Mathtrace – podręcznik

IV. Równania różniczkowe i zaawansowana analiza

Spis treści

IV. Równania różniczkowe i zaawansowana analiza

34. Analiza funkcjonalna
35. Funkcje zmiennej zespolonej
36. Równania różniczkowe
37. Rachunek wariacyjny
38. Równania różniczkowe cząstkowe
39. Rekurencje i funkcje tworzące
40. Metody numeryczne

34. Analiza funkcjonalna

> *„Liniowa analiza funkcjonalna to tak naprawdę algebra liniowa w nieskończonym wymiarze.”*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., na wykładzie wprowadzającym

Obliczeniowa część liniowej analizy funkcjonalnej. Normę wektora zapisz jako ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ lub inna liczba; bez indeksu aplikacja oblicza wszystkie trzy), normę ciągu w przestrzeni ℓ^p jako ||1/n||_2 – aplikacja sumuje szereg $\Sigma|a_n|^p$, a jeśli jest rozbieżny, ciąg nie należy do przestrzeni. Normę L^p funkcji zapisz ||x^2||_{L^2(0; 1)}: aplikacja usuwa wartość bezwzględną, dzieląc całkę w miejscach zerowych funkcji. Norma supremum ||f||_{C⟨a; b⟩} to największa wartość |f| z punktów stacjonarnych i końców. dist(f, g, ⟨a; b⟩) daje odległość dwóch funkcji w normie supremum i w L^2, holder(...) i minkowski(...) sprawdzają nierówność Höldera i Minkowskiego na danych funkcjach lub wektorach.

Ciąg funkcji convergence(x^n, ⟨0; 1⟩) (lub f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) jest badany w trzech krokach: granica punktowa kawałek po kawałku (potęga q^n dąży do zera dla |q| < 1), zbieżność jednostajna przez s_n = sup $|f_n - f|$ z punktu stacjonarnego x_n (nieciągła granica funkcji ciągłych nie może być jednostajna) i zbieżność w L^2 przez $\int(f_n - f)^2$. Gdy nie wychodzi wzór, aplikacja szacuje supremum i całkę numerycznie. Wykres ma suwak po wyrazach f_1 do f_{20}.

Iloczyn skalarny w L^2 z wagą, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (opcjonalnie w = ...), daje też normy i kąt funkcji. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) przeprowadza ortogonalizację Grama–Schmidta i rozpoznaje klasyczne wielomiany: Legendre’a, Czebyszewa z wagą $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ lub $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerre’a z e^(−x) na ⟨0; ∞) i Hermite’a z e^(−x²); działa też dla wektorów. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) znajduje najlepszą aproksymację wielomianem stopnia n jako rzut ortogonalny, z błędem i nierównością Bessela. Tożsamość Parsevala (i wyprowadzenie $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) jest w rozdziale Szeregi Fouriera.

Normy macierzy zapisuje się ||[1 2; 3 4]||_1 (także _2, _oo i _F dla Frobeniusa; bez indeksu aplikacja oblicza wszystkie), wskaźnik uwarunkowania cond([1 2; 3 4]) (opcjonalnie p = 1). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) oblicza normę operatora całkowego z jądrem K(x, t): na C⟨a; b⟩ jako maksimum $\int|K|\,dt$, w L^2 dokładnie dla jądra zdegenerowanego, w przeciwnym razie ograniczoną normą Hilberta–Schmidta. fnorm(g, ⟨a; b⟩) daje normę funkcjonału $\varphi(u) = \int u \cdot g$ na C i na L^2 (twierdzenie Riesza), z p = ... na L^p.

Równanie całkowe drugiego rodzaju zapisz tak, jak je widzisz: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholma) lub u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterry); działa też zdjęcie lub polecenia fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) i volterra(K; f; λ; a). Jądro zdegenerowane staje się układem równań liniowych; z parametrem λ aplikacja znajduje wartości charakterystyczne i funkcje własne i rozstrzyga alternatywą Fredholma. Inne jądra rozwiązuje szeregiem Neumanna i metodą Nyströma, równanie Volterry z jądrem k(x − t) transformatą Laplace’a.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) sprawdza założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym (g odwzorowuje przedział w siebie, q = max |g′| < 1), oblicza liczbę kroków a priori i iteruje z oszacowaniem błędu a posteriori (opcjonalnie eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) robi to samo dla układu x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) daje kolejne przybliżenia Picarda z przedziałem, na którym operator jest kontrakcją, i oszacowaniem błędu. Równania funkcyjne typu Cauchy'ego – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), Jensena i d'Alemberta – są rozwiązywane z wyprowadzeniem.

Jak to wpisać

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normy wektora, ciągu (ℓᵖ) i funkcji (Lᵖ, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	Odległość dwóch funkcji w normie supremum i w L².
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Nierówność Höldera i Minkowskiego.
`convergence(f_n, ⟨a; b⟩)`	Zbieżność punktowa, jednostajna i w L² ciągu funkcji.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Iloczyn skalarny, normy i kąt funkcji.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Ortogonalizacja Grama–Schmidta dla funkcji i wektorów.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Najlepsza aproksymacja wielomianem stopnia n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normy macierzy 1, 2, ∞, Frobeniusa i wskaźnik uwarunkowania.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	Norma operatora całkowego i funkcjonału ∫u·g.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Równania całkowe Fredholma i Volterry drugiego rodzaju.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Twierdzenie Banacha o punkcie stałym i przybliżenia Picarda.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Równania funkcyjne typu Cauchy'ego.

Przykłady

Normy 1, 2 i ∞ jednego wektora.

Input: `||(1; -2; 3)||`

Wynik

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Kroki

- Trzy najczęstsze normy wektora $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: suma wartości bezwzględnych współrzędnych ($\|\cdot\|_1$), długość euklidesowa ($\|\cdot\|_2$) i największa wartość bezwzględna współrzędnej ($\|\cdot\|_\infty$)
  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$
  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$
  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

||1/n||₂ = π/√6 – problem bazylejski.

Input: `||1/n||_2`

Wynik

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Kroki

- Norma ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ w przestrzeni ℓ^2 dla p = 2: sumujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ i wyciągamy pierwiastek
  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

Szereg harmoniczny jest rozbieżny – 1/n nie należy do ℓ¹.

Input: `||1/n||_1`

Wynik

Ciąg (funkcja) nie leży w tej przestrzeni – jego norma jest nieskończona.

Kroki

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ – ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ nie ma skończonej normy, nie leży w przestrzeni ℓ^2 dla p = 1

Wartość bezwzględna usunięta przez podział całki.

Input: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Wynik

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Kroki

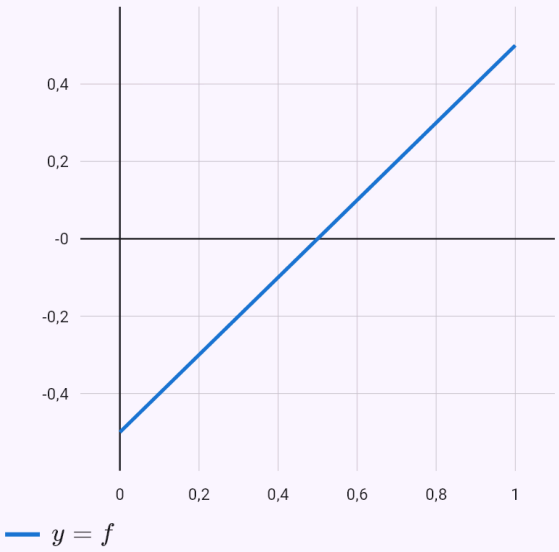
- Wartość bezwzględną usuwamy, dzieląc całkę w miejscach zerowych funkcji $x = \frac{1}{2}$ – na każdym kawałku funkcja zachowuje znak

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- Norma w przestrzeni L⃗ dla p = 3: całka $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, a zatem

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}3$$

Wykres



Funkcja na danym przedziale.

Norma supremum z punktów stacjonarnych i końców.

Input: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Wynik

$$\|f\|_\infty = 18$$

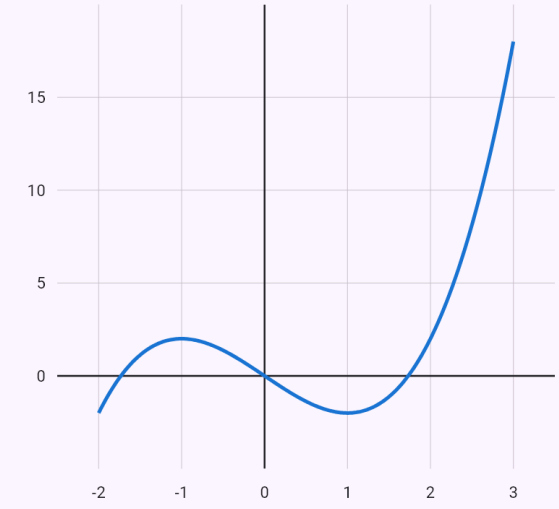
Kroki

- Norma supremum funkcji ciągłej na przedziale domkniętym to największa wartość |f|. Szukamy jej na końcach i w punktach stacjonarnych wewnątrz: pochodna $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, punkty stacjonarne $x = -1,\ x = 1$
- Wartości |f| w tych punktach

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- Największa z nich to norma supremum $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in \langle -2;\, 3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Wykres



Funkcja na danym przedziale.

Odległość w normie supremum i w L².

Input: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Kroki

- Odległość dwóch funkcji to norma ich różnicy: $f - g = x(1-x)$
- Norma supremum funkcji ciągłej na przedziale domkniętym to największa wartość |f|. Szukamy jej na końcach i w punktach stacjonarnych wewnątrz: pochodna $(f-g)'(x) = 1 - 2x$, punkty stacjonarne $x = \frac{1}{2}$
- Wartości |f| w tych punktach

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

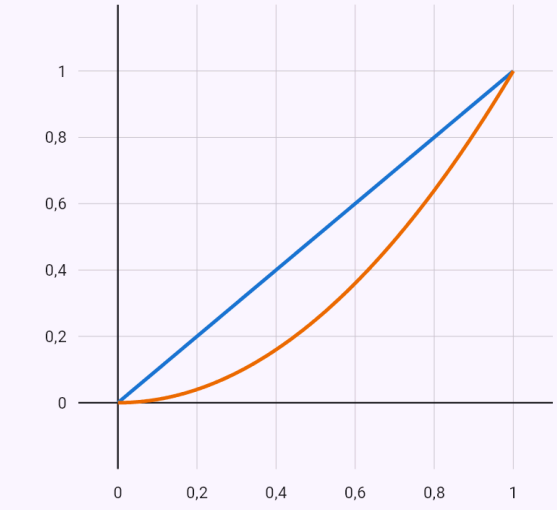
- Największa z nich to norma supremum

$$\|(f-g)\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

- Norma w przestrzeni L² dla p = 2: całka $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, a zatem

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Wykres



Obie funkcje na danym przedziale.

Nierówność Höldera z wykładnikiem sprzężonym q = 3/2.

Input: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

$$\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq$$

Kroki

- Nierówność Höldera korzysta z wykładnika sprzężonego q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- Norma w przestrzeni L⃞ dla p = 3: całka $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, a zatem

  $$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$$

- Norma w przestrzeni L⃞ dla p = $\frac{3}{2}$: całka $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, a zatem

  $$\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$$

- Lewa strona $\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, prawa strona $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – nierówność Höldera zachodzi.

x^n – punktowo tak, jednostajnie nie, w L^2 tak.

Input: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

Ciąg funkcji jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie.

Kroki

- O granicy decyduje potęga q^n o podstawie $q = x$: dla $|q| < 1$ $q^n \to 0$ (szybciej, niż rośnie dowolna potęga n), dla $|q| > 1$ rośnie nieograniczenie. Punkty, w których $|q| = 1$, obliczamy osobno.
- Granica punktowa: dla każdego ustalonego x $f_n(x) = x^n$ jest ciągiem liczb; obliczamy jego granicę dla $n \to \infty$

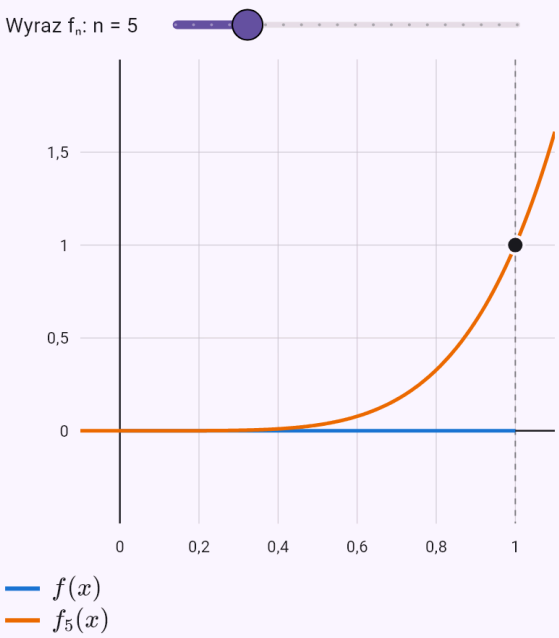
$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- Funkcja graniczna

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Wszystkie funkcje f_n są ciągłe, ale funkcja graniczna nie jest ciągła w $x = 1$. Granica jednostajna funkcji ciągłych jest ciągła – zbieżność więc nie jest jednostajna.
- Zbieżność w L^2: $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – ciąg jest zbieżny w L^2.

Wykres



Funkcja graniczna f i wybrany wyraz f_n – przesuń suwak i obserwuj, jak f_n zbliża się do f.

Zbieżność jednostajna: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Input: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Wynik

Ciąg funkcji jest zbieżny jednostajnie.

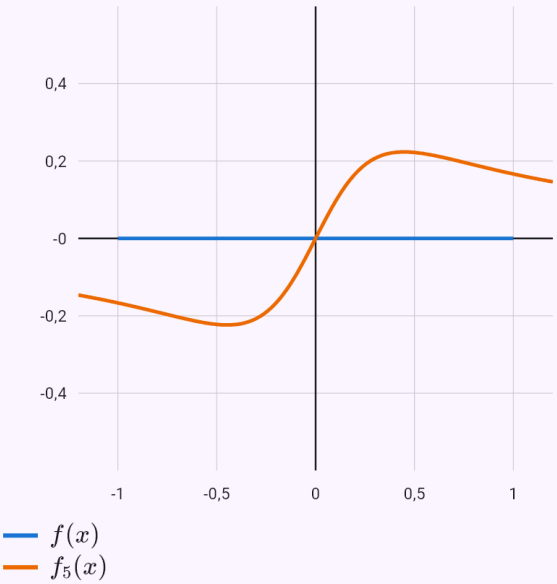
Kroki

- Granica punktowa: dla każdego ustalonego x $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ jest ciągiem liczb; obliczamy jego granicę dla n → ∞
  $x \in \langle -1;\ 1\rangle : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Funkcja graniczna: $f(x) = 0$
- O jednostajności rozstrzygamy przez $s_n = \sup |f_n - f|$. Różnica $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ ma pochodną $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; kandydaci na największą wartość to $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, zbieżność jest jednostajna.
- Zbieżność w L^2 – całkę $\|f_n - f\|_2^2$ obliczamy numerycznie. Wartości maleją do zera – ciąg jest zbieżny w L^2.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Wykres

Wyraz f_n: n = 5



Funkcja graniczna f i wybrany wyraz f_n – przesuń suwak i obserwuj, jak f_n zbliża się do f.

Wędrujący garb – punktowo do zera, ale s_n i $\|f_n\|_2$ rosną.

Input: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Wynik

Ciąg funkcji jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie.

Kroki

- O granicy decyduje potęga q^n o podstawie $q = e^{-x^2}$: dla $|q| < 1$ $q^n \to 0$ (szybciej, niż rośnie dowolna potęga n), dla $|q| > 1$ rośnie nieograniczenie. Punkty, w których $|q| = 1$, obliczamy osobno.
- Granica punktowa: dla każdego ustalonego x $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ jest ciągiem liczb; obliczamy jego granicę dla $n \to \infty$

  $$x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

- Funkcja graniczna: $f(x) = 0$
- O jednostajności rozstrzygamy przez $s_n = \sup |f_n - f|$. Różnica $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ ma pochodną $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; kandydaci na największą wartość to $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (nie 0), zbieżność nie jest jednostajna.

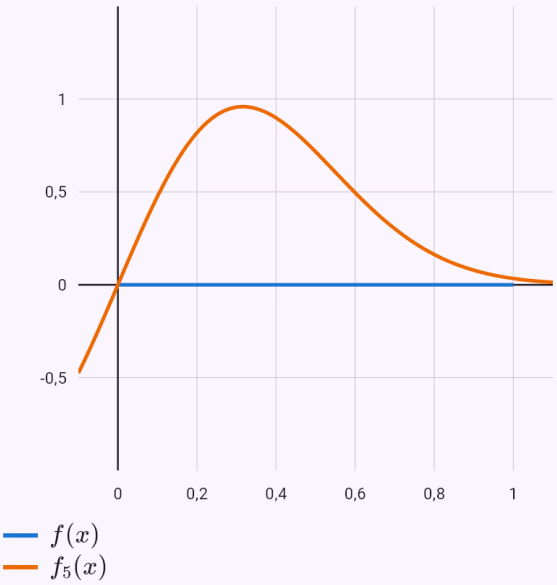
  $$s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$$

- Zbieżność w L^2 – całkę $\|f_n - f\|_2^2$ obliczamy numerycznie. Wartości nie maleją do zera – ciąg nie jest zbieżny w L^2.

n	10	100	1000
$\|f_n - f\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Wykres

Wyraz f_n: n = 5



Funkcja graniczna f i wybrany wyraz f_n – przesuń suwak i obserwuj, jak f_n zbliża się do f.

Iloczyn skalarny, normy i kąt dwóch funkcji.

Input: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

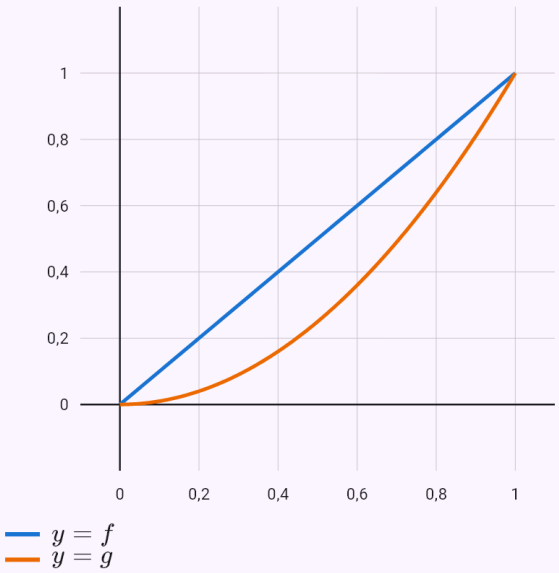
Wynik

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Kroki

- Iloczyn skalarny w przestrzeni L²:
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- Normy obu funkcji wyznaczone przez iloczyn skalarny
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- Kąt między funkcjami (nierówność Cauchy'ego–Schwarza gwarantuje |cos φ| ≤ 1)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Wykres



Obie funkcje na danym przedziale.

Wielomiany Legendre'a z 1, x, x², x³.

Input: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Wynik

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Kroki

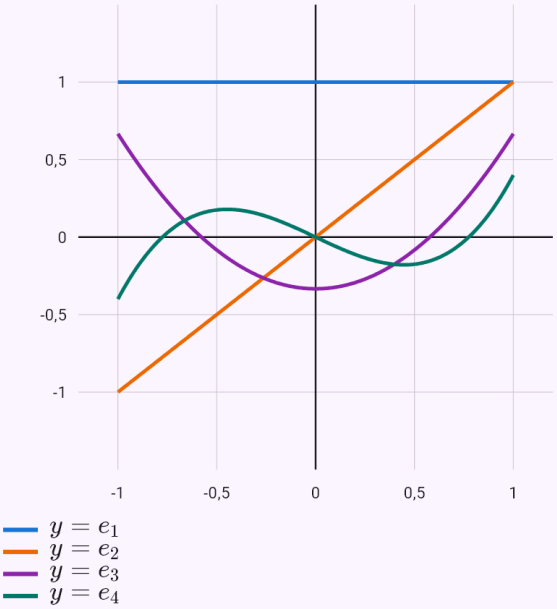
- Ortogonalizacja Grama–Schmidta – pierwszą funkcję zostawiamy: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Krok 2: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Potrzebne iloczyny skalarne: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Krok 3: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Potrzebne iloczyny skalarne: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3},\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Krok 4: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Potrzebne iloczyny skalarne

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5},\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Podzielenie przez normy daje układ ortonormalny

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$
- To są wielomiany Legendre'a – w zwykłej postaci z $P_k(1) = 1$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Wykres



Funkcje ortogonalne na danym przedziale.

Wielomiany Czebyszewa – całki z momentów wagi.

Input: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Wynik

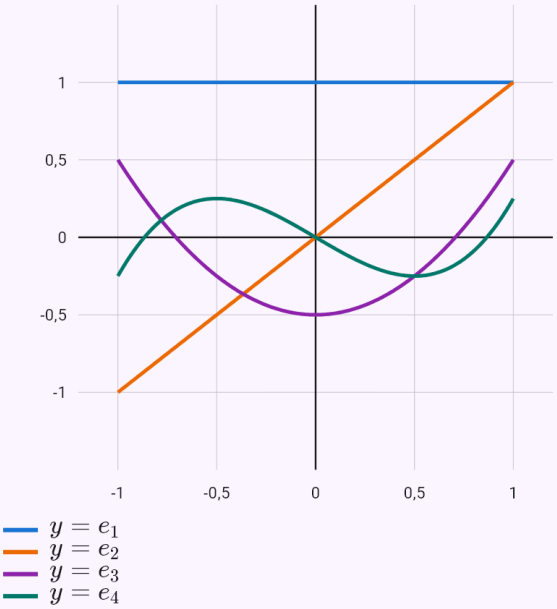
$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Kroki

- Iloczyny skalarne wielomianów z wagą $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wynikają z momentów wagi
  $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$
  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$
- Ortogonalizacja Grama–Schmidta – pierwszą funkcję zostawiamy: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$
- Krok 2: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Potrzebne iloczyny skalarne: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Krok 3: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Potrzebne iloczyny skalarne
  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Krok 4: odejmujemy rzuty funkcji na poprzednie: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Potrzebne iloczyny skalarne
  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Podzielenie przez normy daje układ ortonormalny
  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$
- To są wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju, $T_k(\cos t) = \cos kt$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$$

Wykres



Funkcje ortogonalne na danym przedziale.

Najlepsza aproksymacja kwadratowa e^x na $\langle -1; 1 \rangle$.

Input: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Wynik

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Kroki

- Najlepsza aproksymacja w L^2 to rzut ortogonalny na wielomiany stopnia co najwyżej n. Ortogonalizacja Grama–Schmidta zastosowana do 1, x, x^2, … daje bazę ortogonalną: $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$; $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Współczynniki rzutu

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

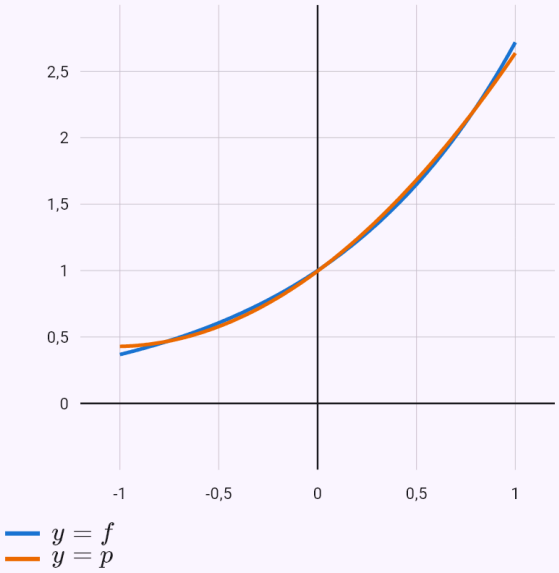
- Najlepsza aproksymacja

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11-e^2}{4e}$$

- Błąd z twierdzenia Pitagorasa: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Nierówność Bessela: $\sum c_k^2\|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Dla układu zupełnego (n → ∞) staje się równością – tożsamością Parsevala.

$$\|f-p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2\|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Wykres



Funkcja f i jej najlepsza aproksymacja p.

Normy 1, 2, ∞ i Frobeniusa jednej macierzy.

Input: `||[1 2; 3 4]||`

Wynik

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Kroki

- Macierz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Norma kolumnowa to największa suma wartości bezwzględnych w kolumnie:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, więc
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- Norma spektralna to pierwiastek z największej wartości własnej. Wartości własne więc
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- Norma wierszowa to największa suma wartości bezwzględnych w wierszu:
  $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, więc
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- Norma Frobeniusa to pierwiastek z sumy kwadratów wszystkich elementów
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Macierz prawie osobliwa – κ ≈ 4·10⁴.

Input: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Wynik

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Kroki

- Macierz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- Norma spektralna to pierwiastek z największej wartości własnej. Wartości własne więc
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- Wskaźnik uwarunkowania. Mówi, ile razy może wzrosnąć błąd względny danych; przy rozwiązywaniu układu możemy stracić około $4{,}6$ cyfr znaczących – macierz jest źle uwarunkowana.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$

Jądro zmienia znak – całka podzielona w t = x.

Input: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Kroki

- Norma operatora całkowego na C⟨a; b⟩ to największa wartość φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Jądro $K(x,t) = x - t$ zmienia znak tam, gdzie K = 0 – tam dzielimy całkę

$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|\,dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- Norma supremum funkcji ciągłej na przedziale domkniętym to największa wartość |f|. Szukamy jej na końcach i w punktach stacjonarnych wewnątrz: pochodna $\varphi'(x) = 2x - 1$, punkty stacjonarne $x = \frac{1}{2}$
- Wartości |f| w tych punktach

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Największa z nich to norma supremum

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Jądro jest zdegenerowane, $K(x,t) = -t + x$. Jego norma L² wynika wtedy z macierzy Grama funkcji a₀(x) i b₀(t). Dla porównania norma Hilberta–Schmidta nigdy nie jest mniejsza.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

Norma funkcjonału na C i na L² (twierdzenie Riesza).

Input: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

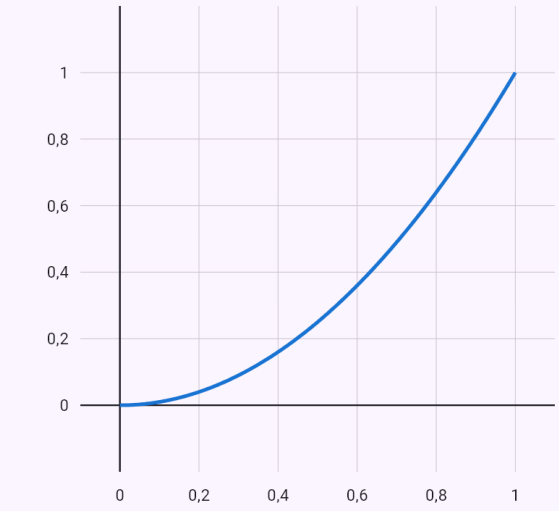
$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Kroki

- Funkcjonał φ(u) = ∫u·g na $C\langle 0;\,1\rangle$ z normą supremum: jego norma to całka z |g|, osiągana w granicy przez ciągłe u ≈ sgn g: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_1$
- Norma w przestrzeni L₀ dla p = 1: całka $\int_0^1 |x^2|\,dx = \frac{1}{3}$, a zatem $\|g\|_1 = \int_0^1 |x^2|\,dx = \frac{1}{3}$
- Na $L^2\langle 0;\,1\rangle$ funkcjonał φ(u) = ∫u·g jest iloczynem skalarnym z g (twierdzenie Riesza). Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza jego norma wynosi ‖g‖₂ i jest osiągana dla u = g/‖g‖₂: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_2$
- Norma w przestrzeni L₀ dla p = 2: całka $\int_0^1 (x^2)^2\,dx = \frac{1}{5}$, a zatem

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x^2)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Wykres



$g(x) = x^2$

Funkcja na danym przedziale.

Jądro zdegenerowane z parametrem λ.

Input: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Wynik

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Założenia: $\lambda \neq 3$

Kroki

- Równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju (stałe granice): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\, u(t)\, dt$, jądro $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jądro jest zdegenerowane – iloczyn funkcji zmiennej x i funkcji zmiennej t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Całki z niewiadomą funkcją są liczbami – oznaczmy je jako niewiadome stałe $c = \int_0^1 t\, u(t)\, dt$. Rozwiązanie ma więc postać $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Podstawienie tej postaci do definicji stałych daje układ równań liniowych o współczynnikach

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}$

  $c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$
- Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie tam, gdzie jego wyznacznik jest niezerowy: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Jego pierwiastki to wartości charakterystyczne jądra: $\lambda_1 = 3$
- Dla $\lambda \neq 3$ rozwiązaniem układu jest $c = \frac{1}{3-\lambda}$, stąd $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Dla $\lambda_1 = 3$ równanie jednorodne ma niezerowe rozwiązania – funkcje własne $\varphi_1(x) = x$
- Alternatywa Fredholma dla $\lambda_1 = 3$: układ jest sprzeczny ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), więc równanie nie ma rozwiązania dla tego λ (funkcja własna $\varphi(x) = x$).

Wartości charakterystyczne i funkcje własne.

Input: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Wynik

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}:\ u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Kroki

- Równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju (stałe granice): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\, u(t)\, dt$, jądro $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jądro jest zdegenerowane – suma 2 iloczynów funkcji zmiennej x i funkcji zmiennej t: $K(x,t) = t + x$
- Całki z niewiadomą funkcją są liczbami – oznaczmy je jako niewiadome stałe $c_1 = \int_0^1 t\, u(t)\, dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\, dt$. Rozwiązanie ma więc postać $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Podstawienie tej postaci do definicji stałych daje układ równań liniowych o współczynnikach

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

  $c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$

  $c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$
- Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie tam, gdzie jego wyznacznik jest niezerowy: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Jego pierwiastki to wartości charakterystyczne jądra: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282,\ \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Dla $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ równanie jednorodne ma niezerowe rozwiązania – funkcje własne $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Dla $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ równanie jednorodne ma niezerowe rozwiązania – funkcje własne $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Jądro niezdegenerowane – szereg Neumanna i metoda Nyströma.

Input: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Wynik

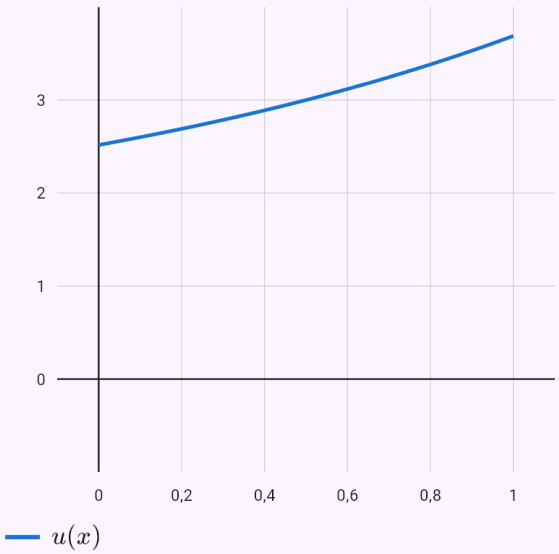
$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Kroki

- Równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju (stałe granice): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, jądro $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Jądro nie jest zdegenerowane. Szereg Neumanna – kolejne przybliżenia $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – jest zbieżny, bo $|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$
- Metoda Nyströma: całka staje się kwadraturą Gaussa z 32 węzłami, równanie w węzłach układem liniowym, a wartości między węzłami wynikają z samego równania. W porównaniu z połową węzłów dokładność wynosi około 10^{-8}. Wartości rozwiązania

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$u(x)$	$2{,}517$	$2{,}7372$	$2{,}9997$	$3{,}3134$	$3{,}6894$

Wykres



Rozwiązanie równania całkowego.

Równanie Volterry transformatą Laplace'a – cos x.

Input: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

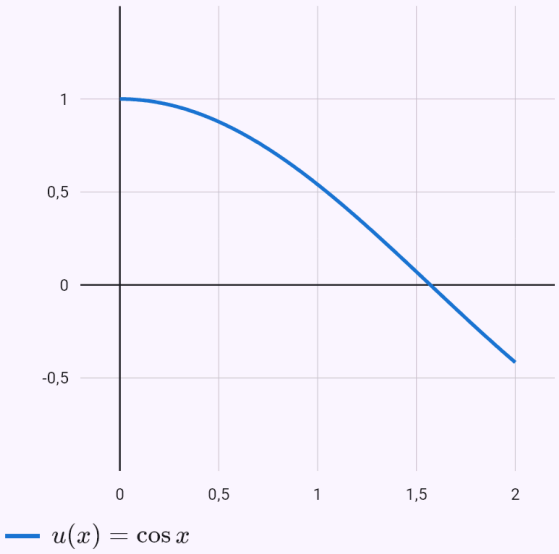
Wynik

$$u(x) = \cos x$$

Kroki

- Równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju (górna granica to x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, jądro $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Jądro zależy tylko od x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – całka jest splotem, który transformata Laplace'a zamienia na iloczyn. Transformaty. Równanie dla transformat $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, stąd $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Po transformacji odwrotnej $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$ $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$

Wykres



Rozwiązanie równania całkowego.

Punkt stały cos x z oszacowaniami a priori i a posteriori.

Input: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Wynik

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Kroki

- Twierdzenie Banacha o punkcie stałym wymaga, aby $g(x) = \cos x$ odwzorowywała przedział $I = \langle 0;\, 1\rangle$ w siebie. Jej zbiór wartości (z końców i punktów stacjonarnych) to $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\, 1\rangle$ – leży w I.
- Norma supremum funkcji ciągłej na przedziale domkniętym to największa wartość |f|. Pochodna $g''(x) = -\cos x$ nie ma miejsca zerowego wewnątrz przedziału – wystarczą końce.
- Wartości |f| w tych punktach

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- Największa z nich to norma supremum

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Z twierdzenia o wartości średniej |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, gdzie q to największa wartość |g'|: $q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g jest kontrakcją.
- Oszacowanie a priori: startujemy z $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. Z przy $\varepsilon = 10^{-6}$ i $q = \sin 1$ potrzebujemy n ≥ 86 kroków.

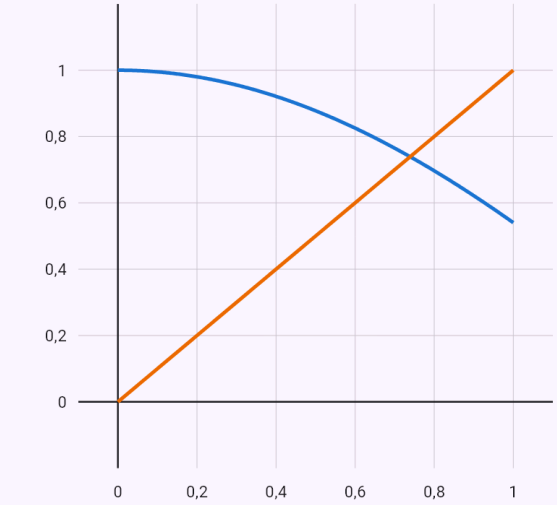
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\ln q}$$

- Iterujemy $x_{n+1} = g(x_n)$; ostatnia kolumna to oszacowanie a posteriori błędu, a obliczenie kończy się, gdy spadnie ono poniżej ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- Punkt stały: $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Wystarczyło 38 kroków zamiast 86 a priori – oszacowanie a posteriori jest zwykle znacznie dokładniejsze.

Wykres



$g(x) = \cos x$
$y = x$

Funkcja g i prosta y = x – punkt stały leży w ich przecięciu.

Układ x = Ax + b, kontrakcja w normie ∞.

Input: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Wynik

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Kroki

- Układ w postaci do iteracji

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- Norma kolumnowa to największa suma wartości bezwzględnych w kolumnie więc

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- Norma wierszowa to największa suma wartości bezwzględnych w wierszu więc

  $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- Odwzorowanie x ↦ Ax + b jest kontrakcją, gdy pewna norma A jest mniejsza od 1. Bierzemy najmniejszą:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- Oszacowanie a priori: startujemy z $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Z przy $\varepsilon = 10^{-6}$ i $q = 0{,}6$ potrzebujemy n ≥ 31 kroków.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iterujemy $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; ostatnia kolumna to oszacowanie a posteriori błędu, a obliczenie kończy się, gdy spadnie ono poniżej ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Punkt stały. Wystarczyło 28 kroków zamiast 31 a priori – oszacowanie a posteriori jest zwykle znacznie dokładniejsze.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Dla porównania dokładny punkt stały z układu liniowego

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Przybliżenia Picarda i rozwiązanie dokładne.

Input: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Wynik

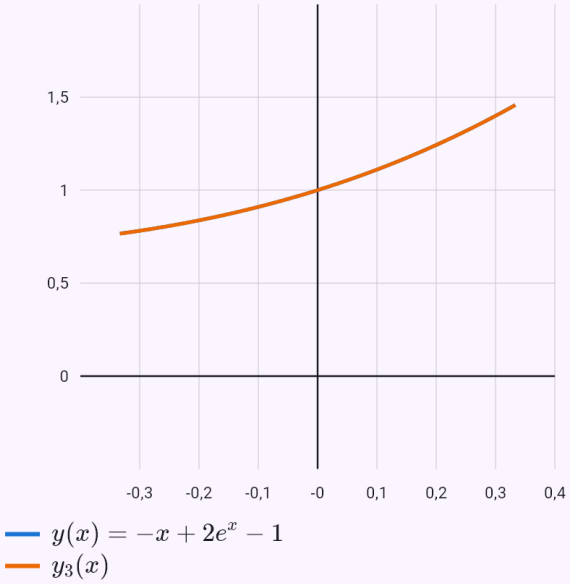
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Kroki

- Zagadnienie $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ przechodzi w równanie całkowe y = T(y); kolejne przybliżenia Picarda iterują operator T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Przybliżenie 1: $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Przybliżenie 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Przybliżenie 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2$
- Gdzie T jest kontrakcją (twierdzenie Picarda–Lindelöfa): na prostokącie $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ mamy $M = \max_R |f| \doteq 3$ i. Na przedziale z $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ przybliżenia pozostają w prostokącie i $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- Oszacowanie błędu ostatniego przybliżenia dla $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$

- Dokładne rozwiązanie dla porównania: $y(x) = -x + 2e^x - 1$; rzeczywisty błąd na końcu przedziału $|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Wykres



Przybliżenie Picarda i rozwiązanie dokładne (jeśli jest znane).

