Mathtrace – manuale

II. Algebra lineare e geometria

Indice

II. Algebra lineare e geometria

20. Calcoli geometrici

21. Matrici

22. Vettori

23. Rette e piani

24. Problemi di costruzione

20. Calcoli geometrici

Perimetri e aree delle figure, volumi e superfici dei solidi si calcolano con un modulo come le altre applicazioni (Applicazioni → Geometria): scegli la figura e cosa cerchi, e inserisci le dimensioni con le unità. Figure: quadrato, rettangolo, triangolo (un lato e la sua altezza, o tre lati – la formula di Erone), parallelogramma, rombo, trapezio, poligono regolare, cerchio, corona circolare, arco e settore, il teorema di Pitagora e i triangoli simili; solidi: cubo, parallelepipedo rettangolo, prisma, cilindro, piramide a base quadrata, cono e sfera.

Lo svolgimento scrive la formula, sostituisce e calcola; quando serve un valore intermedio (l'apotema di un cono, l'apotema di una piramide), viene per primo. Funziona anche al contrario – il raggio dall'area, lo spigolo dal volume, un cateto dall'ipotenusa. Il risultato è esatto con π e radici e approssimato (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Le unità vengono convertite (cm in dm, dm³ in litri).

Esempi

L'area di un cerchio – esatta con π e approssimata.

Input: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Risultato

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Passaggi

- Una circonferenza è l'insieme dei punti a distanza r dal centro, un cerchio la circonferenza con il suo interno. Circonferenza o = 2πr = πd, area S = πr². Il numero π ≈ 3,14159 è la circonferenza diviso il diametro – il risultato esatto (con π) e approssimato. Formule
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Incognita S; dati: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Sostituiamo: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Al contrario: il raggio dall’area.

Input: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Risultato

$$r \approx 3{,}989\,\text{cm}$$

Passaggi

- Una circonferenza è l’insieme dei punti a distanza r dal centro, un cerchio la circonferenza con il suo interno. Circonferenza o = 2πr = πd, area S = πr². Il numero π ≈ 3,14159 è la circonferenza diviso il diametro – il risultato esatto (con π) e approssimato. Formule
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Incognita r; dati: $S = 50\,\text{cm}^2$
- Ricaviamo l’incognita: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Sostituiamo: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\text{cm}$

Un triangolo da tre lati – la formula di Erone.

Input: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Risultato

$$S = 6\,\text{cm}^2$$

Passaggi

- L’area di un triangolo è metà di un lato per la sua altezza: S = a·v$_a$/2. Dai tre lati con la formula di Erone S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), dove s = (a + b + c)/2 è il semiperimetro. I lati devono soddisfare la disuguaglianza triangolare – due qualsiasi insieme più lunghi del terzo. Formule
  $o = a + b + c$
  $S = \frac{a v_a}{2}$
  $s = \frac{a + b + c}{2}$
  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- Incognita S; dati: $a = 3\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 5\,\text{cm}$
- Sostituiamo: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\text{cm}$
- Sostituiamo: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\text{cm}^2$

Un cateto dall’ipotenusa.

Input: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Risultato

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Passaggi

- In un triangolo rettangolo il quadrato dell’ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti: c² = a² + b². L’ipotenusa c sta di fronte all’angolo retto ed è il lato più lungo; un cateto è b = √(c² − a²). Formule
  $c^2 = a^2 + b^2$
- Incognita b; dati: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Ricaviamo l’incognita: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Sostituiamo: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

La superficie di un cono – prima l’apotema.

Input: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Risultato

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Passaggi

- Un cono ha una base circolare di raggio r e l’altezza v. Il suo volume è un terzo di quello del cilindro: V = πr²v/3. L’apotema s è l’ipotenusa con i cateti r e v; la superficie laterale è un settore circolare S_{pl} = πrs, superficie S = πr² + πrs. Formule
  $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$
  $s^2 = r^2 + v^2$
  $S_{pl} = \pi r s$
  $S = \pi r^2 + S_{pl}$
- Incognita S; dati: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Ricaviamo l’incognita: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Sostituiamo: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Sostituiamo: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Sostituiamo: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Il volume di un cubo in litri.

Input: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Risultato

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Passaggi

- Un cubo ha sei facce quadrate uguali con spigolo a. Volume V = a³, superficie S = 6a², diagonale del cubo u = a√3. Lo spigolo dal volume è la sua radice cubica: a = ∛V. Formule
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Incognita V; dati: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Sostituiamo: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Convertiamo le unità: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Limiti noti

- Manca ancora uno schizzo della figura con le sue dimensioni.

21. Matrici

Scrivi una matrice tra parentesi quadre come in Matlab: elementi separati da spazi, righe da un punto e virgola o da un a capo. Un elemento può essere una frazione, una radice o una lettera. Il tasto con la griglia nella scheda f(x) apre una tabella da compilare cella per cella – o in cui incollare dagli appunti (celle copiate da Excel o Fogli Google) o caricare da un file CSV.

Per una sola matrice un chip dice cosa calcolare: il determinante (2×2 con la formula, 3×3 con la regola di Sarrus, altrimenti con lo sviluppo lungo una riga o una colonna o riducendo a una matrice triangolare – anche il metodo è un chip), l'inversa (2×2 con la formula, altrimenti con l'eliminazione di Gauss–Jordan con l'identità accanto), il rango (riduzione a scala) o la trasposta.

Dai un nome a più matrici con lettere maiuscole, ciascuna su una riga, e scrivi nell'ultima riga cosa calcolare: una somma, una differenza, un multiplo, un prodotto (riga per colonna, con le dimensioni controllate), una potenza, la trasposta A^T, l'inversa A^-1, det(A), rank(A) – o un'equazione matriciale AX = B o XA = B, che l'app risolve con l'inversa. Un sistema di equazioni dato da una matrice (una matrice completa, Ax = b) è trattato nel capitolo Sistemi di equazioni.

Se una matrice contiene un parametro (una lettera), l'app discute il suo rango secondo i valori del parametro proprio come per un sistema – riduzione a scala, i valori critici sostituiti. Per un'inversa calcola prima il determinante e la condizione per quali valori del parametro non è nullo (l'inversa esiste). Un'inversa 3×3 o più grande si calcola con l'eliminazione di Gauss–Jordan o – secondo il chip – con la matrice aggiunta (complementi algebrici, A^{-1} = adj A / det A).

Per una matrice quadrata puoi calcolare anche autovalori e autovettori: il polinomio caratteristico det(A − λE) è scritto come un determinante, scomposto, e le sue radici sono gli autovalori (un fattore di secondo grado con il discriminante, anche complessi; uno cubico senza radice razionale in modo approssimato). Gli autovettori sono le soluzioni di (A − λE)v = o con operazioni sulle righe fino alla forma a scala ridotta; per ogni autovalore l'app dà la sua molteplicità algebrica e geometrica. Il chip Diagonalizzazione costruisce anche P e D ($A = PDP^{-1}$), o spiega perché la matrice non è diagonalizzabile. La decomposizione ai valori singolari $A = U\Sigma V^{T}$ (SVD) e la pseudoinversa A^{+} funzionano per una matrice di qualsiasi dimensione: la SVD tramite gli autovalori di $A^{T}A$ (AA^{T} per una matrice larga), gli autovettori normalizzati e l'altro lato calcolato da essi; la pseudoinversa di una matrice a rango pieno con la formula $(A^{T}A)^{-1}A^{T}$, altrimenti dalla decomposizione $A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T}$ – e se i valori singolari fossero radicali annidati, esattamente dalla fattorizzazione di rango $A = BC$ con $A^{+} = C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}$.

L'app calcola anche autovalori e diagonalizzazione di una matrice con un parametro (fino a 3×3): scompone il polinomio caratteristico con il parametro, scrive gli autovalori come sue funzioni e trova i valori speciali del parametro – dove due autovalori coincidono (due fattori hanno una radice comune, un fattore di secondo grado un discriminante nullo) o dove il calcolo generale degli autovettori dividerebbe

per zero; dice anche per quali valori gli autovalori sono complessi. Il caso generale si risolve con il parametro, i valori speciali si sostituiscono e si discutono a parte. Il chip Diagonalizzazione risponde poi per quali valori del parametro la matrice è diagonalizzabile.

La forma di Jordan di una matrice quadrata (il chip Forma di Jordan, scritto jordan(A)) viene dai ranghi delle potenze $(A - \lambda E)^k$: danno il numero e le dimensioni dei blocchi di Jordan, le catene di autovettori generalizzati si costruiscono dal vettore in cima fino a un autovettore e P, J vengono verificate ($A = PJP^{-1}$). La forma di Jordan dà anche la potenza A^n per un n generico (il chip Potenza A^n, scritto A^n; la potenza di un blocco con il binomio di Newton, un risultato come $2^{n-1}(n + 2)$) o per un numero grande (A^10), e l'esponenziale di matrice e^{At} ed e^A (il chip Esponenziale di matrice, scritto e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – utile per i sistemi di equazioni differenziali $x' = Ax$; gli autovalori complessi si riscrivono come coseni e seni. Il polinomio minimo (il chip Polinomio minimo, scritto minpoly(A)) si trova provando i candidati – i divisori del polinomio caratteristico – dal grado più basso; l'app ricorda il teorema di Cayley–Hamilton $p(A) = O$ e per una matrice invertibile ricava l'inversa da $m(A) = O$.

Come inserirlo

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Elementi separati da spazi, righe da un punto e virgola (o su nuove righe dentro le parentesi).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Matrici con nome una per riga, il calcolo nell'ultima riga.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinante, inversa e trasposta, rango.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Autovalori, diagonalizzazione, decomposizione ai valori singolari, pseudoinversa.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Forma di Jordan, una potenza generica, l'esponenziale di matrice, il polinomio minimo.

Esempi

Un determinante 3×3 con la regola di Sarrus.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinante

Risultato

$$\det A = -3$$

Passaggi

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 \\ &= -3\end{aligned}$$

Sviluppo lungo la colonna con più zeri.

Input: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Sviluppo di Laplace

Risultato

$$\det A = 25$$

Passaggi

- Sviluppo secondo la colonna 2, ogni elemento per il suo minore con il segno della sua posizione

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (-5) \\ &= 25\end{aligned}$$

L’inversa con l’eliminazione di Gauss–Jordan.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Matrice inversa

Risultato

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Passaggi

- Scriviamo accanto alla matrice la matrice identità. Le operazioni sulle righe trasformano la parte sinistra nell’identità

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- L’identità a sinistra, l’inversa a destra

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango con la riduzione a scala.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Rango

Risultato

$$h(A) = 2$$

Passaggi

- Operazioni sulle righe

  $R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Operazioni sulle righe $R_3 \to R_3 - R_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice in forma a scala

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il rango è il numero di righe non nulle della forma a scala: $h(A) = 2$

Il rango di una matrice con un parametro.

Input: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Rango

Risultato

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Passaggi

- La matrice contiene il parametro a – un numero reale qualsiasi. Il rango può dipendere dal suo valore, quindi esaminiamo i casi.
- Operazioni sulle righe $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Proseguiamo con l'elemento $1-a$, che può essere zero – supponiamo quindi $a \neq 1$; il caso $a = 1$ si tratta a parte.
- Operazioni sulle righe $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Operazioni sulle righe $R_3 \to \frac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Proseguiamo con l'elemento $a+2$, che può essere zero – supponiamo quindi $a \neq -2$; il caso $a = -2$ si tratta a parte.
- La matrice in forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Per $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Per $a = 1$: $h(A) = 1$ – la matrice con il valore inserito

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per $a = -2$: $h(A) = 2$ – la matrice con il valore inserito

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L’inversa con un parametro tramite la matrice aggiunta.

Input: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Matrice aggiunta

Risultato

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Condizioni: $a \neq 1$

Passaggi

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$ – l’inversa esiste esattamente quando il determinante non è zero, cioè per $a \neq 1$
- I complementi algebrici degli elementi (con il segno (−1)^(i+j))

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- La matrice aggiunta è la trasposta della matrice dei complementi algebrici; la dividiamo per il determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Prodotto, trasposta, multiplo e differenza di matrici.

Input: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Risultato

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Passaggi

- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Trasponiamo, le righe diventano colonne
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Moltiplichiamo ogni elemento per il numero
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Sommiamo (sottraiamo) gli elementi nelle stesse posizioni
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Un’equazione matriciale AX = B tramite l’inversa.

Input: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Risultato

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Passaggi

- Moltiplichiamo l'equazione per l'inversa dalla parte dell'incognita: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, l'inversa esiste.
- Per una matrice 2×2 scambiamo gli elementi sulla diagonale principale, cambiamo il segno degli altri due e dividiamo per il determinante

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori e gli autovettori di una matrice simmetrica.

Input: `[2 1; 1 2]` Autovalori

Risultato

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):

  $$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 3$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 3$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Autovalori irrazionali con il discriminante.

Input: `[1 2; 3 4]` Autovalori

Risultato

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto:
$\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Le radici del fattore di secondo grado con il discriminante

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

La diagonalizzazione A = PDP⁻¹.

Input: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalizzazione

Risultato

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = 11$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = 11$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 − il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- La matrice ha tanti autovettori linearmente indipendenti quante righe, quindi è diagonalizzabile: P ha gli autovettori come colonne, D gli autovalori sulla diagonale nello stesso ordine, e $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice è simmetrica: i suoi autovalori sono reali e gli autovettori di autovalori diversi sono ortogonali. Normalizzati, rendono P ortogonale, $P^{-1} = P^T$

Una matrice non diagonalizzabile.

Input: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalizzazione

Risultato

La matrice non si può diagonalizzare – non ha abbastanza autovettori linearmente indipendenti.

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 2, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = 2$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = 2$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Per $\lambda = 1$ la molteplicità geometrica 1 è minore di quella algebrica 2 – la matrice non ha abbastanza autovettori linearmente indipendenti, quindi non si può diagonalizzare.

Autovalori di una matrice con un parametro – i valori speciali e i loro casi.

Input: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Autovalori

Risultato

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Valori particolari del parametro – lì coincidono due autovalori, oppure il calcolo degli autovettori dividerebbe per zero: $a = 1,\ a = 2$. Sono casi a sé ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Il caso generale $a \neq 1,\ a \neq 2$: gli autovalori sono distinti, quindi la matrice ha tanti autovettori linearmente indipendenti quante righe ed è diagonalizzabile.
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = a$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_3 = a$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Il caso $a = 1$ – inserito nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda -$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 2, geometrica 1 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Gli autovettori per $\lambda_3 = 2$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_3 = 2$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Per $\lambda = 1$ la molteplicità geometrica 1 è minore di quella algebrica 2 – la matrice non ha abbastanza autovettori linearmente indipendenti, quindi non si può diagonalizzare.
- Il caso $a = 2$ – inserito nella matrice
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- Il polinomio caratteristico, scomposto
  $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$
- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
  $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 1$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_2 = 2$ (molteplicità algebrica 2, geometrica 2 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Per quali valori del parametro la matrice è diagonalizzabile.

Input: `[0 1; a 0]` Diagonalizzazione

Risultato

La matrice è diagonalizzabile per: $a \neq 0$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Le radici del fattore di secondo grado con il discriminante

$$\lambda^2 - a = 0 : \ D = 4a, \ \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \ \sqrt{a}$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \ \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Valori particolari del parametro – lì coincidono due autovalori, oppure il calcolo degli autovettori dividerebbe per zero: $a = 0$. Sono casi a sé ($a = 0 : \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Per $a \in (-\infty; \ 0)$ il discriminante è negativo e gli autovalori sono complessi coniugati (diagonalizzabile solo nei numeri complessi).
- Il caso generale $a \neq 0$: gli autovalori sono distinti, quindi la matrice ha tanti autovettori linearmente indipendenti quante righe ed è diagonalizzabile.
- Il caso $a = 0$ – inserito nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 0$ (molteplicità algebrica 2, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

- Per $\lambda = 0$ la molteplicità geometrica 1 è minore di quella algebrica 2 – la matrice non ha abbastanza autovettori linearmente indipendenti, quindi non si può diagonalizzare.

La decomposizione ai valori singolari di una matrice 2×3.

Input: `[3 2 2; 2 3 -2]` Decomposizione ai valori singolari (SVD)

Risultato

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Passaggi

- La decomposizione ai valori singolari $A = U\Sigma V^T$: la matrice ha più colonne che righe, quindi partiamo dalla più piccola AA^T – i suoi autovalori sono i quadrati dei valori singolari, i suoi autovettori formano U. Calcoliamo AA^T
- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$$

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 25$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_1 = 25$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 9$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta

$$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori per $\lambda_2 = 9$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- I valori singolari sono le radici quadrate degli autovalori, in ordine decrescente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ ha le dimensioni di A

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori normalizzati (divisi per il loro modulo); quelli di un autovalore multiplo prima ortogonalizzati con il procedimento di Gram–Schmidt. Sono le colonne di

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- Le colonne di V per i valori singolari non nulli, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$

- Le colonne mancanti di V completano una base ortonormale – soluzioni normalizzate di $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonali alle colonne precedenti

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- La decomposizione ai valori singolari

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

La pseudoinversa di una matrice con colonne indipendenti.

Input: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinversa

Risultato

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Passaggi

- Le colonne della matrice sono linearmente indipendenti (rango 2 = numero di colonne), quindi $A^T A$ è invertibile e la pseudoinversa è data dalla formula:
- $A^{+} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$
- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$
- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$

- $\det A^T A = 3 \neq 0$, l'inversa esiste.
- Per una matrice 2×2 scambiamo gli elementi sulla diagonale principale, cambiamo il segno degli altri due e dividiamo per il determinante

  $\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$

La pseudoinversa di una matrice singolare dalla sua decomposizione ai valori singolari.

Input: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Risultato

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Passaggi

- La matrice non ha rango pieno (rango 1), quindi la pseudoinversa si ottiene dalla decomposizione ai valori singolari: $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- La decomposizione ai valori singolari $A = U\Sigma V^T$: gli autovalori di A^TA sono i quadrati dei valori singolari, i suoi autovettori formano V. Calcoliamo A^TA
- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)
  $$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$
- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale
  $$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$
- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra
  $$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$
- Il polinomio caratteristico, scomposto
  $$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda-25) = 0$$
- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
  $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 25$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$\left(A^TA-\lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_1 = 25$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Gli autovettori per $\lambda_2 = 0$ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo; la matrice nella forma a scala ridotta
  $$\left(A^TA-\lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori per $\lambda_2 = 0$ (molteplicità algebrica 1, geometrica 1 – il numero di incognite libere)
  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- I valori singolari sono le radici quadrate degli autovalori, in ordine decrescente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ ha le dimensioni di A
  $$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Gli autovettori normalizzati (divisi per il loro modulo); quelli di un autovalore multiplo prima ortogonalizzati con il procedimento di Gram–Schmidt. Sono le colonne di
  $$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
  $$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Le colonne di U per i valori singolari non nulli, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$
  $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Le colonne mancanti di U completano una base ortonormale – soluzioni normalizzate di $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonali alle colonne precedenti
  $$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- La decomposizione ai valori singolari
  $$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Σ⁺ è Σ trasposta con i valori singolari non nulli invertiti
  $$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- La pseudoinversa
  $$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{} \end{pmatrix}$$

La pseudoinversa dalla fattorizzazione di rango A = BC.

