# Mathtrace – manuale

VII. Applicazioni: scienze, economia e ottimizzazione

## Indice

VII. Applicazioni: scienze, economia e ottimizzazione

47. Chimica
48. Elettrotecnica
49. Biologia e medicina
50. Economia, finanza e assicurazioni
51. Programmazione lineare, trasporti, assegnazione e giochi a matrice
52. Grafi, reti e logistica
53. Psicometria

# 47. Chimica

I calcoli chimici sono nella sezione «Applicazioni» della schermata iniziale, l'ambito Chimica: il bilanciamento di un'equazione chimica, il pH di un acido, di una base, di un sale o di un acido poliprotico, un tampone, una titolazione con la sua curva, l'equazione di Arrhenius e la legge di Lambert–Beer. Nel modulo scegli il problema e la grandezza cercata e inserisci i valori con le unità; l'icona «?» spiega da dove viene la formula. Piccole costanti si possono scrivere come 1.8e-5 o 1,8·10^-5, valori misurati (una tabella di temperature, una calibrazione) come numeri separati da spazi.

Un'equazione chimica si può semplicemente scrivere nell'input manuale, es. Fe + O2 -> Fe2O3 (la freccia -> o =, un equilibrio <=>), anche con ioni MnO4^- e Fe^3+, parentesi Ca(OH)2, idrati CuSO4·5H2O e stati (aq). I coefficienti sono il nucleo della matrice del bilancio degli elementi (e della carica): i passaggi scrivono le equazioni di bilancio, la matrice, la sua forma ridotta con l'eliminazione di Gauss, il coefficiente libero come parametro e i più piccoli numeri interi, poi una verifica. Riconosce anche un'equazione che non si può bilanciare (un elemento da un solo lato, una sostanza dal lato sbagliato) o il cui bilancio non è unico.

Il pH si calcola esattamente (per un acido debole con un'equazione di secondo grado), con accanto la semplificazione scolastica e il grado di dissociazione; per un acido poliprotico il bilancio della carica si risolve numericamente e il grafico mostra le frazioni delle forme dell'acido in funzione del pH. Per un tampone con aggiunta di un acido o di una base forte calcola il nuovo equilibrio e la variazione del pH. Una titolazione riceve il pH secondo la zona della curva (l'inizio, la zona tampone, il punto equivalente, l'eccesso di titolante) e il grafico mostra tutta la curva di titolazione. L'equazione di Arrhenius da due misure o da una tabella con la regressione di ln k su 1/T; la legge di Lambert–Beer da un ε noto, uno standard o una retta di calibrazione.

# Esempi

## Il bilanciamento dell’ossidazione dell’acido cloridrico con il permanganato.

Input: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Risultato

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

### Passaggi

- Ai coefficienti incogniti diamo delle lettere
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Gli atomi non si creano né si distruggono – ogni elemento ha tanti atomi a sinistra quanti a destra

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad a = c \\ \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = f \\ \mathrm{H}: &\quad b = 2f \\ \mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g \end{aligned}$$

- Il sistema omogeneo come matrice – una colonna per ogni sostanza, i prodotti con il segno meno

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- L’eliminazione di Gauss porta la matrice alla forma a scala ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

- Un coefficiente resta libero, $g = t$; gli altri si esprimono tramite esso

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Scegliamo $t = 5$ in modo che tutti i coefficienti siano i più piccoli interi:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Verifica – atomi a sinistra e a destra

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\ \mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\ \mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16 \end{aligned}$$

## Un’equazione redox ionica con il bilancio della carica.

Input: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

**Risultato**

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5\,\mathrm{Fe^{3+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$$

**Passaggi**

- Ai coefficienti incogniti diamo delle lettere
  $a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$
- Gli atomi non si creano né si distruggono e la carica si conserva (riga q) – per ogni elemento e per la carica
  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$
- Il sistema omogeneo come matrice – una colonna per ogni sostanza, i prodotti con il segno meno
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- L’eliminazione di Gauss porta la matrice alla forma a scala ridotta
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
- Un coefficiente resta libero, $g = t$; gli altri si esprimono tramite esso
  $$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$
- Scegliamo $t = 4$ in modo che tutti i coefficienti siano i più piccoli interi:
  $$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$$
- Verifica – atomi e carica a sinistra e a destra
  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

## pH dell’acido acetico 0,1 M ($K_a$ = 1,8·10⁻⁵).

Input: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

**Risultato**

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

**Passaggi**

- Incognita pH; dati: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- Il pH è il logaritmo decimale cambiato di segno della concentrazione degli ioni idrogeno (idronio): pH = −log[H⁺]. Un acido forte (HCl) si dissocia completamente, quindi [H⁺] = c; una base forte dà [OH⁻] = c e pH = 14 − pOH. Un acido debole HA ⇌ H⁺ + A⁻ si dissocia solo in parte, secondo la sua costante di dissociazione Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; ciò porta all’equazione di secondo grado x² + Ka·x − Ka·c = 0. Un sale di un acido debole e di una base forte (acetato di sodio) reagisce con l’acqua come una base con Kb = Kw/Ka, un sale di una base debole ($NH_4Cl$) come un acido. Per un acido poliprotico ($H_2SO_4$, $H_3PO_4$) il bilancio di carica si risolve numericamente. A 25 °C Kw = 10⁻¹⁴. Equazione del modello

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Ricaviamo l’incognita

$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$

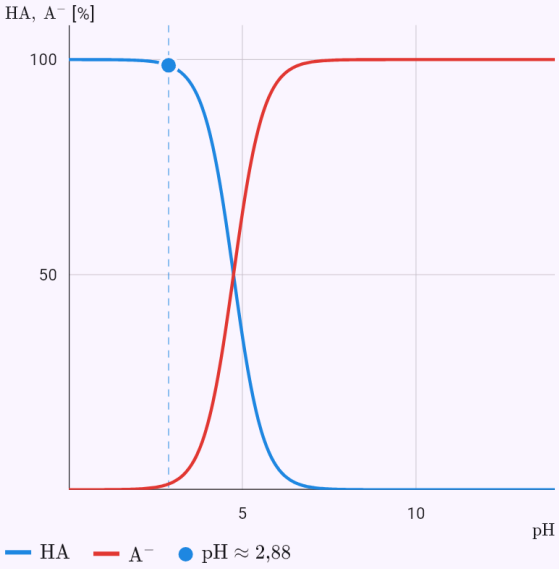
- Sostituiamo

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Grado di dissociazione: $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Il grado di dissociazione è sotto il 5 %, quindi la semplificazione c − x ≈ c andrebbe bene lo stesso: $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- Il pH è il logaritmo cambiato di segno della concentrazione di H⁺: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## pH dell’acido fosforico 0,1 M e le frazioni delle sue forme.

Input: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

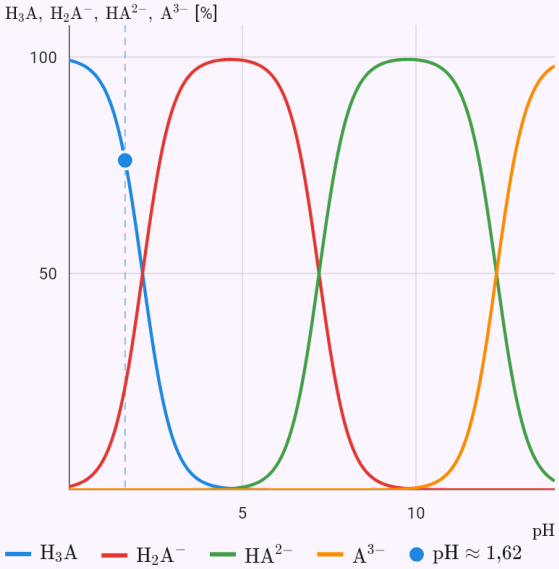
**Risultato**

$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$

**Passaggi**

- Incognita $\mathrm{pH}$; dati
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- Il pH è il logaritmo decimale cambiato di segno della concentrazione degli ioni idrogeno (idronio): pH = −log[H⁺]. Un acido forte (HCl) si dissocia completamente, quindi [H⁺] = c; una base forte dà [OH⁻] = c e pH = 14 − pOH. Un acido debole HA ⇌ H⁺ + A⁻ si dissocia solo in parte, secondo la sua costante di dissociazione Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; ciò porta all'equazione di secondo grado x² + Ka·x − Ka·c = 0. Un sale di un acido debole e di una base forte (acetato di sodio) reagisce con l'acqua come una base con Kb = Kw/Ka, un sale di una base debole ($NH_4Cl$) come un acido. Per un acido poliprotico ($H_2SO_4$, $H_3PO_4$) il bilancio di carica si risolve numericamente. A 25 °C Kw = $10^{-14}$. Equazione del modello
  $\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{H_2A^-} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{HA^{2-}} \rightleftharpoons 3\,\mathrm{H^+} + \mathrm{A^{3-}}$
- La soluzione è elettricamente neutra – il bilancio di carica
  $[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$
- Le concentrazioni delle forme dell'acido dalle costanti di dissociazione
  $[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1} \cdots K_{ai}\, h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$
- Risolviamo l'equazione numericamente (per bisezione): $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › Il metodo: bisezione, 14 iterazioni
- Il pH è il logaritmo cambiato di segno della concentrazione di H⁺: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- La seconda costante è molto più piccola della prima, quindi il pH è fissato soprattutto dal primo stadio – come per un acido debole monoprotico
  $x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$
- Le frazioni delle forme dell'acido a questo pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Un tampone acetato dopo l'aggiunta di 1 mmol di un acido forte.

Input: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];`

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

**Risultato**

$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$

**Passaggi**

- Incognita $\mathrm{pH}$; dati
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Convertiamo le unità
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- La costante dal pK:
  $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Un tampone è una miscela di un acido debole e del suo sale ($CH_3COOH$ + $CH_3COONa$) o di una base debole e del suo sale ($NH_3$ + $NH_4Cl$). La costante di dissociazione dà l'equazione di Henderson–Hasselbalch pH = pKa + log([$A^-$]/[HA]). Un acido forte aggiunto trasforma il componente basico in quello acido ($A^-$ + $H^+$ → HA), una base fa il contrario – il rapporto dei componenti cambia solo un po', quindi il pH cambia appena. Un tampone funziona meglio per un rapporto da 0,1 a 10, cioè pH = pKa ± 1. Equazione del modello
  $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$

- Quantità dei componenti del tampone
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- La sostanza aggiunta reagisce con un componente del tampone
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \to \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,$
- Ricaviamo l'incognita: $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Sostituiamo: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log \dfrac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH prima dell'aggiunta e la sua variazione:
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

## Titolazione dell'acido acetico con idrossido di sodio – il punto equivalente.

Input: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

```
5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)
```

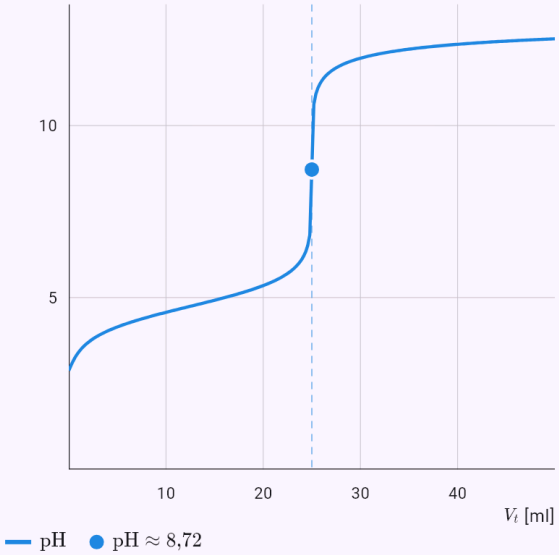
**Risultato**

$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$

**Passaggi**

- Incognita $\mathrm{pH}$; dati
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- In una titolazione si aggiunge da una buretta un titolante di concentrazione nota finché tutto l'analita ha reagito. Il punto di equivalenza si raggiunge quando la quantità di titolante $c_t \cdot V_t$ è uguale a quella dell'analita: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Prima il pH è fissato dall'analita non reagito (un acido debole forma un tampone), nel punto dal sale formato che reagisce con l'acqua, dopo dall'eccesso di titolante. La curva di titolazione nel grafico è calcolata esattamente dal bilancio di carica. Equazione del modello: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Punto di equivalenza – tanto titolante quanto analita
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Titolante aggiunto e volume totale:
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Il punto di equivalenza – tutto l'analita ha reagito.
- Nel punto di equivalenza resta solo il sale formato – la sua reazione con l'acqua
  $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH e pH (pH + pOH = 14)
  $\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Energia di attivazione da una tabella di costanti cinetiche.

Input: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

**Risultato**

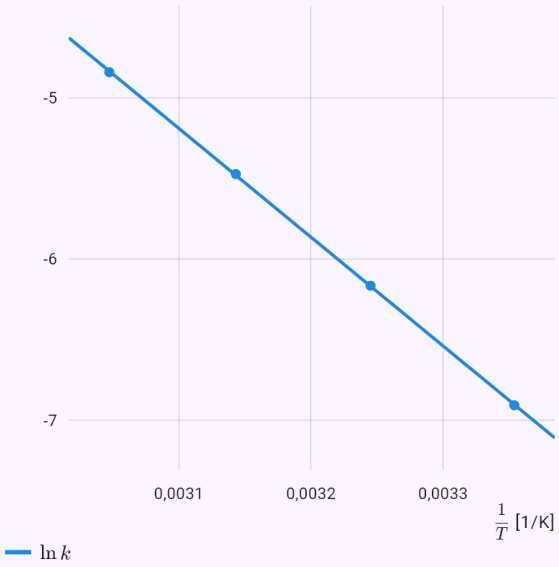
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

**Passaggi**

- Incognita $E_a$; dati
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Convertiamo le unità:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- La costante di velocità di una reazione cresce con la temperatura secondo l'equazione di Arrhenius k = A·e^(−Ea/RT), dove Ea è l'energia di attivazione – la barriera energetica che le molecole che si urtano devono superare – e A il fattore pre-esponenziale. Due misure danno $\ln(k_2/k_1) = (Ea/R)(1/T_1 - 1/T_2)$. Da più misure Ea si ricava da una retta di regressione: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) è una retta in 1/T (il grafico di Arrhenius) con pendenza −Ea/R. Equazione del modello:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Passando ai logaritmi si ottiene una retta
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Valori per la retta di regressione
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Retta di regressione ai minimi quadrati
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Ricaviamo l'incognita: $E_a = -bR$
- Sostituiamo:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Fattore pre-esponenziale: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## La concentrazione di un campione da una retta di calibrazione.

Input: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299 0.452`

`0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

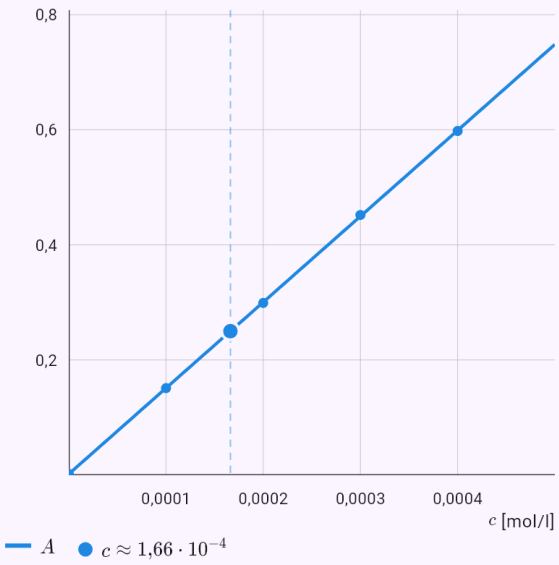
**Risultato**

$$c \approx 0{,}166\,\mathrm{mmol/l}$$

**Passaggi**

- Incognita $c$; dati
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\,\mathrm{mmol/l}, \quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Convertiamo le unità
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot10^{-4};\ 3\cdot10^{-4};\ 4\cdot10^{-4}\right)\,\mathrm{mol/l}$
- Una soluzione assorbe la luce in proporzione alla concentrazione della sostanza che assorbe e allo spessore dello strato: l'assorbanza A = ε·l·c (la legge di Lambert–Beer), dove ε è il coefficiente di assorbimento molare e l la lunghezza della cuvetta. Uno spettrofotometro misura la trasmittanza T – la frazione di luce trasmessa – e A = −log T. Una concentrazione incognita si ricava da un ε noto, dal confronto con uno standard di concentrazione nota o da una retta di taratura misurata su più standard (minimi quadrati). La legge vale per soluzioni diluite. Equazione del modello:
  $A = \varepsilon\, l\, c$
- Retta di taratura ai minimi quadrati
  $A = a + b\,c: \quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\mathrm{l/m}$
- Ricaviamo l'incognita: $c = \dfrac{A-a}{b}$
- Sostituiamo: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l}$
- Convertiamo le unità:
  $c \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l} = 0{,}1662\,\mathrm{mmol/l}$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Cementazione dell'acciaio – il tempo per lo 0,8 % di carbonio alla profondità di 0,5 mm.

Input: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct]; cx=0.8[pct];`

`x=0.5[mm]; process=carburizing)`

**Risultato**

$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

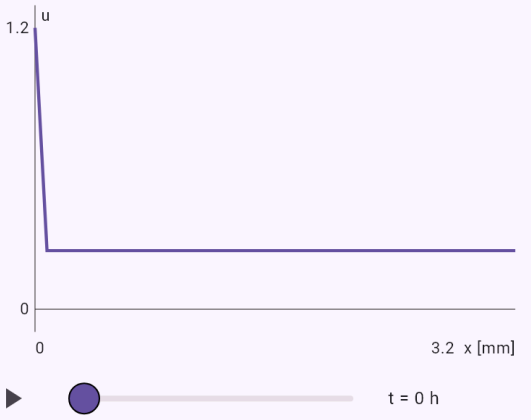
**Passaggi**

- Incognita $t$; dati
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- Convertiamo le unità
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Una sostanza diffonde da una superficie mantenuta alla concentrazione c_s in un corpo con concentrazione iniziale $c_0$ – es. il carbonio nell'acciaio nella cementazione. Vale l'equazione di diffusione c_t = D·c_xx; per un corpo infinitamente spesso rispetto alla profondità di penetrazione si risolve con la trasformata di Laplace nel tempo: c = $c_0$ + (c_s − $c_0$)·erfc(x/(2√(Dt))) con la funzione degli errori complementare. Da essa seguono la concentrazione a una profondità, la profondità di una concentrazione richiesta o il tempo necessario. Equazione del modello
  $\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Soluzione con la trasformata di Laplace (un corpo semi-infinito): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Inversa della funzione degli errori complementare
  $\operatorname{erfc} z = \dfrac{c - c_0}{c_s - c_0} = \dfrac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$
- Ricaviamo l'incognita: $t = \dfrac{x^2}{4Dz^2}$
- Sostituiamo
  $t = \dfrac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$

- La profondità di penetrazione tipica è √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Il doppio della profondità richiede quattro volte il tempo.
- Convertiamo le unità: $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

**Grafico**

Nel tempo | Superficie 3D




t = 0 h

La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

## La concentrazione di carbonio alla profondità di 0,5 mm dopo 7 ore.

Input: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct]; x=0.5[mm];`

```
t=7[h]; process=carburizing)
```

**Risultato**

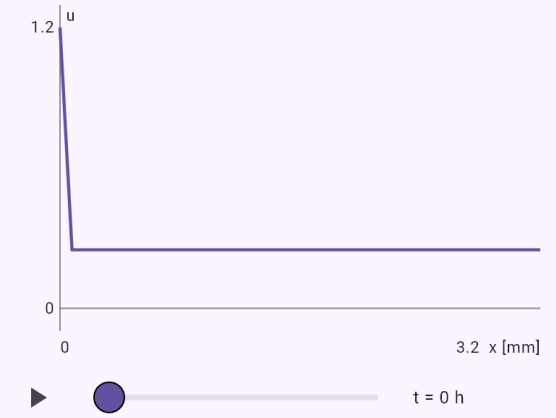
$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

**Passaggi**

- Incognita $c$; dati
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Convertiamo le unità
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Una sostanza diffonde da una superficie mantenuta alla concentrazione c_s in un corpo con concentrazione iniziale $c_0$ – es. il carbonio nell'acciaio nella cementazione. Vale l'equazione di diffusione c_t = D·c_xx; per un corpo infinitamente spesso rispetto alla profondità di penetrazione si risolve con la trasformata di Laplace nel tempo: $c = c_0 + (c_s - c_0)\cdot\mathrm{erfc}(x/(2\sqrt{(Dt)}))$ con la funzione degli errori complementare. Da essa seguono la concentrazione a una profondità, la profondità di una concentrazione richiesta o il tempo necessario. Equazione del modello
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Soluzione con la trasformata di Laplace (un corpo semi-infinito): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argomento della funzione degli errori
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \mathrm{erfc}$
- Sostituiamo:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$
- La profondità di penetrazione tipica è √(Dt):
  $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Il doppio della profondità richiede quattro volte il tempo.
- Convertiamo le unità: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

**Grafico**

Nel tempo | Superficie 3D




t = 0 h

La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

## Limiti noti

- pH e titolazioni assumono 25 °C (Kw = 10⁻¹⁴) e soluzioni diluite – i coefficienti di attività non si calcolano.
- Titolazioni solo di un acido o una base monoprotici con un titolante forte; gli acidi poliprotici per ora solo come pH di una soluzione.
- Un'equazione chimica non viene ancora riconosciuta da una foto – scrivila nell'input manuale o nel modulo.

# 48. Elettrotecnica

I calcoli elettrici sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», l'ambito Elettrotecnica: un circuito RLC in serie e in parallelo in corrente alternata, filtri RC e RL, un circuito risonante, un partitore di tensione, un ponte di Wheatstone e il rifasamento. Nel modulo scegli il collegamento e la grandezza cercata e inserisci i valori con le unità; l'icona «?» spiega da dove vengono le formule. Tensioni e correnti sono valori efficaci, i numeri complessi si scrivono con j come in elettrotecnica.

Per ogni circuito l'app disegna il suo schema con i valori dei componenti e, in corrente alternata, la risposta in frequenza su un asse logaritmico – l'impedenza e la fase, per i filtri il guadagno in decibel (un diagramma di Bode). I passaggi mostrano le reattanze, l'impedenza in forma algebrica e polare (50∠53.13° Ω), lo sfasamento, le correnti, le tensioni sui componenti e la potenza; spiegano anche perché le tensioni sui componenti si sommano come fasori.

Un circuito serie-parallelo si può inserire come espressione, es. R1 + (L1 || (R2 + C1)) con i valori R1=100 L1=10m C1=1u (prefissi m, u, n, k, M). I passaggi semplificano il circuito gruppo per gruppo, poi calcolano tensione e corrente di ogni componente. Qualsiasi circuito (anche con ponti e più sorgenti) si inserisce come netlist come in SPICE – un componente per riga con i suoi nodi, il nodo 0 è la massa; i passaggi impostano la legge di Kirchhoff delle correnti ai nodi, la matrice del sistema e la risolvono con l'eliminazione di Gauss. Senza frequenza è una corrente continua.

## Esempi

**Un circuito RLC in serie: potenza attiva e reattiva, fattore di potenza.**

Input: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF]; f=50[Hz];`

```
parts=rlc)
```

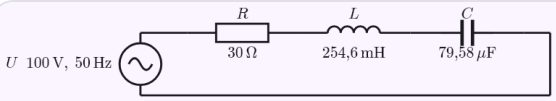
### Risultato

$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
$Q \approx 160\,\mathrm{var}$
$S \approx 200\,\mathrm{VA}$
$\cos\varphi \approx 0{,}6$

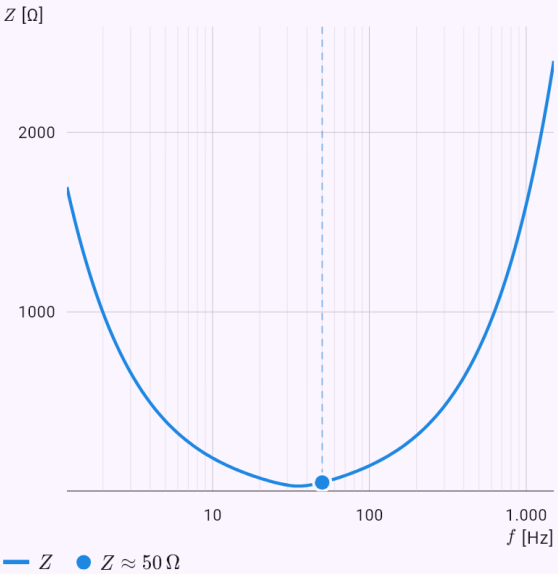
### Passaggi

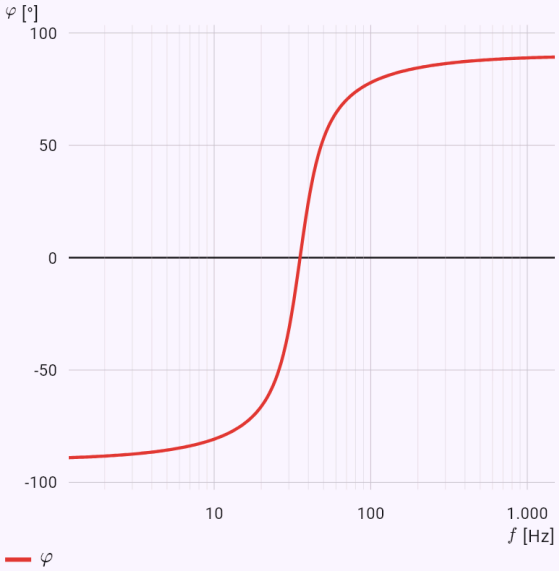
- Incognita $P$; dati
  $U = 100\,\mathrm{V}, \quad R = 30\,\Omega, \quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH}, \quad C = 79{,}5$
- Convertiamo le unità
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H}, \quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- In un circuito in corrente alternata un induttore e un condensatore oppongono alla corrente una resistenza che dipende dalla frequenza – la reattanza: quella induttiva X_L = ωL cresce con la frequenza, quella capacitiva X_C = 1/(ωC) cala (ω = 2πf). La tensione dell'induttore anticipa la corrente di 90°, quella del condensatore la ritarda di 90°, quindi non si sommano aritmeticamente ma come fasori – numeri complessi con l'unità immaginaria j: l'impedenza Z = R + j(X_L − X_C), il suo modulo Z = √(R² + (X_L − X_C)²) e lo sfasamento φ = arctg((X_L − X_C)/R). La corrente I = U/Z, la potenza attiva P = UI·cos φ. Tensioni e correnti sono valori efficaci. Equazione del modello:
  $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Pulsazione: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- La reattanza induttiva dell'induttore:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- La reattanza capacitiva del condensatore
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Il modulo dell'impedenza – reattanza e resistenza sono fasori perpendicolari
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- L'impedenza come numero complesso (forma algebrica e polare)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione:
  $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Il circuito è induttivo – la corrente ritarda rispetto alla tensione.
- Frequenza di risonanza: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- La corrente dalla legge di Ohm: $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Potenza attiva, reattiva e apparente
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Fattore di potenza: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

### Schema del circuito




### Risposta in frequenza




L'asse orizzontale è logaritmico – ogni divisione vale dieci volte la frequenza. I punti sono la frequenza data e punti notevoli.

