Mathtrace – manuale

V. Statistica

Indice

V. Statistica

41. Statistica

41. Statistica

Scrivi i dati come data(…): separa i valori con punti e virgola, spazi o a capo (data(1.5 2.5 3)). Una tabella – una riga per osservazione, una colonna per variabile – va riga per riga separata da punti e virgola; la prima riga può contenere i nomi delle variabili. Più comodamente: il tasto con la griglia nella scheda f(x) apre una tabella da compilare, in cui incollare dagli appunti (celle da Excel o Fogli Google) o caricare da un file CSV, e il pulsante «Come dati» la inserisce per la statistica – anche una tabella più grande della griglia.

Per una variabile, un chip sceglie cosa calcolare. Statistiche descrittive: la media aritmetica, la mediana, la moda, i quartili (le mediane della metà inferiore e superiore), il campo di variazione e lo scarto interquartile, la varianza e la deviazione standard campionarie (n − 1) e della popolazione (n), il coefficiente di variazione e i valori anomali (fuori da $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR$ e $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR$), con un box plot. Frequenze e istogramma: la tabella delle frequenze assolute, relative e cumulate – per valori per numeri interi con pochi valori, altrimenti per classi (il loro numero secondo la regola di Sturges). Punti z: ogni valore standardizzato con la media e la deviazione standard dei dati, con il suo punteggio T.

Due variabili (due colonne) danno correlazione e regressione: le somme, la covarianza, il coefficiente di correlazione di Pearson r con la forza della relazione a parole, la retta di regressione dei minimi quadrati e il coefficiente di determinazione r^2, con un grafico a dispersione. Tre o più variabili ricevono le loro statistiche descrittive affiancate con box plot.

Inferenza statistica dai dati: l'intervallo di confidenza della media (chip «Intervallo di confidenza della media», 90, 95 o 99 %) con la distribuzione t; il test t (chip «Test t») – una variabile contro il valore testato μ_0, due variabili come campioni indipendenti (test di Welch, o con varianze uguali) o valori appaiati (le differenze delle coppie); il test χ^2 (chip «Test χ^2») – una colonna di frequenze come test di adattamento a una distribuzione uniforme, una tabella come test di indipendenza con la V di Cramér. Sotto i chip inserisci il livello di significatività α, l'alternativa (bilaterale, unilaterale sinistra, unilaterale destra) e μ_0. I passaggi: le ipotesi, la statistica test, il valore critico e la regione critica, il p-value e la decisione; il grafico mostra la distribuzione con la regione critica ombreggiata. Scrivi due campioni indipendenti di numerosità diverse come colonne con nome – data(A = 23 25 28; B = 20 22 21 25).

Confronto di gruppi: il chip «Test sui ranghi (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)» confronta due gruppi con il test di Mann–Whitney (con «Appaiati» valori appaiati con il test di Wilcoxon) e tre o più gruppi con il test di Kruskal–Wallis – con i ranghi dei valori, senza assumere una distribuzione normale; per campioni piccoli senza ranghi ripetuti il p-value è esatto. Il chip «ANOVA (analisi della varianza)» confronta le medie dei gruppi con l'analisi della varianza a una via con la tabella ANOVA, il test F e la dimensione dell'effetto η^2. Scrivi i gruppi in colonne, di qualsiasi lunghezza (colonne con nome); il grafico mostra i box plot dei gruppi e la distribuzione della statistica test. Per il test χ^2 di una colonna di frequenze, il campo «Quote attese» accetta quote attese proprie – 1:2:1, 0.25 0.5 0.25 o in percentuale.

La regressione di due variabili ha sotto il suo chip una scelta del modello: lineare (con il test di significatività della correlazione), quadratica (le equazioni normali dei minimi quadrati), esponenziale y = a·e^(bx), potenza y = a·x^b e logaritmica y = a + b·ln x (con la linearizzazione tramite logaritmi) – con il coefficiente di determinazione R^2 e un grafico della curva adattata. Il modulo «Statistica e psicometria» ha anche l'intervallo di confidenza e i test t da valori riassuntivi (numerosità, media, deviazione standard) – compresi il test z con σ noto e il test t per due campioni.

La distribuzione normale è nel modulo «Statistica e psicometria» (la sezione «Applicazioni» della schermata iniziale, l'ambito Statistica): le probabilità P(X < x), P(X > x), P(a < X < b) e il quantile – il valore sotto il quale si trova una data frazione. I passaggi standardizzano, $z = (x - \mu)/\sigma$, e usano la funzione di ripartizione Φ, uno z negativo come $1 - \Phi(|z|)$ come nelle tavole; il grafico mostra la densità con l'area ombreggiata.

Come inserirlo

`data(3; 5; 7; 7; 9)`	Una variabile – i valori separati da punti e virgola, spazi o uno sotto l'altro.
`data(x y; 1 52; 2 58; 3 61)`	Una tabella riga per riga, la prima riga i nomi delle variabili (facoltativa).
`data(x = 1 2 3 4; y = 2 4 5 4)`	Colonne con nome, ciascuna con i suoi valori.

Esempi

Statistiche descrittive di otto valori.

Input: `data(2; 4; 4; 4; 5; 5; 7; 9)`

Risultato

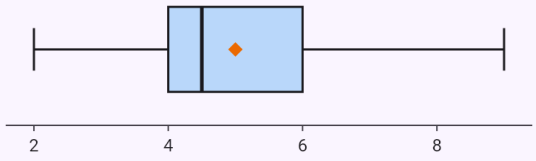
$$\bar{x} = 5$$
$$\tilde{x} = 4{,}5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 8$, i dati ordinati:
  $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- La media aritmetica: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40}{8} = 5$
- La mediana è il valore centrale dei dati ordinati:
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- La moda (il valore più frequente, 3×): $\hat{x} = 4$
- I quartili sono le mediane della metà inferiore e di quella superiore: $Q_1 = 4, \quad Q_2 = \tilde{x} = 4{,}5, \quad Q_3 = 6$
- Il campo di variazione e lo scarto interquartile
  $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 2 = 7$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$
- La somma dei quadrati degli scarti dalla media:
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 32$
- La varianza – campionaria s² e della popolazione σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{7} \approx 4{,}571$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{8} = 4$
- La deviazione standard
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}571} \approx 2{,}138$
  $\sigma = \sqrt{4} = 2$
- Il coefficiente di variazione:
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}138}{5} \approx 0{,}4276 = 42{,}8\,\%$
- I limiti per i valori anomali
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 1, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 9$ – nessun valore si trova fuori di essi.
- La varianza campionaria s² divide per n − 1 e stima la varianza della popolazione da un campione – la scelta abituale. La varianza della popolazione σ² divide per n, per dati che sono l'intera popolazione.
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

Grafico

Box plot (mediana, quartili, valori anomali; ◆ media)



Il valore anomalo 31 nel box plot.