Równanie Cauchy'ego – f(x) = cx.

Input: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Wynik

$$f(x) = c\,x$$

Kroki

- Równanie funkcyjne Cauchy'ego funkcji addytywnej: $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Zakładamy, że funkcja f jest ciągła. Bez tego równanie Cauchy'ego ma też nieciągłe „patologiczne" rozwiązania (zbudowane z bazy Hamela).
- Podstawiamy: $x = y = 0: \quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Podstawienie y = −x pokazuje, że funkcja jest nieparzysta: $y = -x: \quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Indukcyjnie dla naturalnych n: $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Dla wymiernych r = m/n $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Liczby wymierne są gęste, a funkcja jest ciągła, więc zachodzi to dla każdego rzeczywistego x: $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Wszystkie rozwiązania ciągłe (a, b, c dowolne stałe): $f(x) = c\,x$
- Sprawdzenie przez podstawienie: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

Równanie d'Alemberta – cos i cosh.

Input: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Wynik

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Kroki

- Równanie funkcyjne d'Alemberta: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Zakładamy, że funkcja f jest ciągła. Bez tego równanie Cauchy'ego ma też nieciągłe „patologiczne" rozwiązania (zbudowane z bazy Hamela).
- Podstawiamy $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- Podstawienie x = 0 pokazuje, że funkcja jest parzysta: $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- Rozwiązania ciągłe są gładkie; dwukrotne różniczkowanie względem y w y = 0 daje równanie różniczkowe $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Według znaku stałej k: $k = -c^2: \cos(cx), \qquad k = 0: 1, \qquad k = c^2: \cosh(cx)$
- Wszystkie rozwiązania ciągłe (a, b, c dowolne stałe): $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Sprawdzenie przez podstawienie: $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Znane ograniczenia

- Aplikacja znajduje granicę punktową dla ciągów, o których granicy decyduje potęga q^n lub wyrażenie wymierne w n; bardziej złożone (sin nx bez dzielenia przez n) może odrzucić.
- Zbieżność jest badana na przedziale domkniętym ograniczonym; przedział nieskończony jeszcze nie.
- Ortogonalizacja Grama–Schmidta dla najwyżej 6 funkcji, aproksymacja wielomianem stopnia najwyżej 5.
- Jądro zdegenerowane z najwyżej 4 wyrazami; z parametrem λ tylko jądra zdegenerowane, inne jądra są rozwiązywane numerycznie dla liczbowego λ. Równanie Volterry dokładnie tylko z jądrem k(x − t) od zera lub a(x)·b(t), w przeciwnym razie kolejnymi przybliżeniami i numerycznie.
- Macierze do 6 × 6, najwyżej 6 przybliżeń Picarda. Równania funkcyjne tylko wymienionych typów (i Cauchy'ego z dodatkowym członem wielomianowym), zawsze z rozwiązaniami ciągłymi.

35. Funkcje zmiennej zespolonej

Równania Cauchy'ego–Riemanna dla f(z) sprawdza cr(z^2 + 3z); funkcję można zapisać w z, $\bar{z}$ (conj(z)), |z|, Re z, Im z lub bezpośrednio w x i y. Aplikacja rozkłada f = u + iv, oblicza pochodne cząstkowe i podstawia do u_x = v_y, u_y = −v_x. Jeśli zachodzą wszędzie, funkcja jest analityczna, a wynikiem jest pochodna f'(z) zapisana w z; w przeciwnym razie aplikacja mówi, gdzie zachodzą (punkty lub krzywa), a funkcja nie jest analityczna. Dla funkcji harmonicznej harmonic(u = x^2 - y^2) znajduje sprzężoną funkcję harmoniczną przez całkowanie równań, a całe f(z) przez podstawienie x = z, y = 0; można też podać część urojoną, harmonic(v = 2xy).

Wartości funkcji elementarnych w $\mathbb{C}$: logarytm główny ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w ze wszystkimi wartościami różniącymi się o 2kπi, potęga o wykładniku zespolonym i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh i cosh liczby zespolonej ze wzorów na sumę. Argument jest w tym samym przedziale co dla liczb zespolonych (chip „Argument główny"). Równania sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 rozwiązuje się podstawieniem w = e^(iz) (e^z) i równaniem kwadratowym, e^z = 1 + i logarytmem; wynikiem jest rozwiązanie ogólne z k ∈ $\mathbb{Z}$ i kilka rozwiązań na płaszczyźnie Gaussa. Równanie w x bez rozwiązania rzeczywistego (sin x = 2) oferuje przycisk rozwiązania zespolonego.

Osobliwości i residua: singularities(f) znajduje pierwiastki mianownika i osobliwości istotne (e^(1/z), sin(1/z)), podaje ich rodzaj – usuwalna, biegun rzędu m, istotna – i oblicza residua: w biegunie jednokrotnym g(a)/q'(a), w biegunie wyższego rzędu przez pochodną (z − a)^m f(z), w osobliwości istotnej z szeregu Laurenta. Res(f, z = a) oblicza jedno residuum. Szereg Laurenta funkcji wymiernej w pierścieniu laurent(f, 1 < |z| < 2) (lub |z| > 1, 0 < |z − a| < r, wokół punktu laurent(f, z = a)) buduje się z ułamków prostych nad $\mathbb{C}$ i szeregu geometrycznego każdego ułamka – według tego, czy jego biegun leży wewnątrz, czy na zewnątrz pierścienia. Całkę po okręgu oint(f, |z − a| = r) (ze zdjęcia \oint_{|z−a|=r}) oblicza się twierdzeniem o residuach; bez osobliwości wewnątrz jest zerowa, osobliwość na okręgu jest zgłaszana.

Residua w analizie rzeczywistej: całka niewłaściwa z funkcji wymiernej po całej osi, z cos ax lub sin ax (lemat Jordana) i od 0 do ∞ z funkcji parzystej; całka z funkcji wymiernej cos t i sin t po ⟨0; 2π⟩ przez z = e^(it). Całki z cosinusem lub sinusem i po ⟨0; 2π⟩ idą od razu przez residua, dla pozostałych wybierz chip „Residuami" (z powrotem „Zwykłą drogą"). Ten sam chip przy szeregu sumuje Σ R(n) od 1 (od 0 lub innej liczby całkowitej) jądrem π ctg πz, szereg naprzemienny przez π/sin πz; suma po wszystkich liczbach całkowitych od −∞ idzie od razu. Odwrotną transformatę Laplace'a funkcji wymiernej invlaplace(F) (ze zdjęcia \mathcal{L}^{-1}\{F\}) oblicza się jako sumę residuów F(s)e^(st).

Twierdzenie Rouchégo rouche(p, |z| < r) liczy pierwiastki wielomianu w kole według wyrazu, który na okręgu dominuje nad sumą pozostałych, w pierścieniu r < |z| < R jako różnicę dwóch kół; pierwiastki są pokazane na płaszczyźnie Gaussa. Odwzorowanie konforemne w = f(z) rozkłada się na u i v, aplikacja

mówi, gdzie jest konforemne (f' ≠ 0), a dla homografii (αz + β)/(γz + δ) znajduje punkty stałe i obrazy osi rzeczywistej i urojonej oraz okręgu jednostkowego. Wykres pokazuje obraz siatki prostych x = c i y = c.

Transformatę Fouriera funkcji wymiernej ftransform(1/(1 + t^2)) (ze zdjęcia \mathcal{F}\{f\}) oblicza się przez residua – dla ω > 0 drogę zamyka się w dolnej półpłaszczyźnie, dla ω < 0 w górnej – a dla funkcji parzystej (nieparzystej) wynik zapisuje się z |ω|. Dla gęstości w x daje funkcję charakterystyczną rozkładu z dokładnością do znaku ω, dla symetrycznego rozkładu Cauchy'ego bezpośrednio e^(−|t|). Odwrotna transformata Z invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) to suma residuów $F(z)z^{n-1}$ z wartością początkową x[0] = lim F(z) dla z → ∞. Ich zastosowanie w filtrach, sterowaniu i optyce jest w rozdziale Zastosowania analizy zespolonej.

Jak to wpisać

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Równania Cauchy'ego–Riemanna i pochodna.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	Sprzężona funkcja harmoniczna części rzeczywistej (urojonej).
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logarytm, potęgi, funkcje trygonometryczne i równania w ℂ.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Residuum w punkcie, wszystkie osobliwości.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Szereg Laurenta w pierścieniu lub wokół punktu.
`oint(f, |z - a| = r)`	Całka po okręgu twierdzeniem o residuach.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Całki rzeczywiste przez residua.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	Suma szeregu przez residua.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Liczba pierwiastków wielomianu w kole lub pierścieniu.
`w = (z - i)/(z + i)`	Odwzorowanie konforemne, homografia.
`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	Odwrotna transformata Laplace'a przez residua.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Transformata Fouriera przez residua.

`invz(z/(z - 1/2))`	Odwrotna transformata Z przez residua.

Przykłady

Funkcja analityczna – równania zachodzą wszędzie, pochodna w z.

Input: `cr(z^2 + 3z)`

Wynik

$$f'(z) = 2z + 3$$

Kroki

- Funkcję rozkładamy na część rzeczywistą i urojoną, f = u + iv z z = x + iy: $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Pochodne cząstkowe u i v względem x i y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Podstawiamy do równań Cauchy'ego–Riemanna $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Oba równania zachodzą w całej płaszczyźnie, a pochodne cząstkowe są ciągłe – funkcja jest holomorficzna w całym $\mathbb{C}$.
- Pochodna funkcji holomorficznej zapisana w z: $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

Równania zachodzą tylko na prostej y = x – funkcja nie jest analityczna.

Input: `cr(x^2 + i y^2)`

Wynik

Funkcja nie jest holomorficzna – równania Cauchy'ego–Riemanna nie zachodzą na żadnym obszarze.

Kroki

- Funkcję rozkładamy na część rzeczywistą i urojoną, f = u + iv z z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Pochodne cząstkowe u i v względem x i y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Podstawiamy do równań Cauchy'ego–Riemanna $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Oba równania zachodzą tylko tam, gdzie $2(x - y) = 0$. Funkcja ma tam pochodną, ale żadne otoczenie punktu ich nie spełnia – funkcja nie jest nigdzie holomorficzna.

Sprzężona funkcja harmoniczna i f(z) = z² + z.

Input: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Wynik

$$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$$

Kroki

- Dana jest część rzeczywista u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Sprawdzamy, że jest harmoniczna – jej laplasjan jest równy zeru: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Pierwsze równanie Cauchy'ego–Riemanna $v_y = u_x$ daje v przez całkowanie względem y – „stała" może zależeć od x:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- C(x) wyznaczamy z drugiego równania $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- Funkcja harmonicznie sprzężona: $v = 2xy + y + C$
- Zapisujemy f(z) = u + iv w z – wystarczy wstawić x = z i y = 0: $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

Wartość główna logarytmu i wszystkie jego wartości.

Input: `ln(1 + i)`

Wynik

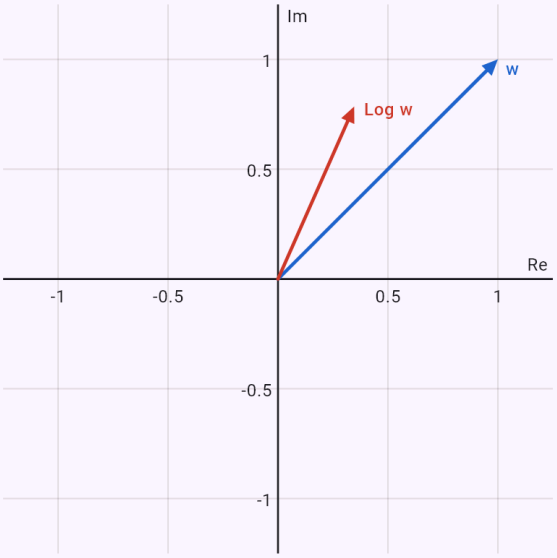
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Kroki

- Wartość główna logarytmu to $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, argument w $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- Moduł i argument główny liczby: $|1+i| = \sqrt{2}, \ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Funkcja wykładnicza jest okresowa z okresem 2πi, więc logarytm ma nieskończenie wiele wartości – różnią się o wielokrotności 2πi

  $\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

i^i to liczba rzeczywista e^(−π/2).

Input: `i^i`

Wynik

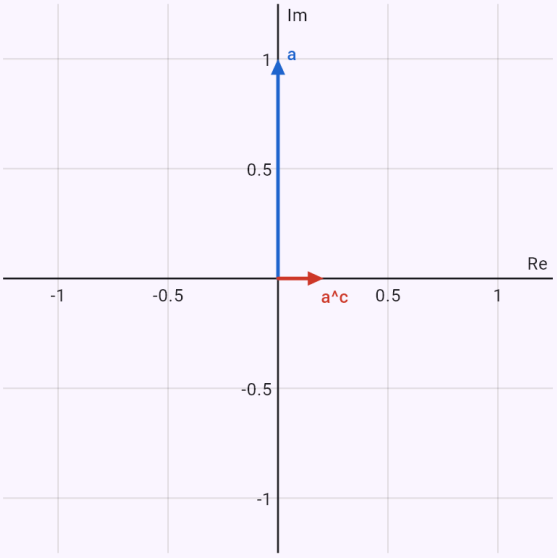
$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

Kroki

- Potęgę o wykładniku zespolonym definiujemy przez logarytm główny (argument w $\langle 0; 2\pi)$)

  $a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$
- Wykładnik rozkładamy na część rzeczywistą i urojoną: $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Wartość główna potęgi, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Pozostałe wartości logarytmu dają wszystkie wartości potęgi: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – dane liczby na niebiesko, wynik na czerwono, argument φ jako łuk od dodatniej półosi rzeczywistej.

Równanie sin z = 2 – podstawienie w = e^(iz) i równanie kwadratowe.

Input: `sin z = 2`

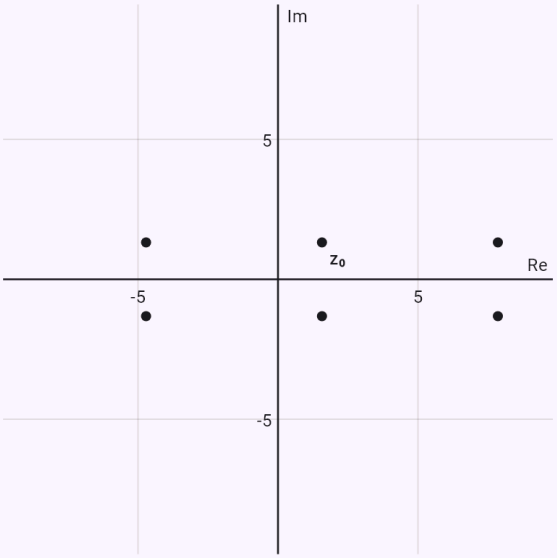
Wynik

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Kroki

- Funkcję zapisujemy za pomocą funkcji wykładniczych i podstawiamy: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Po pomnożeniu równania przez w otrzymujemy równanie kwadratowe: $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Jego pierwiastki: $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Wracamy do z: $iz = \log w$, więc $z = -i \log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i \ln|w|$ (argument w $\langle 0; 2\pi)$): $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona (Gaussa) – rozwiązania jako punkty: część rzeczywista na osi poziomej, część urojona na pionowej.

Biegun niższego rzędu dzięki miejscu zerowemu licznika i biegun jednokrotny.

Input: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

Wynik

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Kroki

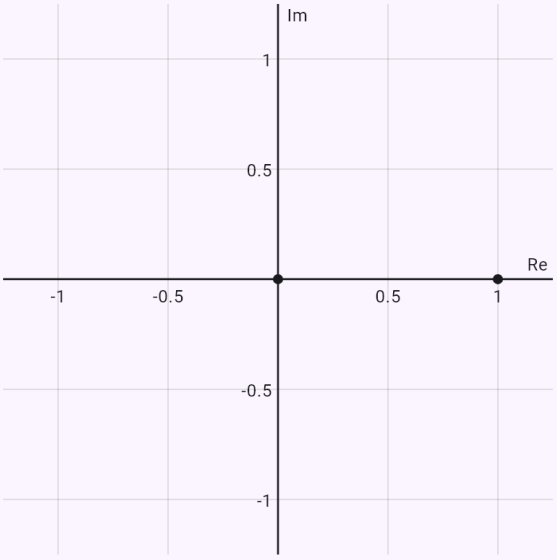
- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika: $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- W 0 mianownik ma pierwiastek krotności 3, licznik krotności 1 – to biegun rzędu 2
- Residuum w biegunie rzędu 2

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},\ \mathrm{I}$$

- W 1 mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z$$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – punkty osobliwe funkcji.

Osobliwość istotna – residuum z szeregu Laurenta.

Input: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Wynik

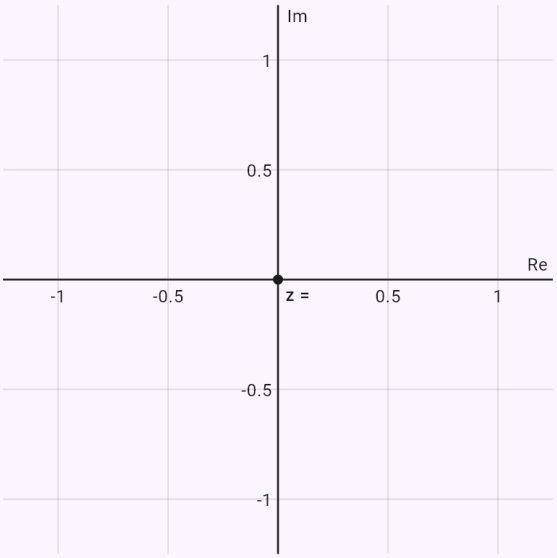
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Kroki

- W 0 jest punkt istotnie osobliwy – wykładnik (argument) ma tam biegun, a część główna szeregu Laurenta jest nieskończona.
- Residuum to współczynnik c_{-1} przy $\frac{1}{z-a}$ w szeregu Laurenta wokół 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – punkty osobliwe funkcji.

Szereg Laurenta w pierścieniu 1 < |z| < 2 – jeden ułamek w potęgach 1/z, drugi w potęgach z.

Input: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

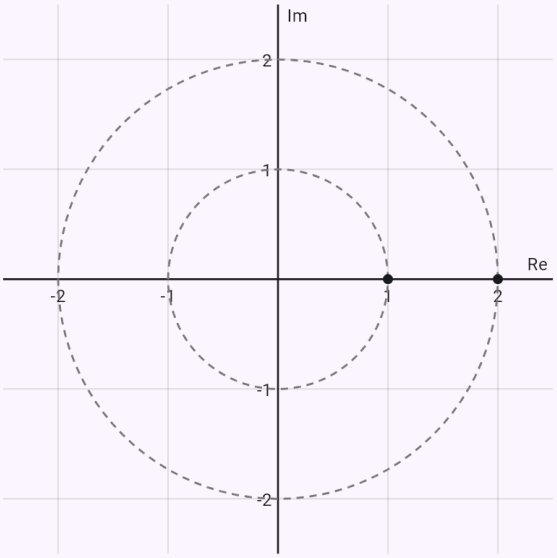
Wynik

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Kroki

- Punkty osobliwe: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Szukamy szeregu Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$ – nie leży w nim żaden punkt osobliwy.
- Funkcję rozkładamy na ułamki proste (nad $\mathbb{C}$):
  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Biegun ułamka leży wewnątrz okręgu wewnętrznego – wyłączamy $\frac{1}{z-c}$ i korzystamy z szeregu geometrycznego w potęgach $\frac{1}{z-c}$
  $$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
- Biegun ułamka leży poza pierścieniem – wyłączamy stałą i korzystamy z szeregu geometrycznego w potęgach z - c
  $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
- Dodajemy szeregi wyraz po wyrazie
  $$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$
- Wyraz ogólny: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – pierścień szeregu Laurenta (przerywany) i punkty osobliwe.

Twierdzenie o residuach w biegunie rzędu 2.

Input: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Wynik

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

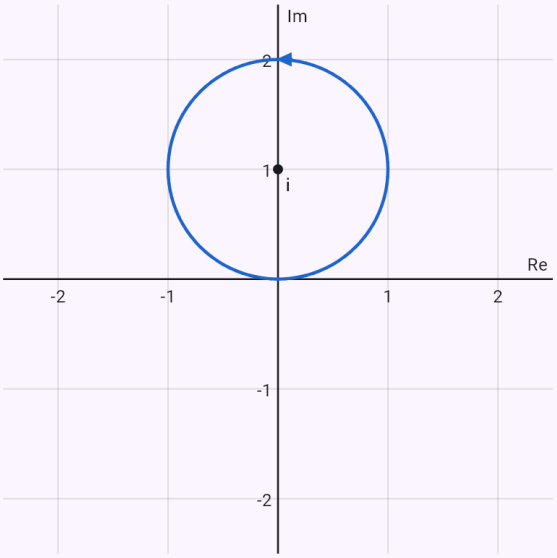
Kroki

- Całkujemy po okręgu o środku i i promieniu 1, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara: $|z-i|=1$
- Wewnątrz okręgu leżą punkty osobliwe $z_0 = i$, na zewnątrz $\emptyset$
- W i mianownik ma pierwiastek krotności 2, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 2
- Residuum w biegunie rzędu 2

  $\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right], \quad (z-i)^2 f(z) = $
- Z twierdzenia o residuach

  $\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\left(e^i\right) = 2\pi i\, e^i$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – okrąg, po którym całkujemy (strzałka pokazuje kierunek), i punkty osobliwe.

Całka niewłaściwa z cosinusem – lemat Jordana.

Input: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Wynik

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

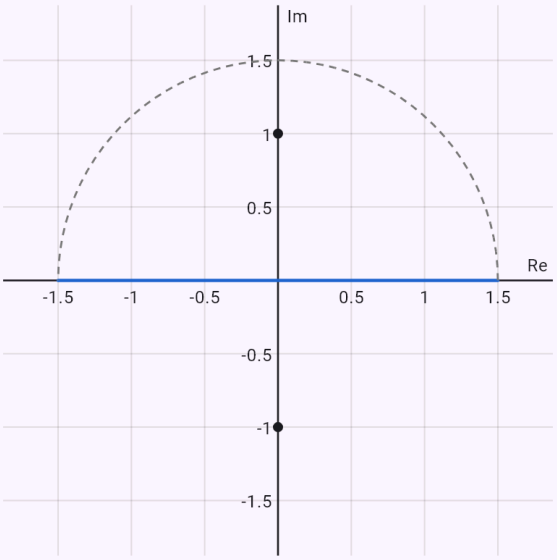
Kroki

- Przy cosinusie lub sinusie wystarczy $\deg Q \geq \deg P + 1$ i Q bez pierwiastków rzeczywistych – całka po półokręgu dąży wtedy do zera na mocy lematu Jordana:

  $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Cosinus to część rzeczywista e^{iax}
- Oś rzeczywistą zamykamy dużym półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie. Wewnątrz leżą bieguny $z_0 = i$, całka po półokręgu dąży do zera.
- W i mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

  $\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$
- Z twierdzenia o residuach całka to 2πi razy suma residuów w górnej półpłaszczyźnie: $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – oś rzeczywista zamknięta półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie (przerywany) i bieguny funkcji podcałkowej.

Całka po ⟨0; 2π⟩ jako całka po okręgu jednostkowym.

Input: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Wynik

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Kroki

- Całkę po ⟨0; 2π⟩ zamieniamy podstawieniem na całkę po okręgu jednostkowym

  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$

- Po podstawieniu i uproszczeniu otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej po |z| = 1: $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$

- Wewnątrz okręgu leżą punkty osobliwe $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, na zewnątrz $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- W $-2 + \sqrt{3}$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1

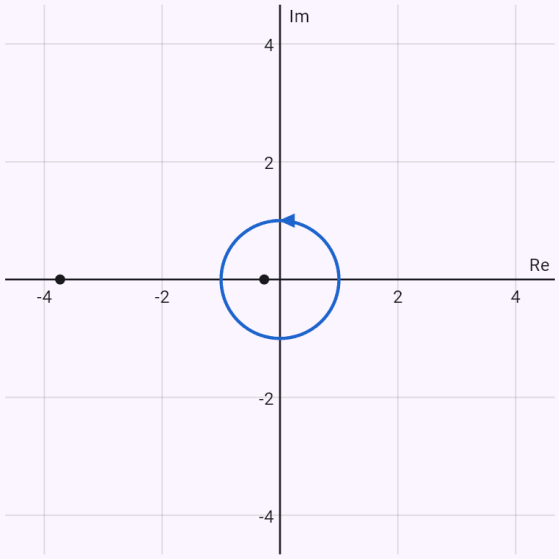
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3}, \quad g =$

- Z twierdzenia o residuach

  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – okrąg jednostkowy z = e^(it) i bieguny funkcji podcałkowej.

Σ 1/n² = π²/6 – residuum w zerze, gdzie jądro też ma biegun.

Input: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Residuami

Wynik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Obliczenie całki lub sumy

Zwykłym sposobem ✓ Residuami

Kroki

- Funkcja π ctg πz ma w każdej liczbie całkowitej n biegun jednokrotny z residuum 1. Całka po dużym kwadracie dąży do zera, więc suma szeregu to minus suma residuów w biegunach R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- Warunek $\deg Q \geq \deg P + 2$ jest spełniony: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika: $z^2 = 0:\ z_0 = 0$
- W 0 biegun mają zarówno R, jak i jądro – residuum to współczynnik przy 1/z ich iloczynu

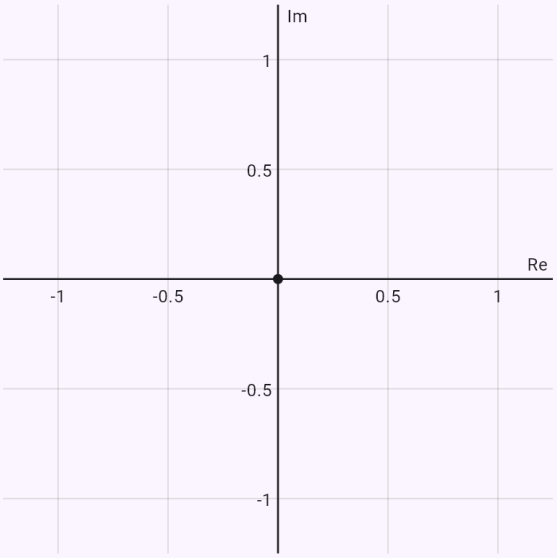
$$\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- Suma po wszystkich liczbach całkowitych:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R jest parzysta, R(−n) = R(n), więc suma od 1 to jej połowa (bez wyrazu n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – bieguny R(z); jądro π ctg πz ma też bieguny we wszystkich liczbach całkowitych.

Twierdzenie Rouchégo – cztery pierwiastki w pierścieniu 1 < |z| < 2.

Input: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

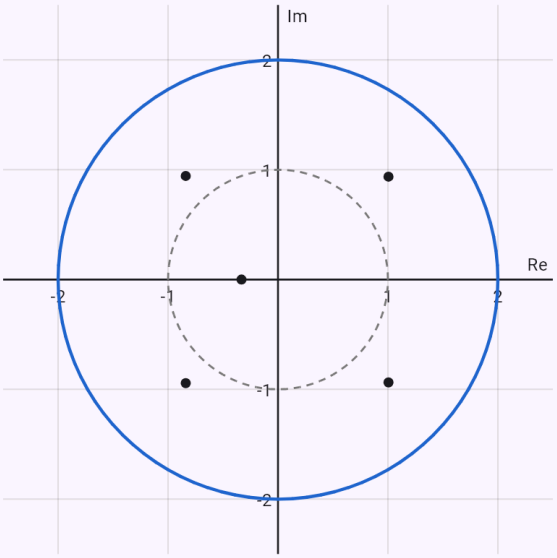
Wynik

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Kroki

- Na okręgu |z| = 2 wyraz z^5 przeważa nad sumą pozostałych − z twierdzenia Rouchégo wielomian ma w kole tyle pierwiastków co z^5, czyli 5:
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32,\quad 32 > 7$
- Na okręgu |z| = 1 wyraz $3z$ przeważa nad sumą pozostałych − z twierdzenia Rouchégo wielomian ma w kole tyle pierwiastków co $3z$, czyli 1:
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1,\quad 3 > 2$
- W pierścieniu to różnica liczb w większym i mniejszym kole: $5 - 1 = 4$
- Pierwiastki numerycznie, dla sprawdzenia
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Wykres



Płaszczyzna zespolona − okręgi i pierwiastki wielomianu (obliczone numerycznie).

Homografia – górna półpłaszczyzna na koło jednostkowe.

Input: `w = (z - i)/(z + i)`

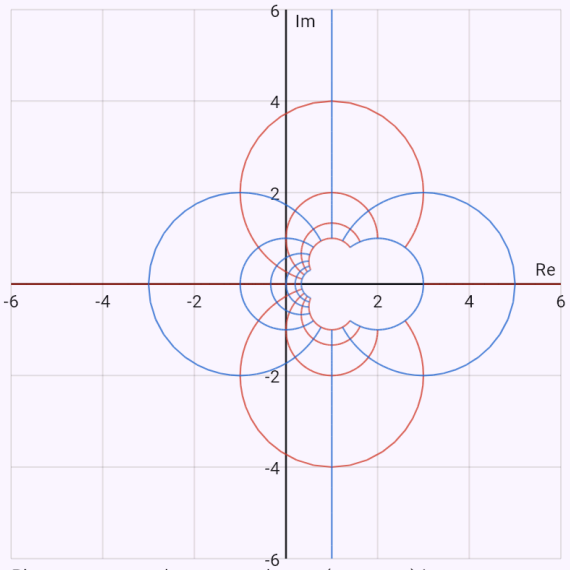
Wynik

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Kroki

- Odwzorowanie zapisujemy przez jego składowe
  $w = u + iv,\quad u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\frac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- Odwzorowanie jest konforemne wszędzie poza biegunem $z_0 = -i$: $f'(z) = \frac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- To homografia (przekształcenie Möbiusa) $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Punkty stałe to rozwiązania równania f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0:\ z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- Oś rzeczywista przechodzi na $|w| = 1$
- Oś urojona przechodzi na $\mathrm{Im}\, w = 0$
- Okrąg jednostkowy przechodzi na $\mathrm{Re}\, w = 0$
- Wykres pokazuje obraz siatki − proste x = c (czerwone) i y = c (niebieskie) dla |c| ≤ 2 co $0{,}5$

Wykres



Płaszczyzna w − obraz prostych x = c (czerwone) i y = c (niebieskie) przy w = f(z).

Odwrotna transformata Laplace’a jako suma residuów.

Input: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Wynik

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Kroki

- Odwrotna transformata Laplace’a funkcji wymiernej to suma residuów $F(s)\,e^{st}$ we wszystkich biegunach F

  $$f(t) = \sum \operatorname{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika:
  $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0 : \; s_1 = -1, \; s_2 = -2i, \; s_3 = 2i$
- W -1 mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- W $-2i$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

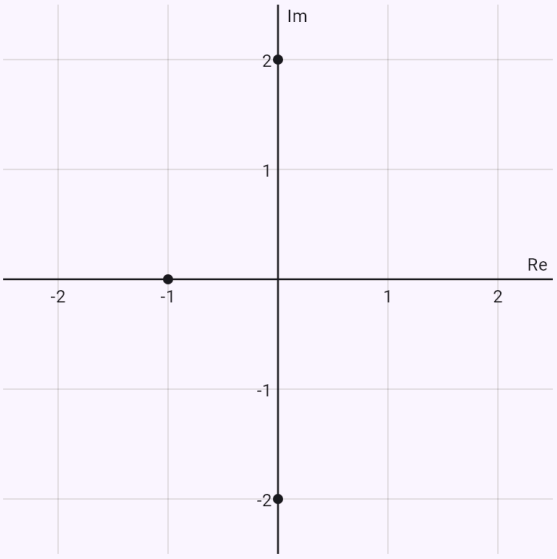
  $$\operatorname{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- W $2i$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Dodajemy residua i wynik zapisujemy w postaci rzeczywistej: $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – bieguny F(s).

Transformata Fouriera funkcji Lorentza: π·e^(−|ω|).

Input: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Wynik

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Kroki

- Transformata Fouriera funkcji wymiernej: całkę zamykamy dużym półokręgiem (lemat Jordana) i dodajemy residua

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika: $t^2 + 1 = 0:\ t_1 = -i,\ t_2 = i$
- W $-i$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw},\ q' =$$

- W i mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw},\ q' = 2t$$

- Dla ω > 0 zamykamy drogę w dolnej półpłaszczyźnie (kierunek ujemny, −2πi)

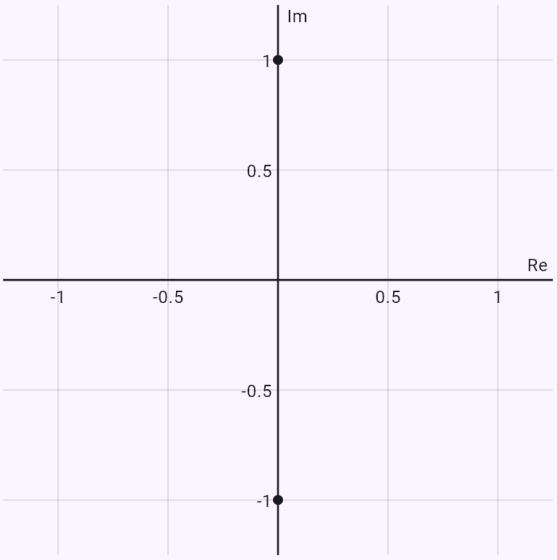
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Dla ω < 0 zamykamy drogę w górnej półpłaszczyźnie (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Wynik – transformata Fouriera: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – bieguny F(s).

Funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego e^(−|t|).

Input: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Wynik

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Kroki

- Transformata Fouriera funkcji wymiernej: całkę zamykamy dużym półokręgiem (lemat Jordana) i dodajemy residua

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika: $\pi x^2 + \pi = 0: \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- W $-i$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- W i mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Dla ω > 0 zamykamy drogę w dolnej półpłaszczyźnie (kierunek ujemny, −2πi)

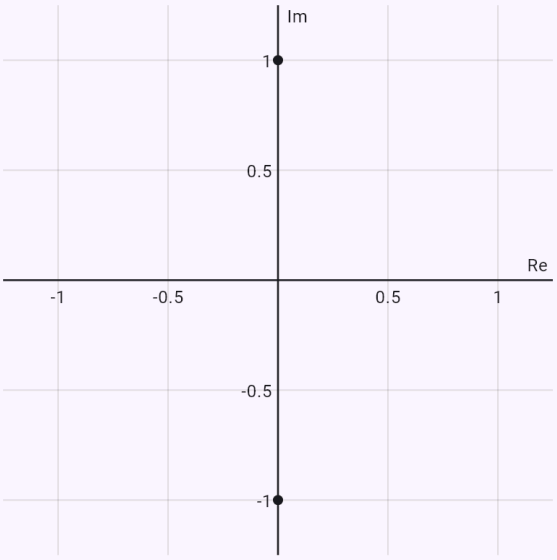
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k < 0} \mathrm{Res} = e^{-\omega}$$

- Dla ω < 0 zamykamy drogę w górnej półpłaszczyźnie (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k > 0} \mathrm{Res} = e^{\omega}$$

- Wynik – transformata Fouriera: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – bieguny F(s).

Odwrotna transformata Z z dwoma biegunami: x[n] = 2 − 2⁻ⁿ.

Input: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Wynik

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Kroki

- Odwrotna transformata Z to suma residuów $F(z)z^{n-1}$ w biegunach F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Punkty osobliwe – pierwiastki mianownika: $2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- W $\frac{1}{2}$ mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

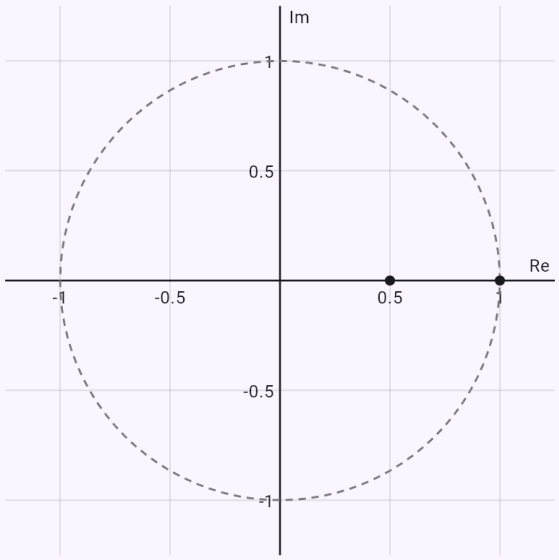
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- W 1 mianownik ma pierwiastek krotności 1, licznik krotności 0 – to biegun rzędu 1
- Residuum w biegunie jednokrotnym, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- Wartość początkowa to granica dla z → ∞: $x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Dodajemy residua: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Wykres



Płaszczyzna zespolona – bieguny F(s).

