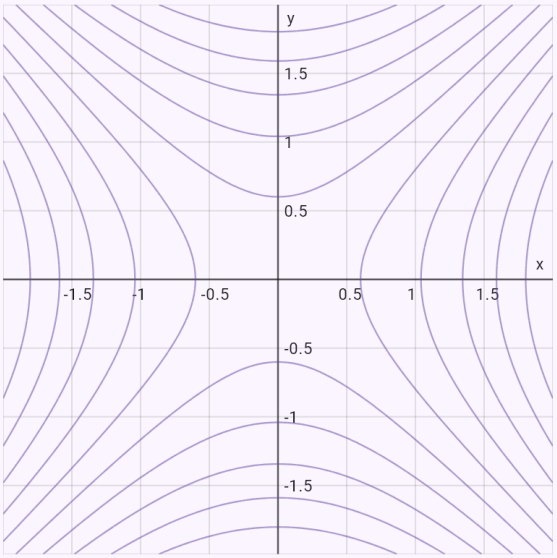
Dla tej funkcji oblicz:

✓ laplasjan Δf | gradient ∇f

Kroki

- Pierwsza i druga pochodna cząstkowa względem x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- Pierwsza i druga pochodna cząstkowa względem y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- Laplasjan to suma drugich pochodnych cząstkowych:
  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – funkcja jest harmoniczna.

Wykres



Poziomice f.

Potencjał po szkolnemu: P scałkowane względem x, porównane z Q, sprawdzone; wykres z

ekwipotencjalami.

Input: `potential(2x y; x^2)`

Wynik

$$\varphi = x^2 y + C$$

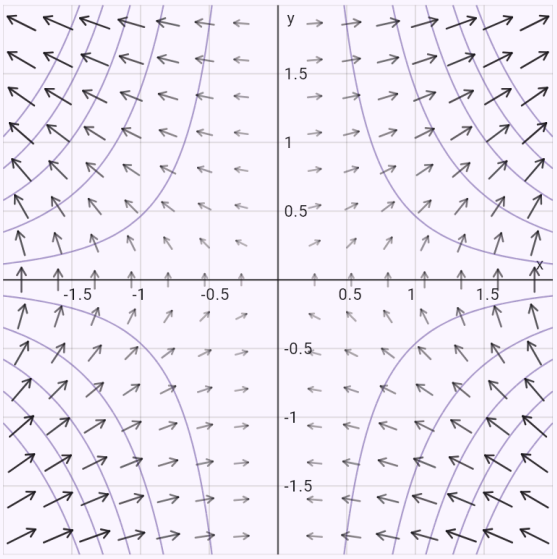
Dla tego pola oblicz:

dywergencję | rotację | ✓ potencjał

Kroki

- Pole wektorowe i jego składowe:
  $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Rotacja jest równa zeru (w płaszczyźnie ∂Q/∂x = ∂P/∂y), pole jest zachowawcze, więc szukanie potencjału ma sens: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Szukamy φ z ∇φ = F. Całkujemy P względem x; stała całkowania może zależeć od pozostałych zmiennych:
  $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Różniczkujemy φ względem y i porównujemy ze składową Q – zostaje pochodna „stałej”
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- „Stałą” całkujemy względem y; nowa może zależeć tylko od pozostałych zmiennych, na końcu jest liczbą C:
  $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Sprawdzenie – gradient potencjału jest danym polem:
  $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Wykres



Strzałki pokazują kierunek i natężenie pola (dłuższa i ciemniejsza = silniejsze). Poziomice potencjału φ (ekwipotencjale) – pole jest do nich wszędzie prostopadłe.

Praca pola potencjalnego – przez parametryzację, sprawdzona potencjałem φ = x²y.

Input: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Wynik

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Oblicz:

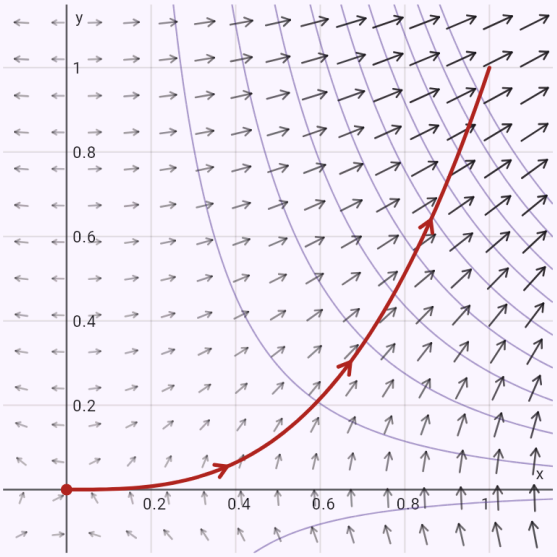
✓ z parametryzacji | z potencjału

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka krzywoliniowa skierowana (drugiego rodzaju) z pola wektorowego wzdłuż skierowanej krzywej C (np. praca siły wzdłuż drogi): $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametryzacja krzywej: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji: $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem stycznym $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru: $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Sprawdzenie: pole jest zachowawcze, ma potencjał φ i całka nie zależy od drogi – wystarczy różnica φ(B) − φ(A) $\varphi = x^2 y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy). Strzałki pokazują kierunek i natężenie pola (dłuższa i ciemniejsza = silniejsze). Poziomice potencjału φ (ekwipotencjale) – pole jest do nich wszędzie prostopadłe.

Cyrkulacja wzdłuż okręgu jednostkowego ze zdjęcia, sprawdzona twierdzeniem Greena we

współrzędnych biegunowych.

Input: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Wynik

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Oblicz:

✓ z parametryzacji | z twierdzenia Greena

Edytuj w formularzu

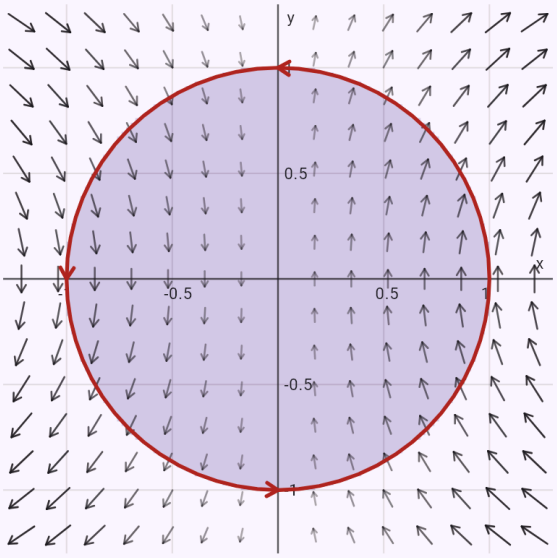
Kroki

- Krzywa jest zamknięta – całka skierowana wokół niej to cyrkulacja pola: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- Okrąg o środku S i promieniu r, przebiegany raz (parametryzacja kątem t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem stycznym
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cdots$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru: $\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Sprawdzenie z twierdzenia Greena: krzywa jest zorientowana dodatnio (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), całka wokół niej jest równa całce podwójnej po obszarze D wewnątrz
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- Obszar D wewnątrz krzywej – całka podwójna po nim:
  $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Współrzędne biegunowe:
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, gdzie r to jakobian przekształcenia. Funkcja podcałkowa:
  $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- Obszar we współrzędnych biegunowych:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$$

- Całka wewnętrzna względem r (druga zmienna jest stałą)
  $$\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$$
- Całka zewnętrzna względem φ
  $$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$$
- Obie strony twierdzenia Greena się zgadzają:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy). Strzałki pokazują kierunek i natężenie pola (dłuższa i ciemniejsza = silniejsze). Zacieniowany jest obszar D wewnątrz krzywej z twierdzenia Greena.

Długość paraboli – niezorientowana całka z 1.

Input: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Wynik

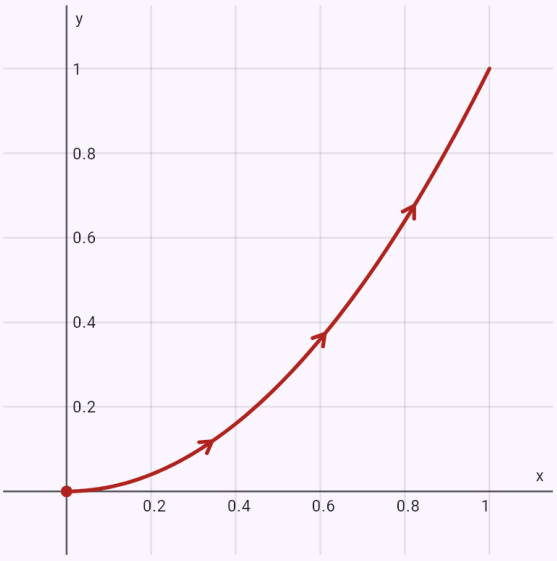
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka krzywoliniowa nieskierowana (pierwszego rodzaju) z f wzdłuż krzywej C – sumujemy f razy długość ds małych kawałków krzywej: $\int_C ds$
- Wykres funkcji – parametrem jest samo x (parametryzacja r(x) = (x; f(x))):
  $y = x^2: \quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji:
  $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- Jego długość; element długości łuku to ds = |r'(t)| dt:
  $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Parametryzację podstawiamy do f i mnożymy przez długość wektora stycznego:
  $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru
  $$\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$$
- Całka z 1 ds to długość krzywej (z gęstością f zamiast 1 byłaby to masa drutu).

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy).

Linia śrubowa w przestrzeni – obracany wykres 3D ze strzałkami pola.

Input: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Wynik

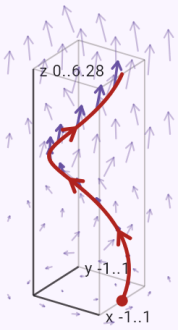
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka krzywoliniowa skierowana (drugiego rodzaju) z pola wektorowego wzdłuż skierowanej krzywej C (np. praca siły wzdłuż drogi): $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametryzacja krzywej: $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji: $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem stycznym $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru: $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy). Strzałki pokazują pole, mocniejsze na krzywej. Obróć, przeciągając palcem.

Środek ciężkości półokręgu – masa i dwa momenty statyczne.

Input: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Wynik

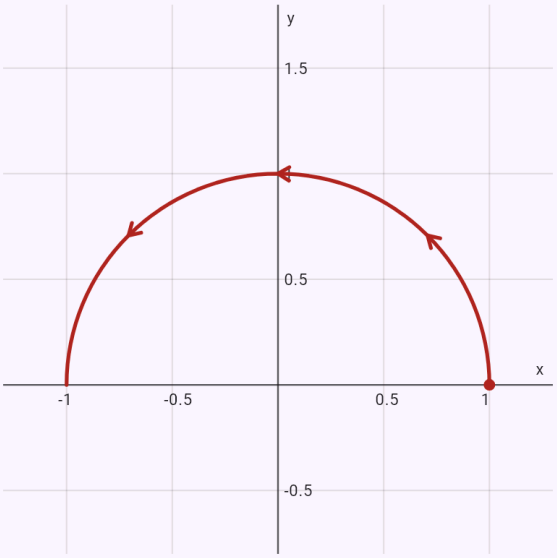
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka krzywoliniowa nieskierowana (pierwszego rodzaju) z f wzdłuż krzywej C – sumujemy f razy długość ds małych kawałków krzywej: $\int_C ds$
- Środek ciężkości drutu: momenty statyczne (całka ze współrzędnej razy gęstość) przez masę, dla y (i z) podobnie
  $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametryzacja krzywej:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Jego długość; element długości łuku to ds = |r'(t)| dt:
  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Parametryzację podstawiamy do f i mnożymy przez długość wektora stycznego: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- Moment statyczny dla współrzędnej x – te same kroki z funkcją podcałkową $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Moment statyczny dla współrzędnej y – te same kroki z funkcją podcałkową $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Współrzędne środka ciężkości to momenty przez masę: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy).

Pole elipsy planimetrem: ½∮ x dy − y dx = πab.

Input: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Wynik

$$A = 6\pi$$

Oblicz:

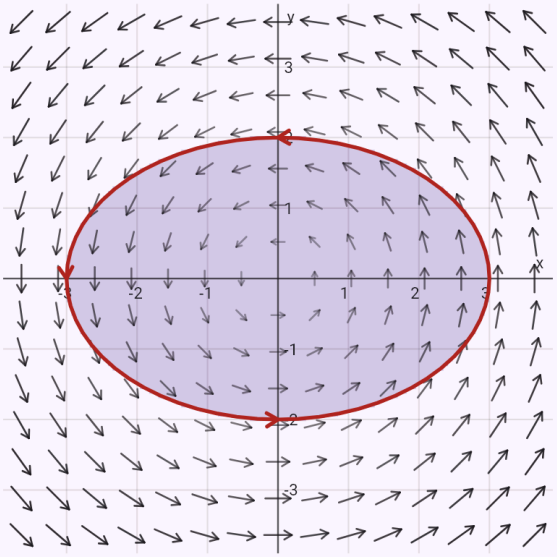
✓ z parametryzacji | z twierdzenia Greena

Edytuj w formularzu

Kroki

- Krzywa jest zamknięta – całka skierowana wokół niej to cyrkulacja pola: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- Pole wewnątrz krzywej zamkniętej jako całka krzywoliniowa wokół jej brzegu (planimetr) – z twierdzenia Greena z Q_x − P_y = 1:
  $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- Parametryzacja krzywej:
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Wektor styczny – pochodna parametryzacji:
  $\vec{r}'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem stycznym
  $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \dots$
- Zostaje zwykła całka oznaczona po przedziale parametru: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Sprawdzenie z twierdzenia Greena: krzywa jest zorientowana dodatnio (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), całka wokół niej jest równa całce podwójnej po obszarze D wewnątrz
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- Obszar D wewnątrz krzywej – całka podwójna po nim:
  $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Opisujemy obszar jako obszar normalny:
  $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną
  $$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$
- Całka wewnętrzna względem y (druga zmienna jest stałą)
  $$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- Całka zewnętrzna względem x
  $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$
- Obie strony twierdzenia Greena się zgadzają:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

Wykres



Krzywa C ze strzałkami w kierunku jej orientacji (kropka = punkt początkowy). Strzałki pokazują kierunek i natężenie pola (dłuższa i ciemniejsza = silniejsze). Zacieniowany jest obszar D wewnątrz krzywej z twierdzenia Greena.

Górna półkula we współrzędnych sferycznych – jakobian ρ² sin θ, granice ρ, θ, φ.

Input: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Wynik

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Oblicz we współrzędnych:

kartezjańskie | walcowe | ✓ sferyczne

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka potrójna z funkcji po bryle V: $\iiint_V z\,dV$
- Współrzędne sferyczne – J = ρ² sin θ to jakobian przekształcenia (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); podstawienie i funkcja podcałkowa

  $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$

  $f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$
- Bryła we współrzędnych sferycznych:

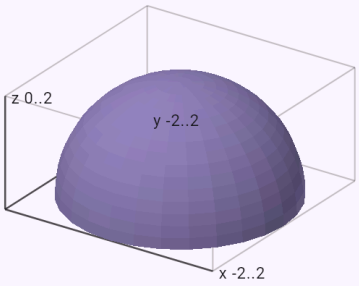
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną

  $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem ρ (pozostałe zmienne są stałymi)

  $\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$
- Środkowa całka względem θ

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$
- Zewnętrzna całka względem φ: $\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

Wykres



Bryła V, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Czworościan granicami iterowanymi – trzy całki jedna po drugiej.

Input: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Wynik

$$\frac{1}{24}$$

Oblicz we współrzędnych:

- ✓ kartezjańskie
- walcowe
- sferyczne

Edytuj w formularzu

Kroki

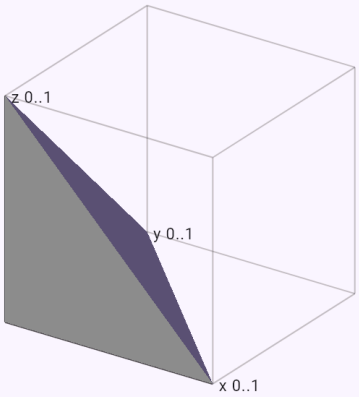
- Całka potrójna z funkcji po bryle V: $\iiint_V x \, dV$
- Opisujemy bryłę jako obszar normalny – z leży między dwiema powierzchniami nad rzutem bryły: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le -x - y + 1$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi): $\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x - y + 1)$
- Środkowa całka względem y

$$\int_0^{1-x} (x(-x - y + 1)) \, dy = \left[-\frac{x(x + y - 1)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

- Zewnętrzna całka względem x

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Wykres



Bryła V, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Objętość stożka we współrzędnych walcowych.

Input: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Wynik

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Oblicz we współrzędnych:

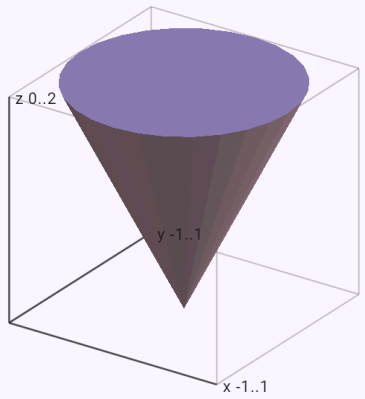
kartezjańskie | ✓ walcowe

Edytuj w formularzu

Kroki

- Objętość bryły to całka potrójna z jedynki: $V = \iiint_V dV$
- Współrzędne walcowe – J = r to jakobian przekształcenia (dV = r dr dφ dz); podstawienie i funkcja podcałkowa
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- Bryła we współrzędnych walcowych:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną: $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{2r}^{2} r\,dz\,dr\,d\varphi$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi): $\int_{2r}^{2} r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- Środkowa całka względem r
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- Zewnętrzna całka względem φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Wykres



Bryła V, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Środek ciężkości półkuli – masa i trzy momenty statyczne.