Input: `data(12 15 14 13 16 15 14 31)`

Risultato

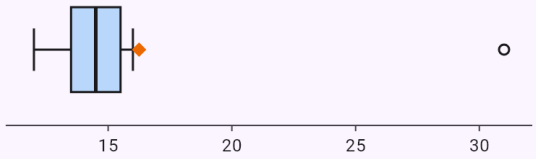
$$\bar{x} = 16{,}25$$
$$\tilde{x} = 14{,}5$$
$$s \approx 6{,}089$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 8$, i dati ordinati:
  $12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16,\ 31$
- La media aritmetica: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{8} = 16{,}25$
- La mediana è il valore centrale dei dati ordinati:
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$
- La moda (il valore più frequente, 2×): $\hat{x} = 14,\ 15$
- I quartili sono le mediane della metà inferiore e di quella superiore: $Q_1 = 13{,}5, \quad Q_2 = \tilde{x} = 14{,}5, \quad Q_3 = 15{,}5$
- Il campo di variazione e lo scarto interquartile
  $R = x_{max} - x_{min} = 31 - 12 = 19$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 15{,}5 - 13{,}5 = 2$
- La somma dei quadrati degli scarti dalla media:
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 259{,}5$
- La varianza – campionaria s² e della popolazione σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{7} \approx 37{,}07$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{8} \approx 32{,}44$
- La deviazione standard
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{37{,}07} \approx 6{,}089$
  $\sigma = \sqrt{32{,}44} \approx 5{,}695$
- Il coefficiente di variazione:
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6{,}089}{16{,}25} \approx 0{,}3747 = 37{,}5\,\%$
- I valori anomali si trovano fuori dai limiti
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 10{,}5, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 18{,}5$: 31
- La varianza campionaria s² divide per n − 1 e stima la varianza della popolazione da un campione – la scelta abituale. La varianza della popolazione σ² divide per n, per dati che sono l'intera popolazione.
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

Grafico

Box plot (mediana, quartili, valori anomali; ◆ media)



La tabella delle frequenze dei voti e il suo istogramma.

Input: `data(1 2 2 3 3 3 3 4 4 5 1 3 2 4 3)` Frequenze e istogramma

Risultato

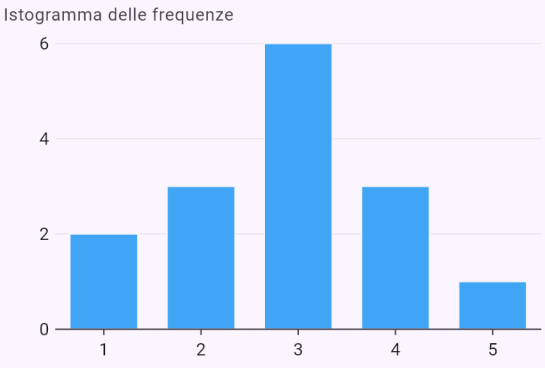
$$n = 15$$
$$\hat{x} = 3$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 15$, i dati ordinati:
  $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5$
- La tabella delle frequenze – assolute n, relative f, cumulate N e F

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,133	2	0,133
2	3	0,200	5	0,333
3	6	0,400	11	0,733
4	3	0,200	14	0,933
5	1	0,067	15	1,000
$\sum$	15	1		

Grafico



Dati continui raggruppati in classi.

Input: `data(12.5 14.1 15.8 17.2 18.9 21.3 22.0 23.7 25.1 26.4 28.8 31.2)`

Frequenze e istogramma

Risultato

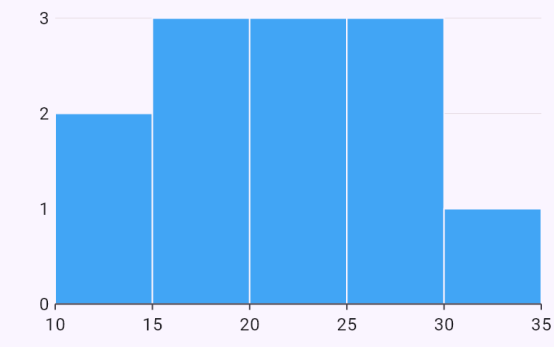
$$n = 12$$
$$k = 5, \quad h = 5$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 12$, i dati ordinati
  $12{,}5,\ 14{,}1,\ 15{,}8,\ 17{,}2,\ 18{,}9,\ 21{,}3,\ 22,\ 23{,}7,\ 25{,}1,\ 26,$
- I valori sono molti – li raggruppiamo in 5 classi (regola di Sturges)
  $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + \log_2 12 \approx 4{,}585 \Rightarrow k = 5$
  $h \approx \frac{R}{k} = \frac{18{,}7}{5} \approx 3{,}74 \Rightarrow h = 5$
- La tabella delle frequenze delle classi (x il valore centrale della classe)

I_j	x_j	n_j	f_j	N_j	F_j
$[10;\ 15)$	12,5	2	0,167	2	0,167
$[15;\ 20)$	17,5	3	0,250	5	0,417
$[20;\ 25)$	22,5	3	0,250	8	0,667
$[25;\ 30)$	27,5	3	0,250	11	0,917
$[30;\ 35]$	32,5	1	0,083	12	1,000
$\sum$		12	1		

Grafico



I punteggi z e i punteggi T dei valori.

Input: `data(2 4 4 4 5 5 7 9)` Punti z

Risultato

$$\bar{x} = 5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 8$, i dati ordinati: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- La media aritmetica: $\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$
- La deviazione standard

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{32}{7}} \approx 2{,}138$$

- Ogni valore standardizzato

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 5}{2{,}138}$$
$$T_i = 50 + 10 z_i$$

- I punteggi z e i punteggi T dei valori

x_i	z_i	T_i
2	−1,40	36,0
4	−0,47	45,3
4	−0,47	45,3
4	−0,47	45,3
5	0,00	50,0
5	0,00	50,0
7	0,94	59,4
9	1,87	68,7

- I punteggi z usano la media e la deviazione standard di questi dati. Per confrontare con una popolazione, usa la media e la DS della norma (il modello «Conversione di punteggi standard»).

Correlazione e retta di regressione – ore di studio e punti del test.