Input: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinversa

Risultato

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Passaggi

- La matrice non ha rango pieno (rango 2) e i suoi valori singolari sarebbero radicali annidati, quindi la pseudoinversa si calcola esattamente dalla fattorizzazione di rango A = BC – B le colonne linearmente indipendenti di A, C le righe non nulle della sua forma a scala ridotta.
- Riduciamo la matrice alla forma a scala ridotta; i pivot sono nelle colonne $1, 2$, B è formata da queste colonne di A e C dalle righe non nulle della matrice ridotta

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (- \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, l'inversa esiste.
- Per una matrice 2×2 scambiamo gli elementi sulla diagonale principale, cambiamo il segno degli altri due e dividiamo per il determinante

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Moltiplichiamo righe per colonne (dimensioni $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 7\cdot 7 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 + 7\cdot 8 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 + 8\cdot 7 & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 \end{pmatrix} = \left(\right.$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66\cdot 93 - 78\cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, l'inversa esiste.
- Per una matrice 2×2 scambiamo gli elementi sulla diagonale principale, cambiamo il segno degli altri due e dividiamo per il determinante

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- La pseudoinversa

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Una forma di Jordan con due blocchi di un autovalore.

Input: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Forma di Jordan

Risultato

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Per $\lambda = 2$ (molteplicità algebrica 3) calcoliamo le potenze di $A - \lambda E$ e i loro ranghi h finché il rango non è sceso della molteplicità algebrica

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Per $\lambda = 2$ ci sono tanti blocchi di Jordan quanti autovettori indipendenti: $n - h(A-\lambda E)$ = 2. Il numero di blocchi di dimensione almeno k è $h_{k-1} - h_k$, quindi le dimensioni dei blocchi sono $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Una catena di lunghezza 2 per $\lambda = 2$: scegliamo il suo vettore di testa nel nucleo di $(A-\lambda E)^k$ fuori dal nucleo della potenza inferiore e dallo spazio generato dalle catene precedenti, e lo moltiplichiamo per $A - \lambda E$ fino a un autovettore

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Un blocco di dimensione 1 per $\lambda = 2$ dà un autovettore

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La forma di Jordan: le colonne di P sono i vettori delle catene (ciascuna dal suo autovettore in su), J ha gli autovalori sulla diagonale e degli uno sopra di essa dentro i blocchi; $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La potenza A^n tramite la forma di Jordan.

Input: `[3 1; -1 1]` Potenza A^n

Risultato

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Per $\lambda = 2$ (molteplicità algebrica 2) calcoliamo le potenze di $A - \lambda E$ e i loro ranghi h finché il rango non è sceso della molteplicità algebrica

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Per $\lambda = 2$ ci sono tanti blocchi di Jordan quanti autovettori indipendenti: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Il numero di blocchi di dimensione almeno k è $h_{k-1} - h_k$, quindi le dimensioni dei blocchi sono 2: $J_2(2)$
- Una catena di lunghezza 2 per $\lambda = 2$: scegliamo il suo vettore di testa nel nucleo di $(A - \lambda E)^k$ fuori dal nucleo della potenza inferiore e dallo spazio generato dalle catene precedenti, e lo moltiplichiamo per $A - \lambda E$ fino a un autovettore

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- La forma di Jordan: le colonne di P sono i vettori delle catene (ciascuna dal suo autovettore in su), J ha gli autovalori sulla diagonale e degli uno sopra di essa dentro i blocchi; $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo la potenza tramite la forma di Jordan: $A^n = PJ^nP^{-1}$. La potenza di un blocco viene dal teorema binomiale – l'elemento d posti sopra la diagonale è $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Moltiplichiamo le matrici

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$$

L'esponenziale e^{At} – la soluzione del sistema x' = Ax.

Input: `A = [0 1; -2 -3]`

`e^(At)`

Risultato

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$

- Un determinante 2×2 è il prodotto sulla diagonale principale meno il prodotto sull'altra

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):

  $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Un blocco di dimensione 1 per $\lambda = -2$ dà un autovettore

  $(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Un blocco di dimensione 1 per $\lambda = -1$ dà un autovettore

  $(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Tutti i blocchi di Jordan hanno dimensione 1, quindi J è diagonale e la matrice è diagonalizzabile. Le colonne di P sono gli autovettori e $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcoliamo l'esponenziale tramite la forma di Jordan: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. In un blocco l'elemento d posti sopra la diagonale è $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

- Moltiplichiamo le matrici

  $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$

- Per t = 1

  $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$

Il polinomio minimo, il teorema di Cayley–Hamilton e l'inversa da esso.

Input: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Polinomio minimo

Risultato

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Passaggi

- Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica det(A − λE) = 0 (E la matrice identità). Sottraiamo λ sulla diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Il polinomio caratteristico, scomposto

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 2)^2(\lambda$$

- Gli autovalori (una radice multipla ha più nomi):
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e ha tutte le sue radici. I candidati dal grado più basso
$(\lambda - 2)(\lambda - 3),\ (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$
- Sostituiamo la matrice – non è la matrice nulla, quindi questo candidato non è il polinomio minimo.

$$q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3):\ q(A) = (A - 2E)(A - 3E) =$$

- Sostituiamo la matrice – la matrice nulla; il più basso candidato così è il polinomio minimo.

$$q(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3):\ q(A) = (A - 2E)^2(A - 3E)$$

- Il teorema di Cayley–Hamilton: ogni matrice quadrata è radice del suo polinomio caratteristico
$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$
- La matrice è invertibile (il termine noto del polinomio minimo non è zero), quindi m(A) = O dà l'inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Limiti noti

- Matrici fino a 6×6.
- Autovalori, diagonalizzazione, decomposizione ai valori singolari, forma di Jordan, potenza A^n, esponenziale e polinomio minimo per matrici fino a 4×4 e senza parametro; autovalori e diagonalizzazione con un parametro fino a 3×3 (nessun fattore cubico con il parametro), gli autovettori del caso generale solo per autovalori senza radice del parametro.
- La forma di Jordan con i passaggi solo per autovalori razionali, altrimenti solo il risultato; una potenza generica A^n ed e^{At} richiedono autovalori esatti (un fattore cubico senza radice razionale: solo e^A in modo approssimato).

22. Vettori

Scrivi un vettore con punti e virgola, ciascuno su una riga: u = (1; 2; 3); il suo nome può avere un indice (F_1 = (3; 4)). Scrivi un punto con parentesi quadre: A[1; 2; 3]. I vettori nel piano hanno due coordinate, nello spazio tre.

Un singolo punto nel piano viene collocato nel suo quadrante (o su un asse) dai segni delle coordinate e disegnato. Con due punti, accanto alla distanza |AB| c'è il chip «Punto medio» – le coordinate del punto medio sono le medie di quelle degli estremi. Funzionano anche le parole: «midpoint AB, A[1; 2], B[5; 6]», «distance between A[1; 2] and B[4; 6]», «quadrant A[3; −2]».

Senza un'altra riga il chip dice cosa calcolare: il modulo, la somma (la risultante delle forze con modulo e direzione), il prodotto scalare (zero significa vettori perpendicolari), l'angolo (dal suo coseno, esatto per i valori noti, altrimenti in gradi e primi), il prodotto vettoriale (con il determinante con i, j, k), l'area di un parallelogramma e di un triangolo, il volume di un parallelepipedo e di un tetraedro con il prodotto misto, o la dipendenza lineare. Per i punti l'app costruisce prima i vettori AB, AC, AD dal primo punto: due punti danno la distanza, tre un triangolo, quattro un tetraedro.

Nell'ultima riga puoi scrivere un'espressione: u + 2v, u·v (o u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| e il vettore AB da due punti. Il grafico mostra i vettori come frecce – nel piano con una griglia, nello spazio con assi che ruoti con il dito; un'area è ombreggiata e un angolo segnato da un arco.

Come inserirlo

`u = (1; 2; 3)`	Un vettore con punti e virgola, ciascuno su una riga.
`A[1; 2; 3]`	Un punto con parentesi quadre.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Un'espressione con vettori nell'ultima riga.

Esempi

Il quadrante di un punto.

Input: `A[3; -2]`

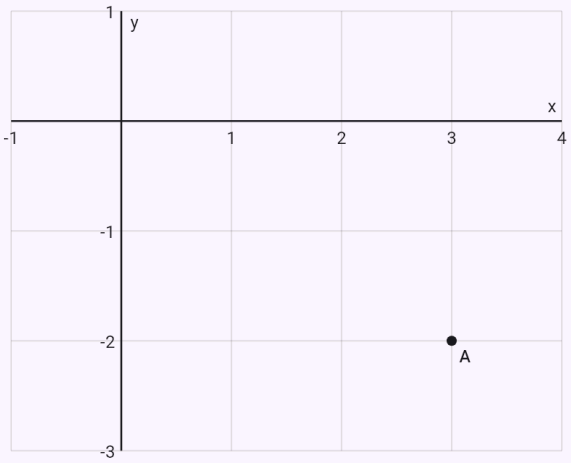
Risultato

$A \in \text{IV}$

Passaggi

- Il punto $A[3;\ -2]$ ha x positiva e y negativa – si trova nel IV quadrante (in basso a destra).

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Il punto medio di un segmento.

Input: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Risultato

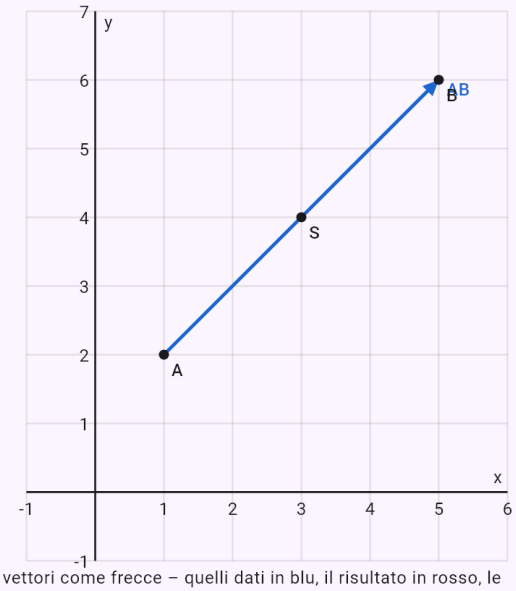
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Passaggi

- Le coordinate del punto medio sono le medie di quelle degli estremi

$$S_{AB} = \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] = \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] = [3;\ 4]$$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Il modulo di un vettore.

Input: `u = (1; 2; 3)`

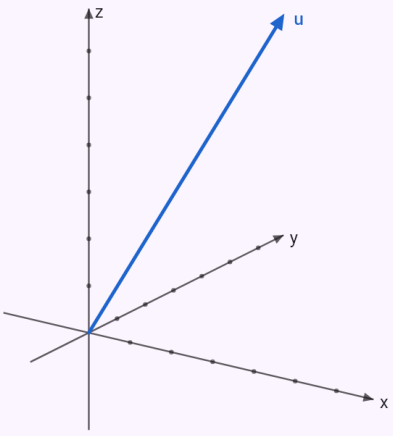
Risultato

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Passaggi

- Il modulo del vettore: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

L'angolo di due vettori.

Input: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

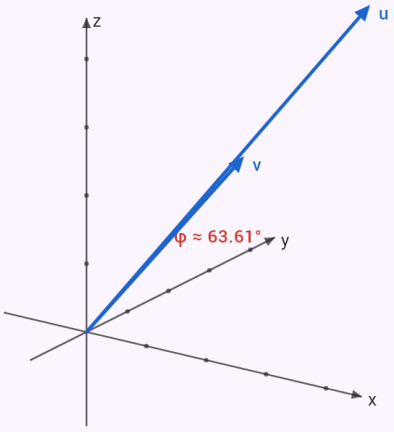
Risultato

$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Passaggi

- Il prodotto scalare è la somma dei prodotti delle coordinate corrispondenti:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- Il modulo del vettore: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Il modulo del vettore:
  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- L'angolo dei vettori dal prodotto scalare quindi
  $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$
  $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

Una somma e un multiplo di vettori.

Input: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

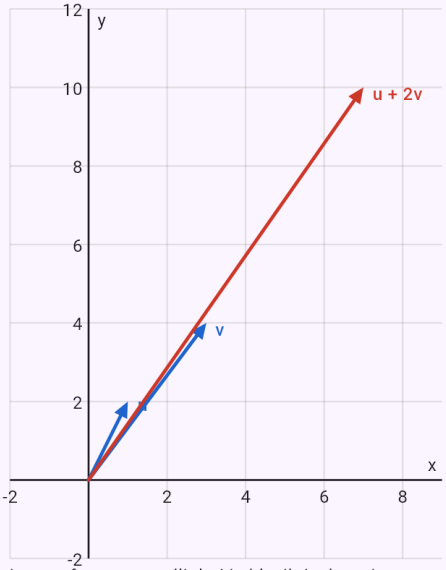
Risultato

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Passaggi

- Un multiplo di un vettore – ogni coordinata per il numero:
  $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- I vettori si sommano (sottraggono) coordinata per coordinata: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Il prodotto vettoriale.

Input: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Prodotto vettoriale

Risultato

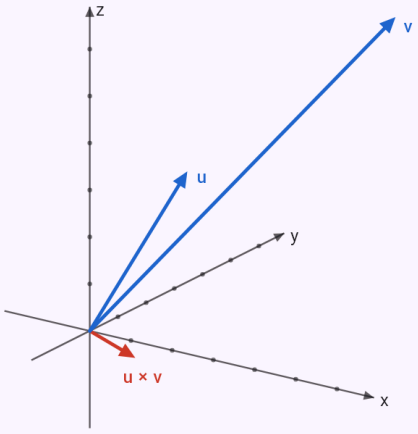
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Passaggi

- Il prodotto vettoriale sviluppando il determinante secondo la prima riga

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

L'area di un triangolo da tre punti.

Input: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Risultato

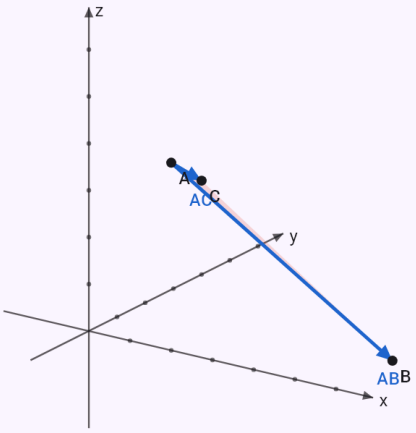
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Passaggi

- Un vettore da due punti – le coordinate del punto finale meno quelle del punto iniziale
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$
- Un vettore da due punti – le coordinate del punto finale meno quelle del punto iniziale
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$
- Il prodotto vettoriale sviluppando il determinante secondo la prima riga
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- Il modulo del vettore
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- L'area del parallelogramma è il modulo del prodotto vettoriale (nel piano il valore assoluto del determinante):
  $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Il triangolo è metà del parallelogramma:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

Il volume di un parallelepipedo e di un tetraedro con il prodotto misto.

Input: `u = (1; 0; 2)`

`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Risultato

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Passaggi

- Il prodotto misto come determinante delle coordinate dei vettori

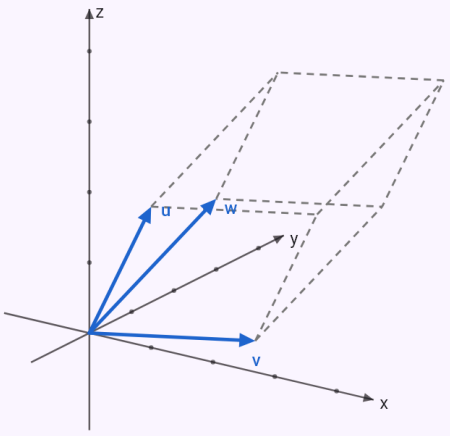
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$- 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0$$
$$= 13$$

- Il volume del parallelepipedo è il valore assoluto del prodotto misto: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Il tetraedro ha un sesto del volume del parallelepipedo: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

La risultante di due forze.

Input: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Somma (risultante)

Risultato

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Passaggi

- I vettori si sommano (sottraggono) coordinata per coordinata

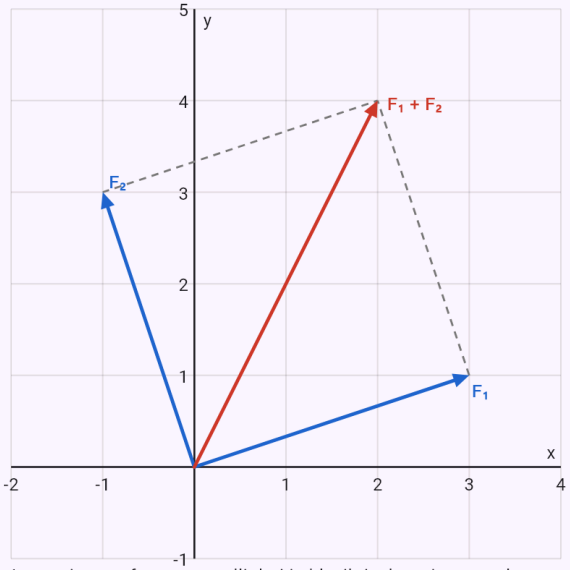
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

- Il modulo del vettore

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- La direzione della risultante – il suo angolo con il semiasse x positivo: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2}, \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

La dipendenza lineare di tre vettori.

Input: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Dipendenza lineare

Risultato

I vettori sono linearmente dipendenti.

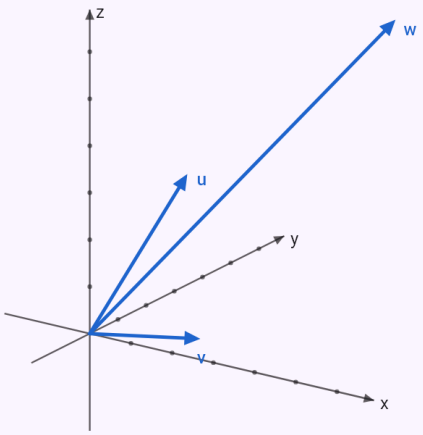
Passaggi

- Regola di Sarrus, i prodotti lungo le diagonali principali meno quelli lungo le altre

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$
$$= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24$$
$$= 0$$

- Il determinante delle coordinate dei vettori: $D = 0$. Un determinante non nullo significa vettori linearmente indipendenti, nullo dipendenti.

Grafico



I vettori come frecce – quelli dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

Limiti noti

- Le coordinate sono numeri (nessun parametro), al massimo sei; il grafico solo nel piano e nello spazio.