Input: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Wynik

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Bryła lub funkcja zawiera x² + y² + z² – współrzędne sferyczne są często prostsze:

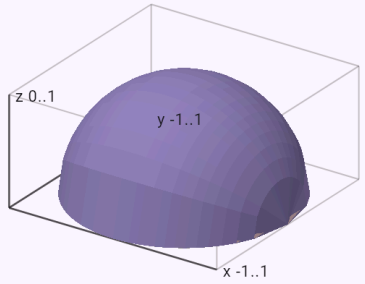
✓ kartezjańskie | walcowe | sferyczne

Edytuj w formularzu

Kroki

- Środek ciężkości bryły: każda współrzędna to moment statyczny (całka ze współrzędnej razy gęstość) podzielony przez masę m, podobnie dla y i z:
$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$$
- Opisujemy bryłę jako obszar normalny – z leży między dwiema powierzchniami nad rzutem bryły
$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-}$$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi)
$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- Środkowa całka względem y
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\frac{}{\sqrt{}}\right.}{2}\right.$$
- Zewnętrzna całka względem x
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- Moment statyczny dla współrzędnej x – te same kroki z funkcją podcałkową $x \cdot \rho$
$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Moment statyczny dla współrzędnej y – te same kroki z funkcją podcałkową $y \cdot \rho$
$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Moment statyczny dla współrzędnej z – te same kroki z funkcją podcałkową $z \cdot \rho$
$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- Współrzędne środka ciężkości to momenty podzielone przez masę
$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Wykres



Bryła V, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Moment bezwładności walca względem jego osi.

Input: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Wynik

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Oblicz we współrzędnych:

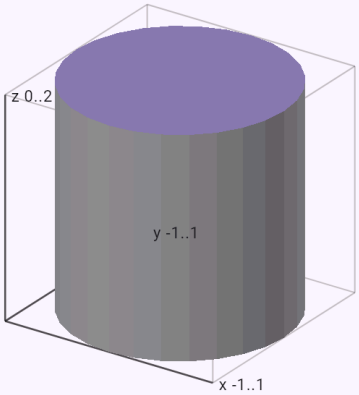
kartezjańskie | ✓ walcowe

Edytuj w formularzu

Kroki

- Moment bezwładności względem osi z – gęstość razy kwadrat odległości d od osi:
  $$I_z = \iiint_V d^2\,dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$
- Współrzędne walcowe – J = r to jakobian przekształcenia (dV = r dr dφ dz); podstawienie i funkcja podcałkowa
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- Bryła we współrzędnych walcowych:
  $$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 r^3\,dz\,dr\,d\varphi$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi): $\int_0^2 r^3\,dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- Środkowa całka względem r: $\int_0^1 2r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$
- Zewnętrzna całka względem φ
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Wykres



Bryła V, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Strumień na zewnątrz przez sferę – sparametryzowaną kątami θ, φ i sprawdzony twierdzeniem

Gaussa.

Input: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Wynik

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Oblicz:

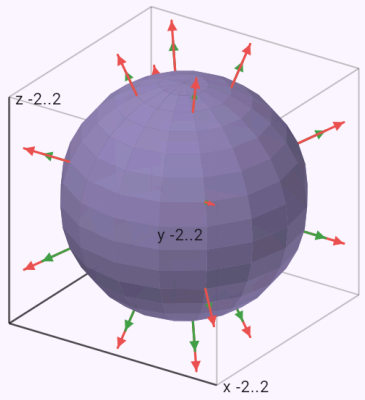
- ✓ z parametryzacji
- z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego

Edytuj w formularzu

Kroki

- Strumień pola wektorowego przez powierzchnię S – całka powierzchniowa zorientowana (drugiego rodzaju):
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametryzacja sfery kątami θ (od dodatniej osi z) i φ (wokół osi z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Pochodne cząstkowe względem parametrów – wektory styczne powierzchni
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Wektor normalny (iloczyn wektorowy wektorów stycznych) zorientowany na zewnątrz bryły
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot\mathrm{si}\right.$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem normalnym (F · n dS = F · N du dv):
  $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- Całka podwójna po prostokącie parametrów
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$$
- Sprawdzenie z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego: strumień na zewnątrz przez powierzchnię zamkniętą to całka potrójna z dywergencji po bryle wewnątrz
- Całka potrójna z funkcji po bryle V: $\iiint_V 3\,dV$
- Opisujemy bryłę jako obszar normalny – z leży między dwiema powierzchniami nad rzutem bryły
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi)
  $\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$
- Środkowa całka względem y
  $\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right)\,dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$
- Zewnętrzna całka względem x
  $$\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)\,dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- Twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego daje tę samą wartość: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$

Wykres



Powierzchnia S z normalnymi (zielone) i strzałkami pola (czerwone). Obróć, przeciągając palcem.

Pole paraboloidy – element powierzchni wykresu, całka podwójna we współrzędnych biegunowych.

Input: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Wynik

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Edytuj w formularzu

Kroki

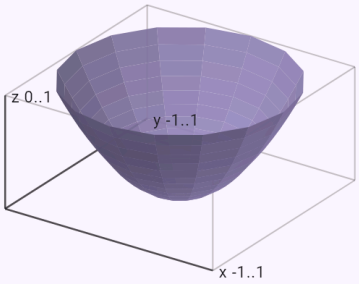
- Pole powierzchni S to całka powierzchniowa z jedynki: $\iint_S dS$
- Powierzchnia jest wykresem z = g(x, y) nad obszarem D w płaszczyźnie xy: $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \le 1$
- Pochodne cząstkowe g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- Element powierzchni wykresu: $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Parametryzację podstawiamy do f i mnożymy przez element powierzchni: $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- Całka powierzchniowa po wykresie to całka podwójna po jego rzucie D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Współrzędne biegunowe: $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, gdzie r to jakobian przekształcenia. Funkcja podcałkowa: $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- Obszar we współrzędnych biegunowych: $0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną: $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- Całka wewnętrzna względem r (druga zmienna jest stałą)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2 + 1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1 + 5\sqrt{}}{12}$$

- Całka zewnętrzna względem φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{\left(-1+\right.}{}$$

Wykres



Powierzchnia S, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Strumień przez walec zamknięty twierdzeniem Gaussa, sprawdzony część po części – powierzchnia

boczna i dwa koła.

Input: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Wynik

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$$

Oblicz:

z parametryzacji

✓ z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego

Edytuj w formularzu

Kroki

- Strumień pola wektorowego przez powierzchnię S – całka powierzchniowa zorientowana (drugiego rodzaju): $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego strumień na zewnątrz przez powierzchnię zamkniętą jest równy całce potrójnej z dywergencji po bryle V wewnątrz
- Całka potrójna z funkcji po bryle V: $\iiint_V 3\,dV$
- Opisujemy bryłę jako obszar normalny – z leży między dwiema powierzchniami nad rzutem bryły: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Z twierdzenia Fubiniego zapisujemy ją jako całkę iterowaną trzykrotną: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} 3\,dz\,dy\,dx$
- Najbardziej wewnętrzna całka względem z (pozostałe zmienne są stałymi): $\int_0^2 3\,dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- Środkowa całka względem y

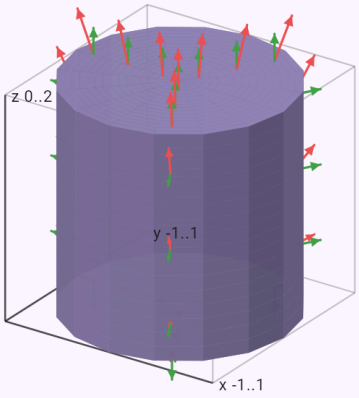
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\,dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$$

- Zewnętrzna całka względem x

$$\int_{-1}^{1}\left(12\sqrt{1-x^2}\right)dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$$

- Sprawdzenie z parametryzacji powierzchni daje tę samą wartość: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$

Wykres



Powierzchnia S z normalnymi (zielone) i strzałkami pola (czerwone). Obróć, przeciągając palcem.

Strumień rotacji przez półsferę – sprawdzony twierdzeniem Stokesa wzdłuż równika.

Input: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Wynik

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Oblicz:

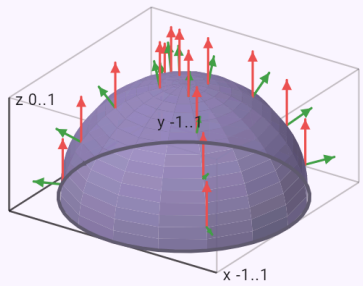
✓ z parametryzacji | z twierdzenia Stokesa

Edytuj w formularzu

Kroki

- Strumień rotacji pola przez S – całka powierzchniowa zorientowana, którą można też obliczyć z twierdzenia Stokesa
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Rotacja pola
  $$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Parametryzacja górnej półsfery – θ tylko do π/2
  $$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Pochodne cząstkowe względem parametrów – wektory styczne powierzchni
  $$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Wektor normalny (iloczyn wektorowy wektorów stycznych) zorientowany na zewnątrz bryły
  $$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Parametryzację podstawiamy do pola i bierzemy iloczyn skalarny z wektorem normalnym (F · n dS = F · N du dv):
  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$$
- Całka podwójna po prostokącie parametrów
  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Sprawdzenie z twierdzenia Stokesa: strumień rotacji jest równy cyrkulacji pola wokół brzegu (reguła prawej dłoni)
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- Krawędzie prostokąta parametrów, które przechodzą w punkt albo są przebiegane dwa razy w przeciwnych kierunkach (szew), się znoszą – zostaje rzeczywisty brzeg powierzchni.
- Część brzegu
  $$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- Całka krzywoliniowa wzdłuż niej:
  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$
- Twierdzenie Stokesa daje tę samą wartość:
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Wykres



Powierzchnia S z normalnymi (zielone) i strzałkami pola (czerwone). Brzeg ze strzałką jego kierunku. Obróć, przeciągając palcem.

Niezorientowana całka powierzchniowa po półsferze danej jej równaniem.

Input: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Wynik

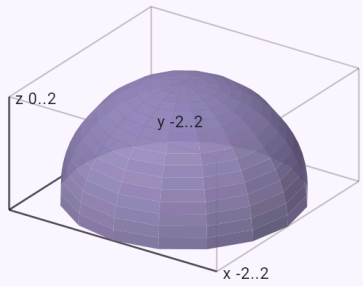
$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka powierzchniowa niezorientowana (pierwszego rodzaju) z f po powierzchni S: $\iint_S z \, dS$
- Parametryzacja górnej półsfery – θ tylko do π/2
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Pochodne cząstkowe względem parametrów – wektory styczne powierzchni
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Iloczyn wektorowy wektorów stycznych to wektor normalny, jego długość daje element powierzchni dS = | r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Parametryzację podstawiamy do f i mnożymy przez element powierzchni: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- Całka podwójna po prostokącie parametrów
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$

Wykres



Powierzchnia S, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Moment bezwładności powłoki sferycznej względem osi z.

Input: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Wynik

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

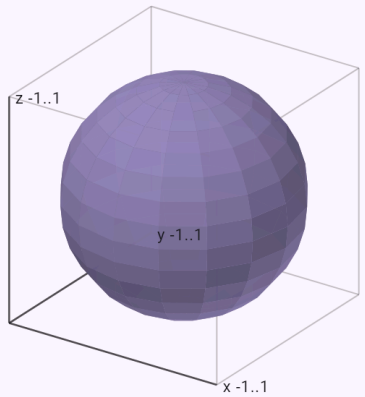
Edytuj w formularzu

Kroki

- Całka powierzchniowa niezorientowana (pierwszego rodzaju) z f po powierzchni S: $\oiint_S (x^2+y^2)\,dS$
- Moment bezwładności powłoki względem osi z – gęstość razy kwadrat odległości d od osi: $I_z = \oiint_S d^2\,dS, \quad d^2 = x^2+y^2$
- Parametryzacja sfery kątami θ (od dodatniej osi z) i φ (wokół osi z) $\vec{r}(\theta,\varphi) = (\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ \sin\varphi\cdot\sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Pochodne cząstkowe względem parametrów – wektory styczne powierzchni $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ \cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Iloczyn wektorowy wektorów stycznych to wektor normalny, jego długość daje element powierzchni dS = | r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta\cdot\sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Parametryzację podstawiamy do f i mnożymy przez element powierzchni: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- Całka podwójna po prostokącie parametrów

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi\sin^3\theta\,d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Wykres



Powierzchnia S, po której całkujemy. Obróć, przeciągając palcem.

Mapa twierdzeń całkowych

Wszystkie twierdzenia całkowe mówią to samo: całka z pochodnej po obszarze równa się całce po jego brzegu. Brzegiem odcinka są dwa punkty, powierzchni krzywa, bryły zamknięta powierzchnia; uogólnione twierdzenie Stokesa ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω mówi to wszystko naraz. Aplikacja używa twierdzeń jako drugiej drogi obliczenia i jako sprawdzenia (chipy pod wynikiem); słowniczek pokazuje tę samą mapę pod hasłem „Twierdzenia całkowe”.

Jak to wpisać

`∫ f'(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Wzór Newtona–Leibniza – wewnątrz: pochodna na ⟨a; b⟩, na brzegu: wartości na końcach.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Twierdzenie o gradiencie (potencjał, niezależność od drogi) – wewnątrz: gradient wzdłuż krzywej, na brzegu:

	potencjał na jej końcach.
`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Twierdzenie Greena – wewnątrz: ∂Q/∂x − ∂P/∂y po obszarze płaskim, na brzegu: cyrkulacja wzdłuż krzywej zamkniętej.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Twierdzenie Stokesa – wewnątrz: strumień rotacji przez powierzchnię, na brzegu: cyrkulacja wzdłuż jej krawędzi.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Twierdzenie Gaussa – wewnątrz: dywergencja po bryle, na brzegu: strumień na zewnątrz przez zamkniętą powierzchnię.

Fizyczne zastosowania twierdzeń całkowych

Sekcja „Zastosowania” (dziedziny Fizyka i Analiza funkcji wielu zmiennych, elektryczność także w Elektrotechnice, przepływ i ciepło w Technice) ma modele z jednostkami: prawo Gaussa (kula, prosta, płaszczyzna), prawo Ampère'a i prawo Biota–Savarta (przewód, solenoid, toroid, pętla z prądem), indukcja elektromagnetyczna (strumień magnetyczny, zmienne pole, prądnica), kondensator (płaski, kulisty, walcowy), energia pola, praca w polu sił (grawitacja, sprężyna, siła Coulomba), przepływ cieczy (natężenie przepływu, profil paraboliczny, równanie ciągłości, cyrkulacja i rotacja), przewodzenie ciepła (ściana płaska i walcowa) oraz pole grawitacyjne z prawa Gaussa.

Kroki zaczynają się od prawa całkowego, potem wyjaśniają symetrię (na wybranej powierzchni lub krzywej pole jest stałe i skierowane wzdłuż normalnej lub stycznej), pokazują obliczoną całkę, ładunek, prąd lub masę wewnątrz i wzór do podstawienia. Prawa elektromagnetyczne mają też postać różniczkową – hasło słowniczka „Równania Maxwella” ma obie postacie obok siebie. Wykres pokazuje pole w zależności od odległości (E(r), B(r), g(r)), profil prędkości, temperaturę w ścianie lub napięcie prądnicy.

Przykłady

Pole wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli – ładunek wewnątrz Q r³/R³, pole rośnie liniowo.

Input: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Wynik

$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Kroki

- Szukane E; dane: $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki

  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Ładunek Q rozłożony symetrycznie względem środka – na powierzchni kuli (kula przewodząca, powłoka) albo równomiernie w całej jej objętości. Powierzchnią Gaussa jest współśrodkowa sfera o promieniu r; na zewnątrz ładunek działa jak punktowy. Równanie modelu:

  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Symetria: pole jest radialne i ma tę samą wartość na każdej współśrodkowej sferze. Za powierzchnię Gaussa bierzemy sferę o promieniu r – na niej pole jest równoległe do normalnej i stałe.
- Obliczona całka: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- Zamknięty ładunek

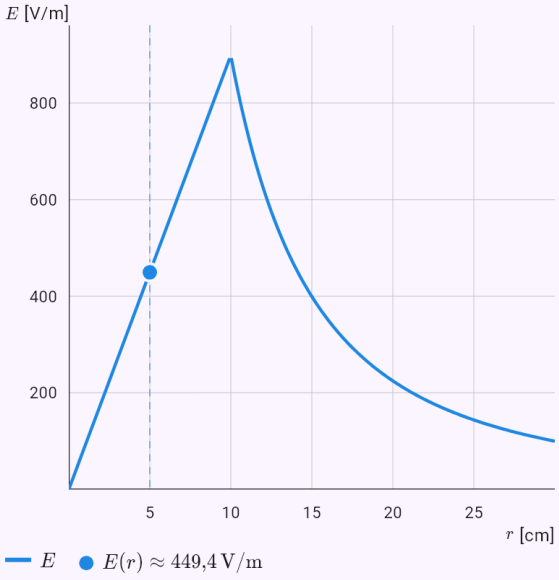
  $Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość

  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- Podstawiamy

  $E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$

- To samo prawo w postaci różniczkowej (równania Maxwella): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Pole magnetyczne prostego przewodu z prawa Ampère'a wzdłuż okręgu wokół osi.

Input: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

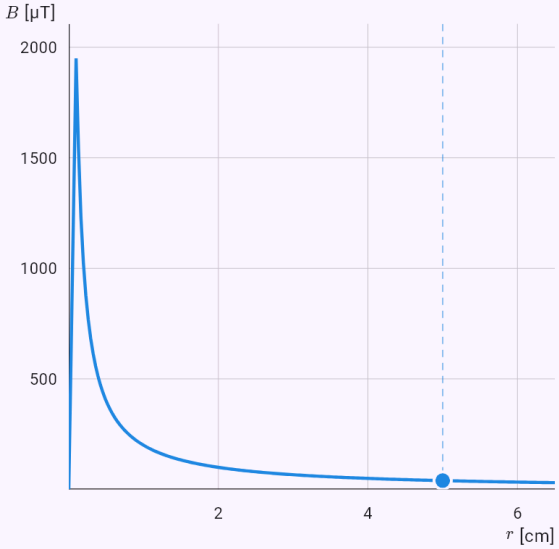
Wynik

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Kroki

- Szukane B; dane: $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Długi prosty przewód o promieniu R z prądem I rozłożonym równomiernie na przekroju. Krzywą jest okrąg wokół osi przewodu; wewnątrz przewodu obejmuje tylko część prądu. Równanie modelu: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Symetria: linie pola to okręgi wokół osi przewodu; B jest do nich styczne i stałe na okręgu o promieniu r.
- Obliczona całka: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- Obejmowany prąd: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Podstawiamy
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- To samo prawo w postaci różniczkowej (równania Maxwella): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Przeliczamy jednostki: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Pole na osi pętli z prądem z prawa Biota–Savarta.