Input: `data(x y; 1 52; 2 58; 3 61; 4 70; 5 74; 6 79)`

Risultato

$$r \approx 0{,}9937$$

$$\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 6$, i dati ordinati $[1;\,52],\ [2;\,58],\ [3;\,61],\ [4;\,70],\ [5;\,74],\ [6;\,79]$
- Le somme e le medie

  $\sum x_i = 21$

  $\sum y_i = 394$

  $\sum x_i^2 = 91$

  $\sum y_i^2 = 26\,410$

  $\sum x_i y_i = 1475$

  $\bar{x} = 3{,}5$

  $\bar{y} = 65{,}67$
- La deviazione standard

  $$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \approx 1{,}871$$

  $$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}} \approx 10{,}33$$
- La covarianza

  $$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{1475 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot 65{,}67}{5} = 19{,}2$$
- Il coefficiente di correlazione di Pearson: $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{19{,}2}{1{,}871 \cdot 10{,}33} \approx 0{,}9937$ – la relazione è molto forte, positiva (y cresce con x).
- I coefficienti della retta di regressione con i minimi quadrati

  $$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{19{,}2}{3{,}5} \approx 5{,}486$$

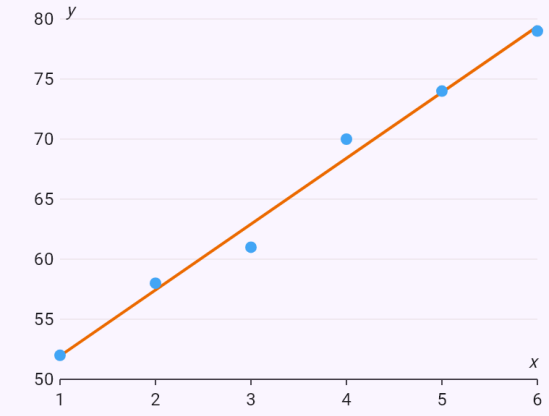
  $$a = \bar{y} - b\bar{x} = 65{,}67 - 5{,}486 \cdot 3{,}5 \approx 46{,}47$$
- La retta di regressione: $\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$
- Il coefficiente di determinazione $r^2 = 0{,}9937^2 \approx 0{,}9874$ – la retta spiega il $98{,}7\,\%$ della varianza di y.
- Il test dell'ipotesi nulla ρ = 0 (distribuzione t con 4 gradi di libertà) – la correlazione è statisticamente significativa.

  $$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}9937\sqrt{4}}{\sqrt{1-0{,}9937^2}} \approx 17{,}73$$

  $p < 0{,}0001 \le \alpha = 0{,}05$
- La correlazione descrive solo una relazione lineare: non dice cosa causa cosa e può non cogliere una relazione non lineare. Usa la retta di regressione solo nell'intervallo delle x misurate.

Grafico

Grafico a dispersione con la retta di regressione



Tre variabili affiancate.

Input: `data(A B C; 12 15 9; 14 18 11; 11 16 10; 15 19 12; 13 17 10)`

Risultato

$$\bar{x}_{\mathrm{A}} = 13$$
$$\bar{x}_{\mathrm{B}} = 17$$
$$\bar{x}_{\mathrm{C}} = 10{,}4$$

Passaggi

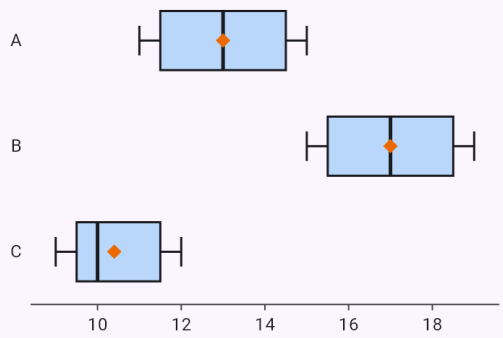
- Le statistiche descrittive delle variabili

	A	B	C
n	5	5	5
$\bar{x}$	13	17	10,4
$\tilde{x}$	13	17	10
Q_1	11,5	15,5	9,5
Q_3	14,5	18,5	11,5
s	1,581	1,581	1,14
σ	1,414	1,414	1,02
x_{min}	11	15	9
x_{max}	15	19	12

- La varianza campionaria s² divide per n − 1 e stima la varianza della popolazione da un campione – la scelta abituale. La varianza della popolazione σ² divide per n, per dati che sono l'intera popolazione.

Grafico

Box plot (mediana, quartili, valori anomali; ◆ media)



Intervallo di confidenza al 95 % della media di dieci misure.

Input: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Intervallo di confidenza della media

Risultato

$$95\,\%: \ [99{,}71;\ 106{,}3]$$

Passaggi

- Numerosità, media e deviazione standard campionaria: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- L'errore standard: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Il quantile per la confidenza scelta: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$
- L'intervallo di confidenza
  $\bar{x} \pm t \cdot SE = 103 \pm 2{,}262 \cdot 1{,}453 = 103 \pm 3{,}287 \Rightarrow [99,$
- Confidenza del 95 % significa: se il campionamento si ripetesse molte volte, circa il 95 % degli intervalli calcolati in questo modo conterrebbe la vera media μ. Non significa che μ si trovi in questo particolare intervallo con probabilità del 95 %.
- Per un campione piccolo (n < 30) la distribuzione t assume che i dati provengano da una distribuzione approssimativamente normale. Con dati fortemente asimmetrici o valori anomali è più adatto un test non parametrico.

La media differisce da 100? Test t a un campione.

Input: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Test t

Risultato

$$t \approx 2{,}065$$

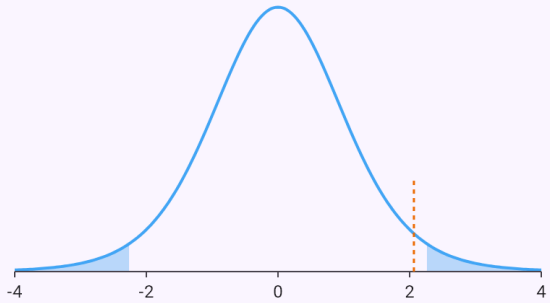
$$p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- Numerosità, media e deviazione standard campionaria: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- L'ipotesi nulla e quella alternativa: $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu \neq 100$
- L'errore standard: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione t con 9 gradi di libertà: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{103 - 100}{1{,}453} \approx 2{,}065$
- Il valore critico al livello α: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$, la regione critica $|t| \geq 2{,}262$
- Il p-value: $p = 2\,P(T \geq 2{,}065) \approx 0{,}06895$
- Poiché $p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla – i dati non forniscono prove sufficienti contro di essa.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Per un campione piccolo (n < 30) la distribuzione t assume che i dati provengano da una distribuzione approssimativamente normale. Con dati fortemente asimmetrici o valori anomali è più adatto un test non parametrico.

Grafico

Distribuzione t – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}065$

Due campioni indipendenti di numerosità diverse – test t di Welch.

Input: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)` Test t

Risultato

$$t \approx 3{,}503$$
$$p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$$

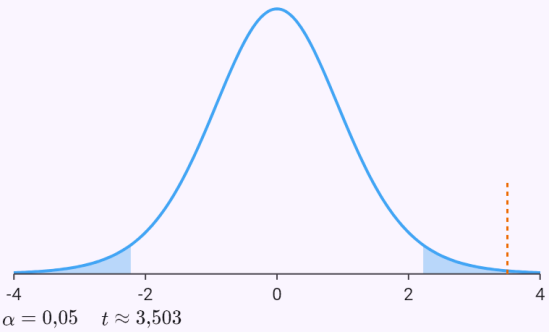
Passaggi

- Numerosità, media e deviazione standard campionaria
  $n_1 = 6,\ \bar{x}_1 = 26{,}5,\ s_1 \approx 2{,}429$
  $n_2 = 7,\ \bar{x}_2 = 22,\ s_2 \approx 2{,}16$
- L'ipotesi nulla e quella alternativa:
  $H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- L'errore standard
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2{,}429^2}{6} + \frac{2{,}16^2}{7}} \approx 1{,}285$$
- I gradi di libertà di Welch–Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 10{,}18$$
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione t con $10{,}18$ gradi di libertà:
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{26{,}5 - 22}{1{,}285} \approx 3{,}503$$
- Il valore critico al livello α: $t_{0{,}975}(10{,}18) \approx 2{,}223$, la regione critica $|t| \geq 2{,}223$
- Il p-value: $p = 2\,P(T \geq 3{,}503) \approx 0{,}005546$
- Poiché $p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.

- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il test di Welch non assume varianze uguali dei gruppi; i suoi gradi di libertà v non devono essere interi.

Grafico

Distribuzione t – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}503$

Test t per dati appaiati – misure prima e dopo.

Input: `data(x1 x2; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71)` Test t · Appaiati

Risultato

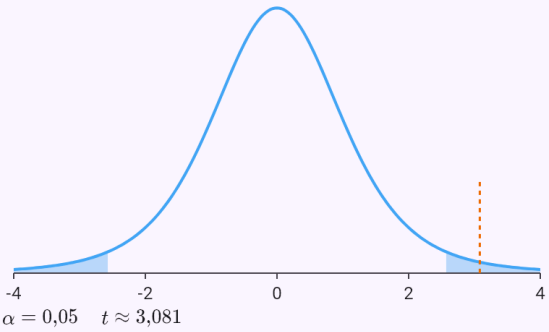
$$t \approx 3{,}081$$
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- Le differenze delle coppie d (colonna 1 − colonna 2): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3;\ n = 6, \quad \bar{d} \approx 2{,}167, \quad s_d \approx 1{,}722$
- L'ipotesi nulla e quella alternativa: $H_0 : \mu_d = 0, \quad H_1 : \mu_d \neq 0$
- L'errore standard: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}722}{\sqrt{6}} \approx 0{,}7032$
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione t con 5 gradi di libertà: $t = \dfrac{\bar{d} - \mu_0}{SE} = \dfrac{2{,}167 - 0}{0{,}7032} \approx 3{,}081$
- Il valore critico al livello α: $t_{0{,}975}(5) \approx 2{,}571$, la regione critica $|t| \geq 2{,}571$
- Il p-value: $p = 2\,P(T \geq 3{,}081) \approx 0{,}02743$
- Poiché $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Per un campione piccolo (n < 30) la distribuzione t assume che i dati provengano da una distribuzione approssimativamente normale. Con dati fortemente asimmetrici o valori anomali è più adatto un test non parametrico.
- Il test t per dati appaiati è un test t a un campione delle differenze (colonna 1 − colonna 2) – ogni coppia appartiene allo stesso soggetto (es. prima e dopo).

Grafico

Distribuzione t – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



Il dado è equo? Test χ² di adattamento.

Input: `data(8 12 9 11 6 14)` Test χ²

Risultato

$$\chi^2 = 4{,}2$$
$$p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- Ipotesi nulla: tutte le 6 categorie sono equiprobabili ($H_0: p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$); alternativa: almeno una differisce.
- Le frequenze attese sotto H_0 $E_i = \frac{N}{k} = \frac{60}{6} = 10$ e i contributi delle categorie

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	0,4
2	12	10	0,4
3	9	10	0,1
4	11	10	0,1
5	6	10	1,6
6	14	10	1,6
$\sum$	60	60	4,2

- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione χ² con 5 gradi di libertà

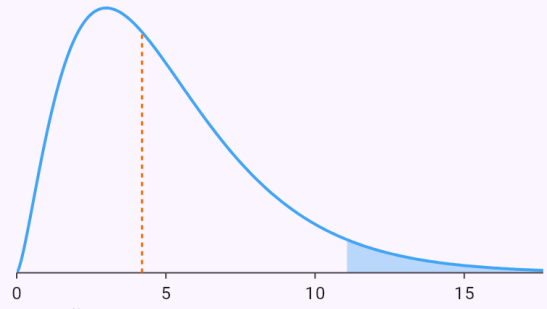
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}6 + 1$$

- Il valore critico al livello α: $\chi^2_{0{,}95}(5) \approx 11{,}07$, la regione critica $\chi^2 \geq 11{,}07$
- Il p-value: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}2) \approx 0{,}521$
- Poiché $p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla – i dati non forniscono prove sufficienti contro di essa.

- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il test χ² lavora con frequenze (numeri di casi), non con percentuali o medie.

Grafico

Distribuzione χ² – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



Test di indipendenza in una tabella 2×2.

Input: `data(20 30; 25 15)` Test χ^2

Risultato

$$\chi^2 = 4{,}5$$
$$p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$V \approx 0{,}2236$$

Passaggi

- Ipotesi nulla: la variabile di riga e quella di colonna sono indipendenti; alternativa: sono dipendenti.
- Le frequenze attese sotto indipendenza $E_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{N}$, quelle osservate tra parentesi

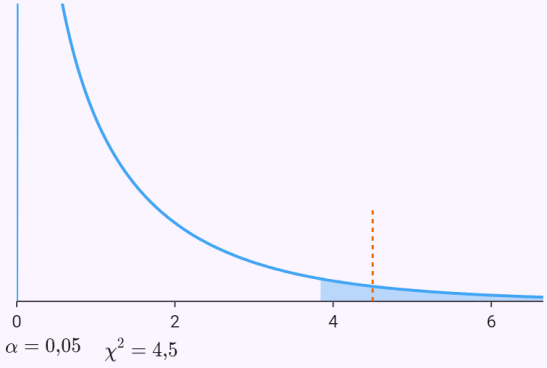
	1	2	$\sum$
1	25 (20)	25 (30)	50
2	20 (25)	20 (15)	40
$\sum$	45	45	90

- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione χ^2 con 1 gradi di libertà:
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 1 + 1 + 1{,}25 + 1{,}25 = 4{,}5$$
- Il valore critico al livello α: $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}841$, la regione critica $\chi^2 \geq 3{,}841$
- Il p-value: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}5) \approx 0{,}03389$
- Poiché $p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.

- La forza dell'associazione – la V di Cramér (0 nessuna, 1 perfetta)
$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(r,c) - 1)}} = \sqrt{\frac{4{,}5}{90 \cdot 1}} \approx 0{,}2236$$
- Il test χ^2 lavora con frequenze (numeri di casi), non con percentuali o medie.

Grafico

Distribuzione χ^2 – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



Due gruppi con il test di Mann–Whitney – campioni piccoli, un p-value esatto.