## Un circuito RLC in parallelo: le correnti dei rami e la corrente totale.

Input: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

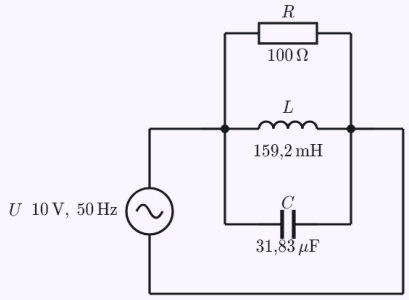
**Risultato**

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

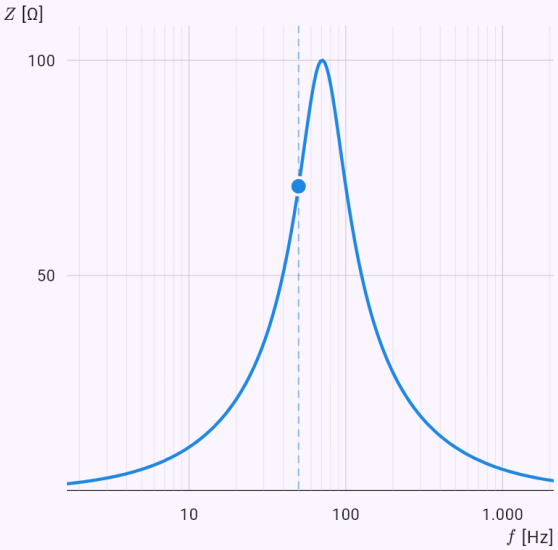
**Passaggi**

- Incognita $I$; dati
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Convertiamo le unità
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- In un circuito in parallelo tutti i rami hanno la stessa tensione e le correnti dei rami si sommano come fasori. Invece delle impedenze si sommano quindi i loro reciproci – le ammettenze: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). La corrente del resistore è in fase con la tensione, quella dell'induttore ritarda di 90°, quella del condensatore anticipa di 90°. La corrente totale I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) può essere minore delle correnti dei rami – alla risonanza le correnti dell'induttore e del condensatore si annullano. Equazione del modello
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Pulsazione: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- La reattanza induttiva dell'induttore:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- La reattanza capacitiva del condensatore
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Ammettenza – i reciproci delle impedenze dei rami si sommano come fasori
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- L'impedenza del circuito: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- L'impedenza come numero complesso (forma algebrica e polare)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione
  $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Il circuito è induttivo – la corrente ritarda rispetto alla tensione.
- Frequenza di risonanza: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Correnti dei rami – tutti i rami hanno la stessa tensione
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- La corrente totale – la somma dei fasori delle correnti dei rami: $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$
- Le correnti dei rami si sommano come fasori, non aritmeticamente – le correnti dell'induttore e del condensatore sono in opposizione di fase.

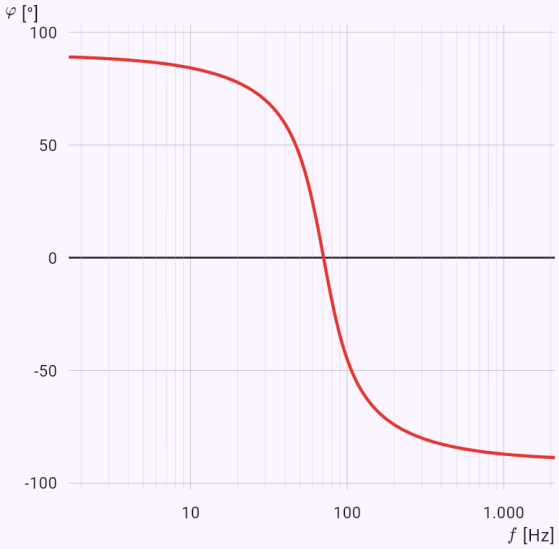
**Schema del circuito**




## Risposta in frequenza




$Z$ $Z \approx 70{,}7\,\Omega$




$\varphi$

L'asse orizzontale è logaritmico – ogni divisione vale dieci volte la frequenza. I punti sono la frequenza data e punti notevoli.

## Un passa-basso RC: il guadagno in decibel e il diagramma di Bode.

Input: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

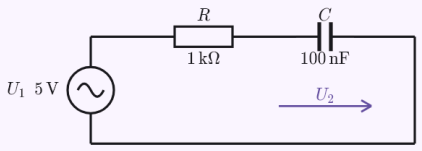
### Risultato

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\text{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\text{V}$$

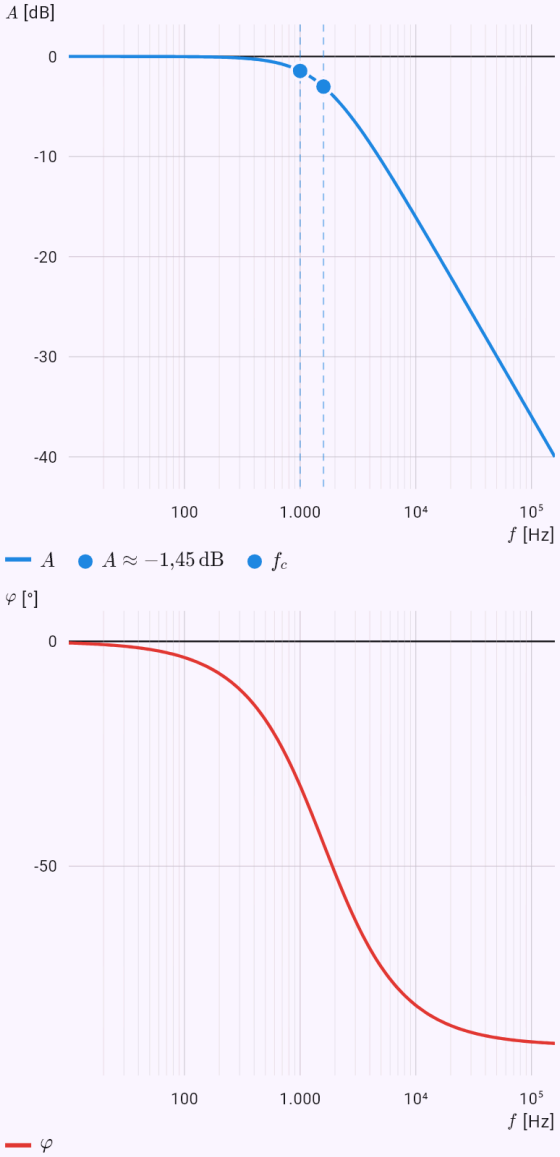
### Passaggi

- Dati
  $R = 1\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad f = 1\,\text{kHz}, \quad U_1 = 5\,\text{V}$
- Convertiamo le unità
  $R = 1\,\text{k}\Omega = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}, \quad f = 1$
- Un filtro del primo ordine è un partitore di tensione di un resistore e di un condensatore (o di un induttore). Un passa-basso (RC con l'uscita sul condensatore) lascia passare le basse frequenze e attenua le alte, un passa-alto il contrario. La frequenza di taglio f_c = 1/(2πRC), per RL f_c = R/(2πL): lì la tensione d'uscita cala a 1/√2 ≈ 70,7 % (di 3 dB) e lo sfasamento è 45°. La funzione di trasferimento H = U₂/U₁ è un numero complesso; il suo modulo in decibel A = 20·log|H| e la sua fase formano il diagramma di Bode – sopra la frequenza di taglio un passa-basso cala di 20 dB per decade. Equazione del modello
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Un passa-basso: le basse frequenze passano, le alte sono attenuate.
- Frequenza di taglio:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\text{Hz}$$
- Alla frequenza di taglio il guadagno è 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) e lo sfasamento 45°.
- La frequenza rispetto a quella di taglio:
  $$\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$$
- Il modulo del guadagno: $|\hat{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$
- Il guadagno in decibel: $A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\text{dB}$
- Lo sfasamento dell'uscita rispetto all'ingresso:
  $$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Tensione d'uscita: $U_2 = |\hat{H}|\,U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\text{V}$

### Schema del circuito




### Risposta in frequenza




L'asse orizzontale è logaritmico – ogni divisione vale dieci volte la frequenza. I punti sono la frequenza data e punti notevoli.

## Un circuito risonante in serie: fattore di qualità e banda.

Input: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

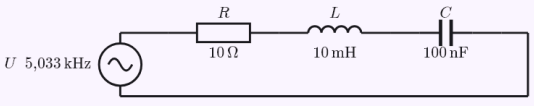
### Risultato

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\text{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\text{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\text{Hz}$$

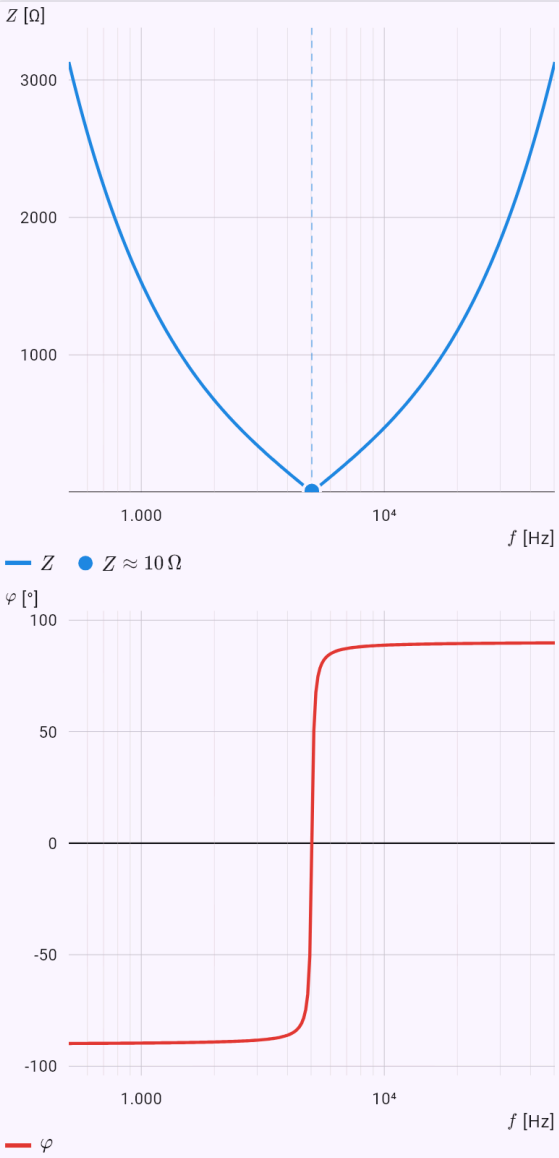
### Passaggi

- Dati: $L = 10\,\text{mH}, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Convertiamo le unità:
  $L = 10\,\text{mH} = 0{,}01\,\text{H}, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}$
- Alla frequenza di risonanza $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ le reattanze dell'induttore e del condensatore sono uguali e si annullano. Un circuito in serie ha allora l'impedenza minima (solo R) e la corrente massima, uno in parallelo l'impedenza massima. La nitidezza della risonanza è il fattore di qualità Q – per un circuito in serie $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ – e la larghezza di banda $B = f_0/Q$ tra le frequenze a cui la corrente cala a $1/\sqrt{2}$ del massimo. Sintonia: la capacità per una frequenza data $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Equazione del modello:
  $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
- Sostituiamo: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\text{Hz}$
- Alla risonanza le reattanze dell'induttore e del condensatore si annullano – un circuito in serie ha l'impedenza minima e la corrente massima.
- Fattore di qualità
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Larghezza di banda: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\text{Hz}$
- Gli estremi della banda (un calo a $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\text{Hz}, \quad f_2 \approx$$

### Schema del circuito




### Risposta in frequenza




L'asse orizzontale è logaritmico – ogni divisione vale dieci volte la frequenza. I punti sono la frequenza data e punti notevoli.

## Un partitore di tensione caricato.

Input: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

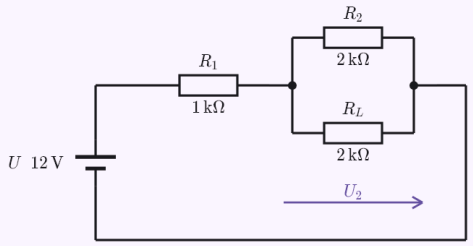
**Risultato**

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

**Passaggi**

- Incognita $U_2$; dati
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Convertiamo le unità
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Due resistori in serie dividono la tensione nel rapporto delle loro resistenze: in entrambi passa la stessa corrente I = U/(R₁ + R₂), quindi U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Un carico R_L è in parallelo a R₂ e abbassa la resistenza della parte inferiore a R₂R_L/(R₂ + R_L) – la tensione d'uscita di un partitore sotto carico è più bassa che a vuoto. Equazione del modello:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- Il carico è in parallelo a R₂
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Sostituiamo: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- A vuoto sarebbe $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – il carico abbassa la tensione d'uscita.

**Schema del circuito**




## Il bilanciamento di un ponte di Wheatstone.

Input: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

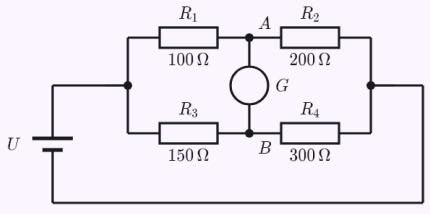
**Risultato**

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

**Passaggi**

- Incognita $R_4$; dati:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Un ponte di Wheatstone è formato da due partitori di tensione in parallelo con uno strumento tra i loro punti medi (A e B). Il ponte è in equilibrio – nessuna corrente nello strumento – quando i due partitori dividono la tensione nello stesso rapporto: R₁/R₂ = R₃/R₄. Così si misura con precisione una resistenza incognita. Un ponte non in equilibrio dà la tensione U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – così funzionano per esempio gli estensimetri. Equazione del modello: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Il ponte è in equilibrio – A e B hanno la stessa tensione e nello strumento non passa corrente.
- Ricaviamo l'incognita: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Sostituiamo: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

**Schema del circuito**



## Il condensatore per rifasare da 0,7 a 0,95.

Input: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

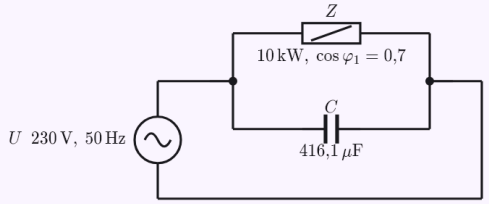
**Risultato**

$$C \approx 416{,}1\,\mu\text{F}$$

**Passaggi**

- Incognita $C$; dati
  $P = 10\,\text{kW}, \quad U = 230\,\text{V}, \quad f = 50\,\text{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Convertiamo le unità: $P = 10\,\text{kW} = 10\,000\,\text{W}$
- I carichi con bobine (motori, trasformatori) assorbono oltre alla potenza attiva P una potenza reattiva Q = P·tg φ, che carica inutilmente la linea con una corrente maggiore. Un condensatore in parallelo fornisce potenza reattiva di segno opposto Q_C = $Q_1 - Q_2$ e porta il fattore di potenza da cos $\varphi_1$ a cos $\varphi_2$. La capacità necessaria C = Q_C/(ωU²), dove ω = 2πf. La potenza attiva non cambia, la corrente dalla rete cala. Equazione del modello
  $$Q_C = P(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2), \quad C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$
- Sfasamenti prima e dopo il rifasamento
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Potenze reattive – il condensatore fornisce la differenza
  $Q_1 = P\operatorname{tg}\varphi_1 \approx 10\,200\,\text{var}$
  $Q_2 = P\operatorname{tg}\varphi_2 \approx 3287\,\text{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\text{var}$
- Pulsazione: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\text{rad/s}$
- Ricaviamo l'incognita: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Sostituiamo: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$
- La corrente dalla rete prima e dopo il rifasamento
  $$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\text{A}, \quad I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\text{A}$$
- Convertiamo le unità: $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\text{F} = 416{,}1\,\mu\text{F}$

**Schema del circuito**



## Un circuito come espressione – semplificato, la corrente di ogni componente.

Input: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

### Risultato

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\,\mathrm{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}$$

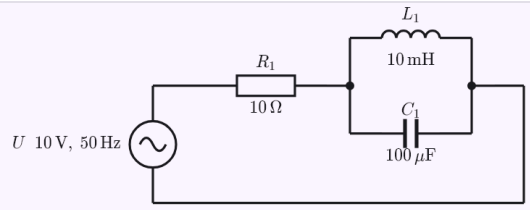
### Passaggi

- Il collegamento (+ in serie, ‖ in parallelo): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; i valori dati $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\mathrm{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}, \quad U = 10\,\mathrm{V}$
- Pulsazione: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Le impedenze degli induttori e dei condensatori come numeri complessi (j è l'unità immaginaria)
$$\hat{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \mathrm{j}\,3{,}142\,\Omega$$
$$\hat{Z}_{C_1} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = -\mathrm{j}\frac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\mathrm{j}\,31{,}83\,\Omega$$
- Un gruppo in parallelo – si sommano i reciproci delle impedenze
$$\hat{Z}_a = \frac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega$$
- Un gruppo in serie – le impedenze si sommano:
$$\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$$
- L'impedenza totale del circuito:
$$\hat{Z} = 10 + \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
- La corrente del generatore dalla legge di Ohm (la tensione del generatore ha fase 0°)
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$$
- In tutti i componenti del gruppo $\hat{Z}$ passa la stessa corrente – le loro tensioni
$$\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{V}$$
$$\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\,\mathrm{V}$$
- Tutti i rami del gruppo $\hat{Z}_a$ hanno la stessa tensione – le correnti dei rami
$$\hat{I}_{L_1} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$$
$$\hat{I}_{C_1} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\,\mathrm{A}$$
- I componenti – impedenza, tensione e corrente (modulo ∠ fase)

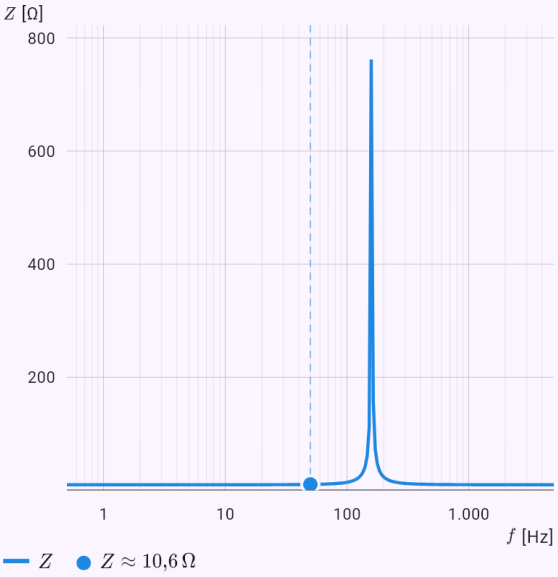
| | $\hat{Z}\,[\Omega]$ | $\hat{U}\,[\mathrm{V}]$ | $\hat{I}\,[\mathrm{A}]$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | $10$ | $9{,}443\angle -19{,}22^\circ$ | $0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$ |
| $L_1$ | $\mathrm{j}\,3{,}142$ | $3{,}291\angle 70{,}78^\circ$ | $1{,}048\angle -19{,}22^\circ$ |
| $C_1$ | $-\mathrm{j}\,31{,}83$ | $3{,}291\angle 70{,}78^\circ$ | $0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$ |

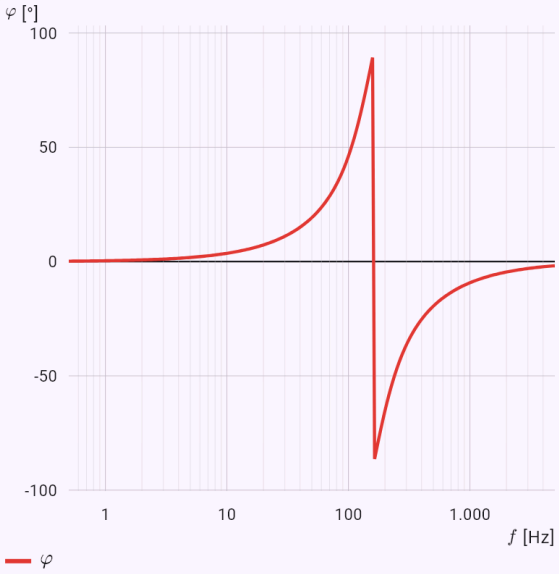
- La potenza fornita dal generatore
$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \mathrm{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}, \quad Q \approx 3{,}1$$

### Schema del circuito




## Risposta in frequenza




L'asse orizzontale è logaritmico – ogni divisione vale dieci volte la frequenza. I punti sono la frequenza data e punti notevoli.

**Un ponte non bilanciato come netlist – analisi nodale.**

Input: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Risultato

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

Passaggi

- I componenti, i nodi che collegano e i loro valori

| | + | − | |
|---|---|---|---|
| $V_1$ | 1 | 0 | $12\,\mathrm{V}$ |
| $R_1$ | 1 | 2 | $100\,\Omega$ |
| $R_2$ | 2 | 0 | $200\,\Omega$ |
| $R_3$ | 1 | 3 | $150\,\Omega$ |
| $R_4$ | 3 | 0 | $250\,\Omega$ |
| $R_5$ | 2 | 3 | $50\,\Omega$ |

- Le incognite sono le tensioni dei nodi rispetto alla massa e le correnti dei generatori di tensione: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- La legge di Kirchhoff delle correnti – le correnti uscenti da ogni nodo sommano a zero

$$1\text{: } I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{: } \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{: } \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- I generatori di tensione fissano la tensione tra i loro nodi: $U_1 = 12$
- Il sistema di equazioni lineari come matrice per le incognite $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- L'eliminazione di Gauss dà le tensioni dei nodi

  $U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
  $U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
  $U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

- La tensione e la corrente di ogni componente (dal nodo + al nodo −)

| | $U\,[\mathrm{V}]$ | $I\,[\mathrm{A}]$ |
|---|---|---|
| $V_1$ | 12 | 0,0701 |
| $R_1$ | 4,158 | 0,04158 |
| $R_2$ | 7,842 | 0,03921 |
| $R_3$ | 4,277 | 0,02851 |
| $R_4$ | 7,723 | 0,03089 |
| $R_5$ | 0,1188 | 0,002376 |

## Limiti noti

- I circuiti sono lineari e a regime – i transitori di RC, RL e RLC sono nelle applicazioni di fisica; diodi, transistor e amplificatori operazionali non ci sono ancora.
- Lo schema si disegna per i moduli e per un circuito come espressione; una netlist riceve una tabella di componenti e nodi. Un circuito non viene riconosciuto da una foto del suo schema.
- Una netlist si risolve o in corrente continua o a una frequenza – sorgenti di frequenze diverse e la sovrapposizione non ci sono ancora.

# 49. Biologia e medicina

I calcoli di biologia, laboratorio e medicina sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», gli ambiti Biologia e Medicina: la cinetica enzimatica di Michaelis e Menten (anche con un inibitore), l'equilibrio di Hardy–Weinberg, diluizioni e conta delle colonie, il potenziale di membrana di Nernst e di Goldman e il dosaggio dei farmaci. Compila il modulo come per le altre applicazioni; l'icona «?» spiega da dove vengono le formule.

Dalle velocità misurate di una reazione enzimatica determina K_m e V_max due volte: come a scuola dalla retta di Lineweaver–Burk e più precisamente con la regressione non lineare; il grafico mostra i punti ed entrambe le curve. Per l'equilibrio di Hardy–Weinberg calcola le frequenze alleliche, le frequenze attese e un test $\chi^2$ dai conteggi dei genotipi, per una malattia recessiva la quota di portatori dalla sua incidenza.

Diluizioni: il volume della soluzione madre con $c_1V_1 = c_2V_2$, una diluizione seriale e le UFC/ml da una conta delle colonie. Dosaggio: una dose secondo la massa corporea o la superficie corporea (Mosteller, Du Bois), la velocità di un'infusione in ml/h e gocce al minuto e la clearance della creatinina secondo Cockcroft e Gault. I calcoli delle dosi sono solo indicativi e non sostituiscono il giudizio di un medico.

## Esempi

**K_m e V_max da velocità misurate – Lineweaver–Burk e regressione non lineare.**

Input: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

81[umol_l_min]; input=table)

### Risultato

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

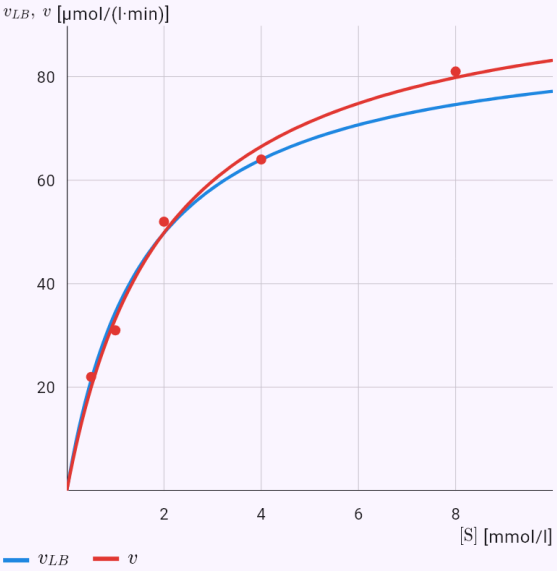
### Passaggi

- Dati
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Un enzima E lega il suo substrato S e lo trasforma nel prodotto. La velocità v cresce con la concentrazione del substrato ma si satura – al massimo raggiunge la velocità limite V_max, quando tutte le molecole di enzima sono occupate. La costante di Michaelis K_m è la concentrazione del substrato a metà di quella velocità: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Dalle velocità misurate le costanti si ricavano dalla retta di Lineweaver–Burk (1/v in funzione di 1/[S], intercetta 1/V_max, pendenza K_m/V_max) o più precisamente con la regressione non lineare. Un inibitore: uno competitivo aumenta la K_m apparente, uno non competitivo abbassa V_max, uno incompetitivo abbassa entrambe – sempre del fattore α = 1 + [I]/K_i. Equazione del modello: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Reciproci per il grafico di Lineweaver–Burk
  $\dfrac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \dfrac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Retta di regressione di 1/v in funzione di 1/[S]
  $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_{max}} + \dfrac{K_m}{V_{max}} \cdot \dfrac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Le costanti dalla retta (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \dfrac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \dfrac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Regressione non lineare – minimi quadrati sulla curva stessa

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i}\right)^2: \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$$

- Il grafico di Lineweaver–Burk amplifica gli errori alle basse concentrazioni (1/v grande) – il risultato è quindi quello della regressione non lineare; la retta è il metodo scolastico e la stima iniziale.