Znane ograniczenia

- Osobliwości są znajdowane dla funkcji z wielomianem w mianowniku (i osobliwości istotne e^h, sin h, cos h); mianownik typu sin z (nieskończenie wiele biegunów) nie jest jeszcze obsługiwany.
- Szereg Laurenta w pierścieniu działa dla funkcji wymiernych, w osobliwości istotnej tylko wokół punktu, gdy funkcja nie ma innej osobliwości.
- Całki po innych krzywych niż okrąg (kwadrat, elipsa), wartość główna całki z biegunem na osi i ogólna zasada argumentu nie są jeszcze obsługiwane.
- Suma szeregu od 1 przez residua wymaga parzystej funkcji wymiernej R; bieguny R w liczbach całkowitych innych niż zero są niedozwolone.
- Odwzorowanie konforemne pokazuje obraz siatki; obraz danego obszaru (półpłaszczyzny, pasa) tylko dla osi i okręgu jednostkowego homografii.
- Transformata Fouriera działa dla funkcji wymiernych bez biegunów na osi rzeczywistej, odwrotna transformata Z dla funkcji wymiernych bez bieguna w zerze.

36. Równania różniczkowe

Aplikacja rozwiązuje równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu: o zmiennych rozdzielonych, liniowe, zupełne, jednorodne ($y' = f(y/x)$), równania Bernoulliego i równania $y' = f(ax + by + c)$. Sama rozpoznaje typ i pokazuje kroki tak, jak uczy się w szkole – rozdzielenie zmiennych, uzmiennienie stałej lub czynnik całkujący, podstawienie, potencjał równania zupełnego. Całki w krokach mają własne kroki. Sprawdza rozwiązanie: rozwiązanie i jego pochodną podstawia do równania i obie strony przekształca do tej samej postaci.

Wyższe rzędy: równania liniowe o stałych współczynnikach dowolnego rzędu przez równanie charakterystyczne (także pierwiastki wielokrotne i zespolone), rozwiązanie szczególne metodą przewidywań (także rezonans i suma prawych stron) lub uzmiennieniem stałych, zagadnienie początkowe w zerze także transformatą Laplace'a (chip „Metoda"). Dalej równanie Eulera przez $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ przez wielokrotne całkowanie i obniżenie rzędu – gdy brakuje y ($p = y'$) lub x ($y' = p(y)$).

Równanie $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ staje się liniowe przez podstawienie $z = \ln y$. Liniowe równanie drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach jest rozwiązywane, gdy jedno rozwiązanie da się odgadnąć (x^k, e^{cx}, …): drugie przez obniżenie rzędu (d'Alembert), prawą stronę uzmiennieniem stałych. Rząd obniża się też o więcej niż jeden ($p = y^{(m)}$ z równaniem drugiego rzędu dla p). Z parametrami rozróżnia się przypadki – oscylator tłumiony według znaku $\delta^2 - \omega^2$ (tłumienie silne, krytyczne, słabe), rezonans ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ dla $\omega = 2$) i znak stałej, od której zależy całka ($y'' = 2yy'$). Transformata Laplace'a rozwiązuje też zagadnienie początkowe w punkcie innym niż 0 (przez przesunięcie $\tau = t - t_0$) i z parametrami.

Równanie Riccatiego $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ jest rozwiązywane, gdy znane jest jedno rozwiązanie szczególne y_1: podane w następnym wierszu (y1 = 1/x) lub odgadnięte w prostej postaci (stała, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a). Podstawienie $y = y_1 + 1/z$ czyni je wtedy liniowym. Równania nieliniowe względem y′: Clairauta $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – proste $y = Cx + \psi(C)$ i rozwiązanie osobliwe (ich obwiednia) – i Lagrange'a $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ z rozwiązaniem parametrycznym (parametr $p = y'$).

Wynikiem jest rozwiązanie ogólne ze stałą C, dla wyższych rzędów ze stałymi C_1, C_2, … (jawnie lub w postaci uwikłanej, gdzie nie może być jawne); z warunkami rozwiązanie, które je spełnia – początkowe i brzegowe, łącznie z „brak rozwiązania" i „nieskończenie wiele rozwiązań". Znajdowane są też rozwiązania stałe utracone przy dzieleniu. Każde rozwiązanie jest sprawdzane przez podstawienie do równania. Dla pierwszego rzędu wykres pokazuje pole kierunków i rozwiązania dla różnych C, dla wyższych rzędów rozwiązania dla różnych stałych; dla autonomicznego równania drugiego rzędu (bez x) przełącznik pokazuje też płaszczyznę fazową (y, y′). Pod wykresem możesz podać własne wartości stałych i dodać ich krzywą; przełącznik „Krzywe domyślne" ukrywa te wybrane przez aplikację. Dotknięcie wykresu rysuje rozwiązanie przechodzące przez ten punkt – dla liniowego równania drugiego rzędu ustawiasz też suwakiem nachylenie stycznej w punkcie.

Układ dwóch równań liniowych o stałych współczynnikach (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, także dx/dt) przez wartości i wektory własne macierzy – rzeczywiste, zespolone i podwójne – z warunkami początkowymi x(0), y(0). Punkt stacjonarny [0; 0] jest klasyfikowany (węzeł, siodło, ognisko, środek), a płaszczyzna fazowa pokazana.

Oscylację liniowego równania drugiego rzędu (każde rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych) bada oscillation(y" + x y = 0), także dla równania w postaci samosprzężonej (x y')' + y/x = 0 lub z y′ (aplikacja sprowadza je do tej postaci). Kroki: dokładnie dla stałego q i równania Eulera y″ + (k/x²)y = 0 z granicą k = 1/4, kryteria Leightona–Wintnera i Knesera (w przypadku krytycznym także porównanie z równaniem Riemanna–Webera), podstawienie Riccatiego w = r y′/y, transformacja Prüfera i numeryczne zliczenie miejsc zerowych na przedziale (podaj go po średniku: ; ⟨1; 50⟩) z oszacowaniem Sturma ich odległości. Równanie półliniowe (|y'| y')' + q |y| y = 0 (ogólnie wykładnik |y'|^(p−2)) ocenia się stałą krytyczną ((p − 1)/p)^p, dyskretny odpowiednik Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (także Δ(r_n Δy_n)) przez jego uogólnione miejsca zerowe. Wykres pokazuje rozwiązanie z miejscami zerowymi i kąt Prüfera φ.

Asymptotykę rozwiązań równania nieliniowego z p-laplasjanem (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y z dodatnimi a, b bada polecenie asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (także asymptotika(...) po czesku); |y'|^k y' i |y|^k y można też zapisać z sgn, jako potęgę nieparzystą (y')³, y³, a dla α = 1 jako (a y')' lub y". Rozwiązania dzieli się na klasy M^+ (|y| rośnie) i M^- (|y| maleje) według granic y i quasipochodnej y^[1] = a|y′|^α sgn y′. Dla równania półliniowego (β = α) aplikacja oblicza całki J_1, J_2, Y_1, Y_2 (przez Symja, w przeciwnym razie porównując zachowanie potęgowe i logarytmiczne), wyznacza jeden z przypadków C1–C8 i niepuste klasy według twierdzenia 3.1 z pracy Z. Došlá i M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), i pokazuje równanie odwrotne. Dla równania typu Emdena–Fowlera z β ≠ α używa twierdzeń z pracy M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): przypadek superliniowy i subliniowy, rozwiązania silnie i słabo rosnące oraz regularnie zanikające. Wykres pokazuje rozwiązania numeryczne niepustych klas (M^- metodą strzałów) z ich quasipochodnymi poniżej. Początek przedziału podaj po średniku (; x ≥ 1). Dla równania z ujemnym q oscillation oferuje chip Asymptotyka rozwiązań, a asymptotics chip Oscylacja równania.

Jak to wpisać

`y' = x*y`	Pochodna z primem.
`dy/dx = x y^2`	Zapis Leibniza – nazywa też zmienną (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Zapis ze zdjęcia.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	Postać M dx + N dy = 0 (równanie zupełne).

`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Warunek początkowy po przecinku lub w następnym wierszu.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	Funkcja i zmienna mogą być dowolnymi literami.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Znane rozwiązanie szczególne równania Riccatiego w następnym wierszu (lub po średniku).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Równanie wyższego rzędu – pochodne z większą liczbą primów.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Wyższe pochodne jako y^{(4)} (także ze zdjęcia).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Warunki początkowe y(0), y′(0) – lub brzegowe w różnych punktach.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Kropki Newtona (pochodne względem czasu t) i greckie parametry.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Układ dwóch równań liniowych – po przecinku lub w wierszach, z warunkami x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscylacja równania drugiego rzędu, opcjonalnie z przedziałem dla miejsc zerowych.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Równanie półliniowe (tu p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	Odpowiednik dyskretny – liniowe równanie rekurencyjne drugiego rzędu.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asymptotyka rozwiązań równania z p-laplasjanem, opcjonalnie z początkiem przedziału.

Przykłady

Równanie o zmiennych rozdzielonych – rozwiązanie ogólne i pole kierunków.

Input: `y' = x*y`

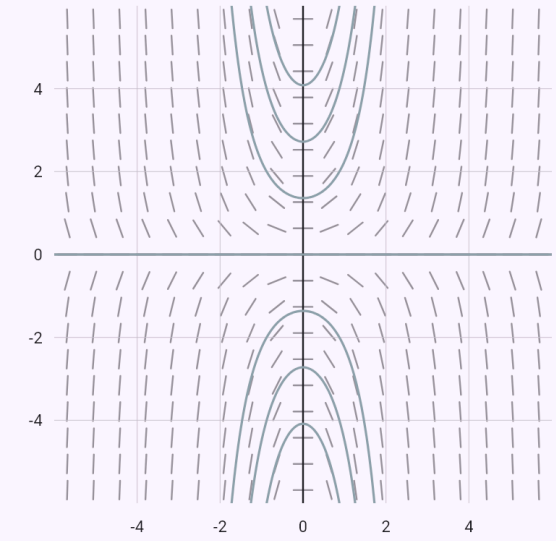
Wynik

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie o zmiennych rozdzielonych – prawa strona jest iloczynem funkcji zmiennej i funkcji niewiadomej: $y' = xy$
- Rozdzielamy zmienne (dzieląc, przy założeniu $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Całkujemy obie strony: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- Rozwiązanie stałe $y = 0$, wykluczone przez dzielenie, jest zawarte w rozwiązaniu ogólnym dla C = 0
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Warunek początkowy wyznacza stałą C.

Input: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Wynik

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

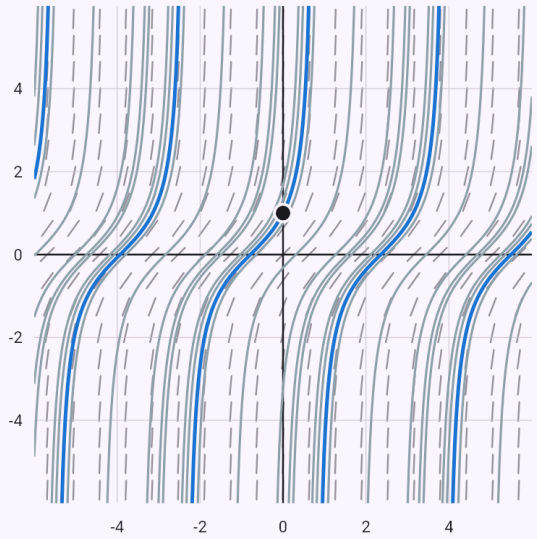
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Kroki

- Równanie o zmiennych rozdzielonych – prawa strona jest iloczynem funkcji zmiennej i funkcji niewiadomej: $y' = y^2 + 1$
- Rozdzielamy zmienne (dzieląc, przy założeniu $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$
- Całkujemy obie strony: $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy = \operatorname{arctg} y$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 1\, dx = x$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $\operatorname{arctg} y = x + C$
- Wyznaczamy rozwiązanie: $y = \operatorname{tg}(x + C)$
- Podstawiamy warunek początkowy $y(0) = 1$: $1 = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu $\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania i uproszczone tożsamością – obie strony są równe $1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 +$$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków. Wyróżnione jest rozwiązanie zagadnienia początkowego; punkt to warunek początkowy.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C | + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Równanie liniowe przez uzmiennienie stałej.

Input: `y' + 2y = e^x` Uzmiennianie stałej

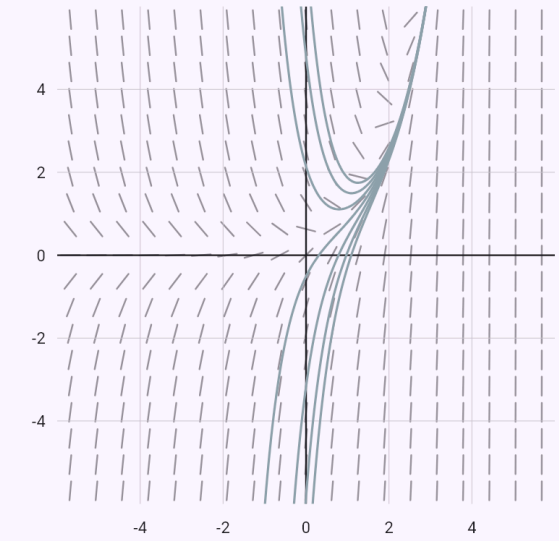
Wynik

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie liniowe pierwszego rzędu y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y' + 2y = 0$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 2\,dx = 2x$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = Ce^{-2x}$
- Uzmiennianie stałej – szukamy rozwiązania w postaci $y = C(x)\,e^{-2x}$; po podstawieniu do równania: $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Stąd $C'(x) = e^{3x}$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Całkujemy: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Rozwiązanie ogólne: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

To samo równanie czynnikiem całkującym.

Input: `y' + 2y = e^x` Czynnik całkujący

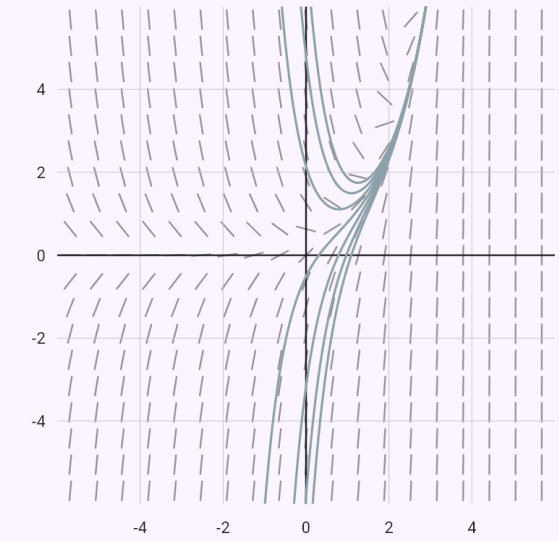
Wynik

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie liniowe pierwszego rzędu y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 2\,dx = 2x$
- Czynnik całkujący: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Mnożymy przez czynnik całkujący – lewa strona jest pochodną iloczynu: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Całkujemy obie strony: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Rozwiązanie ogólne: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Równanie jednorodne – podstawienie u = y/x.

Input: `y' = (x - y)/(x + y)`

Wynik

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

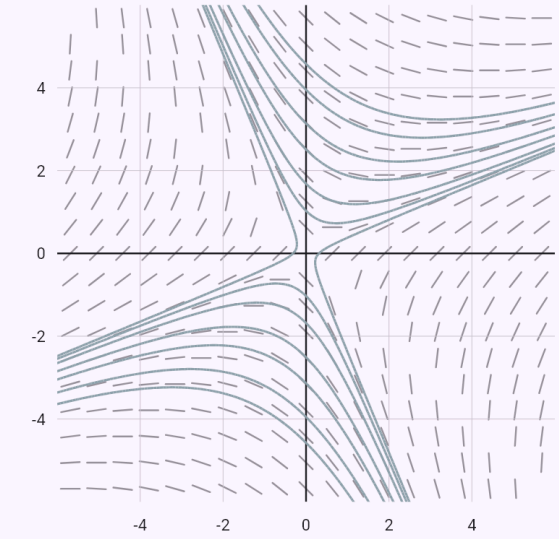
Kroki

- Równanie jednorodne – prawa strona zależy tylko od ilorazu y/x: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- Podstawienie $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ zamienia równanie na $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Rozdzielamy zmienne (dzieląc, przy założeniu $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Całkujemy obie strony: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- Licznik jest pochodną mianownika (lub jej wielokrotnością), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, ze wzoru $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$

  $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Potęgujemy – stałą ±e^C znów nazywamy C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- Rozwiązanie stałe $u = -1 - \sqrt{2}$, wykluczone przez dzielenie, jest zawarte w rozwiązaniu ogólnym dla C = 0
- Rozwiązanie stałe $u = -1 + \sqrt{2}$, wykluczone przez dzielenie, jest zawarte w rozwiązaniu ogólnym dla C = 0
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$

- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Równanie Bernoulliego – podstawienie z = y^(1−n) i rozwiązanie stałe y = 0.

Input: `xy' - y = -xy^2`

Wynik

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Kroki

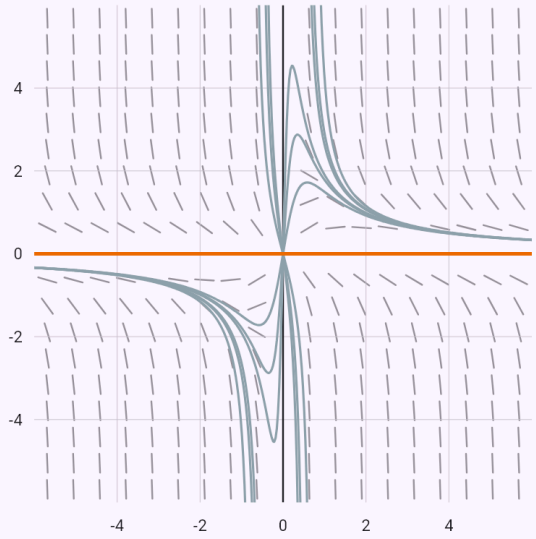
- Równanie Bernoulliego y' + p(x)·y = q(x)·yⁿ: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- Podstawienie $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ zamienia równanie na $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $z_h = \frac{C}{x}$
- Uzmiennianie stałej – szukamy rozwiązania w postaci $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; po podstawieniu do równania: $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$
- Stąd $C'(x) = x$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Całkujemy: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- Rozwiązanie ogólne: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Wyznaczamy rozwiązanie: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Dzielenie wykluczyło rozwiązanie stałe $y = 0$ – jest to kolejne rozwiązanie równania.
- Przemianowujemy stałą (wielokrotność dowolnej stałej jest dowolną stałą): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2 + C - x \cdot 2x}{\left(x^2 + C\right)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = 0$

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Równanie zupełne – potencjał F(x, y) = C.

Input: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

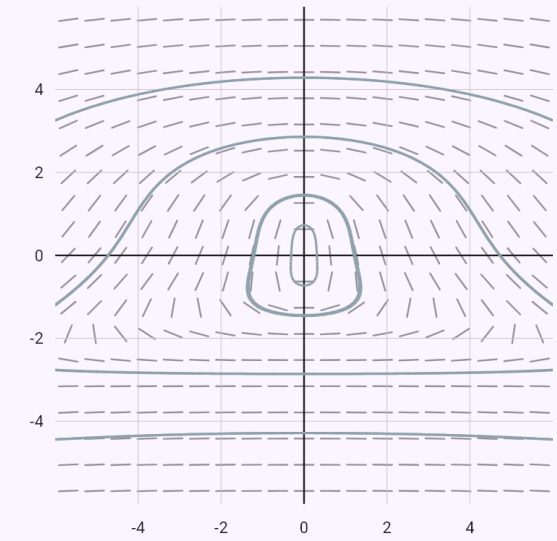
Wynik

$$y^4 + x^2 y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie M dx + N dy = 0 – sprawdzamy, czy jest zupełne (lewa strona jest różniczką zupełną): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; równanie jest zupełne, ponieważ $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- Całka sumy to suma całek: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Potencjał F przez całkowanie M względem x: $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2 y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- Z ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $y^4 + x^2 y + 3x^2 = C$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Podstawienie z = x − y; Symja zgubiłaby tu czynnik 2, aplikacja sprawdza wynik.

Input: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Wynik

$$y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1)$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Kroki

- Prawa strona jest funkcją ax + by + c − bierzemy ją za nową niewiadomą: $y' = \cos(x-y)$
- Podstawienie $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ zamienia równanie na $z' = 1 - \cos z$
- Rozdzielamy zmienne (dzieląc, przy założeniu $1-\cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Całkujemy obie strony: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Prostsze podstawienie nie pasuje − podstawienie uniwersalne $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej $t = \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$: $\quad -\mathrm{ctg}\left(\frac{z}{2}\right)$
- Z tabeli całek podstawowych: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $-\mathrm{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Wyznaczamy rozwiązanie: $z = 2\,\mathrm{arcctg}\,(C-x)$
- Dzielenie wykluczyło rozwiązanie stałe $z = 0$ − jest to kolejne rozwiązanie równania.
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $y = x - 2\,\mathrm{arcctg}\,(C-x)$
- Przemianowujemy stałą (wielokrotność dowolnej stałej jest dowolną stałą): $y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+C)$
- Podstawiamy warunek początkowy $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arcctg}\,C \Rightarrow C = 1$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1)$
- Sprawdzenie − pochodna rozwiązania $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu

  $$(2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{2}{x^2+2}$$
- Po dodaniu i uproszczeniu

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania − obie strony są równe

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos\left(x-(x+2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1))\right)$$

Równanie Riccatiego – odgadnięte rozwiązanie szczególne $y_1 = -2/x$, podstawienie $y = y_1 + 1/z$.

Input: `y' = y^2 - 2/x^2`

Wynik

$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Kroki

- Równanie Riccatiego y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Bez rozwiązania szczególnego równania Riccatiego nie da się rozwiązać. Próbujemy zgadnąć jedno w prostej postaci (stała, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) – $y_1 = -\frac{2}{x}$ spełnia równanie: $y_1' = \frac{2}{x^2}$, a podstawienie go do prawej strony daje to samo.
- Podstawienie $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ zamienia równanie na $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $z_h = Cx^4$
- Uzmiennianie stałej – szukamy rozwiązania w postaci $z = C(x)\cdot x^4$; po podstawieniu do równania: $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Stąd $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Całkujemy: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- Rozwiązanie ogólne: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- Samo rozwiązanie $y = -\frac{2}{x}$ zostaje pominięte przez podstawienie y = y₁ + 1/z (odpowiada z → ∞) – dodajemy je do wyniku.
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.

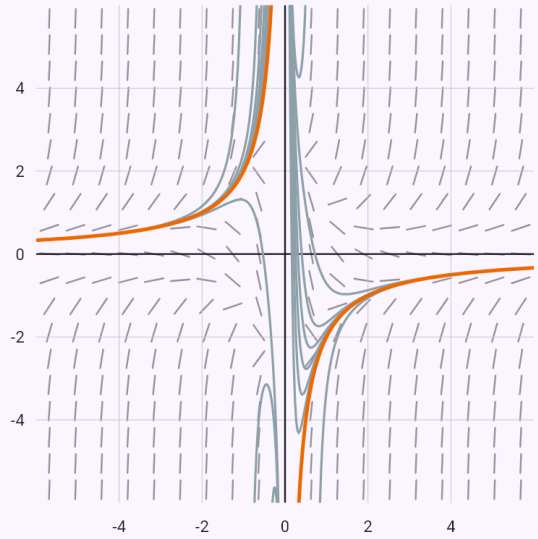
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu

$$\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$$

- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe

$$\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = -\frac{2}{x}$

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

To samo równanie z podanym rozwiązaniem szczególnym $y_1 = 1/x$.

Input: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Wynik

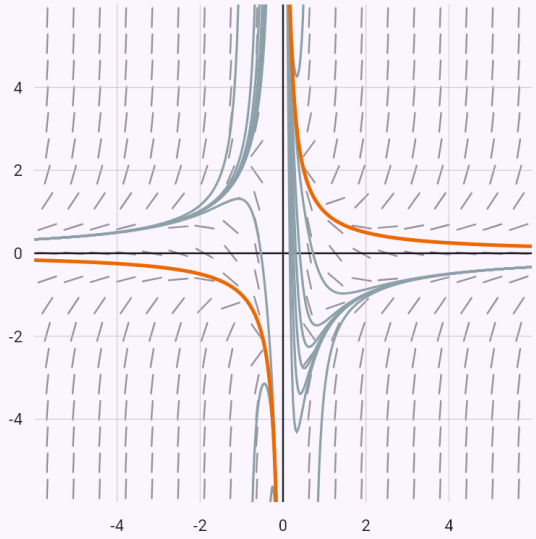
$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Kroki

- Równanie Riccatiego y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Dane rozwiązanie szczególne $y_1 = \frac{1}{x}$ spełnia równanie: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, a podstawienie go do prawej strony daje to samo.
- Podstawienie $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ zamienia równanie na $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Uzmiennianie stałej – szukamy rozwiązania w postaci $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; po podstawieniu do równania: $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Stąd $C'(x) = -x^2$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Całkujemy: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- Rozwiązanie ogólne: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- Samo rozwiązanie $y = \frac{1}{x}$ zostaje pominięte przez podstawienie y = y_1 + 1/z (odpowiada z → ∞) – dodajemy je do wyniku.
- Sprawdzenie – pochodna rozwiązania $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ po podstawieniu do równania daje tożsamość.

- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = \frac{1}{x}$

Krótkie odcinki pokazują kierunek, który równanie wyznacza w każdym punkcie (pole kierunków). Szare krzywe to rozwiązania dla różnych C – wszędzie są styczne do odcinków.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C

+ Dodaj krzywą

Dotknij wykresu – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt.

Równanie Clairauta – proste y = Cx + C² i ich obwiednia y = −x²/4.

Input: `y = xy' + y'^2`

Wynik

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Kroki

- Równanie Clairauta y = x·y' + ψ(y'). Niech $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Różniczkujemy równanie względem x (p = y' zależy od x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Jeśli p' = 0, p jest stałą, a rozwiązaniem ogólnym są proste: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Drugi czynnik x + ψ'(p) = 0 daje rozwiązanie osobliwe – obwiednię wszystkich tych prostych. Parametrycznie $x = -2p,\; y = -p^2$, po wyeliminowaniu p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Szare proste to rozwiązania dla różnych wartości C; kolorem rozwiązanie osobliwe – ich obwiednia, której dotyka każda prosta.

Przez punkt [2; −1] na obwiedni przechodzi jedna prosta y = 1 − x – i sama obwiednia.

Input: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Wynik

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Kroki

- Równanie Clairauta y = x·y' + ψ(y'). Niech $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Różniczkujemy równanie względem x (p = y' zależy od x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Jeśli p' = 0, p jest stałą, a rozwiązaniem ogólnym są proste: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Drugi czynnik x + ψ'(p) = 0 daje rozwiązanie osobliwe – obwiednię wszystkich tych prostych. Parametrycznie $x = -2p,\; y = -p^2$, po wyeliminowaniu p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Podstawiamy warunek początkowy $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Wykres



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

Kolorem rozwiązania przechodzące przez dany punkt – proste, ewentualnie także obwiednia.

Równanie Lagrange'a – rozwiązanie parametryczne i prosta y = 0.

Input: `y = 2xy' + y'^2`

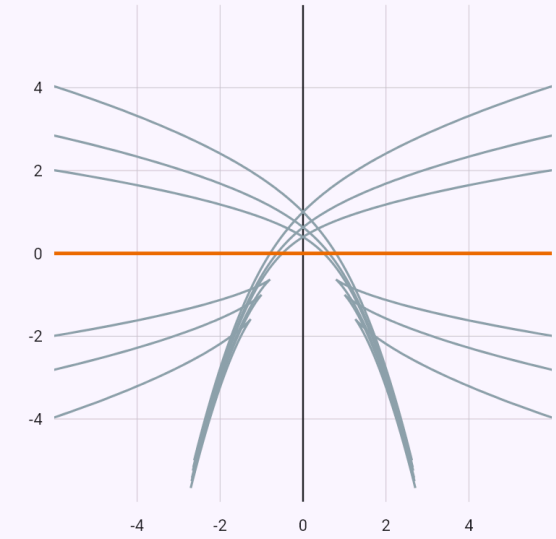
Wynik

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p},\quad C \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie Lagrange'a y = x·φ(y') + ψ(y'). Niech $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Różniczkujemy równanie względem x (p = y' zależy od x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Szukamy x jako funkcji p: dx/dp z równania – jest liniowe względem niewiadomej x: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Równanie liniowe pierwszego rzędu y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Uzmiennianie stałej – szukamy rozwiązania w postaci $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; po podstawieniu do równania: $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- Stąd $C'(p) = -2p^2$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Całkujemy: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- Rozwiązanie ogólne: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Przemianowujemy stałą (wielokrotność dowolnej stałej jest dowolną stałą): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Podstawienie x do danego równania daje rozwiązanie ogólne w postaci parametrycznej (parametr p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Dzieliliśmy przez p − φ(p), pomijając wartości, dla których $p = 2p$. Każda z nich daje prostą, która również spełnia równanie: $y = 0$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

$y = 0$

Szare krzywe to rozwiązania dla różnych wartości stałych.

Równanie charakterystyczne z pierwiastkami zespolonymi −2 ± 3i.

Input: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Wynik

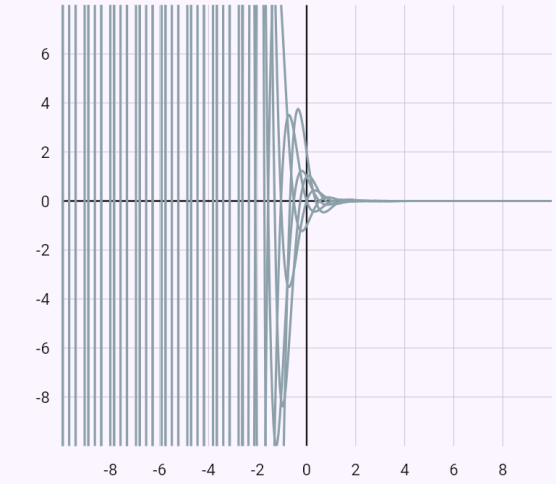
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Wyróżnik $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; pierwiastki: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- Rozwiązanie ogólne: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Wykres

Rozwiązania | Płaszczyzna fazowa



rozwiązania dla różnych C

Szare krzywe to rozwiązania dla różnych wartości stałych.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C_1 C_2 + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

Prawa strona specjalna z rezonansem – 2 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Input: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Prawa strona specjalna

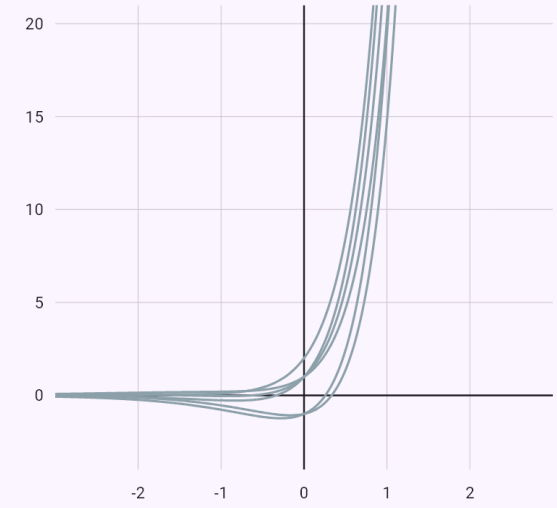
Wynik

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Wyróżnik $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; pierwiastki: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Prawa strona $3e^{2x}$ ma postać specjalną; liczba 2 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (krotności 1), więc postać mnożymy przez x: $y_p = Axe^{2x}$
- Pochodne: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Po podstawieniu do równania (podzieleniu przez funkcję wykładniczą) i redukcji wyrazów podobnych: $A = 3$
- Rozwiązanie szczególne: $y_p = 3xe^{2x}$
- Rozwiązanie ogólne: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Szare krzywe to rozwiązania dla różnych wartości stałych.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C₁ C₂ + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

Prawa strona tg x nie jest specjalna – uzmiennienie stałych i wrońskian.

Input: `y'' + y = tan x`

Wynik

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + y = \operatorname{tg} x$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y'' + y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Uzmiennianie stałych – szukamy rozwiązania w postaci $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, pochodne funkcji C_k spełniają układ
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$
- Wyznacznik układu (wrońskian)
$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$
- Stąd $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$
- Stąd $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Stałą wyłączamy przed całkę
$$\int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$
- Funkcja jest nieparzysta względem cosinusa – podstawienie $t = \sin x$
$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- Całka sumy to suma całek
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int -1 \, dt = -t$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\dfrac{1}{2(t-1)} \, dt = -\dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t-1} \, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \dfrac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \dfrac{1}{2(t+1)} \, dt = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t+1} \, dt$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \dfrac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej
$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Po scałkowaniu (stałe całkowania są już w rozwiązaniu jednorodnym)
$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- Po scałkowaniu (stałe całkowania są już w rozwiązaniu jednorodnym): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Rozwiązanie szczególne:
$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- Rozwiązanie ogólne
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Całki z uzmiennienia stałych, których nie da się wyrazić funkcjami elementarnymi – rozwiązanie z

całką.

Input: `y'' + y' + y = tan x`

Wynik

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y'' + y' + y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Wyróżnik $D = 1^2 - 4 = -3$; pierwiastki: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- Rozwiązanie równania jednorodnego $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Uzmiennianie stałych – szukamy rozwiązania w postaci pochodne funkcji C_k spełniają układ $y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- Wyznacznik układu (wrońskian)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} \end{vmatrix}$$

- Stąd $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Stąd $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}$
- Po scałkowaniu (stałe całkowania są już w rozwiązaniu jednorodnym) $C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx$
- Po scałkowaniu (stałe całkowania są już w rozwiązaniu jednorodnym) $C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx$
- Tych całek nie da się wyrazić funkcjami elementarnymi (prowadzą do funkcji wyższych, nieelementarnych), więc rozwiązanie zostawia je w postaci całek $\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \operatorname{tg} x}{3}\, dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$
- Rozwiązanie ogólne $y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$

Zagadnienie początkowe – układ dla stałych C_1, C_2.

Input: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Wynik

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

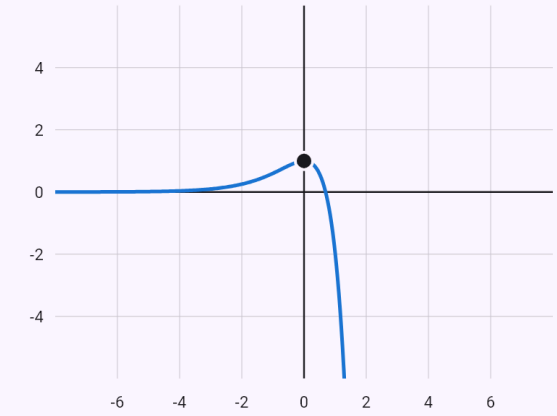
Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Wyróżnik $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; pierwiastki: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- Prawa strona e^{2x} ma postać specjalną; liczba 2 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc szukamy rozwiązania szczególnego $y_p = Ae^{2x}$
- Pochodne: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Po podstawieniu do równania (podzieleniu przez funkcję wykładniczą) i redukcji wyrazów podobnych: $-A = 1$
- Stąd $A = -1$
- Rozwiązanie szczególne: $y_p = -e^{2x}$
- Rozwiązanie ogólne: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Pochodne rozwiązania ogólnego: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Warunki dają układ stąd $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Wykres



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Wyróżnione rozwiązanie spełnia warunki, punkty to zadane wartości.

Własne wartości stałych

C₁ | C₂ | + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

To samo zagadnienie transformatą Laplace'a.

Input: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Transformata Laplace'a

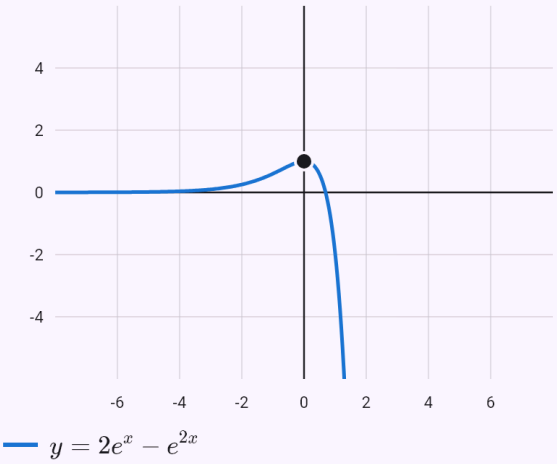
Wynik

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformata Laplace'a obu stron: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)$; z warunkami początkowymi: $\left(s^2Y - s\right) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Wyznaczamy obraz Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Ułamki proste: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- Transformata odwrotna (z tabeli obrazów) daje rozwiązanie: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Wykres



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Wyróżnione rozwiązanie spełnia warunki, punkty to zadane wartości.

Zagadnienie brzegowe z nieskończenie wieloma rozwiązaniami.

Input: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Wynik

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Rozwiązanie ogólne: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- Stała C_2 pozostaje dowolna – zagadnienie ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $y = C_2 \sin x$

Równanie Eulera – podstawienie x = eᵗ.