Input: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)`

Test sui ranghi (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Risultato

$$U = 3$$
$$z \approx -2{,}579$$
$$p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- L'ipotesi nulla: entrambi i gruppi provengono dalla stessa distribuzione, l'alternativa: uno tende ad avere valori più alti

  H_0: $F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}$
  H_1: $F_{\mathrm{A}} \neq F_{\mathrm{B}}$

- I valori di entrambi i gruppi insieme ordinati e numerati con il loro rango R (valori uguali la media dei loro ranghi)

x	R	
19	1	B
20	2	B
21	3	B
22	4	B
23	5,5	A
23	5,5	B
24	7	B
25	8,5	A
25	8,5	B
26	10	A
27	11	A
28	12	A
30	13	A

- Le numerosità dei gruppi e le somme dei ranghi:
  $n_1 = 6, \quad n_2 = 7, \quad R_1 = 60, \quad R_2 = 31$

- L'U di Mann–Whitney – il numero di coppie in cui il valore di un gruppo ha un rango più alto di quello dell'altro; si testa il minore dei due

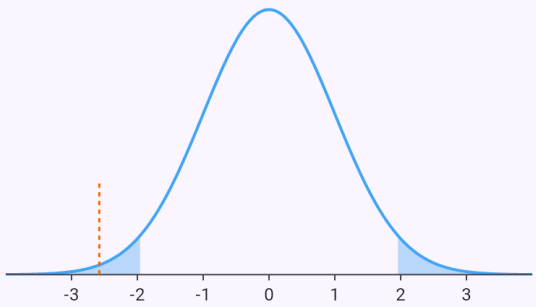
$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 60 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 39$$
$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 6 \cdot 7 - 39 = 3$$
$$U = \min(U_1, U_2) = 3$$

- La statistica test – sotto H_0 ha la distribuzione normale standard: $z = \dfrac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_U} = \dfrac{3 - 21}{6{,}981} \approx -2{,}579$

- Il valore critico al livello α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la regione critica $|z| \geq 1{,}96$
- Il p-value: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}579) \approx 0{,}009922$
- Poiché $p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- La dimensione dell'effetto r (indicativamente 0,1 piccola, 0,3 media, 0,5 grande): $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{N}} = \dfrac{2{,}579}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7152$
- Il test di Mann–Whitney è un test sui ranghi: non assume una distribuzione normale ed è adatto anche a dati ordinali e valori anomali. Confronta le intere distribuzioni dei gruppi – per forme simili è un test della differenza delle mediane.

Grafico

Distribuzione normale standard – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}579$

Valori appaiati prima e dopo con il test di Wilcoxon.

Input: `data(pred po; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71; 79 72)`

Test sui ranghi (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis) · Appaiati

Risultato

$$T = 1$$
$$z \approx -2{,}205$$
$$p \approx 0{,}02743 \le \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- L'ipotesi nulla: la mediana delle differenze è zero (nessun cambiamento), l'alternativa: non lo è:
  $H_0: \tilde{d} = 0, \quad H_1: \tilde{d} \neq 0$
- Le differenze delle coppie d (1ª colonna − 2ª colonna): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 7$; differenze nulle escluse: $n = 7$
- Le differenze non nulle ordinate per grandezza (senza segno) e numerate con il loro rango R; il segno resta con il rango

d_i	R	
-1	1	$-$
2	$2{,}5$	$+$
2	$2{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
4	6	$+$
7	7	$+$

- Le somme dei ranghi delle differenze positive e negative
  $T^+ = 27$
  $T^- = 1$
  $T = \min\left(T^+, T^-\right) = 1$
- La statistica test − sotto H_0 ha la distribuzione normale standard: $z = \dfrac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sigma_T} = \dfrac{1 - 14}{5{,}895} \approx -2{,}205$
- Il valore critico al livello α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la regione critica $|z| \ge 1{,}96$
- Il p-value: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}205) \approx 0{,}02743$
- Poiché $p \approx 0{,}02743 \le \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla − il risultato è statisticamente significativo.

- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera − non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- La dimensione dell'effetto r (indicativamente 0,1 piccola, 0,3 media, 0,5 grande): $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}205}{\sqrt{7}} \approx 0{,}8335$
- Il test di Wilcoxon è l'analogo sui ranghi del test t per dati appaiati: non assume differenze a distribuzione normale e tiene conto dei loro segni e delle loro grandezze tramite i ranghi.

Grafico

Distribuzione normale standard − la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}205$

Tre gruppi con il test di Kruskal–Wallis.

Input: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

Test sui ranghi (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Risultato

$$H \approx 8{,}263$$
$$p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- L'ipotesi nulla: tutti i gruppi provengono dalla stessa distribuzione, l'alternativa: almeno uno differisce
  $H_0: F_1 = \cdots = F_3$
  $H_1: \exists\, i, j: F_i \neq F_j$

- I valori di tutti i gruppi insieme ordinati e numerati con il loro rango R (valori uguali la media dei loro ranghi)

x	R	
11	1	A
12	2,5	A
12	2,5	C
13	4,5	A
13	4,5	C
14	6,5	A
14	6,5	C
15	9	A
15	9	B
15	9	C
16	11,5	B
16	11,5	C
17	13	B
18	14	B
19	15	B

- La somma dei ranghi di ogni gruppo
  $R_\mathrm{A} = 23{,}5\ (n = 5)$
  $R_\mathrm{B} = 62{,}5\ (n = 5)$
  $R_\mathrm{C} = 34\ (n = 5)$

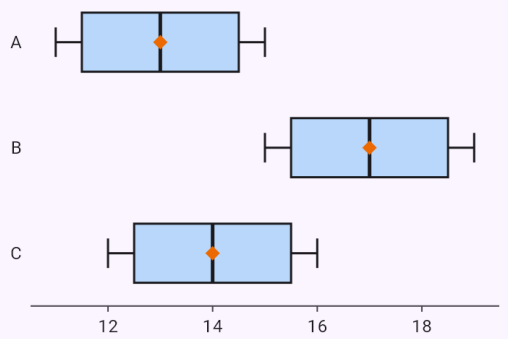
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione χ^2 con 2 gradi di libertà

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{15 \cdot 16}\left(\frac{23{,}5^2}{5}\right.$$
$$C = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N} = 1 - \frac{48}{3360} \approx 0{,}9857$$
$$H_c = \frac{H}{C} = \frac{8{,}145}{0{,}9857} \approx 8{,}263$$

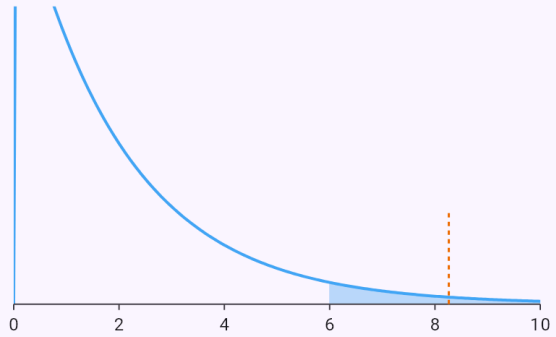
- Il valore critico al livello α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la regione critica $\chi^2 \geq 5{,}991$
- Il p-value: $p = P(\chi^2 \geq 8{,}263) \approx 0{,}01606$
- Poiché $p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- La dimensione dell'effetto ε² – la quota della varianza dei ranghi spiegata dai gruppi:
  $\varepsilon^2 = \frac{H}{N-1} = \frac{8{,}263}{14} \approx 0{,}5902$
- Il test di Kruskal–Wallis è l'analogo sui ranghi dell'ANOVA a una via. Dice solo che alcuni gruppi differiscono – quali, lo mostra un confronto a coppie (il test di Mann–Whitney con la correzione di Bonferroni).