### Grafico




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## La velocità di reazione con un inibitore competitivo.

Input: `model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];`

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

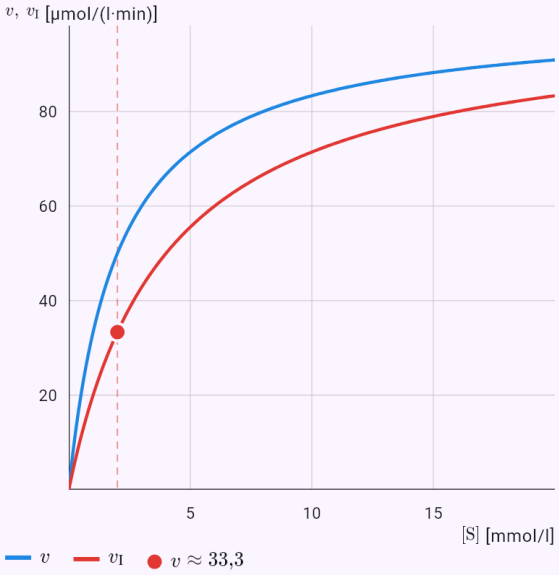
**Risultato**

$$v \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$

**Passaggi**

- Incognita $v$; dati $V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = 2\,\text{mmol/l}, \quad [\text{S}] =$
- Un enzima E lega il suo substrato S e lo trasforma nel prodotto. La velocità v cresce con la concentrazione del substrato ma si satura – al massimo raggiunge la velocità limite V_max, quando tutte le molecole di enzima sono occupate. La costante di Michaelis K_m è la concentrazione del substrato a metà di quella velocità: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Dalle velocità misurate le costanti si ricavano dalla retta di Lineweaver–Burk (1/v in funzione di 1/[S], intercetta 1/V_max, pendenza K_m/V_max) o più precisamente con la regressione non lineare. Un inibitore: uno competitivo aumenta la K_m apparente, uno non competitivo abbassa V_max, uno incompetitivo abbassa entrambe – sempre del fattore α = 1 + [I]/K_i. Equazione del modello: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Fattore di inibizione: $\alpha = 1 + \dfrac{[\text{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Costanti apparenti con l'inibitore $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\text{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\text{mol}_{/}$
- Un inibitore competitivo compete con il substrato per il sito attivo – aumenta la K_m apparente, V_max resta (molto substrato lo sposta).
- Sostituiamo $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$
- Saturazione dell'enzima: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Gruppi sanguigni MN – frequenze alleliche e il test χ² dell'equilibrio.

Input: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one]; aa=1303[one];`

`input=counts)`

**Risultato**

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

**Passaggi**

- Dati: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- In una popolazione in cui gli individui si accoppiano a caso e non ci sono selezione, mutazione o migrazione, le frequenze degli alleli restano costanti e i genotipi sono nel rapporto p² : 2pq : q², dove p e q (p + q = 1) sono le frequenze degli alleli A e a. Dai conteggi dei genotipi calcoliamo p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) e i conteggi attesi; un test χ² (1 grado di libertà) mostra se la popolazione si discosta dall'equilibrio. Per un carattere recessivo conosciamo solo la quota di omozigoti q², quindi q = √q² e la quota di portatori è 2pq. Equazione del modello: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frequenze degli alleli – ogni individuo ne porta due $p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$
- Conteggi attesi all'equilibrio $E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n($
- Test di adattamento χ² $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05 – lo scostamento dall'equilibrio di Hardy–Weinberg non è significativo.

## La quota di portatori di una malattia recessiva con un'incidenza di 1 : 2500.

Input: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

**Risultato**

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

**Passaggi**

- Dati: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Convertiamo le unità: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- In una popolazione in cui gli individui si accoppiano a caso e non ci sono selezione, mutazione o migrazione, le frequenze degli alleli restano costanti e i genotipi sono nel rapporto p² : 2pq : q², dove p e q (p + q = 1) sono le frequenze degli alleli A e a. Dai conteggi dei genotipi calcoliamo p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) e i conteggi attesi; un test χ² (1 grado di libertà) mostra se la popolazione si discosta dall'equilibrio. Per un carattere recessivo conosciamo solo la quota di omozigoti q², quindi q = √q² e la quota di portatori è 2pq. Equazione del modello: $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- La frequenza dell'allele recessivo dalla quota di omozigoti $q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Frequenze dei genotipi: $p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- I portatori (eterozigoti) sono $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

## Quanta soluzione madre per 50 ml diluiti dieci volte.

Input: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

**Risultato**

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

**Passaggi**

- Incognita $V_1$; dati:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Una diluizione non cambia la quantità (massa) della sostanza disciolta: $c_1V_1 = c_2V_2$. Il volume della soluzione madre $V_1 = c_2V_2/c_1$ si porta quindi a $V_2$ con il solvente. In una diluizione seriale ogni passaggio diluisce dello stesso fattore d (per esempio 1 : 10); dopo n passaggi la concentrazione è $c_0/d^n$. In microbiologia, dal numero N di colonie su una piastra che ha ricevuto V_p ml della diluizione D, il numero di cellule vive nel campione originale è UFC/ml = N·D/V_p (affidabile per 30–300 colonie). Equazione del modello: $c_1 V_1 = c_2 V_2$
- Ricaviamo l'incognita: $V_1 = \dfrac{c_2 V_2}{c_1}$
- Sostituiamo: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Il volume del solvente e la diluizione:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

## Le cellule in un campione dalle colonie su una piastra.

Input: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

**Risultato**

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

**Passaggi**

- Incognita $\mathrm{CFU}$; dati:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Una diluizione non cambia la quantità (massa) della sostanza disciolta: $c_1V_1 = c_2V_2$. Il volume della soluzione madre $V_1 = c_2V_2/c_1$ si porta quindi a $V_2$ con il solvente. In una diluizione seriale ogni passaggio diluisce dello stesso fattore d (per esempio 1 : 10); dopo n passaggi la concentrazione è $c_0/d^n$. In microbiologia, dal numero N di colonie su una piastra che ha ricevuto V_p ml della diluizione D, il numero di cellule vive nel campione originale è UFC/ml = N·D/V_p (affidabile per 30–300 colonie). Equazione del modello: $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Sostituiamo
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

## Il potenziale di membrana a riposo di un neurone (Goldman).

Input: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

**Risultato**

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

**Passaggi**

- Incognita $V_m$; dati $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Convertiamo le unità: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Uno ione che la membrana lascia passare si distribuisce in modo che la forza elettrica bilanci la diffusione secondo il gradiente di concentrazione. La tensione di equilibrio è data dall'equazione di Nernst E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), dove c_o e c_i sono le concentrazioni fuori e dentro la cellula, z la carica dello ione, R la costante dei gas e F la costante di Faraday (a 37 °C RT/F ≈ 26,7 mV). Il potenziale di membrana a riposo, prodotto da più ioni, è dato dall'equazione di Goldman – le concentrazioni pesate con le permeabilità relative P_K, P_Na, P_Cl (per l'anione $Cl^-$ interno ed esterno si scambiano). Equazione del modello

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$$

- La costante RT/F a questa temperatura: $\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Concentrazioni pesate fuori (o) e dentro (i) $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Sostituiamo: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln \frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Il potenziale a riposo è vicino al potenziale di equilibrio dello ione più permeabile – a riposo il potassio.

## La dose di un citostatico secondo la superficie corporea.

Input: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

**Risultato**

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

**Passaggi**

- Incognita $D$; dati: $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Solo indicativo – non sostituisce il giudizio del medico, il foglietto illustrativo o i protocolli locali.
- Una dose in base al peso corporeo D = d·m (mg/kg × kg); una concentrazione nota della soluzione dà il volume V = D/c. I citostatici e le dosi pediatriche si calcolano per superficie corporea: la formula di Mosteller S = √(altezza·peso/3600) (cm, kg, m²), quella di Du Bois per confronto. La velocità di un'infusione in ml/h è il volume diviso per il tempo, in gocce al minuto per il fattore di gocciolamento del set (di solito 20 gocce/ml). La clearance della creatinina di Cockcroft e Gault stima la funzione renale: Cl = (140 − età)·peso/(72·S_cr) con la creatinina in mg/dl (µmol/l diviso 88,4), per le donne per 0,85. I risultati sono solo indicativi – non sostituiscono il giudizio del medico né il foglietto illustrativo. Equazione del modello: $S = \sqrt{\frac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Superficie corporea (Mosteller): $S = \sqrt{\frac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Du Bois per confronto: $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Sostituiamo: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

**La clearance della creatinina di una donna (Cockcroft–Gault).**

Input: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Risultato

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Passaggi

- Incognita $Cl_{cr}$; dati
  $a = 60\,\mathrm{anno}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Solo indicativo – non sostituisce il giudizio del medico, il foglietto illustrativo o i protocolli locali.
- Una dose in base al peso corporeo D = d·m (mg/kg × kg); una concentrazione nota della soluzione dà il volume V = D/c. I citostatici e le dosi pediatriche si calcolano per superficie corporea: la formula di Mosteller S = √(altezza·peso/3600) (cm, kg, m²), quella di Du Bois per confronto. La velocità di un'infusione in ml/h è il volume diviso per il tempo, in gocce al minuto per il fattore di gocciolamento del set (di solito 20 gocce/ml). La clearance della creatinina di Cockcroft e Gault stima la funzione renale: Cl = (140 − età)·peso/(72·S_cr) con la creatinina in mg/dl (µmol/l diviso 88,4), per le donne per 0,85. I risultati sono solo indicativi – non sostituiscono il giudizio del medico né il foglietto illustrativo. Equazione del modello: $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Creatinina in mg/dl (µmol/l diviso 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Sostituiamo
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

## Limiti noti

- Cinetica enzimatica solo per un substrato allo stato stazionario (Michaelis–Menten); gli enzimi allosterici (l'equazione di Hill) non ci sono ancora.
- Hardy–Weinberg per un gene con due alleli; più alleli e geni legati all'X non ci sono ancora.
- Il dosaggio è solo indicativo – non tiene conto di interazioni tra farmaci, fasce d'età o correzioni per la funzione d'organo diverse dalla clearance della creatinina.

# 50. Economia, finanza e assicurazioni

I calcoli finanziari ed economici sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», l'ambito Economia: interessi per giorni (30E/360, ACT/360, ACT/365), una cambiale e il suo sconto, una rendita pagata dai risparmi (temporanea, differita, perpetua), la capitalizzazione mista, risparmi con un versamento iniziale e capitalizzazione annua, un prestito rimborsato a quota capitale costante, interessi su un deposito (semplici, composti, continui, con imposta e inflazione), risparmio regolare, un prestito con il piano di ammortamento e il TAEG, un'obbligazione, un investimento (VAN, TIR, tempo di recupero), la conversione di valuta, il punto di pareggio, la massimizzazione del profitto, l'equilibrio di mercato, il modello di Leontief e le catene di Markov, e la matematica attuariale – tavole di mortalità, assicurazione sulla vita, rendite, riserve e assicurazioni danni con bonus-malus.

Investire in prestiti P2P calcola il valore del portafoglio (la liquidità sul conto e il capitale residuo) mese per mese: i versamenti si investono in importi interi per prestito, i prestiti si rimborsano con rate costanti, la piattaforma trattiene una commissione di erogazione e una quota degli interessi, le perdite sono un tasso di insolvenza annuo; per confronto una formula chiusa con reinvestimento continuo. Al contrario trova il versamento mensile o il tempo per un importo obiettivo.

Gli importi possono essere in qualsiasi valuta – sceglila nel modulo (quella predefinita è del paese del telefono); il calcolo non ne dipende. La conversione di valuta usa i cambi giornalieri della Banca nazionale ceca (in ceco o su un telefono impostato sulla Repubblica Ceca) o i cambi di riferimento della Banca centrale europea (nelle altre lingue) e converte qualsiasi coppia tramite una valuta comune, mostrando la fonte e la data dei cambi.

Gli importi in una valuta si scrivono secondo l'uso della lingua dell'app e della regione nelle impostazioni del telefono (2,431.50 USD; in italiano 2.431,50 €; in ceco 2 431,50 Kč; in Svizzera 2'431.50), e così la data del listino.

I passaggi mostrano le formule, la sostituzione e i risultati intermedi: il tasso effettivo e quello reale, il piano di ammortamento, il valore attuale dei flussi, ricavo e costo marginali come derivate, i surplus come integrali, l'inversa di Leontief e la distribuzione stazionaria risolvendo un sistema. La matematica attuariale usa i numeri di commutazione; la riserva è mostrata in modo prospettivo e retrospettivo.

## Esempi

**Un deposito con capitalizzazione mensile, imposta sugli interessi e inflazione.**

Input: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

**Risultato**

$$K_n \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati:
  $K_0 = 100.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Convertiamo le unità:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Con l'interesse semplice gli interessi si calcolano sempre sul deposito iniziale: K_n = K₀(1 + pn). Con l'interesse composto si accreditano e producono a loro volta interessi: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), dove m è il numero di capitalizzazioni l'anno (annuale, semestrale, trimestrale, mensile). La capitalizzazione continua è il limite m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Un'imposta sugli interessi d abbassa il tasso a p(1 − d). Il tasso effettivo annuo confronta le frequenze. L'attualizzazione è il calcolo inverso – quanto depositare oggi. Con l'inflazione π il valore reale è K_n/(1 + π)^n. L'interesse misto (come le banche accreditano gli interessi una volta l'anno) capitalizza gli anni interi e aggiunge l'interesse semplice per il resto dell'ultimo: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Equazione del modello: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Capitalizzazioni l'anno: $m = 12$
- Il tasso dopo l'imposta sugli interessi:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Tasso effettivo annuo:
  $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^m - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Sostituiamo
  $K_n = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Interessi in totale: $K_n - K_0 \approx 52.844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Valore reale (a prezzi di oggi):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113.730{,}47\,\mathrm{CZK}$
- Tasso d'interesse reale: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Il tasso d'interesse supera l'inflazione – il valore reale del denaro cresce.

## Risparmio mensile per 15 anni.

Input: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

**Risultato**

$$S \approx 438.907{,}24\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $a = 2.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Convertiamo le unità:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Con il risparmio periodico versiamo un importo a ogni periodo (mese, anno). Ogni versamento frutta interessi per un tempo diverso, quindi la somma risparmiata è la somma di una serie geometrica: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) per versamenti all'inizio di ogni periodo (rendita anticipata), senza il primo q per versamenti alla fine (rendita posticipata); q = 1 + p/m e N = mn è il numero di versamenti. L'equazione dà anche il versamento necessario o il tempo. Un versamento iniziale facoltativo K₀ frutta per tutto il tempo – si aggiunge K₀·q^N. Con interessi accreditati una volta l'anno, i versamenti mensili fruttano interesse semplice nell'anno – un anno dà A = a(12 + p·13/2) per versamenti a inizio mese, a(12 + p·11/2) a fine mese – e si capitalizzano solo questi importi annuali. Equazione del modello:
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Il tasso dopo l'imposta sugli interessi:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Fattore di capitalizzazione per periodo:
  $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Sostituiamo
  $S = 2.000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438.907{,}24\,\mathrm{C}$
- Versato in totale e gli interessi
  $N \cdot a = 180 \cdot 2.000 = 360.000\,\mathrm{CZK}, \quad S - Na \approx 78.9($

## Un mutuo di 3 milioni per 25 anni – rata, piano e TAEG.

Input: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

**Risultato**

$$a \approx 17.537{,}70\,\mathrm{CZK}$$

$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

**Passaggi**

- Dati:
  $D = 3.000.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15.000$
- Convertiamo le unità: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un prestito a rata costante (ammortamento francese) si rimborsa con rate uguali a. Ogni rata paga prima gli interessi sul debito residuo e il resto riduce il debito (la quota capitale), quindi la quota interessi cala nel tempo. Il valore attuale di tutte le rate è uguale al prestito, il che dà a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Il piano di ammortamento mostra per ogni rata interessi, quota capitale e debito residuo. Il TAEG comprende anche le spese – il tasso al quale il valore attuale delle rate è uguale all'importo effettivamente ricevuto. Con quota capitale costante (ammortamento italiano), il debito cala ogni periodo dello stesso M = D/N e la rata a_k = M + U_k cala con gli interessi – si pagano meno interessi che con la rata costante, ma le prime rate sono più alte. Il piano mostra il primo anno e l'ultima rata, oppure tutto. Equazione del modello:
  $$a = D\,\frac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \frac{p}{m}, \quad N = mn$$
- Interesse per periodo:
  $$i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$$
- Sostituiamo
  $$a = 3.000.000 \cdot \frac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17.537{,}70$$
- Piano di ammortamento (U interessi, M quota capitale, D debito residuo)

| $k$ | $a$ | $U_k$ | $M_k$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 17.537,70 | 12.500 | 5.037,70 | 2.994.962,3 |
| 2 | 17.537,70 | 12.479,01 | 5.058,69 | 2.989.903,6 |
| 3 | 17.537,70 | 12.457,93 | 5.079,77 | 2.984.823,8 |
| 4 | 17.537,70 | 12.436,77 | 5.100,94 | 2.979.722,9 |
| 5 | 17.537,70 | 12.415,51 | 5.122,19 | 2.974.600,7 |
| 6 | 17.537,70 | 12.394,17 | 5.143,53 | 2.969.457,1 |
| 7 | 17.537,70 | 12.372,74 | 5.164,96 | 2.964.292,2 |
| 8 | 17.537,70 | 12.351,22 | 5.186,48 | 2.959.105,7 |
| 9 | 17.537,70 | 12.329,61 | 5.208,09 | 2.953.897,6 |
| 10 | 17.537,70 | 12.307,91 | 5.229,79 | 2.948.667,8 |
| 11 | 17.537,70 | 12.286,12 | 5.251,59 | 2.943.416,2 |
| 12 | 17.537,70 | 12.264,23 | 5.273,47 | 2.938.142,7 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 300 | 17.537,70 | 72,77 | 17.464,93 | |

- Pagato in totale e gli interessi compresi
  $$\sum a \approx 5.261.310{,}37\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2.261.310{,}37\,\mathrm{C}$$
- TAEG – il tasso annuo effettivo globale con le spese
  $$D - F = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+\mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$
- › Il metodo: bisezione, 14 iterazioni

## Risparmiare 1.000 al mese con un versamento iniziale e interessi capitalizzati annualmente (come si insegna nelle scuole ceche).

Input: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

**Risultato**

$$S \approx 85.206{,}62\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $a = 1.000, \quad K_0 = 20.000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Convertiamo le unità: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Con il risparmio periodico versiamo un importo a ogni periodo (mese, anno). Ogni versamento frutta interessi per un tempo diverso, quindi la somma risparmiata è la somma di una serie geometrica: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) per versamenti all'inizio di ogni periodo (rendita anticipata), senza il primo q per versamenti alla fine (rendita posticipata); q = 1 + p/m e N = mn è il numero di versamenti. L'equazione dà anche il versamento necessario o il tempo. Un versamento iniziale facoltativo $K_0$ frutta per tutto il tempo – si aggiunge $K_0$·q^N. Con interessi accreditati una volta l'anno, i versamenti mensili fruttano interesse semplice nell'anno – un anno dà A = a(12 + p·13/2) per versamenti a inizio mese, a(12 + p·11/2) a fine mese – e si capitalizzano solo questi importi annuali. Equazione del modello

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- I versamenti di un anno con gli interessi nell'anno:
  $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Fattore di capitalizzazione per periodo:
  $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Sostituiamo
  $S = 1.000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20.000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85.20€$
- Versato in totale e gli interessi
  $K_0 + N \cdot a = 20.000 + 60 \cdot 1.000 = 80.000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$

## Investire in prestiti P2P: 2.000 CZK al mese per 10 anni, 200 CZK per prestito, con una commissione e perdite.

Input: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct]; L=200[one];`

M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)

### Risultato

$$V \approx 318.974{,}12\,\text{CZK}$$

### Passaggi

- Dati

  $a = 2.000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$

- Convertiamo le unità:

  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$

- Su una piattaforma di prestiti P2P l'investitore versa ogni mese un importo a. Il contante si investe in multipli interi dell'importo L per prestito (es. 200 CZK), il resto aspetta sul conto. La piattaforma trattiene da ogni investimento la commissione iniziale f, nel prestito va L(1 − f). I prestiti si rimborsano a rata costante, rate mensili uguali s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) per M mesi, i = p/12; la piattaforma trattiene la quota g degli interessi. Il tasso di insolvenza λ (annuo) svaluta ogni mese parte del capitale, λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). I rimborsi tornano sul conto e si reinvestono. Il valore del portafoglio V = H + P è il contante sul conto H più il capitale residuo nei prestiti P. Il calcolo simula mese per mese e, per confronto, dà una formula chiusa con reinvestimento continuo: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Il problema inverso trova il versamento mensile o il tempo necessario per un valore obiettivo. È una stima con rendimento fisso – il risultato reale dipende soprattutto dalle perdite. Il rendimento indicato da una piattaforma è spesso già al netto di commissioni e perdite; in tal caso non inserirle di nuovo. Non è una consulenza d'investimento. Equazione del modello

  $$V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$$

- Interesse mensile, perdite mensili e rata

  $$i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$$

- Sostituiamo

  $V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10.735{,}19 + 308.238{,}93 \approx 318.97$

- Simulazione mese per mese – lo stato alla fine degli anni (k in mesi): versato, capitale nei prestiti P, contante H, commissioni F, perdite Z, valore V

| $k$ | $\sum a$ | $P_k$ | $H_k$ | $F_k$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 24.000 | 23.784,39 | 726,58 | 266 | 2 |
| 24 | 48.000 | 49.198,83 | 1.248,72 | 606 | 1.0 |
| 36 | 72.000 | 75.757,04 | 2.129,17 | 1.032 | 2.3 |
| 48 | 96.000 | 103.744,84 | 3.148,57 | 1.568 | 4.2 |
| 60 | 120.000 | 133.102,33 | 4.439,70 | 2.240 | 6.6 |
| 72 | 144.000 | 164.382,06 | 5.541,37 | 3.054 | 9.8 |
| 84 | 168.000 | 197.551,52 | 6.600,52 | 4.002 | 13.5 |
| 96 | 192.000 | 232.369,52 | 7.962,71 | 5.094 | 18.0 |
| 108 | 216.000 | 269.327,69 | 9.238,91 | 6.346 | 23.3 |
| 120 | 240.000 | 308.238,93 | 10.735,19 | 7.764 | 29.3 |

- Versato, commissioni F, perdite Z, interessi netti U e il guadagno

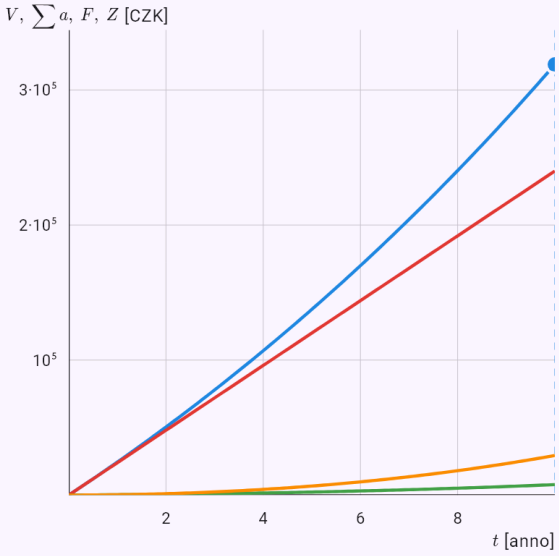
  $$\sum a = 240.000\,\text{CZK}, \quad F = 7.764\,\text{CZK}, \quad Z = 29.33$$

- Per confronto: la formula chiusa con reinvestimento continuo

  $$r = p(1 - g)(1 - f) - \lambda - f\,\frac{24}{M + 1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$$

- È una stima con rendimento fisso e tasso di insolvenza costante – la realtà dipende soprattutto dalle perdite. Il rendimento indicato da una piattaforma è spesso già al netto di commissioni e perdite. Non è una consulenza d'investimento.

### Grafico




Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

## Un prestito a quota capitale costante – rate decrescenti confrontate con una rata costante.

Input: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

**Risultato**

$$a_1 \approx 15.000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10.041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $D = 1.200.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Convertiamo le unità: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un prestito a rata costante (ammortamento francese) si rimborsa con rate uguali a. Ogni rata paga prima gli interessi sul debito residuo e il resto riduce il debito (la quota capitale), quindi la quota interessi cala nel tempo. Il valore attuale di tutte le rate è uguale al prestito, il che dà a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Il piano di ammortamento mostra per ogni rata interessi, quota capitale e debito residuo. Il TAEG comprende anche le spese – il tasso al quale il valore attuale delle rate è uguale all'importo effettivamente ricevuto. Con quota capitale costante (ammortamento italiano), il debito cala ogni periodo dello stesso M = D/N e la rata a_k = M + U_k cala con gli interessi – si pagano meno interessi che con la rata costante, ma le prime rate sono più alte. Il piano mostra il primo anno e l'ultima rata, oppure tutto. Equazione del modello

  $$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\,i, \quad i = \frac{p}{m},$$

- Interesse per periodo: $i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Sostituiamo: $M = \frac{1.200.000}{120} \approx 10.000\,\mathrm{CZK}$
- La prima e l'ultima rata

  $$a_1 = M + D\,i \approx 15.000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1+i) \approx 10.0$$

- Piano di ammortamento (U interessi, M quota capitale, D debito residuo)

| $k$ | $a_k$ | $U_k$ | $M_k$ | $D_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 15.000 | 5.000 | 10.000 | 1.190.000 |
| 2 | 14.958,33 | 4.958,33 | 10.000 | 1.180.000 |
| 3 | 14.916,67 | 4.916,67 | 10.000 | 1.170.000 |
| 4 | 14.875 | 4.875 | 10.000 | 1.160.000 |
| 5 | 14.833,33 | 4.833,33 | 10.000 | 1.150.000 |
| 6 | 14.791,67 | 4.791,67 | 10.000 | 1.140.000 |
| 7 | 14.750 | 4.750 | 10.000 | 1.130.000 |
| 8 | 14.708,33 | 4.708,33 | 10.000 | 1.120.000 |
| 9 | 14.666,67 | 4.666,67 | 10.000 | 1.110.000 |
| 10 | 14.625 | 4.625 | 10.000 | 1.100.000 |
| 11 | 14.583,33 | 4.583,33 | 10.000 | 1.090.000 |
| 12 | 14.541,67 | 4.541,67 | 10.000 | 1.080.000 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 120 | 10.041,67 | 41,67 | 10.000 | 0 |

- Pagato in totale e gli interessi compresi

  $$\sum a_k \approx 1.502.500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302.500\,\mathrm{CZK}$$

- A confronto con la rata costante – la rata e gli interessi totali:

  $$a \approx 12.727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327.343{,}42\,\mathrm{CZK}$$

- Rimborsare con quota capitale costante fa risparmiare $24.843{,}42\,\mathrm{CZK}$ di interessi, ma le prime rate sono più alte.