Input: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

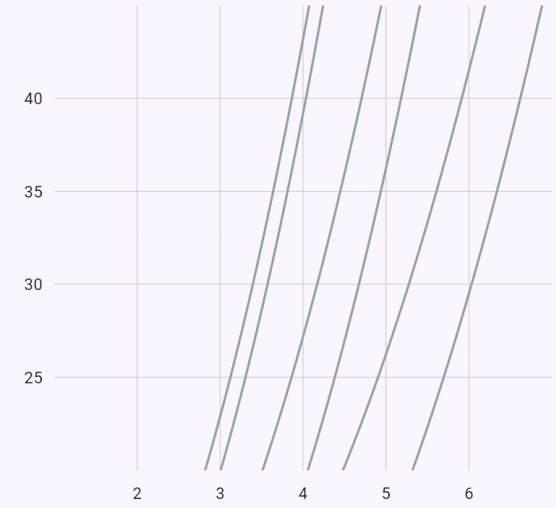
Wynik

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Kroki

- Równanie Eulera – każdej pochodnej y^(k) towarzyszy x^k; podstawienie x = e^t zamienia je na równanie o stałych współczynnikach: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Podstawienie $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ zamienia równanie na $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λt); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λt) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Wyróżnik $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; pierwiastki: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Prawą stronę dzielimy na części o postaci specjalnej – dla każdej rozwiązanie szczególne, potem je dodajemy: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Prawa strona 2 ma postać specjalną; liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc szukamy rozwiązania szczególnego $y_{p_1} = A$
- Pochodne: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Po podstawieniu do równania (podzieleniu przez funkcję wykładniczą) i redukcji wyrazów podobnych: $2A = 2$
- Stąd $A = 1$
- Rozwiązanie szczególne: $y_{p_1} = 1$
- Prawa strona e^{2t} ma postać specjalną; liczba 2 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (krotności 1), więc postać mnożymy przez x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Pochodne: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Po podstawieniu do równania (podzieleniu przez funkcję wykładniczą) i redukcji wyrazów podobnych: $A = 1$
- Rozwiązanie szczególne: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Rozwiązanie szczególne: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- Rozwiązanie ogólne: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Wracamy do pierwotnej zmiennej (t = ln x, dla $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Szare krzywe to rozwiązania dla różnych wartości stałych.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C₁ | C₂ | + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

Obniżenie rzędu y' = p(y), stałe z warunków początkowych krok po kroku.

Input: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Wynik

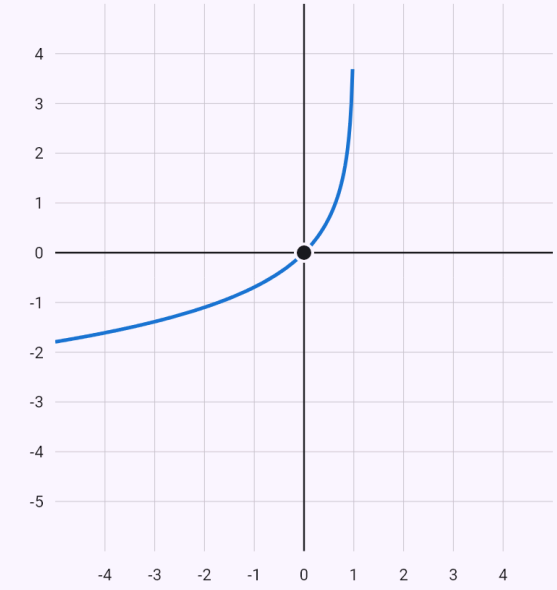
$$y = -\ln(1 - x)$$

Kroki

- Brakuje zmiennej niezależnej – y' traktujemy jako funkcję y: $y'' = e^{2y}$
- Podstawienie $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ zamienia równanie na $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; warunki początkowe dają $p(0) = 1$
- Równanie o zmiennych rozdzielonych – prawa strona jest iloczynem funkcji zmiennej i funkcji niewiadomej: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Rozdzielamy zmienne: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Całkujemy obie strony: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Wyznaczamy rozwiązanie: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Podstawiamy warunek początkowy $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $p = e^y$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Wracamy do pierwotnej niewiadomej: $y' = e^y$
- Równanie o zmiennych rozdzielonych – prawa strona jest iloczynem funkcji zmiennej i funkcji niewiadomej: $y' = e^y$
- Rozdzielamy zmienne (dzieląc, przy założeniu $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Całkujemy obie strony: $\int \dfrac{dy}{e^y} = \int dx$
- Z tabeli – funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc wynik dzielimy przez jej współczynnik przy zmiennej: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int 1\,dx = x$
- Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej: $-e^{-y} = x + C_2$
- Wyznaczamy rozwiązanie: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Podstawiamy warunek początkowy $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (rozwiązanie szczególne): $y = -\ln(1 - x)$
- Wyraz zróżniczkowany według reguł dla funkcji złożonej, iloczynu i ilorazu: $(-\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{1-x}$
- Rozwiązanie i jego pochodna podstawione do równania – obie strony są równe: $\dfrac{1}{1-x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Wykres

Rozwiązania | Płaszczyzna fazowa



$y = -\ln(1 - x)$

Wyróżnione rozwiązanie spełnia warunki, punkty to zadane wartości.

Oscylator tłumiony – trzy przypadki według δ i ω.

Input: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Wynik

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Dla $\delta > \omega$ więc

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta)x}$
- Dla $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, więc $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Dla $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, i$, więc

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right)\right.$

Rezonans – dla ω = 2 rozwiązanie ma inną postać.

Input: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Wynik

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Kroki

- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Najpierw równanie jednorodne (prawa strona zerowa): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λt); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λt) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Rozwiązanie równania jednorodnego: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Prawa strona $\cos(2t)$ ma postać specjalną; liczba $2i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc szukamy rozwiązania szczególnego $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Pochodne $y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$
- Po podstawieniu do równania (podzieleniu przez funkcję wykładniczą) i redukcji wyrazów podobnych $(A\omega^2 - 4A)\cos(2t) + (B\omega^2 - 4B)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Porównujemy współczynniki przy wyrazach podobnych po obu stronach stąd $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Rozwiązanie szczególne: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Rozwiązanie ogólne

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Dla $\omega = 2$ liczba z prawej strony jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (rezonans) – rozwiązanie ma inną postać:

$$y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$$

Odgadnięte rozwiązanie $y_1 = x$ i obniżenie rzędu (d'Alembert).

Input: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Wynik

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Kroki

- Równanie liniowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach: $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$
- Jedno rozwiązanie zgadujemy i sprawdzamy podstawieniem: $y_1 = x$. Drugie przez obniżenie rzędu (d'Alembert, y = y_1·u)

  $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$

- Funkcję wymierną rozkładamy na wielomian i ułamki proste

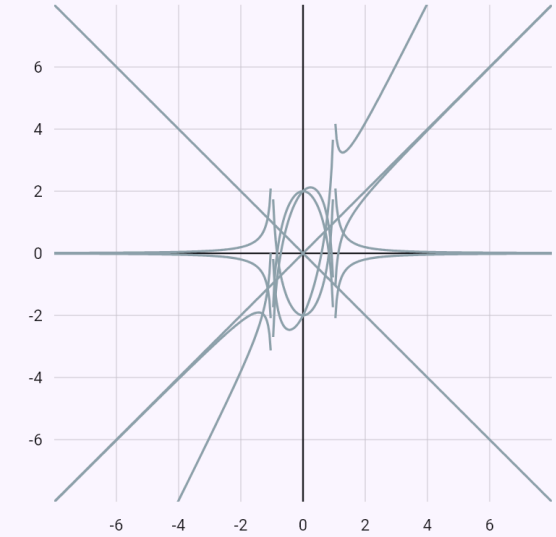
  $$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

- Całka sumy to suma całek

  $$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$
- Stałą wyłączamy przed całkę: $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$
- Z tabeli całek podstawowych: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Rozwiązanie ogólne: $y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$

Wykres



rozwiązania dla różnych C

Szare krzywe to rozwiązania dla różnych wartości stałych.

Krzywe domyślne

Własne wartości stałych

C_1 C_2 + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

Układ – wartości własne przeciwnych znaków, siodło.

Input: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Wynik

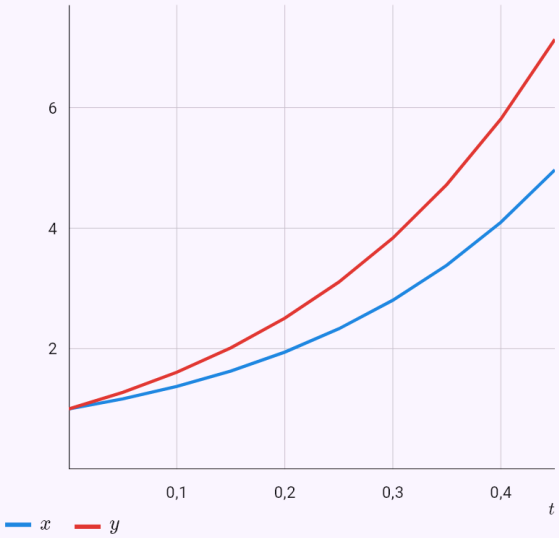
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Kroki

- Układ w postaci macierzowej
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Wartości własne macierzy z równania charakterystycznego $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – dwie różne rzeczywiste.
- Wektory własne, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Rozwiązanie ogólne
  $x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$
  $y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$
- Punkt stacjonarny $[0;\ 0]$ to siodło – wartości własne mają przeciwne znaki, jest niestabilny.

Wykres

W czasie | Płaszczyzna fazowa



Rozwiązanie układu w czasie dla danych warunków początkowych (bez nich dla x(0) = y(0) = 1).

Zespolone wartości własne – ognisko niestabilne.

Input: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Wynik

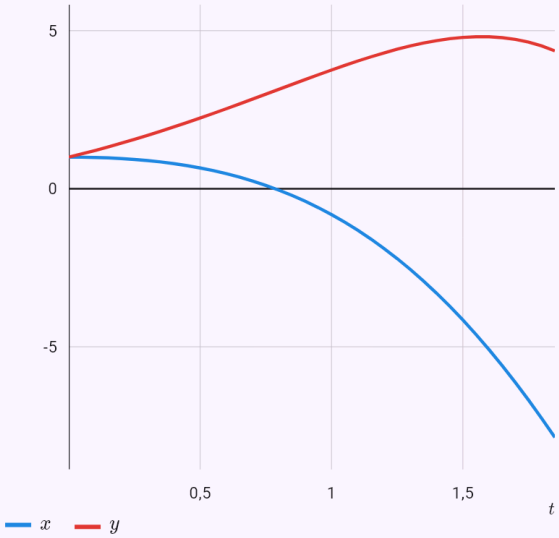
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Kroki

- Układ w postaci macierzowej
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Wartości własne macierzy z równania charakterystycznego $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – zespolone sprzężone.
- Wektory własne, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Rozwiązanie ogólne
  $x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$
  $y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$
- Punkt stacjonarny $[0;\ 0]$ to ognisko niestabilne – część rzeczywista wartości własnych jest dodatnia, trajektorie oddalają się spiralnie.

Wykres

W czasie | Płaszczyzna fazowa



Rozwiązanie układu w czasie dla danych warunków początkowych (bez nich dla x(0) = y(0) = 1).

Układ z warunkami początkowymi – środek.

Input:
```
x' = y
y' = -x
x(0) = 1
y(0) = 0
```

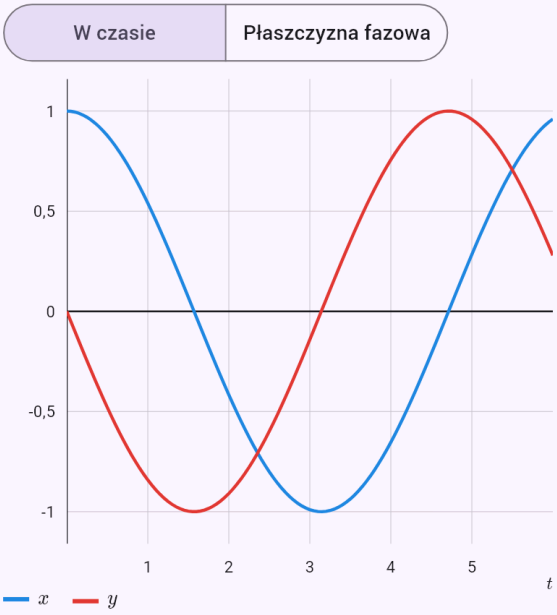
Wynik

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Kroki

- Układ w postaci macierzowej
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Wartości własne macierzy z równania charakterystycznego $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – zespolone sprzężone.
- Wektory własne, $(A - \lambda E)v = 0$
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Rozwiązanie ogólne
$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
$$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Stałe z warunków początkowych więc $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 0$$
- Punkt stacjonarny $[0;\ 0]$ to środek – wartości własne są czysto urojone, trajektorie są krzywymi zamkniętymi wokół niego.

Wykres



Rozwiązanie układu w czasie dla danych warunków początkowych (bez nich dla x(0) = y(0) = 1).

Równanie Airy'ego – kryterium Leightona–Wintnera i 12 miejsc zerowych.

Input: `oscillation(y'' + x y = 0)`

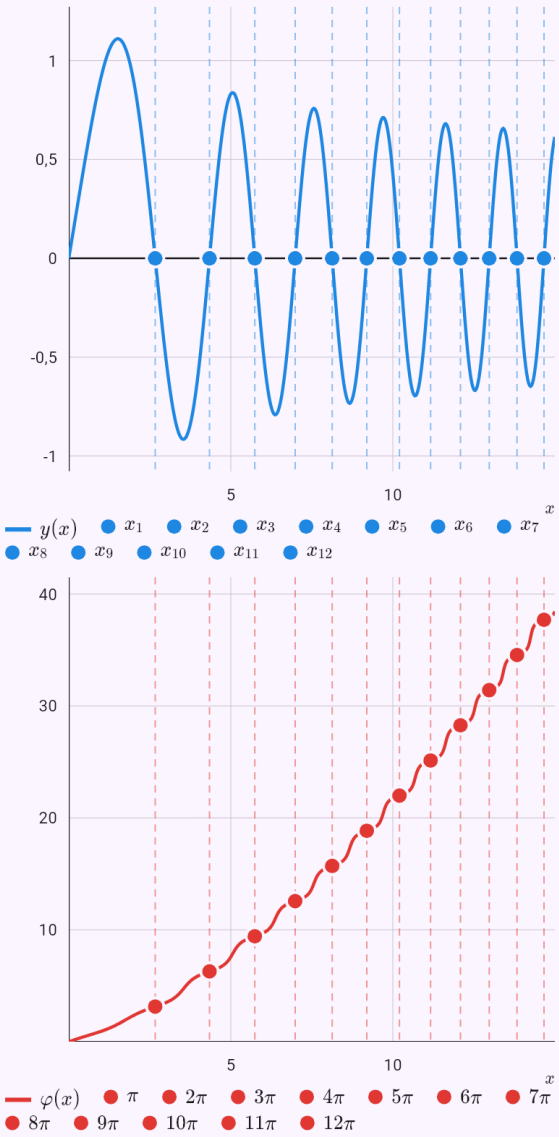
Wynik

Równanie jest oscylacyjne.

Kroki

- Badamy równanie $y'' + xy = 0$ na przedziale $\langle 0;\ \infty)$, czyli y" + q(x)y = 0 z q = x
- Równanie jest oscylacyjne, jeśli każde nietrywialne rozwiązanie ma na przedziale nieskończenie wiele miejsc zerowych. Z twierdzenia Sturma o rozdzielaniu miejsca zerowe dwóch niezależnych rozwiązań się przeplatają, więc wystarczy jedno rozwiązanie: albo oscylują wszystkie rozwiązania, albo żadne.
- Kryterium Leightona–Wintnera: jeśli ∫ 1/r = ∞ i ∫ q = ∞, równanie jest oscylacyjne. Tutaj $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ i $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, więc równanie jest oscylacyjne.
- Kryterium Knesera ze stałą krytyczną $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, równanie jest oscylacyjne.
- Technika Riccatiego: podstawienie $w = \frac{y'}{y}$ przekształca równanie w równanie Riccatiego $w' + w^2 + x = 0$. Równanie jest nieoscylacyjne dokładnie wtedy, gdy równanie Riccatiego ma rozwiązanie na całym przedziale ⟨T; ∞) dla pewnego T. Dla równania oscylacyjnego takiego nie ma: w „ucieka" do −∞ w każdym miejscu zerowym y.
- Transformacja Prüfera $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ przekształca równanie w równanie dla kąta φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. W miejscu zerowym y kąt φ jest wielokrotnością π i φ' > 0, więc φ przez wielokrotności π tylko rośnie. Liczba miejsc zerowych na (a; b⟩ wynosi zatem ⌊φ(b)/π⌋. Obliczamy numerycznie metodą Rungego–Kutty (RK4) z wartości początkowych $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Na przedziale $(0;\ 15\rangle$ rozwiązanie ma tyle miejsc zerowych: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Sąsiednie miejsca zerowe są odległe od $0{,}8322$ do $1{,}6761$. Miejsca zerowe $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,\ $
- Twierdzenie porównawcze Sturma: na przedziale $\langle 0;\ 15\rangle$ mamy $q \in \langle 0;\ 15\rangle$. q nie jest tam wszędzie dodatnie, więc otrzymujemy tylko dolne oszacowanie odległości sąsiednich miejsc zerowych: $0{,}8112 \le \Delta$
- Wniosek: równanie jest oscylacyjne – każde nietrywialne rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wykres



Rozwiązanie z zaznaczonymi miejscami zerowymi; pod nim kąt Prüfera φ, przechodzący przez wielokrotności π w miejscach zerowych.

Równanie Eulera na granicy k = 1/4 – jeszcze nie oscylacyjne.

Input: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

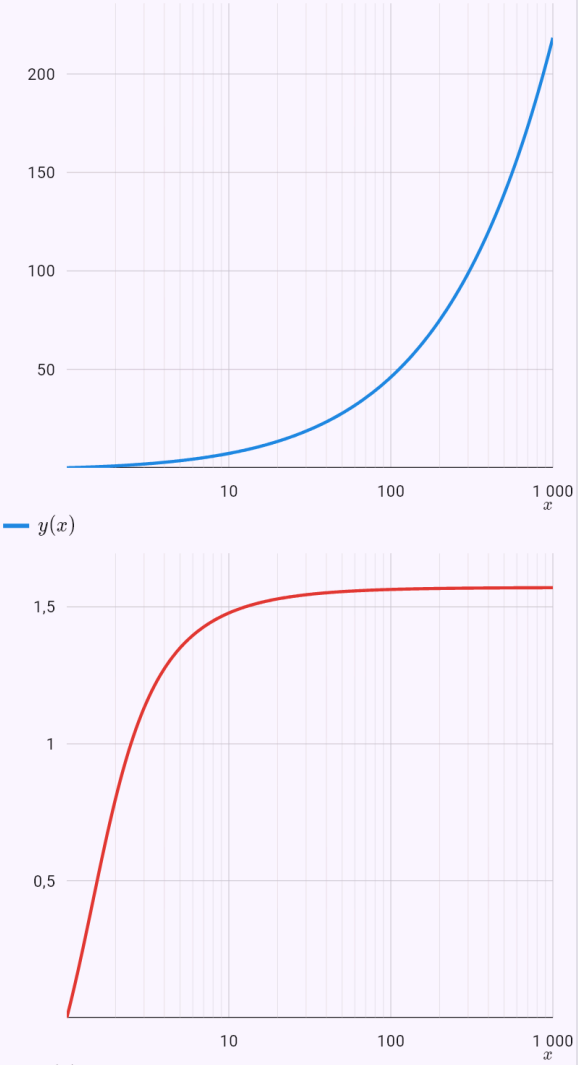
Wynik

Równanie nie jest oscylacyjne.

Kroki

- Badamy równanie $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ na przedziale $\langle 1;\, \infty)$, czyli y" + q(x)y = 0 z q = $\frac{1}{4x^2}$
- Równanie jest oscylacyjne, jeśli każde nietrywialne rozwiązanie ma na przedziale nieskończenie wiele miejsc zerowych. Z twierdzenia Sturma o rozdzielaniu miejsca zerowe dwóch niezależnych rozwiązań się przeplatają, więc wystarczy jedno rozwiązanie: albo oscylują wszystkie rozwiązania, albo żadne.
- To jest równanie Eulera y" + (k/x²)y = 0 z wartością graniczną k = $\frac{1}{4}$. Równanie charakterystyczne $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{4}=0$ ma pierwiastek podwójny $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}$, rozwiązanie $y=\sqrt{x}(C_1+C_2\ln x)$ ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Równanie jeszcze nie jest oscylacyjne.
- Kryterium Leightona–Wintnera: jeśli ∫ 1/r = ∞ i ∫ q = ∞, równanie jest oscylacyjne. Tutaj $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x=\infty$, ale $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$, więc kryterium nie rozstrzyga.
- Kryterium Knesera: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{4}$ równa się stałej krytycznej $\frac{1}{4}$, więc samo nie rozstrzyga. Rozstrzyga następny wyraz.
- W przypadku krytycznym porównujemy z równaniem Riemanna–Webera y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, które oscyluje dokładnie dla μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)\ln^2 x=0<\frac{1}{4}$, równanie nie jest oscylacyjne.
- Technika Riccatiego: podstawienie $w=\frac{y'}{y}$ przekształca równanie w równanie Riccatiego $w'+w^2+\frac{1}{4x^2}=0$. Ma ono rozwiązanie $w=\frac{1}{2x}$ na całym przedziale – odpowiada mu rozwiązanie y bez miejsc zerowych, więc równanie nie jest oscylacyjne.
- Transformacja Prüfera $y=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho\cos\varphi$ przekształca równanie w równanie dla kąta φ: $\varphi'=\cos^2\varphi+\frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. W miejscu zerowym y kąt φ jest wielokrotnością π i φ' > 0, więc φ przez wielokrotności π tylko rośnie. Liczba miejsc zerowych na (a; b⟩ wynosi zatem ⌊φ(b)/π⌋. Obliczamy numerycznie metodą Rungego–Kutty (RK4) z wartości początkowych $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ \varphi(1)=0$
- Na przedziale $(1;\,1000\rangle$ rozwiązanie nie ma miejsca zerowego: $\varphi(1000)\doteq 1{,}5702\doteq 0{,}4998\pi$, kąt nie osiągnął π.
- Wniosek: równanie nie jest oscylacyjne – każde nietrywialne rozwiązanie ma tylko skończenie wiele miejsc zerowych.

Wykres



Rozwiązanie nie ma miejsca zerowego na wybranym przedziale; kąt Prüfera φ pod nim nie osiąga π.

Kryterium Knesera: x²q → 1 > 1/4, miejsca zerowe rosną geometrycznie.

Input: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

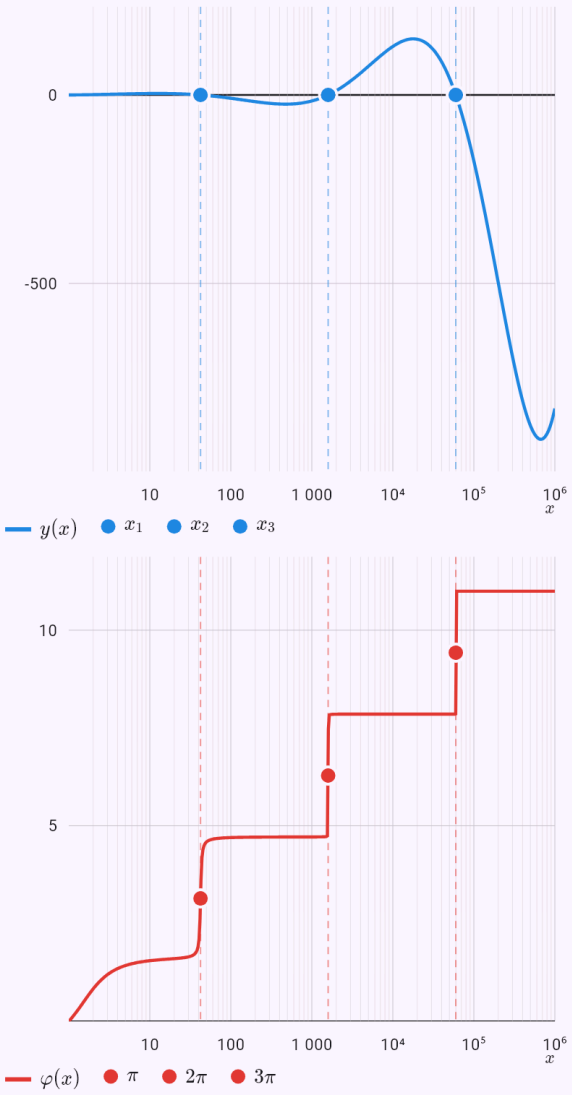
Wynik

Równanie jest oscylacyjne.

Kroki

- Badamy równanie $y'' + \frac{1}{x^2+1}y = 0$ na przedziale $\langle 0;\, \infty)$, czyli y" + q(x)y = 0 z q = $\frac{1}{x^2+1}$
- Równanie jest oscylacyjne, jeśli każde nietrywialne rozwiązanie ma na przedziale nieskończenie wiele miejsc zerowych. Z twierdzenia Sturma o rozdzielaniu miejsca zerowe dwóch niezależnych rozwiązań się przeplatają, więc wystarczy jedno rozwiązanie: albo oscylują wszystkie rozwiązania, albo żadne.
- Kryterium Leightona–Wintnera: jeśli ∫ 1/r = ∞ i ∫ q = ∞, równanie jest oscylacyjne. Tutaj $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$, ale $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, więc kryterium nie rozstrzyga.
- Kryterium Knesera ze stałą krytyczną $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1$ > 1/4, równanie jest oscylacyjne.
- Technika Riccatiego: podstawienie $w = \frac{y'}{y}$ przekształca równanie w równanie Riccatiego $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. Równanie jest nieoscylacyjne dokładnie wtedy, gdy równanie Riccatiego ma rozwiązanie na całym przedziale ⟨T; ∞) dla pewnego T. Dla równania oscylacyjnego takiego nie ma: w „ucieka" do −∞ w każdym miejscu zerowym y.
- Transformacja Prüfera $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ przekształca równanie w równanie dla kąta φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. W miejscu zerowym y kąt φ jest wielokrotnością π i φ' > 0, więc φ przez wielokrotności π tylko rośnie. Liczba miejsc zerowych na (a; b⟩ wynosi zatem ⌊φ(b)/π⌋. Obliczamy numerycznie metodą Rungego–Kutty (RK4) z wartości początkowych $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Na przedziale $(1;\, 1\,000\,000\rangle$ rozwiązanie ma tyle miejsc zerowych: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Sąsiednie miejsca zerowe są odległe od $1548{,}7974$ do $58269{,}3046$. Miejsca zerowe: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Wniosek: równanie jest oscylacyjne – każde nietrywialne rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wykres



Rozwiązanie z zaznaczonymi miejscami zerowymi; pod nim kąt Prüfera φ, przechodzący przez wielokrotności π w miejscach zerowych.

Półliniowe równanie Eulera, k = 1 > (2/3)³.

Input: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Wynik

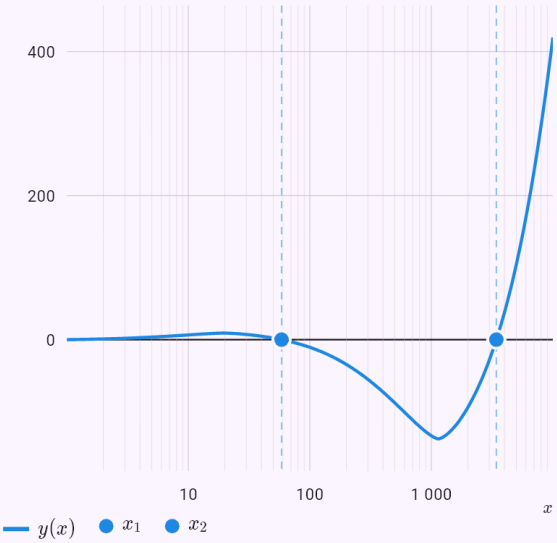
Równanie jest oscylacyjne.

Kroki

- Badamy równanie półliniowe $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ z p = 3 na przedziale $\langle 1;\ \infty)$, gdzie $\Phi(s) = |s|^{1} s$. Wielokrotność rozwiązania jest znowu rozwiązaniem, ale suma dwóch rozwiązań w ogólności nie. Dla p = 2 jest to równanie liniowe y" + q(x)y = 0.
- Równanie jest oscylacyjne, jeśli każde nietrywialne rozwiązanie ma na przedziale nieskończenie wiele miejsc zerowych. Twierdzenie Sturma o rozdzielaniu obowiązuje także dla równań półliniowych: albo oscylują wszystkie rozwiązania, albo żadne.
- To jest półliniowe równanie Eulera z k = 1. Podstawienie y = x^λ z 0 < λ < 1 daje k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ dla p = 3. Funkcja G osiąga maksimum, stałą krytyczną $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, w λ = (p − 1)/p. Tutaj k jest większe, nie ma rozwiązania x^λ i równanie jest oscylacyjne.
- Kryterium Leightona–Wintnera (jeśli ∫ q = ∞, równanie jest oscylacyjne) tutaj nie rozstrzyga: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Kryterium Knesera dla równań półliniowych ze stałą krytyczną $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ jest większe, równanie jest oscylacyjne.
- Technika Riccatiego dla równania półliniowego: podstawienie $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ prowadzi do równania Riccatiego $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. Równanie jest nieoscylacyjne dokładnie wtedy, gdy ma ono rozwiązanie na całym przedziale ⟨T; ∞).

- Numerycznie (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) rozwiązanie ma na przedziale $(1;\ 10\,000\rangle$ tyle miejsc zerowych: 2, odległych o $3369{,}2413$. Miejsca zerowe: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Wniosek: równanie jest oscylacyjne – każde nietrywialne rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wykres



Rozwiązanie z zaznaczonymi miejscami zerowymi.

Dyskretne kryterium Knesera: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Input: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

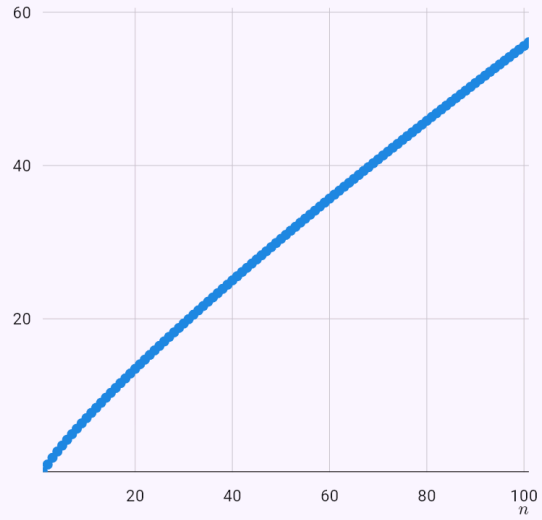
Wynik

Równanie nie jest oscylacyjne.

Kroki

- Badamy dyskretny odpowiednik (r y')' + q y = 0, liniowe równanie rekurencyjne $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ dla $n \geq 1$, gdzie $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Jako rekurencja: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Dla ciągu liczymy uogólnione miejsca zerowe: $y_n = 0$ albo zmianę znaku między y_n a y_{n+1}. Równanie jest oscylacyjne, jeśli każde nietrywialne rozwiązanie ma nieskończenie wiele uogólnionych miejsc zerowych. Twierdzenie Sturma o rozdzielaniu obowiązuje także tutaj.
- Dyskretne kryterium Leightona–Wintnera: jeśli $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ i $\Sigma\, q_n = \infty$, równanie jest oscylacyjne. Tutaj $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, więc kryterium nie rozstrzyga.
- Dyskretne kryterium Knesera ze stałą krytyczną $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, równanie nie jest oscylacyjne.
- Dyskretna technika Riccatiego: podstawienie $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ prowadzi do $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. Równanie jest nieoscylacyjne dokładnie wtedy, gdy to równanie od pewnego miejsca ma rozwiązanie z $w_n + r_n > 0$.
- Rozwiązanie z $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ nie ma dla n w $(1;\, 101\rangle$ uogólnionego miejsca zerowego.
- Wniosek: równanie nie jest oscylacyjne – każde nietrywialne rozwiązanie ma tylko skończenie wiele miejsc zerowych.

Wykres



Rozwiązanie nie ma miejsca zerowego na wybranym przedziale.

Przykład 4.2 z pracy Došlej i Mariniego – przypadek C5: rozwiązania regularnie rosnące i silnie

zanikające.

Input: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Wynik

$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

Kroki

- Badamy równanie półliniowe $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ na przedziale $\langle 1;\,\infty)$ z α = 3, a = e^{-3x} > 0 i b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. To równanie z p-laplasjanem dla p = α + 1 i „ujemnym potencjałem" – nie oscyluje. Ogólna postać równania to $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- Zachowanie rozwiązania opisuje razem z y jego quasi-pochodna $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3\operatorname{sgn} y'$. Każde nietrywialne rozwiązanie należy do jednej z dwóch klas: M^+ – y·y' > 0 od pewnego x i |y| rośnie – albo M^- – y·y' < 0 na całym przedziale i |y| maleje. Klasy dzielą się według granic |y| i $|y^{[1]}|$ dla x → ∞: indeks ∞ (nieskończona), ℓ (skończona niezerowa) lub 0 (zero), na przykład $M^+_{\infty,\ell}$
- Z twierdzenia 2.1 (Došlá–Marini) każde rozwiązanie jest określone na całym przedziale i obie klasy M^+ i M^- są niepuste. Na przykład rozwiązania z y(x₀) > 0 i y'(x₀) ≥ 0 należą do M^+
- Całka A: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak e^x (z dokładnością do dodatniej stałej). Decyduje funkcja wykładnicza, stąd $\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- Całka B

  $$\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$$

- Całka J_1: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak e^x (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Decyduje funkcja wykładnicza, stąd

  $$\int_1^\infty e^x\left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$$

- Całka J_2: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak $x^{-\frac{2}{3}}$ (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1

  $$\int_1^\infty e^x\left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$$

- Całka Y_1 jest rozbieżna, bo już całka wewnętrzna jest rozbieżna

  $$\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x = \infty$$

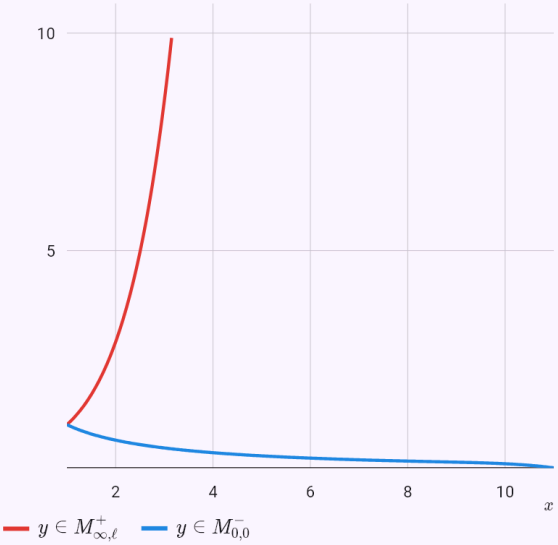
- Całka Y_2: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak x^{-2} (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1

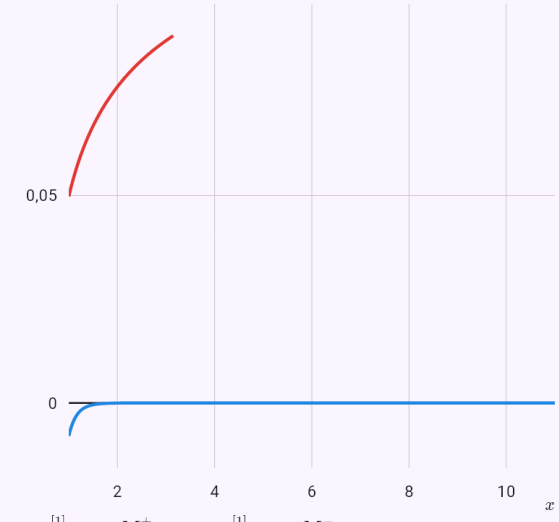
  $$\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x < \infty$$

- Lemat 2.1 (rozszerzenie twierdzenia Fubiniego): dla α = 3 ≥ 1 z $Y_2 = \infty$ wynika $J_2 = \infty$, a z $Y_1 = \infty$ wynika $J_1 = \infty$.
- Całki wyszły $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – to przypadek C_5 klasyfikacji (twierdzenie 3.1).
- Równanie odwrotne $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a i b zamieniają się rolami, a α przechodzi w 1/α) ma za rozwiązania quasi-pochodne rozwiązań danego równania. Jego całki J_1, J_2 odczytujemy jako Y_2, Y_1, więc zachodzi przypadek C_8. Klasy sobie odpowiadają z zamienionymi indeksami: $M^+_{\infty,\ell}$ danego równania odpowiada $M^+_{\ell,\infty}$ odwrotnego.

- $M^{+}_{\infty,\ell} \neq \emptyset$: rozwiązania regularnie rosnące – $|y| \to \infty$, ale quasi-pochodna ma skończoną niezerową granicę; y rośnie jak $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (twierdzenie 3.1).
- $M^{-}_{0,0} \neq \emptyset$: rozwiązania silnie zanikające – $y \to 0$ i $y^{[1]} \to 0$ (twierdzenie 3.1).
- Rozwiązanie z M^{-} na wykresie znajdujemy numerycznie metodą strzałów: szukamy wartości początkowej quasi-pochodnej, dla której rozwiązanie z $y(1) = 1$ na długim przedziale ani nie osiąga zera, ani nie zaczyna rosnąć – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Ta wartość jest jedyna, bo $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (twierdzenie 4).

Wykres





U góry numeryczne rozwiązania y(x) z niepustych klas (M^{+} z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} metodą strzałów); u dołu ich quasi-pochodne y^[1](x). Krzywa kończy się tam, gdzie |y| przekracza 10.

Przypadek C4 – ograniczone rozwiązania rosnące i cały przedział malejących.