Grafico

Box plot (mediana, quartili, valori anomali; ◆ media)



Distribuzione χ² – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 \approx 8{,}263$

Le medie di tre gruppi con l'ANOVA a una via.

Input: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

ANOVA (analisi della varianza)

Risultato

$$F \approx 8{,}667$$
$$p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$\eta^2 \approx 0{,}5909$$

Passaggi

- L'ipotesi nulla: le medie di tutti i gruppi sono uguali, l'alternativa: almeno due differiscono

  $H_0 \colon \mu_1 = \cdots = \mu_3$
  $H_1 \colon \exists\, i, j \colon \mu_i \neq \mu_j$

- Le numerosità, le medie e le deviazioni standard dei gruppi e la media generale $\bar{x} \approx 14{,}67$

	n_j	$\bar{x}_j$	s_j
A	5	13	1,581
B	5	17	1,581
C	5	14	1,581
$\sum$	15	14,67	

- Analisi della varianza – la somma dei quadrati tra i gruppi (B) ed entro di essi (W), i gradi di libertà e i quadrati medi

  $SS_B = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$
  $SS_W = \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$

	SS	df	MS	F
B	43,33	2	21,67	8,667
W	30	12	2,5	
$\sum$	73,33	14		

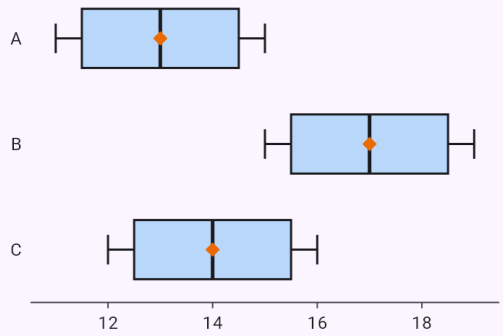
- La statistica test – sotto H_0 ha la distribuzione F con 2 e 12 gradi di libertà: $F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{21{,}67}{2{,}5} \approx 8{,}667$
- Il valore critico al livello α: $F_{0{,}95}(2;\ 12) \approx 3{,}885$, la regione critica $F \geq 3{,}885$
- Il p-value: $p = P(F \geq 8{,}667) \approx 0{,}004687$
- Poiché $p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- La dimensione dell'effetto η² – la quota della varianza spiegata dalle differenze tra i gruppi (indicativamente 0,01 piccola, 0,06 media, 0,14 grande):

  $\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{43{,}33}{73{,}33} \approx 0{,}5909$

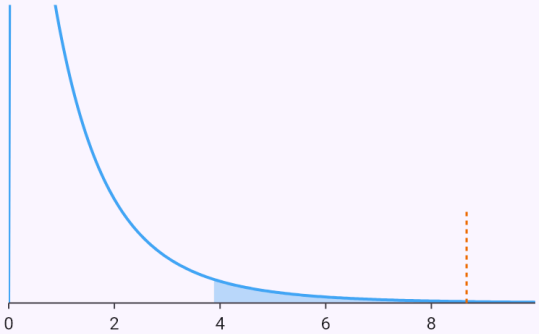
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- L'ANOVA assume gruppi indipendenti, una distribuzione approssimativamente normale in ciascuno e varianze simili. Dove ciò non vale (gruppi piccoli, valori anomali, dati ordinali), usa il test di Kruskal–Wallis.
- Rifiutare H_0 dice solo che almeno due medie differiscono. Quali, lo mostra un confronto a coppie (test post hoc, es. test t con la correzione di Bonferroni).

Grafico

Box plot (mediana, quartili, valori anomali; ◆ media)



Distribuzione F – la parte ombreggiata è la regione critica, tratteggiata la statistica test



$\alpha = 0{,}05$ $F \approx 8{,}667$

Un test di adattamento alle quote attese 1 : 2 : 1.

Input: `data(30 50 20)` Test χ² · Quote attese 1:2:1

Risultato

$$\chi^2 = 2$$
$$p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

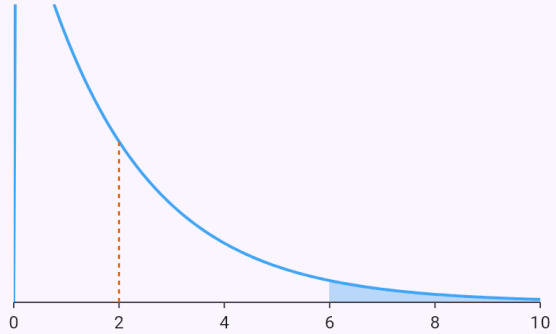
- L'ipotesi nulla: le categorie hanno le quote date, l'alternativa: almeno una quota differisce: $H_0: p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}5,\ p_3 = 0{,}25$
- Le frequenze attese secondo le quote date $E_i = N \cdot p_i, \quad N = 100$ e i contributi delle categorie

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	30	25	1
2	50	50	0
3	20	25	1
$\sum$	100	100	2

- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione χ² con 2 gradi di libertà: $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1 + 0 + 1 = 2$
- Il valore critico al livello α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la regione critica $\chi^2 \geq 5{,}991$
- Il p-value: $p = P(\chi^2 \geq 2) \approx 0{,}3679$
- Poiché $p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla – i dati non forniscono prove sufficienti contro di essa.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il test χ² lavora con frequenze (numeri di casi), non con percentuali o medie.

Grafico

Distribuzione χ² – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



Regressione quadratica.

Input: `data(x y; 1 2.1; 2 3.9; 3 9.2; 4 15.8; 5 25.1; 6 36.2)`

Correlazione e regressione · Quadratica

Risultato

$$\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$$

$$R^2 \approx 0{,}9997$$

Passaggi

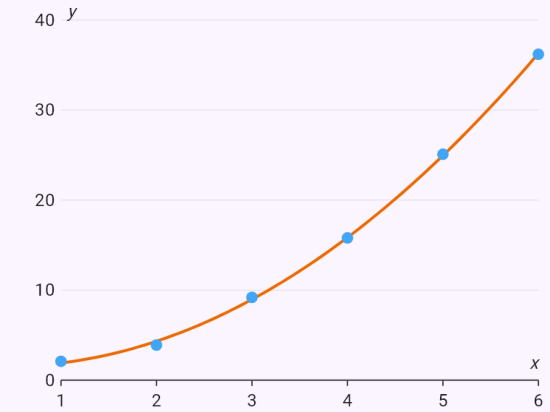
- Il numero di valori $n = 6$, i dati ordinati
  $[1;\ 2{,}1],\ [2;\ 3{,}9],\ [3;\ 9{,}2],\ [4;\ 15{,}8],\ [5;\ 25{,}1],\ [6;\ 36{,}2]$
- Le somme e le medie
  $\sum x_i = 21$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum x_i^3 = 441$
  $\sum x_i^4 = 2275$
  $\sum y_i = 92{,}3$
  $\sum x_i y_i = 443{,}4$
  $\sum x_i^2 y_i = 2284$
- Le equazioni normali dei minimi quadrati per ŷ = a + bx + cx²
  $$6a + 21b + 91c = 92{,}3$$
  $$21a + 91b + 441c = 443{,}4$$
  $$91a + 441b + 2275c = 2284$$
- La curva di regressione: $\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$
- Il coefficiente di determinazione – la curva spiega il $99{,}97\,\%$ della varianza di y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}3012}{874{,}5} \approx 0{,}9997$$

- La curva di regressione ha senso solo nell'intervallo delle x misurate – fuori di esso (estrapolazione) la stima può essere molto imprecisa.

