Mathtrace – manuale

I. Equazioni, disequazioni ed espressioni

Indice

I. Equazioni, disequazioni ed espressioni

1. Equazioni e disequazioni lineari
2. Equazioni di secondo grado
3. Equazioni di grado superiore
4. Equazioni fratte
5. Equazioni irrazionali
6. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche
7. Valore assoluto
8. Equazioni e disequazioni goniometriche
9. Disequazioni e sistemi di disequazioni
10. Sistemi di equazioni
11. Equazioni e disequazioni con un parametro
12. Formule inverse
13. Semplificare espressioni
14. Divisibilità e numeri primi
15. Angoli in gradi, primi e secondi
16. Percentuali, rapporti e regola del tre
17. Conversioni di unità
18. Logica e insiemi
19. Numeri complessi

1. Equazioni e disequazioni lineari

L’app trasforma un’equazione lineare come si fa a scuola – sviluppa le parentesi, porta l’incognita da una parte e divide. In una disequazione fa attenzione al cambio di verso quando si moltiplica per un numero negativo e scrive il risultato come intervallo; il grafico mostra entrambi i membri come rette e segna la soluzione sull’asse x.

Con il chip «Dettagliati» (o in modo permanente con l’interruttore «Passaggi dettagliati delle equazioni» nella schermata iniziale) i passaggi seguono il modo in cui le equazioni si insegnano alle medie: la stessa operazione su entrambi i membri (/ −4x, / :2), sotto la riga intermedia e il risultato. L’incognita va dal lato in cui il suo coefficiente risulta positivo.

Esempi

Un’equazione con parentesi.

Input: `3(x - 2) = 2x + 5`

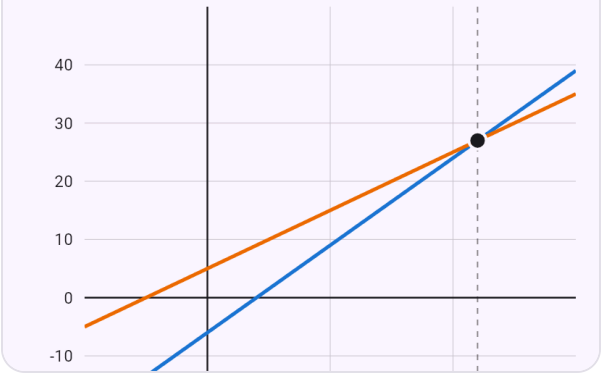
Risultato

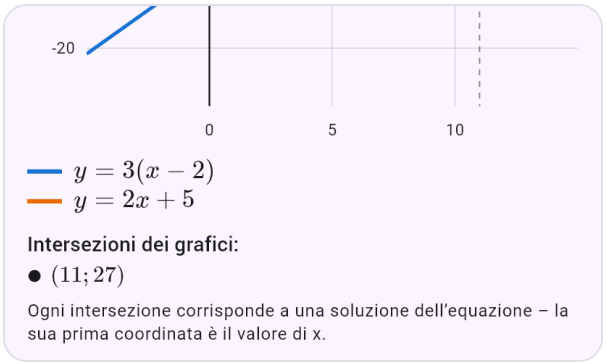
$x = 11$

Passaggi

- Portiamo tutto in un membro: $x - 11 = 0$
- Lasciamo i termini con l’incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $x = 11$

Grafico





Intersezioni dei grafici:

- $(11; 27)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Una disequazione – dividendo per un numero negativo il verso cambia.

Input: `2x - 3 < 5x + 6`

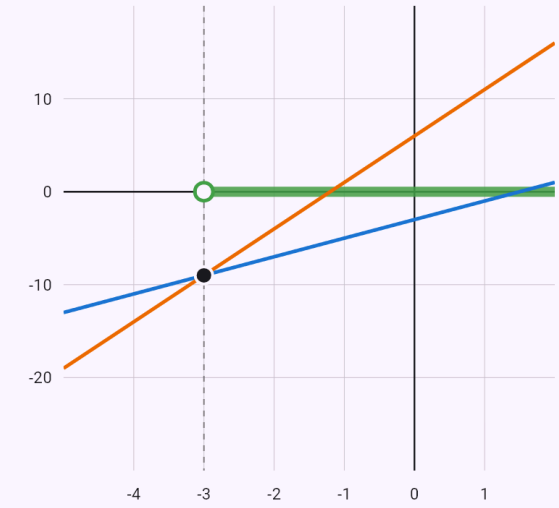
Risultato

$$x \in (-3;\, \infty)$$

Passaggi

- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $-3x < 9$
- Dividiamo per il numero negativo -3, il verso della disequazione si inverte: $x > -3$

Grafico



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $(-3; -9)$

Passaggi dettagliati – la stessa operazione su entrambi i membri, scritta come a scuola.

Input: `4x + 3 = 6x + 7` Dettagliati

Risultato

$$x = -2$$

Passaggi

- Sottraiamo $4x$ da entrambi i membri

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

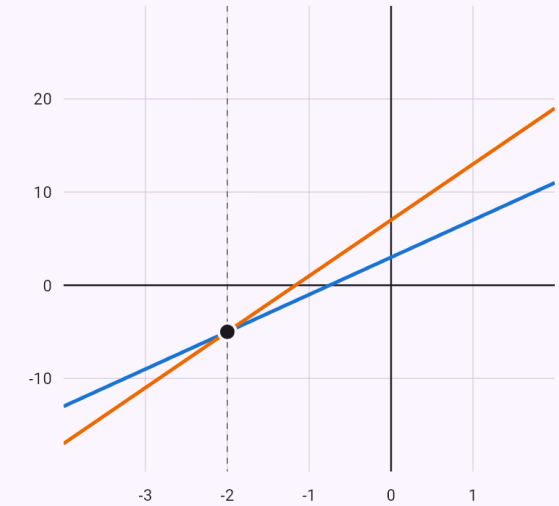
- Sottraiamo 7 da entrambi i membri

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Dividiamo entrambi i membri per 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Grafico



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Intersezioni dei grafici:

- $(-2; -5)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Frazioni – entrambi i membri moltiplicati per il denominatore comune.

Input: `x/2 + x/3 = 10` Dettagliati

Risultato

$$x = 12$$

Passaggi

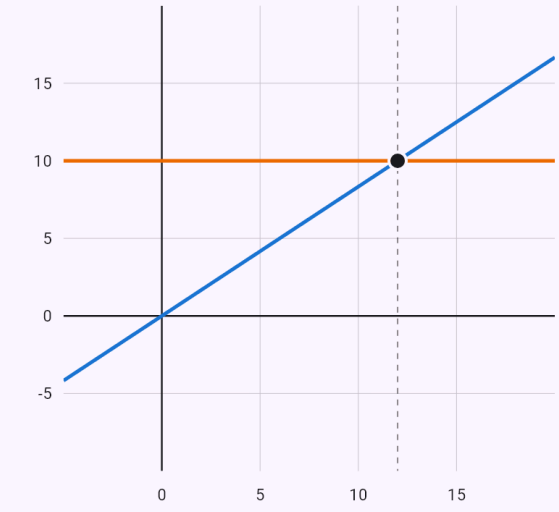
- Moltiplichiamo entrambi i membri per 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Dividiamo entrambi i membri per 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Grafico



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Intersezioni dei grafici:

- $(12; 10)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

2. Equazioni di secondo grado

L’app porta un’equazione di secondo grado alla forma ax² + bx + c = 0 e la risolve con il discriminante e la formula risolutiva; riconosce anche una radice doppia. Se l’equazione non ha soluzioni reali, lo dice, e il pulsante «Mostra la soluzione complessa» mostra le radici complesse.

Esempi

Due radici reali.

Input: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Risultato

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

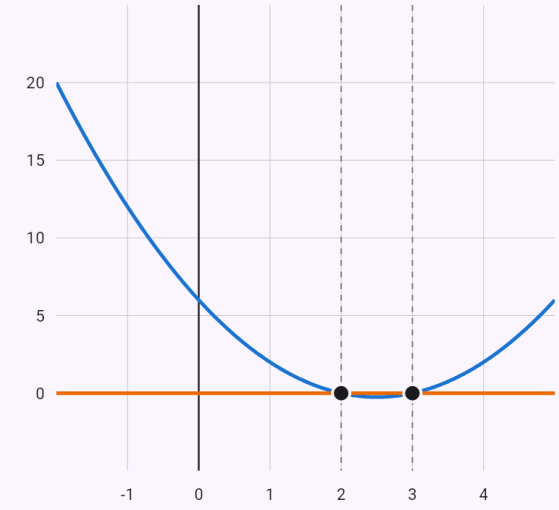
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Calcoliamo il discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Grafico



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Intersezioni dei grafici:

● $(2; 0)$ ● $(3; 0)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Un discriminante negativo – radici complesse.