## Interessi per giorni secondo 30E/360 con un'imposta del 15 %.

Input: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-09-`

`20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

**Risultato**

$$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$$
$$K_n \approx 50.436{,}81\ \mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $K_0 = 50.000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Convertiamo le unità: $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- I depositi a breve termine fruttano interesse semplice per t giorni: u = K₀·p·t/B. I giorni e la lunghezza dell'anno B seguono la convenzione di calcolo dei giorni: 30E/360 (banche e scuole ceche e tedesche) conta ogni mese come 30 giorni (il 31 come il 30) e l'anno come 360 giorni, ACT/360 (Francia, Spagna, mercati monetari) i giorni effettivi e un anno di 360, ACT/365 (Regno Unito) i giorni effettivi e un anno di 365. I giorni si contano dalle date del deposito e del prelievo, oppure si scrivono direttamente. L'imposta sugli interessi si toglie dagli interessi. Il calcolo inverso – quanto depositare oggi per un importo – è l'attualizzazione. Equazione del modello: $u = K_0 \cdot p \cdot \frac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$
- Convenzione di calcolo dei giorni e la lunghezza dell'anno: $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Giorni (30E/360: un mese di 30 giorni, il 31 come il 30) $15/03/2026 \to 20/09/2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026$
- Sostituiamo: $u = 50.000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- L'imposta sugli interessi e gli interessi al netto $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Interessi in totale: $K_n = K_0 + u' \approx 50.436{,}81\ \mathrm{CZK}$

## Una cambiale scontata – cosa paga la banca 90 giorni prima della scadenza.

Input: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

**Risultato**

$$K \approx 98.500\ \mathrm{CZK}$$
$$D \approx 1.500\ \mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $N = 100.000, \quad d = 6\,\%$
- Convertiamo le unità: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Una cambiale promette di pagare il suo nominale N alla data di scadenza. Una banca può acquistarla prima (scontarla) e la paga al netto dello sconto D = N·d·t/B, dove d è il tasso di sconto e t i giorni alla scadenza: K = N(1 − d·t/B). Lo sconto si calcola sull'importo finale, non su quello pagato, quindi il rendimento reale della banca i = d/(1 − d·t/B) è più alto del tasso di sconto. La convenzione usuale è ACT/360. Equazione del modello: $D = N \cdot d \cdot \frac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\frac{t}{B}\right)$
- Convenzione di calcolo dei giorni e la lunghezza dell'anno: $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$
- Giorni secondo il calendario: $10/01/2026 \to 10/04/2026: \quad t = 90$
- Sostituiamo: $D = 100.000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{90}{360} \approx 1.500\ \mathrm{CZK}$
- Importo pagato: $K = N - D \approx 98.500\ \mathrm{CZK}$
- Il rendimento reale della banca: $i = \frac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- Lo sconto si calcola sull'importo finale – quindi la banca guadagna davvero più del tasso di sconto.

## Una rendita mensile da 2 milioni per 20 anni, differita di 5 anni.

Input: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

**Risultato**

$$a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $K = 2.000.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Convertiamo le unità: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Una rendita paga un importo regolare a da un capitale K, che nel frattempo continua a fruttare interessi. Il valore attuale di N pagamenti è K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m − la stessa formula del rimborso di un prestito. I pagamenti all'inizio dei periodi (rendita anticipata) la moltiplicano per q. Una rendita differita inizia a pagare dopo k anni, e il capitale nel frattempo cresce a K·q^(mk). Una rendita perpetua paga solo gli interessi e il capitale resta: K = a/(q − 1). Il risultato è il pagamento, il capitale necessario o quanto durano i pagamenti.
  Equazione del modello:
  $$K = a\,\frac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Fattore di capitalizzazione per periodo:
  $q = 1 + \dfrac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Attualizzato sul periodo di differimento:
  $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- Ricaviamo l'incognita: $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- Sostituiamo: $a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$

- Il capitale quando iniziano i pagamenti:
  $K\,q^{mk} \approx 2.323.233{,}56\,\mathrm{CZK}$
- I pagamenti (U interessi, K saldo)

| $k$ | $a$ | $U_k$ | $K_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 12.884,60 | 5.808,08 | 2.316.157,05 |
| 2 | 12.884,60 | 5.790,39 | 2.309.062,84 |
| 3 | 12.884,60 | 5.772,66 | 2.301.950,90 |
| 4 | 12.884,60 | 5.754,88 | 2.294.821,18 |
| 5 | 12.884,60 | 5.737,05 | 2.287.673,64 |
| 6 | 12.884,60 | 5.719,18 | 2.280.508,23 |
| 7 | 12.884,60 | 5.701,27 | 2.273.324,90 |
| 8 | 12.884,60 | 5.683,31 | 2.266.123,61 |
| 9 | 12.884,60 | 5.665,31 | 2.258.904,33 |
| 10 | 12.884,60 | 5.647,26 | 2.251.666,99 |
| 11 | 12.884,60 | 5.629,17 | 2.244.411,56 |
| 12 | 12.884,60 | 5.611,03 | 2.237.137,99 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 240 | 12.884,60 | 32,13 | 0 |

- Pagato in totale e gli interessi compresi
  $\sum a \approx 3.092.303{,}41\,\mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1.092.303{,}4$

## Il prezzo e la duration di un'obbligazione.

Input: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct]; freq=annual;`

`cur=EUR)`

**Risultato**

$$P \approx 1.044{,}52\,€$$

**Passaggi**

- Dati: $N = 1.000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Convertiamo le unità:
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Un'obbligazione paga ogni periodo una cedola C = c·N/m e alla fine il valore nominale N. Il suo prezzo è il valore attuale di questi pagamenti attualizzati al rendimento di mercato y. Quando il rendimento di mercato è sotto il tasso cedolare, l'obbligazione quota sopra la pari, altrimenti sotto. Il rendimento a scadenza è il tasso al quale il valore attuale dei pagamenti è uguale al prezzo – trovato numericamente. La duration è il tempo medio ponderato dei pagamenti e misura la sensibilità del prezzo ai tassi d'interesse. Equazione del modello

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{k}} + \frac{N_{nom}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{N}}$$

- Cedola per periodo: $C = \frac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,€, \quad N = 5$
- Sostituiamo

$$P = 50 \cdot \frac{1 - 0{,}961538^{5}}{0{,}04} + \frac{1.000}{1{,}04^{5}} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$$

- Il rendimento di mercato è sotto la cedola – l'obbligazione quota sopra la pari.
- Duration (di Macaulay e modificata)

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k} t_k\, PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \approx 4{,}382$$

## Il tasso interno di rendimento di un investimento.

Input: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

**Risultato**

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

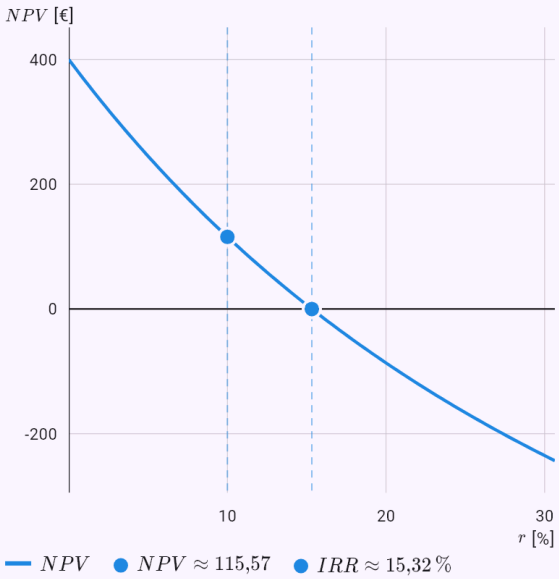
**Passaggi**

- Dati:
  $CF_t = (-1.000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Convertiamo le unità: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Il valore attuale netto VAN somma i flussi di cassa di un progetto $CF_0$, $CF_1$, … attualizzati al rendimento richiesto r: VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un progetto con VAN > 0 rende più del rendimento richiesto. Il tasso interno di rendimento TIR è il tasso al quale VAN = 0 – la radice di un'equazione polinomiale, trovata numericamente. Il periodo di recupero è quando la somma cumulata dei flussi (semplici o attualizzati) smette di essere negativa.
  Equazione del modello: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^{t}}$
- Valore attuale netto

$$NPV = -1.000 + \frac{300}{1{,}1^{1}} + \frac{400}{1{,}1^{2}} + \frac{500}{1{,}1^{3}} + \frac{200}{1{,}1^{4}} \approx 115{,}5$$

- VAN ≥ 0 – il progetto rende almeno il rendimento richiesto.
- Risolviamo l'equazione numericamente (per bisezione): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Il metodo: bisezione, 14 iterazioni

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Euro in corone al cambio odierno della ČNB.

Input: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

**Risultato**

$$2.443{,}50\,\mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\,\mathrm{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $A = 100$
- Un tasso di cambio è il prezzo di un'unità di valuta estera. La Banca nazionale ceca (ČNB) pubblica i cambi della corona ogni giorno lavorativo, la Banca centrale europea i cambi di riferimento dell'euro. Un importo si converte tramite una valuta comune: $A_2 = A_1 \cdot k_1/k_2$, dove $k_1$ e $k_2$ sono i valori delle due valute in corone (ČNB) o in euro (BCE) – un cambio incrociato. Banche e uffici di cambio usano propri cambi di acquisto e vendita con un margine; il risultato è indicativo. Equazione del modello: $A_2 = A_1 \cdot \dfrac{k_1}{k_2}$
- Tabella dei cambi: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026$
- Cambi: $1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$
- Sostituiamo: $A_2 = 100 \cdot \dfrac{24{,}435}{1} \approx 2.443{,}50\,\mathrm{CZK}$
- Banche e uffici di cambio usano propri cambi con un margine – il risultato è indicativo.

## Il massimo del profitto da ricavo e costo marginali.

Input: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

e=0.5[one]; cur=CZK)

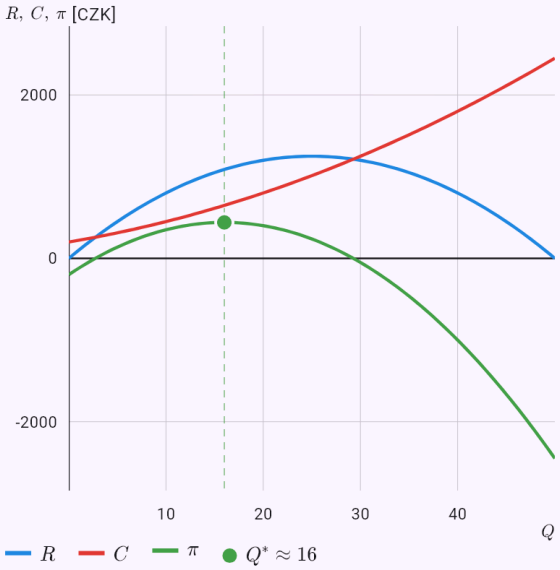
**Risultato**

$$Q^* \approx 16$$
$$p^* \approx 68\,\text{CZK}$$
$$\pi^* \approx 440\,\text{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Un'impresa con domanda lineare p = a − bQ ha ricavi R = pQ e costi C(Q) = F + cQ + eQ². Il profitto π = R − C è massimo dove la sua derivata è zero, cioè il ricavo marginale è uguale al costo marginale: MR = R'(Q) = MC = C'(Q). La derivata seconda conferma un massimo. L'elasticità della domanda al prezzo ε = (dQ/dp)·(p/Q) dice di quanti punti percentuali cambia la quantità domandata quando il prezzo cambia dell'1 %; |ε| > 1 è una domanda elastica. Equazione del modello: $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Ricavi e costi: $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Ricavo marginale e costo marginale (derivate): $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Sostituiamo: $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- La derivata seconda del profitto è negativa – un massimo: $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Il prezzo e il profitto all'ottimo: $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\text{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\text{CZK}$
- Elasticità della domanda al prezzo: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## L'equilibrio di mercato, i surplus e un'imposta.

Input: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

t=5[one]; cur=CZK)

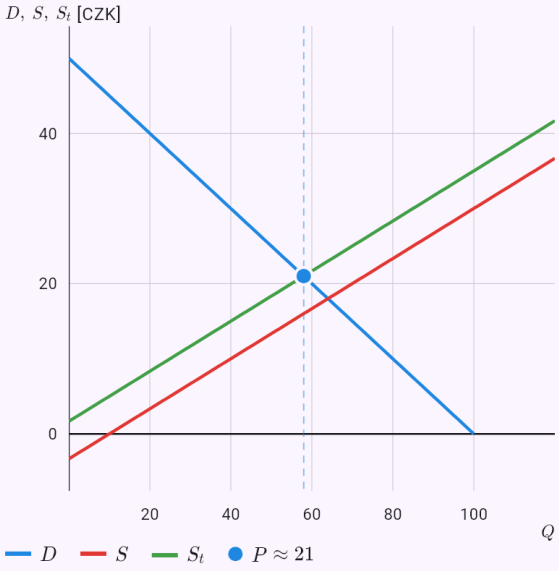
**Risultato**

$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- La domanda Q_D = a − bP cala con il prezzo, l'offerta Q_S = c + dP cresce. Il mercato è in equilibrio dove si incontrano: P* = (a − c)/(b + d). Il surplus del consumatore è l'area tra la curva di domanda e il prezzo (quanto i compratori avrebbero pagato in più), il surplus del produttore l'area tra il prezzo e la curva di offerta – entrambi integrali. Un'imposta t per unità sposta l'offerta in alto di t: i compratori pagano di più, i venditori ricevono meno, si scambia meno e nasce una perdita secca. Equazione del modello:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Sostituiamo:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- Con l'imposta: il prezzo dei compratori e dei venditori
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Gettito dell'imposta e perdita secca
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Surplus del consumatore:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Surplus del produttore:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$
- Elasticità di domanda e offerta all'equilibrio
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Il modello di Leontief a tre settori.

Input: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200`

150[one])

**Risultato**

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

**Passaggi**

- Dati
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Il modello di Leontief descrive un'economia di n settori che si riforniscono a vicenda. L'elemento a_ij della matrice dei coefficienti tecnici A dice quanta produzione del settore i usa il settore j per unità della propria produzione. La produzione lorda x deve coprire l'uso intermedio Ax e la domanda finale y: x = Ax + y, quindi x = (I − A)⁻¹y. L'inversa di Leontief (I − A)⁻¹ mostra quanto deve produrre ogni settore per unità di domanda finale. Equazione del modello:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Coefficienti tecnici e domanda finale
  $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$$
- La matrice I − A
  $$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
- Inversa di Leontief
  $$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$$
- Sostituiamo: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Flussi intersettoriali
  $$x_{ij} = a_{ij}x_j : \quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$$

## Le quote di clienti di lungo periodo di tre marche.

Input: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])`

**Risultato**

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

**Passaggi**

- Dati:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Una catena di Markov passa tra stati con probabilità p_ij che dipendono solo dallo stato presente (non dalla storia). Le righe della matrice di transizione P sommano a 1. La distribuzione dopo un passo è $\pi_1 = \pi_0 P$, dopo n passi $\pi_n = \pi_0 P^n$. La distribuzione stazionaria soddisfa $\pi P = \pi$ e mostra le quote di lungo periodo degli stati – clienti di marchi, classi bonus-malus, stati di una macchina. Equazione del modello:
  $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Matrice di transizione
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Il sistema per la distribuzione stazionaria
  $$\pi_1 = 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3$$
  $$\pi_2 = 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3$$
  $$\pi_3 = 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- Nel lungo periodo la distribuzione si stabilizza su quella stazionaria qualunque sia l'inizio (per una catena regolare).

## La speranza di vita di una donna a 65 anni.

Input: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

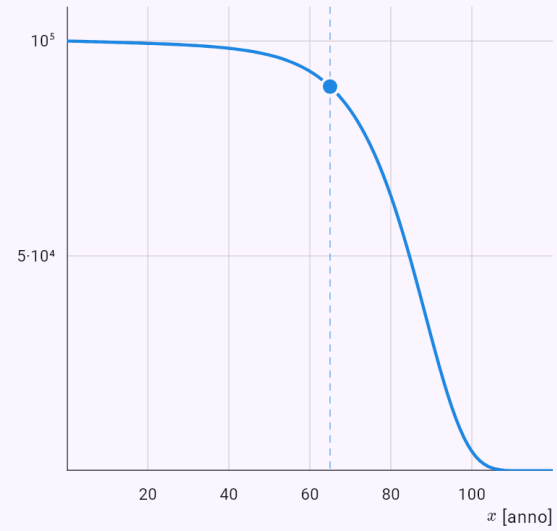
**Risultato**

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

**Passaggi**

- Dati: $x = 65$
- Una tavola modello (Gompertz–Makeham) all'incirca come quella della popolazione ceca – per risultati precisi inserisci qₓ ufficiali.
- Una tavola di mortalità dà quanti su 100 000 neonati (l_x) arrivano all'età x. La probabilità che una persona di età x viva altri n anni è ₙpₓ = l_{x+n}/l_x, di morire ₙqₓ = 1 − ₙpₓ. La speranza di vita e_x è il numero medio di anni che una persona di età x vive ancora. La tavola modello secondo la legge di Gompertz–Makeham μ(x) = A + B·c^x è tarata all'incirca sulla popolazione ceca; i calcoli precisi usano tavole ufficiali – inserisci i tuoi qₓ.
  Equazione del modello
  $$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$
- Sopravviventi dalla tavola: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Sostituiamo: $e_{65} \approx 20{,}57$
- In media vivono fino a $85{,}57$

**Grafico**




Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

## Il premio annuo di un'assicurazione mista.

Input: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct]; S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

**Risultato**

$$P \approx 40.227{,}05\ \text{CZK}$$

**Passaggi**

- Dati: $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1.000.000$
- Convertiamo le unità: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Una tavola modello (Gompertz–Makeham) all'incirca come quella della popolazione ceca – per risultati precisi inserisci qₓ ufficiali.
- Il premio puro si ricava dal principio di equivalenza: il valore attuale dei premi è uguale al valore attuale delle prestazioni future. Con i numeri di commutazione D_x = v^xl_x, N_x, C_x e M_x (v = 1/(1 + i), i il tasso tecnico) il premio unico puro di un'assicurazione temporanea caso morte per n anni è (M_x − M_{x+n})/D_x, di un capitale differito D_{x+n}/D_x, di una mista la loro somma; una rendita ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. Il premio annuo divide per la rendita ä. La riserva nell'anno t è il valore attuale delle prestazioni future meno quello dei premi futuri (prospettivamente) – e risulta uguale ai premi incassati meno le prestazioni pagate, capitalizzati (retrospettivamente). Equazione del modello
  $$ D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k\geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k\geq} $$
- Numeri di commutazione
  $$D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$$
- Premio unico puro
  $$A_{x:\overline{20|}} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20|}} \approx 622.543{,}08\ \text{CZK}$$
- Premio annuo
  $$\ddot{a}_{x:\overline{20|}} \approx 15{,}4757, \quad P = \frac{S \cdot A_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} \approx 40.227{,}05\ \text{CZK}$$

**Un sistema bonus-malus e il livello medio del premio.**

Input: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

**Risultato**

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

**Passaggi**

- Dati: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Convertiamo le unità: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- Nelle assicurazioni danni (auto, beni) i sinistri annui attesi di un assicurato sono E[S] = λ·m, dove λ è il numero medio di sinistri l'anno e m il sinistro medio. Il premio di rischio riceve un caricamento θ per costi e sicurezza. Un sistema bonus-malus cambia il premio secondo la storia dei sinistri: un anno senza sinistri porta a una classe migliore, un sinistro indietro. Le classi formano una catena di Markov; la sua distribuzione stazionaria dà le quote di lungo periodo delle classi e il livello medio del premio. Equazione del modello: $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Un anno senza sinistri porta una classe giù (uno sconto), un sinistro di nuovo alla prima classe.
- Matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

- Il sistema per la distribuzione stazionaria

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

- Le quote di lungo periodo delle classi: $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Sostituiamo: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

## Limiti noti

- Le tavole di mortalità sono modelli (Gompertz–Makeham, approssimativamente come la popolazione ceca); per risultati precisi inserisci i tuoi $q_x$ da tavole ufficiali.
- I cambi sono di riferimento – banche e uffici di cambio usano cambi e commissioni propri.
- Microeconomia con domanda lineare e costi quadratici; funzioni generiche date da una formula non ci sono ancora.
- Le convenzioni non spostano le date per le festività – gli interessi sono per i giorni tra le date date; un prestito non ha rimborsi anticipati né variazioni del tasso.
- Investire in prestiti P2P è una stima con un rendimento fisso e un tasso di insolvenza costante; trascura il recupero crediti, il rimborso anticipato, un mercato secondario e le imposte. Non è una consulenza sugli investimenti.

# 51. Programmazione lineare, trasporti, assegnazione e giochi a matrice

I problemi di ottimizzazione sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», l'ambito Logistica e reti (la programmazione lineare anche in Economia): programmazione lineare e intera, il problema dei trasporti e il problema di assegnazione. Un problema lineare si può anche digitare o fotografare, es. max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – i vincoli su righe separate o dopo un punto e virgola, min invece di max, e la parola integer lo rende un problema intero.

I passaggi mostrano la forma standard con variabili di scarto e artificiali e le tabelle del simplesso in frazioni esatte con il pivot evidenziato. I vincoli ≥ e = sono gestiti per impostazione dal metodo delle due fasi; un chip sceglie il metodo del grande M. L'ottimo ha il problema duale, i prezzi ombra dei vincoli e un'analisi di sensitività (gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo e dei termini noti). Con due variabili l'app disegna la regione ammissibile, i vertici con i valori dell'obiettivo e la retta di livello per l'ottimo. Un problema intero si risolve con il branch and bound, e percorri l'albero di ramificazione con le frecce come un grafo.

Il problema dei trasporti è dato dalla matrice dei costi unitari, dalle disponibilità dei fornitori e dalle richieste dei clienti; un problema non bilanciato riceve un fornitore o un cliente fittizio. La soluzione iniziale viene dall'angolo nord-ovest, dal costo minimo o dall'approssimazione di Vogel, l'ottimo dal metodo MODI con potenziali e cicli chiusi; il piano di trasporto è mostrato anche come grafo. Il problema di assegnazione si risolve con il metodo ungherese – riduzione di righe e colonne, copertura degli zeri con linee e scelta di zeri indipendenti; gestisce anche un massimo e una matrice rettangolare.

Giochi a matrice a due giocatori (l'ambito Logistica e reti, o la notazione game(3 -1 2; -2 4 1) – le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B): un gioco a somma zero cerca prima un punto di sella (maximin = minimax), poi cancella le strategie dominate e calcola le strategie miste con una formula per un gioco 2 × 2, graficamente per 2 × n e m × 2 (l'inviluppo inferiore e superiore delle rette) e con la programmazione lineare con tabelle del simplesso per uno più grande – il problema duale dà la strategia dell'altro giocatore. Il risultato sono le strategie ottimali di entrambi i giocatori e il valore del gioco in frazioni esatte. Un gioco bimatrice (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), le vincite di A | le vincite di B) mostra le risposte migliori e gli equilibri di Nash in strategie pure, per un gioco 2 × 2 anche l'equilibrio misto.

# Esempi

## Un piano di produzione con il metodo del simplesso con prezzi ombra e sensitività.

Input: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

**Risultato**

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

**Passaggi**

- Il problema lineare

  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \le 4$
  $2x_2 \le 12$
  $3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $x_1, x_2 \ge 0$

- Non sono date condizioni di non negatività – assumiamo $x_1, x_2 \ge 0$
- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a

  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- Tabella del simplesso 1: entra $x_2$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_2$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | – |
| $s_2$ | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | 0 | 12 | 6 |
| $s_3$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 | 9 |
| $z$ | $-3$ | $-5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |

- Tabella del simplesso 2: entra $x_1$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_3$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 | – |
| $s_3$ | $\boxed{3}$ | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 6 | 2 |
| $z$ | $-3$ | 0 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 | 30 | |

- Tabella 3: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 36 |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle): $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\quad z_{max} = 36$
- Il problema duale – una variabile duale per ogni vincolo, un vincolo per ogni variabile

  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \ge 3$
  $2y_2 + 2y_3 \ge 5$
  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- I prezzi ombra (le variabili duali ottimali) dall'ultima tabella: di quanto cambia l'ottimo quando il termine noto di un vincolo aumenta di 1. Un vincolo con scarto ( $b_i - a_i x > 0$) ha prezzo ombra 0.

| | $b_i - a_i x$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{3}{2}$ |
| 3 | 0 | 1 |

- L'ottimo del duale è uguale a quello del primale:
  $w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$
- Analisi di sensitività – gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo nei quali la stessa soluzione resta ottimale

| | $c_j$ | |
|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | $\langle 0;\ \frac{15}{2} \rangle$ |
| $x_2$ | 5 | $\langle 2;\ \infty)$ |

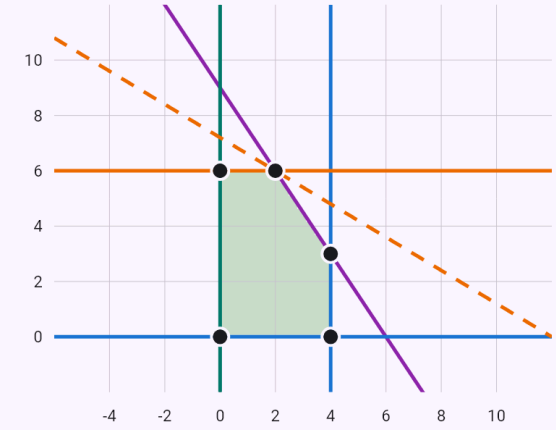
- Gli intervalli dei termini noti nei quali la stessa base resta ottimale (i prezzi ombra valgono solo lì)

| | $b_i$ | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | $\langle 2;\ \infty)$ |
| 2 | 12 | $\langle 6;\ 18 \rangle$ |
| 3 | 18 | $\langle 12;\ 24 \rangle$ |

- La soluzione grafica: la regione ammissibile è un poligono e l'ottimo si trova in un vertice. I valori dell'obiettivo nei vertici (★ l'ottimo)

| $[x_1;\ x_2]$ | $z$ | |
|---|---|---|
| $[0;\ 0]$ | 0 | |
| $[0;\ 6]$ | 30 | |
| $[2;\ 6]$ | 36 | ★ |
| $[4;\ 0]$ | 12 | |
| $[4;\ 3]$ | 27 | |

**Grafico**




$x \leq 4 \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty;\ 4]$
$2y \leq 12 \ \Leftrightarrow \ y \in (-\infty;\ 6]$
$3x + 2y \leq 18 \ \Leftrightarrow \ y \leq 9 - \frac{3x}{2}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$
$z = 36 \ \Leftrightarrow \ 3x + 5y = 36$

Le soluzioni sono le intersezioni delle curve nella regione ombreggiata (un punto pieno); un punto vuoto non soddisfa le disequazioni.