Input: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

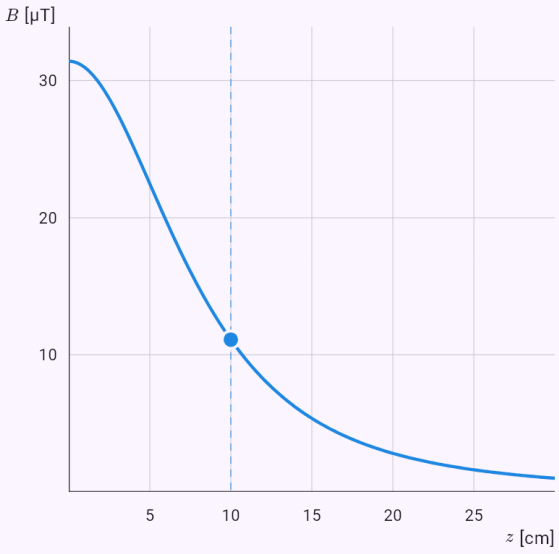
Wynik

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Kroki

- Szukane B; dane: $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Kołowa pętla o promieniu R z prądem I. Pole na jej osi w odległości z od środka wynika z prawa Biota–Savarta – składowe prostopadłe wkładów się znoszą, osiowe sumują. Równanie modelu: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Każdy kawałek dl pętli jest jednakowo odległy od punktu na osi, ρ = √(R² + z²), i prostopadły do łączącej je prostej. Składowe prostopadłe do osi znoszą się wokół pętli; sumują się tylko osiowe, dB · R/ρ.
- Obliczona całka
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Podstawiamy
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- W środku pętli (z = 0): $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Przeliczamy jednostki: $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Amplituda SEM prądnicy ε = NBAω i jej sinusoidalny przebieg na wykresie.

Input: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2]; omega=314.16[rad_s];`

`mode=rotating)`

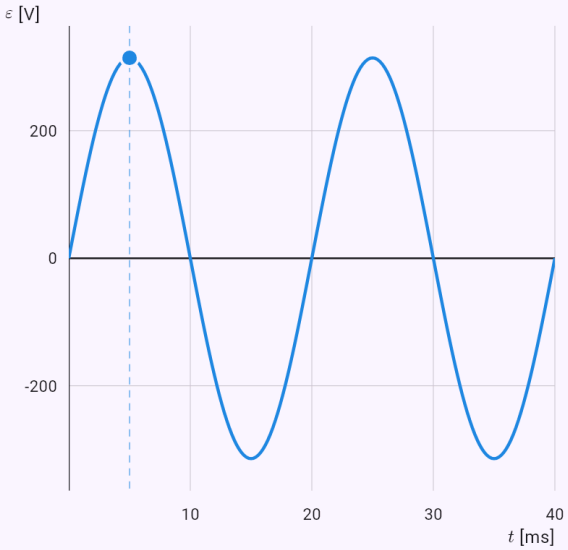
Wynik

$$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$$

Kroki

- Szukane $\varepsilon_{\max}$; dane
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\,\mathrm{T}, \quad A = 500\,\mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\,\mathrm{ra}$
- Przeliczamy jednostki: $A = 500\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$
- Ramka o N zwojach obraca się z prędkością kątową ω w jednorodnym polu B – zasada działania prądnicy prądu przemiennego. Siła elektromotoryczna jest sinusoidalna o amplitudzie NBAω. Równanie modelu:
  $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$
- Strumień magnetyczny przez jeden zwój:
  $$\Phi(t) = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$$
- Obliczona całka: $\varepsilon(t) = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Wyznaczamy szukaną wielkość: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Podstawiamy: $\varepsilon_{\max} = 200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$
- Częstotliwość: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} \approx 50\,\mathrm{Hz}$
- To samo prawo w postaci różniczkowej (równania Maxwella): $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Wykres



Wielkości modelu w czasie obliczone z rozwiązania; odpowiedź jest zaznaczona.

Pojemność metra kabla koncentrycznego – pole z prawa Gaussa, napięcie jako całka z pola.

Input: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

Wynik

$$C \approx 102{,}1\,\mathrm{pF}$$

Kroki

- Szukane C; dane
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}, \quad L = 1\,\mathrm{m}$
- Przeliczamy jednostki
  $R_1 = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm} = 0{,}0035\,\mathrm{m}$
- Dwie współosiowe okładki walcowe o promieniach $R_1 < R_2$ i długości L – na przykład kabel koncentryczny. Równanie modelu
  $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$$
- Powierzchnią Gaussa jest współosiowy walec o promieniu r i długości L między okładkami; obejmuje ładunek Q okładki wewnętrznej, a przez jego podstawy pole nie przechodzi.
- Pole między okładkami z prawa Gaussa

$$E\cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$

- Napięcie jako całka krzywoliniowa z pola
  $$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$
- Pojemność
  $$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$$
- Przeliczamy jednostki: $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 102{,}1\,\mathrm{pF}$

Energia pola magnetycznego 1 T w litrze objętości.

Input: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Wynik

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Kroki

- Szukane W; dane: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Przeliczamy jednostki: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- Gęstość energii pola magnetycznego w próżni, w = B²/(2μ₀) – na przykład pole wewnątrz cewki. Równanie modelu: $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$
- Podstawiamy
  $w = \dfrac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m}^3$
- W polu jednorodnym gęstość energii jest wszędzie taka sama; całka objętościowa to gęstość razy objętość.
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Podstawiamy: $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- Tak cewka z prądem gromadzi swoją energię:
  $W = \dfrac{1}{2}LI^2$

Praca grawitacji przy podnoszeniu 1 kg z powierzchni Ziemi na wysokość jednego promienia.

Input: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km];`

mode=gravity)

Wynik

$$W \approx -31{,}28\,\mathrm{MJ}$$

Kroki

- Szukane W; dane
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 6371\,\mathrm{km}, \quad r_2$
- Przeliczamy jednostki
  $r_1 = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\mathrm{km} = 1{,}27$
- Siła jest zachowawcza (ma potencjał): praca nie zależy od drogi, tylko od początku i końca. Bierzemy więc najprostszą drogę – wzdłuż łączącej je prostej.
- Grawitacja ciała o masie M działa na ciało m przesuwane z odległości r_1 do r_2 od środka. Ujemna praca pola oznacza, że ciało trzeba było podnieść.
  Równanie modelu: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- Obliczona całka
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- Podstawiamy
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- Energia potencjalna
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Praca siły zachowawczej jest równa ubytkowi energii potencjalnej: $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}$
- Przeliczamy jednostki:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J} = -31{,}28\,\mathrm{MJ}$

Natężenie przepływu laminarnego – całka z profilu parabolicznego we współrzędnych biegunowych.

Input: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

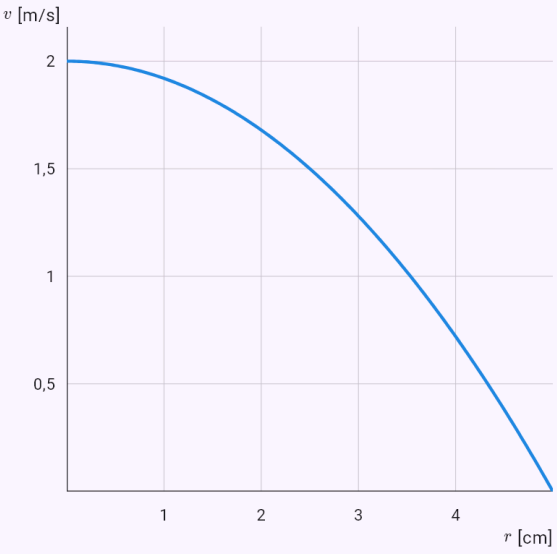
Wynik

$$Q \approx 7{,}854\,\mathrm{l/s}$$

Kroki

- Szukane Q; dane: $v_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}, \quad R = 5\,\mathrm{cm}$
- Przeliczamy jednostki: $R = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Przepływ laminarny (Poiseuille'a): płyn spoczywa przy ściance i jest najszybszy na osi; profil prędkości to parabola v = v_max(1 − r²/R²). Równanie modelu
  $Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
- Prędkość zależy tylko od odległości r od osi, więc po przekroju całkujemy we współrzędnych biegunowych (dS = r dr dφ).
- Obliczona całka
  $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$
- Podstawiamy
  $Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s}$
- Prędkość średnia na przekroju: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\mathrm{m/s}$
- Przeliczamy jednostki: $Q \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s} = 7{,}854\,\mathrm{l/s}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Strata ciepła izolowanej rury – temperatura spada w ścianie logarytmicznie.

Input: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC]; T2=20[degC]; mode=cylinder)`

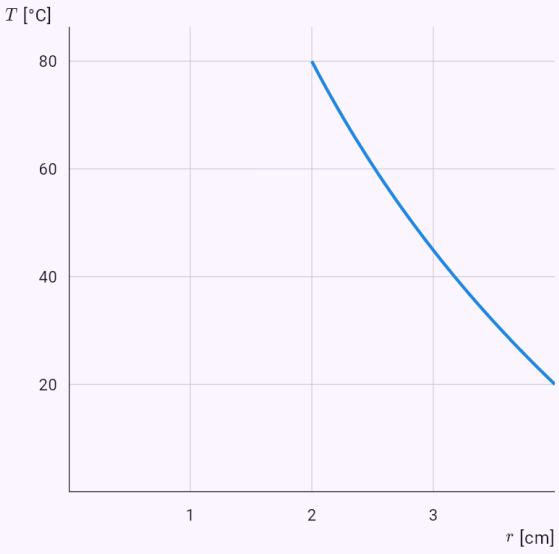
Wynik

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Kroki

- Szukane P; dane
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Przeliczamy jednostki:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Ściana walcowa – izolacja rury o promieniu wewnętrznym r_1, zewnętrznym r_2 i długości L. Ciepło przechodzi przez walce o rosnącym polu, więc temperatura spada logarytmicznie. Równanie modelu:
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Stan ustalony bez źródeł ciepła – przez każdą warstwę przechodzi ten sam strumień ciepła: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- Obliczona całka
  $P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- Podstawiamy
  $P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Przyspieszenie grawitacyjne w połowie drogi do środka Ziemi.

Input: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

Wynik

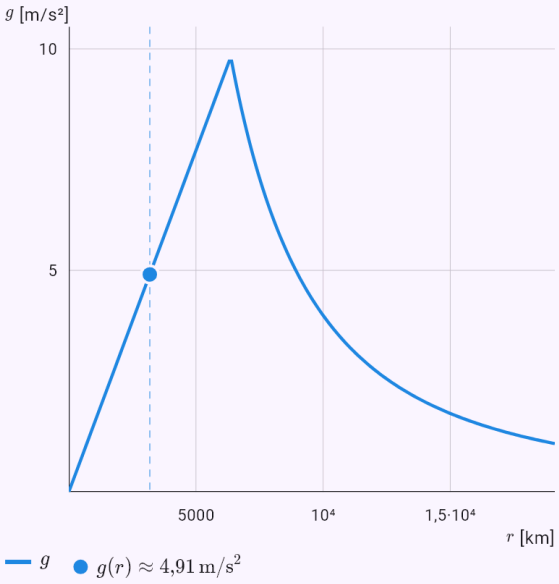
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

Kroki

- Szukane g; dane
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- Przeliczamy jednostki
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Jednorodna kula (planeta o stałej gęstości). Wewnątrz przyspieszenie grawitacyjne rośnie liniowo z odległością od środka. Równanie modelu: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\mathrm{in}}$
- Symetria: pole jest radialne i ma tę samą wartość na każdej współśrodkowej sferze. Za powierzchnię Gaussa bierzemy sferę o promieniu r – na niej pole jest równoległe do normalnej i stałe.
- Obliczona całka: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- Zamknięta masa
  $M_{\mathrm{in}} = M\frac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Wyznaczamy szukaną wielkość:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\mathrm{in}} \Rightarrow g = \frac{G M_{\mathrm{in}}}{r^2}$
- Podstawiamy
  $g = \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- To samo prawo w postaci różniczkowej (z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego): $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Znane ograniczenia

- Ekstrema tylko dla funkcji dwóch zmiennych, warunkowe z jednym warunkiem. Całka podwójna tylko po obszarze ograniczonym, którego brzeg jest co najwyżej kwadratowy względem jednej zmiennej; powierzchnia z = f(x, y) jest na razie rysowana w 3D tylko dla całki podwójnej. Pola wektorowe tylko w zmiennych x, y (z), inne litery są stałymi; strzałki są rysowane tylko dla pola płaskiego. Potencjał znajduje się przez całkowanie składowych – jeśli całka nie jest elementarna, nie zostanie znaleziony. Całki krzywoliniowe: twierdzenie Greena jest sprawdzane tylko dla okręgu, elipsy i wielokąta wypukłego; krzywą zamkniętą złożoną z wykresu i odcinka można wpisać tylko jako łamaną lub kawałkami parametrycznie. Całka potrójna tylko po bryle ograniczonej, normalnej względem jednej zmiennej (jedna dolna i jedna górna powierzchnia nad całym rzutem), której nierówności są względem niej co najwyżej kwadratowe; współrzędne sferyczne tylko dla bryły, której kąty θ i φ tworzą prostokąt.
- Całki powierzchniowe: twierdzenie Gaussa jest sprawdzane tylko dla ustawień (sfera, zamknięta półsfera, walec, stożek), Stokesa tylko dla strumienia rotacji zapisanej jako curl lub ∇ × F; wykres z =

g(x, y) tylko nad obszarem, który obsługuje całka podwójna; sferę z ograniczeniem innym niż $z \geq 0$ wpisz jako wykres lub parametryzacją.

- Fizyczne zastosowania twierdzeń całkowych obliczają tylko przypadki symetryczne (kula, nieskończona prosta i płaszczyzna, długa cewka, pole jednorodne), w których całka staje się iloczynem; ogólny rozkład ładunku lub prądu wpisz jako całkę krzywoliniową lub powierzchniową. Pomijają prąd przesunięcia w prawie Ampère'a–Maxwella, a materiały modelują tylko przenikalnością względną kondensatora.

29. Wielomian Taylora

Aplikacja buduje wielomian Taylora (w 0 Maclaurina) danego stopnia: tabela pochodnych w punkcie, podstawienie do wzoru i reszta w postaci Lagrange'a. Potrafi też sama znaleźć stopień – najmniejszy, dla którego błąd w danym punkcie lub na przedziale pozostaje poniżej danej granicy. Wykres pokazuje funkcję i wielomian; suwak zmienia stopień, abyś widział, jak przybliżenie się poprawia.

Wysokie stopnie (do około 1000) są obliczane dokładnie i skracane w rozwiązaniu i na wykresie; suwak stopnia jest wtedy logarytmiczny. Funkcje, których pochodne szybko rosną (tg x), idą przez dzielenie szeregów, błąd z oszacowania Cauchy'ego na płaszczyźnie zespolonej lub oszacowania szeregu naprzemiennego. Jeśli i to zawiedzie, aplikacja wyjaśni dlaczego i doradzi.

Jak to wpisać

`taylor(sin x, 0, 5)`	Funkcja, punkt i stopień.
`maclaurin(e^x, 4)`	Wielomian Maclaurina – punktem jest 0.
`taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`	Stopień według błędu w punkcie x (na przedziale zamiast x podaj r=…).
`ln(1 + x)`	Funkcja z chipem „Wielomian Taylora" – tam uzupełnij punkt, stopień lub dokładność.

Przykłady

Wielomian stopnia 4 z resztą.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Wynik

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Kroki

- Wielomian Maclaurina (wielomian Taylora w punkcie 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Pochodne i ich wartości w punkcie a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

- Wstawiamy wartości pochodnych

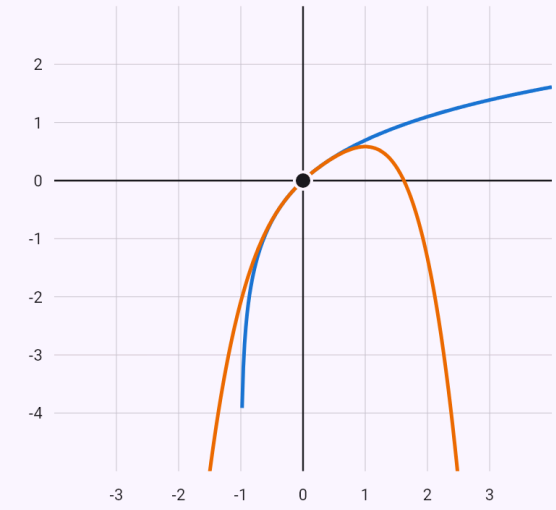
$$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- Reszta (błąd) w postaci Lagrange'a, ξ między a i x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$$

Wykres

Stopień: 4



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Punkt, w którego otoczeniu wielomian przybliża funkcję:

- $(0; 0)$

Suwakiem nad wykresem wybierz stopień – przy wyższym stopniu wielomian lepiej przybliża funkcję, i to dalej od punktu.

Stopień według wymaganej dokładności – przybliżona wartość e^0.5.

Input: `taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`

Wynik

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Kroki

- Wielomian Maclaurina (wielomian Taylora w punkcie 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Pochodne i ich wartości w punkcie a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Wstawiamy wartości pochodnych

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Reszta (błąd) w postaci Lagrange'a, ξ między a i x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5$$

- Najmniejszy stopień n, dla którego oszacowanie reszty w x mieści się w błędzie

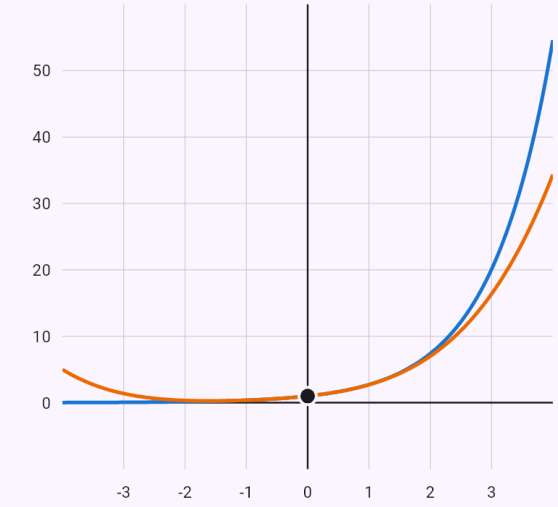
$$M_k = \max_{t \in \langle 0;\, 0{,}5 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3} \\ n = 2: &\quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3} \\ n = 3: &\quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3} \\ n = 4: &\quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3} \end{aligned}$$

- Wartość przybliżona: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

Wykres

Stopień: 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Punkt, w którego otoczeniu wielomian przybliża funkcję:

- $(0; 1)$

Suwakiem nad wykresem wybierz stopień – przy wyższym stopniu wielomian lepiej przybliża funkcję, i to dalej od punktu.