Input: `x^2 + 2x + 5 = 0` Mostra la soluzione complessa

Risultato

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

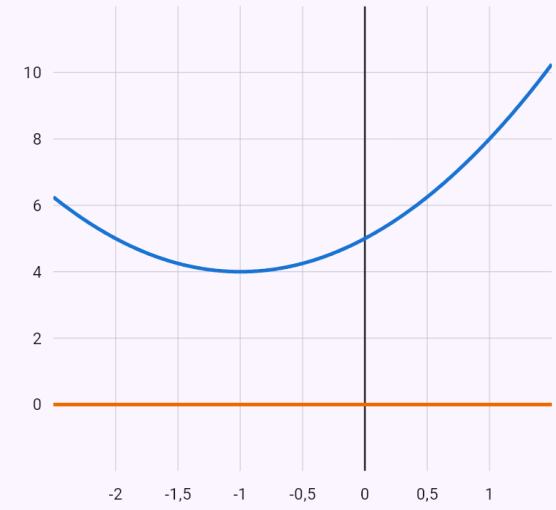
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Calcoliamo il discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Il discriminante è negativo – nei numeri complessi:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Grafico



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

I grafici non si intersecano – l'equazione non ha soluzioni reali.

3. Equazioni di grado superiore

L'app trasforma un'equazione biquadratica in una di secondo grado per sostituzione. Un'equazione generale di grado superiore viene scomposta con la regola di Ruffini: le radici si cercano tra i divisori del termine noto e ogni radice trovata viene divisa finché resta un'equazione di secondo grado.

Esempi

Un'equazione biquadratica con la sostituzione y = x².

Input: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Risultato

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

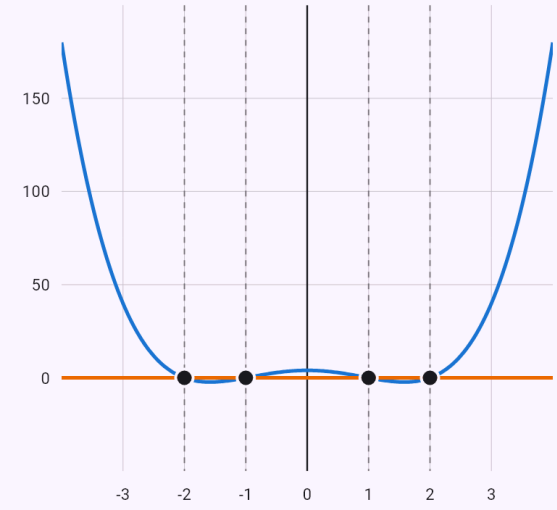
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- La sostituzione $u = x^2$ trasforma l'equazione in una di secondo grado: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Torniamo all'incognita originale: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Torniamo all'incognita originale: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Grafico



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Intersezioni dei grafici:

● $(-2; 0)$ ● $(-1; 0)$ ● $(1; 0)$ ● $(2; 0)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

La regola di Ruffini – radici tra i divisori del termine noto.

Input: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Risultato

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

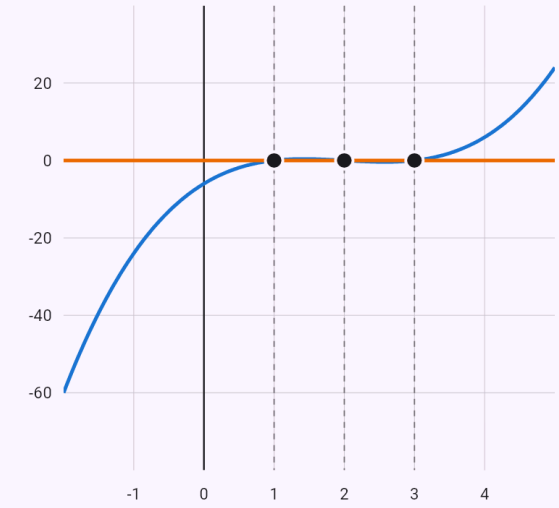
- Le radici razionali possono essere solo divisori del termine noto -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- La regola di Ruffini conferma la radice $x = 1$ e divide il polinomio per essa:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Calcoliamo il discriminante:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

Grafico



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Intersezioni dei grafici:

● $(1;0)$ ● $(2;0)$ ● $(3;0)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

4. Equazioni fratte

Per un’equazione con l’incognita al denominatore l’app indica prima le condizioni di esistenza, poi moltiplica l’equazione per il denominatore comune e la risolve. Confronta le radici con le condizioni e scarta quelle che non le soddisfano.

Esempi

Condizioni, denominatore comune, un’equazione di secondo grado.

Input: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Risultato

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Condizioni: $x \neq 1$

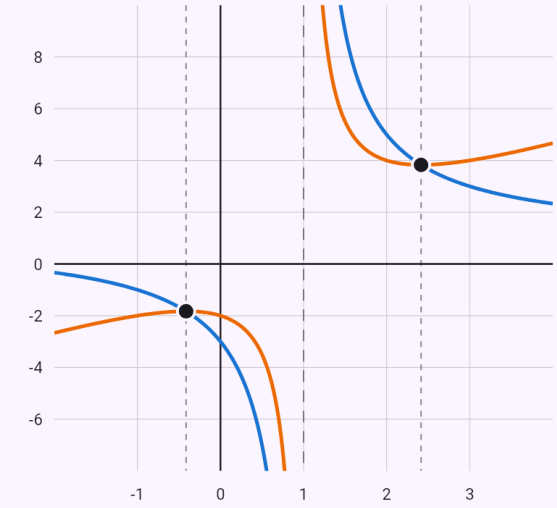
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $x \neq 1$
- Moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore $x - 1$: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- La radice $x = 1 - \sqrt{2}$ soddisfa le condizioni.
- La radice $x = 1 + \sqrt{2}$ soddisfa le condizioni.

Grafico



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

5. Equazioni irrazionali

L'app risolve un'equazione con l'incognita sotto radice isolando la radice ed elevando al quadrato. Elevare al quadrato può aggiungere radici che non soddisfano l'equazione – per questo segue sempre una verifica e le radici che non la superano vengono scartate.

Esempi

Elevamento al quadrato e verifica – una delle radici non soddisfa l'equazione.

Input: `sqrt(x+5) = x - 1`

Risultato

$x = 4$

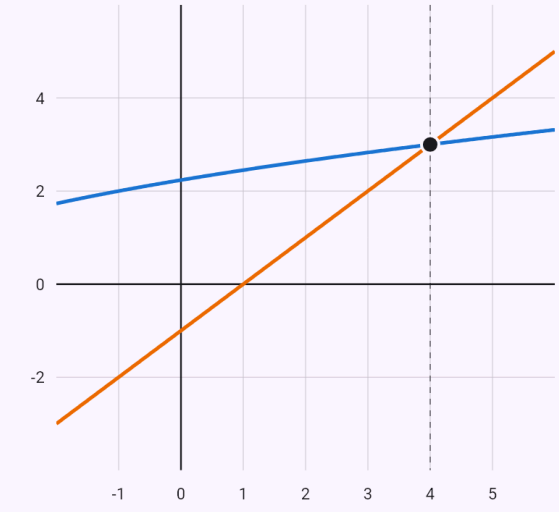
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Eleviamo al quadrato entrambi i membri (non è un passaggio equivalente, quindi verifichiamo le radici): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Verifica per $x = -1$: primo membro = 2, secondo membro = -2, sono diversi – la radice non va bene.
- Verifica per $x = 4$: primo membro = 3, secondo membro = 3, sono uguali – la radice va bene.

Grafico



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Intersezioni dei grafici:

- $(4; 3)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Limiti noti

- Le disequazioni irrazionali non sono ancora risolte.

6. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

L’app risolve un’equazione esponenziale riducendo alla stessa base, passando ai logaritmi o per sostituzione; una logaritmica combinando i logaritmi con le proprietà ed eliminando il logaritmo, sempre con le condizioni di esistenza. Le disequazioni si risolvono tramite la monotonia – per una base minore di 1 il verso cambia. Il logaritmo di un quoziente il cui numeratore o denominatore non può essere negativo (una radice) si scompone come a scuola in una differenza di logaritmi.

Equazioni con basi diverse: $a^x + b^x = c^x$ con basi da due numeri primi ($25^x + 10^x = 4^x$) si dividono per una potenza e con $t = (5/2)^x$ diventano di secondo grado; logaritmi con basi diverse si convertono in una sola ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

I logaritmi le cui basi sono potenze di uno stesso numero ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) si convertono in una sola base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), l’equazione si moltiplica e i logaritmi si combinano. Un logaritmo con l’incognita nella base ($\log_x 8 = 3$) si elimina con la definizione ($x^3 = 8$) con le condizioni $x > 0$, $x \neq 1$. Un’equazione con l’incognita sia nella base sia nell’esponente (x^(log x) = 100) si risolve passando ai logaritmi e con la sostituzione t = log x. Le disequazioni con la sostituzione t = log(x + 1) e i sistemi di disequazioni logaritmiche ed esponenziali si risolvono come singole disequazioni – tramite la monotonia.

Equazioni e disequazioni con funzioni iperboliche si riscrivono con la definizione ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) come esponenziali e si risolvono con la sostituzione $t = e^x$; arsinh x = c si risolve con la funzione inversa (x = sinh c).

Esempi

La sostituzione t = 2ˣ.