23. Rette e piani

Geometria analitica nel piano e nello spazio. Scrivi un punto come per i vettori: A[1; 2]. Dai un nome a una retta o a un piano e scrivi la sua equazione dopo i due punti, ciascuno su una riga: generale (p: 2x + 3y − 5 = 0), esplicita (p: y = 2x + 1), parametrica (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) o vettoriale (p: X = A + t·u). Nello spazio un'equazione in x, y, z è un piano (ρ: x + y + z = 1), così come le equazioni parametriche con due parametri; scrivi una retta nello spazio in forma parametrica o come intersezione di due piani (p: x + y + z = 1, x − y = 0). I tasti p:, q: e ρ: sono sulla tastiera delle funzioni.

Un chip dice cosa calcolare – l'offerta segue ciò che inserisci: una retta o un piano riceve tutte le forme della sua equazione, due la loro posizione reciproca con l'intersezione, l'angolo e la distanza, un punto e una retta (un piano) la distanza, la perpendicolare e la parallela per il punto, la proiezione e il punto simmetrico. Due o tre punti da soli ricevono tra i chip dei vettori la retta AB, l'asse del segmento e il baricentro di un triangolo con le altezze (nello spazio il piano ABC).

L'app calcola una distanza con la formula o – con il chip «Con la proiezione» – come in un'esercitazione: la perpendicolare per il punto, il suo piede e la lunghezza del segmento. Per rette sghembe trova anche la loro perpendicolare comune. Gli angoli sono esatti per i valori noti, altrimenti in gradi e primi. Puoi anche scrivere il compito nell'ultima riga: angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). Il grafico mostra le rette e i piani; nello spazio lo ruoti con il dito.

Trasformazioni geometriche nel piano: una traslazione di un vettore, una rotazione attorno a un centro di un angolo (in gradi, positivo in senso antiorario), un'omotetia con un centro e un rapporto, e simmetrie centrali e assiali. Si possono trasformare un punto, un poligono (punti in fila: translation(A, B, C, u) è un triangolo), una retta e una circonferenza (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Scrivi il compito nell'ultima riga, o scegli il chip «Traslazione», «Rotazione», «Omotetia» o «Simmetria» – allora l'angolo e il rapporto vanno su una riga a parte (φ = 90, κ = 2) e il centro è il punto S. I passaggi mostrano la trasformazione in coordinate e l'immagine di ogni punto, per una retta le immagini di due punti e per una circonferenza il centro e il raggio; il grafico sia l'originale sia l'immagine.

Coniche in posizione canonica (nessun termine xy): quadrati completati fino alla forma canonica o rispetto al vertice, centro e raggio di una circonferenza, centro, semiassi, eccentricità e fuochi di un'ellisse e di un'iperbole (anche gli asintoti dell'iperbole), vertice, parametro, fuoco e direttrice di una parabola; il grafico mostra la curva con i suoi punti.

Scrivi una tangente in un punto di una conica a parole – «tangent to x^2 + y^2 = 25 at [3; 4]» – e l'app la trova con la regola dello sdoppiamento. La posizione di una conica e di una retta («position of x^2/9 + y^2/4 = 1 and y = x + 1») segue dalla sostituzione e dal discriminante: una secante, una tangente o una retta esterna, con le intersezioni. Una sfera (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) si completa a quadrati per

il centro e il raggio. Le forme di una retta comprendono la forma segmentaria x/p + y/q = 1. Le tangenti da un punto esterno («tangents to the circle x^2 + y^2 = 25 from the point [7; 1]») si cercano tra le rette per il punto con pendenza k – una tangente è quella con discriminante nullo; la retta verticale si controlla a parte. Le tangenti parallele o perpendicolari a una retta («… parallel to the line 3x + 4y = 0», «… perpendicular to the line y = x») hanno lo stesso vettore normale e una costante incognita c. Scrivi una sfera con un nome e un piano, una retta o un punto nella riga successiva: con un piano la distanza del centro si confronta con il raggio (la circonferenza della sezione con centro e raggio, un punto di tangenza o niente), le equazioni parametriche di una retta si sostituiscono e decide il discriminante, in un punto della sfera si trova il piano tangente.

Come inserirlo

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Una retta con un'equazione generale, esplicita o parametrica, ciascuna su una riga.
`p: X = A + t·u`	Una retta con un'equazione vettoriale da un punto e un vettore.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Un piano con un'equazione generale (nello spazio).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Una retta nello spazio come intersezione di due piani.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	Il compito nell'ultima riga.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Una trasformazione geometrica: le figure, poi il vettore, il centro e l'angolo o il rapporto, o il centro o l'asse di una simmetria.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Una conica – un'equazione in x e y di secondo grado.

Esempi

Tutte le forme dell'equazione di una retta dalle sue equazioni parametriche.

Input: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

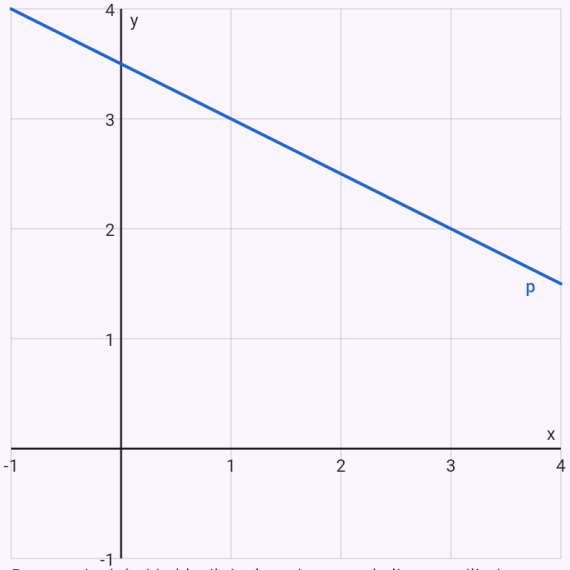
Risultato

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Passaggi

- Le equazioni parametriche danno un punto (i termini noti) e il vettore direttore (i coefficienti del parametro): $P_p[1;\ 3],\ \vec{u}_p = (2;\ -1)$
- Il vettore normale della retta è perpendicolare alla sua direzione – scambiamo le coordinate e cambiamo un segno: $\vec{u}_p = (2;\ -1) \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ 2)$
- L'equazione generale: i coefficienti sono le coordinate del vettore normale, il termine noto segue dal punto $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\ 3] :\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \ \Rightarrow \ c =$
- L'equazione esplicita – l'equazione generale risolta rispetto a y: $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Forma segmentaria – i denominatori sono le intercette sugli assi x e y: $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

L'intersezione di due rette.

Input: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Risultato

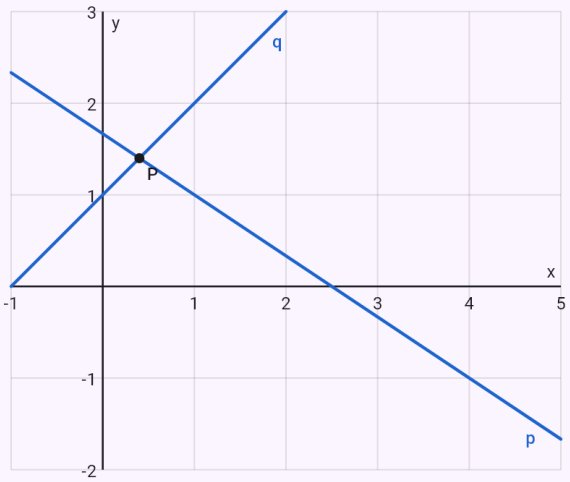
Le rette si intersecano in:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Nessun vettore è multiplo dell'altro – i due non sono paralleli
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- L'intersezione risolve il sistema delle equazioni delle due rette (regola di Cramer)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$:

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

La distanza di un punto da una retta con la formula.

Input: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

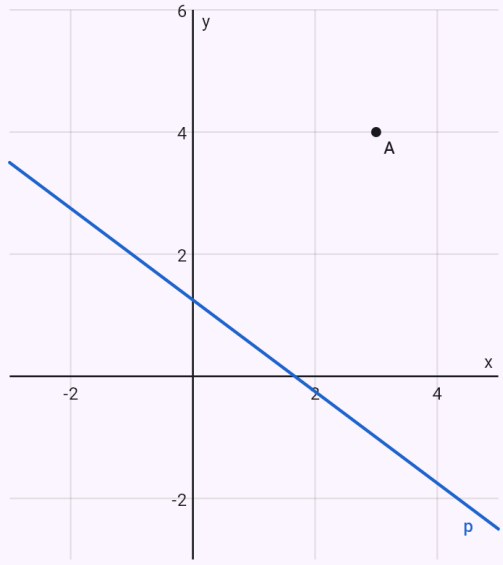
Risultato

$$v(A, p) = 4$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- La distanza del punto dalla retta
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

La stessa distanza tramite la proiezione.

Input: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Con la proiezione

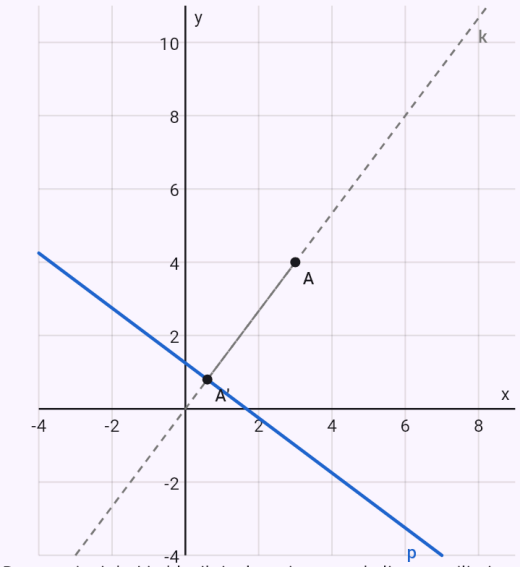
Risultato

$$v(A, p) = 4$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\, 4)$
- La perpendicolare per A alla retta p – il vettore direttore di una retta è il vettore normale dell'altra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\, 4),\; k: x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Il piede della perpendicolare A' è dove incontra p – sostituiamo e calcoliamo t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- La distanza del punto dalla retta
  $$v(A, p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Baricentro, altezze e ortocentro di un triangolo.

Input: `A[1; 2]`
`B[5; 2]`

C[3; 6] Baricentro e altezze

Risultato

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Passaggi

- Il baricentro – la media delle coordinate dei vertici

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- L'altezza da A è perpendicolare al lato opposto – il vettore del lato è la sua normale, la sua lunghezza la distanza del vertice dal lato

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$$

- L'altezza da B è perpendicolare al lato opposto – il vettore del lato è la sua normale, la sua lunghezza la distanza del vertice dal lato

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

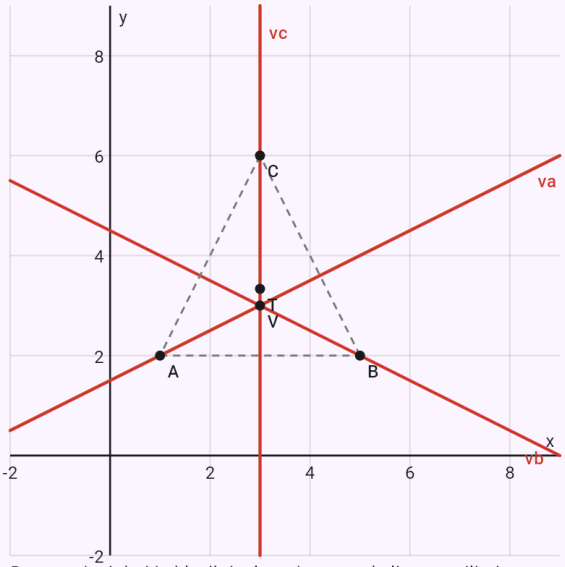
- L'altezza da C è perpendicolare al lato opposto – il vettore del lato è la sua normale, la sua lunghezza la distanza del vertice dal lato

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- L'ortocentro – l'intersezione di due altezze

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Un punto riflesso rispetto a una retta.

Input: A[1; 2]

`p: x - y = 0` Simmetria

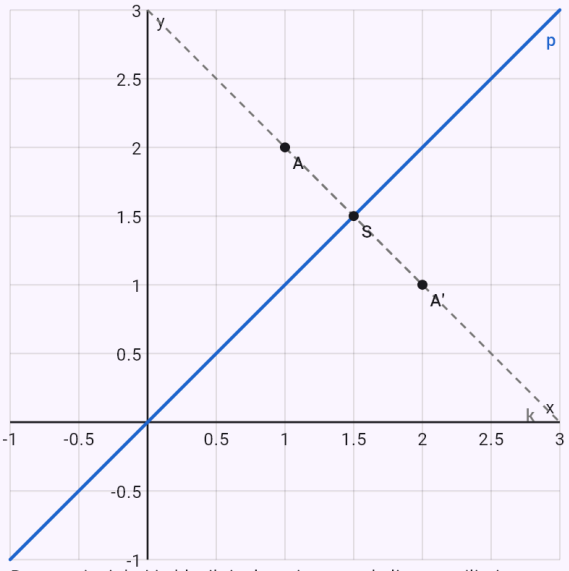
Risultato

$$A'[2;\ 1]$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- La perpendicolare per A alla retta p – il vettore direttore di una retta è il vettore normale dell'altra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Il piede della perpendicolare S è dove incontra p – sostituiamo e calcoliamo t
  $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- Il punto simmetrico: il centro (il piede della perpendicolare) è il punto medio tra il punto e la sua immagine
  $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Un triangolo traslato di un vettore.

Input: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`translation(A, B, C, u)`

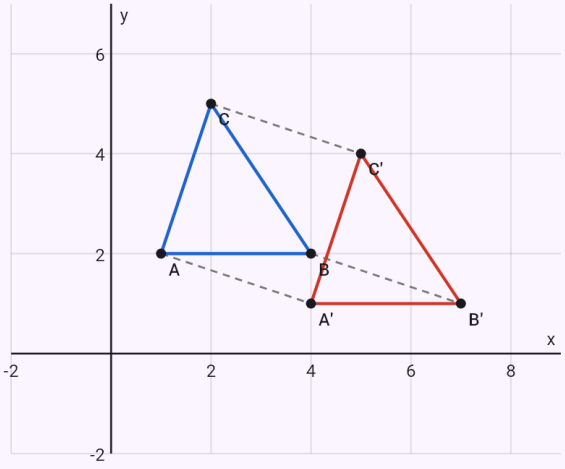
Risultato

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Passaggi

- Traslazione di un vettore: ogni punto X si sposta dello stesso vettore, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- L'immagine di un punto: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- L'immagine di un punto: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- L'immagine di un punto: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Un triangolo ruotato di 90° attorno a S.

Input: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

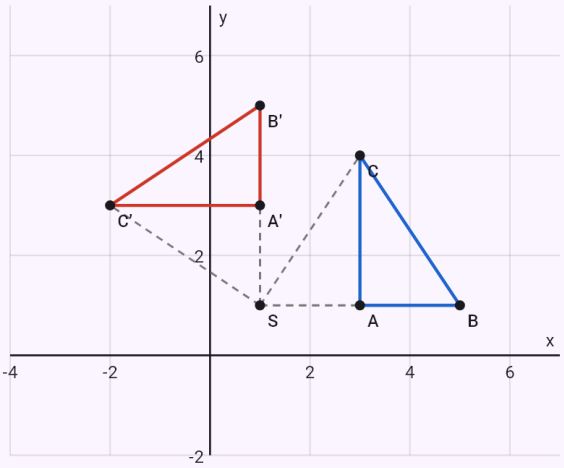
Risultato

$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$
$C'[-2;\ 3]$

Passaggi

- Rotazione attorno al centro S dell'angolo φ (positivo in senso antiorario): il vettore X − S si ruota di φ e si aggiunge al centro
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- L'immagine di un punto
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- L'immagine di un punto
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- L'immagine di un punto
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Una retta e una circonferenza in un'omotetia di rapporto 2.

Input: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

`S[0; 0]`

`homothety(p, k, S, 2)`

Risultato

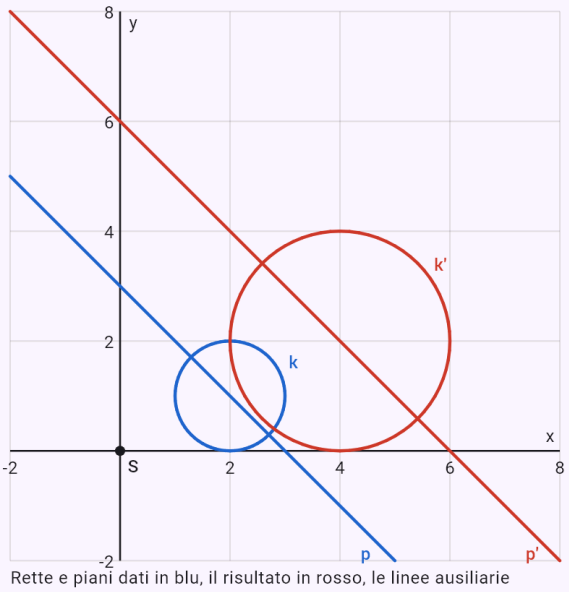
$$p' : x + y - 6 = 0$$

$$k' : (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- La circonferenza k – il suo centro e il raggio dalla forma canonica (completando i quadrati)
  $k : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Omotetia di centro S e rapporto κ: il vettore X − S si moltiplica per κ (un κ negativo mette l'immagine dall'altra parte del centro): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- L'immagine della retta p: trasformati due suoi punti, l'immagine è la retta per le loro immagini – parallela all'originale
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- Il vettore normale della retta è perpendicolare alla sua direzione – scambiamo le coordinate e cambiamo un segno: $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- L'equazione generale: i coefficienti sono le coordinate del vettore normale, il termine noto segue dal punto
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- L'immagine della circonferenza k: trasformato il centro, il raggio moltiplicato per |κ|
  $S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

Una circonferenza riflessa rispetto a una retta – l'asse scelto con il chip.

Input: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Simmetria

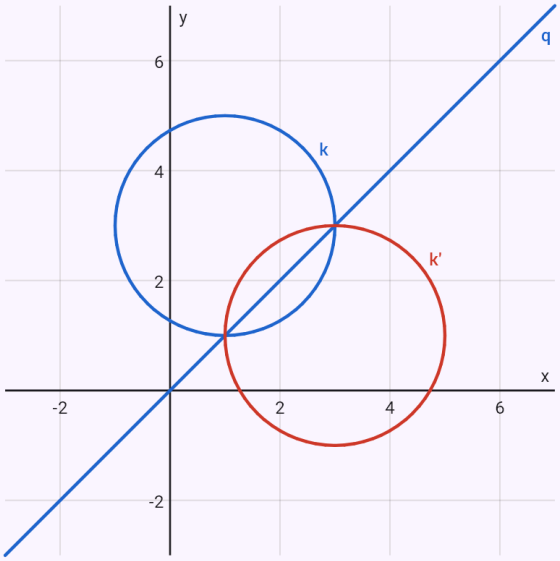
Risultato

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Passaggi

- La circonferenza k – il suo centro e il raggio dalla forma canonica (completando i quadrati)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- L'equazione esplicita riscritta come equazione generale dà il vettore normale: $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Simmetria assiale: l'immagine sta sulla perpendicolare all'asse, che dimezza XX' – il punto si sposta del doppio della sua distanza dall'asse lungo il vettore normale (a; b): $X' = X - 2\,\dfrac{aX + bY + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- L'immagine della circonferenza k: trasformato il centro, il raggio resta (la trasformazione è un'isometria): $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S_k'[3;\,1],\; r' = r = 2$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate.