Stopień 999 – wysoki stopień jest skracany w rozwiązaniu.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Wynik

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{}{}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Kroki

- Wielomian Maclaurina (wielomian Taylora w punkcie 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Pochodne i ich wartości w punkcie a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$\vdots$$
$$f^{(998)}(x) = -\frac{997!}{(x+1)^{998}} \qquad f^{(998)}(0) = -997!$$
$$f^{(999)}(x) = \frac{998!}{(x+1)^{999}} \qquad f^{(999)}(0) = 998!$$

- Reszta (błąd) w postaci Lagrange'a, ξ między a i x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

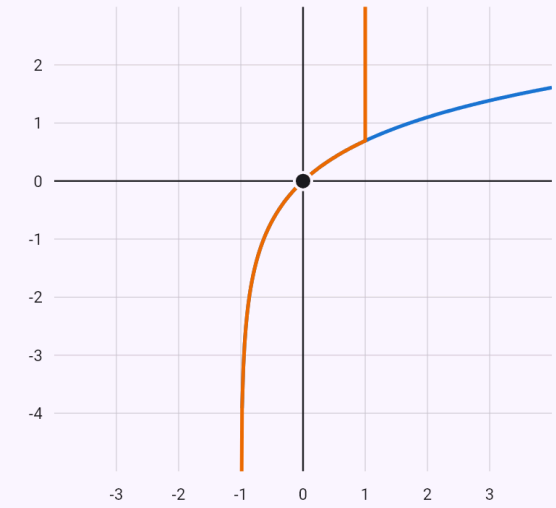
- Najmniejszy stopień n, dla którego oszacowanie reszty w x mieści się w błędzie

$$M_k = \max_{t \in \langle 0;1 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$
$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$
$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$
$$\cdots$$
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$
$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- Wartość przybliżona: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Wykres

Stopień: 999



$y = \ln(1+x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} +$

Punkt, w którego otoczeniu wielomian przybliża funkcję:

- $(0;0)$

Suwakiem nad wykresem wybierz stopień – przy wyższym stopniu wielomian lepiej przybliża funkcję, i to dalej od punktu.

Tangens – współczynniki z szeregów, błąd z oszacowania Cauchy'ego.

Input: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Wynik

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Kroki

- Wielomian Maclaurina (wielomian Taylora w punkcie 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Pochodne i ich wartości w punkcie a

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Współczynniki wynikają z działań na szeregach; wzory wysokich pochodnych byłyby ogromne

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Pochodne są zbyt duże, więc korzystamy z oszacowania Cauchy'ego na okręgu w płaszczyźnie zespolonej

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- Wartość przybliżona: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Znane ograniczenia

- Stopnie powyżej 1000 nie są obliczane; punktu na granicy zbieżności lub poza nią oszacowanie Cauchy'ego nie obsłuży.

30. Całki nieoznaczone

Aplikacja całkuje metodami, których uczy się w szkole, i przy każdym kroku mówi, co robi. Sprawdza wynik – różniczkuje go wyraz po wyrazie według reguł i przekształca sumę do funkcji podcałkowej (wspólny mianownik, tożsamości typu sin²x + cos²x = 1) – i rysuje funkcję podcałkową i funkcję pierwotną.

Pierwiastki z potęg zmiennej (∛(x⁴), √(x³)) są przepisywane na potęgi o wykładnikach wymiernych; wartość bezwzględna (|cos x|, √(1 − sin²x)) jest zapisywana funkcją znaku sgn.

Jeśli całka nie ma elementarnej funkcji pierwotnej (np. e^(−x²)), aplikacja to mówi i podaje ją przez funkcję specjalną (erf, Si, …).

Jak to wpisać

`int(x e^x, x)`	Całka ze zmienną – granice lub zastosowanie (pole, objętość, …) można dodać w polach pod wpisem.
`int(x^2 sin x)`	Bez zmiennej, gdy jest tylko jedna.
`∫ x^2 dx`	Ze znakiem całki, także ze zdjęcia.
`x e^x`	Funkcja z chipem „Scałkuj”.

Całki podstawowe i podstawienie

Całka sumy wyraz po wyrazie, wyłączanie stałych, całki tablicowe (także z liniową funkcją wewnętrzną) i podstawienie, gdy funkcja podcałkowa zawiera funkcję razem z pochodną jej wnętrza.

Przykłady

Wyraz po wyrazie z tablic.

Input: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

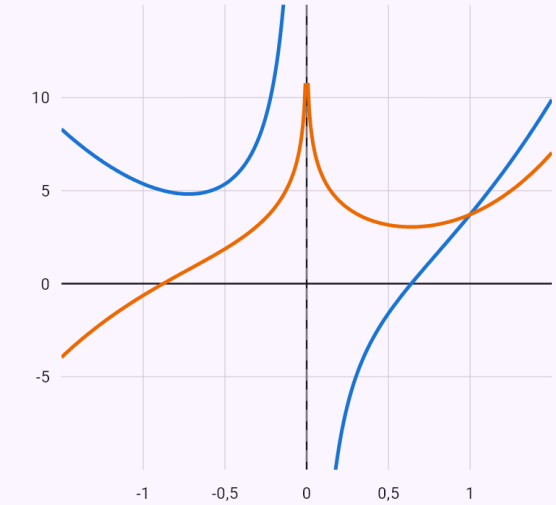
Wynik

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Kroki

- Całka sumy to suma całek
  $$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int e^x\, dx + \int -\frac{2}{x}$$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int e^x\, dx = e^x$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{2}{x}\, dx = -2\int \frac{1}{x}\, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową:
  $\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

Wykres



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Podstawienie t = x².

Input: `int(2x cos(x^2))`

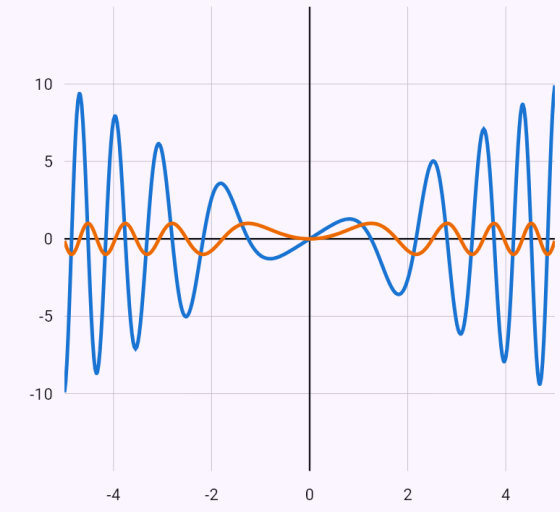
Wynik

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Kroki

- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Podstawienie $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$: $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Wykres



Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Całka ze stałymi a, b.

Input: `int(1/(a - bx)^3)`

Wynik

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Założenia: $b \neq 0$

Kroki

- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej: $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Całkowanie przez części

Iloczyn wielomianu z funkcją wykładniczą, trygonometryczną lub logarytmem aplikacja całkuje przez części, w razie potrzeby wielokrotnie; całki typu $e^x \sin x$ przez części cyklicznie.

Przykłady

Całkowanie przez części dwa razy z rzędu.

Input: `int(x^2 e^x)`

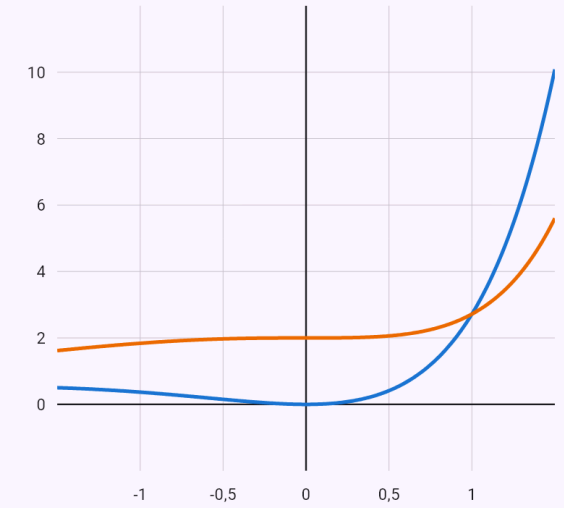
Wynik

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Kroki

- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = e^x, więc u' = $2x$, v = e^x: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 2xe^x \, dx = 2\int xe^x \, dx$
- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = e^x, więc u' = 1, v = e^x: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int e^x \, dx = e^x$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową: $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $\left(-2xe^x\right)' = -2 \cdot \left(e^x \cdot x + e^x\right) = -2xe^x - 2e^x$
- Po dodaniu i uproszczeniu $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Wykres



Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Funkcje wymierne

Aplikacja w razie potrzeby dzieli funkcję wymierną, rozkłada mianownik na czynniki i rozkłada funkcję na ułamki proste, które całkuje do logarytmów i arcus tangensów.

Mianownik, którego nie da się rozłożyć nad liczbami wymiernymi ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), rozkłada się nad liczbami rzeczywistymi – każda para sprzężonych pierwiastków zespolonych daje czynnik kwadratowy bez pierwiastków rzeczywistych.

Przykłady

Ułamki proste.

Input: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

Wynik

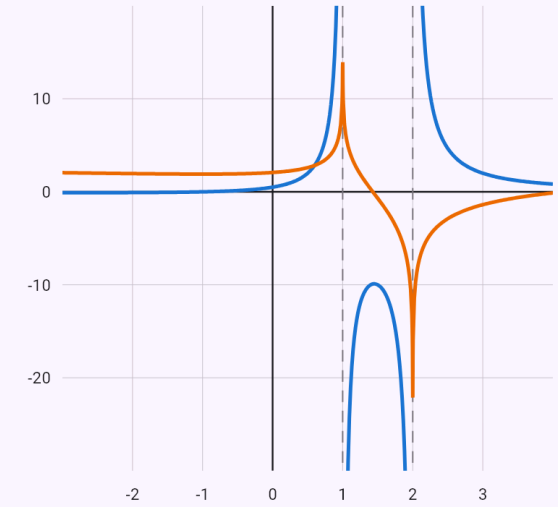
$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Kroki

- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste: $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$
- Całka sumy to suma całek $\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową: $(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$
- Po dodaniu i uproszczeniu

$$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Wykres



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Rozkład mianownika x⁴ + 1 nad liczbami rzeczywistymi.

Input: `int(1/(x^4 + 1))`

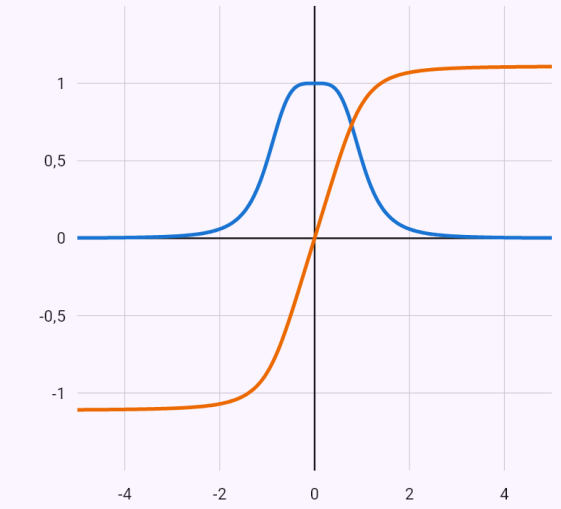
Wynik

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \right.\right.$$

Kroki

- Mianownik rozkładamy na czynniki nad $\mathbb{R}$: jego pierwiastki zespolone występują w parach sprzężonych r, r̄, a każda para daje czynnik kwadratowy (x − r)(x − r̄) = x² − 2·Re r·x + |r|² bez pierwiastków rzeczywistych:
$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$
- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$
- Całka sumy to suma całek
$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$$
- Mianownik nie ma pierwiastków rzeczywistych: wydzielona z licznika wielokrotność jego pochodnej daje ln, reszta – po sprowadzeniu do postaci kanonicznej – daje arctg
$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$$
- Mianownik nie ma pierwiastków rzeczywistych: wydzielona z licznika wielokrotność jego pochodnej daje ln, reszta – po sprowadzeniu do postaci kanonicznej – daje arctg
$$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Wykres



$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \dfrac{\sqrt{2}\,\text{arc}}{}$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Sprawdzenie ułamków prostych przez wspólny mianownik.

Input: `int(1/(x^3 + 1))`

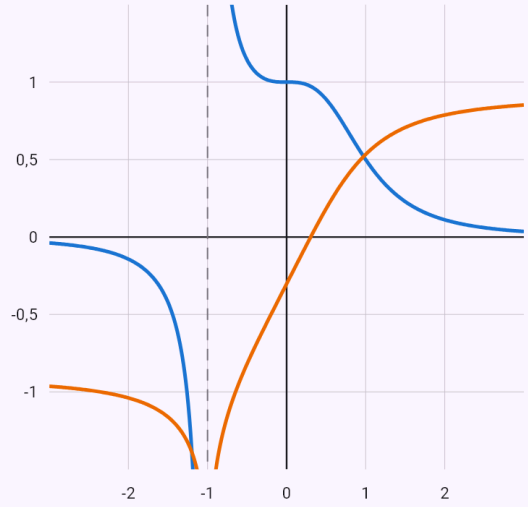
Wynik

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1}{3}\right.$$

Kroki

- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx$$
- Całka sumy to suma całek
$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx = \int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}$$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
$$\int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$
- Mianownik nie ma pierwiastków rzeczywistych: wydzielona z licznika wielokrotność jego pochodnej daje ln, reszta – po sprowadzeniu do postaci kanonicznej – daje arctg
$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{}}{3}$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
$$\left(-\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$
- Po dodaniu i uproszczeniu
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

Wykres



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-\right.}{6}$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Funkcje trygonometryczne

Najpierw tożsamości (sin²x = (1 − cos 2x)/2, iloczyny na sumy), dla potęgi nieparzystej podstawienie t = sin x lub t = cos x, dla funkcji wymiernej sinusa i cosinusa podstawienie według parzystości, a podstawienie uniwersalne t = tg(x/2) dopiero w ostateczności.

Przykłady

Nieparzysta potęga sinusa – podstawienie t = cos x.

Input: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

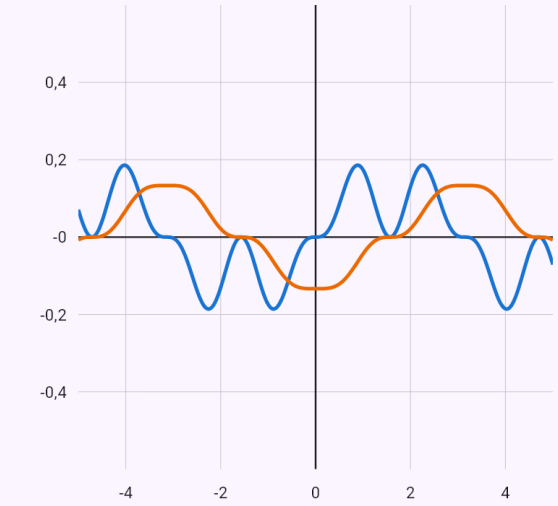
Wynik

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \; +$$

Kroki

- Potęga nieparzysta – podstawienie $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- Całka sumy to suma całek:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową:
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- Po dodaniu i uproszczeniu tożsamością
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Wykres



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Sprawdzenie: pochodna wyraz po wyrazie, przekształcona tożsamością 1 + tg²x = 1/cos²x.

Input: `int(1/cos(x)^4)`

Wynik

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Kroki

- Funkcja się nie zmienia, gdy sinus i cosinus jednocześnie zmienią znak – podstawienie $t = \operatorname{tg} x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- Całka sumy to suma całek:
  $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 1\,dt = t$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej:
  $t = \operatorname{tg} x:\quad \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$

- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową
  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
  $\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$
- Po dodaniu i uproszczeniu tożsamością
  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos}$

Funkcje hiperboliczne

Całki tablicowe (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx przez logarytm pochodnej, przez części (x sinh x, arsinh x), kwadraty wzorami sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x; reszta z definicji przez funkcje wykładnicze.

Przykłady

Wzór sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Input: `int(sinh(x)^2)`

Wynik

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Kroki

- Ze wzoru $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$
- Całka sumy to suma całek
  $$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową:
  $$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu
  $$\left(\frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$$
- Po dodaniu i uproszczeniu tożsamością $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$$

Pierwiastki

Całki z pierwiastkiem z funkcji homograficznej przez podstawienie, z pierwiastkiem z funkcji kwadratowej przez podstawienie Eulera, a całki dwumienne według warunków Czebyszewa – gdy żaden z nich nie zachodzi, aplikacja mówi, że całka nie jest elementarna.

Przykłady

Podstawienie Eulera.

Input: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Wynik

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Kroki

- Podstawienie Eulera (typu 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – całka staje się całką z funkcji wymiernej zmiennej t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Stałą wyłączamy przed całkę

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- Całka sumy to suma całek

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Z tabeli całek podstawowych: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Sprawdzenie – pochodna wyniku (funkcji pierwotnej) daje funkcję podcałkową

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

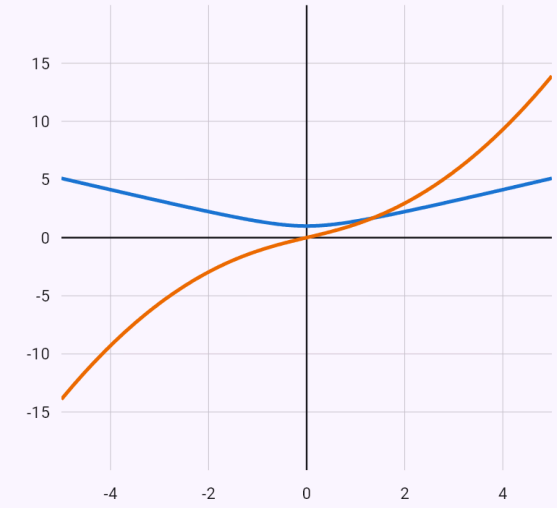
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Po dodaniu i uproszczeniu

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Wykres



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

Funkcja podcałkowa f i funkcja pierwotna F dla C = 0 (inne C przesuwa ją w górę lub w dół). Gdzie f jest dodatnia, F rośnie; gdzie ujemna, F maleje.