Input: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Risultato

$x = 2$

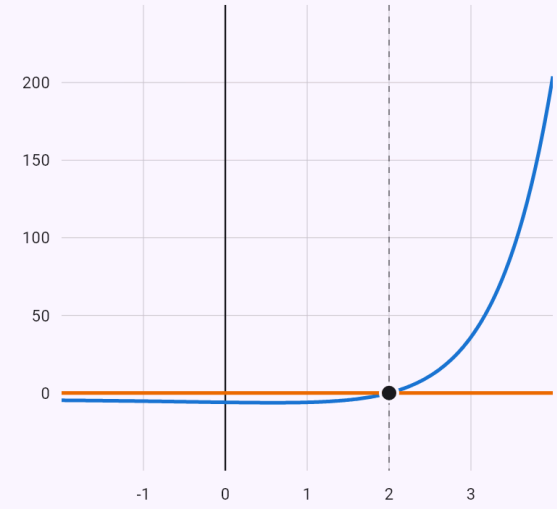
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Sostituiamo $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- L'equazione $2^x = -1$ non ha soluzioni reali.
- Torniamo all'incognita originale: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Grafico



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Intersezioni dei grafici:

- $(2; 0)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Combinazione dei logaritmi, condizioni.

Input: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Risultato

$$x = 3$$

Condizioni: $x > 1$

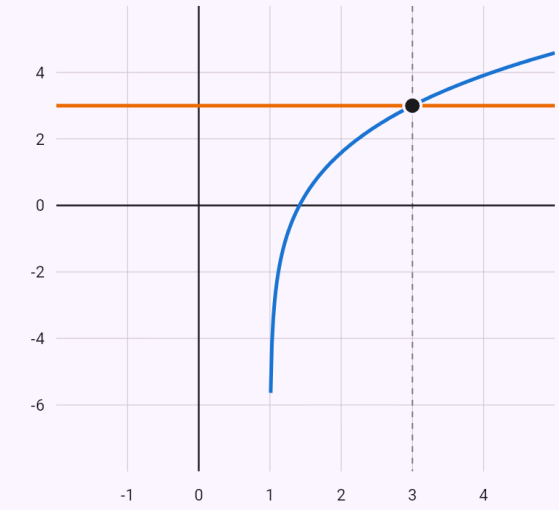
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Dominio – condizioni: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Uniamo i logaritmi con le proprietà dei logaritmi: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Eliminiamo il logaritmo: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - 9 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 6}{2}$
- La radice $x = -3$ non soddisfa la condizione $x > 1$, quindi non è una soluzione.
- La radice $x = 3$ soddisfa le condizioni.

Grafico



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Intersezioni dei grafici:

- $(3; 3)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Basi diverse – dividiamo per 4^d, sostituiamo $t = (5/2)^d$.

Input: `25^d + 10^d = 4^d`

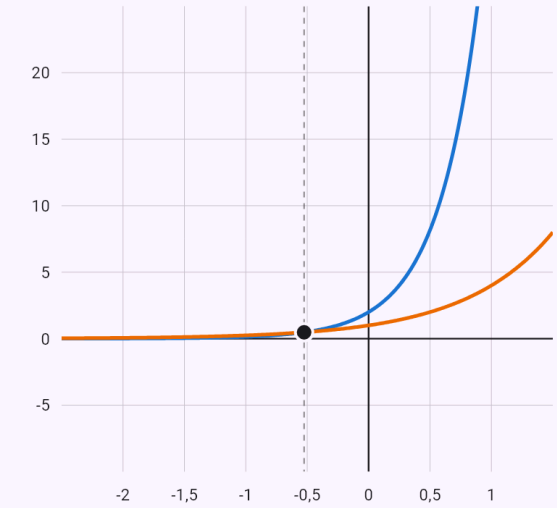
Risultato

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Passaggi

- Dividiamo l'equazione per il positivo 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Sostituiamo $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Calcoliamo il discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- L'equazione $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ non ha soluzioni reali.
- Torniamo all'incognita originale
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Grafico



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di d.

Una base minore di 1 – il verso della disequazione cambia.

Input: `(1/2)^x > 8`

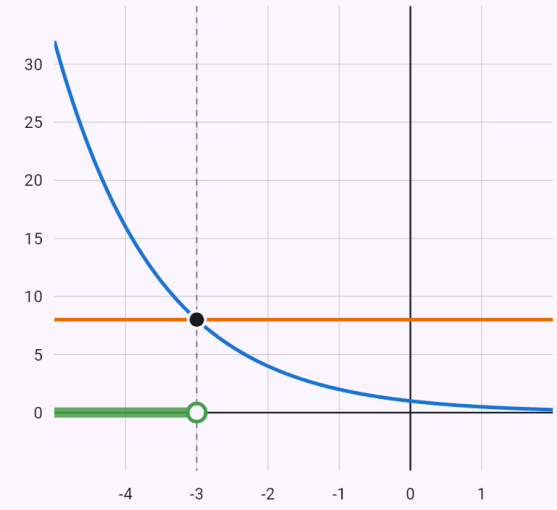
Risultato

$$x \in (-\infty;\ -3)$$

Passaggi

- Scriviamo entrambi i membri come potenze con la stessa base: $2^{-x} > 2^3$
- La funzione esponenziale di base 2 è crescente – gli esponenti soddisfano la disequazione con lo stesso verso: $-x > 3$
- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $-x > 3$
- Dividiamo per il numero negativo -1, il verso della disequazione si inverte: $x < -3$
- La soluzione di questa disequazione è $x \in (-\infty;\ -3)$

Grafico



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $(-3; 8)$

Tangente iperbolica dalla definizione – sostituzione t = e²ˣ.

Input: `tanh x = 1/2`

Risultato

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Sostituiamo le definizioni

$$\tanh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Sostituiamo $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Risolviamo: $t = 3$
- Torniamo all'incognita originale: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

L’incognita nella base – dalla definizione; la radice −1 non soddisfa le condizioni.

Input: `log_x (2x+3) = 2`

Risultato

$$x = 3$$

Condizioni: $x > 0,\ x \neq 1$

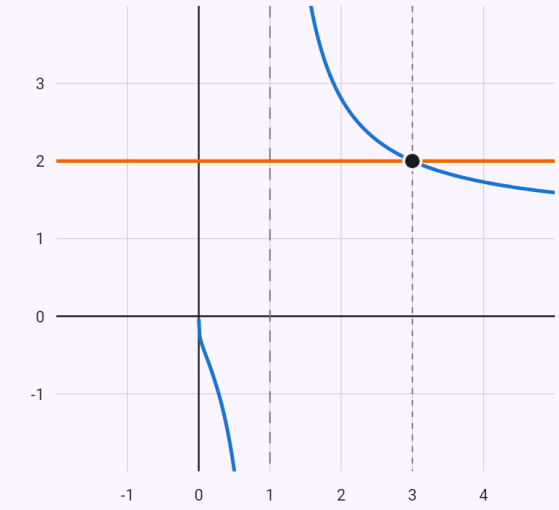
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Dominio – condizioni: $x > 0,\ x \neq 1$
- Eliminiamo il logaritmo: $x^2 = 2x + 3$
- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- La radice $x = -1$ non soddisfa la condizione $x > 0,\ x \neq 1$, quindi non è una soluzione.
- La radice $x = 3$ soddisfa le condizioni.

Grafico



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Intersezioni dei grafici:

- $(3; 2)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

L’incognita nella base e nell’esponente – passiamo ai logaritmi, sostituiamo t = log x.

Input: `x^(log x) = 100`

Risultato

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Condizioni: $x > 0$

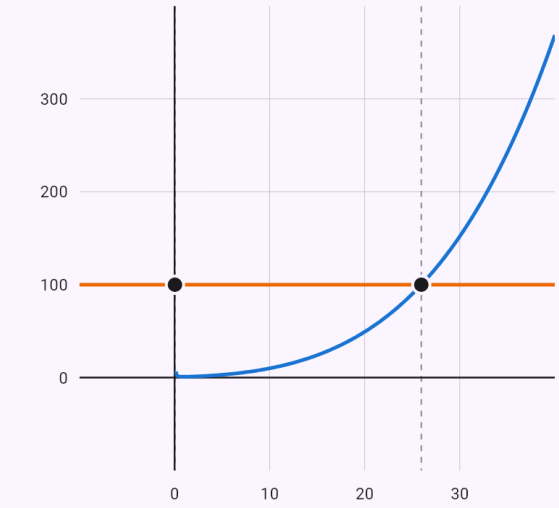
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- Passiamo ai logaritmi in entrambi i membri: $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Dominio – condizioni: $x > 0$
- Sostituiamo $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Torniamo all’incognita originale: $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Torniamo all’incognita originale: $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- La radice $x = 10^{-\sqrt{2}}$ soddisfa le condizioni.
- La radice $x = 10^{\sqrt{2}}$ soddisfa le condizioni.

Grafico



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Il logaritmo di un quoziente con una radice – scomposto in una differenza di logaritmi.