La retta di intersezione di due piani.

Input: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Risultato

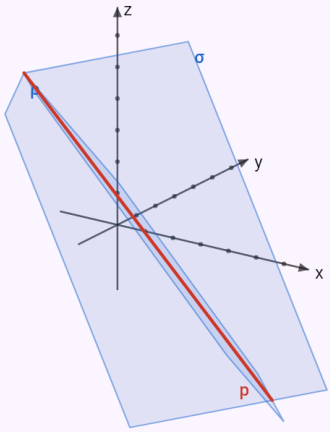
I piani si intersecano nella retta:

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Passaggi

- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- L'equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Nessun vettore è multiplo dell'altro – i due non sono paralleli
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- La direzione della retta d'intersezione è perpendicolare a entrambi i vettori normali – il loro prodotto vettoriale
  $$\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$$
- Un punto di P: scegliamo delle coordinate e calcoliamo la restante dall'equazione
  $z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$
- La retta d'intersezione – un suo punto e il vettore direttore: $p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

L’angolo di una retta e di un piano.

Input: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Angolo

Risultato

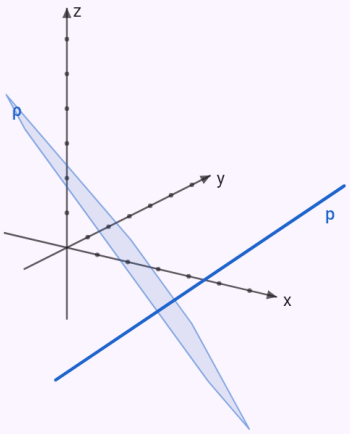
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Passaggi

- Le equazioni parametriche danno un punto (i termini noti) e il vettore direttore (i coefficienti del parametro): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p = (1;\,2;\,1)$
- L’equazione generale dà il vettore normale – i coefficienti di x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- L’angolo tra una retta e un piano: l’angolo tra la direzione e la normale lo completa a 90°, da cui il seno quindi $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

La distanza e la perpendicolare comune di rette sghembe.

Input: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Distanza

Risultato

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Passaggi

- Le equazioni parametriche danno un punto (i termini noti) e il vettore direttore (i coefficienti del parametro): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Le equazioni parametriche danno un punto (i termini noti) e il vettore direttore (i coefficienti del parametro): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- La distanza delle rette sghembe

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- La perpendicolare comune: X sulla prima retta e Y sulla seconda con XY perpendicolare a entrambe le direzioni – un sistema per t e s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

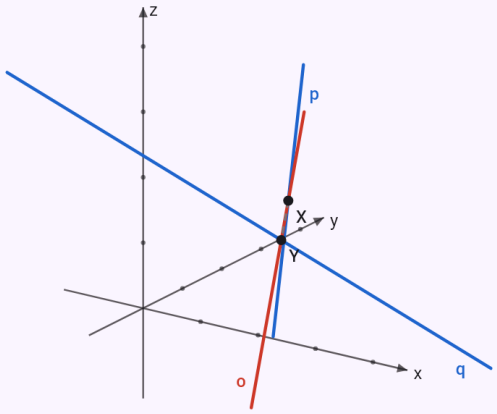
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Le equazioni parametriche – un punto più il parametro per il vettore direttore:

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio – ruota il grafico trascinandolo.

Una circonferenza – quadrati completati, centro e raggio.

Input: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Risultato

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

Passaggi

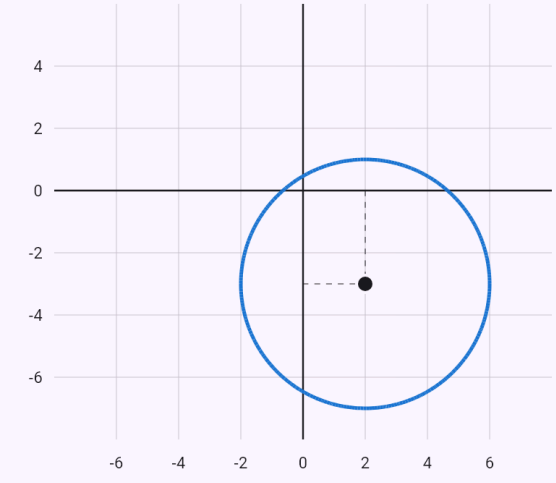
- Completiamo i quadrati

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- L'equazione canonica della circonferenza: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Centro $S = [2;\ -3]$, raggio $r = 4$

Grafico



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

La curva data dall'equazione nel piano x, y.

Un’ellisse – semiassi, eccentricità e fuochi.

Input: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

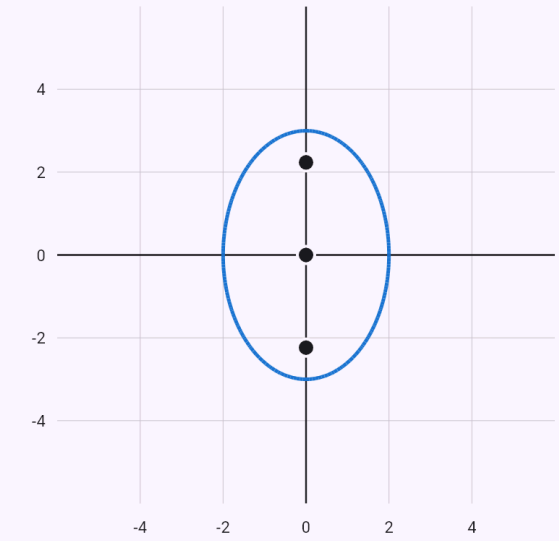
Risultato

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Passaggi

- L’equazione canonica dell’ellisse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semiassi $a = 3,\ b = 2$ (l’asse maggiore parallelo all’asse y), semidistanza focale $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, eccentricità $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, fuochi $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Grafico



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

La curva data dall’equazione nel piano x, y.

Un’iperbole – fuochi e asintoti.

Input: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

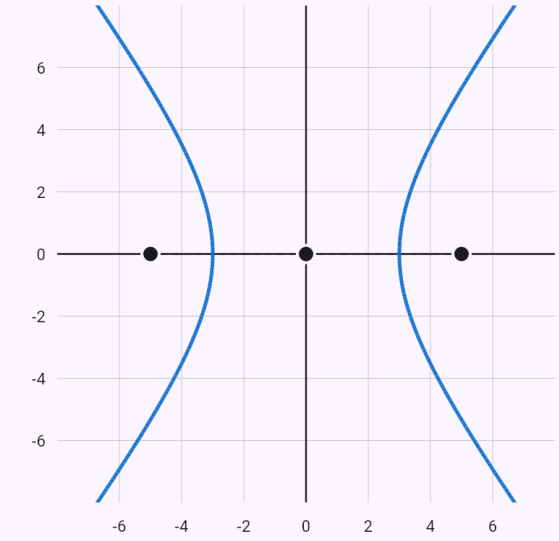
Risultato

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Passaggi

- L’equazione canonica dell’iperbole: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semiassi $a = 3,\ b = 4$ (l’asse trasverso parallelo all’asse x), semidistanza focale $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, eccentricità $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, fuochi $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asintoti $y = \pm\frac{4}{3}x$

Grafico



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

La curva data dall’equazione nel piano x, y.

Una parabola – vertice, fuoco e direttrice.

Input: `y^2 = 8x`

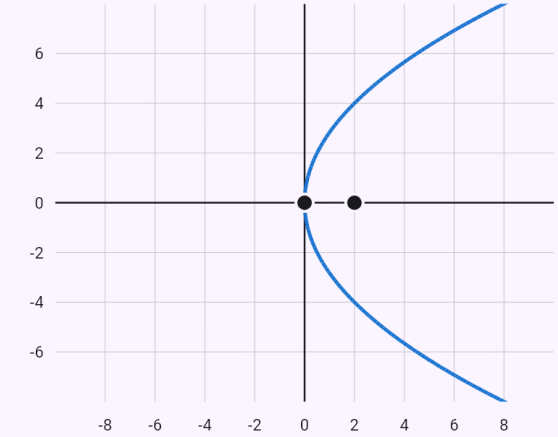
Risultato

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Passaggi

- L'equazione della parabola rispetto al vertice: $y^2 = 8x$
- Vertice $V = [0;\ 0]$, parametro $p = 4$, asse parallelo all'asse x, fuoco $F = [2;\ 0]$, direttrice $x = -2$

Grafico



$y^2 = 8x$

La curva data dall'equazione nel piano x, y.

La tangente a una circonferenza in un suo punto.

Input: `tangent to the circle x^2 + y^2 = 25 at [3; 4]`

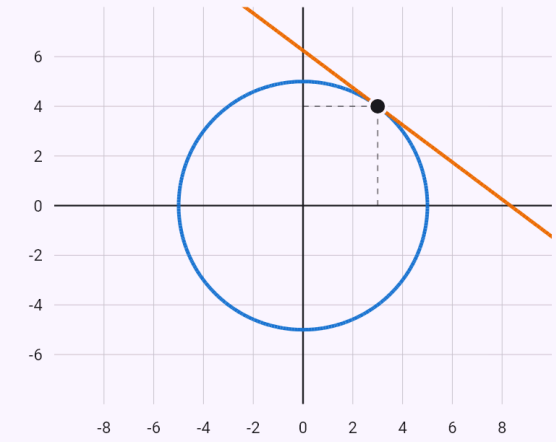
Risultato

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Passaggi

- Il punto $T = [3;\ 4]$ sta sulla conica – sostituito: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- La tangente nel punto $(x_0; y_0)$ di una conica con lo sdoppiamento: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \frac{x + x_0}{2}$, $y \to \frac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- La tangente: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Grafico



$x^2 + y^2 = 25$

$3x + 4y - 25 = 0$

La conica e le rette; i punti segnati sono i punti di tangenza, le intersezioni e il punto dato.

Tangenti da un punto esterno – un discriminante nullo per la pendenza k.

Input: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

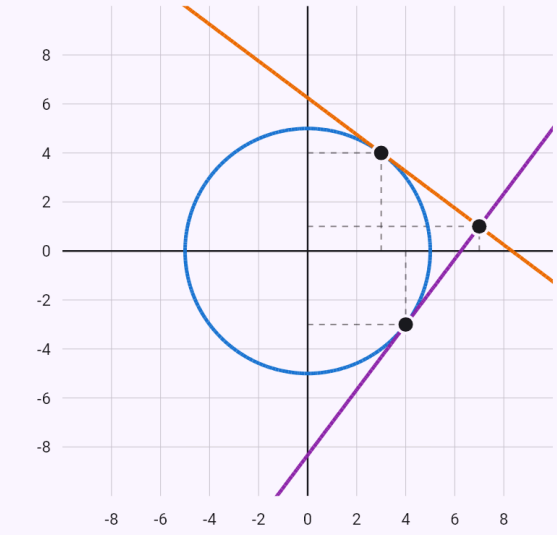
Risultato

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Passaggi

- Il punto $M = [7;\ 1]$ non sta sulla conica – sostituito: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, non 0.
- Cerchiamo le tangenti tra le rette per M con coefficiente angolare k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Sostituiamo y nell'equazione della conica: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- La retta è tangente esattamente quando l'equazione ha una sola radice (doppia) – il discriminante è zero: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Le tangenti: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; i punti di tangenza: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Grafico



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

La conica e le rette; i punti segnati sono i punti di tangenza, le intersezioni e il punto dato.

Tangenti parallele a una retta.

Input: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

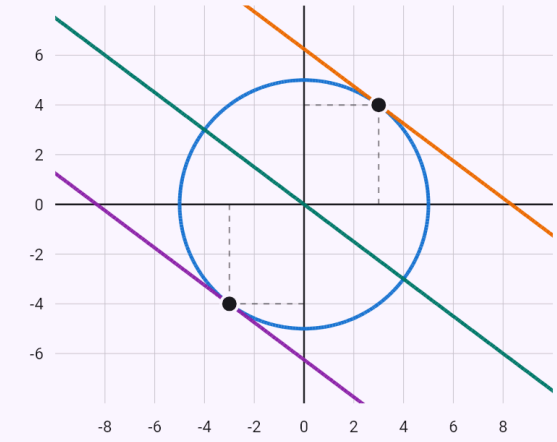
Risultato

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Passaggi

- Le tangenti parallele alla retta hanno il suo vettore normale e differiscono solo per la costante c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Sostituiamo y nell'equazione della conica: $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- La retta è tangente esattamente quando l'equazione ha una sola radice (doppia) – il discriminante è zero: $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Le tangenti: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; i punti di tangenza: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Grafico



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

La conica e le rette; i punti segnati sono i punti di tangenza, le intersezioni e il punto dato.

La posizione di un'ellisse e di una retta.

Input: `position of x^2/9 + y^2/4 = 1 and y = x + 1`

Risultato

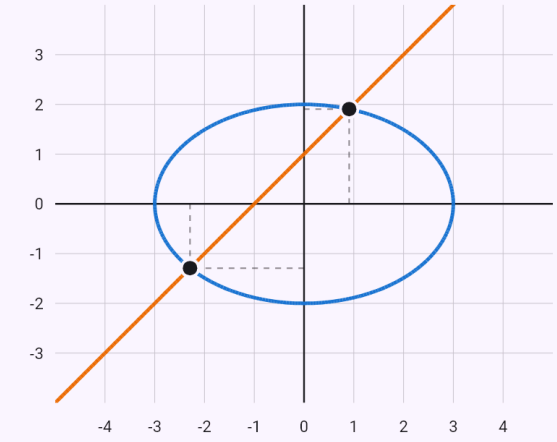
$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

$$P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1+3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

Passaggi

- Dalla retta ricaviamo y e lo sostituiamo nella conica:
  $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Il discriminante $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ è positivo – la retta è secante con due punti in comune.
- Le intersezioni
  $P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\right.}{13}\right.$

Grafico



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

La conica e le rette; i punti segnati sono i punti di tangenza, le intersezioni e il punto dato.

Una sfera – il suo centro e il raggio.

Input: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Risultato

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Passaggi

- Completiamo i quadrati
  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
  $\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- La forma della sfera con il centro:
  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Centro $S = [1;\ -2;\ 3]$, raggio $r = 4$

Una sfera e un piano – la circonferenza della sezione.

Input: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

ρ: x + y + z = 1

Risultato

Il piano taglia la sfera secondo una circonferenza di centro e raggio:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Passaggi

- Completando i quadrati l'equazione della sfera k diventa la forma con centro − il centro e il raggio

  $k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow \ S[1;\ -2;\ 3$

- L'equazione generale dà il vettore normale − i coefficienti di x, y (z): $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$

- La distanza del punto dal piano

  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

- La distanza del centro dal piano ρ è minore del raggio − il piano taglia la sfera secondo una circonferenza:

  $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$

- La perpendicolare per S al piano ρ va lungo la sua normale: $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$

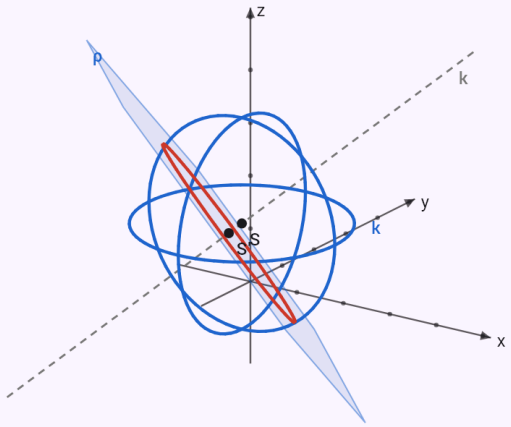
- Il piede della perpendicolare S' è dove incontra ρ − sostituiamo e calcoliamo t

  $(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow \ t = -\frac{1}{3},\ S'[$

- Il centro della circonferenza è il piede della perpendicolare dal centro, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; il raggio con il teorema di Pitagora

  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio − ruota il grafico trascinandolo.

Una sfera e una retta − le intersezioni.

Input: k: x^2 + y^2 + z^2 = 9

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Risultato

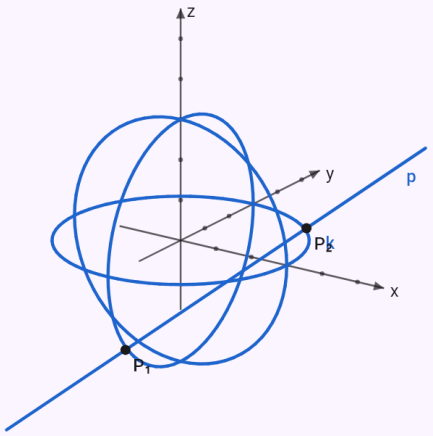
La retta taglia la sfera in due punti:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Passaggi

- Completando i quadrati l'equazione della sfera k diventa la forma con centro − il centro e il raggio:
  $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- Le equazioni parametriche danno un punto (i termini noti) e il vettore direttore (i coefficienti del parametro):
  $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- Sostituiamo le equazioni parametriche della retta p nell'equazione della sfera
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- Il discriminante $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ è positivo − la retta è secante, con due punti in comune.
- Le intersezioni
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Grafico



Rette e piani dati in blu, il risultato in rosso, le linee ausiliarie tratteggiate. Vettori nello spazio − ruota il grafico trascinandolo.

Limiti noti

- Coordinate e coefficienti sono numeri (nessun parametro); coniche solo in posizione canonica (nessun termine xy).
- Trasformazioni geometriche solo nel piano; una circonferenza per ora viene solo trasformata (niente distanza, posizione o tangenti).
- Le altezze di un triangolo nello spazio solo con le loro lunghezze, senza equazioni e la loro intersezione.
- Il nome di una retta o di un piano è una lettera (anche con un indice) − quindi «a: 2x + 3 = 5» è letto come una retta, non come un'equazione.

24. Problemi di costruzione

I problemi di costruzione si inseriscono in un modulo – nella sezione «Applicazioni» della schermata iniziale, l'ambito Geometria (il modulo «Problemi di costruzione»). Il compito di base è un triangolo ABC da tre elementi: tre lati (LLL), due lati e l'angolo compreso (LAL), un lato e due angoli (ALA – il terzo angolo si calcola dalla somma di 180°), o due lati e l'angolo opposto a uno di essi (LLA). Le lunghezze sono in centimetri, gli angoli in gradi.