Znane ograniczenia

- Dla niektórych całek znajdujemy wynik bez rozwiązania krok po kroku – aplikacja mówi to w krokach.

- Obliczenie bez kroków, które trwa zbyt długo, jest przerywane – aplikacja to mówi.
- Dla długich wyników, przy których przekształcenie do funkcji podcałkowej nie byłoby czytelne (kilka wyrazów z pierwiastkami z liczb, np. $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), aplikacja pomija sprawdzenie.

31. Całki oznaczone i ich zastosowania

Aplikacja oblicza całkę oznaczoną wzorem Newtona–Leibniza (podstawowe twierdzenie rachunku całkowego) i rysuje pole pod wykresem – część nad osią x innym kolorem niż część pod nią. Radzi sobie też z całkami niewłaściwymi i zastosowaniami: pole, długość łuku, objętość i pole powierzchni bryły obrotowej, także dla krzywych danych parametrycznie i we współrzędnych biegunowych.

Całka oznaczona

Aplikacja znajduje funkcję pierwotną jak dla całki nieoznaczonej i podstawia granice. Przy podstawieniu od razu przelicza granice. Na przedziale symetrycznym względem zera korzysta z symetrii: całka części nieparzystej jest zerowa bez żadnej funkcji pierwotnej, a $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ jest rozpoznawana jako pole półkola. Bez elementarnej funkcji pierwotnej podaje postać dokładną z funkcją wyższą (np. 2 Si(π)) i oblicza jej wartość z szeregu potęgowego z oszacowaniem błędu; gdy nie znajdzie postaci dokładnej, oblicza wartość numerycznie i mówi, jaką metodą.

Litery w zadaniu ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ od −r do r) są dodatnimi parametrami: wynikiem jest wzór ($\pi r^2/2$), sprawdzony numerycznie dla różnych wartości parametrów, a wykres ma suwak dla każdej litery.

Jak to wpisać

`int(x^2, x, 0, 3)`	Całka ze zmienną i granicami.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Ze zdjęcia lub w LaTeX-u.
`x^2`	Funkcja z chipem „Scałkuj” – granice uzupełnij w polach.

Przykłady

Podstawienie z przeliczonymi granicami.

Input: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Wynik

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

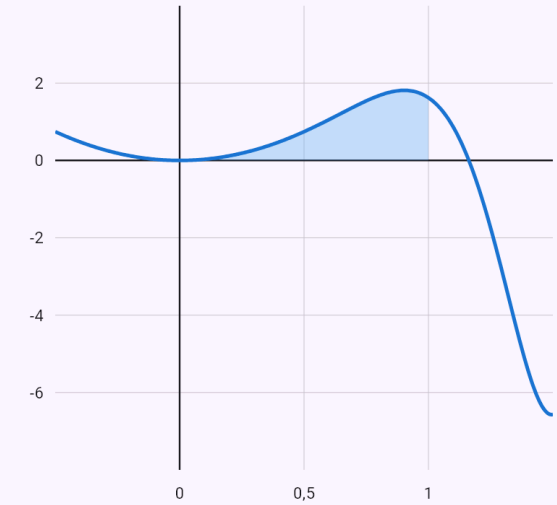
Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Simpson | Σ Trapezy | Σ Romberg

Kroki

- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Podstawienie $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Wykres



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Część nieparzysta na przedziale symetrycznym daje zero, reszta to pole półkola – wynikiem jest π.

Input: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Wynik

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx =$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Simpson | Σ Trapezy | Σ Romberg

Kroki

- Przedział jest symetryczny względem zera, więc całkę dzielimy na jej część nieparzystą i resztę

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

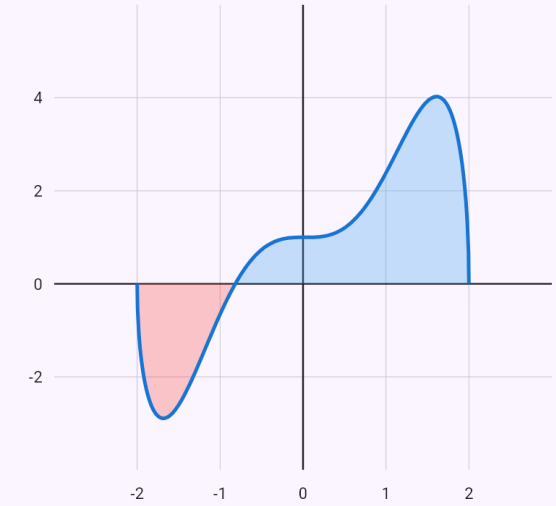
- Funkcja $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ jest nieparzysta (f(−x) = −f(x)): na $\langle -2;\,2\rangle$ pola nad osią i pod nią się znoszą, więc całka jest równa zeru bez żadnej funkcji pierwotnej:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0$$

- Wykres √(r² − x²) to górna połowa okręgu o promieniu r = 2, więc całka to pole półkola, πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Wykres



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Funkcja pierwotna nie jest elementarna: dokładnie 2 Si(π), wartość z szeregu potęgowego.

Input: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Wynik

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

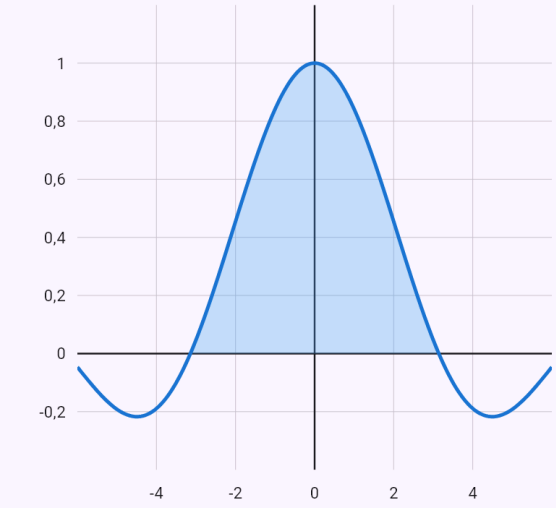
Metoda numeryczna obliczy liczbę także dla postaci dokładnej:

Σ Simpson | Σ Trapezy | Σ Romberg

Kroki

- Funkcja $\frac{\sin x}{x}$ jest parzysta (f(−x) = f(x)), jej wykres jest symetryczny względem osi y, więc całka po $\langle -\pi;\,\pi\rangle$ jest dwa razy większa niż po $\langle 0;\,\pi\rangle$:
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
- Funkcja pierwotna nie jest elementarna, to funkcja wyższa – dokładny wynik zapisujemy za jej pomocą
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$
- Liczbę dla postaci dokładnej daje szereg potęgowy funkcji wyższej: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Dla t = π dodajemy 6 wyrazów. Szereg jest naprzemienny, więc błąd jest mniejszy niż pierwszy pominięty wyraz, $3{,}6\cdot 10^{-5}$ (oszacowanie dla szeregu naprzemiennego):
  $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Wykres



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Całka z parametrem r – pole półkola, πr²/2; suwak na wykresie zmienia r.

Input: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Wynik

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Kroki

- Litery inne niż zmienna to dodatnie parametry: $r > 0$
- Pierwiastek z różnicy kwadratów – podstawienie trygonometryczne $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, pierwiastek $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Ze wzoru $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)

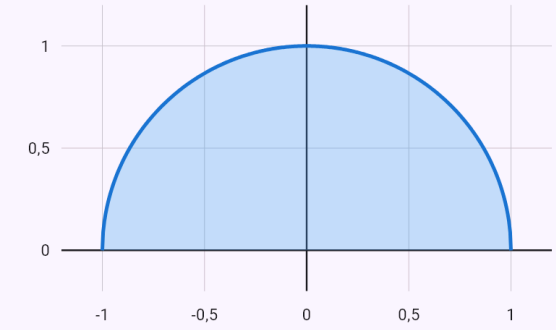
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Wartości parametrów

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Wykres



Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Całki niewłaściwe

Nieskończoną granicę lub funkcję nieograniczoną aplikacja obsługuje granicą funkcji pierwotnej i mówi, czy całka jest zbieżna, czy rozbieżna. Jeśli tej granicy nie da się obliczyć, rozstrzyga kryterium porównawczym.

Całki ∫₀^∞ x^(s − 1) lnᵏx/(xⁿ + aⁿ)^m dx (0 < s < mn, k = 0 do 3) są obliczane dokładnie nawet bez funkcji pierwotnej: jako k-ta pochodna względem s całki z parametrem I(s). Aplikacja znajduje I(s) podstawieniem t = xⁿ/(xⁿ + aⁿ) przez funkcję beta i wzór na odbicie (chip „Funkcja beta”) albo po konturze dziurki od klucza wokół dodatniej półosi przez residua (chip „Residua”). Gdy funkcja pierwotna

istnieje, domyślny pozostaje wzór Newtona–Leibniza (chip „Funkcja pierwotna”). Wartość jest zawsze sprawdzana numerycznie.

Inną całkę niewłaściwą bez funkcji pierwotnej porównuje się z 1/x^α na każdym końcu (nieskończona granica lub punkt, w którym funkcja rośnie ponad wszelkie granice) kryterium ilorazowym. Dopiero gdy jest zbieżna na każdym końcu, aplikacja oblicza wartość numerycznie (≈); całka rozbieżna jest zgłaszana jako rozbieżna.

Przykłady

Nieskończona górna granica.

Input: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Wynik

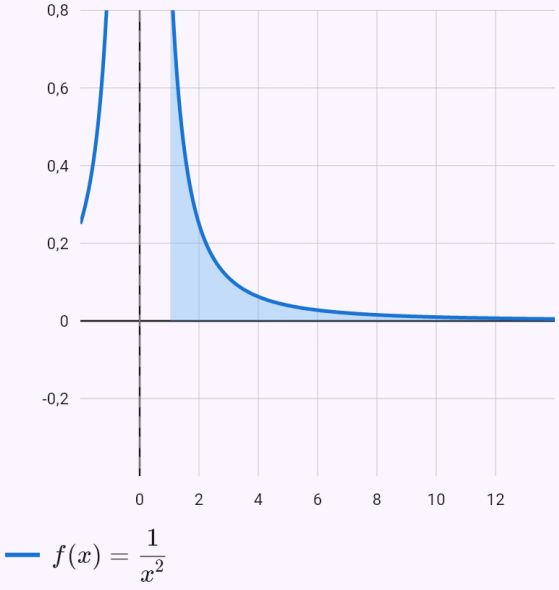
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Kroki

- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Całka niewłaściwa – przy granicy nieskończonej i tam, gdzie funkcja jest nieograniczona, liczymy granicę funkcji pierwotnej. Granice są skończone, całka jest zbieżna

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Wykres



Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Funkcja nieograniczona przy dolnej granicy.

Input: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Wynik

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

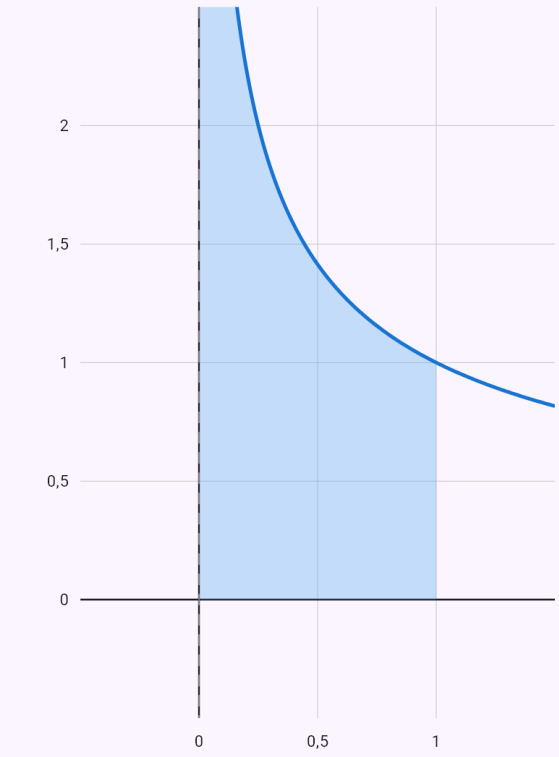
Σ Simpson | Σ Trapezy | Σ Romberg

Kroki

- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Całka niewłaściwa – przy granicy nieskończonej i tam, gdzie funkcja jest nieograniczona, liczymy granicę funkcji pierwotnej. Granice są skończone, całka jest zbieżna

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Wykres



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I''(4) przez funkcję beta – 5√3π³/972.

Input: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Wynik

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Kroki

- Logarytm wynika z różniczkowania względem parametru s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Całka jest więc pochodną całki z parametrem $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, zbieżnej dla $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Obliczamy I(s) dla ogólnego s, różniczkujemy i podstawiamy.
- Podstawienie przenosi całkę na ⟨0; 1⟩ i daje funkcję beta Eulera B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Funkcję beta zapisujemy za pomocą funkcji gamma, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), i korzystamy ze wzoru na odbicie Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

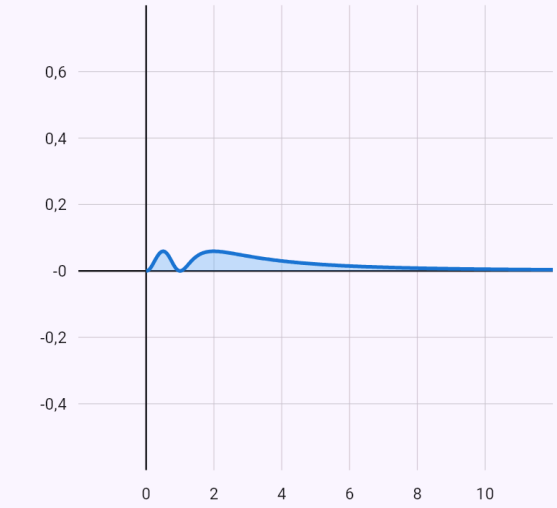
- Pochodna względem parametru s (rzędu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Podstawiamy s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Wykres



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Ta sama całka po konturze dziurki od klucza przez residua.

Input: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Residua

Wynik

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Kroki

- Logarytm wynika z różniczkowania względem parametru s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Całka jest więc pochodną całki z parametrem $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, zbieżnej dla $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Obliczamy I(s) dla ogólnego s, różniczkujemy i podstawiamy.
- Potęgę z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) bierzemy z argumentem z w (0; 2π) i całkujemy po konturze „dziurki od klucza" C wokół dodatniej półosi rzeczywistej. Na górnym brzegu z^(s − 1) = x^(s − 1), na dolnym x^(s − 1)·e^(2πis); duży i mały okrąg w granicy nic nie wnoszą, bo $0 < s < 6$. Wewnątrz leżą bieguny $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ rzędu 1 i z twierdzenia o residuach (dla s niecałkowitego)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Bieguny są jednokrotne; residuum to licznik przez pochodną mianownika w biegunie, przy czym z$_j^n$ = −a^n

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Podstawiamy potęgi biegunów, sumujemy szereg geometryczny i upraszczamy. Wzór wyprowadziliśmy dla s niecałkowitego (inaczej 1 − e^(2πis) = 0). Obie strony są jednak ciągłe względem s, więc wzór obowiązuje też dla s = 4 − przez granicę s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

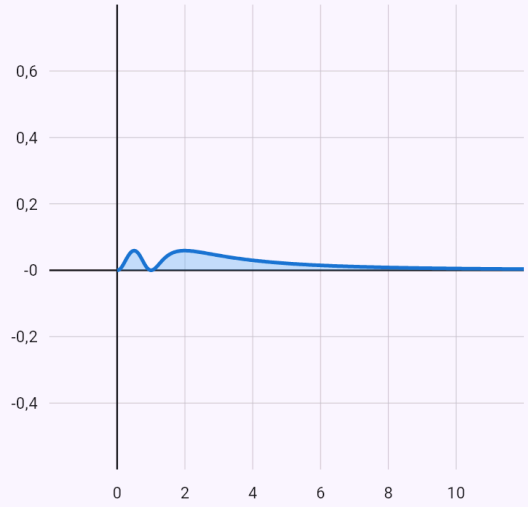
- Pochodna względem parametru s (rzędu 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Podstawiamy s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Wykres



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Brak funkcji pierwotnej: zbieżność przez porównanie z 1/x³, potem wartość numerycznie.

Input: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

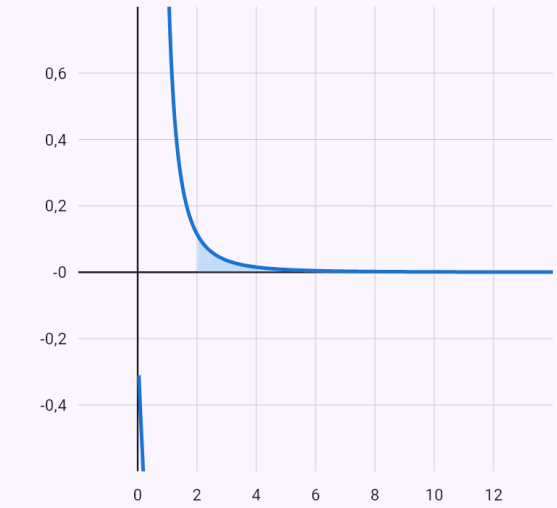
Wynik

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$$

Kroki

- Dla $x \to \infty$ porównujemy funkcję podcałkową z $\frac{1}{x^3}$ (kryterium ilorazowe): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. Granica jest liczbą dodatnią, więc całka zachowuje się tam jak całka z $\frac{1}{x^3}$, która jest zbieżna dla $\alpha = 3 > 1$
- Całka jest zbieżna na każdym końcu; jej wartość: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$
- Postaci dokładnej nie znaleziono, więc wartość całki niewłaściwej obliczono numerycznie adaptacyjną kwadraturą Gaussa–Kronroda.

Wykres



$f(x) = \frac{1}{x^3 + \ln x}$

nad osią x (+) pod osią x (−)

Całka oznaczona to pole między wykresem a osią x – część nad osią liczy się dodatnio, część pod osią ujemnie.