Input: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Risultato

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Condizioni: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

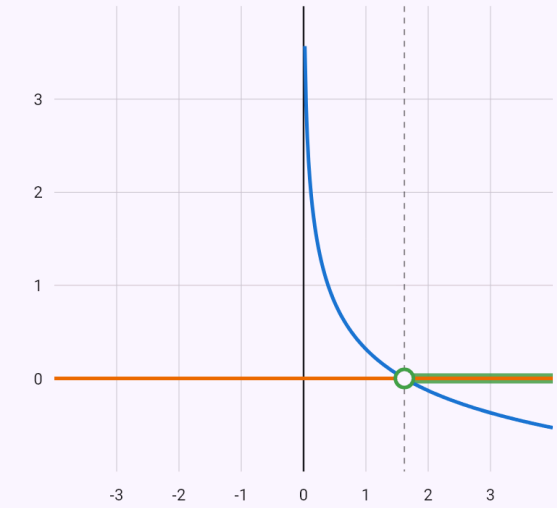
Passaggi

- Una parte del quoziente non può essere negativa, quindi il quoziente è positivo esattamente quando lo sono entrambe le parti – scomponiamo quindi il logaritmo del quoziente in una differenza di logaritmi e portiamo quello sottratto nell'altro membro: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Dominio – condizioni: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Il logaritmo in base 3 è crescente – lo eliminiamo e manteniamo il verso della disequazione: $\sqrt{x+1} < x$
- Portiamo tutto in un membro: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Dominio – condizioni: $x \geq -1$
- I punti critici dividono la retta numerica in intervalli: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- La soluzione di questa disequazione è $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

Grafico



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Limiti noti

- I logaritmi con basi diverse che non sono potenze di uno stesso numero ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$) si risolvono solo numericamente.
- Le equazioni iperboliche che portano a un'equazione di 4° grado in e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$) si risolvono solo numericamente; le disequazioni con funzioni iperboliche inverse non sono ancora supportate.

7. Valore assoluto

L'app risolve equazioni e disequazioni con valori assoluti in due modi, che scegli con un chip: «Dalla definizione» – una scorciatoia che scrive |a| = b o |a| < b – e «Punti di annullamento» – dividere la retta reale in intervalli su cui ogni valore assoluto ha segno costante. Senza scelta sceglie da sola quello più adatto.

I valori assoluti annidati (||x| − 2| = 1) si risolvono allo stesso modo: dalla definizione passo per passo dall'esterno verso l'interno, con i punti di annullamento dall'interno verso l'esterno – prima i punti di annullamento dei valori assoluti interni, poi il valore assoluto rimanente su ogni intervallo.

Una disequazione |f| < |g| (solo un valore assoluto in ogni membro) si può risolvere anche con il chip «Elevando al quadrato»: entrambi i membri sono non negativi, quindi si eleva al quadrato e si risolve come di secondo grado. Un'espressione con soli valori assoluti (|x − 1| + |x + 2|) si semplifica a tratti – punti di annullamento, tabella dei segni e l'espressione senza valori assoluti su ogni intervallo. Dopo una virgola può seguire un intervallo (|x| − 2, x < 0): l'espressione viene allora semplificata solo su di esso.

Esempi

Un valore assoluto – scritto dalla definizione.

Input: `|2x - 1| = 5`

Risultato

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

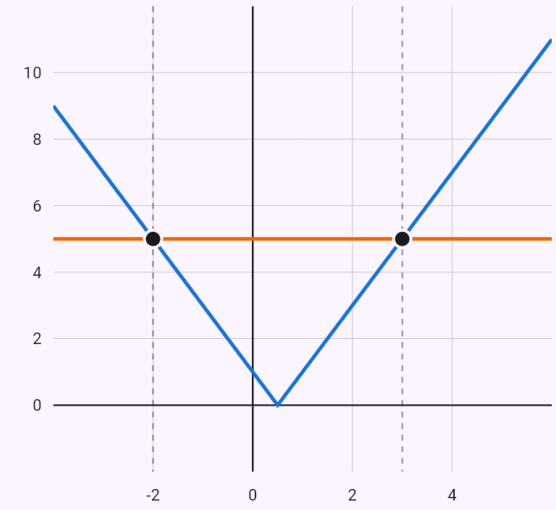
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- C'è un solo valore assoluto e dall'altra parte un numero – basta usare la definizione.
- Per definizione $|2x-1| = 5$ vale esattamente quando $2x - 1 = 5$ oppure $2x - 1 = -5$
- Risolviamo: $2x - 1 = 5 \;\Rightarrow\; x = 3$
- Risolviamo: $2x - 1 = -5 \;\Rightarrow\; x = -2$

Grafico



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Intersezioni dei grafici:

● $(-2; 5)$ ● $(3; 5)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Due valori assoluti – il metodo dei punti di annullamento.

Input: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Risultato

$$x \in (-3;\ 2)$$

Passaggi

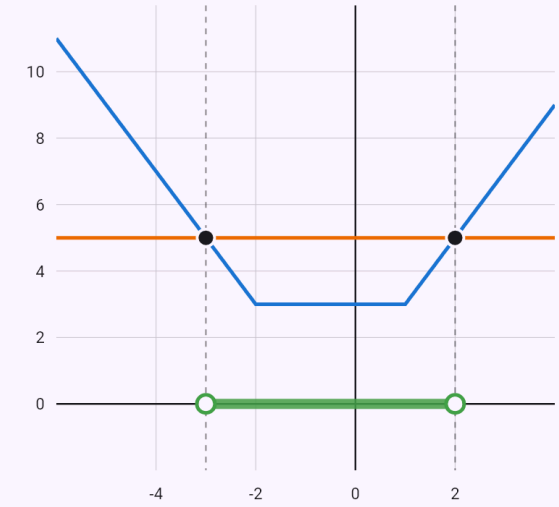
- Eliminiamo i valori assoluti con il metodo degli zeri: gli zeri dividono la retta numerica in intervalli, in ognuno dei quali le espressioni all'interno hanno segno costante.
- Zeri delle espressioni all'interno dei valori assoluti: $x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1, \quad x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = -2$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\ -2)$	$[-2;\ 1)$	$[1;\ \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Nell'intervallo $(-\infty;\ -2)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Risolviamo: $-2x - 1 < 5$
- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $-2x < 6$
- Dividiamo per il numero negativo -2, il verso della disequazione si inverte: $x > -3$
- La soluzione di questa disequazione è $x \in (-3;\ \infty)$
- Intersezione con l'intervallo $(-\infty;\ -2)$: $x \in (-3;\ -2)$
- Nell'intervallo $[-2;\ 1)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- L'incognita si è eliminata ed è rimasta l'affermazione vera $3 < 5$ – tutto l'intervallo $[-2;\ 1)$ è soluzione.
- Nell'intervallo $[1;\ \infty)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Risolviamo: $2x + 1 < 5$
- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $2x < 4$
- Dividiamo per il numero positivo 2, il verso della disequazione resta: $x < 2$

- La soluzione di questa disequazione è $x \in (-\infty;\ 2)$
- Intersezione con l'intervallo $[1;\ \infty)$: $x \in [1;\ 2)$
- La soluzione è l'unione dei risultati: $x \in (-3;\ 2)$

Grafico



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

● $(-3;\ 5)$ ● $(2;\ 5)$

Un valore assoluto annidato – dalla definizione dall'esterno verso l'interno.

Input: `||x| - 2| = 1`

Risultato

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

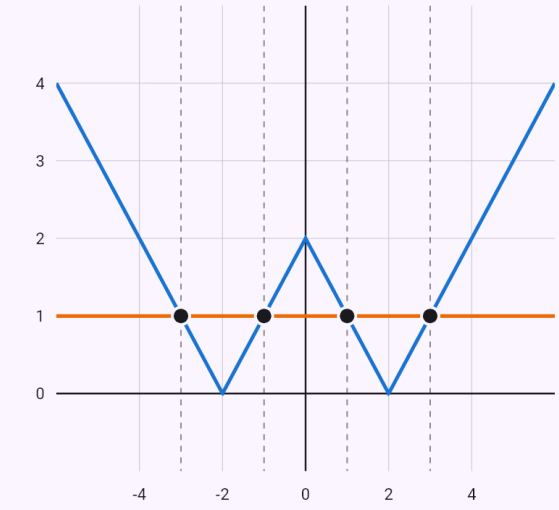
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

- C'è un solo valore assoluto e dall'altra parte un numero – basta usare la definizione.
- Per definizione $||x| - 2| = 1$ vale esattamente quando $|x| - 2 = 1$ oppure $|x| - 2 = -1$
- Isoliamo il valore assoluto: $|x| = 3$
- Per definizione $|x| = 3$ vale esattamente quando $x = 3$ oppure $x = -3$
- Isoliamo il valore assoluto: $|x| = 1$
- Per definizione $|x| = 1$ vale esattamente quando $x = 1$ oppure $x = -1$

Grafico



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Intersezioni dei grafici:

● $(-3; 1)$ ● $(-1; 1)$ ● $(1; 1)$ ● $(3; 1)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Valori assoluti in entrambi i membri – elevamento al quadrato.