**Intersezioni dei grafici:**

● $(0;0)$ ● $(0;6)$ ● $(2;6)$ ● $(4;0)$ ● $(4;3)$

## Un problema digitato – la soluzione grafica per due variabili.

Input: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

### Risultato

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

### Passaggi

- Il problema lineare

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \le 4$
  $x + 3y \le 6$
  $x, y \ge 0$

- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- Tabella del simplesso 1: entra $x$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_1$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\boxed{1}$ | 1 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| $s_2$ | 1 | 3 | 0 | 1 | 6 | 6 |
| $z$ | −3 | −2 | 0 | 0 | 0 | |

- Tabella 2: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| $s_2$ | 0 | 2 | −1 | 1 | 2 |
| $z$ | 0 | 1 | 3 | 0 | 12 |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle): $x = 4,\ y = 0, \quad z_{max} = 12$

- Il problema duale – una variabile duale per ogni vincolo, un vincolo per ogni variabile

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \ge 3$
  $u_1 + 3u_2 \ge 2$
  $u_1, u_2 \ge 0$

- I prezzi ombra (le variabili duali ottimali) dall'ultima tabella: di quanto cambia l'ottimo quando il termine noto di un vincolo aumenta di 1. Un vincolo con scarto ( $b_i - a_i x > 0$) ha prezzo ombra 0.

| | $b_i - a_i x$ | $u_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 |
| 2 | 2 | 0 |

- L'ottimo del duale è uguale a quello del primale: $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Analisi di sensitività – gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo nei quali la stessa soluzione resta ottimale

| | $c_j$ | |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | $\langle 2;\ \infty)$ |
| $y$ | 2 | $(-\infty;\ 3\rangle$ |

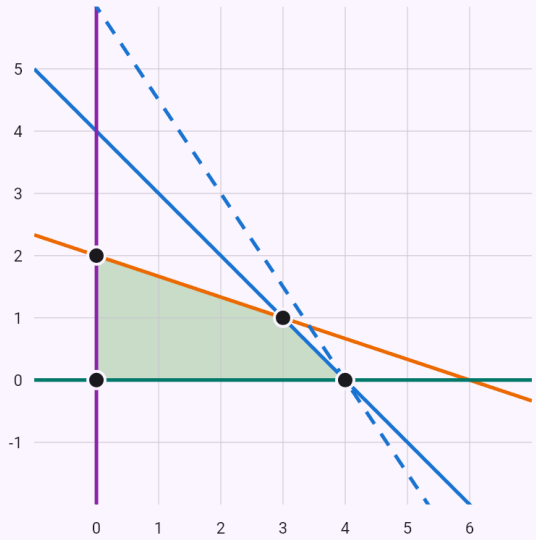
- Gli intervalli dei termini noti nei quali la stessa base resta ottimale (i prezzi ombra valgono solo lì)

| | $b_i$ | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | $\langle 0;\ 6\rangle$ |
| 2 | 6 | $\langle 4;\ \infty)$ |

- La soluzione grafica: la regione ammissibile è un poligono e l'ottimo si trova in un vertice. I valori dell'obiettivo nei vertici (★ l'ottimo)

| $[x;\ y]$ | $z$ | |
|---|---|---|
| $[0;\ 0]$ | 0 | |
| $[0;\ 2]$ | 4 | |
| $[3;\ 1]$ | 11 | |
| $[4;\ 0]$ | 12 | ★ |

### Grafico




$x + y \le 4 \ \Leftrightarrow\ y \le 4 - x$
$x + 3y \le 6 \ \Leftrightarrow\ y \le 2 - \frac{x}{3}$
$x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \in [0;\ \infty)$
$y \ge 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0;\ \infty)$
$z = 12 \ \Leftrightarrow\ 3x + 2y = 12$

Le soluzioni sono le intersezioni delle curve nella regione ombreggiata (un punto pieno); un punto vuoto non soddisfa le disequazioni.

**Intersezioni dei grafici:**

● $(0;0)$ ● $(0;2)$ ● $(3;1)$ ● $(4;0)$

## Un minimo con vincoli ≥ con il metodo delle due fasi.

Input: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

### Risultato

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

### Passaggi

- Il problema lineare

  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Non sono date condizioni di non negatività – assumiamo $x, y \geq 0$
- Un minimo si trova come massimo della funzione opposta: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Prima fase: le variabili artificiali non sono una soluzione reale, quindi le portiamo prima a zero – minimizziamo la loro somma $\min w = a_1 + a_2$
- Tabella del simplesso 1: entra $y$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $a_2$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| $a_2$ | 1 | $\boxed{3}$ | 0 | −1 | 0 | 1 | 6 | 2 |
| $w$ | −2 | −4 | 1 | 1 | 0 | 0 | −10 | |

- Tabella del simplesso 2: entra $x$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $a_1$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $\boxed{\frac{2}{3}}$ | 0 | −1 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 2 | 3 |
| $y$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 2 | 6 |
| $w$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{4}{3}$ | −2 | |

- La prima fase termina con w = 0 – le variabili artificiali sono nulle e vengono eliminate. La seconda fase prosegue con l'obiettivo reale.
- Tabella 3: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| $y$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 |
| $z$ | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | −9 |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Il problema duale – una variabile duale per ogni vincolo, un vincolo per ogni variabile

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- I prezzi ombra (le variabili duali ottimali) dall'ultima tabella: di quanto cambia l'ottimo quando il termine noto di un vincolo aumenta di 1. Un vincolo con scarto ( $b_i - a_i x > 0$) ha prezzo ombra 0.

| | $b_i - a_i x$ | $u_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{2}$ |

- L'ottimo del duale è uguale a quello del primale:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analisi di sensitività – gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo nei quali la stessa soluzione resta ottimale

| | $c_j$ | |
|---|---|---|
| $x$ | 2 | $\langle 1;\ 3\rangle$ |
| $y$ | 3 | $\langle 2;\ 6\rangle$ |

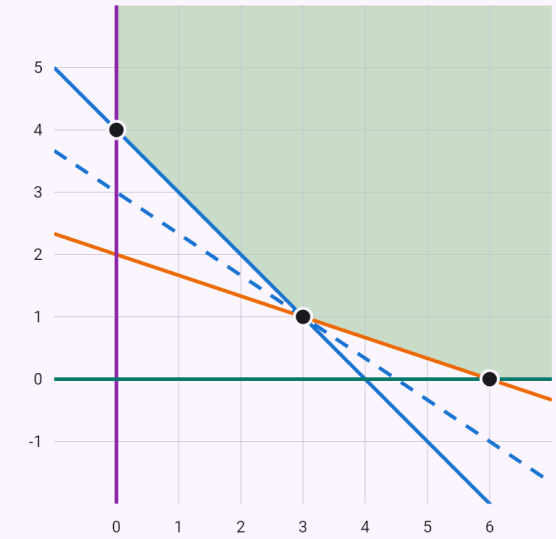
- Gli intervalli dei termini noti nei quali la stessa base resta ottimale (i prezzi ombra valgono solo lì)

| | $b_i$ | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | $\langle 2;\ 6\rangle$ |
| 2 | 6 | $\langle 4;\ 12\rangle$ |

- La soluzione grafica: la regione ammissibile è un poligono e l'ottimo si trova in un vertice. I valori dell'obiettivo nei vertici (★ l'ottimo)

| $[x;\ y]$ | $z$ | |
|---|---|---|
| $[0;\ 4]$ | 12 | |
| $[3;\ 1]$ | 9 | ★ |
| $[6;\ 0]$ | 12 | |

**Grafico**




$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$

$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$

$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Le soluzioni sono le intersezioni delle curve nella regione ombreggiata (un punto pieno); un punto vuoto non soddisfa le disequazioni.

**Intersezioni dei grafici:**

● $(0; 4)$ ● $(3; 1)$ ● $(6; 0)$

## Lo stesso problema con il metodo del grande M.

Input: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

**Risultato**

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

**Passaggi**

- Il problema lineare
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$
- Non sono date condizioni di non negatività – assumiamo $x, y \geq 0$
- Un minimo si trova come massimo della funzione opposta: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$
- Il metodo del grande M: le variabili artificiali entrano nell'obiettivo con una grande penalità −M, così che il metodo del simplesso le spinga fuori dalla base: $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$
- Tabella del simplesso 1: entra $y$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $a_2$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $4$ |
| $a_2$ | $1$ | $\boxed{3}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $6$ |
| $z$ | $-2M+2$ | $-4M+3$ | $M$ | $M$ | $0$ | $0$ | $-10$ |

- Tabella del simplesso 2: entra $x$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $a_1$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $\boxed{\frac{2}{3}}$ | $0$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $y$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $0$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ |
| $z$ | $-\frac{2}{3}M+1$ | $0$ | $M$ | $-\frac{1}{3}M+1$ | $0$ | $\frac{4}{3}M-1$ |

- Tabella 3: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $0$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $3$ |
| $y$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $z$ | $0$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $M-\frac{3}{2}$ | $M-\frac{1}{2}$ | $-9$ |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- Il problema duale – una variabile duale per ogni vincolo, un vincolo per ogni variabile
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$
- I prezzi ombra (le variabili duali ottimali) dall'ultima tabella: di quanto cambia l'ottimo quando il termine noto di un vincolo aumenta di 1. Un vincolo con scarto ( $b_i - a_i x > 0$) ha prezzo ombra 0.

| | $b_i - a_i x$ | $u_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{2}$ |

- L'ottimo del duale è uguale a quello del primale:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analisi di sensitività – gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo nei quali la stessa soluzione resta ottimale

| | $c_j$ | |
|---|---|---|
| $x$ | 2 | $\langle 3;\ 1\rangle$ |
| $y$ | 3 | $\langle 6;\ 2\rangle$ |

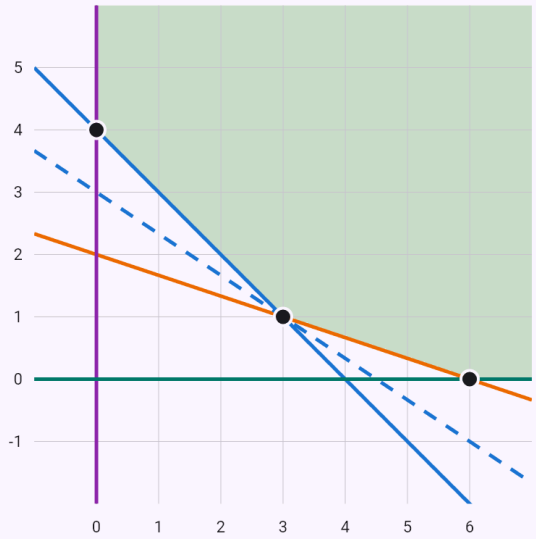
- Gli intervalli dei termini noti nei quali la stessa base resta ottimale (i prezzi ombra valgono solo lì)

| | $b_i$ | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | $\langle 2;\ 6\rangle$ |
| 2 | 6 | $\langle 4;\ 12\rangle$ |

- La soluzione grafica: la regione ammissibile è un poligono e l'ottimo si trova in un vertice. I valori dell'obiettivo nei vertici (★ l'ottimo)

| $[x;\ y]$ | $z$ | |
|---|---|---|
| $[0;\ 4]$ | 12 | |
| $[3;\ 1]$ | 9 | ★ |
| $[6;\ 0]$ | 12 | |

**Grafico**




$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$
$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Le soluzioni sono le intersezioni delle curve nella regione ombreggiata (un punto pieno); un punto vuoto non soddisfa le disequazioni.

**Intersezioni dei grafici:**

● $(0; 4)$ ● $(3; 1)$ ● $(6; 0)$

## Una soluzione intera con il branch and bound.

Input: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

### Risultato

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

### Passaggi

- Il problema lineare
  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \le 24$
  $x + 2y \le 6$
  $x, y \ge 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$
- Non sono date condizioni di non negatività – assumiamo $x, y \ge 0$
- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a
  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$
- Tabella del simplesso 1: entra $x$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_1$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\boxed{6}$ | $4$ | $1$ | $0$ | $24$ | $4$ |
| $s_2$ | $1$ | $2$ | $0$ | $1$ | $6$ | $6$ |
| $z$ | $-5$ | $-4$ | $0$ | $0$ | $0$ | |

- Tabella del simplesso 2: entra $y$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_2$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $0$ | $4$ | $6$ |
| $s_2$ | $0$ | $\boxed{\frac{4}{3}}$ | $-\frac{1}{6}$ | $1$ | $2$ | $\frac{3}{2}$ |
| $z$ | $0$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | $0$ | $20$ | |

- Tabella 3: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $x$ | $y$ | $s_1$ | $s_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $3$ |
| $y$ | $0$ | $1$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$ |
| $z$ | $0$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $21$ |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle): $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- Il problema è intero – usiamo il branch and bound. La soluzione sopra senza la condizione di interezza è la radice dell'albero $P_0$.
- I nodi dell'albero (in profondità, prima il ramo ≤): una variabile frazionaria si divide in due rami; × – nessuna soluzione ammissibile, z ≤ z* – il ramo non può battere la migliore soluzione trovata (potato), ✓ – una soluzione intera.

| | | $x, y$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|
| $P_0$ | – | $3,\ \frac{3}{2}$ | $21$ | $y \le 1,\ y \ge 2$ |
| $P_1$ | $y \le 1$ | $\frac{10}{3},\ 1$ | $\frac{62}{3}$ | $x \le 3,\ x \ge 4$ |
| $P_2$ | $x \le 3$ | $3,\ 1$ | $19$ | ✓ $z^* = 19$ |
| $P_3$ | $x \ge 4$ | $4,\ 0$ | $20$ | ✓ $z^* = 20$ |
| $P_4$ | $y \ge 2$ | $2,\ 2$ | $18$ | $z \le z^*$ |

- La migliore soluzione intera: $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

### Grafico




Inizio

$P_0 :\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Un problema dei trasporti – il metodo di Vogel e MODI.

Input: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

### Risultato

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

### Passaggi

- I costi unitari, le disponibilità dei fornitori $a_i$ e le richieste dei clienti $b_j$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 19 | 30 | 50 | 10 | 7 |
| $A_2$ | 70 | 30 | 40 | 60 | 9 |
| $A_3$ | 40 | 8 | 70 | 20 | 18 |
| $b_j$ | 5 | 8 | 7 | 14 | |

- La disponibilità è uguale alla richiesta – il problema è bilanciato: $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- Approssimazione di Vogel: a ogni passo calcoliamo le penalità – la differenza dei due costi più bassi in ogni riga e colonna – e nella riga o colonna con la penalità massima (riquadrata) assegniamo alla cella più economica.

| $k$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 10 | 12 | 21 | $\boxed{22}$ | 10 | 10 | $(3,2)$ |
| 2 | 9 | 20 | 20 | $\boxed{21}$ | | 10 | 10 | $(1,1)$ |
| 3 | 40 | 20 | $\boxed{50}$ | | | 10 | 10 | $(3,4)$ |
| 4 | 40 | 20 | | | | 10 | $\boxed{50}$ | $(1,4)$ |
| 5 | | 20 | | | | 40 | $\boxed{60}$ | $(2,4)$ |
| 6 | | $\boxed{40}$ | | | | 40 | | $(2,3)$ |

- La soluzione iniziale (il numero piccolo è il costo, quello in grassetto la quantità) – il costo $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $^{19}\mathbf{5}$ | $^{30}.$ | $^{50}.$ | $^{10}\mathbf{2}$ | 7 |
| $A_2$ | $^{70}.$ | $^{30}.$ | $^{40}\mathbf{7}$ | $^{60}\mathbf{2}$ | 9 |
| $A_3$ | $^{40}.$ | $^{8}\mathbf{8}$ | $^{70}.$ | $^{20}\mathbf{10}$ | 18 |
| $b_j$ | 5 | 8 | 7 | 14 | |

- Iterazione MODI 1: i potenziali da $u_i + v_j = c_{ij}$ nelle celle occupate ($u_1 = 0$), nelle celle vuote $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (tra parentesi). Il d più negativo = $-18$ è nella cella $(2,2)$ – viene occupata. Il ciclo chiuso $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, spostiamo $\theta = 2$ (la quantità minima nelle celle segnate −).

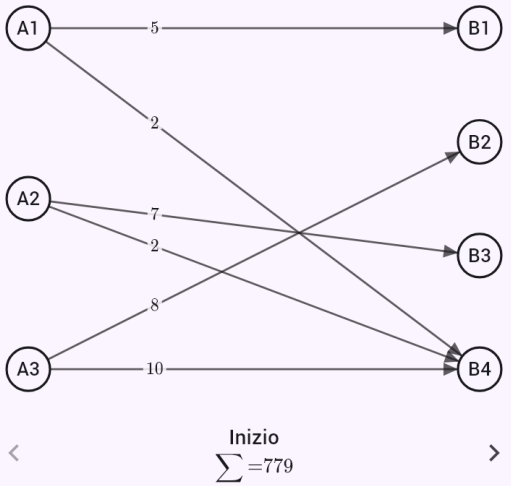
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $^{19}\mathbf{5}$ | $^{30}(32)$ | $^{50}(60)$ | $^{10}\mathbf{2}$ | 7 | 0 |
| $A_2$ | $^{70}(1)$ | $^{30}\boxed{-18}$ | $^{40}\mathbf{7}$ | $^{60}\mathbf{2}$ | 9 | 50 |
| $A_3$ | $^{40}(11)$ | $^{8}\mathbf{8}$ | $^{70}(70)$ | $^{20}\mathbf{10}$ | 18 | 10 |
| $b_j$ | 5 | 8 | 7 | 14 | | |
| $v_j$ | 19 | $-2$ | $-10$ | 10 | | |

- Nessun $d_{ij}$ è negativo – il piano di trasporto è ottimale.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $^{19}\mathbf{5}$ | $^{30}(32)$ | $^{50}(42)$ | $^{10}\mathbf{2}$ | 7 | 0 |
| $A_2$ | $^{70}(19)$ | $^{30}\mathbf{2}$ | $^{40}\mathbf{7}$ | $^{60}(18)$ | 9 | 32 |
| $A_3$ | $^{40}(11)$ | $^{8}\mathbf{6}$ | $^{70}(52)$ | $^{20}\mathbf{12}$ | 18 | 10 |
| $b_j$ | 5 | 8 | 7 | 14 | | |
| $v_j$ | 19 | $-2$ | 8 | 10 | | |

- Il costo totale: $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

### Grafico




Inizio

$\sum$ =779

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Un problema dei trasporti non bilanciato con un cliente fittizio.

Input: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

### Risultato

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

### Passaggi

- I costi unitari, le disponibilità dei fornitori $a_i$ e le richieste dei clienti $b_j$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 6 | 8 | 50 |
| $A_2$ | 5 | 7 | 3 | 60 |
| $b_j$ | 30 | 40 | 20 | |

- La disponibilità supera la richiesta ( $\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – aggiungiamo un cliente fittizio $B_4^*$ con richiesta 20 e costi nulli (merce rimasta presso i fornitori).

- La soluzione iniziale con l'angolo nord-ovest: dalla cella in alto a sinistra assegniamo il più possibile e ci spostiamo a destra o in basso (il numero piccolo è il costo, quello in grassetto la quantità), il costo $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4^*$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $^{4}\mathbf{30}$ | $^{6}\mathbf{20}$ | $^{8}.$ | $^{0}.$ | 50 |
| $A_2$ | $^{5}.$ | $^{7}\mathbf{20}$ | $^{3}\mathbf{20}$ | $^{0}\mathbf{20}$ | 60 |
| $b_j$ | 30 | 40 | 20 | 20 | |

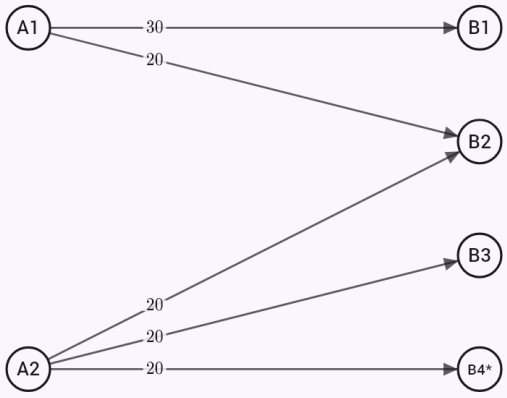
- Nessun $d_{ij}$ è negativo – il piano di trasporto è ottimale.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4^*$ | $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $^{4}\mathbf{30}$ | $^{6}\mathbf{20}$ | $^{8}(6)$ | $^{0}(1)$ | 50 | 0 |
| $A_2$ | $^{5}(0)$ | $^{7}\mathbf{20}$ | $^{3}\mathbf{20}$ | $^{0}\mathbf{20}$ | 60 | 1 |
| $b_j$ | 30 | 40 | 20 | 20 | | |
| $v_j$ | 4 | 6 | 2 | $-1$ | | |

- Un $d_{ij}$ è nullo – esiste un'altra soluzione ottimale con lo stesso costo.

- Il costo totale: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

### Grafico




Inizio

$\sum = 440$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Assegnare lavoratori a compiti al costo minimo.

Input: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

### Risultato

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

### Passaggi

- I costi – le righe sono i lavoratori (macchine), le colonne i compiti

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 9 | 2 | 7 | 8 |
| $R_2$ | 6 | 4 | 3 | 7 |
| $R_3$ | 5 | 8 | 1 | 8 |
| $R_4$ | 7 | 6 | 9 | 4 |

- Si sottrae il minimo di ogni riga $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 7 | 0 | 5 | 6 |
| $R_2$ | 3 | 1 | 0 | 4 |
| $R_3$ | 4 | 7 | 0 | 7 |
| $R_4$ | 3 | 2 | 5 | 0 |

- Si sottrae il minimo di ogni colonna $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 4 | 0 | 5 | 6 |
| $R_2$ | 0 | 1 | 0 | 4 |
| $R_3$ | 1 | 7 | 0 | 7 |
| $R_4$ | 0 | 2 | 5 | 0 |

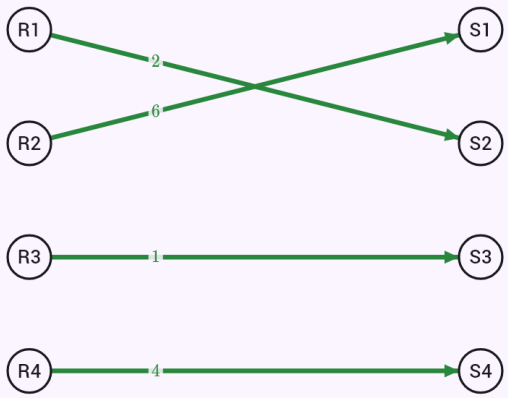
- Per coprire gli zeri servono $4$ linee – scegliamo zeri indipendenti, uno in ogni riga e colonna (riquadrati).

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 4 | $\boxed{0}$ | 5 | 6 |
| $R_2$ | $\boxed{0}$ | 1 | 0 | 4 |
| $R_3$ | 1 | 7 | $\boxed{0}$ | 7 |
| $R_4$ | 0 | 2 | 5 | $\boxed{0}$ |

- L'assegnazione con i costi originali – totale $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

| | | $c$ |
|---|---|---|
| $R_1$ | $S_2$ | 2 |
| $R_2$ | $S_1$ | 6 |
| $R_3$ | $S_3$ | 1 |
| $R_4$ | $S_4$ | 4 |

### Grafico



## Un’assegnazione con il profitto massimo.

Input: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

**Risultato**

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

**Passaggi**

- I costi – le righe sono i lavoratori (macchine), le colonne i compiti

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 9 | 2 | 7 | 8 |
| $R_2$ | 6 | 4 | 3 | 7 |
| $R_3$ | 5 | 8 | 1 | 8 |
| $R_4$ | 7 | 6 | 9 | 4 |

- Cerchiamo un massimo – lo trasformiamo in un minimo sottraendo ogni elemento dal più grande, $9$.

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 0 | 7 | 2 | 1 |
| $R_2$ | 3 | 5 | 6 | 2 |
| $R_3$ | 4 | 1 | 8 | 1 |
| $R_4$ | 2 | 3 | 0 | 5 |

- Si sottrae il minimo di ogni riga $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 0 | 7 | 2 | 1 |
| $R_2$ | 1 | 3 | 4 | 0 |
| $R_3$ | 3 | 0 | 7 | 0 |
| $R_4$ | 2 | 3 | 0 | 5 |

- Si sottrae il minimo di ogni colonna $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 0 | 7 | 2 | 1 |
| $R_2$ | 1 | 3 | 4 | 0 |
| $R_3$ | 3 | 0 | 7 | 0 |
| $R_4$ | 2 | 3 | 0 | 5 |

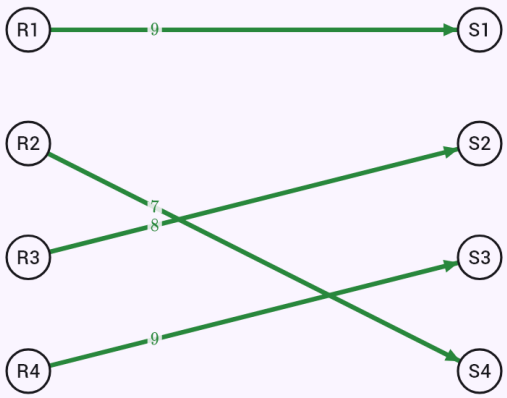
- Per coprire gli zeri servono $4$ linee – scegliamo zeri indipendenti, uno in ogni riga e colonna (riquadrati).