Pole pod krzywą i między krzywymi

Aplikacja oblicza pole między wykresem a osią x lub między dwiema krzywymi jako całkę z wartości bezwzględnej różnicy – części nad i pod liczą się obie dodatnio. Granic nie musisz podawać: znajduje je jako punkty przecięcia krzywych.

Jak to wpisać

`area(x^2, x)`	Pole między dwiema krzywymi, granice z punktów przecięcia.
`area(sin x, 0, pi)`	Pole między krzywą a osią x na przedziale.
`x^2`	Funkcja z chipem „Scałkuj” → „Pole między krzywymi”; drugą krzywą i granice uzupełnij w polach.

Przykłady

Pole między parabolą a prostą.

Input: `x^2` Pole między krzywymi, druga krzywa x

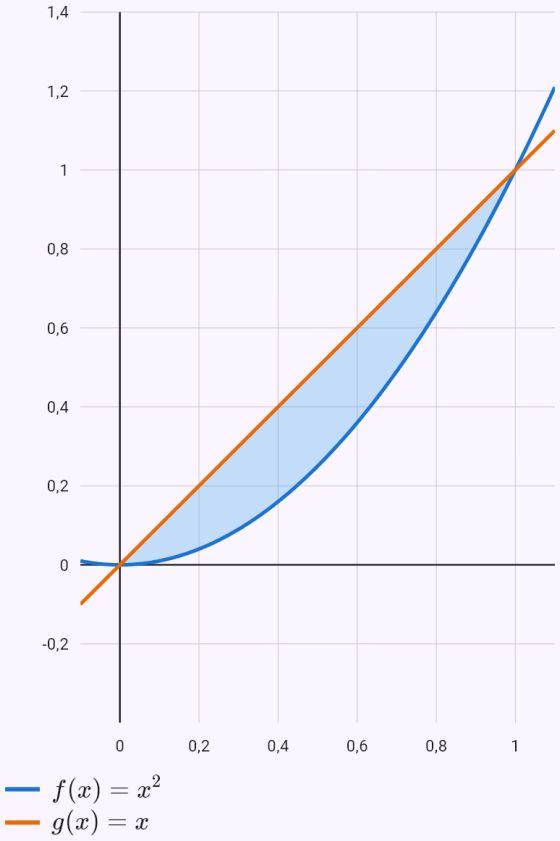
Wynik

$$S = \frac{1}{6}$$

Kroki

- Granicami są punkty przecięcia krzywych: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- Pole między krzywymi (części nad i pod liczą się dodatnio), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- Wyrażenie pod wartością bezwzględną nie zmienia na przedziale znaku – według niego opuszczamy wartość bezwzględną: $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- Całka sumy to suma całek: $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Wykres



Zacieniowany obszar – jego pole jest wynikiem (części nad osią i pod nią liczą się dodatnio).

Długość łuku

Aplikacja oblicza długość wykresu na przedziale wzorem l = ∫√(1 + f′²) dx. Próbuje uprościć pierwiastek (dla półokręgu wychodzi arcus sinus); gdy całka nie ma elementarnej funkcji pierwotnej, wynik jest numeryczny.

Jak to wpisać

`length(x^(3/2), 0, 4)`	Długość łuku na przedziale.

Przykłady

Długość półokręgu.

Input: `sqrt(1 - x^2)` Długość łuku, granice −1 i 1

Wynik

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Kroki

- Długość krzywej

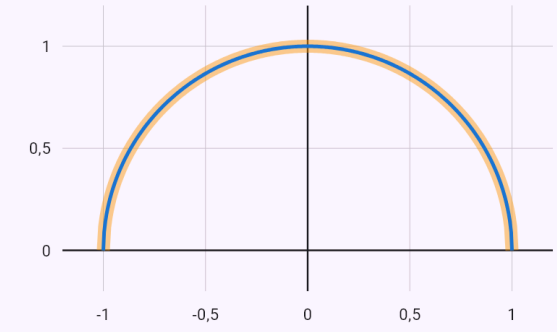
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$
- Całka niewłaściwa – przy granicy nieskończonej i tam, gdzie funkcja jest nieograniczona, liczymy granicę funkcji pierwotnej. Granice są skończone, całka jest zbieżna

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Wykres



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Wyróżniony łuk – jego długość jest wynikiem.

Objętość bryły obrotowej

Aplikacja oblicza objętość bryły obrotowej wokół osi x wzorem V = π∫f² dx (między dwiema krzywymi jako pierścienie), wokół osi y metodą powłok. Pokazuje też bryłę w 3D – obracaj ją palcem.

Jak to wpisać

`volume(sqrt(x), 0, 4)`	Objętość bryły obróconej wokół osi x.
`volume(x^2, 0, 2, y)`	Obrót wokół osi y.

Przykłady

Paraboloida obrotowa.

Input: `sqrt(x)` Objętość bryły, granice 0 i 4

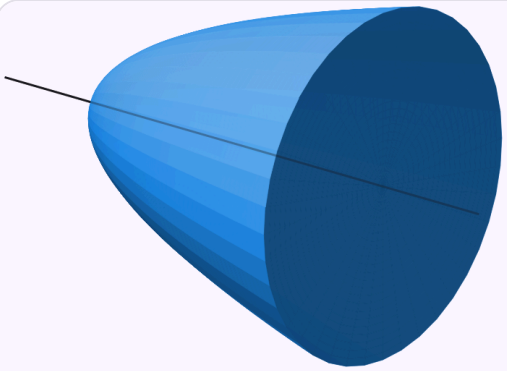
Wynik

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Kroki

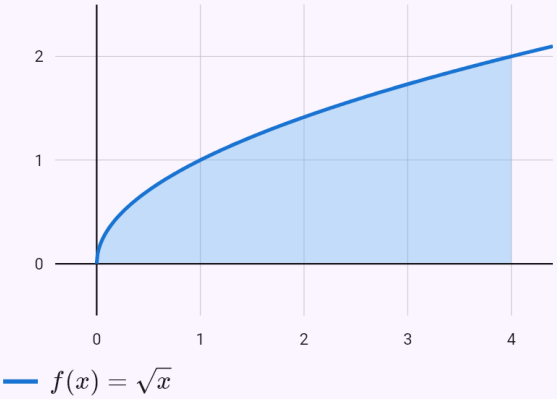
- Objętość bryły obrotowej wokół osi x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Wartość całki razy stała przed nią: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi x – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



Pole powierzchni bryły obrotowej

Aplikacja oblicza pole powierzchni bocznej wzorem S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; iloczyn pod pierwiastkiem często się upraszcza (dla sfery wychodzi stały).

Jak to wpisać

`surface(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	Pole powierzchni bryły obróconej wokół osi x.

Przykłady

Pole powierzchni sfery o promieniu 2.

Input: `sqrt(4 - x^2)` Powierzchnia bryły, granice −2 i 2

Wynik

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Kroki

- Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej wokół osi x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

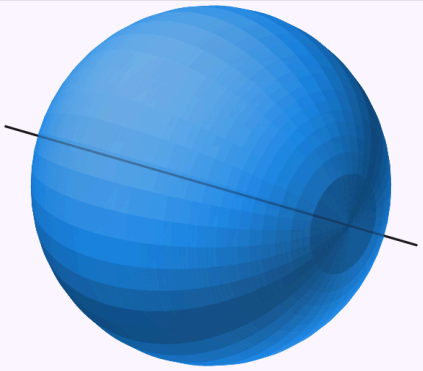
$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

- Z tabeli całek podstawowych: $\int 2\,dx = 2x$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a):

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

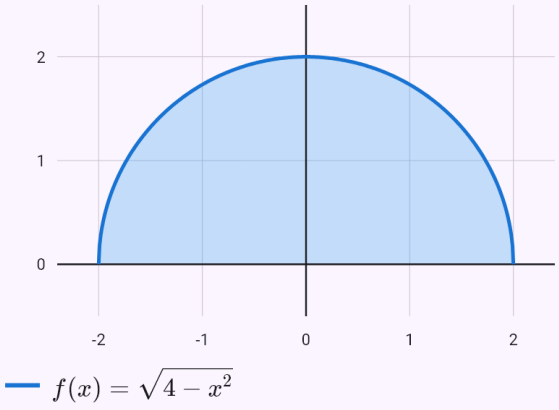
- Wartość całki razy stała przed nią: $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi x – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



Zastosowania z parametrami

Każda litera oprócz x jest dodatnim parametrem, a wynikiem jest wzór, np. objętość kuli 4πr³/3. Sprawdzenia numeryczne przebiegają z podstawionymi wartościami. Wykres i bryła 3D mają suwak dla każdego parametru.

Jak to wpisać

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Objętość kuli o promieniu r.

Przykłady

Objętość kuli o promieniu r.

Input: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Wynik

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Kroki

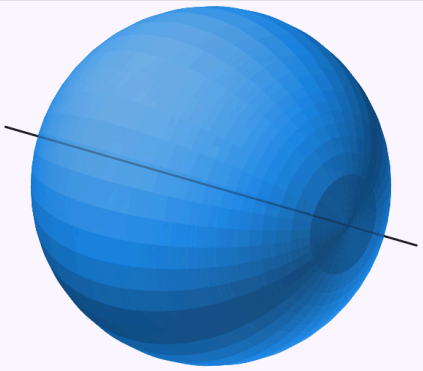
- Litery inne niż zmienna to dodatnie parametry: $r > 0$
- Objętość bryły obrotowej wokół osi x,
  $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$
  $V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- Całka sumy to suma całek:
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Wartość całki razy stała przed nią: $V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Wartości parametrów

$r = 1$

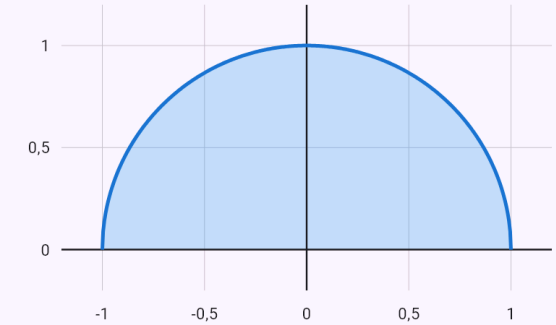
$V \approx 4{,}189$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi x – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Stożek ścięty o promieniach a, b i wysokości h.

Input: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Wynik

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Kroki

- Litery inne niż zmienna to dodatnie parametry: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Objętość bryły obrotowej wokół osi x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- Wartość całki razy stała przed nią

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Wartości parametrów

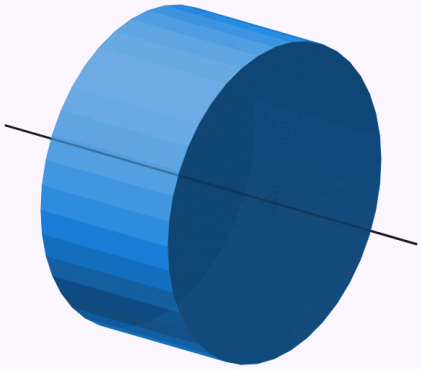
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

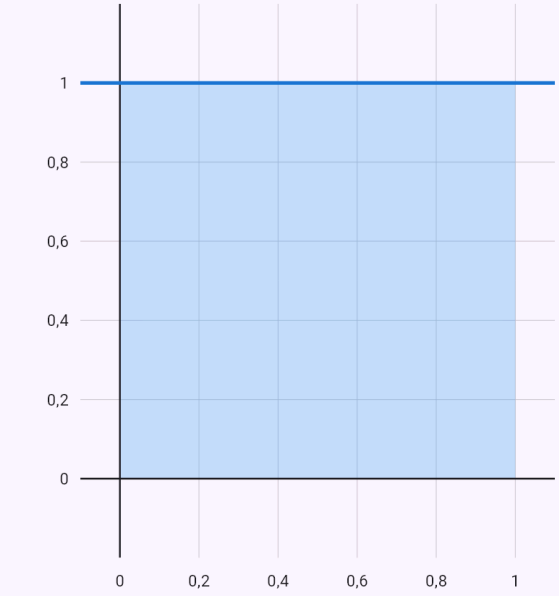
$V \approx 3{,}142$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi x – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

Środek ciężkości

Środek ciężkości obszaru pod krzywą lub między krzywymi, łuku i bryły obrotowej wynika z całek ze wszystkimi krokami i jest zaznaczony na wykresie. Litery działają jako parametry.

Jak to wpisać

`teziste(x^2, 0, 1)`	Obszar pod krzywą; druga funkcja daje obszar między krzywymi.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	Ostatnie słowo oblouk lub teleso wybiera łuk lub bryłę obrotową.

Przykłady

Środek ciężkości półkola, 4r/(3π).

Input: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Wynik

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Kroki

- Litery inne niż zmienna to dodatnie parametry: $r > 0$
- Środek ciężkości wynika z całek
  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$
  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$
- Obliczamy całkę: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Pierwiastek z różnicy kwadratów – podstawienie trygonometryczne $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, pierwiastek $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Ze wzoru $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},\quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Obliczamy całkę: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Podstawienie $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:
  $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $x = -r \Rightarrow t = 0,\quad x = r \Rightarrow t = 0$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_{0}^{0} = 0 - 0 = 0$$

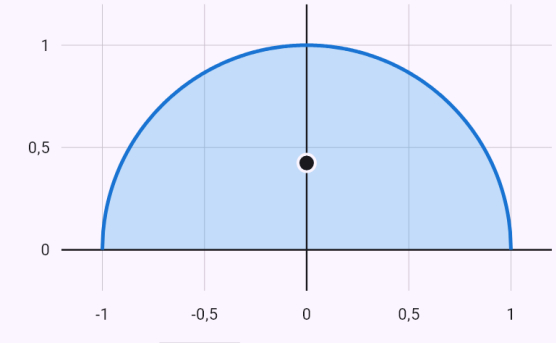
- Obliczamy całkę: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- Całka sumy to suma całek:
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Współrzędne środka ciężkości to ilorazy całek
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

Wartości parametrów

$r = 1$

$T \approx [0;\, 0{,}424]$

Wykres



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Punkt T to środek ciężkości.

Środek ciężkości stożka, 3/4 wysokości od wierzchołka.

Input: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Wynik

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Kroki

- Litery inne niż zmienna to dodatnie parametry:
  $h > 0,\ r > 0$
- Środek ciężkości wynika z całek
  $$x_T = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$
  $$y_T = 0$$
- Obliczamy całkę: $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $$\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$$
- Obliczamy całkę: $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $$\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$$
- Współrzędne środka ciężkości to ilorazy całek
  $$x_T = \frac{M_y}{J} = \frac{3h}{4}$$
  $$y_T = 0$$

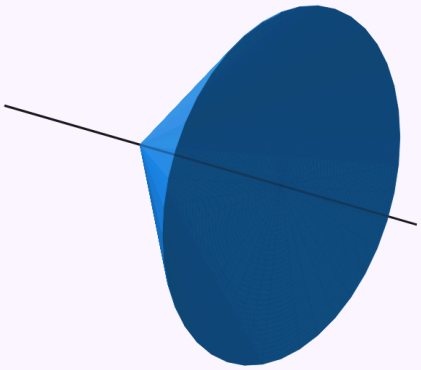
Wartości parametrów

$h = 1$

$r = 1$

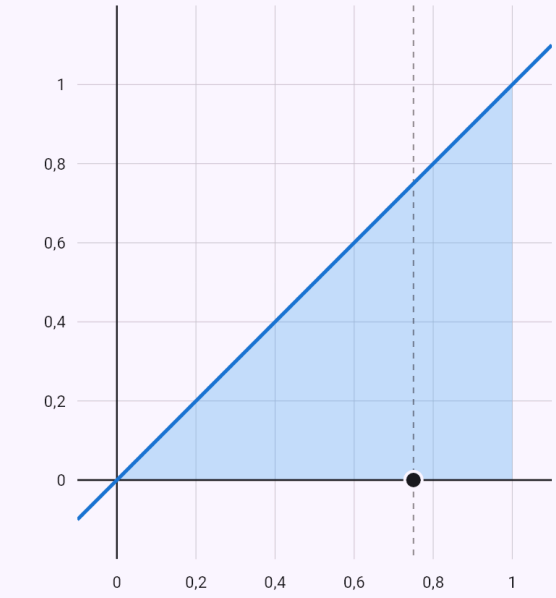
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi x – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



$f(x) = \frac{rx}{h}$

Punkt T to środek ciężkości.

Krzywe parametryczne i krzywe we współrzędnych biegunowych

Krzywą x = φ(t), y = ψ(t) zapisz w dwóch wierszach, krzywą we współrzędnych biegunowych jako r = ρ(φ). Chip „Scałkuj” oferuje wtedy pole, długość, objętość i powierzchnię; granice parametru są opcjonalne (bez nich od 0 do 2π). Wykres zacienia obszar, a objętość i powierzchnia pojawiają się jako bryła 3D. Obrót jest wokół osi x lub y; dla osi y dodaj y jako ostatni argument.

Jak to wpisać

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Krzywa parametryczna w dwóch wierszach.
`r = 1 + cos(phi)`	Krzywa we współrzędnych biegunowych (także r^2 = … dla lemniskaty).
`length(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	Postać pisana z parametrem i granicami.

Przykłady

Pole pod łukiem cykloidy.

Input: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Pole

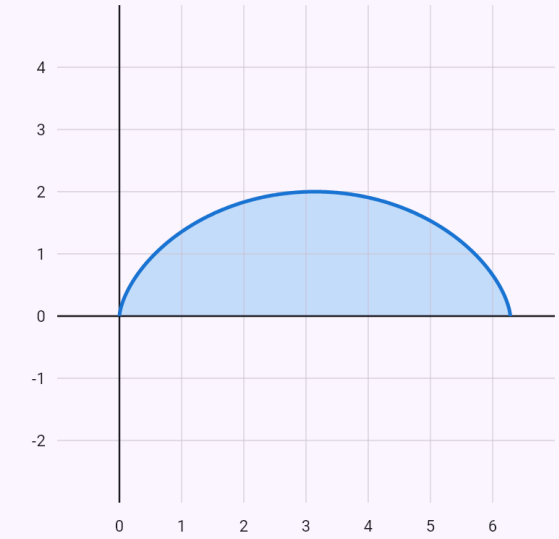
Wynik

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Kroki

- Pochodne względem parametru:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- Pole pod krzywą parametryczną (wewnątrz zamkniętej)
  dla $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$, $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$:
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt \right|$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 1\, dt = t$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -2\cos t\, dt = -2 \int \cos t\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Ze wzoru $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) - F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right.$

Wykres



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

Krzywa zadana parametrycznie (lub we współrzędnych biegunowych), narysowana dla wybranych granic parametru.