La soluzione segue la pratica scolastica: l'analisi (uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati), i passi della costruzione in notazione simbolica (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) e una discussione del numero di soluzioni. La figura sotto il risultato sfoglia la costruzione passo per passo con le frecce – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati a colori. Il risultato elenca anche i lati e gli angoli calcolati, così puoi controllare il tuo disegno.

La discussione spiega perché un problema non ha soluzione (la disuguaglianza triangolare, la somma degli angoli, una circonferenza che non raggiunge la semiretta) o perché ne ha due (LLA con l'angolo opposto al lato più corto).

Un triangolo si può dare anche con un'altezza, una mediana, il raggio della circonferenza circoscritta o inscritta. Si disegna prima un lato e il terzo vertice sta dove si incontrano due luoghi geometrici: una parallela alla distanza dell'altezza, una circonferenza attorno al punto medio del lato con la mediana come raggio, una circonferenza attorno a un estremo, il lato di un angolo, l'arco capace sul lato o le circonferenze circoscritte. Con due lati e l'altezza dal loro vertice comune, l'altezza viene prima; con il raggio inscritto, un lato e un angolo su di esso, si costruiscono la circonferenza inscritta e la tangente a essa.

Quadrilateri: un quadrato, un rettangolo, un rombo, un parallelogramma e un trapezio (AB ∥ CD) dai lati a, b, c, d, dalle diagonali e, f, dagli angoli α, β e dall'altezza v – gli elementi si scelgono in righe come per un triangolo. Per lo più viene prima il triangolo ABC o ABD e il quarto vertice lo completa; altrimenti le diagonali che si dimezzano (perpendicolari in un rombo), la parallela alla distanza dell'altezza o, per un trapezio, un triangolo ausiliario dalla traslazione del lato AD o della diagonale BD del vettore DC.

I luoghi geometrici sono nello stesso modulo: l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo, la circonferenza di Talete e gli archi da cui un segmento è visto sotto un angolo dato (due archi simmetrici rispetto al segmento). Ciascuno si costruisce con compasso e riga passo per passo; l'analisi spiega perché i punti stanno proprio lì.

Circonferenze e tangenti: le tangenti da un punto a una circonferenza (i punti di tangenza su una circonferenza di Talete), le tangenti comuni di due circonferenze (tramite circonferenze ausiliarie con la differenza e la somma dei raggi), la circonferenza di raggio dato tangente ai lati di un angolo, le circonferenze per un punto tangenti a una retta e le circonferenze per due punti. La discussione conta le

soluzioni secondo la posizione – due circonferenze hanno per esempio quattro, tre, due, una o nessuna tangente comune.

Problemi con relazioni: una figura data (un segmento AB, una circonferenza k e un punto A, una retta p e un punto A, una circonferenza k e una retta p, due rette incidenti p, q) e due relazioni che il punto cercato deve soddisfare – su un segmento il vertice C del triangolo ABC, altrimenti un punto X. Le relazioni si scelgono in righe: il segmento è visto dal punto sotto un angolo (90° = la circonferenza di Talete), equidistante da due punti o da due rette, una distanza da un punto o da una retta, il rapporto delle distanze da A e B (la circonferenza di Apollonio), sta su una retta o su una circonferenza, la retta AX è tangente a k, il centro di una circonferenza di raggio ϱ tangente a k, e A è il punto medio di XY con Y su k o su p (simmetria centrale). Ogni relazione diventa un luogo di punti, il punto cercato è nella loro intersezione; la discussione conta le soluzioni (su un segmento in un semipiano, l'altro dà immagini speculari congruenti). Sotto il risultato ci sono le distanze del punto dai punti e dalle rette dati come verifica.

Relazioni generali tra più punti (con una circonferenza k o senza): i punti da A a H sono dati da righe di relazioni – un punto su k, un punto medio, una tangente a k, una lunghezza, un rapporto di lunghezze, perpendicolare, parallela, un punto su una retta, un angolo e un triangolo (solo cosa disegnare). Le relazioni diventano equazioni in coordinate (il centro S nell'origine, il primo punto sull'asse x), risolte esattamente, con radici quadrate. Il risultato sono le lunghezze tra i punti (con una circonferenza anche come multipli di r), la verifica e il numero di soluzioni a meno di congruenze. Dove possibile segue una costruzione scolastica: ogni punto su due luoghi – la circonferenza data, una distanza, una retta, una tangente, un punto medio, una simmetria centrale – e le lunghezze calcolate costruite come ipotenusa o cateto di un triangolo rettangolo o con il teorema dell'altezza; la soluzione mostra anche la potenza di un punto e l'angolo tra tangente e corda quando valgono. Altrimenti onestamente solo il calcolo e la figura.

Sezioni di solidi: un cubo, un parallelepipedo rettangolo, un prisma e una piramide regolari con base da 3 a 6 lati (vertici ABC… e A'B'C'…, il vertice di una piramide V) e il tetraedro regolare ABCD. Il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z, uno per riga: AE=2 è il punto sul segmento AE a 2 cm da A – il segmento può essere uno spigolo, una diagonale di una faccia o del solido o l'asse SS' (S, S' i centri delle basi), e una distanza più lunga di esso dà un punto sul suo prolungamento; X: AB = 1:2 è il punto X che divide AB nel rapporto 1 : 2. Si possono usare punti ausiliari in altre righe. Il solido è in proiezione obliqua con gli spigoli nascosti tratteggiati; un triangolo, un pentagono o un esagono regolare nella base si disegna prima accanto in vera forma e si riporta nella proiezione. La sezione si costruisce lato per lato secondo le regole scolastiche: i punti in una faccia si uniscono, le facce parallele si tagliano secondo parallele, la retta di un lato incontra la retta di uno spigolo in un punto ausiliario T che sta anche nella faccia vicina, e la retta di un punto interno al solido si riporta alla base con un piano verticale ausiliario. Sotto la figura, la sezione finita nello spazio si può ruotare con il dito.

Esempi

Un triangolo da tre lati (LLL).

Input: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

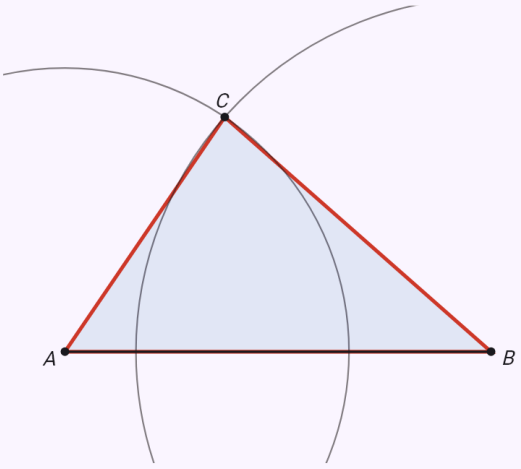
Risultato

$$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – la circonferenza l di centro B e raggio a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – il terzo vertice è il punto di intersezione.
- 5. $\triangle ABC$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: la disuguaglianza triangolare $a + b > c$ è soddisfatta, quindi le circonferenze si intersecano. In un semipiano delimitato dal primo lato il problema ha una soluzione (nell'altro c'è la sua immagine speculare congruente).

Grafico



Passo 5 di 5
5. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Due lati e l'angolo compreso (LAL).

Input: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

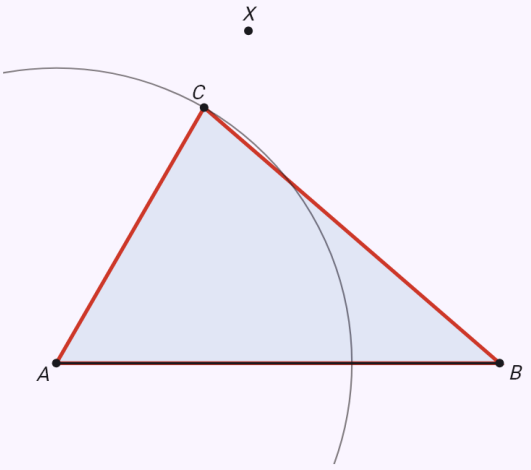
Risultato

$$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – costruiamo l'angolo α; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – il terzo vertice è il punto di intersezione.
- 5. $\triangle ABC$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: in un semipiano delimitato dal primo lato il problema ha una soluzione (nell'altro semipiano c'è la sua immagine speculare congruente).

Grafico



Passo 5 di 5
5. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un lato e due angoli, uno dei quali non adiacente al lato – il terzo angolo si calcola (ALA).

Input: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

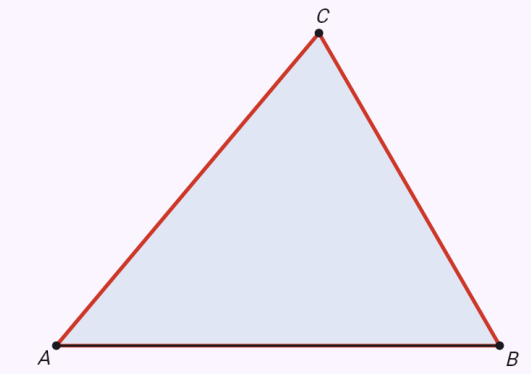
Risultato

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Il terzo angolo dalla somma degli angoli di un triangolo: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 50^\circ$ – costruiamo l'angolo α; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 60^\circ$ – costruiamo l'angolo β; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{BY}$
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – il terzo vertice è il punto di intersezione.
- 5. $\triangle ABC$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: in un semipiano delimitato dal primo lato il problema ha una soluzione (nell'altro semipiano c'è la sua immagine speculare congruente).

Grafico



Passo 5 di 5
5. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

L’angolo opposto al più corto di due lati – due soluzioni (LLA).

Input: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Risultato

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

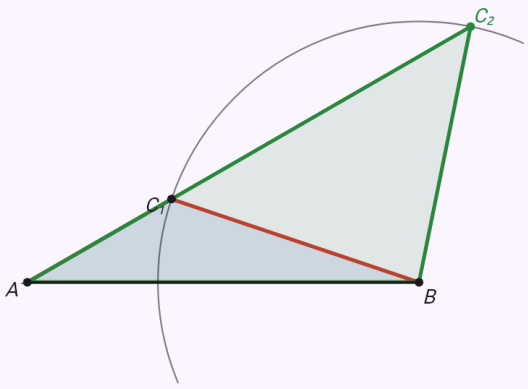
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – costruiamo l’angolo α; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro B e raggio a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – i punti di intersezione sono due, ciascuno è il terzo vertice di un triangolo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: la circonferenza interseca la semiretta in due punti – in un semipiano delimitato dal primo lato il problema ha due soluzioni, due triangoli diversi.

Grafico



Passo 5 di 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L’analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Lati che violano la disuguaglianza triangolare.

Input: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

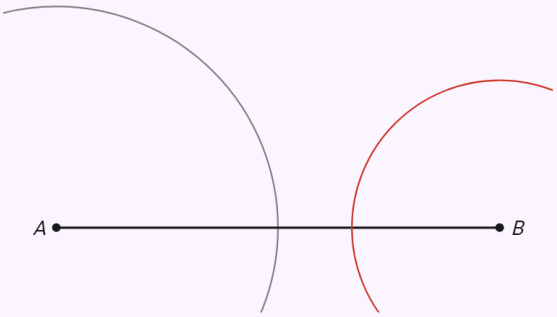
Risultato

Non si può costruire alcuna figura con gli elementi dati.

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – la circonferenza l di centro B e raggio a
- Discussione: la disuguaglianza triangolare non è soddisfatta ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – le circonferenze non si intersecano e il triangolo non esiste.

Grafico



Passo 3 di 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Il lato c, l'altezza e la mediana relative a esso – due soluzioni.

Input: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Risultato

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

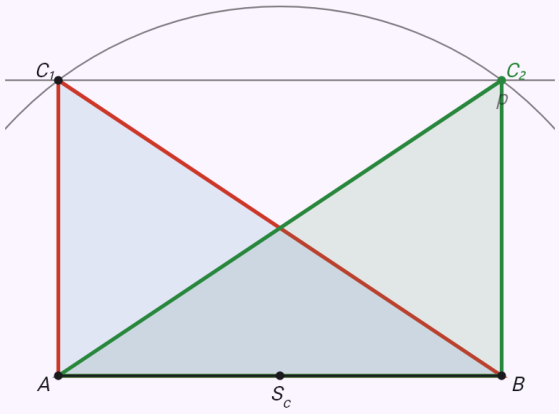
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – la parallela p a AB alla distanza v_c
- 3. S_c; $S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – il punto medio S_c del segmento AB (dove lo interseca il suo asse).
- 4. k; $k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro S_c e raggio t_c
- 5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – i punti di intersezione sono due, ciascuno è il terzo vertice di un triangolo.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: nel semipiano sopra il primo lato i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha altrettante soluzioni (nell'altro semipiano ci sono le loro immagini speculari congruenti).

Grafico



Passo 6 di 6
6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Il lato c, l'altezza relativa e l'angolo opposto – l'arco capace sul lato.

Input: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Risultato

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

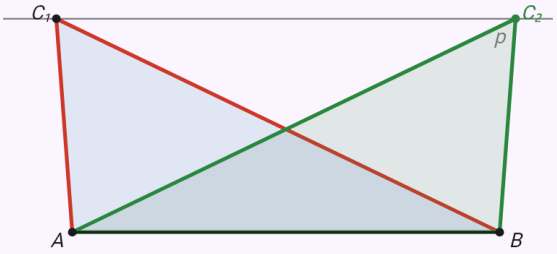
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la parallela p a AB alla distanza v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – l'arco k da cui il segmento AB si vede sotto l'angolo γ (costruito come in "Archi di un angolo dato").
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – i punti di intersezione sono due, ciascuno è il terzo vertice di un triangolo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: nel semipiano sopra il primo lato i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha altrettante soluzioni (nell'altro semipiano ci sono le loro immagini speculari congruenti).

Grafico



Passo 5 di 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un lato, il raggio della circonferenza circoscritta e un altro lato – due circonferenze circoscritte.

Input: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Risultato

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

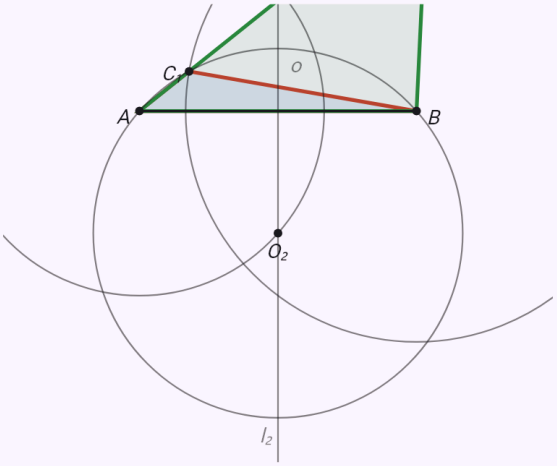
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – l'asse o del segmento AB, costruito come in "Asse di un segmento".
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – i punti di intersezione O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – la circonferenza circoscritta l_1, l_2 di centro O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – la circonferenza m di centro B e raggio a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – i punti di intersezione sono due, ciascuno è il terzo vertice di un triangolo.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: nel semipiano sopra il primo lato i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha altrettante soluzioni (nell'altro semipiano ci sono le loro immagini speculari congruenti).

Grafico



Passo 8 di 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Due lati e l'altezza dal loro vertice comune – prima l'altezza.

Input: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Risultato

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

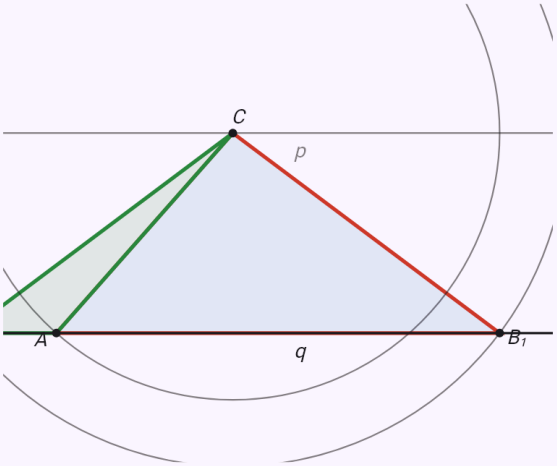
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – una retta qualsiasi q su cui sta il lato AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la parallela p a q alla distanza v_c
- 3. C; $C \in p$ – un punto qualsiasi C della retta p
- 4. k; $k(C;\, 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro C e raggio b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – uno dei punti di intersezione, A (l'altro dà un triangolo congruente).
- 6. l; $l(C;\, 5\,\text{cm})$ – la circonferenza l di centro C e raggio a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – i punti di intersezione sono due, ciascuno è il terzo vertice di un triangolo.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: la circonferenza l interseca la retta q in due punti – il problema ha due soluzioni, due triangoli diversi (l'altro punto di intersezione della circonferenza k dà solo triangoli congruenti).

Grafico



Passo 8 di 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un lato, un angolo su di esso e il raggio inscritto – la tangente tramite una circonferenza di Talete.

Input: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

Risultato

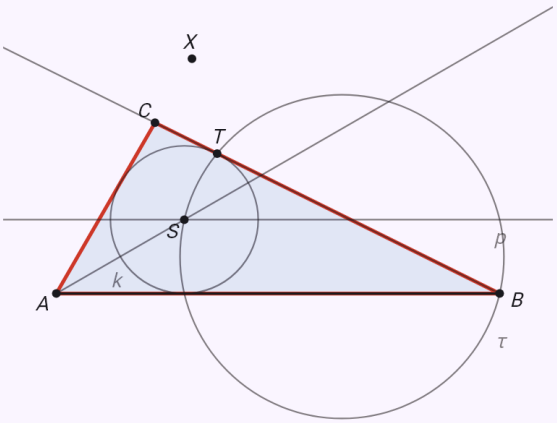
$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Passaggi

- Analisi: uno schizzo del triangolo finito con gli elementi dati evidenziati – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – costruiamo l'angolo α; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $o;\ o = \overrightarrow{AY},\ |\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – la bisettrice o dell'angolo α (costruita come in "Bisettrice di un angolo"); su di essa sta l'incentro.
- 4. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – la parallela p a AB alla distanza ϱ
- 5. $S;\ S \in o \cap p$ – il punto di intersezione S
- 6. $k;\ k(S;\ \varrho)$ – la circonferenza inscritta k di centro S
- 7. $\tau;\ \tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – la circonferenza di Talete τ sul segmento BS
- 8. $T;\ T \in \tau \cap k$ – il punto di tangenza T della tangente da B (l'altro punto di intersezione è il punto di tangenza sul primo lato).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – la tangente dal punto B alla circonferenza inscritta.
- 10. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – il terzo vertice è il punto di intersezione.
- 11. $\triangle ABC$ – congiungiamo i vertici.

- Discussione: in un semipiano delimitato dal primo lato il problema ha una soluzione (nell'altro semipiano c'è la sua immagine speculare congruente).

Grafico



Passo 11 di 11
11. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un rettangolo da un lato e dalla diagonale – l'angolo retto in B.