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $\boxed{0}$ | 7 | 2 | 1 |
| $R_2$ | 1 | 3 | 4 | $\boxed{0}$ |
| $R_3$ | 3 | $\boxed{0}$ | 7 | 0 |
| $R_4$ | 2 | 3 | $\boxed{0}$ | 5 |

- L’assegnazione con i costi originali – totale $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

| | | $c$ |
|---|---|---|
| $R_1$ | $S_1$ | 9 |
| $R_2$ | $S_4$ | 7 |
| $R_3$ | $S_2$ | 8 |
| $R_4$ | $S_3$ | 9 |

**Grafico**



## Un gioco con un punto di sella – il maximin è uguale al minimax.

Input: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

**Risultato**

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

**Passaggi**

- La matrice dei pagamenti ($3 \times 3$): le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B, i numeri le vincite di A (perdite di B). A vuole il più possibile, B il meno possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 2 | 5 |
| $A_2$ | 3 | 1 | 6 |
| $A_3$ | 6 | 0 | 2 |

- Cerchiamo un punto di sella: il minimo di ogni riga (ciò che A può garantirsi), il massimo di ogni colonna (B non perde di più). $\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 2$ – il maximin è uguale al minimax, il gioco ha un punto di sella.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\min$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 2 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 3 | 1 | 6 | 1 |
| $A_3$ | 6 | 0 | 2 | 0 |
| $\max$ | 6 | 2 | 6 | |

- Le strategie pure ottimali (punti di sella): $(A_1, B_2)$; il valore del gioco $v = 2$

## Un gioco 2 × 2 senza punto di sella – strategie miste con la formula.

Input: `game(3 -1; -2 4)`

**Risultato**

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

**Passaggi**

- La matrice dei pagamenti (2 × 2): le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B, i numeri le vincite di A (perdite di B). A vuole il più possibile, B il meno possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ |
| $A_2$ | $-2$ | 4 |

- Cerchiamo un punto di sella: il minimo di ogni riga (ciò che A può garantirsi), il massimo di ogni colonna (B non perde di più).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ _ non c'è punto di sella. I giocatori useranno strategie miste – ogni strategia pura con una certa probabilità.

| | $B_1$ | $B_2$ | min |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ | $-1$ |
| $A_2$ | $-2$ | 4 | $-2$ |
| max | 3 | 4 | |

- Un gioco 2 × 2 senza punto di sella (strategie $A_1, A_2$ e $B_1, B_2$): A gioca la prima riga con probabilità p in modo che la vincita attesa sia la stessa contro entrambe le colonne, B la prima colonna con probabilità q analogamente. Per la matrice (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Le strategie miste ottimali: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; il valore del gioco $v = 1$

## Strategie dominate cancellate una alla volta.

Input: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

**Risultato**

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

**Passaggi**

- La matrice dei pagamenti ($3 \times 3$): le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B, i numeri le vincite di A (perdite di B). A vuole il più possibile, B il meno possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ | 4 |
| $A_2$ | $-2$ | 4 | 5 |
| $A_3$ | 1 | $-2$ | 3 |

- Cerchiamo un punto di sella: il minimo di ogni riga (ciò che A può garantirsi), il massimo di ogni colonna (B non perde di più).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ — non c'è punto di sella. I giocatori useranno strategie miste – ogni strategia pura con una certa probabilità.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | min |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ | 4 | $-1$ |
| $A_2$ | $-2$ | 4 | 5 | $-2$ |
| $A_3$ | 1 | $-2$ | 3 | $-2$ |
| max | 3 | 4 | 5 | |

- La strategia $A_3$ è dominata da $A_1$ – che dà al giocatore A almeno altrettanto in ogni colonna. A non la sceglierà, la cancelliamo

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ | 4 |
| $A_2$ | $-2$ | 4 | 5 |

- La strategia $B_3$ è dominata da $B_1$ – con quella il giocatore B non perde di più in nessuna riga. B non la sceglierà, la cancelliamo

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | $-1$ |
| $A_2$ | $-2$ | 4 |

- Un gioco $2 \times 2$ senza punto di sella (strategie $A_1, A_2$ e $B_1, B_2$): A gioca la prima riga con probabilità p in modo che la vincita attesa sia la stessa contro entrambe le colonne, B la prima colonna con probabilità q analogamente. Per la matrice (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Le strategie miste ottimali: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; il valore del gioco $v = 1$

## Un gioco 2 × 4 graficamente – il massimo dell'inviluppo inferiore.

Input: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

### Risultato

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

### Passaggi

- La matrice dei pagamenti ($2 \times 4$): le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B, i numeri le vincite di A (perdite di B). A vuole il più possibile, B il meno possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 1 | 5 |
| $A_2$ | 4 | 1 | 6 | 0 |

- Cerchiamo un punto di sella: il minimo di ogni riga (ciò che A può garantirsi), il massimo di ogni colonna (B non perde di più).
$\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ – non c'è punto di sella. I giocatori useranno strategie miste – ogni strategia pura con una certa probabilità.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | min |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 1 | 5 | 1 |
| $A_2$ | 4 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| max | 4 | 3 | 6 | 5 | |

- Il metodo grafico: A gioca la prima riga con probabilità p, la seconda con 1 − p. La vincita attesa di A contro ogni strategia di B è una retta in p; B sceglie la più bassa, quindi A cerca il punto più alto dell'inviluppo inferiore delle rette – il massimo $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Le rette

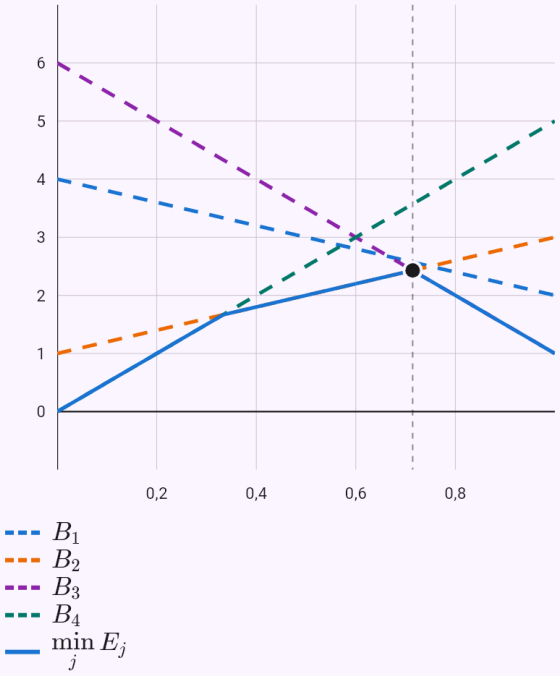
$$B_1: \ E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \ E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \ E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \ E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- L'ottimo è dove si incrociano le rette $B_2, B_3$. B le mescola con probabilità w e 1 − w in modo che ad A sia indifferente quale riga giocare:

$$2w + (-5)(1-w) = 0 \ \Rightarrow \ w = \frac{5}{7}$$

- Le strategie miste ottimali: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; il valore del gioco $v = \frac{17}{7}$

### Grafico




Le rette sono le vincite attese del giocatore A contro le strategie di B al variare di p; l'inviluppo inferiore evidenziato è ciò che A può garantirsi, il punto è il suo massimo.

## Sasso, carta, forbici con la programmazione lineare – ogni strategia con probabilità 1/3.

Input: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

**Risultato**

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

**Passaggi**

- La matrice dei pagamenti ($3 \times 3$): le righe sono le strategie del giocatore A, le colonne quelle di B, i numeri le vincite di A (perdite di B). A vuole il più possibile, B il meno possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | $-1$ | 1 |
| $A_2$ | 1 | 0 | $-1$ |
| $A_3$ | $-1$ | 1 | 0 |

- Cerchiamo un punto di sella: il minimo di ogni riga (ciò che A può garantirsi), il massimo di ogni colonna (B non perde di più).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ _
non c'è punto di sella. I giocatori useranno strategie miste – ogni strategia pura con una certa probabilità.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | min |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $A_2$ | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ |
| $A_3$ | $-1$ | 1 | 0 | $-1$ |
| max | 1 | 1 | 1 | |

- Aggiungiamo k = 2 a ogni elemento per renderli positivi – le strategie ottimali non cambiano, il valore aumenta di k.
- Un gioco più grande diventa un problema di programmazione lineare. Giocatore B: max Σ y con i vincoli Σ a'·y ≤ 1, y ≥ 0, dove $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k.$
Il suo problema duale appartiene al giocatore A.
- Il problema lineare
$\max z = y_1 + y_2 + y_3$
$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$
$3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$
$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0$
- La forma standard: a un vincolo ≤ si aggiunge una variabile di scarto s, a uno ≥ la si sottrae e si aggiunge una variabile artificiale a, a un'uguaglianza solo quella artificiale. La base iniziale è formata dalle s e dalle a
$2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$
$3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$
$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$
- Tabella del simplesso 1: entra $y_1$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_2$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| $s_2$ | $\boxed{3}$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| $s_3$ | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $z$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |

- Tabella del simplesso 2: entra $y_3$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_1$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\boxed{\frac{7}{3}}$ | 1 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{7}$ |
| $y_1$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 |
| $s_3$ | 0 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $z$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | |

- Tabella del simplesso 3: entra $y_2$ (lo $z_j - c_j$ più negativo), esce $s_3$ (il rapporto $b/a$ minimo); il pivot è riquadrato.

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ | $b/a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_3$ | $0$ | $-\frac{1}{7}$ | $1$ | $\frac{3}{7}$ | $-\frac{2}{7}$ | $0$ | $\frac{1}{7}$ | $-$ |
| $y_1$ | $1$ | $\frac{5}{7}$ | $0$ | $-\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $0$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $s_3$ | $0$ | $\boxed{\frac{18}{7}}$ | $0$ | $-\frac{5}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $1$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $z$ | $0$ | $-\frac{3}{7}$ | $0$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $0$ | $\frac{3}{7}$ | |

- Tabella 4: nessuno $z_j - c_j$ è negativo – la soluzione è ottimale.

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_3$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{7}{18}$ | $-\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $y_1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{7}{18}$ | $-\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $y_2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $z$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

- La soluzione ottimale letta dall'ultima tabella (le variabili non di base sono nulle)

  $y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$

- Il problema duale – una variabile duale per ogni vincolo, un vincolo per ogni variabile

  $\min v = u_1 + u_2 + u_3$
  $2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$
  $u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$
  $3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$
  $u_1, u_2, u_3 \geq 0$

- I prezzi ombra (le variabili duali ottimali) dall'ultima tabella: di quanto cambia l'ottimo quando il termine noto di un vincolo aumenta di 1. Un vincolo con scarto ( $b_i - a_i x > 0$) ha prezzo ombra 0.

| | $b_i - a_i x$ | $u_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | 0 | $\frac{1}{6}$ |

- L'ottimo del duale è uguale a quello del primale:

  $v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$

- Analisi di sensitività – gli intervalli dei coefficienti dell'obiettivo nei quali la stessa soluzione resta ottimale

| | $c_j$ | |
|---|---|---|
| $y_1$ | $1$ | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |
| $y_2$ | $1$ | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |
| $y_3$ | $1$ | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |

- Gli intervalli dei termini noti nei quali la stessa base resta ottimale (i prezzi ombra valgono solo lì)

| | $b_i$ | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |
| 2 | 1 | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |
| 3 | 1 | $\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$ |

- Dall'ottimo: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Le strategie sono gli y⃰ ottimali (per il giocatore A i prezzi ombra) moltiplicati per v'.

- Le strategie miste ottimali: $p^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; il valore del gioco $v = 0$

**Un gioco bimatrice (la battaglia dei sessi) – due equilibri di Nash puri e uno misto.**

Input: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

**Risultato**

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

**Passaggi**

- Un gioco bimatrice ($2 \times 2$): ogni cella contiene (il pagamento di A, il pagamento di B), e ogni giocatore vuole il proprio il più grande possibile.

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $(2,\ 1)$ | $(0,\ 0)$ |
| $A_2$ | $(0,\ 0)$ | $(1,\ 2)$ |

- Migliori risposte: in ogni colonna sottolineiamo il pagamento più alto di A, in ogni riga soprasegniamo quello più alto di B. Le celle con entrambi (riquadrate) sono gli equilibri di Nash in strategie pure: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $(\underline{2},\ \overline{1})$ | $(0,\ 0)$ |
| $A_2$ | $(0,\ 0)$ | $(\underline{1},\ \overline{2})$ |

- L'equilibrio misto: A sceglie p in modo che a B sia indifferente quale colonna giocare, B sceglie q in modo che ad A sia indifferente quale riga giocare (i pagamenti attesi $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow \ p = \frac{2}{3}$$

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow \ q = \frac{1}{3}$$

## Limiti noti

- Al massimo 12 variabili e 15 vincoli; problemi interi fino a 6 variabili. Tutte le variabili devono essere non negative – le variabili libere non sono ancora supportate.
- Problemi dei trasporti e di assegnazione fino a 8 × 8.
- Giochi a matrice fino a 6 × 6; l'equilibrio di Nash misto di un gioco bimatrice solo per giochi 2 × 2.

# 52. Grafi, reti e logistica

I problemi su grafi e reti sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», l'ambito Logistica e reti: il cammino minimo (gli algoritmi di Dijkstra, Bellman–Ford e Floyd–Warshall), l'albero ricoprente minimo (Kruskal, Prim), il flusso massimo e il taglio minimo, l'arbitraggio valutario come ricerca di un ciclo negativo e il cammino critico di un progetto (CPM, PERT).

Inserisci il grafo in un campo su più righe, un arco per riga – A-B 4 è un arco non orientato di peso 4, A->B 4 uno orientato, per un flusso A->B 3/7 un flusso e una capacità dati; senza numero un arco ha peso 1. Al posto degli archi puoi incollare una matrice dei pesi riga per riga (-, ∞ o 0 significa nessun arco), eventualmente con una riga dei nomi dei nodi sopra. I nodi si possono chiamare con una lettera o una parola (PHA, Boston). Le attività di un progetto si danno con nome, durata e predecessori (D 5 B C), per PERT con tre stime (B 3/4/11 A).

Per un arbitraggio puoi scegliere il listino odierno della ČNB o della BCE invece dei tuoi cambi – basta elencare le valute (CZK EUR USD GBP). Con un solo listino un arbitraggio non risulta mai (i passaggi mostrano perché); con entrambi i listini insieme ogni coppia di valute prende il cambio migliore e può risultare un ciclo sopra 1. Il pulsante «Compila i cambi da modificare» inserisce i cambi di un listino nel campo Tassi di cambio – modificali, per esempio, con i cambi di acquisto e vendita di un ufficio di cambio.

I passaggi mostrano una tabella delle iterazioni come nei libri di testo – le etichette definitive e provvisorie di Dijkstra, le passate di Bellman–Ford, la matrice di Floyd–Warshall dopo ogni nodo, gli archi ordinati di Kruskal, i cammini aumentanti di un flusso, il passaggio in avanti e all'indietro del CPM. Sotto il risultato c'è il grafo, che percorri passo per passo con le frecce: il rosso è la modifica del passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato.

## Esempi

**Il cammino minimo con l'algoritmo di Dijkstra.**

Input: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2; from=A;`

`to=F; method=dijkstra)`

**Risultato**

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

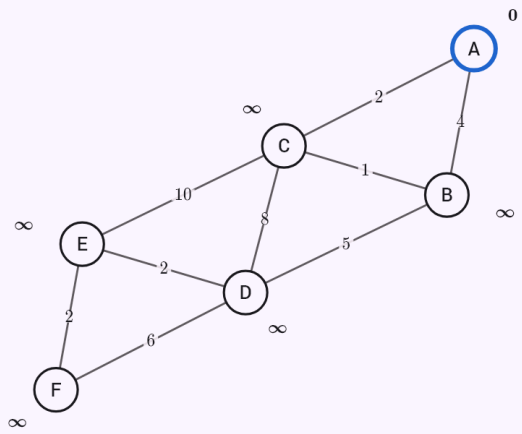
**Passaggi**

- Un grafo non orientato con $6$ nodi e $9$ archi.
- Algoritmo di Dijkstra: a ogni passo il nodo con l'etichetta provvisoria minima diventa definitivo (riquadrato) e le etichette dei suoi vicini vengono abbassate se attraverso di esso passa un cammino più corto (in grassetto); il pedice è il predecessore.

| | | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | A | $\boxed{0}$ | $\mathbf{4_A}$ | $\mathbf{2_A}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 2 | C | | $\mathbf{3_C}$ | $\boxed{2_A}$ | $\mathbf{10_C}$ | $\mathbf{12_C}$ | $\infty$ |
| 3 | B | | $\boxed{3_C}$ | | $\mathbf{8_B}$ | $12_C$ | $\infty$ |
| 4 | D | | | | $\boxed{8_B}$ | $\mathbf{10_D}$ | $\mathbf{14_D}$ |
| 5 | E | | | | | $\boxed{10_D}$ | $\mathbf{12_E}$ |
| 6 | F | | | | | | $\boxed{12_E}$ |

- Il cammino letto a ritroso lungo i predecessori: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, la sua lunghezza $2 + 1 + 5 + 2 + 2 = 12$

**Grafico**




Inizio
$d(\mathrm{A}) = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Un peso negativo di un arco – l'algoritmo di Bellman–Ford.

Input: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

**Risultato**

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

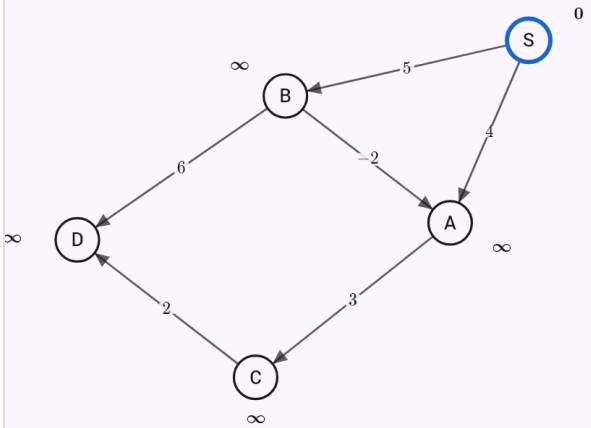
**Passaggi**

- Un grafo orientato con $5$ nodi e $6$ archi.
- Algoritmo di Bellman–Ford: a ogni passata proviamo ad accorciare il cammino attraverso ogni arco, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; le etichette modificate sono in grassetto, il pedice è il predecessore.

| | S | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | 0 | $\mathbf{3_B}$ | $\mathbf{5_S}$ | $\mathbf{6_A}$ | $\mathbf{8_C}$ |

- Alla passata $2$ nessuna etichetta è più cambiata – le distanze sono definitive.
- Il cammino letto a ritroso lungo i predecessori: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, la sua lunghezza $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

**Grafico**




Inizio
$d(\mathrm{S}) = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Le distanze tra tutte le coppie di nodi.

Input: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

**Risultato**

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

**Passaggi**

- Un grafo orientato con $4$ nodi e $6$ archi.
- L'algoritmo di Floyd–Warshall parte dalla matrice dei pesi degli archi ($\infty$ – nessun arco)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Ammettiamo il nodo $\mathrm{A}$ come tappa: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; le distanze accorciate sono in grassetto.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Ammettiamo il nodo $\mathrm{B}$ come tappa: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; le distanze accorciate sono in grassetto.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

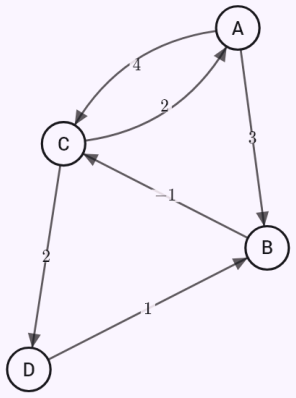
- Ammettiamo il nodo $\mathrm{C}$ come tappa: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; le distanze accorciate sono in grassetto.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Ammettiamo il nodo $\mathrm{D}$ come tappa: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; le distanze accorciate sono in grassetto.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

**Grafico**




Inizio
$D^{(0)}$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## L'albero ricoprente minimo con l'algoritmo di Kruskal.

Input: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G 9;`

`F-G 11; method=kruskal)`

**Risultato**

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

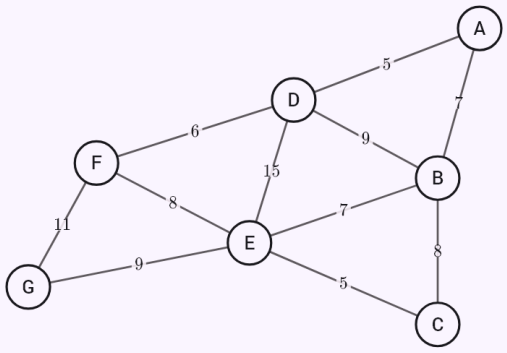
**Passaggi**

- Un grafo non orientato con $7$ nodi e $11$ archi.
- Algoritmo di Kruskal: gli archi ordinati dal più economico, ognuno aggiunto (✓) a meno che chiuda un ciclo (×).

| | $w$ | |
|---|---|---|
| AD | 5 | ✓ |
| CE | 5 | ✓ |
| DF | 6 | ✓ |
| AB | 7 | ✓ |
| BE | 7 | ✓ |
| BC | 8 | × |
| EF | 8 | × |
| BD | 9 | × |
| EG | 9 | ✓ |

- Il peso totale degli archi dell'albero:
  $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

**Grafico**




Inizio

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## La rete più corta che collega i capoluoghi regionali con l'algoritmo di Prim.

Input: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

**Risultato**

$w = 697$

$\mathrm{PHA{-}PLZ},\ \mathrm{PHA{-}LBC},\ \mathrm{PHA{-}JI}$
$\mathrm{LBC{-}HK},\ \mathrm{JI{-}BRN},\ \mathrm{BRN{-}OL}$
$\mathrm{OL{-}OVA}$

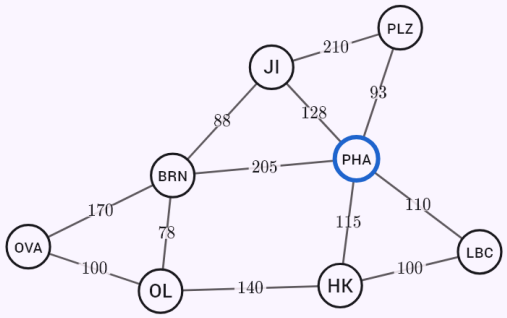
**Passaggi**

- Un grafo non orientato con $8$ nodi e $12$ archi.
- Algoritmo di Prim dal nodo $\mathrm{PHA}$: a ogni passo aggiungiamo l'arco più economico che va dall'albero a un nodo fuori di esso.

| | | $w$ |
|---|---|---|
| 1 | PHA–PLZ | 93 |
| 2 | PHA–LBC | 110 |
| 3 | LBC–HK | 100 |
| 4 | PHA–JI | 128 |
| 5 | JI–BRN | 88 |
| 6 | BRN–OL | 78 |
| 7 | OL–OVA | 100 |

- Il peso totale degli archi dell'albero:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

**Grafico**




Inizio
PHA

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Il flusso massimo e il taglio minimo.

Input: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

### Risultato

$$f_{max} = 23$$

$$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$$

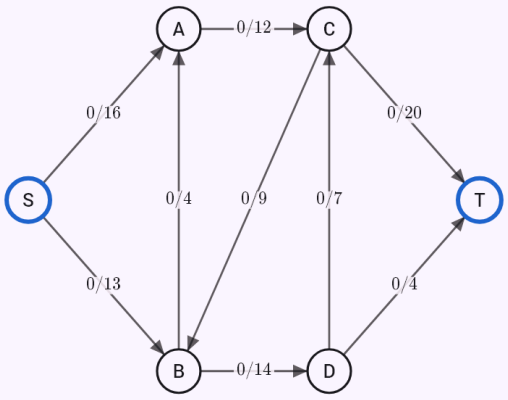
### Passaggi

- Cerchiamo il flusso massimo dalla sorgente $\mathrm{S}$ al pozzo $\mathrm{T}$, partendo da un flusso di valore $0$
- Cammino aumentante 1 (il più corto nella rete residua): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Il flusso aumenta della capacità residua minima $\min(16, 12, 20) = 12$; il suo valore è ora $12$
- Cammino aumentante 2 (il più corto nella rete residua): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Il flusso aumenta della capacità residua minima $\min(13, 14, 4) = 4$; il suo valore è ora $16$
- Cammino aumentante 3 (il più corto nella rete residua): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Il flusso aumenta della capacità residua minima $\min(9, 10, 7, 8) = 7$; il suo valore è ora $23$
- Non c'è più alcun cammino aumentante – nella rete residua la sorgente raggiunge solo i nodi $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Il flusso lungo gli archi (f) e le loro capacità (c)

| | $f$ | $c$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{S} \to \mathrm{A}$ | 12 | 16 |
| $\mathrm{S} \to \mathrm{B}$ | 11 | 13 |
| $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ | 0 | 4 |
| $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$ | 12 | 12 |
| $\mathrm{C} \to \mathrm{B}$ | 0 | 9 |
| $\mathrm{B} \to \mathrm{D}$ | 11 | 14 |
| $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$ | 7 | 7 |
| $\mathrm{C} \to \mathrm{T}$ | 19 | 20 |
| $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$ | 4 | 4 |

- Gli archi che escono dall'insieme S formano il taglio minimo: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Sono tutti pieni e la loro capacità totale $12 + 7 + 4 = 23$ è uguale al flusso massimo.

### Grafico




Inizio
$f = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Un ciclo di cambi vantaggioso di tre valute.