Długość kardioidy.

Input: `r = 1 + cos(phi)` Długość łuku

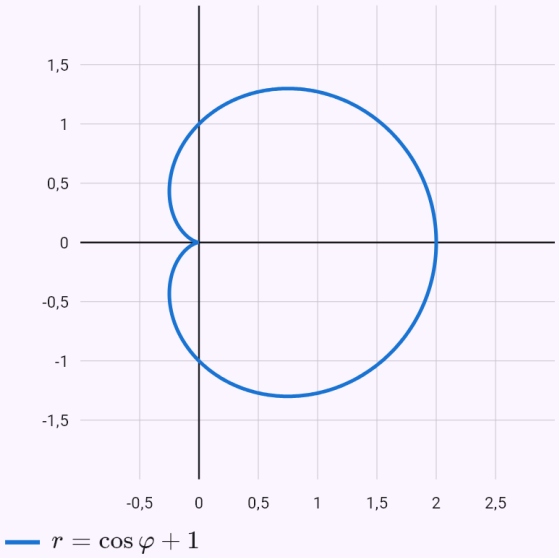
Wynik

$$l = 8$$

Kroki

- Pochodne względem parametru: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- Długość krzywej biegunowej dla $\varphi \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$
  $l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left($
- Dzielimy przedział w miejscach zerowych wyrażeń pod wartością bezwzględną (π) i w każdej części opuszczamy wartość bezwzględną według znaku
  $\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos$
- Stałą wyłączamy przed całkę
  $\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{0}^{\pi} = 4 - 0 = 4$
- Stałą wyłączamy przed całkę
  $\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =$
- Sumujemy wartości części:
  $\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$

Wykres



$r = \cos\varphi + 1$

Krzywa zadana parametrycznie (lub we współrzędnych biegunowych), narysowana dla wybranych granic parametru.

Asteroida obrócona wokół osi y.

Input: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Wynik

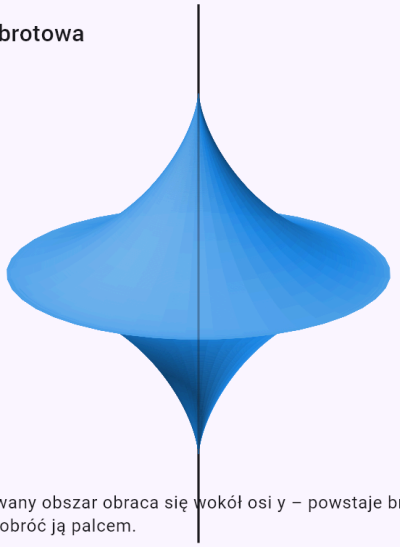
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Kroki

- Pochodne względem parametru:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Bryła powstaje z części krzywej na prawo od osi y (x ≥ 0)
  $t \in \left\langle 0;\ \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2};\ 2\pi \right\rangle$
- Objętość bryły wokół osi y dla $t \in \langle 0;\ 2\pi \rangle$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Potęga nieparzysta – podstawienie $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 3w^6\, dw = 3\int w^6\, dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -3w^4\, dw = -3\int w^4\, dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3} \right) \right.$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Potęga nieparzysta – podstawienie $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 3w^6\, dw = 3\int w^6\, dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$

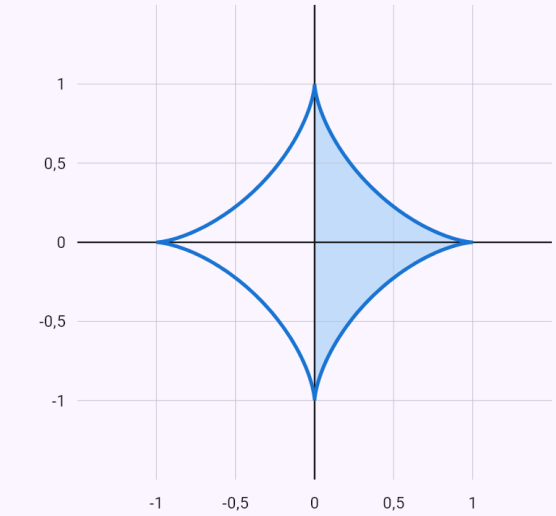
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Przy podstawieniu przeliczamy też granice całkowania – nie trzeba wracać do pierwotnej zmiennej:
  $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Wartość całki razy stała przed nią: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Bryła obrotowa



Zacieniowany obszar obraca się wokół osi y – powstaje bryła powyżej; obróć ją palcem.

Wykres



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

Krzywa zadana parametrycznie (lub we współrzędnych biegunowych), narysowana dla wybranych granic parametru.

Krzywe dane równaniem

Dla równania w x i y (x³ + y³ = 3xy) chip „Scałkuj” oferuje pole, długość, objętość i powierzchnię. Bez granic bierze całą krzywą zamkniętą: okrąg lub elipsę w postaci parametrycznej przez cos i sin, pętlę przez początek układu (liść Kartezjusza) przez proste y = tx – pole pętli wtedy dokładnie z wycinków, długość, objętość i powierzchnię numerycznie. Z granicami w x używa gałęzi górnej y = f(x).

Jak to wpisać

`x^3 + y^3 = 3xy`	Krzywa zamknięta – chip „Scałkuj” bez granic.
`y^2 = x^3`	Krzywa niezamknięta – chip „Scałkuj” z granicami w x (gałąź górna y = x^(3/2)).

Przykłady

Pole pętli liścia Kartezjusza – przez proste y = tx i wycinki, S = 3/2.

Input: `x^3 + y^3 = 3xy` Scałkuj → Pole

Wynik

$$S = \frac{3}{2}$$

Kroki

- Pętla przechodząca przez początek układu w postaci parametrycznej za pomocą prostych y = tx – po podstawieniu do równania wyznaczamy x

  $$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- Pole pętli z wycinków od początku układu: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, a na prostej y = tx jest x·y' − y·x' = x²

  $$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Stałą wyłączamy przed całkę

  $$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

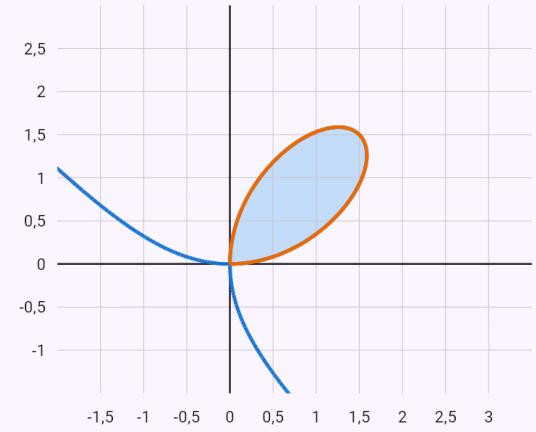
- Podstawienie $u = t^3+1$, $du = 3t^2\,dt$:

  $$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Całka niewłaściwa – przy granicy nieskończonej i tam, gdzie funkcja jest nieograniczona, liczymy granicę funkcji pierwotnej. Granice są skończone, całka jest zbieżna

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Wykres



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\; y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Cała krzywa zadana równaniem; wyróżniona jest część, której używa obliczenie.

Pole lemniskaty, przez współrzędne biegunowe.

Input: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

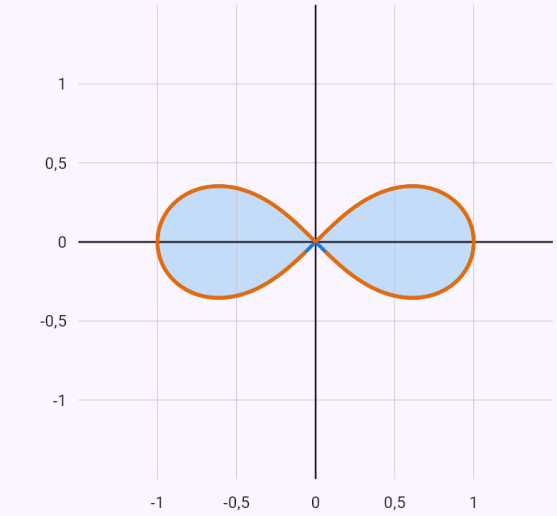
Wynik

$$S = 1$$

Kroki

- Krzywą zapisujemy we współrzędnych biegunowych
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- Pole ograniczone krzywą biegunową (suma wycinków od początku układu) dla $\varphi \in \left\langle \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4} \right\rangle$,
  $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- Krzywa ma przystające pętle (2); wartość jednej pętli razy ich liczba: $2 \cdot 1$
- Wartość całki razy stała przed nią: $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Wykres



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Cała krzywa zadana równaniem; wyróżniona jest część, której używa obliczenie.

Obrócona elipsa z członem xy.

Input: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Wynik

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Kroki

- Krzywa jest obróconą elipsą – jej osie wynikają z kąta obrotu; parametrycznie
  $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos t$
- Pochodne względem parametru:
  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$
- Pole pod krzywą parametryczną (wewnątrz zamkniętej)
  dla $t \in \langle 0;\, 2\pi \rangle$, $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) d$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) dt = \int -$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \cos^2 t\, dt$
- Ze wzoru $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Całka sumy to suma całek
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3} \int \cos t \cdot \sin t\, dt$
- Ze wzoru $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:
  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \sin(2t)\, dt$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \sin^2 t\, dt$

- Ze wzoru $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- Całka sumy to suma całek
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- Wzór Newtona–Leibniza, F(b) – F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- Całka wyszła ujemna (krzywa jest przebiegana od prawej do lewej) – bierzemy jej wartość bezwzględną:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Wykres



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Cała krzywa zadana równaniem; wyróżniona jest część, której używa obliczenie.

Znane ograniczenia

- Długość łuku y = ∛x (i podobnych krzywych) jest obliczana tylko numerycznie – prowadzi do całki eliptycznej, która nie ma elementarnej funkcji pierwotnej.
- Obrót wokół osi y tylko dla obszaru po jednej stronie osi.
- Wzór z parametrami jest podawany tylko tam, gdzie wynik nie zależy od ich wzajemnego porównania; jeśli znak zmienia się z ich wartościami, wzór nie jest podawany.
- Dla krzywych uwikłanych bez granic: stożkowe (także z członem xy), pętla przez początek układu i krzywe z dwóch części jednorodnych (lemniskata).
- Całka oznaczona z parametrem na razie tylko ze skończonymi granicami.
- Gdy kryterium ilorazowe nie rozstrzyga (funkcja podcałkowa oscyluje w nieskończoności, np. cos x/(x + ln x)), aplikacja nie podaje wartości bez dowodu zbieżności i zgłasza całkę jako jeszcze nierozwiązaną.

32. Szeregi nieskończone

Dla szeregu liczbowego aplikacja najpierw sprawdza warunek konieczny zbieżności (wyrazy dążą do zera), a potem wybiera jedno kryterium według postaci szeregu – szereg geometryczny, Σ $1/n^p$, kryterium d'Alemberta, Cauchy'ego, ilorazowe, całkowe lub Leibniza dla szeregów naprzemiennych; dla szeregu o zmiennych znakach rozróżnia zbieżność bezwzględną i warunkową. Gdy to możliwe, sumuje szereg. Wykres pokazuje wyrazy i sumy częściowe.

Szeregi liczbowe

Aplikacja znajduje sumę szeregów geometrycznych i teleskopowych, szeregów Σ $P(n)q^n$ i znanych szeregów (Σ $1/n^2 = \pi^2/6$); w przeciwnym razie oblicza ją numerycznie. Skończoną sumę dodaje po szkolnemu – teleskopowo, arytmetycznie, geometrycznie, w przeciwnym razie wyraz po wyrazie. Rozwiązuje też równanie z sumą szeregu geometrycznego ze sprawdzeniem warunku zbieżności $|q| < 1$.

Sumę do litery (sum(k^2, k, 1, n)) wzorami na sumy potęg, geometryczną jej wzorem, a wyraz wymierny przez ułamki proste (teleskopowo); wynik jest sprawdzany na pierwszych wyrazach.

Jak to wpisać

`sum(1/n^2)`	Wyraz ogólny; indeks n od 1.
`sum(1/n^2, n, 1, oo)`	Z indeksem i wartością początkową.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Ze zdjęcia lub w LaTeX-u.
`1/n^2`	Wyraz ogólny z chipem „Szereg" – indeks początkowy uzupełnij w polu.
`sum(2k+1, k, 1, 100)`	Suma skończona – z indeksem, dolną i górną granicą.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Suma do n – wzór na sumę.

Przykłady

Szereg Σ 1/n² – zbieżny, suma wynosi π²/6.

Input: `sum(1/n^2)`

Wynik

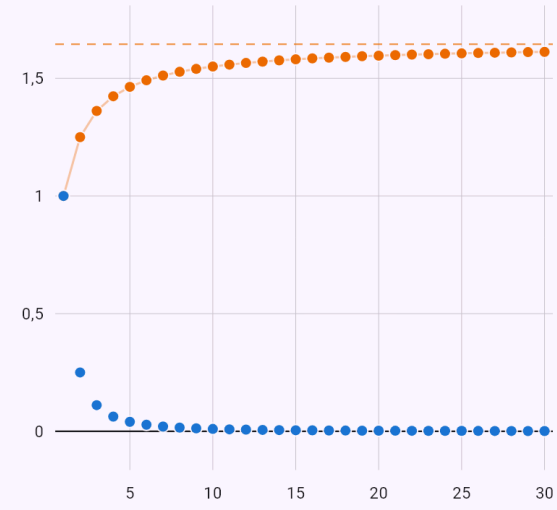
Szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Kroki

- Warunek konieczny zbieżności jest spełniony (sam nie rozstrzyga): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ to Σ 1/n^p z p = 2 > 1 – jest zbieżny.
- Suma znanego szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Wykres



Punkty to wyrazy a_n i sumy częściowe s_n = a_1 + … + a_n. Jeśli szereg jest zbieżny, wyrazy zbliżają się do zera, a sumy częściowe do jego sumy.

Kryterium Leibniza – zbieżny warunkowo.

Input: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Wynik

Szereg jest zbieżny, ale nie bezwzględnie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Kroki

- Warunek konieczny zbieżności jest spełniony (sam nie rozstrzyga): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Wyrazy mają oba znaki – najpierw zbieżność bezwzględna

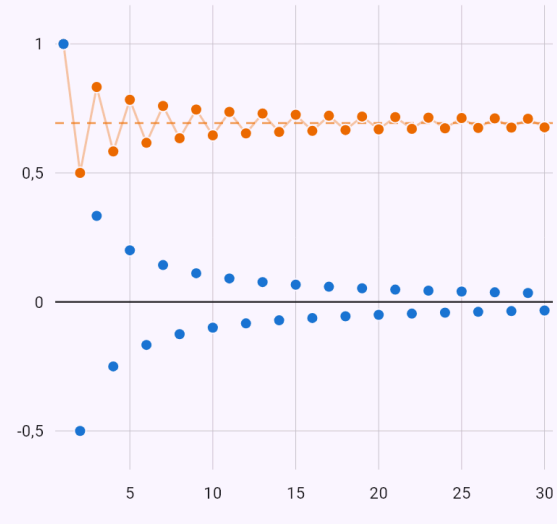
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- Szereg harmoniczny jest rozbieżny – wyrazy pogrupowane według potęg dwójki, każda grupa co najmniej 1/2

  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Kryterium Leibniza: |a_n| = $\frac{1}{n}$ maleje i $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – szereg jest zbieżny.
- Wniosek: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie (kryterium Leibniza).
- Suma znanego szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Wykres



wyrazy a_n sumy częściowe s_n suma

Punkty to wyrazy a_n i sumy częściowe s_n = a_1 + … + a_n. Jeśli szereg jest zbieżny, wyrazy zbliżają się do zera, a sumy częściowe do jego sumy.

Kryterium d’Alemberta i suma.

Input: `sum(n/2^n)`

Wynik

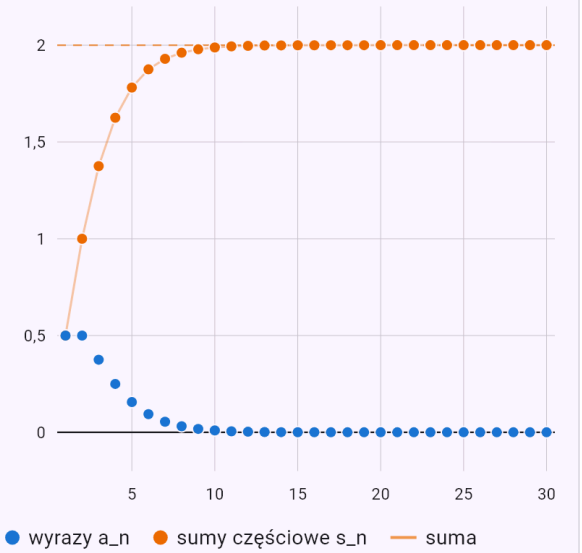
Szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Kroki

- Warunek konieczny zbieżności jest spełniony (sam nie rozstrzyga): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Kryterium d’Alemberta (ilorazowe) – szereg jest zbieżny. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Szereg Σ P(n)·qⁿ sumujemy, różniczkując szereg geometryczny: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Wykres



Punkty to wyrazy a_n i sumy częściowe s_n = a_1 + … + a_n. Jeśli szereg jest zbieżny, wyrazy zbliżają się do zera, a sumy częściowe do jego sumy.

Warunek konieczny nie jest spełniony – szereg jest rozbieżny.

Input: `sum(n/(n+1))`

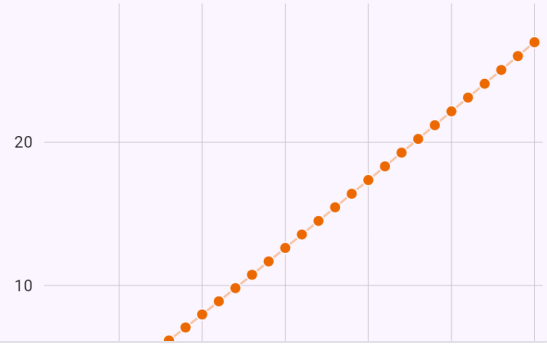
Wynik

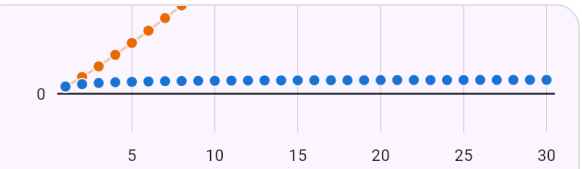
Szereg jest rozbieżny.