Input: `|x - 1| < |2x + 3|` Elevando al quadrato

Risultato

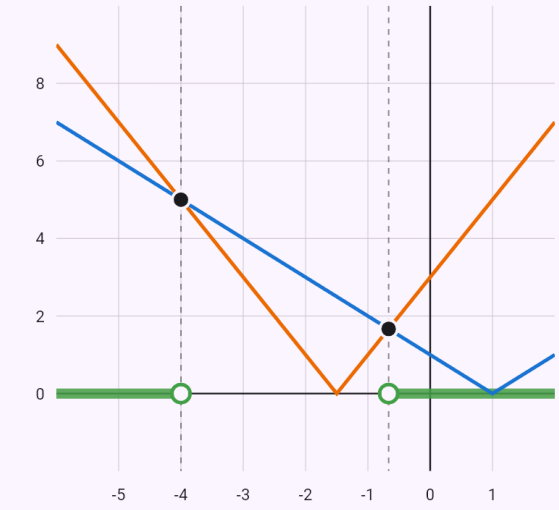
$$x \in (-\infty;\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3};\, \infty\right)$$

Passaggi

- Entrambi i membri sono solo valori assoluti – entrambi non negativi, quindi possiamo elevare la disequazione al quadrato (un passaggio equivalente).
- Eleviamo al quadrato entrambi i membri: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Portiamo tutto in un membro: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Scomposizione: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- I punti critici dividono la retta numerica in intervalli: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\, -4)$	$(-4;\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3};\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Grafico



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $(-4;\, 5)$
- $\left(-\frac{2}{3};\, \frac{5}{3}\right)$

Un’espressione con valori assoluti – a tratti sugli intervalli.

Input: `|x - 1| + |x + 2|`

Risultato

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -2) \\ 3, & x \in [-2;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1;\, \infty) \end{cases}$$

Passaggi

- Eliminiamo i valori assoluti con il metodo degli zeri: gli zeri dividono la retta numerica in intervalli, in ognuno dei quali le espressioni all’interno hanno segno costante.
- Zeri delle espressioni all’interno dei valori assoluti: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\, -2)$	$[-2;\, 1)$	$[1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Nell’intervallo $(-\infty;\, -2)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Nell’intervallo $[-2;\, 1)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Nell’intervallo $[1;\, \infty)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Un’espressione con valori assoluti su un intervallo dato – a tratti solo lì.

Input: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Risultato

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1;\, \infty) \end{cases}$$

Passaggi

- Semplifichiamo l’espressione solo per i valori dell’intervallo $(-1;\, \infty)$ – i valori assoluti si eliminano secondo i segni delle espressioni al loro interno.
- Zeri delle espressioni all’interno dei valori assoluti: $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-1;\, 1)$	$[1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- Nell’intervallo $(-1;\, 1)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Nell’intervallo $[1;\, \infty)$ eliminiamo i valori assoluti secondo i segni: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Limiti noti

- L’elevamento al quadrato è offerto solo per una disequazione con un solo valore assoluto in ogni membro.

8. Equazioni e disequazioni goniometriche

L’app riduce un’equazione a equazioni elementari come sin x = a e le risolve sulla circonferenza goniometrica: trova gli angoli di un giro e aggiunge multipli del periodo ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). La circonferenza è disegnata direttamente nei passaggi.

Preferisce le formule note – duplicazione e bisezione, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, prostaferesi –, poi la scomposizione, la sostituzione t = sin x, la divisione di un’equazione omogenea per $\cos^n x$ e l’angolo aggiunto per $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Il risultato viene anche verificato numericamente su un intero periodo.

Un’incognita scritta con una lettera latina (x, t) è in radianti, con una greca (alpha, β, …) in gradi – come un input con il segno ° (sin(x + 30°)). Per ottenere le radici in un intervallo dato, aggiungi l’intervallo dopo una virgola o nella riga successiva.

Una disequazione si risolve con un arco della circonferenza goniometrica, una più complessa con gli zeri su un periodo; il risultato sono intervalli con il periodo.

Esempi

Due famiglie di soluzioni, gli angoli sulla circonferenza goniometrica.

Input: `sin x = 1/2`

Risultato

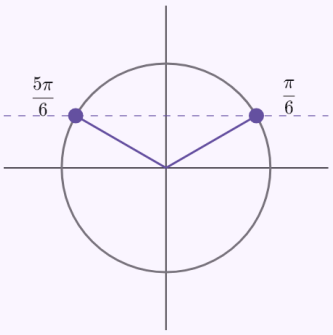
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

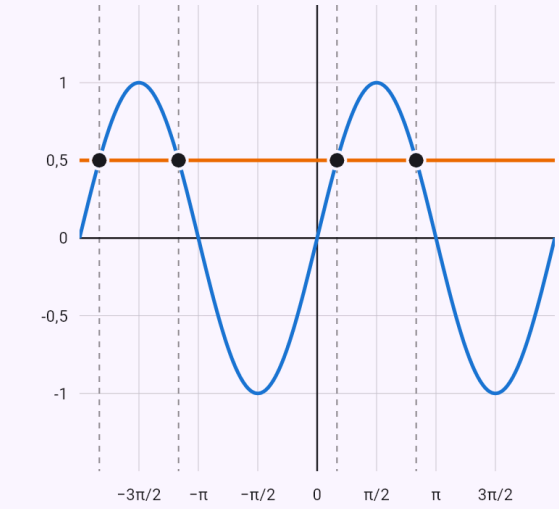
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

- Equazione elementare $\sin x = \frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Grafico



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

La sostituzione t = sin x e un'equazione di secondo grado.

Input: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Risultato

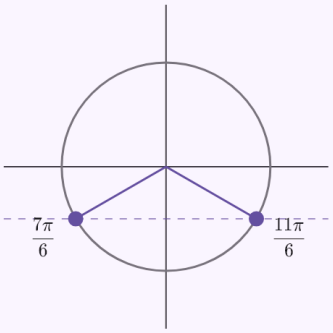
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Non c'è una via esatta – un metodo numerico mostra da dove viene il «≈»:

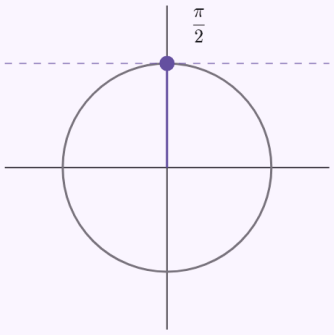
Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

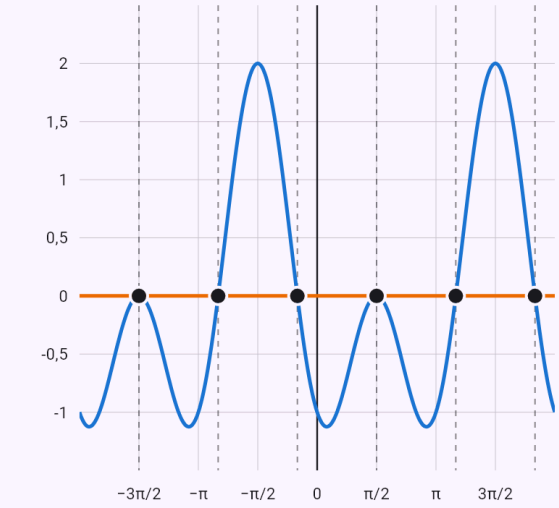
- Sostituiamo $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Equazione elementare $\sin x = -\frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Equazione elementare $\sin x = 1$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{2}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Grafico



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

La formula per sin 2x e la scomposizione.

Input: `sin 2x = cos x`

Risultato

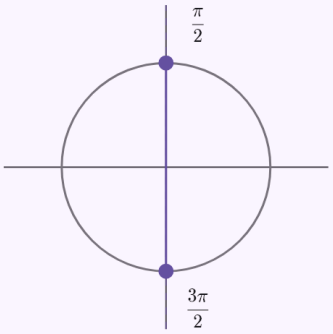
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Non c'è una via esatta – un metodo numerico mostra da dove viene il «≈»:

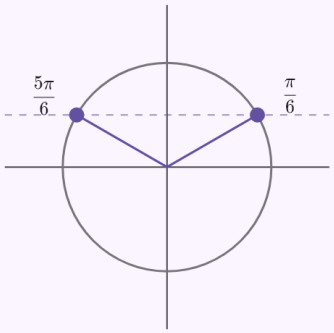
Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

Passaggi

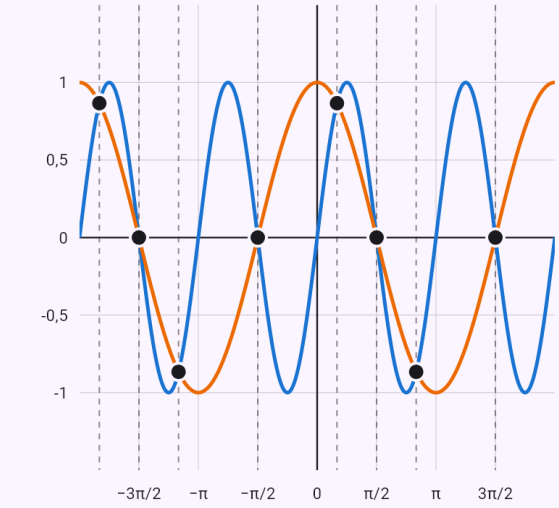
- Portiamo tutto in un membro: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Usiamo la formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Scomponiamo – un prodotto è zero esattamente quando lo è uno dei suoi fattori: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Risolviamo l'equazione $\cos x = 0$
- Equazione elementare $\cos x = 0$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Risolviamo l'equazione $2\sin x - 1 = 0$
- Isoliamo la funzione goniometrica: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Equazione elementare $\sin x = \frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Grafico