Input: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Wynik

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oscylacja równania

Kroki

- Badamy równanie liniowe $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ na przedziale $\langle 1;\, \infty)$, czyli (a(x)y')' = b(x)y z a = x^4 > 0 i b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. Zapisane jako (a y')' + q y = 0 ma q = −b ujemne, więc równanie nie jest oscylacyjne – każde rozwiązanie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.
- Zachowanie rozwiązania opisuje razem z y jego quasi-pochodna $y^{[1]} = x^4 y'$. Każde nietrywialne rozwiązanie należy do jednej z dwóch klas: M^+ – y·y' > 0 od pewnego x i |y| rośnie – albo M^- – y·y' < 0 na całym przedziale i |y| maleje. Klasy dzielą się według granic |y| i $|y^{[1]}|$ dla x → ∞: indeks ∞ (nieskończona), ℓ (skończona niezerowa) lub 0 (zero), na przykład $M^+_{\infty,\ell}$
- Z twierdzenia 2.1 (Došlá–Marini) każde rozwiązanie jest określone na całym przedziale i obie klasy M^+ i M^- są niepuste. Na przykład rozwiązania z y(x₀) > 0 i y'(x₀) ≥ 0 należą do M^+
- Całka A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Całka B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Całka J_1: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak x^{-4} (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

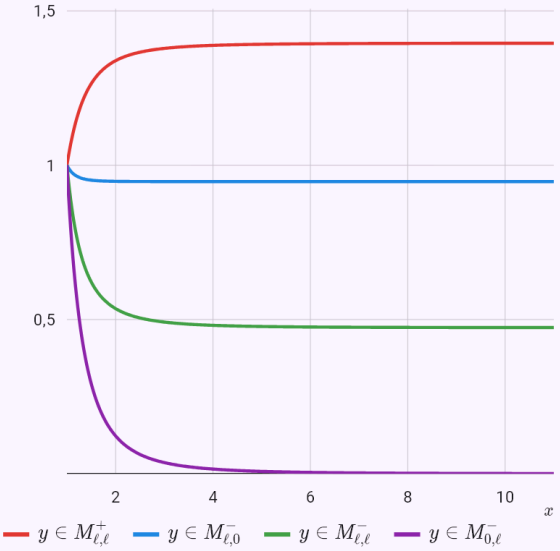
- Całka J_2: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak x^{-7} (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1

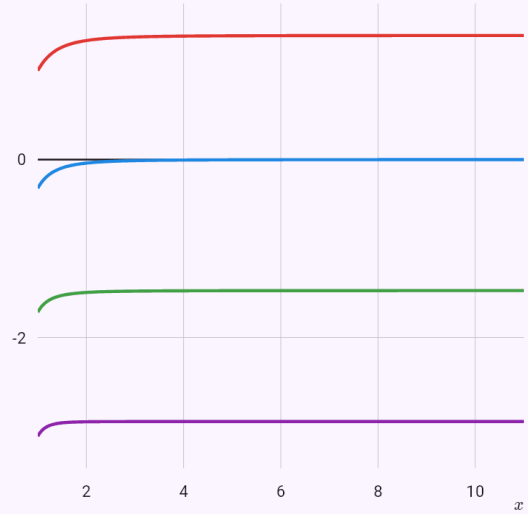
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Całki wyszły $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – to przypadek C_4 klasyfikacji (twierdzenie 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: rozwiązania rosnące ze skończonymi granicami y i quasi-pochodnej (twierdzenie 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: rozwiązania malejące, w których y i quasi-pochodna mają niezerowe granice (twierdzenie 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: rozwiązania malejące do niezerowej granicy, quasi-pochodna → 0 (twierdzenie 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: rozwiązania regularnie zanikające – y → 0, ale quasi-pochodna ma niezerową granicę; y maleje jak $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (twierdzenie 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – żadne rozwiązanie tego rodzaju (twierdzenie 3.1).
- Rozwiązania z M^- na wykresie znajdujemy numerycznie metodą strzałów: przy $y(1) = 1$ pozostają dodatnie i

malejące dla całego przedziału wartości początkowych quasi-pochodnej $y^{[1]}(1) \in \langle -3{,}1103;\ -0{,}3215 \rangle$, bo $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (twierdzenie 4). Końce przedziału i jego środek dają rozwiązania różnych klas.

Wykres





U góry numeryczne rozwiązania y(x) z niepustych klas (M^{+} z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} metodą strzałów); u dołu ich quasi-pochodne y^[1](x). Krzywa kończy się tam, gdzie |y| przekracza 10.

Równanie superliniowe – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (rozwiązanie √2/(x + √2)).

Input: `asymptotics(y'' = y^3)`

Wynik

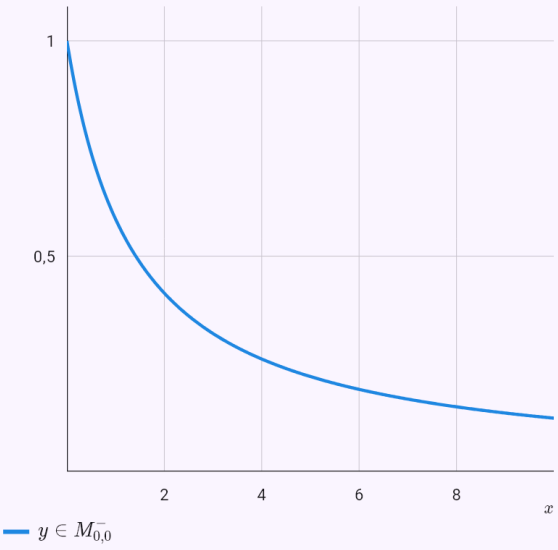
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

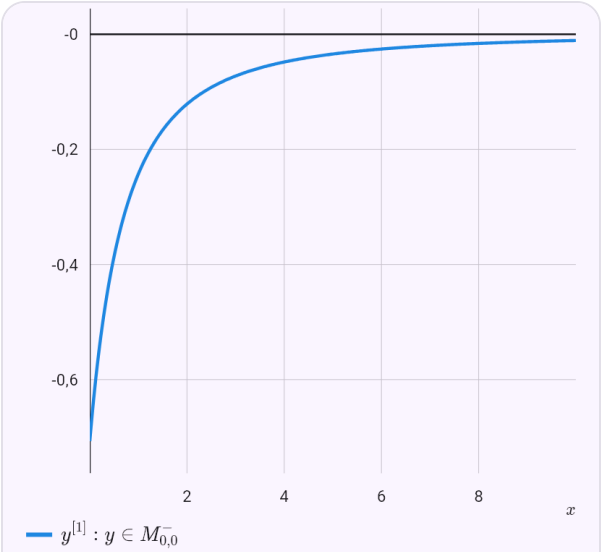
Kroki

- Badamy równanie typu Emdena–Fowlera $y'' = |y|^2 y$ na przedziale $\langle 0; \infty)$ z α = 1, β = 3, a = 1 > 0 i b = 1 > 0. Ponieważ β > α, równanie jest superliniowe. Ogólna postać równania to $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Zachowanie rozwiązania opisuje razem z y jego quasi-pochodna $y^{[1]} = y'$. Każde nietrywialne rozwiązanie określone aż do nieskończoności należy do jednej z dwóch klas: M^+ – y·y' > 0 od pewnego x i |y| rośnie – albo M^- – y·y' < 0 i |y| maleje. Klasy dzielą się według granic |y| i $|y^{[1]}|$ dla x → ∞: indeks ∞ (nieskończona), ℓ (skończona niezerowa) lub 0 (zero).
- Z twierdzenia 1 (Cecchi–Došlá–Marini) klasa M^- jest niepusta dla β > α. Niektóre rozwiązania jednak „wybuchają": |y| → ∞ już w skończonym punkcie, więc nie są określone aż do nieskończoności. Klasa M^+ może być pusta.
- Całka A: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak 1 (z dokładnością do dodatniej stałej). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Całka B: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak 1 (z dokładnością do dodatniej stałej). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Całka J_1: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak x (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- Całka $Y_2^{(\beta)}$: dla x → ∞ funkcja podcałkowa zachowuje się jak x^3 (z dokładnością do dodatniej stałej, z całką wewnętrzną zastąpioną jej zachowaniem asymptotycznym). Z kryterium porównawczego z $\int x^\mu\,dx$, która jest zbieżna dokładnie dla μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- Całka $Y_1^{(\beta)}$ jest rozbieżna, bo już całka wewnętrzna jest rozbieżna: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \varnothing$ – żadne rozwiązanie tego rodzaju (Kiguradze, cytowany w Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \varnothing$ – żadne rozwiązanie tego rodzaju (lemat 1).
- $M^-_{\ell,0} = \varnothing$ – żadne rozwiązanie tego rodzaju (lemat 2).
- $M^-_{0,\ell} = \varnothing$ – żadne rozwiązanie tego rodzaju (lemat 1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: rozwiązania silnie zanikające – y → 0 i $y^{[1]} \to 0$ (twierdzenie 1).

- Rozwiązanie z M^- na wykresie znajdujemy numerycznie metodą strzałów: szukamy wartości początkowej quasi-pochodnej, dla której rozwiązanie z $y(0) = 1$ na długim przedziale ani nie osiąga zera, ani nie zaczyna rosnąć – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Ta wartość jest jedyna, bo $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (twierdzenie 4).

Wykres





U góry numeryczne rozwiązania y(x) z niepustych klas (M^+ z $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- metodą strzałów); u dołu ich quasi-pochodne y^[1](x). Krzywa kończy się tam, gdzie |y| przekracza 10.

Znane ograniczenia

- Równania wymagającego wskazówki z zadania (innej niż z = ln y), nie da się jeszcze rozwiązać.
- Dla równania z parametrem (k, λ, ω) aplikacja nie rysuje wykresu i przyjmuje parametry jako dodatnie.
- Gdy rozwiązania nie da się wyrazić jawnie, pozostaje w postaci uwikłanej.
- Transformata Laplace'a nie zna jeszcze funkcji Heaviside'a, przesunięć i okresowych prawych stron.
- Gdy całek z uzmiennienia stałych nie da się wyrazić funkcjami elementarnymi (y″ + y′ + y = tg x), rozwiązanie zachowuje je jako całki; nie ma wtedy wykresu i nie stosuje się warunków początkowych.
- Układy tylko dwóch równań liniowych o stałych współczynnikach bez prawej strony; układy nieliniowe tylko w zastosowaniach (modelach).
- Równanie Riccatiego bez podanego rozwiązania szczególnego jest rozwiązywane tylko wtedy, gdy uda się odgadnąć jedno w prostej postaci – w przeciwnym razie aplikacja mówi, że jest potrzebne.
- Równanie Lagrange'a tylko bez warunku początkowego; dla równania Clairauta warunek wybiera proste (i obwiednię) przez punkt.
- Oscylacja tylko dla równań o współczynnikach liczbowych (k musi być liczbą); równanie półliniowe tylko z r = 1. Miejsca zerowe są liczone numerycznie na skończonym przedziale – o nieskończoności rozstrzygają tylko kryteria.

- Asymptotyka równania typu Emdena–Fowlera ($\beta \neq \alpha$) jest rozstrzygana tylko tam, gdzie mówią o tym cytowane twierdzenia – pozostałe klasy są oznaczone jako nierozstrzygnięte. Współczynniki a, b muszą być dodatnie; ich zachowanie w nieskończoności jest rozpoznawane dla iloczynów potęg, logarytmów i funkcji wykładniczych, w przeciwnym razie tylko dokładne całki przez Symja.

37. Rachunek wariacyjny

Aplikacja szuka ekstremali funkcjonału J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx z warunkami brzegowymi y(a), y(b): układa równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (z pochodnymi cząstkowymi w krokach), pokazuje całkę pierwszą funkcji podcałkowej bez y i rozwiązuje powstałe równanie różniczkowe solwerem równań różniczkowych z warunkami brzegowymi i sprawdzeniem. Zadanie jest też formularzem w dziedzinach Analiza matematyczna i Fizyka (Zastosowania).

Jeśli równanie nie ma rozwiązania w postaci zamkniętej, a F nie zależy od x, używa tożsamości Beltramiego i rozpoznaje znane ekstremale: brachistochronę (cykloidę, porównaną z prostą, z czasem zjazdu), krzywą łańcuchową i powierzchnię minimalną obrotową (dwie, jedna lub żadna krzywa łańcuchowa – rozwiązanie Goldschmidta), zagadnienie izoperymetryczne z mnożnikiem Lagrange'a (łuk okręgu o danej długości, wiszący łańcuch). Stałe są znajdowane numerycznie. Zasada najmniejszego działania zamienia lagranżjan w równanie ruchu, dla wahadła z sin θ ≈ θ. Interaktywne demo – wyścig kulek po brachistochronie – jest na mathtrace.app w sekcji „Wypróbuj sam".

Jak to wpisać

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	Funkcja podcałkowa i warunki brzegowe, oddzielone średnikami.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	Warunek ∫ G dx = L jako ostatnia pozycja.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Lagranżjan L = T − V i słowo action – równanie ruchu.

Przykłady

Najkrótsza droga między dwoma punktami to odcinek.

Input: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Wynik

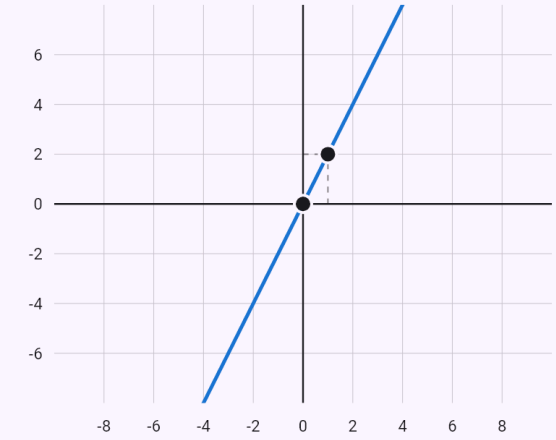
$$y = 2x$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum:
  $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, warunki brzegowe
  $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0:
  $-y'' = 0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od y – równanie Eulera–Lagrange'a ma całkę pierwszą: $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe:
- Prawa strona jest funkcją tylko zmiennej niezależnej – równanie całkujemy stopniowo: $y'' = 0$
- Całkujemy obie strony: $y' = \int 0\, dx = C_1$
- Całkujemy obie strony: $y = \int C_1\, dx = C_1 x + C_2$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd
  $C_1 = 2,\ C_2 = 0$
  $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $y = 2x$

Wykres

Rozwiązania | Płaszczyzna fazowa



$y = 2x$

Wyróżnione rozwiązanie spełnia warunki, punkty to zadane wartości.

Własne wartości stałych

C₁ | C₂ | + Dodaj krzywą

Dotknij wykresu i ustaw nachylenie suwakiem – zostanie narysowane rozwiązanie przechodzące przez ten punkt z tym nachyleniem stycznej.

Równanie Eulera–Lagrange'a y'' = y z warunkami brzegowymi.

Input: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Wynik

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, warunki brzegowe $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe:
- Równanie liniowe o stałych współczynnikach: $y'' - y = 0$
- Szukamy rozwiązań y = e^(λx); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λx) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^{x}$
- Rozwiązanie ogólne: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

Brachistochrona – cykloida z A [0; 0] do B [2; 1], zjazd 0,806 s wobec 1,010 s po prostej.

Input: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

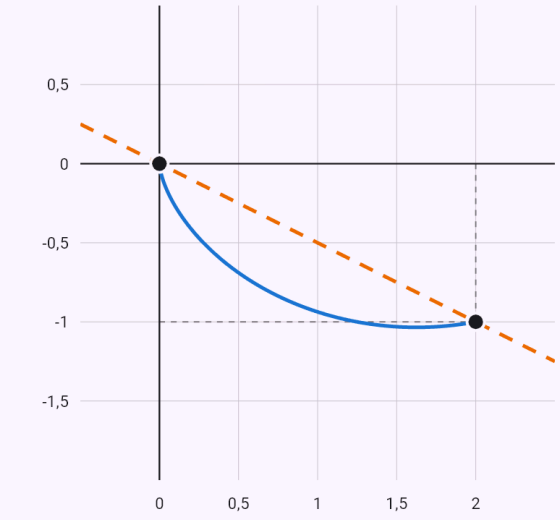
Wynik

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, warunki brzegowe $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x – zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Tożsamość Beltramiego daje y·(1 + y'²) = const. Rozwiązaniem jest cykloida – krzywa zakreślana przez punkt toczącego się okręgu (oś y skierowana w dół, start ze spoczynku w A): $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Stałe z punktu końcowego B (θ_B numerycznie bisekcją) $\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$
- Wartość funkcjonału: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; wzdłuż prostej $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Dla J = ∫ ds/v z v = √(2gy) J jest czasem zjazdu: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s
- θ_B > π – najszybsza droga schodzi poniżej poziomu B, a potem wznosi się do B.

Wykres



$x(\theta),\ y(\theta)$
$y = 0{,}5x$

Oś y jest skierowana w dół – tor biegnie poniżej punktu A. Linią ciągłą cykloida (najszybszy zjazd), przerywaną prosta do porównania.

Powierzchnia minimalna obrotowa między dwoma pierścieniami – dwie krzywe łańcuchowe, płytsza

jest minimum.

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

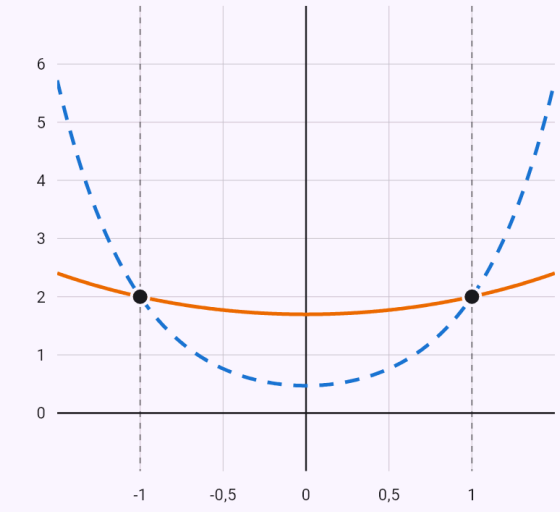
Wynik

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min}\approx 3{,}814$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y]=\int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, warunki brzegowe $y(-1)=2,\quad y(1)=2$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x) $\frac{\partial F}{\partial y}=\sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{}{\sqrt{(y}$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy''+y'^2+1\right)=0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x − zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}}=C_1$
- Tożsamość Beltramiego daje krzywą łańcuchową (cosinus hiperboliczny): $y=C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Warunki brzegowe spełniają dwie krzywe łańcuchowe (numerycznie). Minimum to ta o mniejszym J − płytsza; głębsza jest tylko stacjonarna. $C\approx 0{,}4702,\ x_0\approx 0,\ J\approx 4{,}358;\quad C\approx 1{,}697,\ x_0\approx 0,$

Wykres



$C\approx 0{,}4702$
$C\approx 1{,}697,\ J_{min}$

Ekstremala między danymi punktami; linią przerywaną drugie rozwiązanie lub krzywa do porównania.

Pierścienie daleko od siebie – brak krzywej łańcuchowej (rozwiązanie Goldschmidta).

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Wynik

Brak rozwiązań.

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y]=\int_{-2}^{2}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, warunki brzegowe $y(-2)=1,\quad y(2)=1$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x) $\frac{\partial F}{\partial y}=\sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{}{\sqrt{(y}$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy''+y'^2+1\right)=0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x − zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}}=C_1$
- Tożsamość Beltramiego daje krzywą łańcuchową (cosinus hiperboliczny): $y=C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Przez oba punkty nie przechodzi żadna krzywa łańcuchowa − pierścienie są za małe względem swojej odległości. Powierzchnią minimalną są wtedy tylko dwa koła i oś między nimi (rozwiązanie Goldschmidta); nie ma gładkiej ekstremali.

Największe pole pod krzywą długości π – półokrąg.

Input: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Wynik

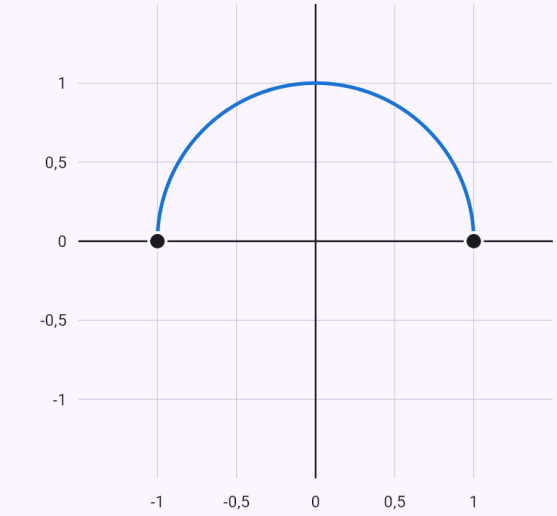
$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, warunki brzegowe $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Zagadnienie izoperymetryczne z warunkiem $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: dołączamy go mnożnikiem Lagrange'a λ i szukamy ekstremum funkcjonału z funkcją podcałkową $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x – zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C_1: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Tożsamość Beltramiego dla F + λG daje okrąg – łuk o promieniu |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Stałe z długości łuku i cięciwy, kąt środkowy 2α (numerycznie)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Wykres



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

Ekstremala między danymi punktami; linią przerywaną drugie rozwiązanie lub krzywa do porównania.

Wiszący łańcuch długości 3 – krzywa łańcuchowa z mnożnikiem Lagrange'a.

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Wynik

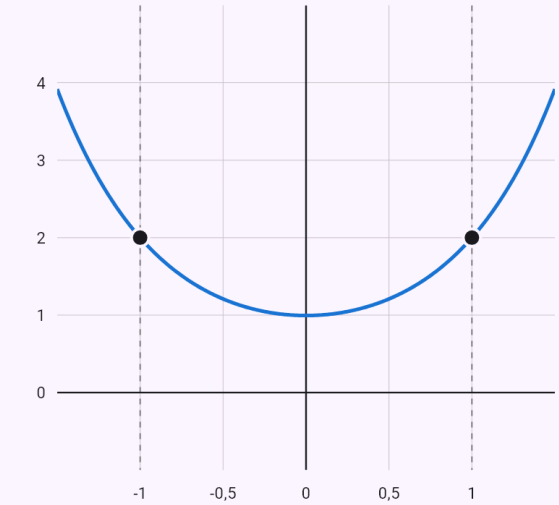
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$$

Kroki

- Szukamy funkcji, dla której funkcjonał ma ekstremum: $J[y] = \int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, warunki brzegowe $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Zagadnienie izoperymetryczne z warunkiem $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{y'^2+1}\right)dx = 3$: dołączamy go mnożnikiem Lagrange'a λ i szukamy ekstremum funkcjonału z funkcją podcałkową $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- Równanie Eulera–Lagrange'a ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x – zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Tożsamość Beltramiego dla F + λG daje krzywą łańcuchową przesuniętą o λ: $y = c + C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Stałe z długości łańcucha i warunków brzegowych (numerycznie)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Wykres



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$

Ekstremala między danymi punktami; linią przerywaną drugie rozwiązanie lub krzywa do porównania.

Zasada najmniejszego działania – sprężyna, równanie ruchu m x'' + k x = 0.

Input: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Wynik

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Kroki

- Zasada najmniejszego działania: ruch czyni działanie stacjonarnym: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- Równanie Eulera–Lagrange'a lagranżjanu jest równaniem ruchu: $-kx - mx'' = 0$
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe:
- Równanie liniowe o stałych współczynnikach:
  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Szukamy rozwiązań x = e^(λt); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λt) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego:
  $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- Rozwiązanie ogólne
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Wahadło – sin θ ≈ θ dla małych wychyleń.

Input: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Wynik

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Kroki

- Zasada najmniejszego działania: ruch czyni działanie stacjonarnym: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Pochodne cząstkowe funkcji podcałkowej względem y i y' oraz pochodna zupełna względem x (zarówno y, jak i y' zależą od x)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- Równanie Eulera–Lagrange'a lagranżjanu jest równaniem ruchu: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- Funkcja podcałkowa nie zależy od x – zachodzi tożsamość Beltramiego F − y'·∂F/∂y' = C₁:
  $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- Równanie z sin θ nie ma rozwiązania elementarnego. Dla małych wychyleń sin θ ≈ θ daje równanie drgań harmonicznych: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe:
- Równanie liniowe o stałych współczynnikach:
  $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Szukamy rozwiązań \theta = e^(λt); po podstawieniu i podzieleniu przez e^(λt) otrzymujemy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego:
  $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Każdy pierwiastek λ daje rozwiązanie e^(λx), pierwiastek k-krotny także x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), a para α ± βi rozwiązania e^(αx)·cos βx i e^(αx)·sin βx. Układ fundamentalny
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- Rozwiązanie ogólne
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Znane ograniczenia

- Jedna niewiadoma funkcja i najwyżej jej pierwsza pochodna w funkcji podcałkowej; funkcjonały kilku funkcji lub z y'' jeszcze nie.
- Znane ekstremale (cykloida, krzywa łańcuchowa, łuk okręgu) są rozpoznawane po postaci funkcji podcałkowej; inne równania nieliniowe pozostają jako równanie Eulera–Lagrange'a.
- Brachistochrona startuje ze spoczynku – punkt startowy musi mieć $y(a) = 0$, a oś y jest skierowana w dół.

38. Równania różniczkowe cząstkowe

Równanie wpisz z indeksami u_t, u_xx, u_xy (ze zdjęcia aplikacja odczyta też ∂u/∂t i ∂²u/∂x²), laplasjan jako Δu; warunki i obszar oddzielone średnikiem. Bez warunków aplikacja znajduje typ liniowego równania drugiego rzędu (eliptyczne, paraboliczne, hiperboliczne – według obszaru dla zmiennych współczynników), równanie charakterystyk, postać kanoniczną i, bez wyrazów niższego rzędu, rozwiązanie ogólne. Równanie pierwszego rzędu a·u_x + b·u_y + c·u = f rozwiązuje metodą charakterystyk ze sprawdzeniem.

Z warunkami brzegowymi i początkowymi rozwiązuje metodą rozdzielenia zmiennych równanie przewodnictwa u_t = k·u_xx i równanie falowe u_tt = c²·u_xx na przedziale (końce w stałej temperaturze lub izolowane, wartości niezerowe przez stan ustalony) oraz równanie Laplace'a na prostokącie i w kole (lub na zewnątrz). Współczynniki Fouriera wychodzą jako wzór w n; funkcja początkowa będąca sumą funkcji własnych daje sumę skończoną. Na całej prostej używa wzoru d'Alemberta i transformaty Fouriera (jądro ciepła), na półprostej x > 0 transformaty Laplace'a względem czasu. Radzi sobie też ze źródłem f(x, t) (zasada Duhamela), strumieniem ciepła na końcu, wartościami brzegowymi zmiennymi w czasie i dla równania Laplace'a pochodnymi na bokach. Z równań nieliniowych rozwiązuje równanie Burgersa – metodą charakterystyk do powstania fali uderzeniowej, z lepkością transformacją Cole'a-Hopfa; równanie falowe na prostej jest pokazane też transformatą Fouriera. Równanie Poissona Δu = f na prostokącie rozwiązuje podwójnym szeregiem Fouriera (źródło jako suma iloczynów p(x)·q(y)); gdy na wszystkich czterech bokach dana jest pochodna, sprawdza warunek rozwiązywalności, a rozwiązanie wychodzi z dokładnością do stałej. Równania o zmiennych współczynnikach αx²u_xx + βxu_x przechodzą w zagadnienie Sturma–Liouville'a z wagą.

Numerycznie na siatce ze schematem jako nagłówkiem, jak przy innych metodach numerycznych: równanie przewodnictwa jawnie (ftcs), niejawnie (btcs), schematem Cranka-Nicolson (cranknicolson) i θ-metodą (theta) – układy niejawne algorytmem Thomasa, z analizą stabilności von Neumanna; równanie transportu schematami upwind, laxwendroff i leapfrog z warunkiem CFL, równanie falowe schematem leapfrog; równanie Laplace'a (Poissona) schematem pięciopunktowym i iteracjami jacobi, gaussseidel i sor z porównaniem liczby iteracji. Nazwane wartości: h krok przestrzenny, k krok czasowy, to czas końcowy, theta, omega, tol, max. Równanie przewodnictwa jest też formularzem w Metodach numerycznych. Ciepło w 2D na prostokącie rozwiązują schematy ftcs i adi (kierunki naprzemienne), równanie Laplace'a także gradienty sprzężone (cg), metoda wielosiatkowa (multigrid) i elementy skończone z trójkątami (fem); równanie Burgersa schemat Godunowa (upwind). Równania transportu i Laplace'a są też formularzami w dziedzinie Metody numeryczne, zastosowania (pręt, struna, bęben, dyfuzja) formularzami w fizyce i chemii. Dla praw zachowania są schematy laxfriedrichs i muscl (z limiterem minmod) – dla równania transportu i Burgersa, tego ostatniego także z lepkością (w porównaniu z transformacją Cole'a–Hopfa). Metoda elementów skończonych (fem) działa też na

ogólnym wielokącie danym wierzchołkami, polygon = (0,0), (2,0), …, z wartością brzegową u = …; siatka powstaje przez odcinanie uszu i dzielenie trójkątów. Ciepło w płycie jest formularzem w fizyce.

Wynikiem jest wykres u(x, t): krzywa w czasie z suwakiem i przyciskiem odtwarzania oraz powierzchnia 3D do obracania; rozwiązanie numeryczne ma dokładne linią przerywaną. Stacjonarne u(x, y) równania Laplace'a to powierzchnia 3D.

Jak to wpisać

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	Równanie, warunki brzegowe i początkowe; pochodna w warunku jako u_t(x,0) lub u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Obszar: x ∈ ℝ, x > 0 lub 0 < x < π; bez warunków brzegowych cała prosta.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	Równanie Laplace'a w kole: Δu, promień r i kąt φ (lub θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numerycznie: schemat jako nagłówek, kroki h i k oraz czas końcowy to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Ciepło w 2D: u(x,y,t), warunki typu u(x,y,0) = … i u(0,y,t) = …; boki bez warunku mają 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Elementy skończone na wielokącie: wierzchołki po polygon =, wartość brzegowa u = …, najdłuższa krawędź h.

Przykłady

Równanie hiperboliczne – charakterystyki, postać kanoniczna u_ξη = 0 i rozwiązanie ogólne.

Input: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Wynik

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Współczynniki drugich pochodnych w postaci $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Wyróżnik: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, równanie jest hiperboliczne (jak równanie falowe): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- Równanie charakterystyk: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Dwie rzeczywiste rodziny charakterystyk: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nowe zmienne wzdłuż charakterystyk: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Po zamianie zmiennych (reguła łańcuchowa) otrzymujemy postać kanoniczną: $u_{\xi\eta} = 0$
- Równanie u_ξη = 0 całkujemy dwukrotnie – rozwiązanie ogólne z dwiema dowolnymi funkcjami $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

Równanie Tricomiego – typ według obszaru.

Input: `y u_xx + u_yy = 0`

Wynik

$$D = -y$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Współczynniki drugich pochodnych w postaci $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Wyróżnik zależy od położenia: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Typ według obszaru – hiperboliczne dla $y < 0$, paraboliczne dla $y = 0$, eliptyczne dla $y > 0$
- Równanie charakterystyk: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

Równanie transportu metodą charakterystyk – fala porusza się z prędkością 2.

Input: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Wynik

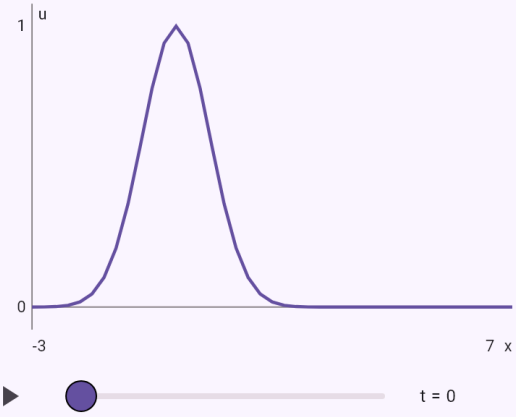
$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t + 2u_x = 0$
- Warunki: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Metoda charakterystyk: wzdłuż krzywych rozwiązujących układ równanie staje się równaniem różniczkowym zwyczajnym dla u.
  $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$
- Charakterystyki to krzywe, na których $x - 2t = \xi$ jest stałe.
- Wzdłuż charakterystyki rozwiązujemy równanie zwyczajne, jego wartość początkowa z warunku:
  $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$
- Sprawdzenie: po podstawieniu do równania lewa strona równa się prawej.
- Rozwiązanie: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Ciepło w pręcie z chłodzonymi końcami – szereg Fouriera.

Input: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Wynik

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(n$$

Kroki

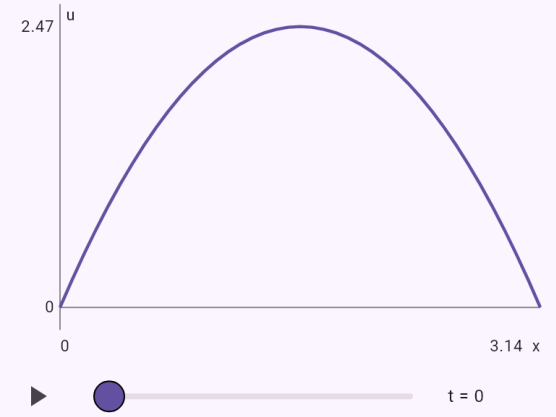
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = 4u_{xx}$
- Warunki: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu; po podstawieniu i podzieleniu zmienne się rozdzielają – obie strony muszą być równe tej samej stałej: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej: $T_n' = -4n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-4n^2 t} \sin(nx)$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części) $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$

- Rozwiązanie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Końce w różnych temperaturach – stan ustalony i odchylenie od niego.

Input: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Wynik

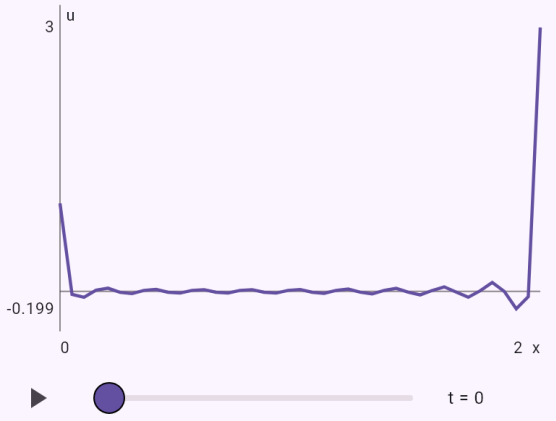
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = 2u_{xx}$
- Warunki: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Końce mają wartości niezerowe. Najpierw stan ustalony $w(x) = x + 1$ (równanie bez czasu, w" = 0), potem szukamy $u = w(x) + v(x,t)$; odchylenie v ma na końcach wartości zerowe.
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu; po podstawieniu i podzieleniu zmienne się rozdzielają – obie strony muszą być równe tej samej stałej:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej:
  $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- Rozwiązanie
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Szarpnięta struna – fale stojące.

Input: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Wynik

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t) \; s$$

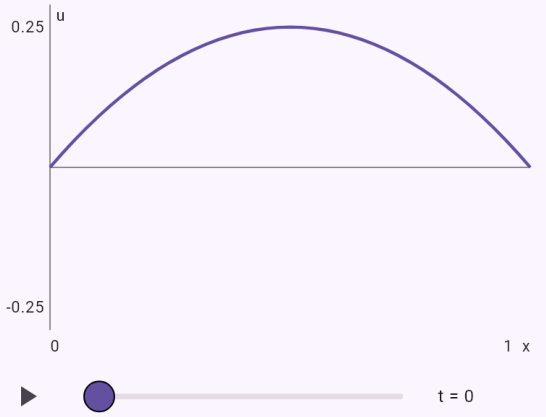
Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe
  $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Warunki:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, równanie jest hiperboliczne (jak równanie falowe):
  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu – fal stojących; obie strony są równe tej samej stałej:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – drgania z własną częstotliwością:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja)
  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części)
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\, \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- Rozwiązanie
  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Równanie Laplace’a na prostokącie z jednym ogrzewanym bokiem.

Input: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Wynik

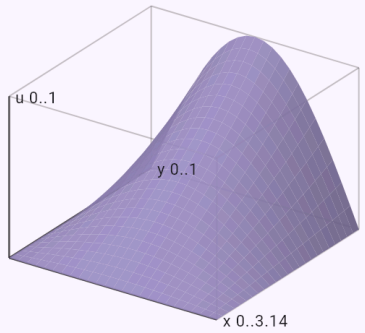
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Warunki: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, równanie jest eliptyczne (jak równanie Laplace’a): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Bok z wartościami niezerowymi (pozostałe mają u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Drugie równanie Y" = λY, zero na przeciwległym boku, przeskalowane do 1 na danym: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- Funkcja początkowa (brzegowa) jest już sumą funkcji własnych, więc tylko kilka współczynników $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, \sin(nx)\,\mathrm{d}x$ jest niezerowych: $c_1 = 1$, pozostałe są zerowe.

- Rozwiązanie: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Równanie Laplace’a w kole – skończona suma harmonicznych.

Input: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

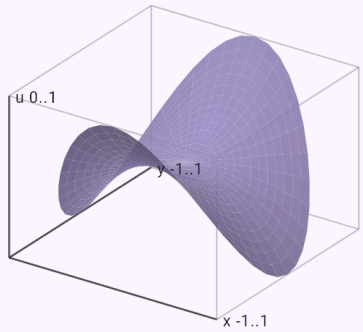
Wynik

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Warunki: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, równanie jest eliptyczne (jak równanie Laplace’a):
  $\Delta u = 0$
- Rozdzielenie zmiennych we współrzędnych biegunowych:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi): \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- Kąt wraca po obrocie, Φ musi być okresowa:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – rozwiązania
  $\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \quad n = 0,1,2,\ldots$
- Część radialna to równanie Eulera; wewnątrz koła rozwiązanie musi być ograniczone (r^{-n} i $\ln r$ odpadają):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Współczynniki Fouriera funkcji brzegowej:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- Funkcja początkowa (brzegowa) jest już sumą funkcji własnych, więc tylko kilka współczynników $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ jest niezerowych:
  $a_2 = -\frac{1}{2}$, pozostałe są zerowe.
- Wszystkie współczynniki są zerowe:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- Rozwiązanie: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Wzór d’Alemberta – impuls początkowy dzieli się na dwie fale.