Kroki

- Warunek konieczny zbieżności nie jest spełniony: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Wykres





Punkty to wyrazy a_n i sumy częściowe s_n = a_1 + … + a_n. Jeśli szereg jest zbieżny, wyrazy zbliżają się do zera, a sumy częściowe do jego sumy.

Suma teleskopowa – zostaje pierwszy i ostatni wyraz.

Input: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Wynik

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Kroki

- Suma teleskopowa – sąsiednie wyrazy się redukują, zostaje tylko pierwszy i ostatni: $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Równanie z sumą szeregu geometrycznego.

Input: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Wynik

$$x = -1$$

Kroki

- Szereg jest geometryczny o ilorazie q = 2^x i jest zbieżny dla $|2^x| < 1$; jego suma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Rozwiązujemy: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ spełnia warunek zbieżności: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Suma kwadratów ze wzoru.

Input: `sum(k^2, k, 1, n)`

Wynik

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kroki

- Korzystamy ze wzorów na sumy potęg: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Suma: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Suma teleskopowa do n – ułamki proste.

Input: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Wynik

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Kroki

- Rozkładamy wyraz na ułamki proste – ich części redukują się w sumie kolejno (suma teleskopowa): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- Suma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Szeregi potęgowe

Dla szeregu potęgowego aplikacja znajduje promień zbieżności z kryterium d’Alemberta, bada końce jako szeregi liczbowe i podaje przedział zbieżności; gdy to możliwe, także sumę. Wykres pokazuje sumy częściowe z suwakiem liczby wyrazów.

Przykłady

Przedział zbieżności ⟨−1; 1).

Input: `sum(x^n/n)`

Wynik

$$x \in \langle -1;\ 1)$$

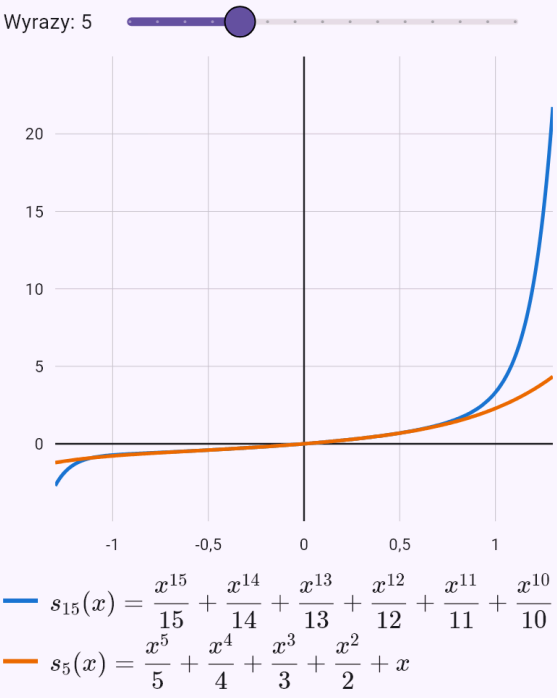
Kroki

- Promień zbieżności R = 1 z kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- Koniec przedziału $x = -1$: szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie (kryterium Leibniza).
- Koniec przedziału $x = 1$: szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny na mocy: grupowanie wyrazów szeregu harmonicznego.
- Przedział zbieżności: $x \in \langle -1;\ 1)$

Wykres



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Suwakiem wybierz liczbę wyrazów – sumy częściowe zbliżają się do sumy szeregu tylko wewnątrz przedziału zbieżności.

Szeregi Taylora

Aplikacja wyprowadza szereg Taylora funkcji ze znanych rozwinięć (e^x, sin x, ln(1 + x), …) przez podstawienie i wyznacza jego przedział zbieżności.

Jak to wpisać

`taylor(e^x, 0, oo)`	Funkcja, punkt i oo zamiast stopnia; albo chip „Wielomian Taylora” → „Szereg”.

Przykłady

Szereg ln(1 + x) i jego przedział zbieżności.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Wynik

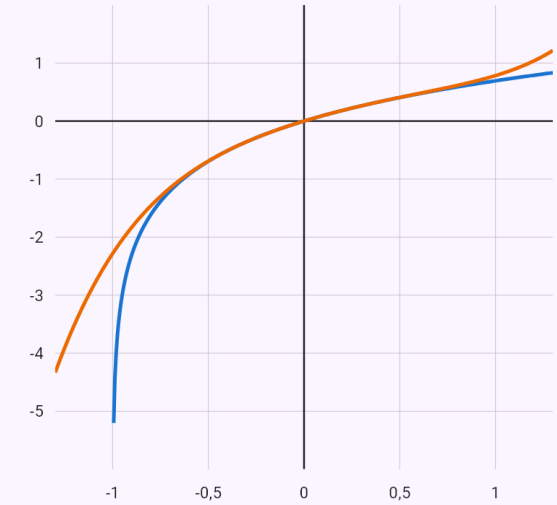
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Kroki

- Ze znanego rozwinięcia $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ z $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Promień zbieżności R = 1 z kryterium d'Alemberta $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- Koniec przedziału $x = -1$: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ jest rozbieżny na mocy: grupowanie wyrazów szeregu harmonicznego.
- Koniec przedziału $x = 1$: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie (kryterium Leibniza).
- Przedział zbieżności: $x \in (-1;\ 1\rangle$

Wykres

Wyrazy: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Suwakiem wybierz liczbę wyrazów – sumy częściowe zbliżają się do sumy szeregu tylko wewnątrz przedziału zbieżności.

33. Szeregi Fouriera

Aplikacja buduje szereg Fouriera funkcji na przedziale traktowanym jako jeden okres (bez niego na ⟨−π; π⟩) albo szereg sinusów lub cosinusów funkcji na ⟨0; L⟩. Funkcję można też podać przedziałami.

Oblicza współczynniki całkami z pełnym rozwiązaniem (całkowanie przez części z parametrem n), podstawia $\sin n\pi = 0$ i $\cos n\pi = (-1)^n$ i korzysta z symetrii dla funkcji parzystych i nieparzystych. W punktach nieciągłości wyznacza sumę szeregu z twierdzenia Dirichleta, a przez podstawienie punktu i z tożsamości Parsevala wyprowadza sumy szeregów liczbowych (np. $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$). Wykres pokazuje okresowe przedłużenie funkcji i sumy częściowe z suwakiem.

Chip „Zespolony” (lub fourierc) pokazuje też szereg w postaci zespolonej: współczynniki c_n, ich związek z a_n i b_n oraz widmo amplitudowe i fazowe.

Jak to wpisać

`fourier(x^2, -pi, pi)`	Funkcja i przedział.
`fouriersin(x, 0, pi)`	Szereg sinusów (fouriercos – szereg cosinusów).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Funkcja przedziałami wiersz po wierszu, z chipem „Szereg Fouriera”.
`x^2`	Funkcja z chipem „Szereg Fouriera” – tam wybierzesz rodzaj szeregu i przedział.

Przykłady

Funkcja parzysta – tylko cosinusy; sumy Σ 1/n² i Σ 1/n⁴.

Input: `fourier(x^2)`

Wynik

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

Kroki

- Przedział $\langle -\pi;\ \pi \rangle$ to jeden okres: $T = 2\pi$, połowa okresu $l = \pi$. Szukamy szeregu o współczynnikach

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Funkcja jest parzysta, $f(-x) = x^2 = f(x)$, więc współczynniki przy sinusach są zerowe, a pozostałe można liczyć na połowie przedziału

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Współczynnik a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Podstawiamy granice: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Współczynnik a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$
- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, więc u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Stałą wyłączamy przed całkę:

  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, więc u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Stałą wyłączamy przed całkę:

  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:

  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Dla całkowitego n: $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Podstawiamy granice

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Współczynniki podstawione do szeregu

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Okresowe przedłużenie funkcji jest ciągłe, więc z twierdzenia Dirichleta suma szeregu jest równa f(x) dla $x \in \langle -\pi;\, \pi \rangle$
- Podstawienie $x = 0$ daje sumę szeregu liczbowego

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Podstawienie $x = \pi$ daje sumę szeregu liczbowego

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

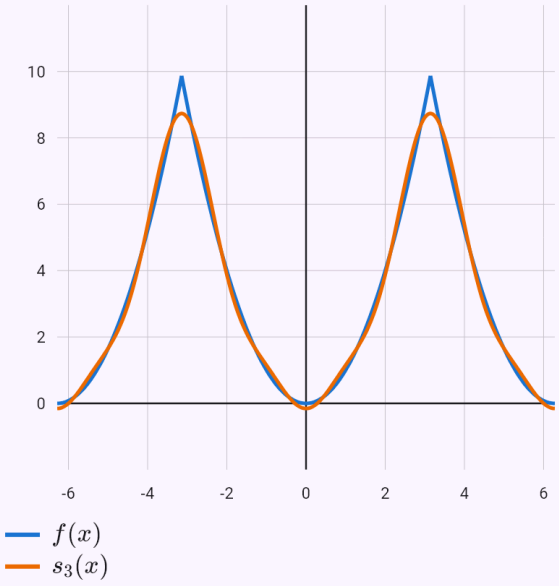
- Z równości Parsevala

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Wykres

Wyrazy do n = 3



Funkcja jest przedłużona okresowo. Suwak dodaje wyrazy szeregu – sumy częściowe zbliżają się do funkcji; przy skoku ją przeskakują (zjawisko Gibbsa) i przechodzą przez średnią obu stron, zaznaczoną punktem.

Funkcja przedziałami – skoki i zjawisko Gibbsa.

Input: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Szereg Fouriera

Wynik

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Kroki

- Przedział $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ to jeden okres: $T = 2\pi$, połowa okresu $l = \pi$. Szukamy szeregu o współczynnikach

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkcja jest nieparzysta, $f(-x) = -f(x)$, więc wyraz wolny i współczynniki przy cosinusach są zerowe, a współczynniki przy sinusach można liczyć na połowie przedziału

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Współczynnik b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Dla całkowitego n: $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Podstawiamy granice

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Współczynniki podstawione do szeregu:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Wyrazy z parzystym n są zerowe – zostają tylko nieparzyste n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Z twierdzenia Dirichleta suma szeregu jest równa f(x) dla $x \in (-\pi;\ 0)\cup(0;\ \pi)$; w punkcie nieciągłości jest średnią granic jednostronnych

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Podstawienie $x = \frac{\pi}{2}$ daje sumę szeregu liczbowego

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

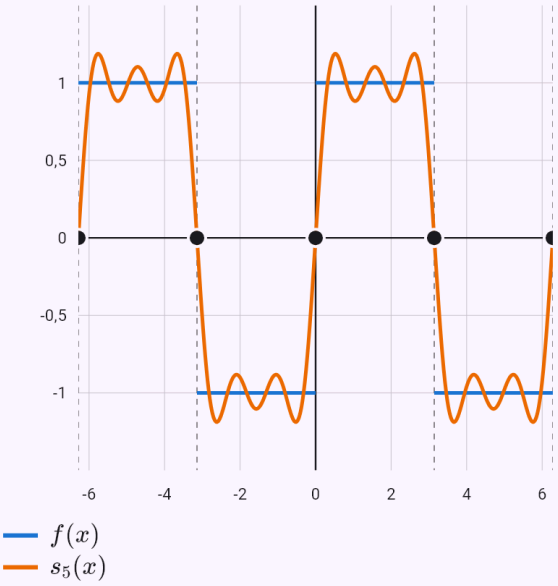
- Z równości Parsevala

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Wykres

Wyrazy do n = 5



Funkcja jest przedłużona okresowo. Suwak dodaje wyrazy szeregu – sumy częściowe zbliżają się do funkcji; przy skoku ją przeskakują (zjawisko Gibbsa) i przechodzą przez średnią obu stron, zaznaczoną punktem.

Szereg sinusów i suma 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Input: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Wynik

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

Kroki

- Funkcję z $\langle 0;\ \pi\rangle$ przedłużamy jako nieparzystą, a potem okresowo ($T = 2\pi$) – szereg sinusowy
  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, gdzie
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

- Współczynnik b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$

- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, więc u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$

- Stałą wyłączamy przed całkę
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$

- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, więc u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$

- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$

- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$

- Dla całkowitego n: $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Podstawiamy granice
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$

- Współczynniki podstawione do szeregu:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$

- Wyrazy z parzystym n są zerowe – zostają tylko nieparzyste n = 2k − 1
  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$

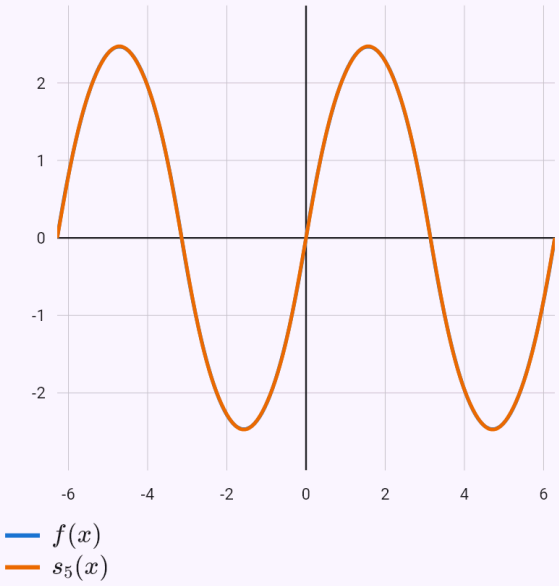
- Okresowe przedłużenie funkcji jest ciągłe, więc z twierdzenia Dirichleta suma szeregu jest równa f(x) dla $x \in \langle 0;\ \pi\rangle$

- Podstawienie $x = \frac{\pi}{2}$ daje sumę szeregu liczbowego
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

- Z równości Parsevala $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Wykres

Wyrazy do n = 5



Funkcja jest przedłużona okresowo. Suwak dodaje wyrazy szeregu – sumy częściowe zbliżają się do funkcji; przy skoku ją przeskakują (zjawisko Gibbsa) i przechodzą przez średnią obu stron, zaznaczoną punktem.

Postać zespolona z jej widmem.

Input: `fourierc(x, -pi, pi)`

Wynik

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Kroki

- Przedział $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ to jeden okres: $T = 2\pi$, połowa okresu $l = \pi$. Szukamy szeregu o współczynnikach

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Funkcja jest nieparzysta, $f(-x) = -x = -f(x)$, więc wyraz wolny i współczynniki przy cosinusach są zerowe, a współczynniki przy sinusach można liczyć na połowie przedziału

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Współczynnik b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Przez części (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, więc u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- Stałą wyłączamy przed całkę:
  $\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej:
  $\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Dla całkowitego n: $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Podstawiamy granice

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Współczynniki podstawione do szeregu:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

- Z twierdzenia Dirichleta suma szeregu jest równa f(x) dla $x \in (-\pi;\ \pi)$; w punkcie nieciągłości jest średnią granic jednostronnych:
  $s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$

- Podstawienie $x = \frac{\pi}{2}$ daje sumę szeregu liczbowego
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

- Z równości Parsevala

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Postać zespolona szeregu: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$, gdzie $c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-inx}\,dx$. Związek z postacią rzeczywistą

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Podstawiamy współczynniki postaci rzeczywistej

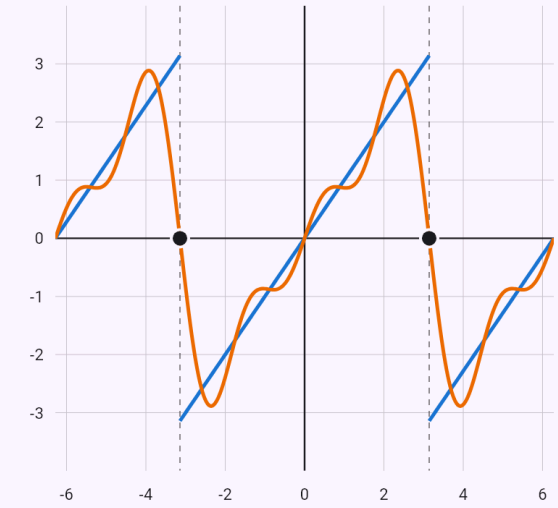
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

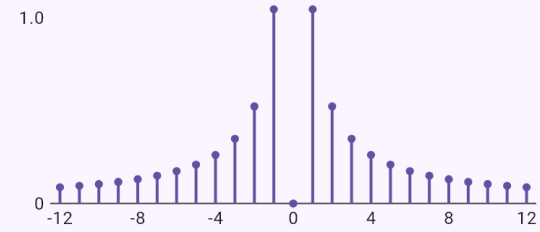
Wykres

Wyrazy do n = 3

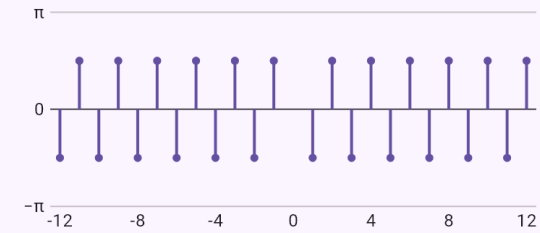


Funkcja jest przedłużona okresowo. Suwak dodaje wyrazy szeregu – sumy częściowe zbliżają się do funkcji; przy skoku ją przeskakują (zjawisko Gibbsa) i przechodzą przez średnią obu stron, zaznaczoną punktem.

Widmo amplitudowe $|c_n|$



Widmo fazowe arg c_n



Oś pozioma to n. Wysokość pokazuje wielkość lub kąt c_n; zerowe współczynniki nie mają fazy.

Znane ograniczenia

- Funkcja nieograniczona na końcu przedziału (ln x na ⟨0; 2π⟩) jest rozwijana ze współczynnikami obliczonymi numerycznie; twierdzenie Dirichleta nie zachodzi w punkcie, w którym rośnie nieograniczenie. Funkcja z biegunem (1/x) nie jest rozwijana – nie jest całkowalna.
- Gdy współczynniki prowadzą do całki bez elementarnej funkcji pierwotnej (ln x na ⟨1; 3⟩), są wyrażane przez sinus i cosinus całkowy.

Wygenerowano z aplikacji Mathtrace