Input: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

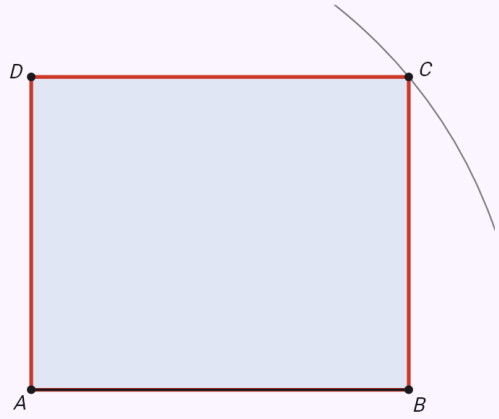
Risultato

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): il lato AB con gli altri elementi dati determina il triangolo ABC o ABD, costruito come un problema sul triangolo. Il quarto vertice lo completa – i lati opposti di un parallelogramma sono uguali e paralleli.
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$ – tracciamo il lato a
- 2. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 90^\circ$ – costruiamo l'angolo β; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{BY}$
- 3. $k;\ k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio e
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – il punto di intersezione C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – il quarto vertice D: i lati opposti sono uguali, quindi sta sulle circonferenze di centri C, A e raggi $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: il problema ha una soluzione – ogni altro quadrilatero così è congruente a essa.

Grafico



Passo 6 di 6
6. $ABCD$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un rombo dalle diagonali – i vertici sull’asse di AC.

Input: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

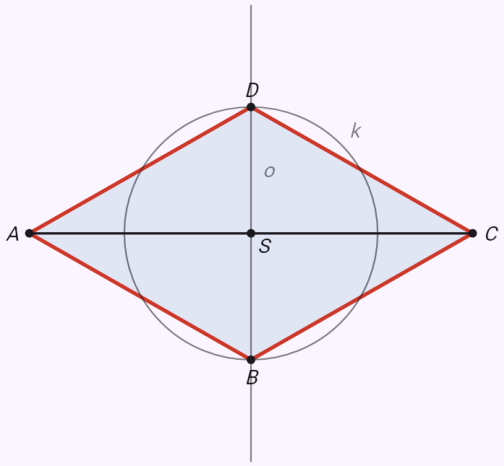
Risultato

$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$
$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$
$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$

Passaggi

- Analisi ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): le diagonali di un quadrato e di un rombo sono perpendicolari e si dimezzano. I vertici B e D stanno quindi sull’asse di AC, a metà dell’altra diagonale dal suo punto medio S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – tracciamo la diagonale AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – l’asse o del segmento AC, costruito come in “Asse di un segmento”.
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro S e raggio $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – i punti di intersezione B, D
- 5. $ABCD$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: il problema ha una soluzione – ogni altro quadrilatero così è congruente a essa.

Grafico



Passo 5 di 5
5. $ABCD$

L’analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un parallelogramma da due lati e una diagonale – prima il triangolo ABC.

Input: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

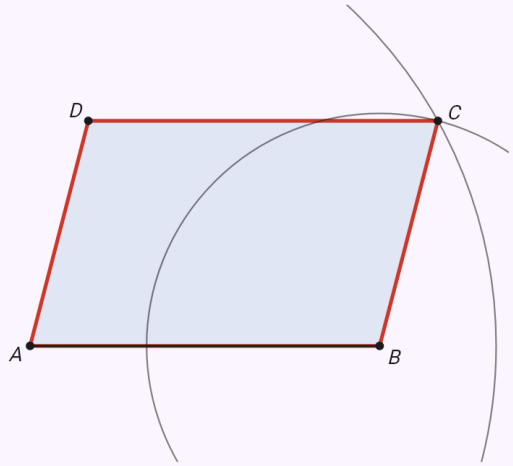
Risultato

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): il lato AB con gli altri elementi dati determina il triangolo ABC o ABD, costruito come un problema sul triangolo. Il quarto vertice lo completa – i lati opposti di un parallelogramma sono uguali e paralleli.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il lato a
- 2. k; $k(A;\ 8\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro A e raggio e
- 3. l; $l(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza l di centro B e raggio b
- 4. C; $C \in k \cap l$ – il punto di intersezione C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – il quarto vertice D: i lati opposti sono uguali, quindi sta sulle circonferenze di centri C, A e raggi $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: il problema ha una soluzione – ogni altro quadrilatero così è congruente a essa.

Grafico



Passo 6 di 6
6. $ABCD$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un trapezio da quattro lati – il triangolo ausiliario EBC.

Input: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

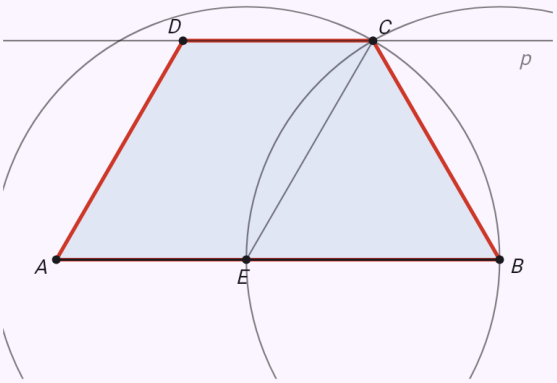
Risultato

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): traslando il lato AD del vettore DC si ottiene il triangolo EBC con E su AB e |AE| = c. I suoi lati sono |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d e i suoi angoli in E e B sono α e β. Si costruisce per primo e D si completa sulla parallela ad AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – tracciamo il lato a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – il punto E alla distanza $3\,\text{cm}$ da A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro E e raggio d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circonferenza l di centro B e raggio b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – il punto di intersezione C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – il vertice D sulla parallela ad AB per C, alla distanza $3\,\text{cm}$ da esso.
- 7. $ABCD$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: il problema ha una soluzione – ogni altro quadrilatero così è congruente a essa.

Grafico



Passo 7 di 7
7. $ABCD$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un trapezio da tre lati e un angolo – due soluzioni.

Input: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Risultato

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

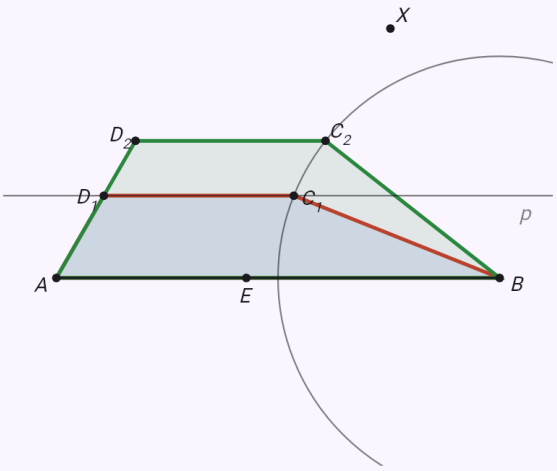
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Passaggi

- Analisi ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): traslando il lato AD del vettore DC si ottiene il triangolo EBC con E su AB e |AE| = c. I suoi lati sono |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d e i suoi angoli in E e B sono α e β. Si costruisce per primo e D si completa sulla parallela ad AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – tracciamo il lato a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – il punto E alla distanza $3\,\text{cm}$ da A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – costruiamo l'angolo α; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro B e raggio b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – i punti di intersezione C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – il vertice D_1 sulla parallela ad AB per C_1, alla distanza $3\,\text{cm}$ da esso.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – il vertice D_2 sulla parallela ad AB per C_2, alla distanza $3\,\text{cm}$ da esso.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: i punti di intersezione sono due – il problema ha due soluzioni, due quadrilateri diversi.

Grafico



Passo 8 di 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

L'asse di un segmento AB di 6 cm.

Input: `construction(segment_bisector; d=6)`

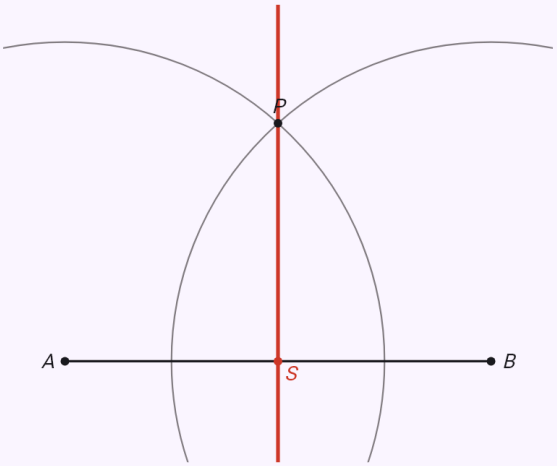
Risultato

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 6\,\text{cm}$): un punto X equidistante da A e B è il vertice di un triangolo isoscele ABX – sta sulla perpendicolare ad AB per il suo punto medio, l'asse del segmento.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il segmento AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – la circonferenza k di centro A e raggio $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – la circonferenza l di centro B e lo stesso raggio.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – i punti di intersezione P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – la retta o è l'asse del segmento: l'insieme di tutti i punti equidistanti da A e B.

Grafico



Passo 5 di 5

5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La bisettrice di un angolo di 70°.

Input: `construction(angle_bisector; phi=70)`

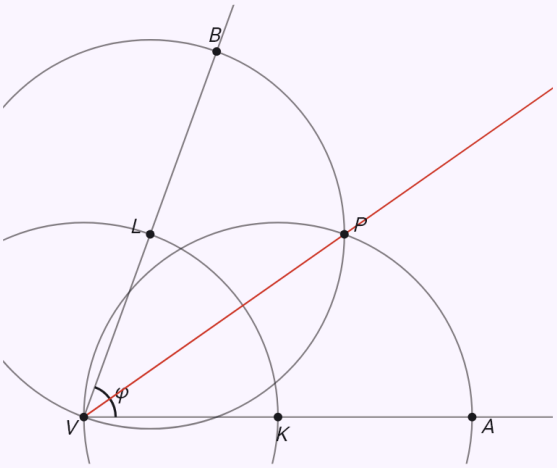
Risultato

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Passaggi

- Analisi ($|\angle AVB| = 70^\circ$): un punto interno all'angolo equidistante dai due lati sta sulla semiretta che divide l'angolo a metà – la bisettrice.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – tracciamo l'angolo $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro V e raggio qualsiasi.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – i punti di intersezione K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – la circonferenza m di centro K e raggio $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – la circonferenza n di centro L e lo stesso raggio.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – il punto di intersezione P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – la semiretta o è la bisettrice: divide l'angolo a metà e i suoi punti sono equidistanti dai due lati.

Grafico



Passo 7 di 7

7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La circonferenza di Talete su un segmento di 5 cm.

Input: `construction(thales; d=5)`

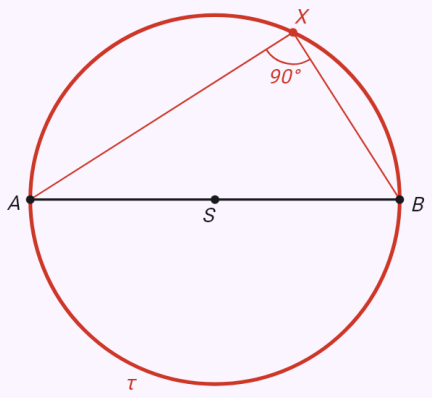
Risultato

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): per il teorema di Talete l'angolo AXB è retto esattamente quando X sta sulla circonferenza di diametro AB (tranne A e B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – tracciamo il segmento AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – il punto medio S del segmento AB (dove lo interseca il suo asse).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – la circonferenza di Talete τ di centro S e raggio $\dfrac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; senza A e B è l'insieme cercato.

Grafico



Passo 3 di 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

I punti da cui un segmento di 6 cm è visto sotto 60°.

Input: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

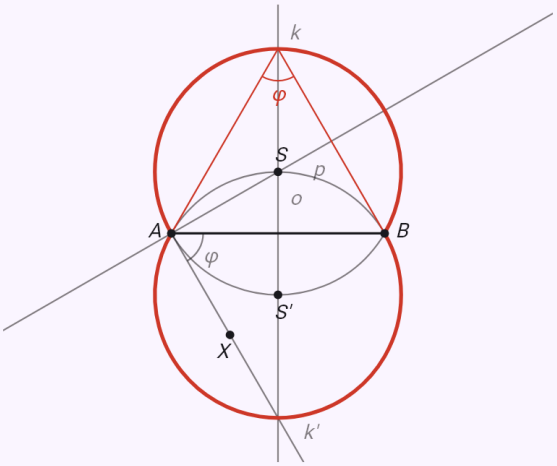
Risultato

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$): i punti X da cui AB si vede sotto l'angolo φ stanno su due archi simmetrici rispetto ad AB. L'angolo alla circonferenza sulla corda AB è uguale all'angolo tra AB e la tangente in A – il centro dell'arco sta sull'asse di AB e sulla perpendicolare alla tangente in A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il segmento AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – l'asse o del segmento AB, costruito come in "Asse di un segmento".
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – costruiamo l'angolo φ; il suo lato è la semiretta $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – la perpendicolare p alla semiretta $\overrightarrow{AX}$ nel punto A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – il punto di intersezione S
- 6. k; $k(S; |SA|)$ – la circonferenza k di centro S e raggio $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – la circonferenza k', simmetrica di k rispetto alla retta AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – gli archi sul segmento AB (senza A e B) sono l'insieme cercato: da ogni loro punto AB si vede sotto l'angolo φ

Grafico



Passo 8 di 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Le tangenti da un punto a 5 cm a una circonferenza di raggio 3 cm.

Input: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Risultato

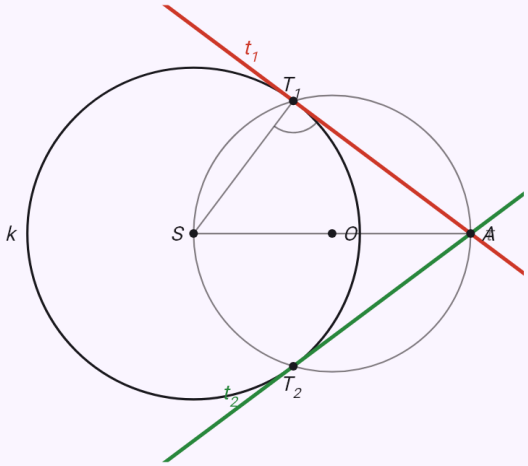
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\text{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Passaggi

- Analisi ($r = 3\,\text{cm},\ |SA| = 5\,\text{cm}$): una tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza T, quindi l'angolo STA è retto. I punti di tangenza stanno quindi sulla circonferenza di Talete su SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\text{cm})$ – la circonferenza k di centro S e raggio $3\,\text{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – il punto A alla distanza $5\,\text{cm}$ da S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – il punto medio O del segmento SA (dove lo interseca il suo asse).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – la circonferenza di Talete τ sul segmento SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – i punti di tangenza T_1, T_2 sono dove si incontrano le circonferenze k e τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – le tangenti t_1, t_2 dal punto A
- Discussione: il punto A è esterno alla circonferenza – passano per esso due tangenti, simmetriche rispetto alla retta SA.

Grafico



Passo 6 di 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Quattro tangenti comuni di due circonferenze esterne.

Input: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

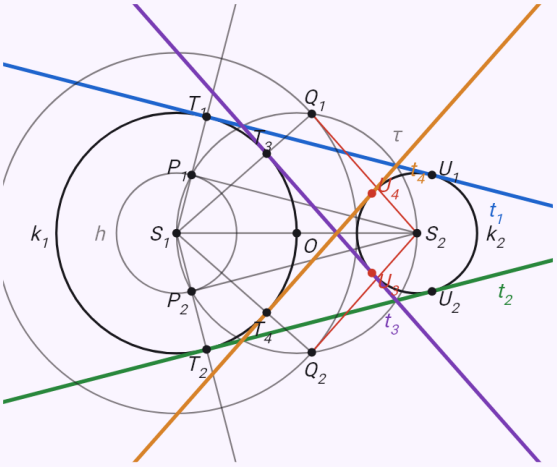
Risultato

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): spostando una tangente esterna parallelamente verso i centri del raggio minore, essa tocca una circonferenza ausiliaria attorno al centro della circonferenza maggiore con raggio $|r_1 - r_2|$ e passa per il centro di quella minore. Per una tangente interna il raggio della circonferenza ausiliaria è $r_1 + r_2$. Le tangenti dal centro alla circonferenza ausiliaria si trovano con la circonferenza di Talete sul segmento dei centri.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – la circonferenza k_1 di centro S_1 e raggio $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – la circonferenza k_2 di centro S_2 e raggio $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – il punto medio O del segmento S_1S_2 (dove lo interseca il suo asse).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – la circonferenza di Talete τ sul segmento S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – la circonferenza ausiliaria h di centro S_1 e con raggio uguale alla differenza dei raggi, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – i punti di intersezione P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – i punti di tangenza T_1, T_2 sono dove $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ incontrano la circonferenza k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – le tangenti comuni esterne t_1, t_2 per i punti T_1, T_2, parallele a S_2P_1, S_2P_2; toccano anche l'altra circonferenza.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – la circonferenza ausiliaria h' di centro S_1 e con raggio uguale alla somma dei raggi, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – i punti di intersezione Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – i punti di tangenza T_3, T_4 sono dove S_1Q_1, S_1Q_2 incontrano la circonferenza k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – le tangenti comuni interne t_3, t_4 per i punti T_3, T_4, parallele a S_2Q_1, S_2Q_2
- Discussione: le circonferenze sono esterne l'una all'altra ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – hanno due tangenti comuni esterne e due interne.

Grafico



Passo 12 di 12
12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Una circonferenza di raggio 2 cm tangente ai lati di un angolo di 60°.

Input: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Risultato

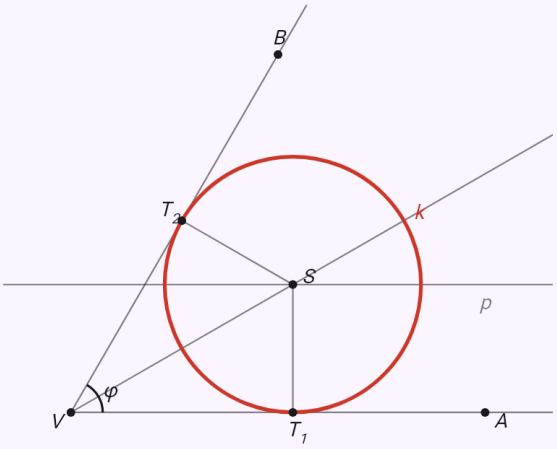
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($\varphi = 60^\circ,\ r = 2\,\text{cm}$): il centro dista r da entrambi i lati – sta sulla bisettrice dell'angolo e sulla parallela a un lato alla distanza r. I punti di tangenza sono i piedi delle perpendicolari dal centro ai lati.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60^\circ$ – tracciamo l'angolo $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – la bisettrice o dell'angolo $\angle AVB$ (costruita come in "Bisettrice di un angolo"); i suoi punti sono equidistanti dai due lati.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – la parallela p a VA alla distanza r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – il punto di intersezione S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – i punti di tangenza T_1, T_2 sono i piedi delle perpendicolari dal centro S a VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – la circonferenza cercata k, di centro S e raggio $2\,\text{cm}$
- Discussione: la bisettrice e la parallela si incontrano sempre in un solo punto – il problema ha una soluzione.