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

L’angolo aggiunto: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

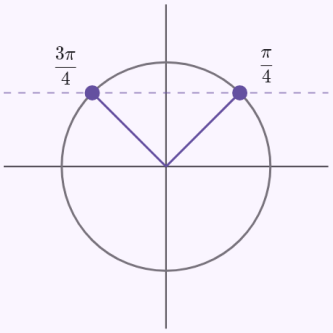
Input: `sin x + cos x = 1`

Risultato

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

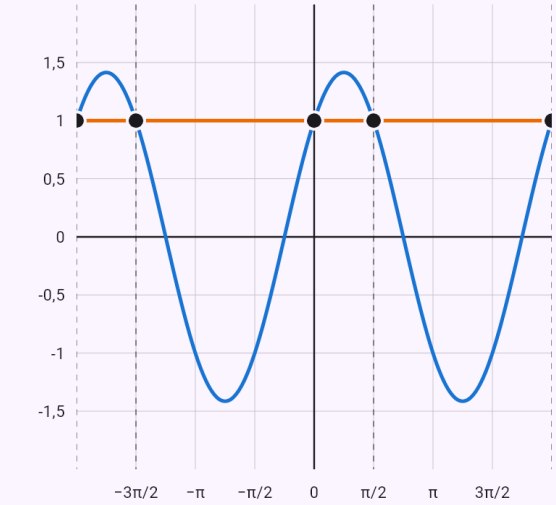
- Portiamo tutto in un membro: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Introduciamo un angolo ausiliario φ: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, dove $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Isoliamo la funzione goniometrica: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Equazione elementare $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Ricaviamo l’incognita

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Grafico



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Intersezioni dei grafici:

- $(-2\pi; 1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$
- $(0; 1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell’equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Una lettera greca – il risultato in gradi.

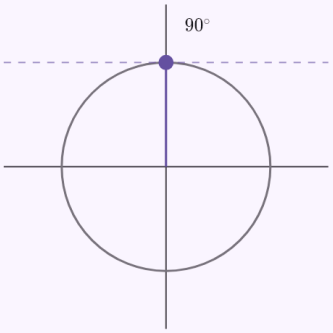
Input: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Risultato

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

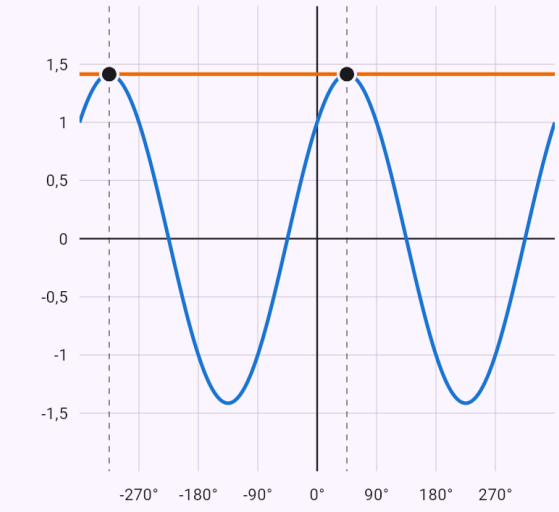
Passaggi

- Portiamo tutto in un membro: $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Introduciamo un angolo ausiliario φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, dove
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Isoliamo la funzione goniometrica: $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Equazione elementare $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono 90°; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Ricaviamo l'incognita
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Grafico



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Intersezioni dei grafici:

- $(-315^\circ; \sqrt{2})$
- $(45^\circ; \sqrt{2})$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Solo le radici nell'intervallo dato.

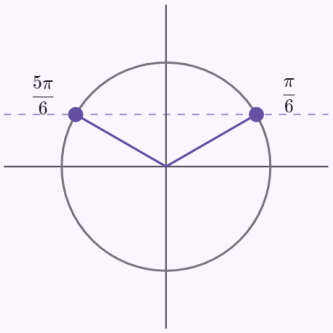
Input: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Risultato

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

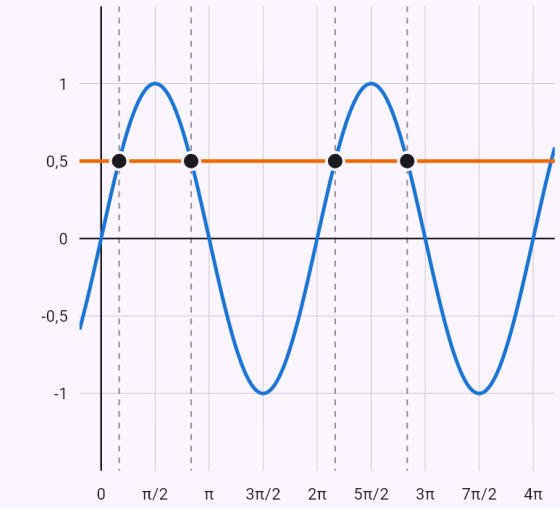
Passaggi

- Equazione elementare $\sin x = \frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni:
  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Le soluzioni nell'intervallo $x \in [0;\ 4\pi)$
  $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Grafico



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Intersezioni dei grafici:

- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione dell'equazione – la sua prima coordinata è il valore di x.

Un arco della circonferenza goniometrica, un intervallo attorno allo zero.

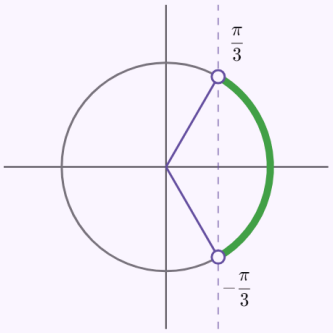
Input: `cos x > 1/2`

Risultato

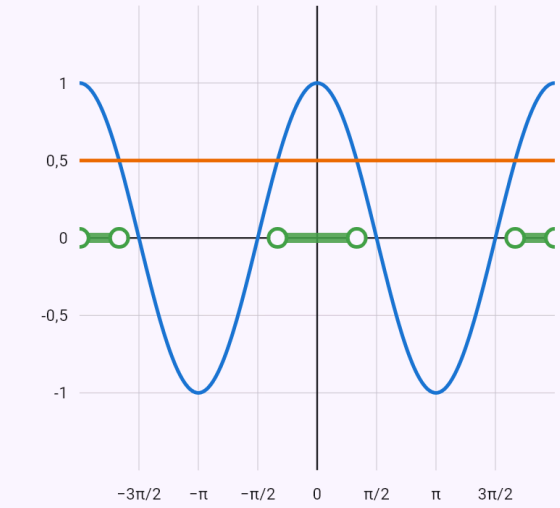
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

- Disequazione elementare $\cos x > \frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica vale sull'arco evidenziato; con il periodo: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Grafico



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Gli zeri su un periodo e il segno tra di essi.

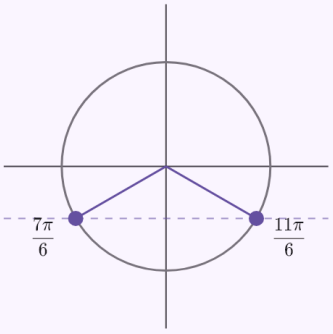
Input: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

Risultato

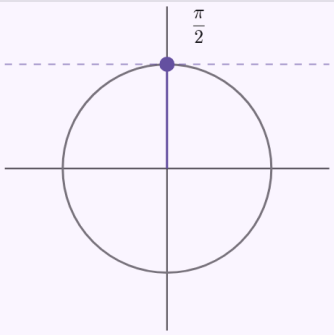
$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

- Prima risolviamo l'equazione $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Sostituiamo $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Equazione elementare $\sin x = -\frac{1}{2}$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

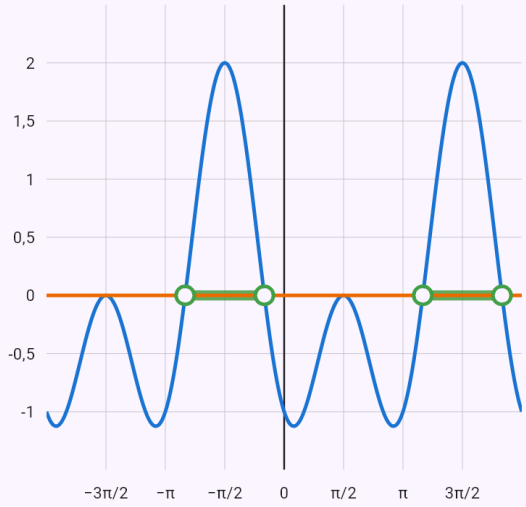


- Equazione elementare $\sin x = 1$: sulla circonferenza goniometrica, gli angoli di un giro che la soddisfano sono $\frac{\pi}{2}$; aggiungendo i multipli del periodo si ottengono tutte le soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- La funzione ha periodo 2π. I suoi zeri (e i punti in cui non è definita) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ dividono un periodo in intervalli; secondo il segno su di essi la disequazione vale per: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Grafico



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$
Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Limiti noti

- Le equazioni con l'incognita anche fuori dalla funzione goniometrica (x = cos x) si risolvono solo numericamente – con il metodo di Newton con la tabella delle iterazioni (vedi Metodi numerici), senza il periodo.
- Una doppia disequazione goniometrica (−1/2 < sin x < 1/2) e funzioni goniometriche dentro un valore assoluto non sono ancora supportate.