Input: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Wynik

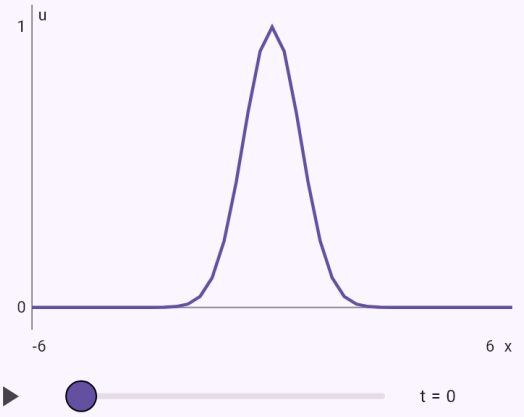
$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{tt} = u_{xx}$
- Warunki: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, równanie jest hiperboliczne (jak równanie falowe): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Rozwiązanie ogólne równania falowego to dwie fale biegnące z prędkością c w lewo i w prawo: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- To samo transformatą Fouriera względem x: każda częstość ω drga sama. Mnożenie przez e^(±icωt) oznacza przesunięcie o ∓ct, więc transformata odwrotna daje – wzór d’Alemberta.
- Warunki początkowe u = f i u_t = g dają wzór d’Alemberta: $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Sprawdzenie: po podstawieniu do równania lewa strona równa się prawej.
- Rozwiązanie: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Transformata Fouriera na całej prostej – profil Gaussa się rozszerza.

Input: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Wynik

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

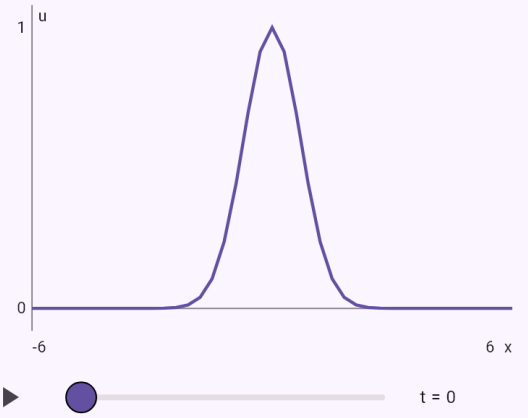
Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = u_{xx}$
- Warunki: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na całej prostej stosujemy transformatę Fouriera względem x – pochodna u_xx staje się mnożeniem przez −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Dla każdego ω zostaje równanie zwyczajne w czasie
  $$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$$
- Transformata odwrotna iloczynu to splot z jądrem ciepła (krzywą Gaussa rozszerzającą się w czasie)
  $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$$
- Splot dwóch krzywych Gaussa jest znowu krzywą Gaussa, tylko szerszą i niższą
  $$\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$
- Sprawdzenie: po podstawieniu do równania lewa strona równa się prawej.

- Rozwiązanie: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Transformata Laplace'a – ogrzewana półprzestrzeń, funkcja erfc.

Input: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

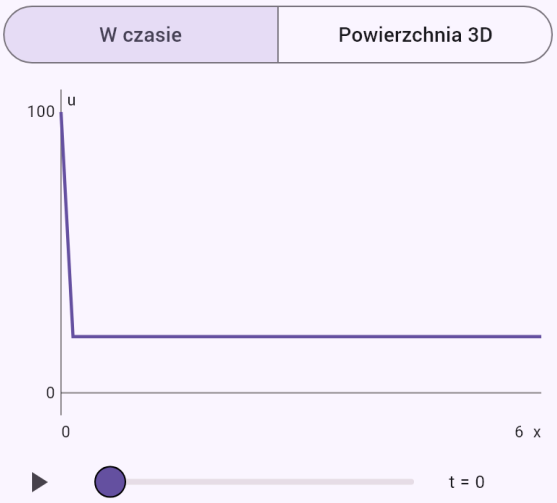
Wynik

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = 4u_{xx}$
- Warunki: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Na półprostej stosujemy transformatę Laplace'a względem czasu $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – pochodna u_t staje się sU − u(x, 0) i zostaje równanie zwyczajne względem x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Dla x → ∞ U musi pozostać ograniczone, rosnąca funkcja wykładnicza odpada: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; stała z warunku brzegowego: $U(0,s) = \frac{100}{s} \Rightarrow A(s) = \frac{80}{s}$
- Transformata odwrotna z tablic $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- Rozwiązanie: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Wykres



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Schemat jawny z r = 0,7 > 1/2 – niestabilny według von Neumanna.

Input: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Siatka: 11 węzłów w x, 143 kroków czasowych do t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r to krok czasowy przez kwadrat kroku przestrzennego).
- Schemat jawny (w przód w czasie, centralny w przestrzeni) – każda nowa wartość wprost z trzech starych: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Analiza von Neumanna: błąd rozkładamy na fale e^(iβx), każda jest w kroku mnożona przez wzmocnienie G: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. Stabilność wymaga $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – tutaj nie, błędy będą rosnąć wykładniczo.
- Pierwszy poziom czasowy

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

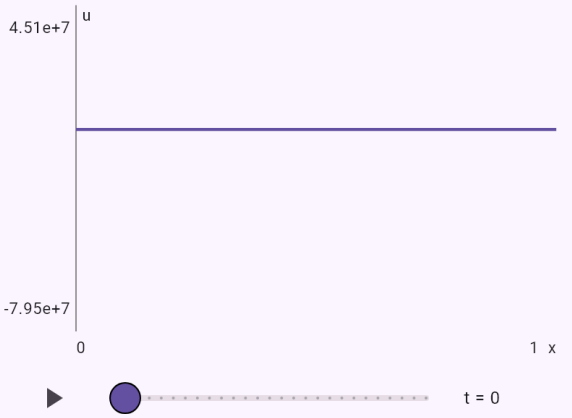
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- Na poziomie level.50 wartości wzrosły ponad wszelkie granice – schemat jest niestabilny, obliczenie przerwano.
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Schemat Cranka-Nicolson z algorytmem Thomasa.

Input: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Siatka: 11 węzłów w x, 10 kroków czasowych do t = 0,1; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r to krok czasowy przez kwadrat kroku przestrzennego).
- Schemat Cranka-Nicolson – średnia schematu jawnego i niejawnego, także w czasie drugiego rzędu $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Analiza von Neumanna: błąd rozkładamy na fale e^(iβx), wzmocnienie w kroku to $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; zawsze $|G| \le 1$, schemat jest stabilny dla dowolnego kroku (bezwarunkowo).
- Na każdym poziomie czasowym trzeba rozwiązać układ trójdiagonalny a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (wartości brzegowe po prawej stronie). Pierwszy poziom

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Układ algorytmem Thomasa – przebieg w przód i podstawianie wstecz

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

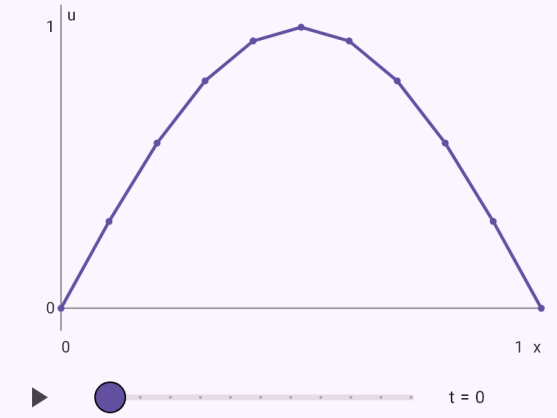
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,'
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,!
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,'
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,:

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (dokładnie $0{,}372708$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Kropki: rozwiązanie numeryczne w węzłach siatki; linia przerywana: rozwiązanie dokładne. Suwak wybiera poziom czasowy.

Schemat Laxa-Wendroffa dla równania transportu, warunek CFL.

Input: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016;`

```
to = 0.4)
```

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Siatka na $0 \le x \le 1$: 51 węzłów, 25 kroków czasowych do t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ to liczba Couranta.
- Rozwiązanie dokładne jest przenoszone wzdłuż charakterystyk $x - t = C$ z prędkością a = 1
- Schemat Laxa-Wendroffa – rozwinięcie Taylora do drugiego rzędu, u_tt zastąpione przez a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- Warunek CFL (numeryczny obszar zależności zawiera charakterystykę): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Analiza von Neumanna: błąd rozkładamy na fale e^(iβx), każda jest w kroku mnożona przez wzmocnienie G. Schemat jest stabilny, gdy |G| ≤ 1 dla wszystkich β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; zachodzi to, bo $|\nu| \le 1$
- Pierwszy poziom czasowy

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

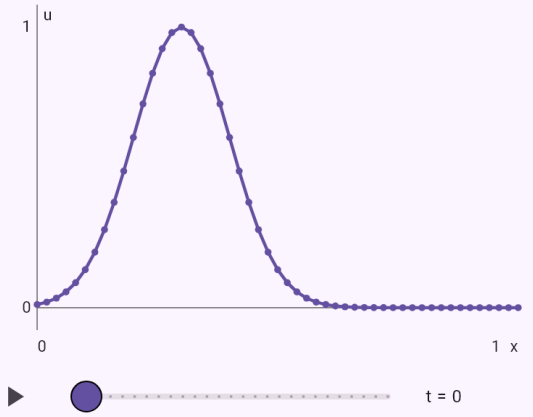
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (dokładnie $0{,}135335$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Kropki: rozwiązanie numeryczne w węzłach siatki; linia przerywana: rozwiązanie dokładne. Suwak wybiera poziom czasowy.

Schemat pięciopunktowy i SOR z optymalnym ω – w porównaniu z Jacobim i Gaussem-Seidlem.

Input: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Siatka kwadratowa: $h = 0{,}1$, 121 węzłów, z czego 81 niewiadomych wewnątrz.
- Schemat pięciopunktowy – u_xx + u_yy zastąpione różnicami, jedno równanie w każdym węźle: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Kolejna nadrelaksacja (SOR) – krok Gaussa-Seidla „przestrzelony” współczynnikiem ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Optymalny współczynnik relaksacji z promienia spektralnego iteracji Jacobiego $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Iteracje od zerowego przybliżenia wewnątrz (wybrane węzły i największa zmiana)

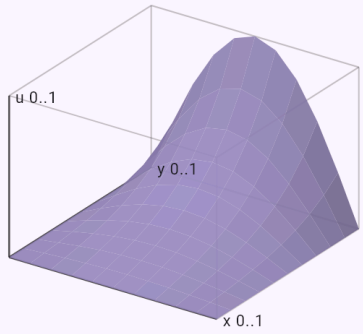
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- Iteracja zakończyła się po 20 krokach, gdy największa zmiana spadła poniżej 10^{-4}
- Metody na tej samej siatce z tą samą tolerancją: Jacobi 102 iteracji, Gauss-Seidel 61, SOR z ω = $1{,}528$ tylko 20
- Szybsze metody dla tego samego układu (81 niewiadomych): gradienty sprzężone 10 iteracji, metoda wielosiatkowa 5 cykli V. Liczba cykli V metody wielosiatkowej prawie nie zależy od gęstości siatki.
- Wartości w węzłach siatki

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}0028$ (dokładnie $0{,}199268$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Źródło ciepła zanikające w czasie – zasada Duhamela.

Input: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Wynik

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Kroki

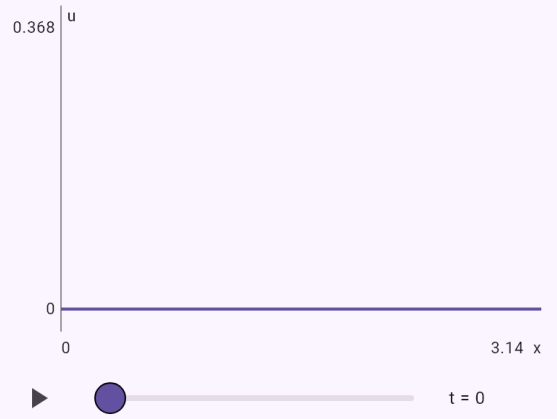
- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Warunki: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu; po podstawieniu i podzieleniu zmienne się rozdzielają – obie strony muszą być równe tej samej stałej: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Wszystkie współczynniki są zerowe: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Źródło $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ rozwijamy według funkcji własnych tak samo jak warunek początkowy: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, współczynniki przez całkę.
- Funkcja początkowa (brzegowa) jest już sumą funkcji własnych, więc tylko kilka współczynników $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ jest niezerowych: $f_1 = 1$, pozostałe są zerowe.
- Zasada Duhamela: każdy współczynnik szeregu spełnia liniowe równanie zwyczajne ze źródłem; rozwiązanie to swobodny zanik plus splot źródła z zanikiem

$$T_n' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- Źródło ma tylko skończenie wiele niezerowych współczynników, ich wkłady wychodzą dokładnie: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- Rozwiązanie: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Stałe źródło ciepła w pręcie – stan ustalony jest parabolą.

Input: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Wynik

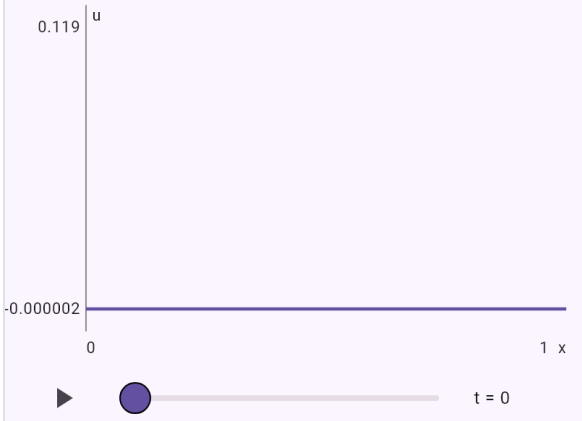
$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = u_{xx} + 1$
- Warunki: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Ani źródło, ani wartości brzegowe nie zależą od czasu. Najpierw znajdujemy stan ustalony – rozwiązanie równania bez pochodnej czasowej $w'' + 1 = 0$ z warunkami brzegowymi: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Szukamy $u = w(x) + v(x,t)$; odchylenie v ma zerowe warunki brzegowe i nie ma źródła.
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu; po podstawieniu i podzieleniu zmienne się rozdzielają – obie strony muszą być równe tej samej stałej: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi x)$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części) $c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$
- Rozwiązanie $u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Izolowany pręt z ciepłem wpływającym na jednym końcu – średnia temperatura rośnie liniowo.

Input: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Wynik

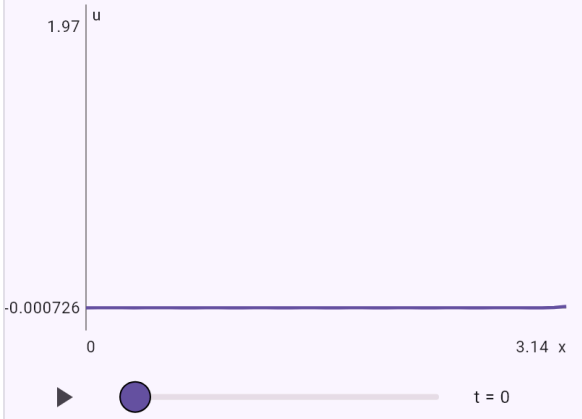
$$u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = u_{xx}$
- Warunki: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, równanie jest paraboliczne (jak równanie przewodnictwa ciepła): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Oba końce są izolowane, ale do pręta wpływa ciepło (strumień na końcach lub źródło). Nie ma stanu ustalonego – średnia temperatura rośnie z szybkością $R = \frac{1}{\pi}$. Szukamy $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, gdzie W spełnia równanie bez pochodnej czasowej: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu; po podstawieniu i podzieleniu zmienne się rozdzielają – obie strony muszą być równe tej samej stałej: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X' = 0 na obu końcach (końce izolowane) ma rozwiązania $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja): $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części): $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Rozwiązanie $u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Struna potrząsana na końcu z jej własną częstotliwością – rezonans, amplituda rośnie z t.

Input: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Wynik

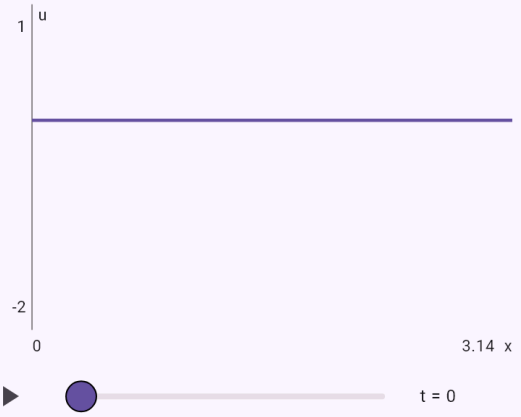
$$u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{tt} = u_{xx}$
- Warunki: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, równanie jest hiperboliczne (jak równanie falowe): $D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 1$
- Wartości brzegowe zmieniają się w czasie. Wybieramy funkcję $w(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ spełniającą warunki brzegowe i szukamy $u = w + v$. Odchylenie v ma zerowe warunki brzegowe, ale jego równanie zyskuje źródło: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x \sin t}{\pi}$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu – fal stojących; obie strony są równe tej samej stałej: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Część czasowa dla każdego n – drgania z własną częstotliwością: $T_n'' + n^2 T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$
- Równanie jest liniowe – suma rozwiązań jest rozwiązaniem (superpozycja): $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \sin(nx)$
- Wszystkie współczynniki są zerowe: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części) $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$
- Źródło $F(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ rozwijamy według funkcji własnych tak samo jak warunek początkowy: $F_n(t) = f_n \sin t$, współczynniki przez całkę.
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części) $f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Zasada Duhamela: każdy współczynnik szeregu to drgania wymuszone – oscylator z własną częstością i siłą zewnętrzną F_n(t). Rozwiązanie to drgania swobodne plus splot siły z odpowiedzią impulsową sin(ω_n t)/ω_n $T_n'' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(n$
- Całkę obliczamy ogólnie dla każdego n (K_n to jądro z poprzedniego kroku); tam, gdzie wzór ogólny dzieliłby przez zero (rezonans), osobno $\int_0^t K_n(t-s)\, \sin s\, \mathrm{d}s = \frac{n \sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- Rozwiązanie $u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt)\, \sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Równanie Laplace’a z izolowanym dolnym bokiem (u_y = 0) – cosh zamiast sinh.

Input: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Wynik

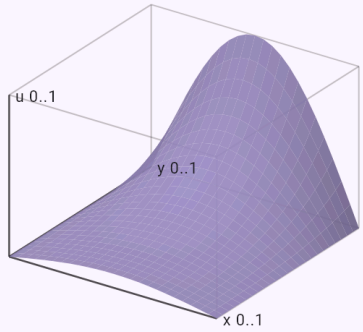
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Warunki: $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, równanie jest eliptyczne (jak równanie Laplace’a): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Bok z wartościami niezerowymi (pozostałe mają u = 0): $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X = 0 na obu końcach ma niezerowe rozwiązania tylko dla $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Drugie równanie Y'' = λY z zerową pochodną na przeciwległym (izolowanym) boku – stąd cosh –, unormowane do 1 na danym boku: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- Funkcja początkowa (brzegowa) jest już sumą funkcji własnych, więc tylko kilka współczynników $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ jest niezerowych: $c_1 = 1$, pozostałe są zerowe.

- Rozwiązanie: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Równanie Burgersa – charakterystyki się przecinają i powstaje fala uderzeniowa.

Input: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

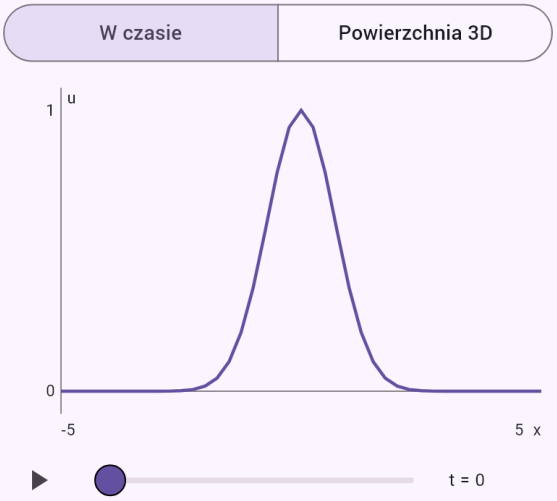
Wynik

$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t + uu_x = 0$
- Warunki: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Równanie Burgersa jest nieliniowe – prędkością propagacji jest samo u. Wzdłuż charakterystyk u jest stałe, więc charakterystyki są prostymi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- Rozwiązanie jest dane w postaci uwikłanej przez $u = f(x - ut)$ – dla każdego punktu szukamy x_0, którego charakterystyka do niego prowadzi.
- Tam, gdzie f maleje, szybsza część fali dogania wolniejszą, a charakterystyki się przecinają. Pierwsze przecięcie następuje w chwili $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ – powstaje fala uderzeniowa, a gładkie rozwiązanie przestaje istnieć.
- Rozwiązanie (w postaci uwikłanej, dopóki nie powstanie fala uderzeniowa): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Wykres



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Równanie Burgersa z lepkością – transformacja Cole'a-Hopfa w równanie przewodnictwa.

Input: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Wynik

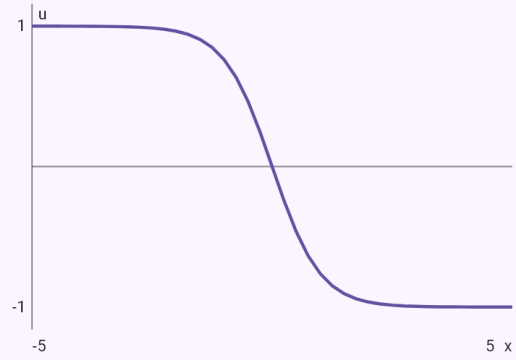
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Warunki: $u(x,0) = -\tanh x$
- Przy lepkości v > 0 transformacja Cole'a-Hopfa linearyzuje równanie: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – równanie Burgersa przechodzi w równanie przewodnictwa ciepła.
- Warunek początkowy dla φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- Równanie przewodnictwa rozwiązuje splot z jądrem ciepła; po podstawieniu u jest ilorazem dwóch całek, obliczanych dla wykresu numerycznie $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}}{\int K}$
- Całka nie ma postaci elementarnej – rozwiązanie pozostaje splotem, wykres jest obliczany numerycznie: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Schemat Godunowa – fala uderzeniowa porusza się z prędkością 1/2.

Input: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Wynik

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Siatka: 61 węzłów, 25 kroków czasowych; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Falę uderzeniową obsługuje konserwatywny schemat Godunowa – strumień F między komórkami z dokładnego rozwiązania zagadnienia Riemanna (skoku)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

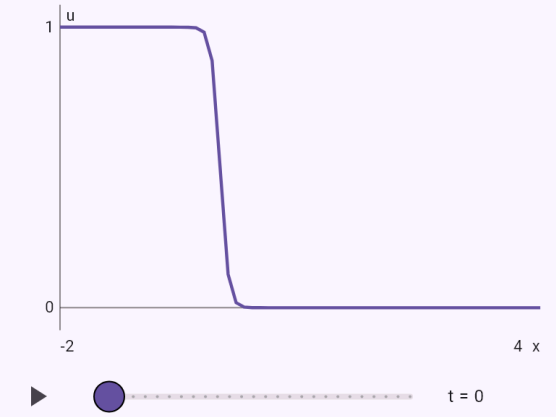
- Warunek CFL (numeryczny obszar zależności zawiera charakterystykę): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- Spadek z u_L do u_R < u_L wędruje jako fala uderzeniowa z prędkością z warunku Rankine'a-Hugoniota: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x = -2$	$x = -1{,}4$	$x = -0{,}8$	$x = -0,$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Wynik w środkowym węźle: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Ciepło w kwadratowej płycie metodą ADI – stabilna nawet dla dużego kroku.

Input: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h = 0.1;`

k = 0.01; T = 0.1)

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Siatka: 121 węzłów, 10 kroków czasowych (stosunki kroku czasowego do kwadratów kroków przestrzennych).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- Metoda kierunków naprzemiennych (ADI) Peacemana i Rachforda: pół kroku jest niejawne w x i jawne w y, druga połowa odwrotnie

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Analiza von Neumanna: obie połowy kroku razem mają wzmocnienie dla dowolnego kroku – ADI jest bezwarunkowo stabilna.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- W pierwszej połowie kroku rozwiązujemy 9 układów trójdiagonalnych wzdłuż wierszy siatki, w drugiej 9 wzdłuż jej kolumn – każdy algorytmem Thomasa. To dużo taniej niż jeden duży układ dla całej siatki.
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

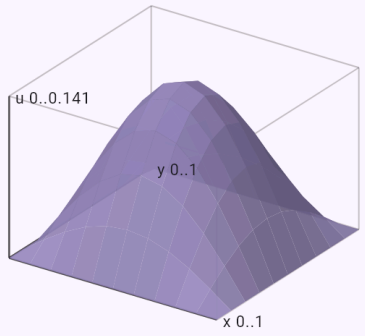
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	1,000000	1,000000
0,01	0,822069	0,822069
0,02	0,675798	0,675798
0,03	0,555553	0,555553
0,04	0,456703	0,456703
0,05	0,375442	0,375442
0,06	0,308639	0,308639
0,07	0,253723	0,253723
0,08	0,208578	0,208578
0,09	0,171465	0,171465
0,1	0,140956	0,140956

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie (dokładnie $0{,}138911$ w środku).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Równanie Laplace'a gradientami sprzężonymi – w porównaniu z SOR i metodą wielosiatkową.

Input: cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =

```
0.125)
```

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Siatka kwadratowa: $h = 0{,}125$, 81 węzłów, z czego 49 niewiadomych wewnątrz.
- Schemat pięciopunktowy – u_xx + u_yy zastąpione różnicami, jedno równanie w każdym węźle: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Metoda gradientów sprzężonych – układ −Δ$_h$u = −f jest symetryczny i dodatnio określony; każdy krok zmniejsza błąd wzdłuż nowego kierunku p_k, sprzężonego z poprzednimi

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$$

- Iteracje od zerowego przybliżenia wewnątrz (wybrane węzły i największa zmiana)

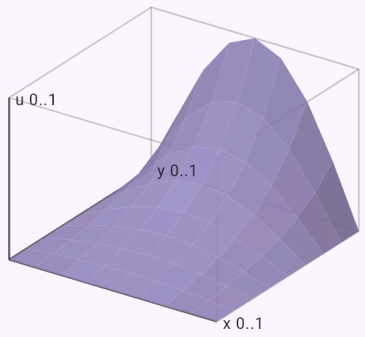
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- Iteracja zakończyła się po 8 krokach, gdy największa zmiana spadła poniżej 10^{-4}
- Metody na tej samej siatce z tą samą tolerancją: Jacobi 71 iteracji, Gauss-Seidel 42, SOR z ω = $1{,}446$ tylko 16
- Szybsze metody dla tego samego układu (49 niewiadomych): gradienty sprzężone 8 iteracji, metoda wielosiatkowa 5 cykli V. Liczba cykli V metody wielosiatkowej prawie nie zależy od gęstości siatki.
- Wartości w węzłach siatki

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j} \rvert \approx 0{,}00432$ (dokładnie $0{,}199268$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Równanie Poissona metodą wielosiatkową – kilka cykli V na gęstej siatce.

Input: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Siatka kwadratowa: $h = 0{,}0625$, 289 węzłów, z czego 225 niewiadomych wewnątrz.
- Schemat pięciopunktowy – u_xx + u_yy zastąpione różnicami, jedno równanie w każdym węźle

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Metoda wielosiatkowa (cykl V): iteracja Gaussa-Seidla szybko tłumi tylko szybko zmienną część błędu (S² – dwa przebiegi). Gładka reszta r idzie na rzadszą siatkę 2h, tam jest korygowana (znowu metodą wielosiatkową), a korekta jest interpolowana z powrotem

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Iteracje od zerowego przybliżenia wewnątrz (wybrane węzły i największa zmiana)

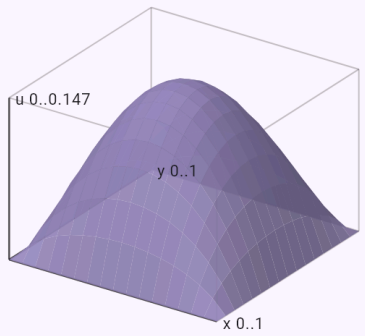
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- Iteracja zakończyła się po 4 krokach, gdy największa zmiana spadła poniżej 10^{-4}
- Metody na tej samej siatce z tą samą tolerancją: Jacobi 179 iteracji, Gauss-Seidel 108, SOR z ω = $1{,}674$ tylko 25
- Szybsze metody dla tego samego układu (225 niewiadomych): gradienty sprzężone 15 iteracji, metoda wielosiatkowa 4 cykli V. Liczba cykli V metody wielosiatkowej prawie nie zależy od gęstości siatki.
- Wartości w węzłach siatki

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (dokładnie $0{,}147342$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Metoda elementów skończonych z trójkątami – macierz sztywności i ten sam układ co schemat

pięciopunktowy.

Input: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Siatka kwadratowa: $h = 0{,}25$, 25 węzłów, z czego 9 niewiadomych wewnątrz.
- Metoda elementów skończonych: równanie mnożymy przez funkcję testową v i całkujemy przez części (sformułowanie słabe); rozwiązania szukamy jako kombinacji funkcji „daszków" φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Siatka: każdą komórkę dzieli przekątna na dwa trójkąty prostokątne – 32 trójkątów, 25 węzłów, z czego 9 niewiadomych.
- Macierz sztywności jednego trójkąta (gradienty funkcji liniowych są na nim stałe)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\,\nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0{,} \\ -0{,} \end{pmatrix}$$

- Zsumowanie wkładów sześciu trójkątów wokół węzła wewnętrznego daje jego równanie – na regularnej siatce jest to schemat pięciopunktowy pomnożony przez h_x·h_y

$$4{,}0000\,u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + u$$

- Metoda gradientów sprzężonych – układ $-\Delta_h u = -f$ jest symetryczny i dodatnio określony; każdy krok zmniejsza błąd wzdłuż nowego kierunku p_k, sprzężonego z poprzednimi

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_j$$

- Iteracje od zerowego przybliżenia wewnątrz (wybrane węzły i największa zmiana)

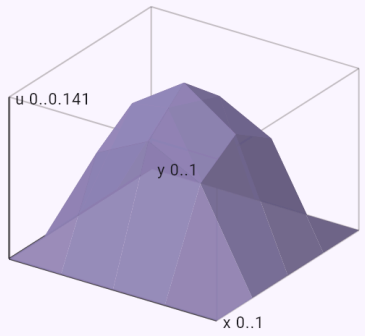
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- Iteracja zakończyła się po 4 krokach, gdy największa zmiana spadła poniżej 10^{-4}
- Metody na tej samej siatce z tą samą tolerancją: Jacobi 19 iteracji, Gauss-Seidel 11, SOR z ω = 1,172 tylko 8
- Szybsze metody dla tego samego układu (9 niewiadomych): gradienty sprzężone 4 iteracji, metoda wielosiatkowa 3 cykli V. Liczba cykli V metody wielosiatkowej prawie nie zależy od gęstości siatki.
- Wartości w węzłach siatki

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (dokładnie $0{,}147342$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Równanie Poissona na kwadracie – podwójny szereg Fouriera, porównaj ze schematem sor.

Input: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Wynik

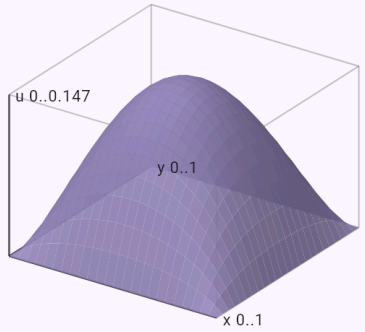
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Warunki: $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, równanie jest eliptyczne (jak równanie Laplace'a): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Część ze źródłem jest szeregiem podwójnym funkcji własnych obu kierunków – każdy iloczyn X_m·Y_n spełnia warunki na bokach, a laplasjan tylko mnoży go przez liczbę: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, gdzie $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Rozwijamy źródło w ten sam szereg podwójny. Podstawienie do Δv = f i porównanie współczynników daje $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, więc $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}$ $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- Rozwiązanie

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Pochodne na wszystkich czterech bokach – warunek rozwiązywalności i rozwiązanie z dokładnością

do stałej.

Input: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

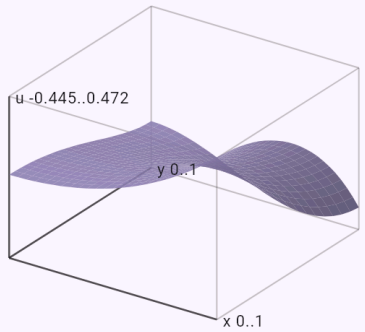
Wynik

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Warunki $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, równanie jest eliptyczne (jak równanie Laplace'a): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Na wszystkich czterech bokach dana jest pochodna (strumień). Z twierdzenia Gaussa całkowity strumień przez brzeg musi odpowiadać źródłu wewnątrz ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – warunek rozwiązywalności. Jest spełniony; rozwiązanie istnieje, ale tylko z dokładnością do dodanej stałej. Strumień przez brzeg $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Wielomian kwadratowy P przejmuje średnie strumienie boków; reszta v ma na każdym boku strumień o zerowej średniej, więc sumuje się ją bok po boku jak wcześniej: $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; średnie strumienie $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Bok z wartościami niezerowymi (pozostałe mają u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Rozdzielenie zmiennych: szukamy iloczynu: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Zagadnienie własne $X'' + \lambda X = 0$ z X' = 0 na obu końcach (końce izolowane) ma rozwiązania $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Na danym boku zadana jest pochodna, a przeciwległy bok jest izolowany: cosh, unormowany tak, aby jego pochodna na danym boku wynosiła 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- Funkcja początkowa (brzegowa) jest już sumą funkcji własnych, więc tylko kilka współczynników $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ jest niezerowych: $c_1 = 1$, pozostałe są zerowe.
- Rozwiązanie (C to dowolna stała – przy pochodnych na wszystkich bokach u jest wyznaczone tylko z dokładnością do przesunięcia) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Zmienne współczynniki – zagadnienie Sturma–Liouville'a z wagą 1/x, funkcje własne sin(n ln x).

Input: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Wynik

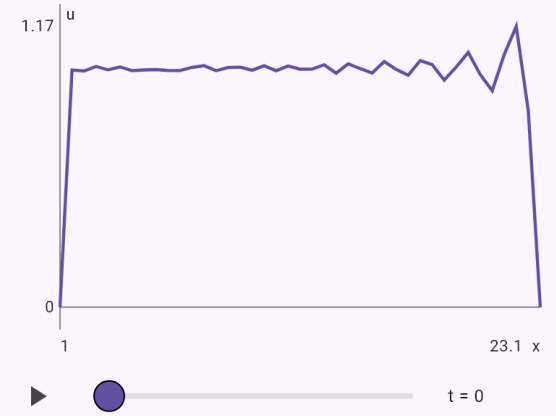
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Kroki

- Rozwiązujemy równanie różniczkowe cząstkowe $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Warunki: $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Rozdzielenie zmiennych dla równania o zmiennych współczynnikach – obie strony muszą być równe tej samej stałej:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{x^2 X'' + xX'}{X} = -\lambda$
- Pomnożenie równania dla X przez odpowiednią funkcję daje zagadnienie Sturma–Liouville'a $(xX')' + \lambda \dfrac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ z p = x i wagą w = $\dfrac{1}{x}$. Jego funkcje własne są ortogonalne z wagą w.
- Równanie dla X jest równaniem Eulera, próbujemy X = x^r: $x^2X'' + xX' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0.$ Niezerowe rozwiązanie z X = 0 na obu końcach istnieje tylko dla pierwiastków zespolonych: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2.$ Warunki na końcach dają
  $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Ortogonalność funkcji własnych z wagą w: $\displaystyle\int_1^{e^\pi} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; ich norma $\displaystyle\int_1^{e^\pi} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- Część czasowa dla każdego n – zanik wykładniczy, wyższe częstotliwości tłumione szybciej: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Współczynniki funkcji początkowej f to jej rzuty z wagą w: $c_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2} \displaystyle\int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Po podstawieniu $\xi = \ln x$: 1 stają się współczynnikami zwykłego szeregu sinusów funkcji
- Współczynniki z funkcji początkowej (brzegowej) dzięki ortogonalności funkcji własnych (całkowanie przez części)
  $c_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- Rozwiązanie
  $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



t = 0

Rozwiązanie u w chwili t wybranej suwakiem; przycisk je odtwarza.

Schemat MUSCL z limiterem – porównaj jego błąd ze schematami Laxa–Wendroffa i Laxa–Friedrichsa.

Input: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to =`

0.4)

Wynik

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Siatka na $0 \le x \le 1$: 51 węzłów, 25 kroków czasowych do t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ to liczba Couranta.
- Rozwiązanie dokładne jest przenoszone wzdłuż charakterystyk $x - t = C$ z prędkością a = 1
- Schemat MUSCL – w każdej komórce profil liniowy z nachyleniem σ_i ograniczonym limiterem; strumień pochodzi z komórki pod wiatr przesuniętej o pół kroku. Drugi rząd tam, gdzie rozwiązanie jest gładkie, bez wahań na skokach

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\nu}{2}$$

- Nachylenie w komórce ogranicza minmod – zero w ekstremum, w przeciwnym razie mniejsza z dwóch różnic jednostronnych

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- Warunek CFL (numeryczny obszar zależności zawiera charakterystykę): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Schemat z limiterem jest nieliniowy; zamiast analizy von Neumanna: nie zwiększa wahania całkowitego (TVD – żadnych nowych oscylacji): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, o ile $|\nu| \le 1$
- Pierwszy poziom czasowy

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

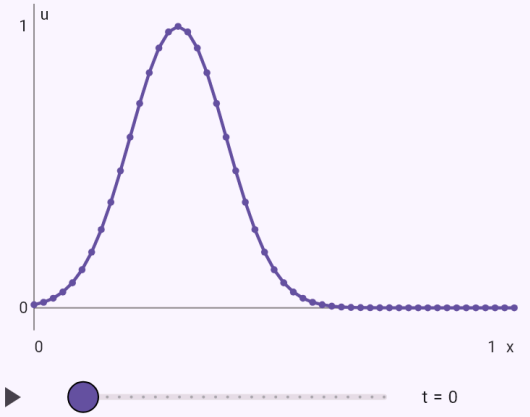
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_i |u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}| \approx 0{,}0326$ (dokładnie $0{,}135335$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Kropki: rozwiązanie numeryczne w węzłach siatki; linia przerywana: rozwiązanie dokładne. Suwak wybiera poziom czasowy.