Grafico



Passo 6 di 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Circonferenze per un punto tangenti a una retta – due soluzioni.

Input: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Risultato

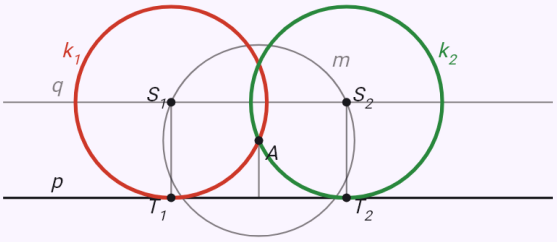
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): il centro dista r dalla retta p, quindi sta sulla parallela q a p alla distanza r dalla parte di A. Dista r anche da A, quindi sta anche sulla circonferenza m(A; r).
- 1. p – una retta qualsiasi p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – il punto A alla distanza $1{,}5\,\text{cm}$ da p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – la parallela q a p alla distanza r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – la circonferenza m di centro A e raggio $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – i punti di intersezione S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – i punti di tangenza T_1, T_2 sono i piedi delle perpendicolari dal centro S_1, S_2 a p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – le circonferenze cercate k_1, k_2, di centri S_1, S_2 e raggio $2{,}5\,\text{cm}$
- Discussione: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – la circonferenza m interseca la parallela q in due punti, il problema ha due soluzioni.

Grafico



Passo 7 di 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Circonferenze di raggio dato per due punti – due soluzioni, simmetriche rispetto ad AB.

Input: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Risultato

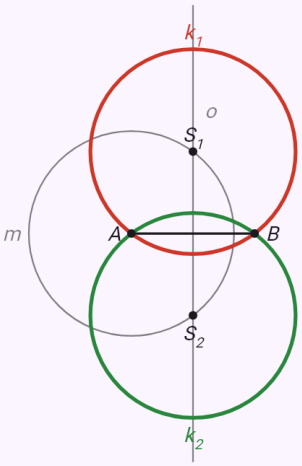
$$k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 6\,\text{cm},\ r = 5\,\text{cm}$): il centro dista r sia da A sia da B – sta sull'asse di AB e sulla circonferenza m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il segmento AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – l'asse o del segmento AB, costruito come in "Asse di un segmento".
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\text{cm})$ – la circonferenza m di centro A e raggio $5\,\text{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – i punti di intersezione S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$ – le circonferenze cercate k_1, k_2, di centri S_1, S_2 e raggio $5\,\text{cm}$
- Discussione: $|AB| = 6\,\text{cm} < 2r = 10\,\text{cm}$ – la circonferenza m interseca l'asse in due punti, il problema ha due soluzioni, simmetriche rispetto ad AB.

Grafico



Passo 5 di 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Il vertice C da cui AB è visto sotto 60°, all'altezza 3 cm – archi e parallele.

Input: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Risultato

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

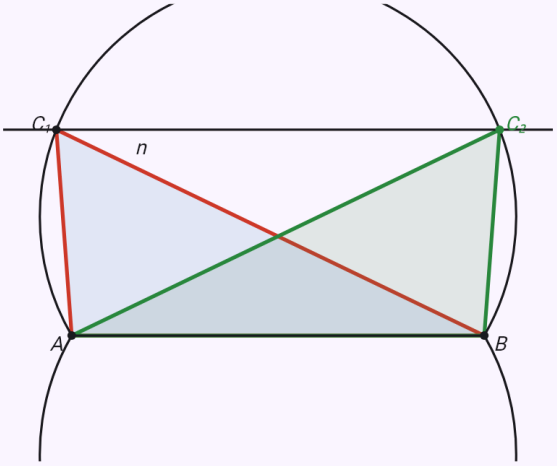
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 6\,\text{cm}$): uno schizzo del triangolo ABC finito con le relazioni date evidenziate. Ciascuna delle due relazioni dà un luogo di punti su cui sta il vertice C – quindi C è nella loro intersezione.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il segmento dato AB.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – i punti da cui il segmento AB si vede sotto l'angolo 60° stanno su due archi m, m' simmetrici rispetto a AB (costruiti come in "Archi di un angolo dato").
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – i punti alla distanza $3\,\text{cm}$ dalla retta AB stanno su due rette n, n' parallele a essa, una per lato.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – i punti cercati sono le intersezioni dei due luoghi.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: nel semipiano sopra AB i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha 2 soluzioni (nel semipiano opposto le loro immagini speculari congruenti).

Grafico



Passo 5 di 5
5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Il rapporto |AC| : |BC| = 2 e |BC| = 3 cm – la circonferenza di Apollonio.

Input: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

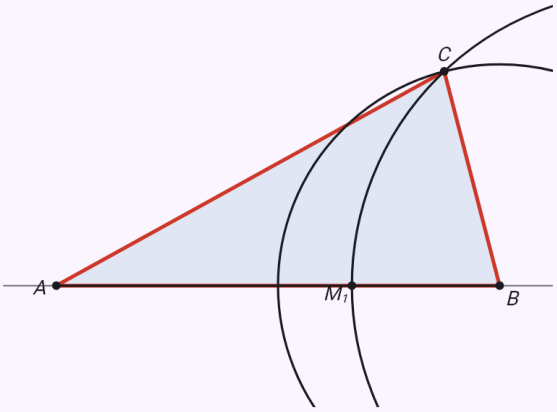
Risultato

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Passaggi

- Analisi ($|AB| = 6\,\text{cm}$): uno schizzo del triangolo ABC finito con le relazioni date evidenziate. Ciascuna delle due relazioni dà un luogo di punti su cui sta il vertice C – quindi C è nella loro intersezione.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – tracciamo il segmento dato AB.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – i punti le cui distanze dagli estremi del segmento AB stanno nel rapporto 2 stanno sulla circonferenza di Apollonio. Prima i punti M_1 (dentro il segmento) e M_2 (sul suo prolungamento) che dividono AB in questo rapporto.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – la circonferenza di Apollonio m è la circonferenza di Talete di diametro M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – i punti alla distanza $3\,\text{cm}$ dal punto B stanno sulla circonferenza n di centro B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – il punto cercato è l'intersezione dei due luoghi.
- 6. $\triangle ABC$ – congiungiamo i vertici.
- Discussione: nel semipiano sopra AB i luoghi hanno un punto in comune – il problema ha una soluzione (nel semipiano opposto la sua immagine speculare congruente).

Grafico



Passo 6 di 6
6. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

I punti di tangenza delle tangenti da A – AX una tangente e X sulla circonferenza.

Input: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

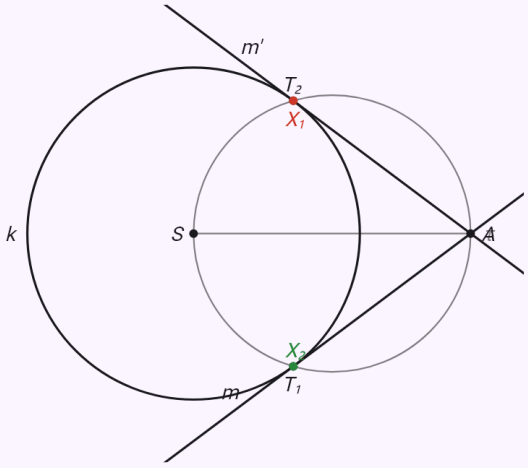
Risultato

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi $(k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm})$: uno schizzo con la circonferenza data k, il punto A e il punto cercato X, le relazioni date evidenziate. Ciascuna delle due relazioni dà un luogo di punti – X sta nella loro intersezione.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – tracciamo la circonferenza data k e il punto A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – la retta AX deve essere tangente a k: i punti di tangenza stanno sulla circonferenza di Talete τ di diametro SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ interseca k nei punti di tangenza T_1, T_2, per cui passano le tangenti m, m'
- Il punto X deve stare sulla circonferenza k – il luogo è la circonferenza k stessa, già tracciata.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – i punti cercati sono le intersezioni dei due luoghi.
- Discussione: i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha 2 soluzioni.

Grafico



Passo 4 di 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

I centri delle circonferenze di raggio 1 cm tangenti sia alla circonferenza k sia alla retta p.

Input: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

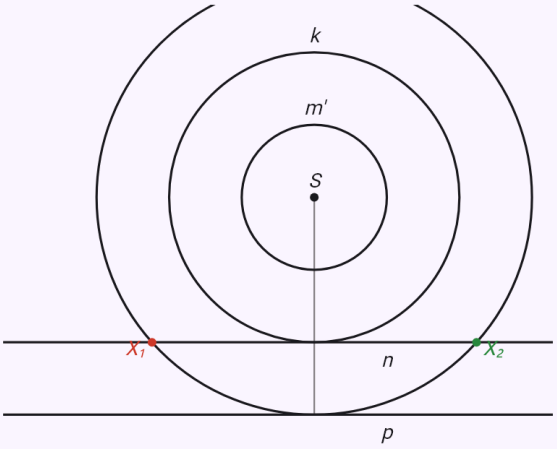
Risultato

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: uno schizzo con la circonferenza data k, la retta p e il punto cercato X, le relazioni date evidenziate. Ciascuna delle due relazioni dà un luogo di punti – X sta nella loro intersezione.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – tracciamo la circonferenza data k e la retta p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – una circonferenza di raggio $1\,\text{cm}$ è tangente esternamente a k quando il suo centro dista r + ϱ da S, internamente quando dista |r − ϱ| da S: i centri stanno sulle circonferenze m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – i punti alla distanza $1\,\text{cm}$ dalla retta p stanno su due rette n, n' parallele a essa, una per lato.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – i punti cercati sono le intersezioni dei due luoghi.
- Discussione: i luoghi hanno 2 punti in comune – il problema ha 2 soluzioni.

Grafico



Passo 4 di 4

$4.\ X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

I centri delle circonferenze di raggio 1,5 cm tangenti a due rette incidenti – quattro soluzioni.

Input: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

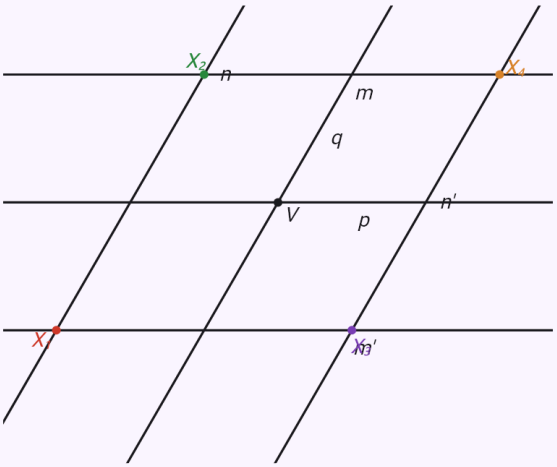
Risultato

$$X_1 : \ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3 : \ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4 : \ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($|\angle(p,q)| = 60^\circ$): uno schizzo con le rette date p, q e il punto cercato X, le relazioni date evidenziate. Ciascuna delle due relazioni dà un luogo di punti – X sta nella loro intersezione.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60^\circ$ – tracciamo le rette date p, q che si incontrano in V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – i punti alla distanza $1{,}5\,\text{cm}$ dalla retta p stanno su due rette m, m' parallele a essa, una per lato.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – i punti alla distanza $1{,}5\,\text{cm}$ dalla retta q stanno su due rette n, n' parallele a essa, una per lato.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – i punti cercati sono le intersezioni dei due luoghi.
- Discussione: i luoghi hanno 4 punti in comune – il problema ha 4 soluzioni.

Grafico



Passo 4 di 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Una circonferenza k(S; 2 cm), AC una tangente, k la circonferenza circoscritta ad ABD, D il punto medio di BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Input: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)

Risultato

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

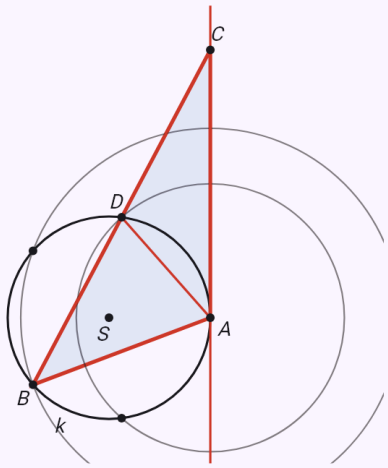
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Passaggi

- Analisi ($k(S;\,2\,\text{cm})$): scriviamo le relazioni in coordinate. Il centro S nell'origine e il punto A sul semiasse x positivo, A = (r; 0) – ogni soluzione si può ruotare in questa posizione. Le incognite sono le coordinate degli altri punti.
- Il punto sta sulla circonferenza k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Il punto sta sulla circonferenza k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Il punto sta sulla circonferenza k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Il punto medio ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$
- La retta $\overleftrightarrow{AC}$ è tangente a k – la sua distanza dal centro S è r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Il rapporto di lunghezze ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ è la figura risultante – i suoi vertici non devono essere allineati.
- Risolviamo il sistema esattamente (senza arrotondamenti). Ha 2 posizioni diverse dei punti (nessuno coincidente), 1 a meno di congruenze.
- Verifica: con la soluzione sostituita tutte le relazioni valgono.
- Dalla soluzione: la potenza del punto C rispetto a k – il quadrato della tangente è uguale al prodotto dei segmenti della secante: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Dalla soluzione: l'angolo alla circonferenza formato da tangente e corda AD è uguale all'angolo alla circonferenza che insiste su di essa: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41^\circ$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – tracciamo la circonferenza data k.
- 2. A; $A \in k$ – un punto qualsiasi A della circonferenza k.
- La lunghezza $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ si costruisce come cateto di un triangolo rettangolo con ipotenusa data: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – il punto B è una delle intersezioni dei luoghi (il loro numero: 2).
- La lunghezza $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ si costruisce come cateto di un triangolo rettangolo con ipotenusa data: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – il punto D è una delle intersezioni dei luoghi (il loro numero: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – il punto C simmetrico di B rispetto al centro D (simmetria centrale).
- 6. $\triangle ABC$ – la figura finita.
- Discussione: 2 posizioni dei punti soddisfano le relazioni, tutte congruenti (simmetriche) – a meno di congruenze il problema ha una soluzione.

Grafico



Passo 6 di 6
6. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

Un triangolo rettangolo senza circonferenza: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, l'angolo retto in C.

Input: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

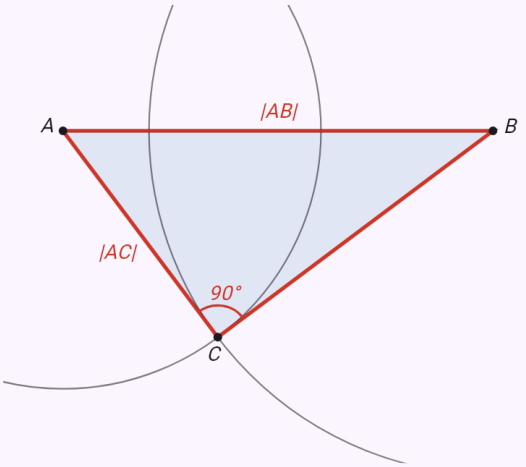
Risultato

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi: scriviamo le relazioni in coordinate. Il punto A nell'origine e il punto B sul semiasse x positivo – ogni soluzione si può traslare e ruotare in questa posizione. Le incognite sono le coordinate degli altri punti.
- La lunghezza ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- La lunghezza ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- L'angolo ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ è la figura risultante – i suoi vertici non devono essere allineati.
- Risolviamo il sistema esattamente (senza arrotondamenti). Ha 2 posizioni diverse dei punti (nessuno coincidente), 1 a meno di congruenze.
- Verifica: con la soluzione sostituita tutte le relazioni valgono.
- 1. A – un punto qualsiasi A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – il punto B alla distanza calcolata da A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – il punto C è una delle intersezioni dei luoghi (il loro numero: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – la figura finita.
- Discussione: 2 posizioni dei punti soddisfano le relazioni, tutte congruenti (simmetriche) – a meno di congruenze il problema ha una soluzione.

Grafico



Passo 4 di 4
4. $\triangle ABC$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione di un cubo – le facce opposte secondo parallele.

Input: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Risultato

$$XYZK$$

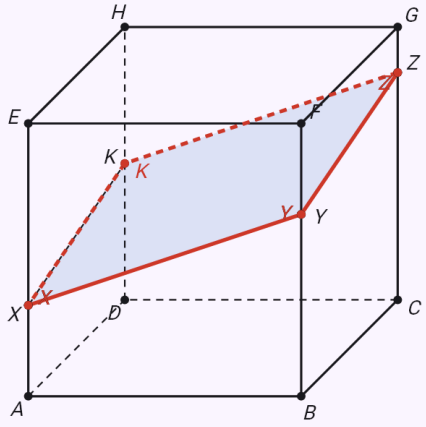
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato con tre regole: due punti della sezione in una faccia si congiungono; facce parallele sono tagliate secondo segmenti paralleli; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – disegniamo il cubo $ABCDEFGH$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AE alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo BF alla distanza $4\,\text{cm}$ dal vertice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo CG alla distanza $5\,\text{cm}$ dal vertice C
- 5. XY – i punti X, Y stanno nella faccia $ABFE$, li congiungiamo.
- 6. YZ – i punti Y, Z stanno nella faccia $BCGF$, li congiungiamo.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – la faccia $CDHG$ è parallela alla faccia $ABFE$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a YX per Z; essa incontra lo spigolo DH in K
- 8. XK – i punti X, K stanno nella faccia $ADHE$, li congiungiamo.
- 9. $XYZK$ – la sezione è il quadrilatero $XYZK$

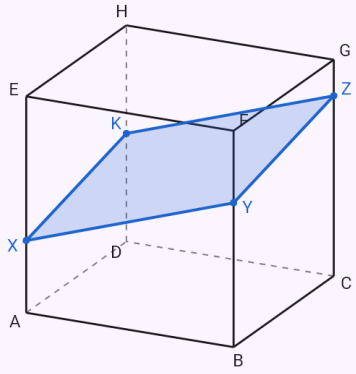
Grafico



Passo 9 di 9
9. $XYZK$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



L'esagono regolare per i punti medi degli spigoli – il punto ausiliario T_1.