9. Disequazioni e sistemi di disequazioni

L'app risolve disequazioni di secondo grado e fratte con i punti di annullamento e una tabella dei segni. Una doppia disequazione e un sistema di disequazioni si risolvono come intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni, mostrata sulla retta reale. Un sistema di disequazioni in due incognite si risolve come una regione del piano, ombreggiata nel grafico.

In un sistema di disequazioni in due incognite l'app elenca anche i vertici della regione – le intersezioni dei bordi con coordinate esatte. Un sistema di un'equazione e disequazioni in un'incognita si risolve risolvendo l'equazione e sostituendo le sue radici nelle disequazioni; in due incognite la soluzione è la parte della curva dell'equazione che sta nella regione delle disequazioni – evidenziata nel grafico, con gli estremi calcolati esattamente. Un sistema si può scrivere anche su una riga, separato da punti e virgola ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Un sistema di due o più equazioni con disequazioni si risolve come sistema di equazioni, le cui soluzioni si sostituiscono nelle disequazioni; con due incognite il grafico mostra le curve nella regione delle disequazioni, le intersezioni che non soddisfano come punti vuoti.

Esempi

Una disequazione di secondo grado – punti di annullamento e segni.

Input: `x^2 - x - 6 > 0`

Risultato

$$x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ \infty)$$

Passaggi

- Scomposizione: $(x-3)(x+2) > 0$
- I punti critici dividono la retta numerica in intervalli: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Grafico



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

● $(-2;\ 0)$ ● $(3;\ 0)$

Una disequazione fratta – il denominatore non deve annullarsi.

Input: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Risultato

$$x \in [-1;\ 3)$$

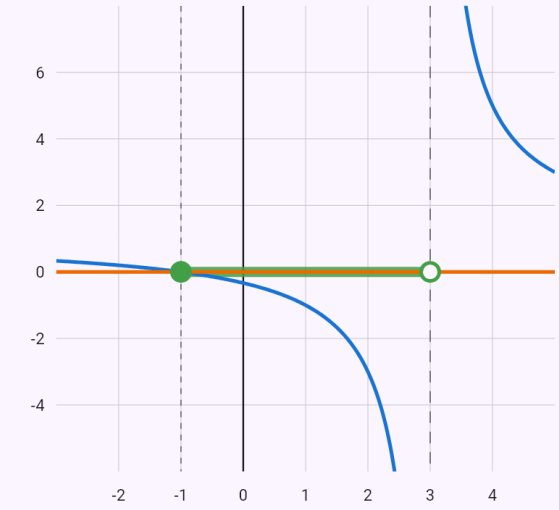
Condizioni: $x \neq 3$

Passaggi

- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $x \neq 3$
- I punti critici dividono la retta numerica in intervalli: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Grafico



$y = \frac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $(-1; 0)$

Una doppia disequazione.

Input: `-1 <= 2x + 1 < 5`

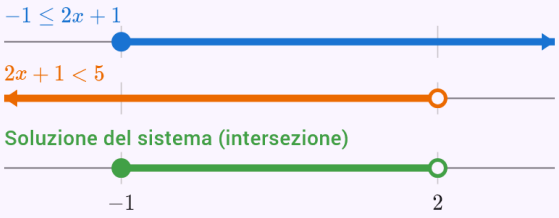
Risultato

$$x \in [-1;\ 2)$$

Passaggi

- Disequazione 1: $-1 \leq 2x + 1$
- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $-2x \leq 2$
- Dividiamo per il numero negativo -2, il verso della disequazione si inverte: $x \geq -1$
- La soluzione di questa disequazione è $x \in [-1;\ \infty)$
- Disequazione 2: $2x + 1 < 5$
- Lasciamo i termini con l'incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $2x < 4$
- Dividiamo per il numero positivo 2, il verso della disequazione resta: $x < 2$
- La soluzione di questa disequazione è $x \in (-\infty;\ 2)$
- La soluzione del sistema è l'intersezione delle soluzioni delle disequazioni: $x \in [-1;\ 2)$

Grafico



Ogni disequazione ha la propria riga sulla retta numerica, la loro intersezione è in verde. Un punto pieno appartiene alla soluzione, uno vuoto no.

Un sistema di disequazioni in due incognite – una regione del piano e i suoi vertici.

Input: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

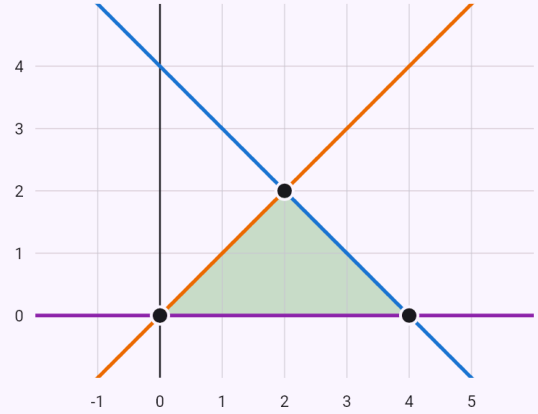
Risultato

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in [0;\ \infty)$$

Passaggi

- Disequazione 1: $x + y \leq 4$
- Il bordo è la curva $x + y = 4$ – tracciata a linea continua, i suoi punti appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ è verificata – la soluzione è la parte del piano che contiene il punto.
- Disequazione 2: $x - y \geq 0$
- Il bordo è la curva $x - y = 0$ – tracciata a linea continua, i suoi punti appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ è verificata – la soluzione è la parte del piano che contiene il punto.
- Disequazione 3: $y \geq 0$
- Il bordo è la curva $y = 0$ – tracciata a linea continua, i suoi punti appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ è verificata – la soluzione è la parte del piano che contiene il punto.
- La soluzione del sistema è la parte comune di queste regioni – ombreggiata nel grafico.
- I vertici della regione (dove si incontrano i bordi): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Grafico



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$

La soluzione è la regione ombreggiata. Un bordo continuo le appartiene, uno tratteggiato no.

I vertici della regione:

● $(0; 0)$ ● $(2; 2)$ ● $(4; 0)$

Una disequazione negli interi – sono elencati gli interi dell'intervallo.

Input: `x^2 < 10`

Risultato

$$x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

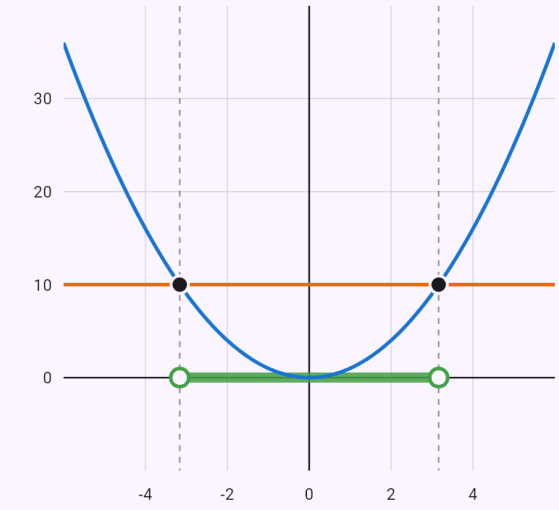
Passaggi

- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - 10 < 0$
- I punti critici dividono la retta numerica in intervalli: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Segni nei singoli intervalli:

	$(-\infty;\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10};\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- Nei numeri reali $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$; in $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Grafico



$y = x^2$
$y = 10$

Soluzione della disequazione – dove vale la relazione tra le due curve

Intersezioni dei grafici:

- $\left(-\sqrt{10};\ 10\right)$
- $\left(\sqrt{10};\ 10\right)$

Un'equazione e una disequazione – le radici dell'equazione sostituite nella disequazione.

Input: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Risultato

$$x = 3$$

Passaggi

- Prima risolviamo l'equazione $x^2 - x - 6 = 0$, poi sostituiamo le sue radici nelle disequazioni.
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$
- La radice $x = -2$ non soddisfa la condizione $x > 0$, quindi non è una soluzione.
- La radice $x = 3$ soddisfa le condizioni.

Una circonferenza e un semipiano – la soluzione è un arco, i suoi estremi non vi appartengono.