Input: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24; USD-`

```
>GBP 0.7)
```

**Risultato**

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

**Passaggi**

- I cambi e i pesi degli archi $w = -\ln r$

| | $r$ | $w = -\ln r$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$ | $0{,}9$ | $0{,}10536$ |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$ | $0{,}8$ | $0{,}22314$ |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$ | $1{,}4$ | $-0{,}33647$ |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$ | $1{,}1$ | $-0{,}09531$ |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$ | $1{,}24$ | $-0{,}21511$ |
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$ | $0{,}7$ | $0{,}35667$ |

- Un ciclo dà un guadagno quando il prodotto dei suoi cambi supera 1 – nei logaritmi un ciclo negativo dei pesi

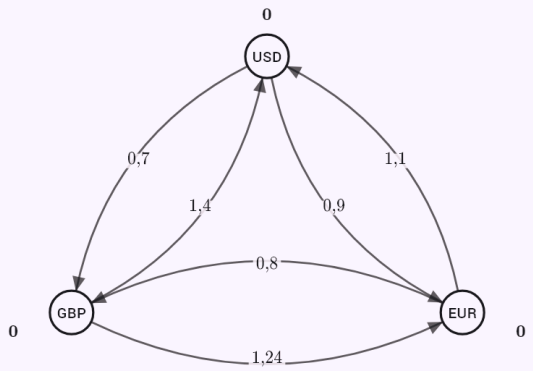
$$r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$$

- L'algoritmo di Bellman–Ford parte da tutte le valute contemporaneamente (tutte le etichette 0); le etichette modificate sono in grassetto, il pedice è il predecessore.

| | USD | EUR | GBP |
|---|---|---|---|
| 0 | $0$ | $0$ | $0$ |
| 1 | $\mathbf{-0{,}336472_{GBP}}$ | $\mathbf{-0{,}215111_{GBP}}$ | $0$ |
| 2 | $\mathbf{-0{,}34444_{GBP}}$ | $\mathbf{-0{,}231112_{USD}}$ | $\mathbf{-0{,}007968}$ |
| 3 | $\mathbf{-0{,}352409_{GBP}}$ | $\mathbf{-0{,}23908_{USD}}$ | $\mathbf{-0{,}015936}$ |

- Le etichette cambiano ancora all'n-esima passata – i predecessori portano al ciclo negativo $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Il prodotto dei cambi $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, un guadagno di $0{,}8\,\%$: 1000 unità diventano $1008$ dopo un giro.

**Grafico**




**Inizio**
$d = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Cambi coerenti come matrice – nessun arbitraggio.

Input: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

**Risultato**

### Nessun arbitraggio – nessun ciclo di cambi dà un guadagno.

**Passaggi**

- I cambi e i pesi degli archi $w = -\ln r$

| | $r$ | $w = -\ln r$ |
|---|---|---|
| CZK → EUR | 0,04 | 3,2189 |
| CZK → USD | 0,0432 | 3,1419 |
| EUR → CZK | 25 | −3,2189 |
| EUR → USD | 1,08 | −0,076961 |
| USD → CZK | 23,1481 | −3,1419 |
| USD → EUR | 0,925926 | 0,076961 |

- Un ciclo dà un guadagno quando il prodotto dei suoi cambi supera 1 – nei logaritmi un ciclo negativo dei pesi $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- L'algoritmo di Bellman–Ford parte da tutte le valute contemporaneamente (tutte le etichette 0); le etichette modificate sono in grassetto, il pedice è il predecessore.

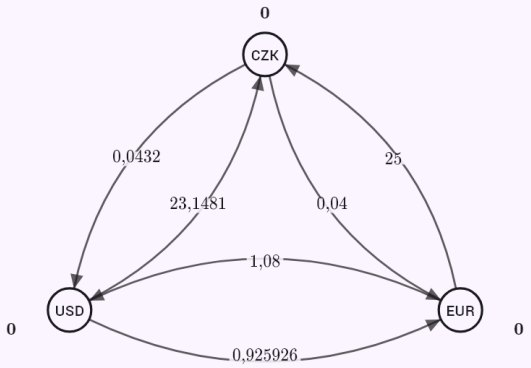
| | CZK | EUR | USD |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$ | 0 | $\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$ |

- Alla passata 2 nessuna etichetta è più cambiata – le distanze sono definitive.

- Nemmeno all'n-esima passata è cambiata alcuna etichetta – non c'è un ciclo negativo e quindi nessun arbitraggio. I potenziali p = −d sono i logaritmi di «prezzi» coerenti delle valute: ogni cambio soddisfa $\ln r \le p($ arrivo) − p(partenza).

| | $p = -d$ |
|---|---|
| CZK | 3,2189 |
| EUR | 0 |
| USD | 0,076961 |

**Grafico**




**Inizio**
$d = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

# I cambi di un listino (ČNB) – mai un arbitraggio.

Input: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

**Risultato**

## Nessun arbitraggio – nessun ciclo di cambi dà un guadagno.

### Passaggi

- Cambi dal listino: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026$
- Il listino dà il valore di un'unità di ogni valuta nella valuta base $\mathrm{CZK}$ (k) – e il suo logaritmo p = ln k

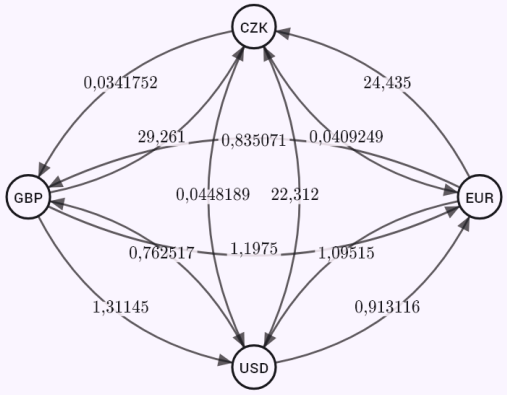
| | $k$ | $p = \ln k$ |
|---|---|---|
| CZK | $1$ | $0$ |
| EUR | $1 € = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$ | $3{,}196$ |
| USD | $1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$ | $3{,}1051$ |
| GBP | $1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$ | $3{,}3763$ |

- Il cambio tra due valute è un cambio incrociato attraverso la valuta base: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Su ogni ciclo i valori k si semplificano e il prodotto dei cambi è esattamente 1. I cambi di un unico listino ($\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB}$) sono coerenti, quindi non danno mai un arbitraggio – lo mostrano i logaritmi p = ln k, i «prezzi» delle valute.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- La ČNB e la BCE pubblicano solo cambi medi (di riferimento), senza cambi di acquisto e vendita. Con i cambi di un ufficio di cambio (acquisto e vendita) ogni ciclo è in perdita.

**Grafico**



## I cambi della ČNB e della BCE insieme – un minuscolo «guadagno» tra cambi di riferimento.

Input: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

**Risultato**

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$
$$\prod r \approx 1{,}0009332 \ (+0{,}09332\,\%)$$

### Passaggi

- Cambi dal listino:
  $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026;\quad \mathrm{ECB},\ 27/11/2026$
- Per ogni coppia di valute prendiamo il migliore dei due cambi – quello della ČNB o quello della BCE (l'ultima colonna della tabella). L'altro non migliorerebbe alcun ciclo.
- I cambi e i pesi degli archi $w = -\ln r$

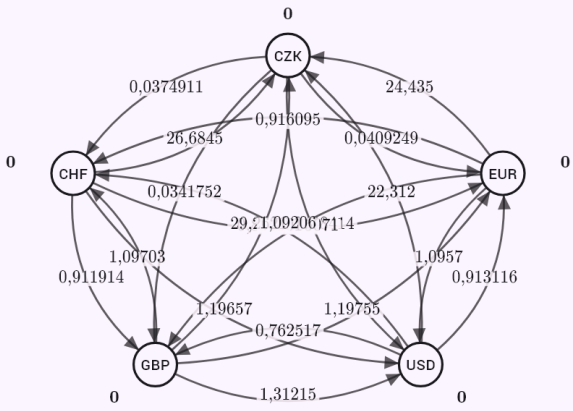
| | $r$ | $w = -\ln r$ | |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$ | 0,0409249 | 3,196 | ČNB |
| $\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$ | 0,0448414 | 3,1046 | ECB |
| $\mathrm{CZK} \to \mathrm{GBP}$ | 0,0341752 | 3,3763 | ČNB |
| $\mathrm{CZK} \to \mathrm{CHF}$ | 0,0374911 | 3,2837 | ČNB |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$ | 24,435 | −3,196 | ČNB |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$ | 1,0957 | −0,091393 | ECB |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$ | 0,835071 | 0,18024 | ČNB |
| $\mathrm{EUR} \to \mathrm{CHF}$ | 0,916095 | 0,087635 | ČNB |
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$ | 22,312 | −3,1051 | ČNB |
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$ | 0,913116 | 0,090892 | ČNB |
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$ | 0,762517 | 0,27113 | ČNB |
| $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF}$ | 0,836501 | 0,17853 | ČNB |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{CZK}$ | 29,2621 | −3,3763 | ECB |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$ | 1,19755 | −0,18028 | ECB |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$ | 1,31215 | −0,27167 | ECB |
| $\mathrm{GBP} \to \mathrm{CHF}$ | 1,09703 | −0,092604 | ČNB |
| $\mathrm{CHF} \to \mathrm{CZK}$ | 26,6845 | −3,2841 | ECB |
| $\mathrm{CHF} \to \mathrm{EUR}$ | 1,09206 | −0,088066 | ECB |
| $\mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$ | 1,19657 | −0,17946 | ECB |
| $\mathrm{CHF} \to \mathrm{GBP}$ | 0,911914 | 0,092209 | ECB |

- Un ciclo dà un guadagno quando il prodotto dei suoi cambi supera 1 – nei logaritmi un ciclo negativo dei pesi
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- L'algoritmo di Bellman–Ford parte da tutte le valute contemporaneamente (tutte le etichette 0); le etichette modificate sono in grassetto, il pedice è il predecessore.

| | CZK | EUR | USD |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\mathbf{-3{,}376687_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}18067_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}272064}$ |
| 2 | $\mathbf{-3{,}37762_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}181603_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}272996}$ |
| 3 | $\mathbf{-3{,}378552_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}182536_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}273929}$ |
| 4 | $\mathbf{-3{,}379485_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}183468_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}274862}$ |
| 5 | $\mathbf{-3{,}380418_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}184401_{\mathrm{CHF}}}$ | $\mathbf{-0{,}275795}$ |

- Le etichette cambiano ancora all'n-esima passata – i predecessori portano al ciclo negativo $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Il prodotto dei cambi $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, un guadagno di $0{,}09332\,\%$: 1000 unità diventano $1000{,}933$ dopo un giro.
- Il ciclo risulta solo tra i cambi di riferimento di due banche, fissati in momenti diversi e arrotondati diversamente. Nessuno negozia a questi cambi – il guadagno non è ottenibile in pratica.

### Grafico




Inizio
$d = 0$

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Il cammino critico e gli slittamenti delle attività.

Input: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

### Risultato

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

### Passaggi

- Le attività, le loro durate e i predecessori

| | $t$ | |
|---|---|---|
| A | 3 | – |
| B | 4 | A |
| C | 2 | A |
| D | 5 | B, C |
| E | 3 | C |
| F | 2 | D, E |

- Il passaggio in avanti: un'attività inizia al più presto quando tutti i suoi predecessori sono terminati (ES = il massimo EF dei predecessori) e termina in EF = ES + t.

| | ES | $\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$ |
|---|---|---|
| A | 0 | 3 |
| B | 3 | 7 |
| C | 3 | 5 |
| D | $\max(7, 5) = 7$ | 12 |
| E | 5 | 8 |
| F | $\max(12, 8) = 12$ | 14 |

- La durata del progetto è la più tarda delle fini minime: $T = 14$
- Il passaggio all'indietro: un'attività deve terminare al più tardi quando devono iniziare i suoi successori (LF = il minimo LS dei successori) e iniziare al più tardi in LS = LF − t.

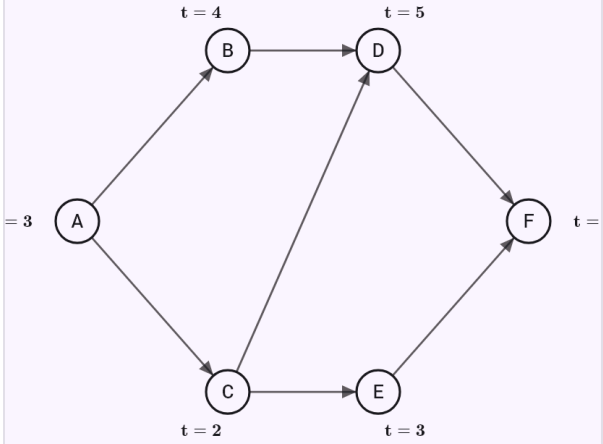
| | LF | $\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$ |
|---|---|---|
| F | 14 | 12 |
| E | 12 | 9 |
| D | 12 | 7 |
| C | $\min(7, 9) = 7$ | 5 |
| B | 7 | 3 |
| A | $\min(3, 5) = 3$ | 0 |

- Lo slittamento di ogni attività; le attività critiche (★) non ne hanno

| | $R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$ | |
|---|---|---|
| A | 0 | ★ |
| B | 0 | ★ |
| C | 2 | |
| D | 0 | ★ |
| E | 4 | |
| F | 0 | ★ |

- Il cammino critico – un ritardo di una qualsiasi delle sue attività ritarda l'intero progetto: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

### Grafico




Inizio

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

**PERT – la probabilità di finire il progetto entro una scadenza.**

Input: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Risultato

$T = 13$

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$

$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$

Passaggi

- Le attività, le loro durate e i predecessori

| | $t$ | |
|---|---|---|
| A | 3 | – |
| B | 5 | A |
| C | 2 | A |
| D | 5 | B, C |

- PERT: le durate attese e le varianze dalle tre stime

| | $a$ | $m$ | $b$ | $t = \frac{a+4m+b}{6}$ | $\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 | 4 | 3 | 0,1111 |
| B | 3 | 4 | 11 | 5 | 1,778 |
| C | 1 | 2 | 3 | 2 | 0,1111 |
| D | 4 | 5 | 6 | 5 | 0,1111 |

- Il passaggio in avanti: un'attività inizia al più presto quando tutti i suoi predecessori sono terminati (ES = il massimo EF dei predecessori) e termina in EF = ES + t.

| | ES | $\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$ |
|---|---|---|
| A | 0 | 3 |
| B | 3 | 8 |
| C | 3 | 5 |
| D | $\max(8, 5) = 8$ | 13 |

- La durata del progetto è la più tarda delle fini minime: $T = 13$
- Il passaggio all'indietro: un'attività deve terminare al più tardi quando devono iniziare i suoi successori (LF = il minimo LS dei successori) e iniziare al più tardi in LS = LF − t.

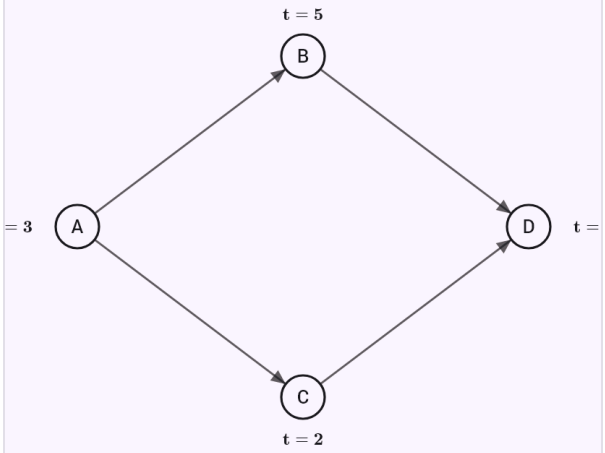
| | LF | $\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$ |
|---|---|---|
| D | 13 | 8 |
| C | 8 | 6 |
| B | 8 | 3 |
| A | $\min(3, 6) = 3$ | 0 |

- Lo slittamento di ogni attività; le attività critiche (★) non ne hanno

| | $R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$ | |
|---|---|---|
| A | 0 | ★ |
| B | 0 | ★ |
| C | 3 | |
| D | 0 | ★ |

- Il cammino critico – un ritardo di una qualsiasi delle sue attività ritarda l'intero progetto: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- La varianza della durata del progetto è la somma delle varianze sul cammino critico:
  $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- La durata ha approssimativamente una distribuzione normale – la probabilità di finire entro la scadenza:
  $P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15-13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$

Grafico




Inizio

Con le frecce percorri l'algoritmo passo per passo. Il rosso è la modifica di questo passo, il blu ciò che è già deciso, il verde il risultato. Accanto ai nodi ci sono le loro etichette (distanza, tempi minimi e massimi).

## Limiti noti

- Un grafo può avere al massimo 30 nodi e 200 archi; le matrici di Floyd–Warshall nodo per nodo si mostrano fino a 6 nodi, per grafi più grandi solo la matrice finale.
- La ricerca dell'arbitraggio trova un ciclo vantaggioso (non necessariamente il più vantaggioso); differenze sotto lo 0,0001 % contano come arrotondamento dei cambi.

- La ČNB e la BCE pubblicano solo cambi medi (di riferimento), ai quali nessuno negozia; il «guadagno» da entrambi i listini insieme è di centesimi di punto percentuale e non è ottenibile in pratica.
- Con entrambi i listini solo le valute pubblicate da entrambe le banche (nessuna pubblica il rublo russo).
- In arrivo l’instradamento dei veicoli, il problema dello zaino, le scorte e le code; programmazione lineare, trasporti e assegnazione hanno un capitolo proprio.

# 53. Psicometria

I calcoli psicometrici per interpretare i risultati dei test (secondo il manuale «Psicometria clinica – da un numero a un'interpretazione») sono nel modulo «Statistica e psicometria» – la sezione «Applicazioni» della schermata iniziale, l'ambito Psicologia. Scegli il compito, la scala e cosa cerchi e inserisci i valori misurati; la scala precompila la media e la deviazione standard della norma (QI 100; 15, T 50; 10, ponderato 10; 3, z 0; 1, sten 5,5; 2, stanine 5; 2), «Personalizzata» ti permette di inserire la norma di un altro test. L'icona «?» spiega da dove viene la formula.

Aiuto direttamente nell'app: l'icona «?» di ogni compito nel modulo spiega cosa calcola e da dove viene la formula. Il risultato mostra i passaggi uno per uno, e i termini tecnici in essi (kappa di Cohen, curva ROC, intervallo di confidenza, p-value, percentile, punteggio vero, valori predittivi …) sono sottolineati a puntini – un tocco su un termine mostra la sua breve spiegazione in parole semplici, spesso con un esempio. Le note alla fine dei passaggi dicono come interpretare il risultato e a cosa fare attenzione.

Conversione di punteggi standard: $z = (X - M)/SD$ e da esso T, QI, il punteggio ponderato, sten e stanine (arrotondati a un intero entro la scala) e il percentile. Punteggio e percentile: il rango percentile $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ assumendo la distribuzione normale, e al contrario il punteggio di un percentile dato.

L'errore standard di misura $SEM = SD \cdot \sqrt{(1 - r)}$ dall'attendibilità r. L'intervallo di confidenza attorno al punteggio osservato $X \pm z \cdot SEM$ all'80, 90, 95 o 99 % (z = 1,28; 1,645; 1,96; 2,576). Il punteggio vero stimato $T' = M + r(X - M)$ – la regressione verso la media – con l'intervallo attorno a $T'$ e l'errore standard di stima $SEE = SD \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

La significatività di una differenza di due punteggi di una scala (per esempio indici WAIS): l'errore standard della differenza $SE_diff = SD \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ e la differenza critica $z \cdot SE_diff$. I valori predittivi di un test con il teorema di Bayes: VPP e VPN da sensibilità, specificità e prevalenza – o da una tabella 2×2 (veri e falsi positivi e negativi), facoltativamente con la prevalenza della popolazione in cui si usa il test – con i rapporti di verosimiglianza $LR^+$ e $LR^-$.

La formula di Spearman–Brown (nello stesso modulo) dà l'attendibilità di un test allungato k volte, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, o al contrario quante volte allungare un test per un'attendibilità obiettivo – dato il numero attuale di item, anche gli item necessari. La correzione di Bonferroni dà il livello più severo $\alpha' = \alpha/m$ per m confronti, con la probabilità di un falso risultato significativo senza correzione e la correzione di Šidák.

Attendibilità e accordo da dati misurati vengono dai chip di data(…) o del «Come dati» della griglia (incollati da Excel, un file CSV): l'alfa di Cronbach – item in colonne, rispondenti in righe – con un'analisi degli item (la correlazione dell'item con il resto del test, l'alfa eliminando l'item); l'ICC – valutatori in colonne, soggetti in righe – tutte e sei le forme di Shrout e Fleiss da una tabella di analisi della varianza; la kappa di Cohen da due colonne di valutazioni (categorie come numeri) o da una tabella di accordo quadrata; la curva ROC e l'AUC da una colonna di punteggi e una colonna dello stato 0/1 (1 = la

condizione) con la U di Mann–Whitney, con il cut-off secondo l'indice di Youden e un grafico della curva ROC. Alfa, ICC, kappa e AUC hanno un intervallo di confidenza (90, 95 o 99 % con un chip): l'alfa secondo Feldt, l'ICC dalla distribuzione F, la kappa dall'errore standard asintotico, l'AUC secondo Hanley e McNeil. Per categorie ordinate la kappa si calcola anche con pesi lineari o quadratici. La curva ROC può venire anche da due colonne di punteggi di due gruppi (la prima positiva, di qualsiasi lunghezza), con il test di Mann–Whitney aggiunto all'AUC. Tre colonne – i punteggi di due test e lo stato – si confrontano con il test di DeLong, entrambe le curve in un grafico.

I passaggi finiscono con una nota interpretativa: i percentili sono ordinali (non si sommano né se ne fa la media), la conversione in percentile vale solo per un punteggio a distribuzione normale, una differenza significativa non è necessariamente insolita (il tasso di base della discrepanza), i valori predittivi dipendono dalla prevalenza. Il grafico mostra la curva normale con il punteggio, l'intervallo o la regione critica evidenziati.

# Esempi

## QI 85 in tutte le scale: z = −1, T = 40, punteggio ponderato 7.

Input: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

### Risultato

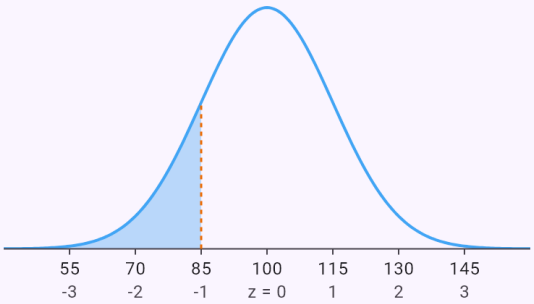
$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

### Passaggi

- Dati: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- I punteggi standard dicono quanto una prestazione dista dalla media della norma, in deviazioni standard. Prima z = (X − M)/SD, poi l'altra scala: T = 50 + 10z, QI = 100 + 15z, punteggio ponderato = 10 + 3z, sten = 5,5 + 2z (1–10), stanine = 5 + 2z (1–9). Il percentile è la percentuale della popolazione con un punteggio inferiore – valido solo per un punteggio a distribuzione normale.
  Equazione del modello:
  $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Ricaviamo l'incognita: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Sostituiamo: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Sostituiamo: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Sostituiamo: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Sostituiamo: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Sostituiamo
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Sostituiamo:
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$
- Sten e stanine sono numeri interi – il valore è arrotondato e mantenuto nell'intervallo della scala (1–10, 1–9).
- Sostituiamo: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- La conversione in percentile vale solo per un punteggio a distribuzione normale. Per test asimmetrici (per esempio i tempi del TMT) leggi il percentile dalla tabella normativa.
- I percentili sono una scala ordinale – i loro passi non sono uguali (al centro il 50° e il 60° percentile sono vicini nel punteggio, agli estremi lontani). Per questo i percentili non si sommano, non se ne fa la media né si sottraggono.

### Grafico

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata




$PR \approx 16 \quad X = 85$

## QI 130 è il 98° percentile.

Input: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

### Risultato

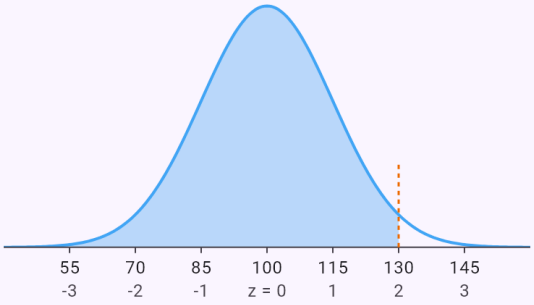
$$PR \approx 98$$

### Passaggi

- Incognita $PR$; dati: $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Il percentile (rango percentile) dice quale percentuale del gruppo normativo ha ottenuto un punteggio inferiore. Assumendo la distribuzione normale, segue dal punteggio z tramite la funzione di ripartizione: PR = 100·Φ(z); un punteggio da un percentile tramite il quantile z = Φ⁻¹(PR/100). Equazione del modello:
  $$PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$$
- Ricaviamo l'incognita: $z = \dfrac{X - M}{SD}$
- Sostituiamo: $z = \dfrac{130 - 100}{15} = 2$
- Sostituiamo: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- La conversione in percentile vale solo per un punteggio a distribuzione normale. Per test asimmetrici (per esempio i tempi del TMT) leggi il percentile dalla tabella normativa.
- I percentili sono una scala ordinale – i loro passi non sono uguali (al centro il 50° e il 60° percentile sono vicini nel punteggio, agli estremi lontani). Per questo i percentili non si sommano, non se ne fa la media né si sottraggono.

### Grafico

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata




$PR \approx 98 \quad X = 130$

## Il punteggio T del 16° percentile.

Input: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

**Risultato**

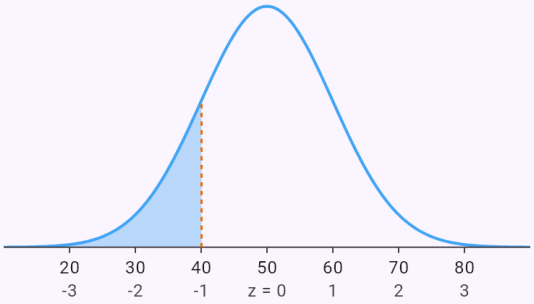
$$X \approx 40{,}1$$

**Passaggi**

- Incognita $X$; dati: $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Convertiamo le unità: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Il percentile (rango percentile) dice quale percentuale del gruppo normativo ha ottenuto un punteggio inferiore. Assumendo la distribuzione normale, segue dal punteggio z tramite la funzione di ripartizione: PR = 100·Φ(z); un punteggio da un percentile tramite il quantile z = Φ⁻¹(PR/100). Equazione del modello:
  $$PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$$
- Ricaviamo l'incognita:
  $$z = \Phi^{-1}\left(\frac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$$
- Sostituiamo
  $$z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$$
- La conversione in percentile vale solo per un punteggio a distribuzione normale. Per test asimmetrici (per esempio i tempi del TMT) leggi il percentile dalla tabella normativa.
- I percentili sono una scala ordinale – i loro passi non sono uguali (al centro il 50° e il 60° percentile sono vicini nel punteggio, agli estremi lontani). Per questo i percentili non si sommano, non se ne fa la media né si sottraggono.