Input: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Risultato

$$XYMZKL$$

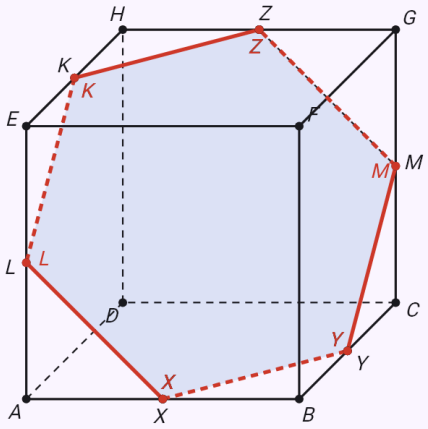
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato con tre regole: due punti della sezione in una faccia si congiungono; facce parallele sono tagliate secondo segmenti paralleli; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – disegniamo il cubo $ABCDEFGH$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AB alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo BC alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo GH alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice G
- 5. XY – i punti X, Y stanno nella faccia $ABCD$, li congiungiamo.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – la faccia $EFGH$ è parallela alla faccia $ABCD$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a XY per Z; essa incontra lo spigolo EH in K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – prolunghiamo il lato ZK e lo spigolo EF; il loro punto comune T_1 sta nel piano della faccia $EFGH$ e della faccia $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – la retta XT_1 sta nel piano della faccia $ABFE$; incontra lo spigolo AE in L
- 9. KL – i punti K, L stanno nella faccia $ADHE$, li congiungiamo.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – la faccia $CDHG$ è parallela alla faccia $ABFE$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a XL per Z; essa incontra lo spigolo CG in M
- 11. YM – i punti Y, M stanno nella faccia $BCGF$, li congiungiamo.

- 12. $XYMZKL$ – la sezione è l'esagono $XYMZKL$

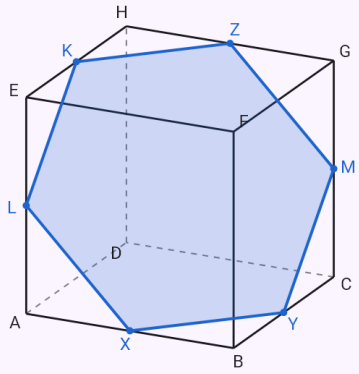
Grafico



Passo 12 di 12
$12.\ XYMZKL$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Una piramide tagliata dal piano dei punti medi di due spigoli laterali e di uno spigolo di base.

Input: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Risultato

$$XYKZL$$

$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

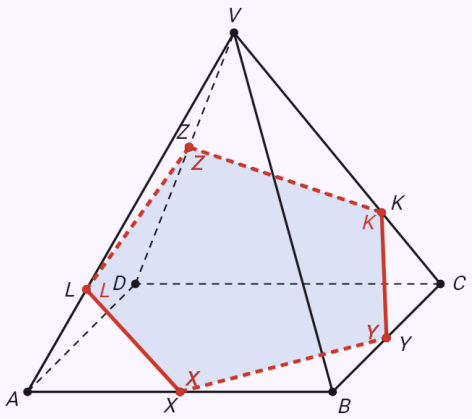
$$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$$

$$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato: due punti della sezione in una faccia si congiungono; un lato parallelo allo spigolo di un'altra faccia significa che il piano taglia quella faccia secondo una parallela a esso; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDV;\ a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – disegniamo la piramide regolare quadrangolare $ABCDV$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AB alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo BC alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice B
- 4. $Z;\ Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo DV alla distanza $4\,\text{cm}$ dal vertice D
- 5. XY – i punti X, Y stanno nella faccia $ABCD$, li congiungiamo.
- 6. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – prolunghiamo il lato XY e lo spigolo CD; il loro punto comune T_1 sta nel piano della faccia $ABCD$ e della faccia CDV
- 7. $ZK;\ K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – la retta ZT_1 sta nel piano della faccia CDV; incontra lo spigolo CV in K
- 8. YK – i punti Y, K stanno nella faccia BCV, li congiungiamo.
- 9. $T_2;\ T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – prolunghiamo il lato YK e lo spigolo BV; il loro punto comune T_2 sta nel piano della faccia BCV e della faccia ABV
- 10. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – la retta XT_2 sta nel piano della faccia ABV; incontra lo spigolo AV in L
- 11. ZL – i punti Z, L stanno nella faccia DAV, li congiungiamo.
- 12. $XYKZL$ – la sezione è il pentagono $XYKZL$

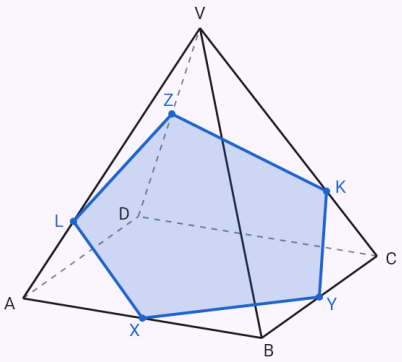
Grafico



Passo 12 di 12
12. $XYKZL$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Un punto sul prolungamento di uno spigolo – Y 2 cm oltre il vertice B.

Input: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Risultato

$$XLKZM$$

$$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

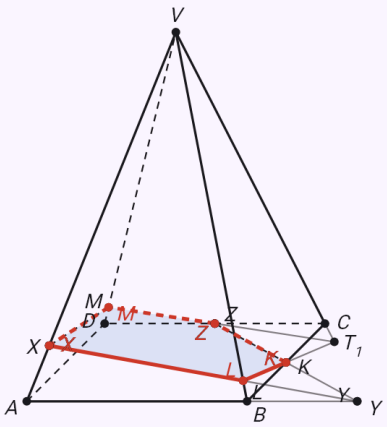
$$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

$$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato: due punti della sezione in una faccia si congiungono; un lato parallelo allo spigolo di un'altra faccia significa che il piano taglia quella faccia secondo una parallela a esso; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDV;\ a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – disegniamo la piramide regolare quadrangolare $ABCDV$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AV alla distanza $1\,\text{cm}$ dal vertice A
- 3. $Y;\ Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – il punto Y sulla semiretta AB alla distanza $6\,\text{cm}$ dal vertice A, oltre il vertice B – fuori dal solido.
- 4. $Z;\ Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo CD alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice C
- 5. $ZK;\ ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – i punti YZ stanno nel piano della faccia $ABCD$; la loro retta taglia la faccia secondo il segmento ZK
- 6. $XL;\ XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – i punti XY stanno nel piano della faccia ABV; la loro retta taglia la faccia secondo il segmento XL
- 7. KL – i punti K, L stanno nella faccia BCV, li congiungiamo.
- 8. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – prolunghiamo il lato KL e lo spigolo CV; il loro punto comune T_1 sta nel piano della faccia BCV e della faccia CDV
- 9. $ZM;\ M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – la retta ZT_1 sta nel piano della faccia CDV; incontra lo spigolo DV in M
- 10. XM – i punti X, M stanno nella faccia DAV, li congiungiamo.
- 11. $XLKZM$ – la sezione è il pentagono $XLKZM$

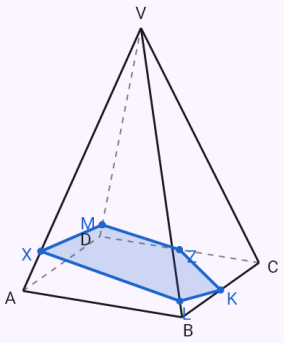
Grafico



Passo 11 di 11
11. $XLKZM$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Un punto interno al solido sulla sua diagonale – un piano verticale ausiliario.

Input: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Risultato

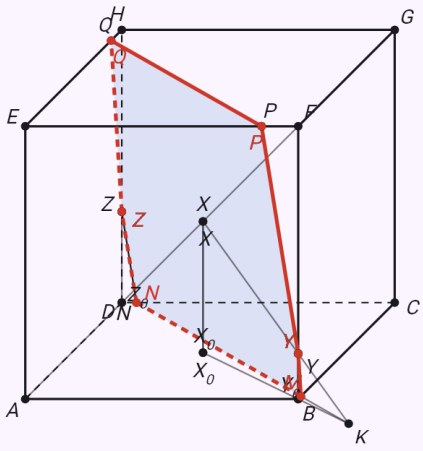
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato con tre regole: due punti della sezione in una faccia si congiungono; facce parallele sono tagliate secondo segmenti paralleli; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – disegniamo il cubo $ABCDEFGH$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – il punto X sul segmento AG alla distanza $5\,\text{cm}$ dal punto A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo BF alla distanza $1\,\text{cm}$ dal vertice B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo DH alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – il punto X è interno al solido, quindi usiamo il piano verticale ausiliario della retta XY: proiettiamo i punti sulla base (X_0Y_0), e le rette XY e X_0Y_0 si incontrano in K, dove la retta XY buca il piano della base $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – il punto X è interno al solido, quindi usiamo il piano verticale ausiliario della retta XZ: proiettiamo i punti sulla base (X_0Z_0), e le rette XZ e X_0Z_0 si incontrano in L, dove la retta XZ buca il piano della base $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – i punti KL stanno nel piano della faccia $ABCD$; la loro retta taglia la faccia secondo il segmento MN
- 8. ZN – i punti Z, N stanno nella faccia $CDHG$, li congiungiamo.
- 9. YM – i punti Y, M stanno nella faccia $BCGF$, li congiungiamo.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – la faccia $ABFE$ è parallela alla faccia $CDHG$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a NZ per Y; essa incontra lo spigolo EF in P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – la faccia $EFGH$ è parallela alla faccia $ABCD$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a MN per P; essa incontra lo spigolo EH in Q
- 12. ZQ – i punti Z, Q stanno nella faccia $ADHE$, li congiungiamo.
- 13. $QPYMNZ$ – la sezione è l'esagono $QPYMNZ$

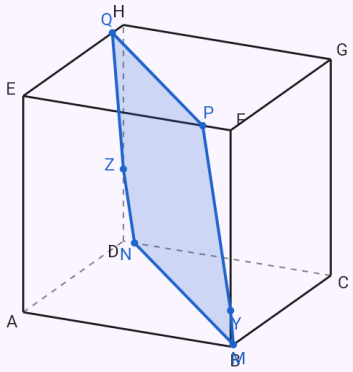
Grafico



Passo 13 di 13
13. $QPYMNZ$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Il punto X divide lo spigolo AB nel rapporto 1 : 2.

Input: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Risultato

$$XYZK$$

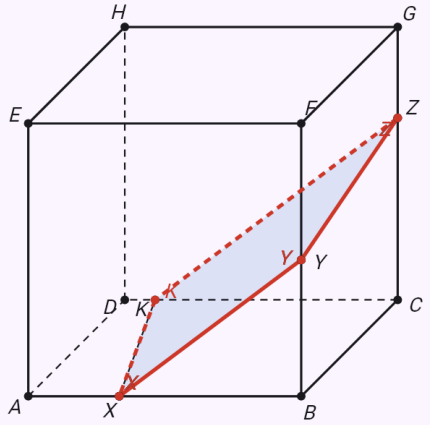
$$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 6\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato con tre regole: due punti della sezione in una faccia si congiungono; facce parallele sono tagliate secondo segmenti paralleli; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – disegniamo il cubo $ABCDEFGH$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – il punto X divide il segmento AB nel rapporto $1 : 2$; questo dà il punto X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo BF alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo CG alla distanza $4\,\text{cm}$ dal vertice C
- 5. XY – i punti X, Y stanno nella faccia $ABFE$, li congiungiamo.
- 6. YZ – i punti Y, Z stanno nella faccia $BCGF$, li congiungiamo.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – la faccia $CDHG$ è parallela alla faccia $ABFE$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a XY per Z; essa incontra lo spigolo CD in K
- 8. XK – i punti X, K stanno nella faccia $ABCD$, li congiungiamo.
- 9. $XYZK$ – la sezione è il quadrilatero $XYZK$

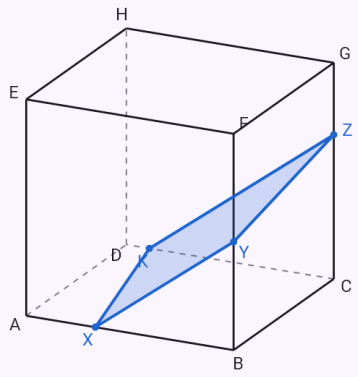
Grafico



Passo 9 di 9
9. $XYZK$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Una sezione di un prisma esagonale regolare – prima la base in vera forma.

Input: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

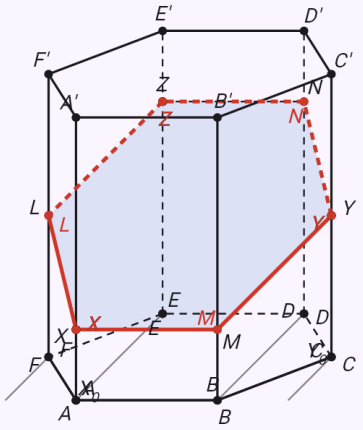
Risultato

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato con tre regole: due punti della sezione in una faccia si congiungono; facce parallele sono tagliate secondo segmenti paralleli; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – accanto disegniamo la base $ABCDEF$ in vera grandezza: l'esagono regolare di lato a, il lato AB sull'asse x (punti A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – dai vertici C, D, E, F tracciamo le perpendicolari alla retta AB; riportiamo i loro piedi invariati sull'asse x e da essi tracciamo metà della lunghezza della perpendicolare (la profondità) a 45° – la base $ABCDEF$ in assonometria cavaliera.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – disegniamo il prisma regolare esagonale $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AA' alla distanza $1\,\text{cm}$ dal vertice A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo CC' alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo EE' alla distanza $3\,\text{cm}$ dal vertice E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – i punti XY non stanno in una stessa faccia, quindi usiamo il piano verticale ausiliario della retta XY: proiettiamo i punti sulla base (X_0Y_0), e le rette XY e X_0Y_0 si incontrano in K, dove la retta XY buca il piano della base $ABCDEF$
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – i punti ZK stanno nel piano della faccia $EFF'E'$; la loro retta taglia la faccia secondo il segmento ZL
- 9. XL – i punti X, L stanno nella faccia $FAA'F'$, li congiungiamo.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – la faccia $BCC'B'$ è parallela alla faccia $EFF'E'$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a LZ per Y; essa incontra lo spigolo BB' in M
- 11. XM – i punti X, M stanno nella faccia $ABB'A'$, li congiungiamo.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – la faccia $CDD'C'$ è parallela alla faccia $FAA'F'$, quindi la sezione la taglia secondo la parallela a XL per Y; essa incontra lo spigolo DD' in N
- 13. ZN – i punti Z, N stanno nella faccia $DEE'D'$, li congiungiamo.
- 14. $XMYNZL$ – la sezione è l'esagono $XMYNZL$

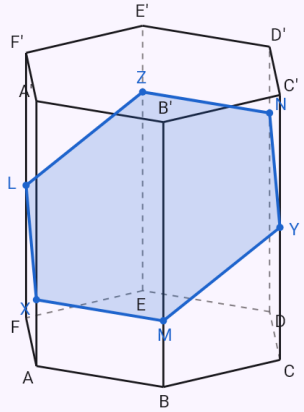
Grafico



Passo 14 di 14
14. $XMYNZL$

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Una sezione del tetraedro regolare per i punti medi di tre spigoli.

Input: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

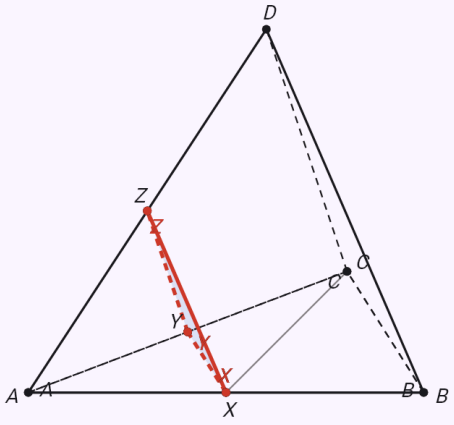
Risultato

$$XYZ$$
$$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZX| = 2\,\text{cm}$$

Passaggi

- Analisi ($a = 4\,\text{cm}$): il piano di sezione è dato dai punti X, Y, Z. La sezione si costruisce lato per lato: due punti della sezione in una faccia si congiungono; un lato parallelo allo spigolo di un'altra faccia significa che il piano taglia quella faccia secondo una parallela a esso; la retta di un lato prolungata incontra la retta di uno spigolo in un punto che sta nei piani di entrambe le facce di quello spigolo.
- 1. $ABC;\ a = 4\,\text{cm}$ – accanto disegniamo la base ABC in vera grandezza: il triangolo equilatero di lato a, il lato AB sull'asse x (punti A_0, B_0, …).
- 2. $ABC;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – dai vertici C tracciamo le perpendicolari alla retta AB; riportiamo i loro piedi invariati sull'asse x e da essi tracciamo metà della lunghezza della perpendicolare (la profondità) a 45° – la base ABC in assonometria cavaliera.
- 3. $ABCD;\ a = 4\,\text{cm}$ – disegniamo il tetraedro regolare $ABCD$ in assonometria cavaliera (la profondità a 45°, dimezzata), gli spigoli nascosti tratteggiati.
- 4. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – il punto X sullo spigolo AB alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice A
- 5. $Y;\ Y \in AC,\ |AY| = 2\,\text{cm}$ – il punto Y sullo spigolo AC alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice A
- 6. $Z;\ Z \in AD,\ |AZ| = 2\,\text{cm}$ – il punto Z sullo spigolo AD alla distanza $2\,\text{cm}$ dal vertice A
- 7. XY – i punti X, Y stanno nella faccia ABC, li congiungiamo.
- 8. XZ – i punti X, Z stanno nella faccia ABD, li congiungiamo.
- 9. YZ – i punti Y, Z stanno nella faccia CAD, li congiungiamo.
- 10. XYZ – la sezione è il triangolo XYZ

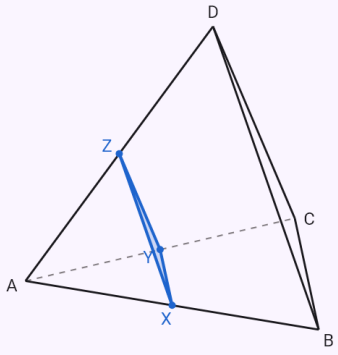
Grafico



Passo 10 di 10
10. XYZ

L'analisi mostra uno schizzo della costruzione finita con gli elementi dati. Poi con le frecce percorri la costruzione passo per passo – gli elementi aggiunti in un passo sono evidenziati.

La sezione nello spazio – ruotala con un dito



Limiti noti

- Per ora un triangolo (lati, angoli, l'altezza e la mediana relative al lato dato, i raggi r e ϱ nelle combinazioni sopra), quattro luoghi geometrici di base, cinque problemi di circonferenze e tangenti, quadrilateri nelle combinazioni del suggerimento del modulo e sezioni di un cubo, un parallelepipedo

rettangolo, prismi e piramidi regolari (una base da 3 a 6 lati) e del tetraedro regolare; un quadrilatero generico, altezze e mediane relative ad altri lati e altri solidi seguiranno.

- I problemi con relazioni accettano esattamente due relazioni su una delle cinque figure date; le relazioni tra più punti si danno come relazioni generali.
- Relazioni generali: al massimo 8 punti e 10 relazioni, una costruzione solo dal catalogo delle mosse; un'analisi come «triangoli simili» non è automatizzata.
- Inseriti solo nel modulo – non a parole né da una foto.