Równanie Burgersa z lepkością schematem MUSCL – w porównaniu z transformacją Cole'a–Hopfa.

Input: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Wynik

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Siatka: 41 węzłów, 10 kroków czasowych; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Schemat MUSCL dla równania Burgersa: ograniczone nachylenia σ_i (limiter) dają wartości na brzegach komórek, strumień między nimi pochodzi z rozwiązania Godunowa dla skoku, a w czasie krokuje metoda Heuna (dwa etapy)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- Nachylenie w komórce ogranicza minmod – zero w ekstremum, w przeciwnym razie mniejsza z dwóch różnic jednostronnych

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

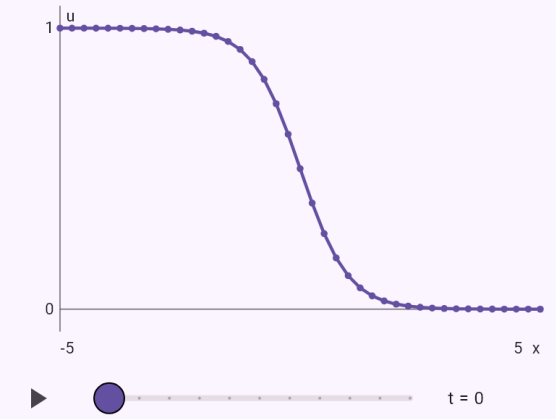
- Warunek CFL (numeryczny obszar zależności zawiera charakterystykę): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Człon lepkościowy ν·u_xx dodajemy różnicą centralną: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. Krok jawny jest stabilny, bo $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- Spadek z u_L do u_R < u_L wędruje jako fala uderzeniowa z prędkością z warunku Rankine'a-Hugoniota: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- Rozwiązanie na wybranych poziomach czasowych

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- Największy błąd względem rozwiązania dokładnego na ostatnim poziomie: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (dokładnie $0{,}811680$ w środku).
- Wynik w środkowym węźle: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Wykres

W czasie | Powierzchnia 3D



Kropki: rozwiązanie numeryczne w węzłach siatki; linia przerywana: rozwiązanie dokładne. Suwak wybiera poziom czasowy.

Elementy skończone na obszarze w kształcie litery L – triangulacja przez odcinanie uszu, powierzchnia

3D tylko nad obszarem.

Input: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Wynik

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Kroki

- Rozwiązywane numerycznie na siatce: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \quad (\partial\Omega)$
- Obszar jest wielokątem o wierzchołkach $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, jego pole $|\Omega| = 3{,}0000$
- Metoda elementów skończonych: równanie mnożymy przez funkcję testową v i całkujemy przez części (sformułowanie słabe); rozwiązania szukamy jako kombinacji funkcji „daszków" φ_j

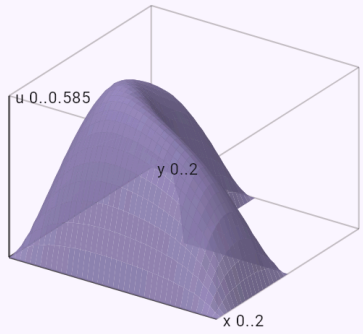
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulacja: odcinanie „uszu" (wierzchołka wypukłego, którego trójkąt nie zawiera innego wierzchołka) daje 4 trójkątów; $4\times$ każdy dzielimy środkami boków na cztery – 1024 trójkątów, 561 węzłów, z czego 465 wewnątrz (niewiadome), najdłuższa krawędź $h = 0{,}1398$
- Macierz sztywności jednego trójkąta (gradienty funkcji liniowych są na nim stałe)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- Wartości w węzłach brzegowych są dane, ich wkłady przenosimy na prawą stronę: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Rzadki układ K·U = F dla 465 niewiadomych rozwiązujemy metodą gradientów sprzężonych w 128 iteracjach. Największa wartość: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- Wynik w środkowym węźle: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Wykres



Rozwiązanie u jako powierzchnia nad obszarem. Obróć, przeciągając palcem.

Znane ograniczenia

- Analitycznie tylko równania liniowe z jedną niewiadomą funkcją u dwóch zmiennych oraz równanie Burgersa; inne równania nieliniowe i układy nie.
- Metodą rozdzielenia zmiennych równania przewodnictwa i falowe na przedziale; źródło tylko jako suma iloczynów p(x)·q(t), dla równania Poissona najwyżej trzy iloczyny p(x)·q(y). Zmienne współczynniki tylko typu Eulera αx²u_xx + βxu_x z zerowymi wartościami na końcach.
- Transformata Fouriera w postaci zamkniętej dla funkcji Gaussa, wielomianu i funkcji z f″ = λf; w przeciwnym razie pozostaje splot, a wykres jest obliczany numerycznie.
- Numerycznie w 2D równania przewodnictwa i Laplace'a na prostokącie z regularną siatką; na wielokącie tylko metoda elementów skończonych z trójkątami liniowymi i wartością brzegową (nie pochodną), bez dziur i z najwyżej 40 wierzchołkami.

39. Rekurencje i funkcje tworzące

Aplikacja rozwiązuje liniowe rekurencje o stałych współczynnikach dowolnego rzędu przez równanie charakterystyczne – także pierwiastki wielokrotne i zespolone (postać zespolona rozwiązania i jej zamiana na rzeczywistą wzorem de Moivre'a) – i z prawą stroną postaci $P(n)\cdot q^n$ (także cos nφ, sin nφ, rezonans i suma prawych stron). Warunki początkowe wyznaczają stałe; dla sprawdzenia aplikacja oblicza kolejne wyrazy z rekurencji i porównuje je ze wzorem.

Chip „Metoda" oferuje też funkcję tworzącą ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, ułamki proste, szereg geometryczny), potęgi macierzy (diagonalizacja) lub dla pierwszego rzędu sumowanie. Rekurencję pierwszego rzędu o zmiennym współczynniku ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) rozwiązuje iloczynem (silnie), sprowadzalne rekurencje nieliniowe podstawieniem $b_n = 1/a_n$ lub $b_n = \ln a_n$. Układ dwóch rekurencji rozwiązuje przez eliminację jednego ciągu lub macierzą, rekurencję typu dziel i zwyciężaj $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ przez $n = b^k$ – z oszacowaniem z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej.

Z operacją „Funkcja tworząca" aplikacja znajduje funkcję tworzącą ciągu danego wzorem ($n^2 + 2^n$) lub pierwszymi wyrazami (1, 0, 1, 0, …), a odwrotnie wzór na a_n z funkcji A(x). Liczba nieujemnych całkowitych rozwiązań $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (także z ograniczeniami lub współczynnikami – płacenie monetami) to współczynnik funkcji tworzącej.

Wykres pokazuje wyrazy ciągu jako punkty (oba ciągi układu).

Różnica Δf(n) = f(n + 1) − f(n) („Δ(n^3)") i równanie różnicowe Δy_n = n jako rekurencja y_{n+1} − y_n = n. Ciąg arytmetyczny lub geometryczny z dwóch danych wartości („a_3 = 7, a_7 = 19", „geometric sequence a_2 = 6, a_5 = 162") – a_1, d lub q, n-ty wyraz oraz szukane wyrazy i sumy (s_{10}, a_{20} = ?).

Ciąg dany n-tym wyrazem (a_n = (n+1)/n) jest badany: pierwsze pięć wyrazów, monotoniczność z różnicy sąsiednich wyrazów, ograniczoność i granica.

Jak to wpisać

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Nawiasy, warunki po przecinku.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Indeksy dolne (także ze zdjęcia). Bez warunków: rozwiązanie ogólne ze stałymi C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	Indeks może maleć (a_{n-1}, a_{n-2}); jedną wartość można podać dla kilku wyrazów.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Układ – równania w wierszach, warunki w ostatnim.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Dziel i zwyciężaj – wyraz w n/b.
`n^2 + 2^n`	Wzór ciągu z operacją „Funkcja tworząca” (także a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Pierwsze wyrazy oddzielone przecinkami.
`1/(1 - x - x^2)`	Funkcja tworząca w x (także A(x) = …) – wzór na a_n.
`number of solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Liczba nieujemnych całkowitych rozwiązań z ograniczeniami.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Różnica i równanie różnicowe.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Ciąg z danych wyrazów – arytmetyczny bez słowa, geometryczny ze słowem „geometric”.

Przykłady

Dwa różne pierwiastki rzeczywiste, sprawdzenie kolejnymi wyrazami.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Wynik

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

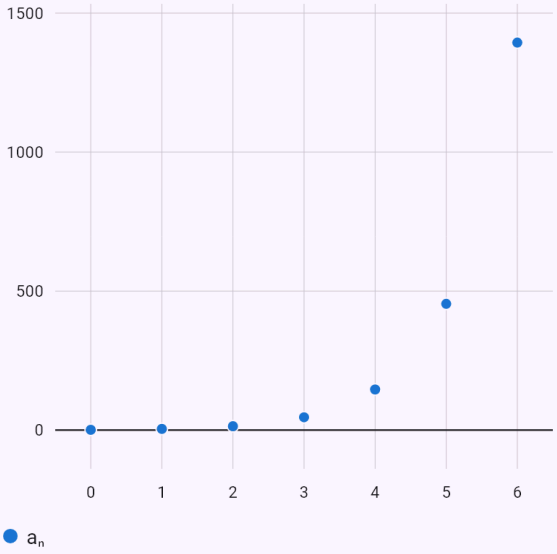
Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Szukamy rozwiązań $a_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Wyróżnik $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; pierwiastki: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

  $$C_1 + C_2 = 1$$
  $$2C_1 + 3C_2 = 4$$

- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Ciąg Fibonacciego – wzór Bineta.

Input: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Wynik

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

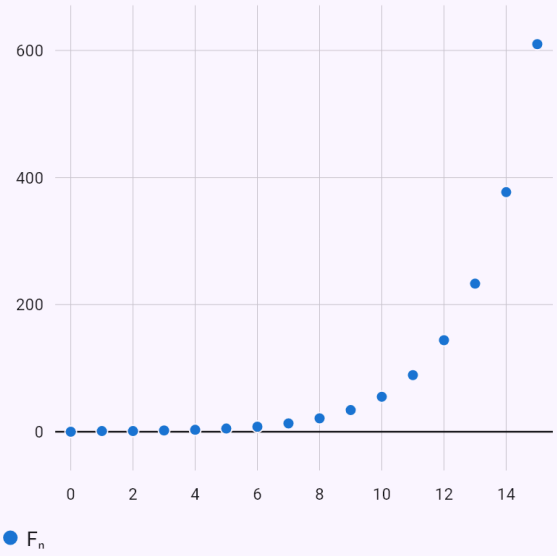
Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Szukamy rozwiązań $F_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^{n-2} dają równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Wyróżnik $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; pierwiastki: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Rozwiązanie ogólne $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- Rozwiązanie spełniające zadane warunki $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Pierwiastki zespolone 1 ± i – postać zespolona i wzór de Moivre'a.

Input: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Wynik

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

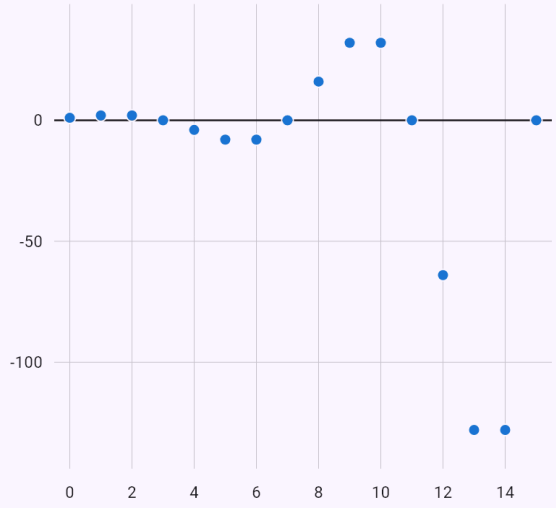
Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Szukamy rozwiązań $a_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Wyróżnik $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; pierwiastki: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Pierwiastki zespolone $1 \pm i$ zapisujemy w postaci trygonometrycznej: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, więc $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Ze wzoru de Moivre'a $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Rozwiązanie ogólne w postaci zespolonej (stałe zespolone): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Dodając wyrazy sprzężone, z nowymi stałymi rzeczywistymi dostajemy postać rzeczywistą $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = 1,\ C_2 = 1$

  $C_1 = 1$

  $C_1 + C_2 = 2$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Prawa strona n, pierwiastek podwójny 2.

Input: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Wynik

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Najpierw rozwiązujemy rekurencję jednorodną (prawa strona 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Szukamy rozwiązań $a_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Wyróżnik $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; pierwiastki: $\lambda_{1,2} = 2$
- Rozwiązanie ogólne rekurencji jednorodnej: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Prawa strona n ma postać specjalną; liczba 1 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc szukamy rozwiązania szczególnego $a_n^{(p)} = An + B$
- Po podstawieniu do rekurencji i uporządkowaniu wyrazów: $An + B - 2A = n$
- Porównujemy współczynniki przy wyrazach podobnych po obu stronach stąd $A = 1,\ B = 2$

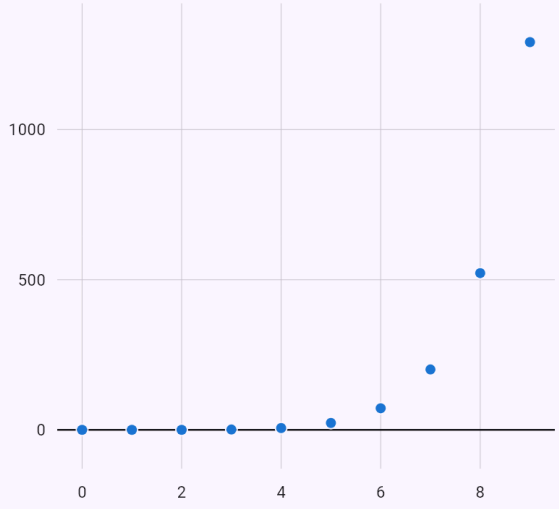
$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \end{aligned}$$

- Rozwiązanie szczególne: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Rozwiązanie ogólne: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_1 + 2 &= 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Ta sama rekurencja funkcją tworzącą.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Funkcja tworząca

Wynik

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Wprowadzamy funkcję tworzącą $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Rekurencję mnożymy przez x^{n+2} i sumujemy po wszystkich n ≥ 0

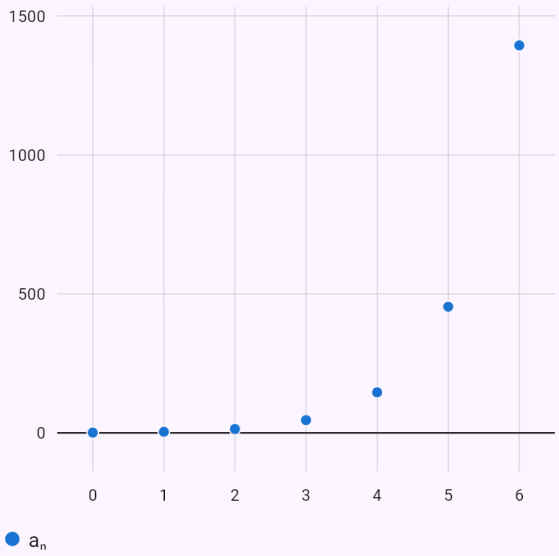
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Sumy wyrażone przez funkcję tworzącą i wartości początkowe: $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Wyznaczona funkcja tworząca, jej mianownik rozłożony na czynniki: $A(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Ułamki proste: $A(x) = -\frac{1}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x}$
- Ułamki jako szeregi geometryczne

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Współczynnik przy x^n jest wyrazem ciągu: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Ta sama rekurencja potęgami macierzy.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Potęgi macierzy

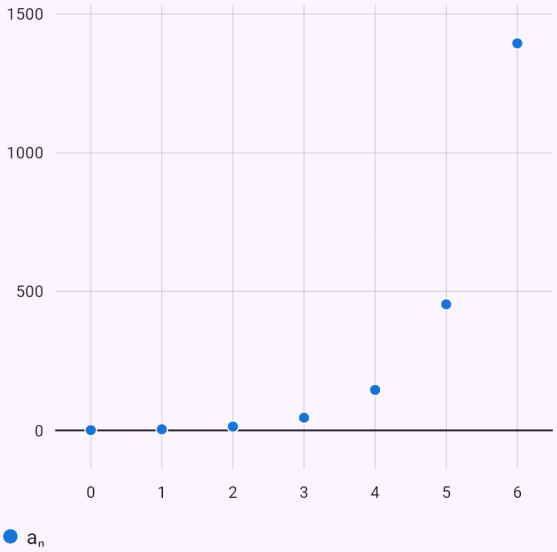
Wynik

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 2 o stałych współczynnikach:
  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Rekurencja w postaci macierzowej czyli $v_{n+1} = M \cdot v_n$ z
  $$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$
  $$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Podstawiając raz za razem, $v_n = M^n \cdot v_0$
  $$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Wartości własne macierzy:
  $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, więc
  $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Wektory własne – rozwiązania $(M - \lambda E)u = 0$
  $$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Macierz zdiagonalizowana, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$
  $$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
  $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
- Potęga macierzy współczynniki więc $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.
  $$M^n = PD^nP^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
  $$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Sprawdzenie: rekurencja daje
  $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Rekurencja pierwszego rzędu przez sumowanie.

Input: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Sumowanie

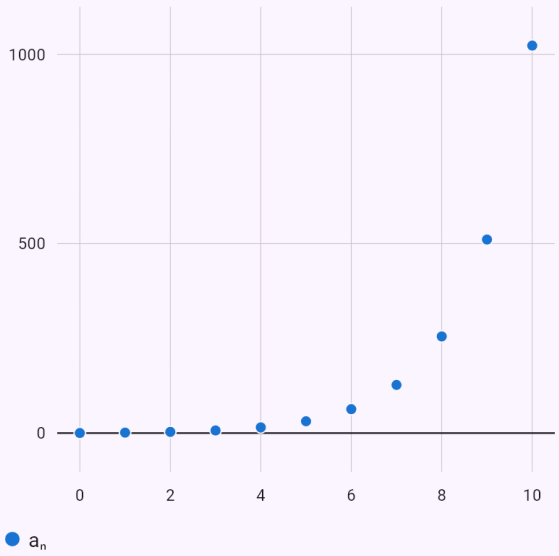
Wynik

$$a_n = 2^n - 1$$

Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 1 o stałych współczynnikach: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Podstawiamy rekurencję do niej samej raz za razem: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \ldots$, ogólnie $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Obliczona suma: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $a_n = 2^n - 1$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Zmienny współczynnik – iloczyn daje silnię.

Input: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Wynik

$$a_n = n!$$

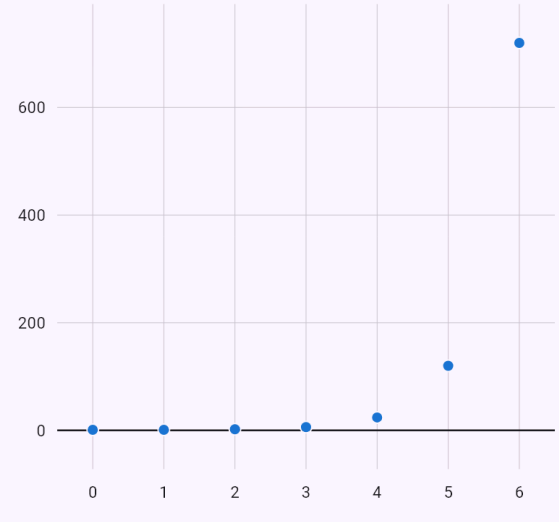
Kroki

- Rekurencja liniowa pierwszego rzędu o zmiennym współczynniku: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Podstawiamy rekurencję do niej samej raz za razem – wyraz jest iloczynem

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- Uproszczony iloczyn (silnie się skracają): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $a_n = n!$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – to samo co wzór.

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Rekurencja nieliniowa – podstawienie $b_n = 1/a_n$.

Input: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

Wynik

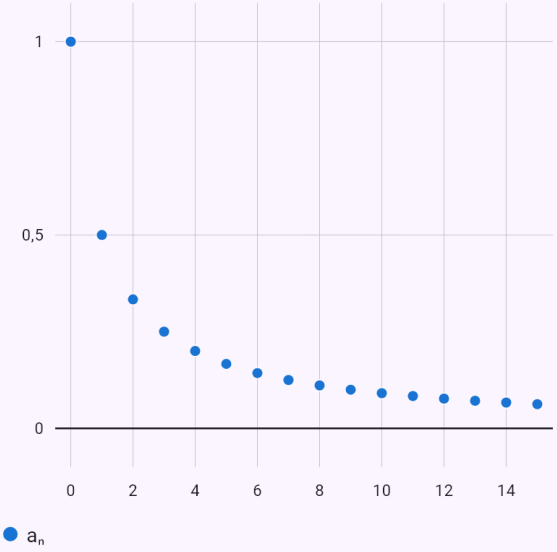
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Kroki

- Rekurencja nieliniowa – odwrotności wyrazów czynią ją liniową: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Odwrotności obu stron: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; podstawienie $b_n = \frac{1}{a_n}$ czyni więc rekurencję liniową: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Warunki początkowe dla nowego ciągu: $b_0 = 1$
- Najpierw rozwiązujemy rekurencję jednorodną (prawa strona 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Szukamy rozwiązań $b_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda - 1 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_1 = 1$
- Rozwiązanie ogólne rekurencji jednorodnej: $b_n^{(h)} = C_1$
- Prawa strona 1 ma postać specjalną; liczba 1 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (krotności 1), więc postać mnożymy przez n: $b_n^{(p)} = An$
- Po podstawieniu do rekurencji i uporządkowaniu wyrazów: $A = 1$
- Rozwiązanie szczególne: $b_n^{(p)} = n$
- Rozwiązanie ogólne: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd
  $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $b_n = 1 + n$

- Sprawdzenie: rekurencja daje $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – to samo co wzór.
- Wracamy do pierwotnego ciągu: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Układ dwóch rekurencji przez eliminację ciągu b_n.

Input: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Wynik

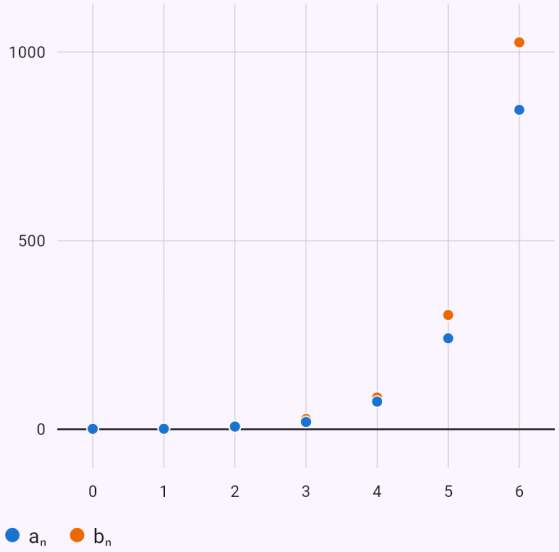
$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Kroki

- Układ dwóch rekurencji liniowych
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$
- Z pierwszego równania $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, więc $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; wstawione do drugiego dają rekurencję dla jednego ciągu: $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$
- Drugi warunek początkowy z pierwszego równania: $a_1 = 1 + 0 = 1$
- Szukamy rozwiązań $a_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$
- Wyróżnik $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; pierwiastki: $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$
- Rozwiązanie ogólne:
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$
  $$C_1 + C_2 = 1$$
  $$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – to samo co wzór.
- Drugi ciąg z wyrażenia
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Dziel i zwyciężaj (sortowanie przez scalanie) – n = 2ᵏ i twierdzenie o rekurencji uniwersalnej.

Input: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Wynik

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Założenia: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Kroki

- Rekurencja typu „dziel i zwyciężaj": $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Dla n będącego potęgą podstawy: podstawienie $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ daje rekurencję liniową pierwszego rzędu: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Warunki początkowe dla nowego ciągu: $S_0 = 1$
- Najpierw rozwiązujemy rekurencję jednorodną (prawa strona 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Szukamy rozwiązań $S_k = \lambda^k$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^k dają równanie charakterystyczne: $\lambda - 2 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_1 = 2$
- Rozwiązanie ogólne rekurencji jednorodnej: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Prawa strona 2^{k+1} ma postać specjalną; liczba 2 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (krotności 1), więc postać mnożymy przez k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Po podstawieniu do rekurencji, podzieleniu przez 2^k i uporządkowaniu wyrazów: $2A = 2$
- Stąd $A = 1$
- Rozwiązanie szczególne: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- Rozwiązanie ogólne: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Podstawiamy warunki do rozwiązania ogólnego stąd
  $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Rozwiązanie spełniające zadane warunki: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Sprawdzenie: rekurencja daje $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – to samo co wzór.
- Wracamy do n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, więc T(n) = $\Theta(n \log n)$

Funkcja tworząca ciągu n² + 2ⁿ.

Input: `n^2 + 2^n` Funkcja tworząca

Wynik

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Kroki

- Wprowadzamy funkcję tworzącą $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- Szereg rozdzielony dzięki liniowości: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Znany szereg: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Znany szereg: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Mnożenie wyrazów przez n to różniczkowanie i mnożenie przez x
  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Mnożenie wyrazów przez n to różniczkowanie i mnożenie przez x
  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- Funkcja tworząca: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Sprawdzenie – rozwinięcie zaczyna się od wyrazów ciągu: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

Wzór na a_n z funkcji tworzącej – ułamki proste przez pierwiastki niewymierne.

Input: `1/(1 - x - x^2)` Funkcja tworząca

Wynik

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Kroki

- Wyznaczona funkcja tworząca, jej mianownik rozłożony na czynniki

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Ułamki proste

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Ułamki jako szeregi geometryczne

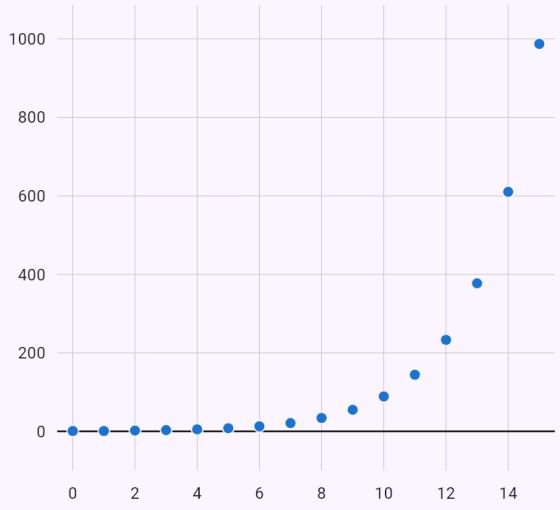
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- Współczynnik przy x^n jest wyrazem ciągu

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Sprawdzenie – rozwinięcie zaczyna się od wyrazów ciągu: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Wykres



Punkty to wyrazy obliczone ze wzoru – sama rekurencja daje te same wartości.

Liczba rozwiązań $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ z $x_1 \le 3$.

Input: `number of solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Wynik

$$38$$

Kroki

- Niewiadoma x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ wnosi szereg $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- Niewiadoma x_2 $(x_2 \ge 0)$ wnosi szereg $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- Niewiadoma x_3 $(x_3 \ge 0)$ wnosi szereg $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- Funkcja tworząca jest ich iloczynem – współczynnik przy x^N zlicza rozwiązania: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- Liczba rozwiązań to współczynnik przy x^{10}: 38

Różnica funkcji.

Input: `Δ(n^3)`

Wynik

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Kroki

- Różnica – przyrost funkcji, gdy n rośnie o 1
  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Równanie różnicowe jako rekurencja.

Input: `\Delta y_n = n`

Wynik

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Kroki

- Rekurencja liniowa rzędu 1 o stałych współczynnikach: $y_{n+1} - y_n = n$
- Najpierw rozwiązujemy rekurencję jednorodną (prawa strona 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Szukamy rozwiązań $y_n = \lambda^n$; po podstawieniu i podzieleniu przez λ^n dają równanie charakterystyczne: $\lambda - 1 = 0$
- Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_1 = 1$
- Rozwiązanie ogólne rekurencji jednorodnej: $y_n^{(h)} = C_1$
- Prawa strona n ma postać specjalną; liczba 1 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (krotności 1), więc postać mnożymy przez n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Po podstawieniu do rekurencji i uporządkowaniu wyrazów: $2An + A + B = n$
- Porównujemy współczynniki przy wyrazach podobnych po obu stronach stąd $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

- Rozwiązanie szczególne: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- Rozwiązanie ogólne: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Ciąg arytmetyczny z dwóch wyrazów i suma dziesięciu wyrazów.

Input: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Wynik

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Kroki

- Ciąg arytmetyczny: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Dane wartości tworzą układ
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- Rozwiązanie układu: $a_1 = 1,\ d = 3$
- n-ty wyraz: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Szukane wartości: $s_{10} = 145$

Ciąg geometryczny z dwóch wyrazów.

Input: `geometric sequence a_2 = 6, a_5 = 162`

Wynik

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Kroki

- Ciąg geometryczny: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Dane wartości tworzą układ
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- Rozwiązanie układu: $a_1 = 2,\ q = 3$
- n-ty wyraz: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Własności ciągu danego wzorem.

Input: `a_n = (n+1)/n`

Wynik

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Kroki

- Pierwsze pięć wyrazów
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- Różnica sąsiednich wyrazów $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ jest ujemna dla wszystkich $n \geq 1$ – ciąg jest malejący.
- Granica $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – ciąg jest zbieżny.
- Ciąg jest ograniczony: $1 < a_n \leq 2$

Znane ograniczenia

- Jeszcze nie: liniowe rekurencje wyższego rzędu o zmiennych współczynnikach, układy trzech i więcej rekurencji, dziel i zwyciężaj z kilkoma wyrazami (T(n/2) i T(n/3)) i rekurencje nieliniowe, których te podstawienia nie czynią liniowymi.
- Ciąg z danych wyrazów wymaga dokładnie dwóch wartości (wyrazów, sum, d lub q).

40. Metody numeryczne

Metody numeryczne są na ekranie głównym w sekcji „Zastosowania”, dziedzina Metody numeryczne: pierwiastki równań (bisekcja, metoda Newtona, siecznych, regula falsi, iteracja prosta), całki numeryczne (metody trapezów, Simpsona i Romberga), pochodne numeryczne ilorazami różnicowymi, równania różniczkowe (metody Eulera, Heuna i Rungego–Kutty), układy liniowe (metody Jacobiego i Gaussa–Seidla, rozkład LU), interpolacja (wielomian Lagrange’a i Newtona, splajn sześcienny) i najmniejsze kwadraty. Całkę i pochodną można też obliczyć z tabeli wartości zmierzonych.

Równania różniczkowe także metodami wielokrokowymi – Adamsa–Bashfortha i predyktorem-korektorem Adamsa–Bashfortha–Moultona (startowanymi metodą Rungego–Kutty) –, adaptacyjną metodą RK45 (Dormand–Prince, tabela kroków przyjętych i odrzuconych według oszacowania błędu, zapis tol=…) i metodami niejawnymi dla równań sztywnych: niejawną metodą Eulera i metodą trapezów (Cranka–Nicolson) z metodą Newtona w każdym kroku. Dla równania z $\partial f/\partial y < 0$ kroki pokazują stabilność metody: $h\lambda$ i wzmocnienie $|R(h\lambda)|$; jeśli jest powyżej 1, metoda jawna jest rozbieżna, a obliczenie to mówi.

Zagadnienia brzegowe $y'' = f(x, y, y')$ z warunkami y(a), y(b): metodą strzałów (nachylenie początkowe znalezione metodą siecznych, każdy strzał rozwiązany metodą Rungego–Kutty) i różnicami skończonymi (równanie liniowe jako układ trójdiagonalny rozwiązany algorytmem Thomasa z tabelami przebiegu w przód i podstawiania wstecz); gdy solwer równań różniczkowych znajdzie rozwiązanie dokładne, jest ono porównywane w węzłach. Równanie ruchu $x'' = a(x)$ rozwiązuje symplektyczna metoda Verleta obok RK4, pokazując, jak zmienia się błąd energii całkowitej w każdej z nich.

Kroki pokazują wzór metody, tabelę iteracji lub wartości w węzłach, warunek stopu (domyślna tolerancja $\varepsilon = 10^{-4}$, najwyżej 50 iteracji) i oszacowanie błędu; gdy wartość dokładna jest znana, wynik jest z nią porównywany. Sprawdzane są warunki zbieżności: zmiana znaku na przedziale, warunek Fouriera dla startu metody Newtona, $|g'(x)| < 1$ dla iteracji prostej, dominacja diagonalna i promień spektralny dla układów. Wykres pokazuje styczne lub sieczne, trapezy lub parabole, numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego wobec dokładnego oraz dopasowany wielomian z punktami.

Przy zwykłym zadaniu – równaniu z jedną niewiadomą, całce oznaczonej, równaniu różniczkowym z warunkiem początkowym – aplikacja oferuje pod wynikiem chipy „Rozwiąż metodą numeryczną”; formularz jest wypełniony zadaniem. Gdy nie ma drogi dokładnej lub jest niepotrzebnie złożona (x = cos x, wzory Cardana), oferta jest wyróżniona, a równanie, którego nie da się rozwiązać algebraicznie, od razu rozwiązuje metoda Newtona. Zastosowania, które po cichu obliczają liczbę (wewnętrzna stopa zwrotu, RRSO, rentowność obligacji, pH kwasu wieloprotonowego, Runge–Kutta w modelach), mają pod wynikiem zwinięty wiersz „Metoda” z krótką tabelą iteracji.

Jak to wpisać

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	Metoda – jej angielska nazwa – a po średnikach równanie, oszacowanie początkowe x0, tolerancja tol, opcjonalnie max (iteracje) i stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Funkcja f(x) (rozwiązuje się f(x) = 0) i przedział a, b. Bez przedziału lub oszacowania pierwiastki są izolowane automatycznie.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	Całka funkcji od a do b z n podprzedziałami; także trapezoid i romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	Całka z wartości zmierzonych – x i y oddzielone spacją.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	Pochodna w punkcie at z krokiem h; z tabeli x=…; y=… (at opcjonalne).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Równanie różniczkowe pierwszego rzędu z warunkiem początkowym, krok h i koniec przedziału to; także euler i heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Układ – równania po średnikach lub w wierszach; także jacobi i lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Punkty x, y i punkt at; także newtonpoly i spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Wielomian najmniejszych kwadratów stopnia degree.

Przykłady

Równanie, którego nie da się rozwiązać algebraicznie – aplikacja rozwiązuje je metodą Newtona i

oferuje pozostałe.

Input: `x = cos x`

Wynik

$$x \approx 0{,}7391$$

Rozwiąż metodą numeryczną:

Σ Bisekcja | Σ Sieczne | Σ Regula falsi | Σ Punkt stały

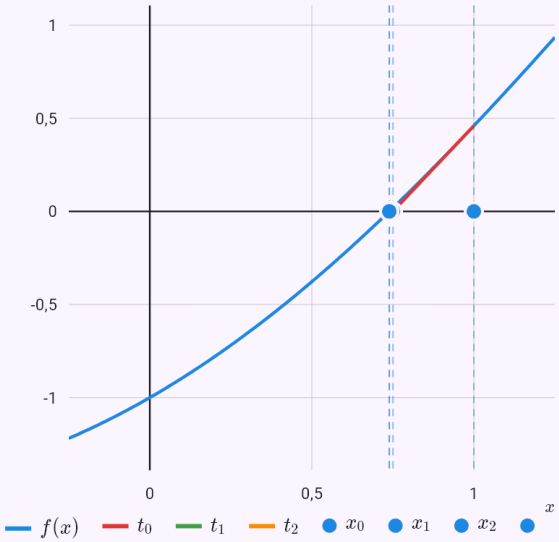
Kroki

- Szukamy pierwiastka równania $x = \cos x$, czyli miejsca zerowego funkcji $f(x) = x - \cos x$
- Pierwiastki zizolowane z tabeli wartości: funkcja zmienia znak w przedziałach $\langle 0;\ 1\rangle$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Funkcja ciągła ma w każdym takim przedziale pierwiastek.
- Metoda Newtona potrzebuje pochodnej: $f'(x) = \sin x + 1$
- Oszacowanie początkowe $x_0 = 1$ wybrane według warunku Fouriera – na końcu, gdzie $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); z niego styczne zbiegają do pierwiastka monotonicznie.
- Metoda Newtona: z punktu x_n po stycznej do miejsca, gdzie przecina oś x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- Warunek stopu $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ jest spełniony po 3 iteracjach.
- Oszacowanie błędu z twierdzenia o wartości średniej, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 1$ na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Wynik metody: $x \approx 0{,}7391$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Metoda Newtona z automatycznie zizolowanym pierwiastkiem i startem według warunku Fouriera.