Grafico

Grafico a dispersione con la curva di regressione



Regressione esponenziale per linearizzazione.

Input: `data(x y; 0 2.0; 1 2.7; 2 3.7; 3 5.0; 4 6.8; 5 9.1)`

Correlazione e regressione · Esponenziale

Risultato

$$\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$$

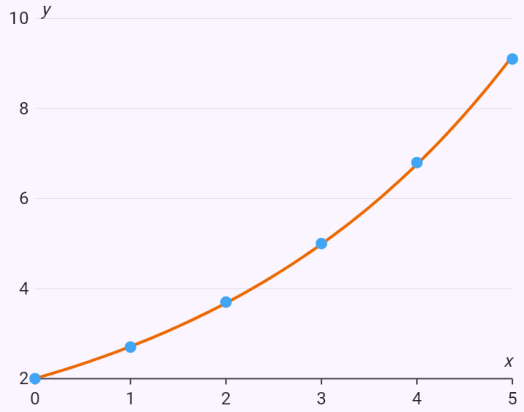
$$R^2 \approx 0{,}9998$$

Passaggi

- Il numero di valori $n = 6$, i dati ordinati
  $[0;\ 2],\ [1;\ 2{,}7],\ [2;\ 3{,}7],\ [3;\ 5],\ [4;\ 6{,}8],\ [5;\ 9{,}1]$
- Passando ai logaritmi il modello diventa una retta nelle variabili (u, v): $y = a\, e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$; le coppie trasformate
  $[0;\ 0{,}6931],\ [1;\ 0{,}9933],\ [2;\ 1{,}308],\ [3;\ 1{,}609],\ [4;\ 1{,}91$
- I coefficienti della retta di regressione con i minimi quadrati
  $$b = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum (u_i - \bar{u})^2} = \frac{5{,}324}{17{,}5} \approx 0{,}3042$$
  $$\ln a = \overline{\ln y} - b\bar{x} = 1{,}455 - 0{,}3042 \cdot 2{,}5 \approx 0{,}6943$$
- Il coefficiente a dalla trasformazione inversa:
  $a = e^{0{,}6943} \approx 2{,}002$
- La curva di regressione: $\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$
- Il coefficiente di determinazione – la curva spiega il $99{,}98\,\%$ della varianza di y.
  $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}006563}{35{,}95} \approx 0{,}9998$$
- I coefficienti sono adattati con i minimi quadrati ai dati trasformati (logaritmi), non ai valori originali – il risultato può differire leggermente da una regressione non lineare nei software statistici.
- La curva di regressione ha senso solo nell'intervallo delle x misurate – fuori di esso (estrapolazione) la stima può essere molto imprecisa.

Grafico

Grafico a dispersione con la curva di regressione



Test t unilaterale destro da valori riassuntivi: n = 25, x̄ = 104, s = 15, μ_0 = 100.

Input: `model(ttest; find=test[one]; n=25[one]; mean=104[one]; sd=15[one]; mu0=100[one];`

`alpha=0.05[one]; alternative=greater; sigma=sample)`

Risultato

$t \approx 1{,}333$

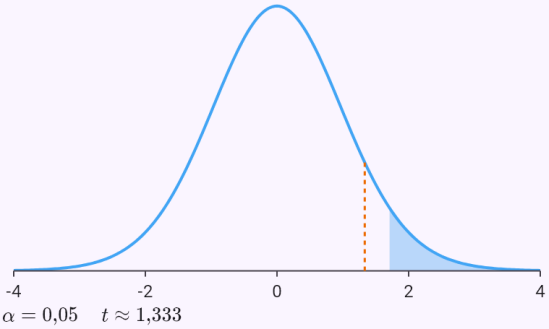
$p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$

Passaggi

- Incognita t; dati:
  $n = 25, \quad \bar{x} = 104, \quad s = 15, \quad \mu_0 = 100, \quad \alpha = 0{,}05$
- Un test t verifica se la media della popolazione differisce da un valore dato μ_0. La statistica test $t = (\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n})$ ha sotto l'ipotesi nulla una distribuzione t con n − 1 gradi di libertà; il p-value dice quanto sarebbe probabile un tale risultato o uno più estremo se H_0 fosse vera. Con σ noto è un test z. Equazione del modello: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- L'ipotesi nulla e quella alternativa:
  $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu > 100$
- L'errore standard: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{15}{\sqrt{25}} = 3$
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione t con 24 gradi di libertà: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{104 - 100}{3} \approx 1{,}333$
- Il valore critico al livello α: $t_{0{,}95}(24) \approx 1{,}711$, la regione critica $t \geq 1{,}711$
- Il p-value: $p = P(T \geq 1{,}333) \approx 0{,}09747$
- Poiché $p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla – i dati non forniscono prove sufficienti contro di essa.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Per un campione piccolo (n < 30) la distribuzione t assume che i dati provengano da una distribuzione approssimativamente normale. Con dati fortemente asimmetrici o valori anomali è più adatto un test non parametrico.

Grafico

Distribuzione t – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



Test t di Welch di due gruppi da valori riassuntivi.

Input: `model(twosample; find=test[one]; n1=30[one]; mean1=52[one]; sd1=8[one]; n2=28[one];`

```
mean2=47[one]; sd2=10[one]; alpha=0.05[one]; variances=welch; alternative=two)
```