**Grafico**

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata




$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

## L'errore standard di misura di un test con attendibilità 0,97.

Input: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

**Risultato**

$$SEM \approx 2{,}6$$

**Passaggi**

- Incognita $SEM$; dati: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Nessuna misura è esatta: il punteggio osservato X = il punteggio vero T + un errore E. L'errore standard di misura SEM = SD·√(1 − r) è quanto il punteggio osservato differisce tipicamente da quello vero; r è l'attendibilità del test (test-retest, α di Cronbach). Più alta l'attendibilità, minore l'errore. Equazione del modello:
  $$SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$$
- L'errore standard di misura:
  $$SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$$

## L’intervallo di confidenza al 95 % attorno a QI 95.

Input: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq; level=95)`

**Risultato**

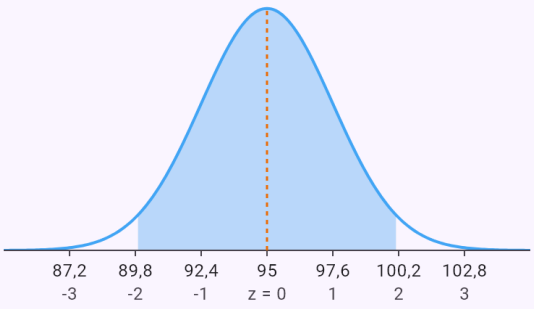
$95\,\%:\ [89{,}9;\ 100{,}1]$

**Passaggi**

- Incognita $X$; dati: $X = 95,\quad SD = 15,\quad r_{xx} = 0{,}97$
- Attorno al punteggio osservato segniamo la fascia in cui si trova il punteggio vero con una data confidenza: X ± z·SEM, con z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) o 2,576 (99 %). Un punteggio va letto come un intervallo, non come un numero esatto. Equazione del modello
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- L’errore standard di misura:
  $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Il valore critico della normale standard:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Sostituiamo:
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow [89{,}91;\ 100{,}1]$
- L’intervallo è costruito attorno al punteggio osservato. Più accurato (soprattutto per punteggi estremi) è l’intervallo attorno al punteggio vero stimato – il modello «Punteggio vero stimato».

**Grafico**

Densità normale, l’area ombreggiata è la probabilità cercata




$95\,\%:\ [89{,}9;\ 100{,}1] \quad X = 95$

## Il punteggio vero stimato di QI 74 con attendibilità 0,92.

Input: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

**Risultato**

$$T' \approx 76{,}1$$

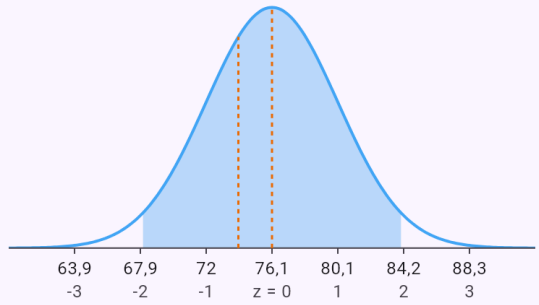
$$95\,\% : \ [68{,}1;\ 84{,}1]$$

**Passaggi**

- Incognita $T'$; dati:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- Per punteggi estremi il punteggio vero si stima più vicino alla media (regressione verso la media): T' = M + r(X − M). L'intervallo di confidenza si costruisce allora attorno a T' con l'errore standard di stima SEE = SD·√(r(1 − r)) – più accurato che attorno al punteggio osservato, soprattutto con un'attendibilità bassa. Equazione del modello
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Sostituiamo: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- La stima del punteggio vero è più vicina alla media del punteggio osservato – misurato di nuovo, un risultato estremo verrebbe probabilmente meno estremo.
- L'errore standard della stima del punteggio vero:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Il valore critico della normale standard:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Sostituiamo
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow [68{,}1;\ 84{,}06]$

**Grafico**

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata




$X = 74 \quad T'$

## Due indici 112 e 97 – la differenza è significativa?

Input: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

**Risultato**

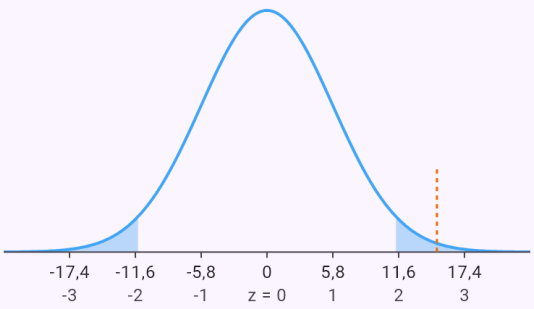
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

**Passaggi**

- Incognita $D$; dati:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Due punteggi (per esempio indici WAIS) differiscono più di quanto causerebbe l'errore di misura? L'errore standard della differenza SE_diff = SD·√(2 − $r_{11}$ − $r_{22}$), la differenza critica z·SE_diff. Una differenza che la raggiunge è statisticamente significativa – il che non significa che sia insolita. Equazione del modello
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- L'errore standard della differenza:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Il valore critico della normale standard:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- La differenza critica: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Sostituiamo: $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- La differenza raggiunge il valore critico – è statisticamente significativa (non spiegata dal solo errore di misura).
- Una differenza significativa non è necessariamente insolita: il 20–30 % del campione normativo mostra spesso differenze tra indici così grandi (il tasso di base della discrepanza). Per l'interpretazione conta anche la sua frequenza nella norma.

**Grafico**

Densità normale, l'area ombreggiata è la probabilità cercata




$95\,\%$ $D = 15$

## Uno screening con sensibilità 92,5 % e specificità 74,6 % con una prevalenza del 2 %.

Input: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

input=rates)

**Risultato**

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

**Passaggi**

- Incognita $PPV$; dati:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Convertiamo le unità:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- La sensibilità (Se) è la quota di malati che il test rileva, la specificità (Sp) la quota di sani che esclude correttamente. Nella pratica conta la probabilità del disturbo dato un risultato positivo – il valore predittivo positivo VPP. Per il teorema di Bayes dipende dalla prevalenza p: VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), il negativo VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Equazione del modello
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Sostituiamo
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Sostituiamo
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Rapporti di verosimiglianza:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- I valori predittivi dipendono dalla prevalenza: con una prevalenza bassa la maggior parte dei risultati positivi sono falsi positivi anche per un buon test. Un risultato positivo di screening va confermato.

## I valori predittivi da una tabella 2×2.

Input: model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)

**Risultato**

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

**Passaggi**

- Incognita $PPV$; dati:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Sensibilità: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Specificità: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- La prevalenza nel campione:
  $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- La sensibilità (Se) è la quota di malati che il test rileva, la specificità (Sp) la quota di sani che esclude correttamente. Nella pratica conta la probabilità del disturbo dato un risultato positivo – il valore predittivo positivo VPP. Per il teorema di Bayes dipende dalla prevalenza p: VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), il negativo VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Equazione del modello
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Sostituiamo
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Sostituiamo
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Rapporti di verosimiglianza:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- I valori predittivi dipendono dalla prevalenza: con una prevalenza bassa la maggior parte dei risultati positivi sono falsi positivi anche per un buon test. Un risultato positivo di screening va confermato.

## Coerenza interna di un questionario di quattro item.

Input: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Alfa di Cronbach

**Risultato**

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ [0{,}765;\ 0{,}990]$$

**Passaggi**

- Numero di item (colonne) k = 4, numero di rispondenti (righe) $6$
- Le varianze campionarie degli item e la loro somma

$$s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$$

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Il punteggio totale di ogni rispondente (la somma delle sue risposte): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. La varianza dei punteggi totali: $s^2_X \approx 24{,}17$
- Alfa di Cronbach – la coerenza interna è eccellente.

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Analisi degli item – la media, la varianza, la correlazione dell'item con il resto del test e l'alfa eliminando l'item

| | $\bar{x}_i$ | $s_i^2$ | $r_{it}$ | $\alpha_{-i}$ |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 3 | 2 | 0,957 | 0,875 |
| P2 | 3,333 | 1,467 | 0,825 | 0,922 |
| P3 | 3,5 | 1,1 | 0,804 | 0,934 |
| P4 | 3,333 | 2,667 | 0,869 | 0,918 |

- L'intervallo di confidenza al $95$ % secondo Feldt – il rapporto (1 − α)/(1 − α̂) ha la distribuzione F con n − 1 e (n − 1)(k − 1) gradi di libertà

$$F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$$

$$F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$$

$$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

$$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Una guida indicativa per α: ≥ 0,9 eccellente, ≥ 0,8 buona, ≥ 0,7 accettabile coerenza interna. Per la ricerca basta circa 0,7; le decisioni su un individuo (diagnostica) richiedono almeno 0,9.
- Un α alto non significa che il test misuri un solo tratto, e cresce già con il solo numero di item. Se α aumenta eliminando un item (l'ultima colonna della tabella), l'item probabilmente non appartiene alla scala.

## Accordo di quattro valutatori su sei soggetti (l'esempio di Shrout e Fleiss).

Input: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

## ICC (attendibilità tra valutatori)

### Risultato

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \quad [-0{,}133;\ 0{,}723]$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \quad [-0{,}884;\ 0{,}912]$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \quad [0{,}019;\ 0{,}761]$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \quad [0{,}071;\ 0{,}927]$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \quad [0{,}342;\ 0{,}946]$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \quad [0{,}676;\ 0{,}986]$$

### Passaggi

- Numero di soggetti valutati (righe) 6, numero di valutatori (colonne) k = 4, la media generale $\bar{x} = 5{,}292$
- Analisi della varianza – le somme dei quadrati SS, i gradi di libertà df e i quadrati medi MS tra soggetti (R), tra valutatori (C), residui (E) ed entro i soggetti (W)

| | $SS$ | $df$ | $MS$ |
|---|---|---|---|
| $R$ | 56,21 | 5 | 11,24 |
| $C$ | 97,46 | 3 | 32,49 |
| $E$ | 15,29 | 15 | 1,019 |
| $W$ | 112,7 | 18 | 6,264 |
| $\sum$ | 169 | 23 | |

- Modello a una via – ogni soggetto può essere valutato da valutatori diversi

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Modello a due vie con valutatori casuali – accordo assoluto

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Modello a due vie con valutatori fissi – coerenza

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Gli intervalli di confidenza al 95 % dalla distribuzione F (Shrout e Fleiss) – i rapporti dei quadrati medi e i loro limiti

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\ 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\ 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\ 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\ 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Tutti e sei gli ICC con i loro intervalli di confidenza al 95 %

| | $ICC$ | 95 % |
|---|---|---|
| $ICC(1,1)$ | 0,166 | $[-0{,}133;\ 0{,}723]$ |
| $ICC(1,4)$ | 0,443 | $[-0{,}884;\ 0{,}912]$ |
| $ICC(2,1)$ | 0,290 | $[0{,}019;\ 0{,}761]$ |
| $ICC(2,4)$ | 0,620 | $[0{,}071;\ 0{,}927]$ |
| $ICC(3,1)$ | 0,715 | $[0{,}342;\ 0{,}946]$ |
| $ICC(3,4)$ | 0,909 | $[0{,}676;\ 0{,}986]$ |

- Quale ICC usare: ICC(1,·) – ogni soggetto valutato da valutatori diversi; ICC(2,·) – i valutatori sono un campione casuale e conta l'accordo assoluto; ICC(3,·) – valutatori fissi, conta la coerenza. ICC(·,1) vale per un singolo valutatore, ICC(·,k) per la media di k valutatori. Una guida indicativa (Koo e Li): sotto 0,5 scarsa, 0,5–0,75 moderata, 0,75–0,9 buona, sopra 0,9 eccellente attendibilità.
- ICC(3,k) è uguale all'alfa di Cronbach degli stessi dati (i valutatori come item).
- L'intervallo di confidenza di un ICC tende a essere ampio con pochi soggetti – anche un ICC alto può avere un limite inferiore basso. Gli intervalli di ICC(2,·) sono approssimati (gradi di libertà di Satterthwaite).
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

## Accordo di due medici in tre categorie diagnostiche.

Input: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)` Kappa di Cohen

**Risultato**

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\% : \ [0{,}256;\ 0{,}986]$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

**Passaggi**

- Le coppie di valutazioni formano la tabella di accordo (righe valutatore A, colonne valutatore B, accordo sulla diagonale)

| $A \backslash B$ | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **4** | 1 | 0 | 5 |
| 2 | 0 | **3** | 1 | 4 |
| 3 | 0 | 1 | **2** | 3 |
| $\sum$ | 4 | 5 | 3 | 12 |

- L'accordo osservato – la quota di casi sulla diagonale:
$$p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$
- L'accordo atteso per caso – dai totali di riga e di colonna
$$p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$$
- Kappa di Cohen – l'accordo è sostanziale (Landis e Koch).

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$$

- L'intervallo di confidenza al 95 % dall'errore standard asintotico (Fleiss, Cohen ed Everitt)
$SE \approx 0{,}1861$
$\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow [0{,}256;\ 0{,}986]$
- κ corregge l'accordo per l'accordo atteso per caso: 0 significa accordo dovuto al solo caso, 1 accordo perfetto. Quando prevale una categoria, κ risulta basso anche con un'alta percentuale di accordo – per questo si riporta anche $p_o$.
- Le categorie sono trattate come nominali – ogni disaccordo pesa allo stesso modo. Categorie ordinate (es. un grado di gravità) richiedono un κ pesato, che penalizza meno un disaccordo minore.

## Le stesse diagnosi con pesi quadratici – le categorie vicine contano come accordo parziale.

Input: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa di Cohen, Pesi quadratici

**Risultato**

$\kappa_w \approx 0{,}7955$

$95\,\%:\ [0{,}576;\ 1{,}000]$

$p_o = 0{,}9375$

$p_e \approx 0{,}6944$

**Passaggi**

- Le coppie di valutazioni formano la tabella di accordo (righe valutatore A, colonne valutatore B, accordo sulla diagonale)

| $A\backslash B$ | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **4** | 1 | 0 | 5 |
| 2 | 0 | **3** | 1 | 4 |
| 3 | 0 | 1 | **2** | 3 |
| $\sum$ | 4 | 5 | 3 | 12 |

- Pesi di accordo quadratici – un piccolo disaccordo costa poco, uno grande molto: $w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,75 | 0 |
| 2 | 0,75 | 1 | 0,75 |
| 3 | 0 | 0,75 | 1 |

- L'accordo osservato pesato – le frequenze della tabella per i pesi: $p_o = \frac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \frac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$

- L'accordo pesato atteso per caso – dai totali di riga e di colonna con i pesi: $p_e = \frac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \frac{100}{144} \approx 0{,}6944$
- La kappa di Cohen pesata – l'accordo è sostanziale (Landis e Koch).

  $\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$

- L'intervallo di confidenza al 95 % dall'errore standard asintotico (Fleiss, Cohen ed Everitt)

  $SE \approx 0{,}1119$

  $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow [0{,}576;\ 1{,}000]$

- κ corregge l'accordo per l'accordo atteso per caso: 0 significa accordo dovuto al solo caso, 1 accordo perfetto. Quando prevale una categoria, κ risulta basso anche con un'alta percentuale di accordo – per questo si riporta anche $p_o$.
- La kappa pesata conta anche l'accordo parziale: valutazioni distanti un passo non sono un disaccordo pieno. Con pesi quadratici la kappa pesata si avvicina all'ICC; è bene indicare quali pesi sono stati usati.

## La kappa di Cohen da una tabella di accordo 2×2.

Input: `data(20 5; 10 15)` Kappa di Cohen

**Risultato**

$\kappa = 0{,}4$

$95\,\%:\ [0{,}151;\ 0{,}649]$

$p_o = 0{,}7$

$p_e = 0{,}5$

**Passaggi**

- La tabella di accordo (righe valutatore A, colonne valutatore B, accordo sulla diagonale) con i totali di riga e di colonna

| $A\backslash B$ | 1 | 2 | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| 1 | **20** | 5 | 25 |
| 2 | 10 | **15** | 25 |
| $\sum$ | 30 | 20 | 50 |

- L'accordo osservato – la quota di casi sulla diagonale: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20 + 15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$
- L'accordo atteso per caso – dai totali di riga e di colonna $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$

- Kappa di Cohen: $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – l'accordo è discreto (Landis e Koch).
- L'intervallo di confidenza al 95 % dall'errore standard asintotico (Fleiss, Cohen ed Everitt)

  $SE \approx 0{,}127$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow [0{,}151;\ 0{,}649]$

- κ corregge l'accordo per l'accordo atteso per caso: 0 significa accordo dovuto al solo caso, 1 accordo perfetto. Quando prevale una categoria, κ risulta basso anche con un'alta percentuale di accordo – per questo si riporta anche $p_o$.

## Quanto bene un punteggio di test separa i pazienti (stato 1) dalle persone sane (stato 0).

Input: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` Curva ROC e AUC

### Risultato

$$AUC \approx 0{,}9167$$
$$95\,\%:\ [0{,}706;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

### Passaggi

- Casi positivi (stato 1) e negativi (stato 0): $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Tutti i punteggi sono ordinati e ricevono un rango. La somma dei ranghi dei casi positivi: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- L'U di Mann–Whitney – il numero di coppie (positivo, negativo) in cui il caso positivo ha un punteggio più alto: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- L'area sotto la curva ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – la capacità discriminante del test è eccezionale.
- L'intervallo di confidenza al 95 % secondo Hanley e McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow [0{,}706;\ 1{,}0$$

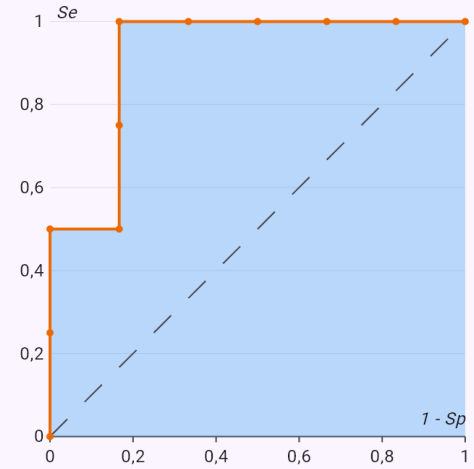
- L'ipotesi nulla: il test non discrimina (AUC = 0,5), l'alternativa: discrimina – il test di Mann–Whitney: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- La statistica test – sotto $H_0$ ha la distribuzione normale standard: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- Il valore critico al livello α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la regione critica $|z| \ge 1{,}96$
- Il p-value: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Poiché $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se $H_0$ è vera – non la probabilità che $H_0$ sia vera. Non rifiutare $H_0$ non significa che $H_0$ sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il cut-off con il massimo indice di Youden è 14 (un punteggio ≥ 14 è positivo)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8333$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$$

- L'AUC è la probabilità che un caso positivo scelto a caso abbia un punteggio più alto di uno negativo scelto a caso (0,5 – il test non discrimina, 1 – discrimina perfettamente). Il cut-off secondo l'indice di Youden è solo una possibilità – nella pratica si sceglie anche in base al costo dei falsi positivi e dei falsi negativi.
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

### Grafico

Curva ROC – l'area ombreggiata è l'AUC, la diagonale tratteggiata è un test che non discrimina



## Punteggi di pazienti e persone sane in due gruppi di numerosità diverse, con il test di Mann–Whitney.

Input: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` Curva ROC e AUC

### Risultato

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%:\ [0{,}787;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

### Passaggi

- Il gruppo positivo $\mathrm{pacienti}$ e il gruppo negativo $\mathrm{zdravi}$: $n_1 = 5,\quad n_0 = 7$
- Tutti i punteggi sono ordinati e ricevono un rango. La somma dei ranghi dei casi positivi: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- L'U di Mann–Whitney – il numero di coppie (positivo, negativo) in cui il caso positivo ha un punteggio più alto: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- L'area sotto la curva ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – la capacità discriminante del test è eccezionale.
- L'intervallo di confidenza al 95 % secondo Hanley e McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow [0{,}787;\ 1{,}$$

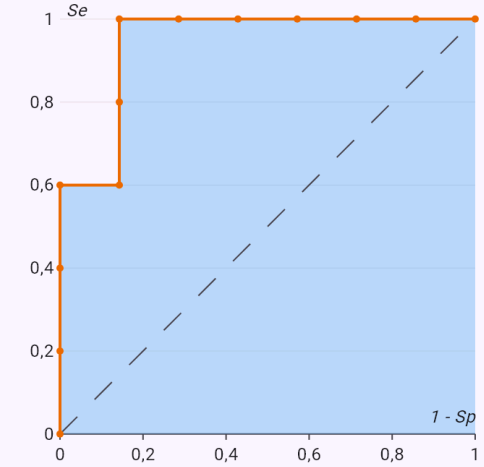
- L'ipotesi nulla: il test non discrimina (AUC = 0,5), l'alternativa: discrimina – il test di Mann–Whitney: $H_0: AUC = 0{,}5,\quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- La statistica test – sotto $H_0$ ha la distribuzione normale standard: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- Il valore critico al livello α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la regione critica $|z| \ge 1{,}96$
- Il p-value: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Poiché $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, rifiutiamo l'ipotesi nulla – il risultato è statisticamente significativo.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se $H_0$ è vera – non la probabilità che $H_0$ sia vera. Non rifiutare $H_0$ non significa che $H_0$ sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- Il cut-off con il massimo indice di Youden è 14 (un punteggio ≥ 14 è positivo)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8571$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$$

- L'AUC è la probabilità che un caso positivo scelto a caso abbia un punteggio più alto di uno negativo scelto a caso (0,5 – il test non discrimina, 1 – discrimina perfettamente). Il cut-off secondo l'indice di Youden è solo una possibilità – nella pratica si sceglie anche in base al costo dei falsi positivi e dei falsi negativi.
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

### Grafico

Curva ROC – l'area ombreggiata è l'AUC, la diagonale tratteggiata è un test che non discrimina




## Due test sulle stesse persone – discriminano ugualmente bene? (test di DeLong)

Input: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16 1;`

16 8 0; 10 13 0)

Curva ROC e AUC

### Risultato

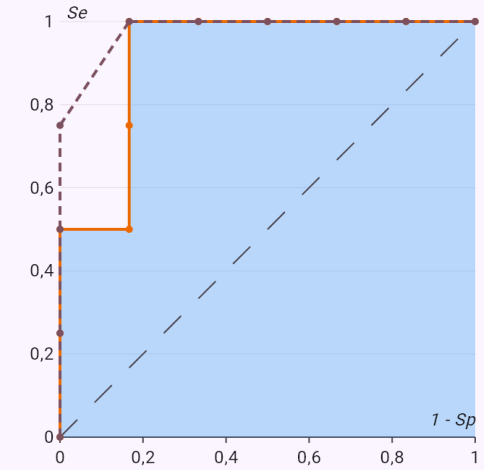
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ [-0{,}277;\ 0{,}152]$$

### Passaggi

- Due test A e B sugli stessi casi, lo stato positivo 1: $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Le aree sotto le curve ROC di entrambi i test e i loro errori standard (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- La varianza della differenza secondo DeLong – i test sono sugli stessi casi, quindi si sottrae la loro covarianza (la correlazione delle AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- L'ipotesi nulla: entrambi i test discriminano allo stesso modo, l'alternativa: differiscono
  $H_0$: $AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  $H_1$: $AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- La statistica test – sotto $H_0$ ha la distribuzione normale standard
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- Il valore critico al livello α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la regione critica $|z| \geq 1{,}96$
- Il p-value: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Poiché $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla – i dati non forniscono prove sufficienti contro di essa.
- Il p-value è la probabilità di un risultato almeno estremo quanto quello osservato se $H_0$ è vera – non la probabilità che $H_0$ sia vera. Non rifiutare $H_0$ non significa che $H_0$ sia vera; la significatività statistica non dice nulla sulla grandezza o sull'importanza pratica di una differenza.
- L'intervallo di confidenza al 95 % della differenza delle due AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- Il test di DeLong confronta le AUC di due test sugli stessi casi – tiene conto che sono correlate. Una differenza non significativa non significa che i test siano ugualmente buoni, solo che i dati non hanno mostrato una differenza.
- Attenzione: i dati sono pochi, le stime (soprattutto della varianza e dei quartili) sono incerte.

### Grafico

Le curve ROC di entrambi i test – la prima continua con l'area ombreggiata, la seconda tratteggiata



## Di quanto allungare un test di 20 item con attendibilità 0,7 per raggiungere 0,9.

Input: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

**Risultato**

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

**Passaggi**

- Incognita $k$; dati: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Un test più lungo misura in modo più attendibile: allungato k volte con item della stessa qualità (paralleli), la sua attendibilità cresce secondo la formula di Spearman–Brown r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Al contrario, dice quante volte allungare un test per raggiungere un'attendibilità obiettivo. La formula corregge anche un'attendibilità split-half (k = 2). Equazione del modello:
  $$k = \frac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$$
- Sostituiamo
  $$k = \frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$$
- Item necessari:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- La formula assume che gli item aggiunti siano buoni quanto quelli originali (paralleli). Il guadagno reale è di solito minore, e un test più lungo affatica anche di più il rispondente.

### Il livello corretto per 10 confronti.

Input: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

**Risultato**

$$\alpha' = 0{,}005$$

**Passaggi**

- Incognita $\alpha'$; dati: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Con m test al livello α, cresce la probabilità che almeno uno risulti significativo per puro caso: 1 − (1 − α)^m. La correzione di Bonferroni giudica quindi ogni test al livello più severo α' = α/m. La correzione di Šidák 1 − (1 − α)^(1/m) è un po' meno severa. Equazione del modello: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Sostituiamo: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Probabilità di almeno un falso risultato significativo senza correzione: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1 - 0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Correzione di Šidák $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1 - 0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- La correzione di Bonferroni è conservativa: protegge dai falsi risultati significativi, ma con molti confronti perde facilmente una differenza reale. Meno severi sono per esempio il metodo di Holm o il controllo del FDR (Benjamini–Hochberg).

## Limiti noti

- Il percentile viene dalla distribuzione normale – per test asimmetrici (i tempi del TMT) è corretto solo il percentile della tabella normativa.
- Gli intervalli di confidenza sono asintotici o approssimati – con campioni piccoli (fino a 10–20 casi) considerali solo indicativi.
- Un compito a parole o da una foto (un problema di un libro di testo) non è ancora supportato – i valori vanno nel modulo.

Generato dall'app Mathtrace