Input: `newton(x^3 - x - 2)`

Wynik

$$x \approx 1{,}5214$$

Kroki

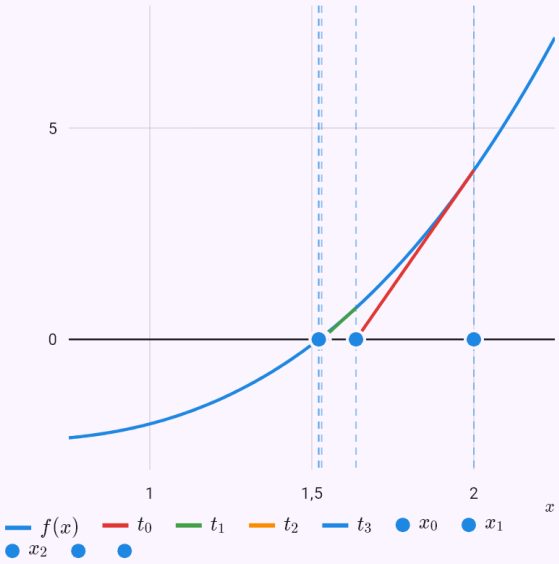
- Szukamy pierwiastka równania $x^3 - x - 2 = 0$, czyli miejsca zerowego funkcji $f(x) = x^3 - x - 2$
- Pierwiastki zizolowane z tabeli wartości: funkcja zmienia znak w przedziałach $\langle 1;\ 2\rangle$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Funkcja ciągła ma w każdym takim przedziale pierwiastek.
- Metoda Newtona potrzebuje pochodnej: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Oszacowanie początkowe $x_0 = 2$ wybrane według warunku Fouriera – na końcu, gdzie $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); z niego styczne zbiegają do pierwiastka monotonicznie.
- Metoda Newtona: z punktu x_n po stycznej do miejsca, gdzie przecina oś x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- Warunek stopu $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ jest spełniony po 4 iteracjach.
- Oszacowanie błędu z twierdzenia o wartości średniej, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 2$ na przedziale $\langle 1;\ 2\rangle$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Wynik metody: $x \approx 1{,}5214$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Bisekcja na danym przedziale z oszacowaniem błędu.

Input: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Wynik

$$x \approx 1{,}5214$$

Kroki

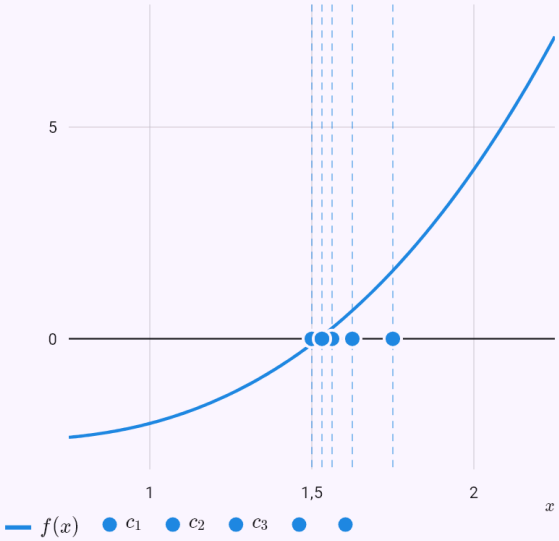
- Szukamy pierwiastka równania $x^3 - x - 2 = 0$, czyli miejsca zerowego funkcji $f(x) = x^3 - x - 2$
- Na przedziale $\langle 1;\ 2\rangle$
  $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – przeciwne znaki, funkcja ciągła ma tam pierwiastek.
- Bisekcja: środek przedziału $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, zostawiamy połowę, na której f zmienia znak.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- Warunek stopu $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ jest spełniony po 14 iteracjach.
- Oszacowanie błędu: pierwiastek ξ leży w ostatnim przedziale, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Wynik metody: $x \approx 1{,}5214$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Metoda siecznych z dwóch oszacowań.

Input: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Wynik

$$x \approx 2{,}0946$$

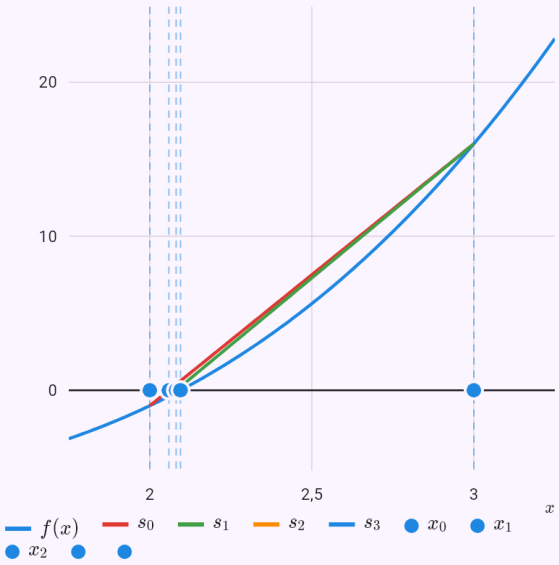
Kroki

- Szukamy pierwiastka równania $x^3 - 2x - 5 = 0$, czyli miejsca zerowego funkcji $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Metoda siecznych: sieczna dwóch ostatnich punktów zastępuje styczną, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	$-1{,}000000$	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	$-0{,}390800$	0,941176
3	2,081264	$-0{,}147204$	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	$-0{,}000023$	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- Warunek stopu $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ jest spełniony po 6 iteracjach.
- Oszacowanie błędu z twierdzenia o wartości średniej, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ na przedziale $\langle 2;\, 3\rangle$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Wynik metody: $x \approx 2{,}0946$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Iteracja prosta ze sprawdzonym warunkiem zbieżności |g'(x)| < 1.

Input: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Wynik

$$x \approx 0{,}7391$$

Kroki

- Równanie $x = \cos x$ zapisane jako x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Warunek zbieżności: $g'(x) = -\sin x$, na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$ $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 – g jest kontrakcją i iteracja jest zbieżna.
- Iteracja prosta: $x_{n+1} = g(x_n)$.

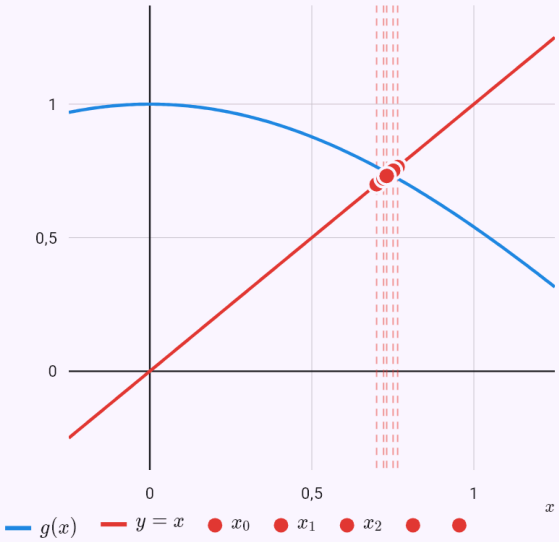
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- Warunek stopu $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ jest spełniony po 18 iteracjach.
- Oszacowanie błędu iteracji prostej

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Wynik metody: $x \approx 0{,}7391$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Metoda Simpsona, oszacowanie błędu regułą Rungego i wartość dokładna dla porównania.

Input: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Wynik

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Kroki

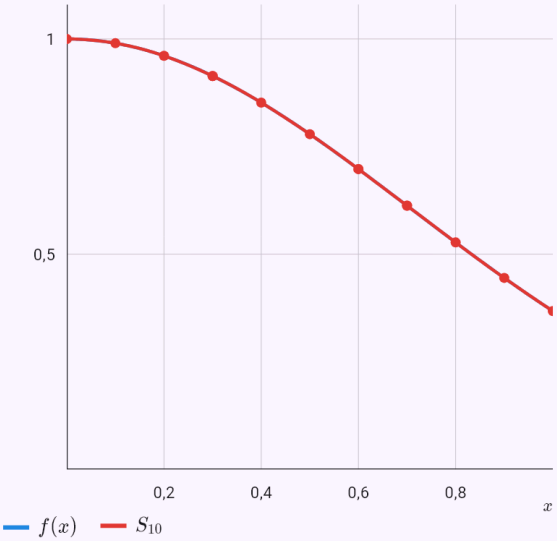
- Całka $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ obliczona numerycznie.
- Krok: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Wartości w węzłach i ich współczynniki

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Metoda Simpsona
  $S_n = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \dfrac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Dla porównania wartość dokładna
  $I = \dfrac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, błąd metody
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Wynik metody: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Tabela Romberga dla całki bez elementarnej funkcji pierwotnej.

Input: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Wynik

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

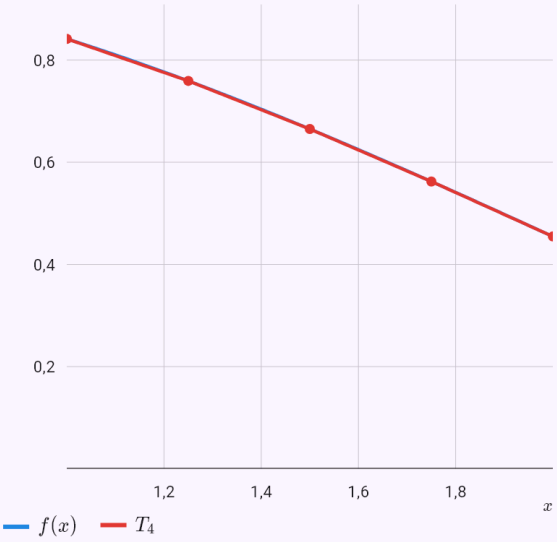
Kroki

- Całka $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ obliczona numerycznie.
- Metoda Romberga: pierwsza kolumna to trapezy z krokami h, h/2, h/4, ..., kolejne kolumny poprawiają je ekstrapolacją Richardsona,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- Warunek stopu $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ jest spełniony po 2 iteracjach.
- Dla porównania wartość dokładna błąd metody
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Wynik metody: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Droga ze zmierzonej prędkości metodą trapezów.

Input: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Wynik

$$\int_{0}^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

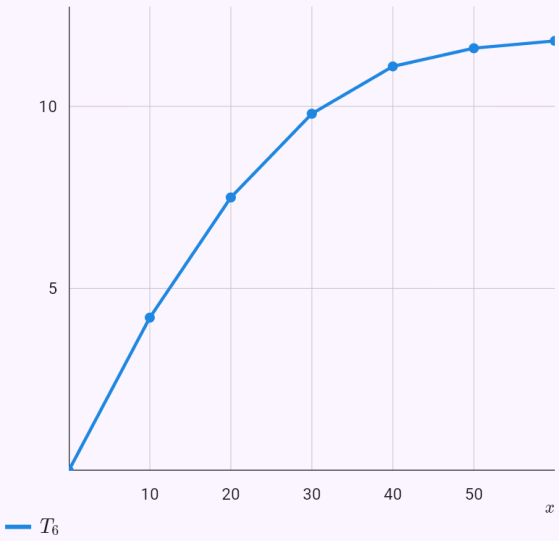
Kroki

- Całkujemy tabelę 6 podprzedziałów na przedziale $\langle 0;\ 60\rangle$
- Krok: $h = 10$
- Wartości w węzłach i ich współczynniki

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Metoda trapezów
  $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Błąd oszacowany regułą Rungego (obliczenie z podwójnym krokiem):
  $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Wynik metody: $\int_{0}^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Różnice progresywna, wsteczna i centralna dla trzech kroków.

Input: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Wynik

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

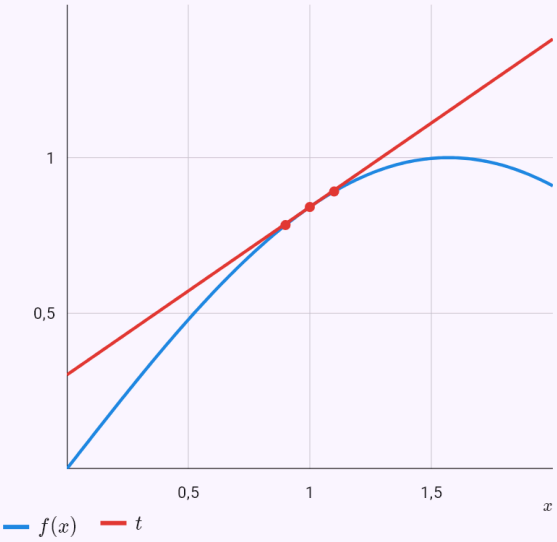
Kroki

- Pochodna funkcji $f(x) = \sin x$ w $x_0 = 1$ oszacowana ilorazami różnicowymi.
- Różnica progresywna $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ma błąd proporcjonalny do h, wsteczna $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ również; centralna $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ tylko do h².
  Druga pochodna: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
$0{,}1$	$0{,}497364$	$0{,}581441$	$0{,}539402$	$-0{,}840770$
$0{,}05$	$0{,}519045$	$0{,}561110$	$0{,}540077$	$-0{,}841296$
$0{,}025$	$0{,}529728$	$0{,}550764$	$0{,}540246$	$-0{,}841427$

- Dokładnie: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. Błąd różnicy progresywnej przy pierwszym kroku wynosi $0{,}0429$, centralnej tylko $9 \cdot 10^{-4}$
- Wynik metody: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Metoda Rungego–Kutty 4. rzędu z tabelą nachyleń i rozwiązaniem dokładnym dla porównania.

Input: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Wynik

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Kroki

- Zagadnienie początkowe $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroków).
- Metoda Rungego–Kutty 4. rzędu – średnia ważona czterech nachyleń

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

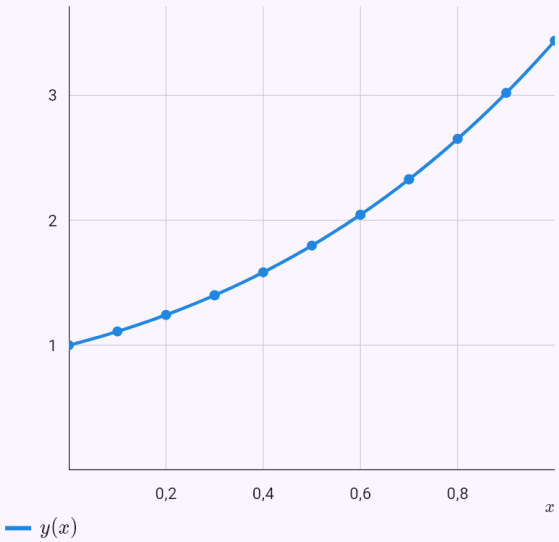
- Dla porównania rozwiązanie dokładne: $y = -x + 2e^x - 1$
- Krok po kroku

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- Na końcu przedziału dokładnie $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$

- Wynik metody: $y(1) \approx 3{,}436559$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Metoda Eulera dla równania bez rozwiązania elementarnego.

Input: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Wynik

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

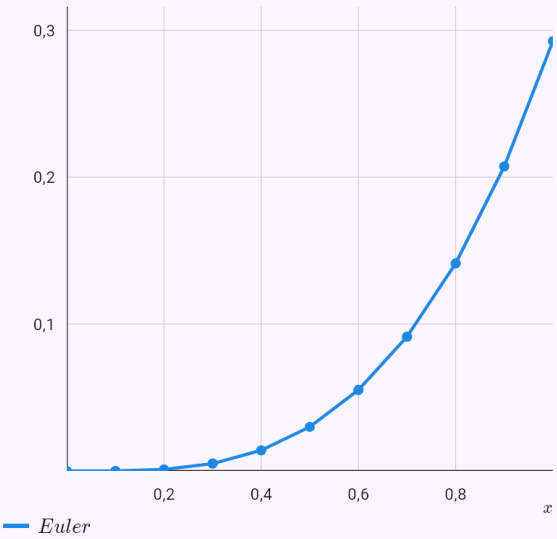
Kroki

- Zagadnienie początkowe $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ na przedziale $\langle 0;\ 1 \rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroków).
- Metoda Eulera – krok po stycznej: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Krok po kroku

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Wynik metody: $y(1) \approx 0{,}292542$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Predyktor-korektor ABM – dokładniejszy niż sam Adams–Bashforth.

Input: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Wynik

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Kroki

- Zagadnienie początkowe $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}1$ (10 kroków).
- Predyktor-korektor: metoda Adamsa–Bashfortha szacuje nowy punkt, metoda Adamsa–Moultona poprawia go nachyleniem w oszacowaniu. Start metodą Rungego–Kutty

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

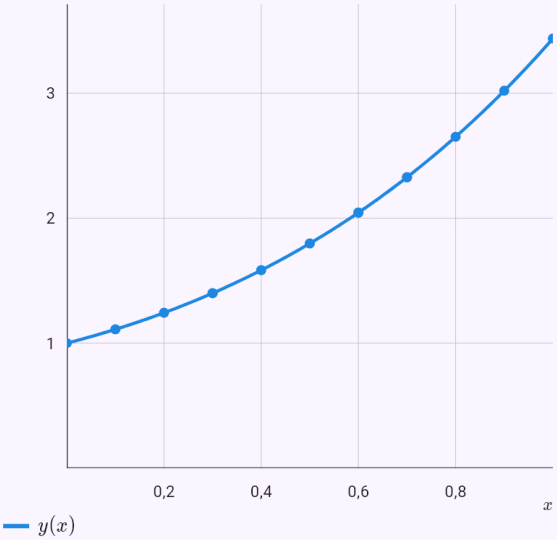
- Dla porównania rozwiązanie dokładne: $y = -x + 2e^x - 1$
- Krok po kroku

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + A$
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + A$
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + A$
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + A$
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + A$
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + A$
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + A$
10	1	3,436567	4,436567		

- Na końcu przedziału dokładnie $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Wynik metody: $y(1) \approx 3{,}436567$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Adaptacyjna RK45 – pierwszy krok jest odrzucony i skrócony, potem metoda sama steruje krokiem.

Input: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Wynik

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Kroki

- Zagadnienie początkowe $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ na przedziale $\langle 0;\ 2\rangle$, krok $h = 0{,}5$ (4 kroków).
- Krok adaptacyjny: w każdym kroku dwie metody (5. i 4. rzędu) z tych samych nachyleń – ich różnica szacuje błąd. Krok jest przyjmowany, jeśli błąd jest poniżej tolerancji, a następny według niego rośnie lub maleje

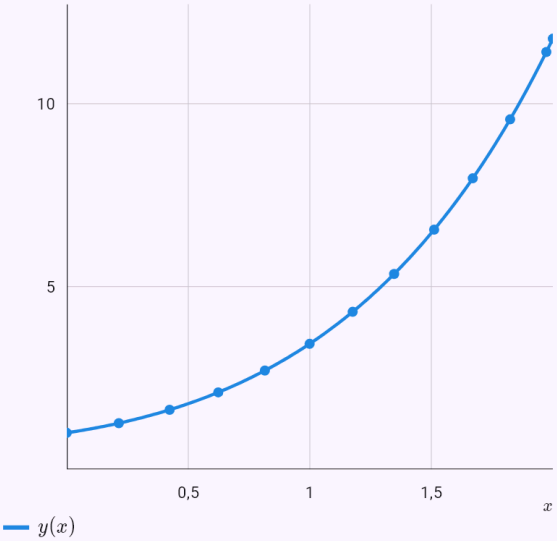
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Dla porównania rozwiązanie dokładne: $y = -x + 2e^x - 1$
- Kroki z tolerancją $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ krok przyjęty, × odrzucony (krok się zmniejszył i został powtórzony). Przyjętych 12, odrzuconych 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- Na końcu przedziału dokładnie $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Wynik metody: $y(2) \approx 11{,}778114$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Równanie sztywne – jawna metoda Eulera z krokiem 0,05 jest niestabilna (|1 + hλ| = 1,5) i rozbieżna.

Input: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Wynik

Rozwiązanie numeryczne jest przy tym kroku rozbieżne (zob. kroki).

Kroki

- Zagadnienie początkowe
  $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 kroków).
- Metoda Eulera – krok po stycznej:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Dla porównania rozwiązanie dokładne:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilność: równanie zachowuje się jak y' = λy z $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Metoda powiększa błąd w każdym kroku: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – przy tym kroku jest niestabilna, wartości będą oscylować i rosnąć. Pomoże mniejszy krok albo metoda niejawna.
- Krok po kroku

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Wartości rosną ponad wszelkie granice (w $x \approx 0{,}6000$) – metoda jest przy tym kroku niestabilna. Spróbuj mniejszego kroku albo metody niejawnej.

To samo równanie niejawną metodą Eulera – stabilna nawet z dużym krokiem.

Input: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Wynik

$$y(1) \approx 0{,}556616$$

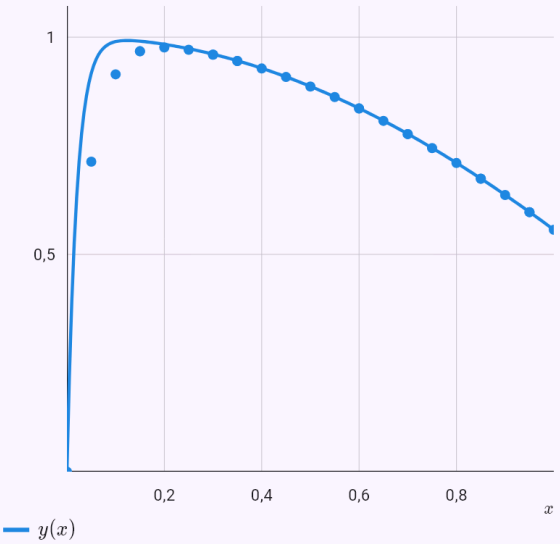
Kroki

- Zagadnienie początkowe
  $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ na przedziale $\langle 0;\ 1\rangle$, krok $h = 0{,}05$ (20 kroków).
- Niejawna metoda Eulera – nachylenie na końcu kroku, więc y_{n+1} jest po obu stronach równania. Rozwiązuje się je w każdym kroku metodą Newtona:
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Dla porównania rozwiązanie dokładne:
  $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Stabilność: równanie zachowuje się jak y' = λy z $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Metoda zmniejsza błąd w każdym kroku: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – obliczenie jest stabilne.
- Krok po kroku

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- Na końcu przedziału dokładnie
  $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Wynik metody: $y(1) \approx 0{,}556616$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Nieliniowe zagadnienie brzegowe metodą strzałów – pięć kroków siecznych poprawia nachylenie.

Input: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Wynik

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Kroki

- Zagadnienie brzegowe $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}05$ (20 podprzedziałów).
- Metoda strzałów: wybieramy nachylenie początkowe s = y'(a), rozwiązujemy zagadnienie jako początkowe (Runge–Kutta) i patrzymy, o ile chybia prawego końca. Nachylenie poprawiamy metodą siecznych

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_{k-1})}$$

- Strzały – każdy to jedno zagadnienie początkowe; poprawiamy, aż F(s) będzie poniżej tolerancji.

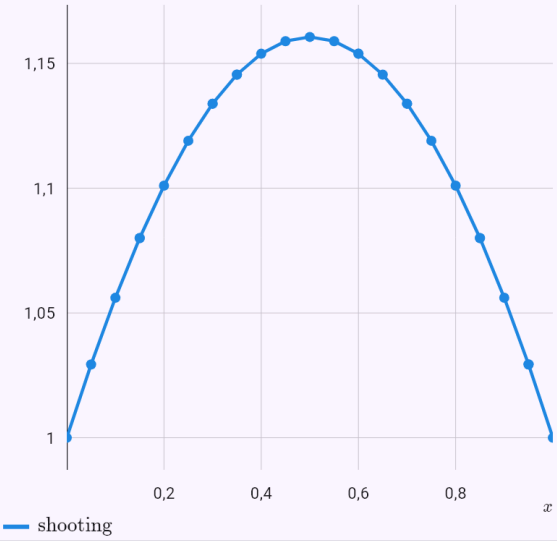
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	−0,429
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- Nachylenie początkowe, przy którym rozwiązanie trafia w warunek brzegowy: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- Rozwiązanie w węzłach

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Wynik metody: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Różnice skończone i algorytm Thomasa – dokładnie w węzłach dla y = x³.

Input: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Wynik

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Kroki

- Zagadnienie brzegowe $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, krok $h = 0{,}25$ (4 podprzedziałów).
- Różnice skończone: w węzłach x_i zastępujemy y'' i y' różnicami centralnymi

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Układ trójdiagonalny a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; wartości brzegowe przeniesione na prawą stronę

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- Algorytm Thomasa – eliminacja Gaussa dla macierzy trójdiagonalnej: przebieg w przód, potem podstawianie wstecz od końca

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

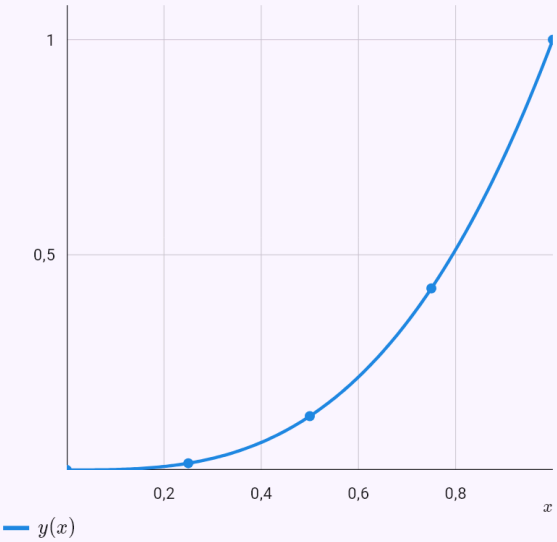
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Dla porównania rozwiązanie dokładne: $y = x^3$
- Rozwiązanie w węzłach

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- Największy błąd w węzłach względem rozwiązania dokładnego: $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Wynik metody: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Zagadnienie brzegowe elementami skończonymi – dokładnie w węzłach.

Input: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Wynik

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Kroki

- Zagadnienie brzegowe $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, krok $h = 0{,}25$ (4 podprzedziałów).
- Metoda elementów skończonych: równanie mnożymy przez „daszek" φ_i (funkcję kawałkami liniową, równą 1 w węźle i oraz 0 w pozostałych) i całkujemy przez części. Rozwiązania szukamy jako kombinacji daszków, całki po elementach obliczamy kwadraturą Gaussa

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Zestawiony układ – jeden wiersz dla każdego węzła wewnętrznego (macierz sztywności K jest trójdiagonalna, wartości brzegowe przeniesione na prawą stronę)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- Algorytm Thomasa – eliminacja Gaussa dla macierzy trójdiagonalnej: przebieg w przód, potem podstawianie wstecz od końca

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+1}$$

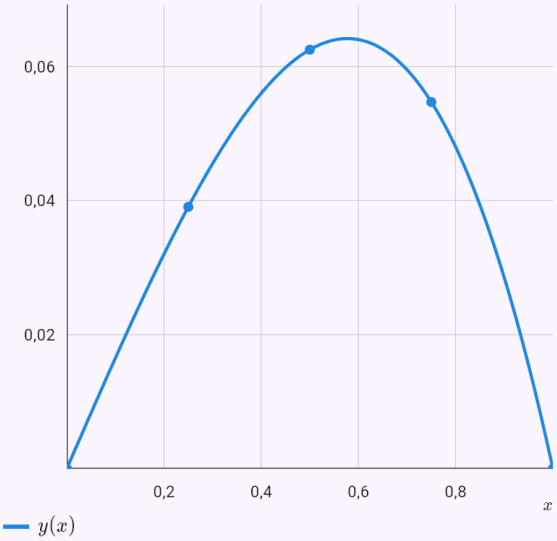
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Dla porównania rozwiązanie dokładne: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- Rozwiązanie w węzłach

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- Największy błąd w węzłach względem rozwiązania dokładnego: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Wynik metody: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Wahadło metodą Verleta – jej błąd energii pozostaje, błąd RK4 rośnie dziesięciokrotnie.

Input: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Wynik

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx$$

Kroki

- Równanie ruchu $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$ krok $h = 0{,}5$ (1000 kroków).
- Prędkościowa metoda Verleta – nowe położenie z prędkości i przyspieszenia, prędkość ze średniego przyspieszenia na początku i na końcu kroku. Energię całkowitą $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ obliczamy dla obu metod

  $x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \frac{h^2}{2}a(x_n)$

  $v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$
- Verlet a RK4 przy tym samym kroku (wybrane wiersze)

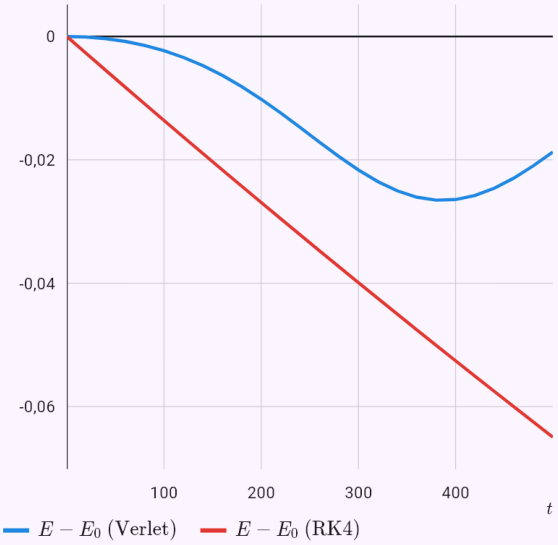
t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^R
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

- Błąd energii Verleta pozostaje taki sam, RK4 rośnie z czasem – przy długim obliczeniu Verlet jest wierniejszy. Największy błąd na początku i na końcu, Verlet wyżej, RK4 niżej

  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$

  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$
- Wynik metody:
  $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Wykres



Odchylenie energii całkowitej od początkowej: Verlet oscyluje wokół zera, RK4 powoli się oddala.

Metoda Gaussa–Seidla – równania przestawione dla dominacji diagonalnej.

Input: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Wynik

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Kroki

- Układ w postaci macierzowej
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Równania przestawione tak, aby macierz była diagonalnie dominująca ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- Macierz iteracji jej promień spektralny $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – metoda jest zbieżna.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Metoda Gaussa–Seidla – nowe wartości używamy, gdy tylko zostaną obliczone

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Iteracje

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- Warunek stopu $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ jest spełniony po 6 iteracjach.
- Wynik metody: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

Rozkład LU w dokładnych ułamkach, podstawianie w przód i wstecz.

Input: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Wynik

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Kroki

- Układ w postaci macierzowej
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Eliminacja Gaussa – mnożniki wierszy tworzą macierz L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- Rozkład LU A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Podstawianie w przód Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$

- Podstawianie wstecz Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$

- Wynik metody: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Wielomian interpolacyjny Lagrange’a i jego wartość w punkcie.

Input: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Wynik

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Kroki

- Dane punkty (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Wielomiany bazowe Lagrange’a $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

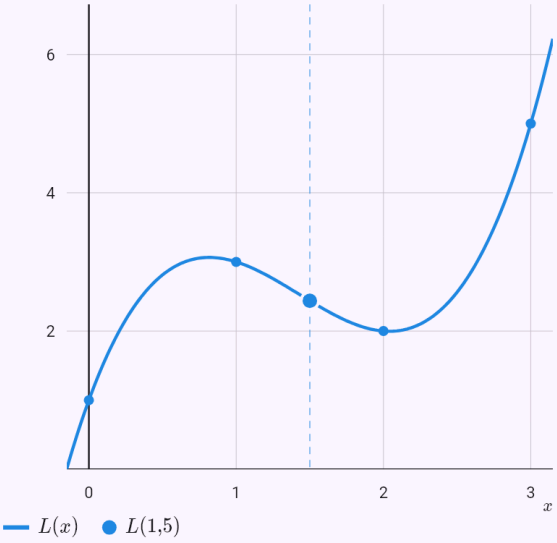
- Wielomian interpolacyjny Lagrange’a

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

- Wartość w danym punkcie: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$
- Wynik metody

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Wielomian Newtona z tabeli ilorazów różnicowych.

Input: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Wynik

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Kroki

- Dane punkty (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Tabela ilorazów różnicowych

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

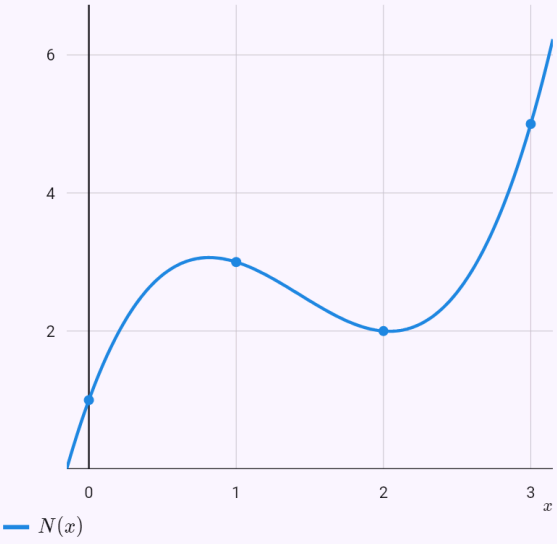
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- Wielomian interpolacyjny Newtona (współczynniki z górnej przekątnej tabeli)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Wynik metody: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Naturalny splajn sześcienny – układ dla momentów i kawałki.

Input: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Wynik

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Kroki

- Dane punkty (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Naturalny splajn sześcienny: drugie pochodne M⃰ w węzłach spełniają przy $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

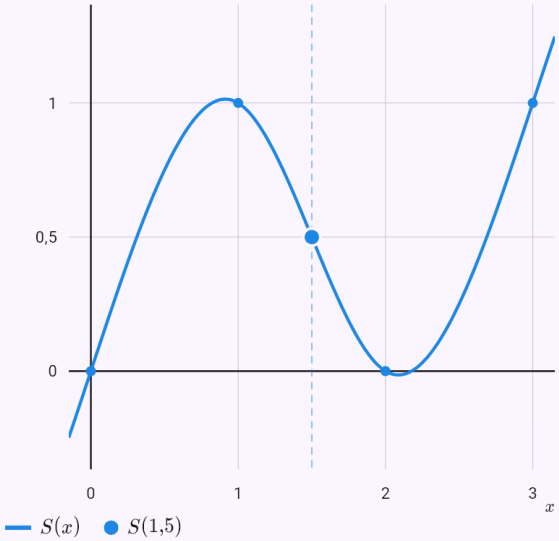
- Rozwiązanie układu:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Na każdym podprzedziale

$$S_i(x) = y_i + b_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x-$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- Wartość w danym punkcie: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Wynik metody: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Aproksymacja kwadratowa metodą najmniejszych kwadratów.

Input: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Wynik

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Kroki

- Dane punkty (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Szukamy wielomianu z $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$.

  Potrzebne sumy

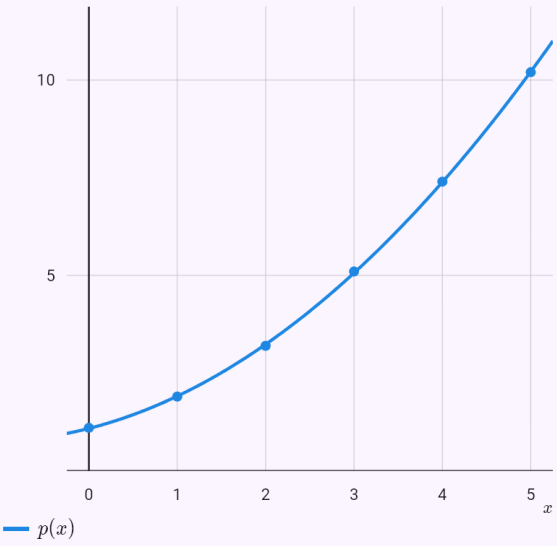
  $$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- Równania normalne dla współczynników $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- Rozwiązanie:
  $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- Suma kwadratów odchyleń:
  $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Wynik metody: $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Wewnętrzna stopa zwrotu – kroki bisekcji zwinięte pod wynikiem.

Input: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

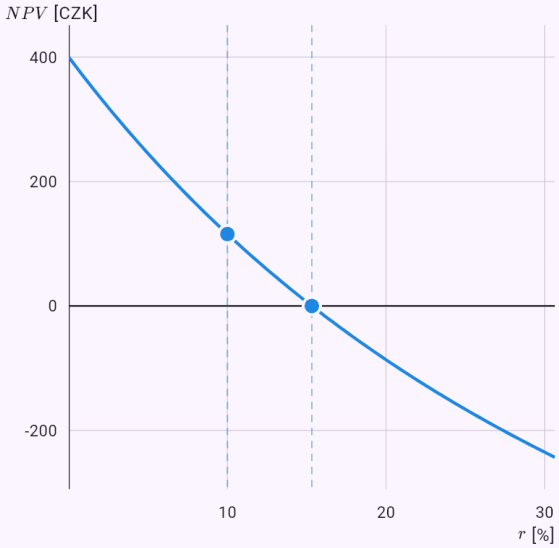
Wynik

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Kroki

- Dane:
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Przeliczamy jednostki: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Wartość bieżąca netto NPV sumuje przepływy pieniężne projektu CF_0, CF_1, … zdyskontowane wymaganą stopą zwrotu r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Projekt z NPV > 0 zarabia więcej, niż wynosi wymagana stopa zwrotu. Wewnętrzna stopa zwrotu IRR to stopa, przy której NPV = 0 – pierwiastek równania wielomianowego, znajdowany numerycznie. Okres zwrotu to moment, w którym narastająca suma przepływów (prostych lub zdyskontowanych) przestaje być ujemna. Równanie modelu: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Wartość bieżąca netto
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – projekt zarabia co najmniej wymaganą stopę zwrotu.
- Rozwiązujemy równanie numerycznie (bisekcją): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Metoda: bisekcja, 14 iteracji

Wykres



Wykres obliczony z rozwiązania modelu; kropki to dane wartości albo odpowiedź.

Znane ograniczenia

- Pierwiastki: jedno równanie z jedną niewiadomą, pierwiastki rzeczywiste; automatycznie izolowane są najwyżej trzy pierwiastki w ⟨−50; 50⟩.
- Równania różniczkowe: tylko jedno równanie pierwszego rzędu y′ = f(x, y), najwyżej 2000 kroków; układy i wyższe rzędy jeszcze nie.
- Układy: 2 do 6 równań; interpolacja najwyżej 12 punktów, wielomian najmniejszych kwadratów najwyżej stopnia 5.
- Metody Simpsona i Romberga z tabeli wymagają równych kroków (Romberg 2, 4, 8, … podprzedziałów).
- Zagadnienia brzegowe tylko 2. rzędu z wartościami y(a), y(b) (nie pochodną na końcu); różnice skończone tylko dla równania liniowego względem y i y′. Metoda Verleta tylko dla ruchu x″ = a(x) w jednej współrzędnej – orbita planety na płaszczyźnie jeszcze nie.