Risultato

$$t \approx 2{,}093$$

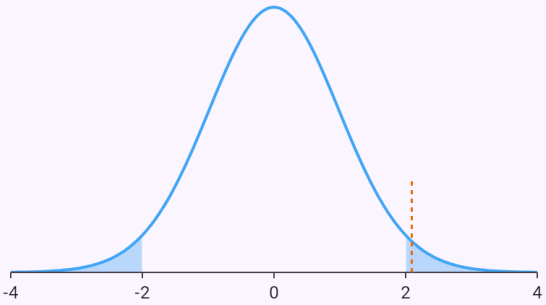
$$p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $n_1 = 30, \quad \bar{x}_1 = 52, \quad s_1 = 8, \quad n_2 = 28, \quad \bar{x}_2 = 47,$
- Confronto delle medie di due gruppi indipendenti. Il test di Welch non assume varianze uguali ed è oggi la scelta raccomandata; il test t classico con varianza combinata assume che entrambi i gruppi abbiano la stessa varianza. Bastano le numerosità, le medie e le deviazioni standard dei gruppi. Equazione del modello:
  $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- L'ipotesi nulla e quella alternativa:
  $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 \colon \mu_1 \neq \mu_2$
- L'errore standard
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{28}} \approx 2{,}388$$
- I gradi di libertà di Welch–Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 51{,}71$$
- La statistica test – sotto H_0 ha una distribuzione t con $51{,}71$ gradi di libertà: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \dfrac{52 - 47}{2{,}388} \approx 2{,}093$
- Il valore critico al livello α: $t_{0{,}975}(51{,}71) \approx 2{,}007$, la regione critica $|t| \geq 2{,}007$
- Il p-value: $p = 2\,P(T \geq 2{,}093) \approx 0{,}04124$
- Poiché $p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se H_0 è vera – non la probabilità che H_0 sia vera. Non rifiutare H_0 non significa che H_0 sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il test di Welch non assume varianze uguali dei gruppi; i suoi gradi di libertà ν non devono essere interi.

Grafico

Distribuzione t – la regione critica ombreggiata, la statistica test tratteggiata



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}093$

La distribuzione normale: P(X < 85) per N(100; 15²).

Input: `model(normal; find=below[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; x=85[one])`

Risultato

$$P(X < 85) \approx 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$$

Passaggi

- Incognita P; dati: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad x = 85$
- Molte grandezze (statura, prestazione in un test, errore di misura) variano simmetricamente attorno alla media μ, tanto più raramente quanto più se ne allontanano – la distribuzione normale (gaussiana) N(μ; σ²) con la deviazione standard σ. Le probabilità si calcolano standardizzando, z = (x − μ)/σ, e con la funzione di ripartizione Φ della normale standard N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un quantile è il valore sotto il quale si trova una data frazione p. Equazione del modello

  $$X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$$

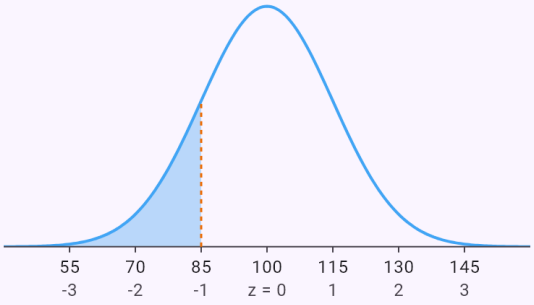
  $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$$

- Ricaviamo l'incognita: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
- Sostituiamo: $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$
- Sostituiamo

  $$P(X < 85) = \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) \approx (1 - 0{,}8413) \approx 0$$

Grafico

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata



$P \approx 0{,}1587 \quad x = 85$

La quota di persone alte tra 160 e 185 cm con μ = 170, σ = 8.

Input: `model(normal; find=between[one]; mu=170[one]; sigma=8[one]; a=160[one]; b=185[one])`

Risultato

$$P(160 < X < 185) \approx 0{,}864 = 86{,}4\,\%$$

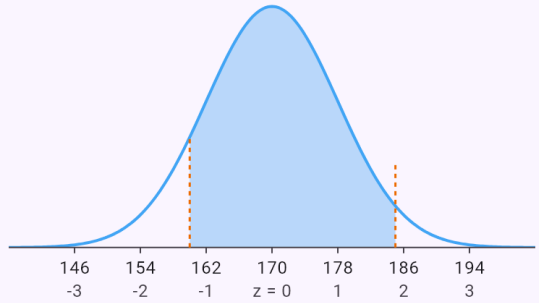
Passaggi

- Incognita P; dati:
  $\mu = 170, \quad \sigma = 8, \quad a = 160, \quad b = 185$
- Molte grandezze (statura, prestazione in un test, errore di misura) variano simmetricamente attorno alla media μ, tanto più raramente quanto più se ne allontanano – la distribuzione normale (gaussiana) N(μ; σ²) con la deviazione standard σ. Le probabilità si calcolano standardizzando, z = (x − μ)/σ, e con la funzione di ripartizione Φ della normale standard N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un quantile è il valore sotto il quale si trova una data frazione p. Equazione del modello
  $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$
- Ricaviamo l'incognita: $z_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
- Sostituiamo:
  $z_a = \dfrac{160 - 170}{8} = -1{,}25, \quad z_b = \dfrac{185 - 170}{8} = 1{,}875$
- Sostituiamo

$$P(160 < X < 185) = \Phi(1{,}875) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}9696$$

Grafico

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata



$P \approx 0{,}864 \quad a \quad b$

Un quantile: il punteggio sotto il quale si trova il 95 % della popolazione.

Input: `model(normal; find=quantile[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; p=95[pct])`

Risultato

$x \approx 124{,}7$

Passaggi

- Incognita x; dati: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad p = 95\,\%$
- Convertiamo le unità: $p = 95\,\% = 0{,}95$
- Molte grandezze (statura, prestazione in un test, errore di misura) variano simmetricamente attorno alla media μ, tanto più raramente quanto più se ne allontanano – la distribuzione normale (gaussiana) N(μ; σ²) con la deviazione standard σ. Le probabilità si calcolano standardizzando, z = (x − μ)/σ, e con la funzione di ripartizione Φ della normale standard N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un quantile è il valore sotto il quale si trova una data frazione p. Equazione del modello

$$X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$$

- Ricaviamo l'incognita

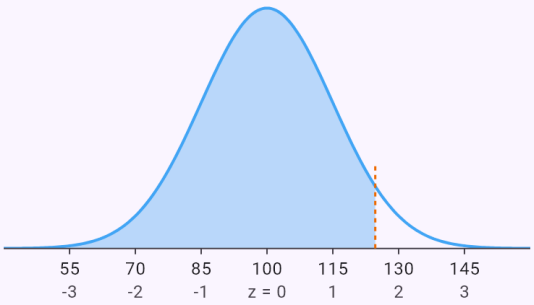
$$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow x = \mu + z_p \sigma, \quad z_p = \text{‹}$$

- Sostituiamo

$$z_{0{,}95} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645, \quad x = 100 + 1{,}645 \cdot 15 \approx 1\text{‹}$$

Grafico

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata



$p = 0{,}95 \quad x \approx 124{,}7$

Limiti noti

- I quartili sono le mediane delle metà (il metodo scolastico); i software statistici (Excel, SPSS) usano altre formule e per pochi dati possono dare valori leggermente diversi.
- Il confronto a coppie dei gruppi dopo l'ANOVA o il test di Kruskal–Wallis (post hoc) e l'ANOVA a più vie non sono ancora disponibili – confronta le coppie con un test t o il test di Mann–Whitney con la correzione di Bonferroni; le regressioni non lineari si calcolano per linearizzazione.
- I dati si inseriscono solo a mano, con la griglia o un file CSV – l'app non riconosce ancora una tabella da una foto.

Generato dall'app Mathtrace