Input: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

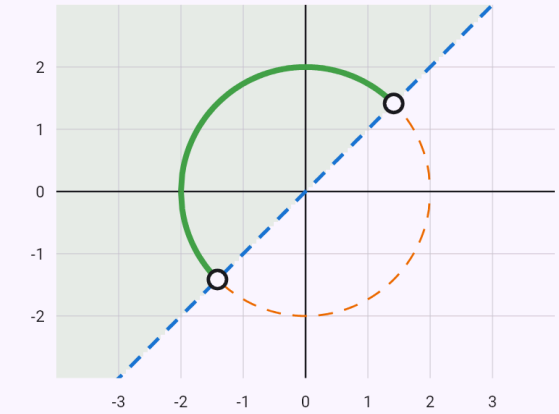
Risultato

$x^2 + y^2 = 4$
$y > x$

Passaggi

- La soluzione sono i punti della curva $x^2 + y^2 = 4$ che stanno nella regione data dalle disequazioni. Prima troviamo questa regione:
- Il bordo è la curva $y = x$ – tracciata a linea tratteggiata, i suoi punti non appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[1;\ 0]$: $0 > 1$ non è verificata – la soluzione è la parte del piano che non contiene il punto.
- Gli estremi della parte di curva: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – su un bordo tratteggiato, non fanno parte della soluzione.

Grafico



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

La soluzione è la parte di curva evidenziata in verde – quella che sta nella regione ombreggiata. Un estremo pieno appartiene alla soluzione, uno vuoto no.

Estremi:
○ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

Una circonferenza e una retta con una disequazione – l'intersezione sotto l'asse x non soddisfa.

Input: `x^2 + y^2 = 25`
`x - y = 1`
`y > 0`

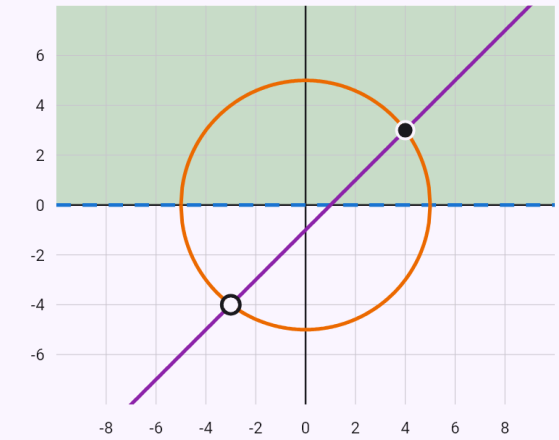
Risultato

$x = 4$
$y = 3$

Passaggi

- Prima risolviamo il sistema di equazioni, poi sostituiamo le sue soluzioni nelle disequazioni.
- La soluzione $x = -3,\ y = -4$ non soddisfa la disequazione $y > 0$, quindi non è soluzione del sistema.
- La soluzione $x = 4,\ y = 3$ soddisfa le disequazioni.

Grafico



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0;\ \infty)$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Le soluzioni sono le intersezioni delle curve nella regione ombreggiata (un punto pieno); un punto vuoto non soddisfa le disequazioni.

Intersezioni dei grafici:
○ $(-3; -4)$ ● $(4; 3)$

10. Sistemi di equazioni

L'app risolve un sistema di equazioni lineari in due incognite per riduzione (somma) o per sostituzione, e sistemi più grandi con l'eliminazione di Gauss – come equazioni o sulla matrice (la matrice completa e le operazioni sulle righe). Un sistema quadrato si può risolvere anche con la regola di Cramer (determinanti). Il metodo lo scegli con un chip. Un sistema di due equazioni in due incognite ha anche un grafico in cui le soluzioni sono le intersezioni delle rette o delle curve.

Il numero di equazioni e di incognite non deve coincidere. L'eliminazione di Gauss dice quando un sistema non ha soluzioni (risulta un'equazione come 0 = 1) e quando ne ha infinite: le incognite che le equazioni non determinano diventano parametri t, s, … (scelti in modo che la soluzione non abbia frazioni), e la soluzione è scritta anche in forma vettoriale. In forma matriciale il numero di soluzioni lo decide il teorema di Rouché–Capelli – confronta il rango della matrice, il rango della matrice completa e il numero di incognite. Per un sistema omogeneo (tutti i termini noti 0) l'app mostra una base dello spazio delle soluzioni.

Le incognite possono avere un indice: x_1, x_1 o x1. Un sistema si può dare anche con matrici – la matrice completa con i termini noti dopo una barra verticale, o una matrice A, un vettore dei termini noti b e l'equazione Ax = b; le incognite sono allora x_1, x_2, … e il metodo predefinito è l'eliminazione di Gauss sulla matrice.

Un sistema può contenere uno o due parametri – lettere che non sono incognite (le incognite sono x, y, z, u, v, w, t e x_1, x_2, …). L'app discute allora la risolubilità secondo i valori dei parametri: con il chip «Gauss – matrice» (il predefinito per tre o più equazioni) riduce la matrice completa; dove moltiplicherebbe per un'espressione nel parametro che può annullarsi, assume che non si annulli e ne completa gli zeri a parte sostituendo il valore – in ogni caso decide il teorema di Rouché–Capelli. Con il chip «Regola di Cramer» calcola i determinanti come espressioni nel parametro: formule per D ≠ 0, gli zeri di D sostituiti. Con due parametri ci sono casi come «b = 4, a ≠ 2» o «a = b».

Un sistema non lineare (per esempio una circonferenza e una retta) viene risolto e disegnato, per ora senza lo svolgimento.

Come inserirlo

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Incognite con un indice – x_1, x_1 e x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	La matrice completa – i termini noti dopo una barra verticale.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	La matrice del sistema, il vettore dei termini noti e l'equazione Ax = b.

Esempi

Il metodo di riduzione (somma).

Input: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Riduzione

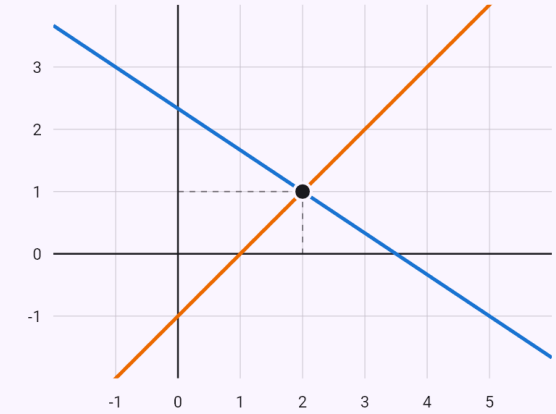
Risultato

$x = 2$
$y = 1$

Passaggi

- Moltiplichiamo la prima equazione per 1 e la seconda per -2 in modo che sommandole x si elimini
  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$
- Sommiamo le equazioni, x si elimina: $5y = 5$
- Risolviamo: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Sostituiamo nell'equazione 2: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Grafico



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Intersezioni dei grafici:

- $(2; 1)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione del sistema – le sue coordinate sono i valori di x e y.

Tre equazioni – eliminazione di Gauss.

Input: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

x + 2y - z = 2 Eliminazione di Gauss

Risultato

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Passaggi

- Eliminiamo x dalle equazioni sottostanti

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Eliminiamo y dalle equazioni sottostanti

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Risolviamo: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Sostituiamo nell'equazione 2: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Sostituiamo nell'equazione 1: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

La regola di Cramer – i determinanti D, D_x, D_y.

Input: 2x + 3y = 7

x - y = 1 Regola di Cramer

Risultato

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Passaggi

- Calcoliamo il determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Calcoliamo il determinante

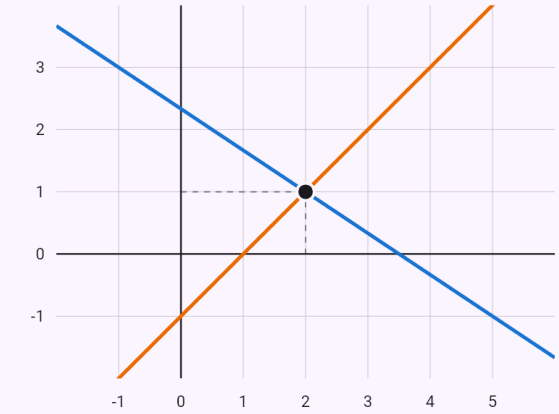
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Calcoliamo il determinante

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Con la regola di Cramer: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Con la regola di Cramer: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Grafico



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Intersezioni dei grafici:

- $(2; 1)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione del sistema – le sue coordinate sono i valori di x e y.

Infinite soluzioni – il teorema di Rouché–Capelli, un parametro e la forma vettoriale.

Input: x + 2y + z = 3

2x + 4y + 3z = 7

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matrice

Risultato

Le soluzioni sono infinite.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Passaggi

- La matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe
  $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Operazioni sulle righe $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- L'equazione 0 = 0 vale sempre – la tralasciamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Teorema di Rouché–Capelli:
  $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – i ranghi sono uguali ma minori del numero di incognite, quindi il sistema ha infinite soluzioni.
- Riscriviamo la matrice a scala (triangolare) come equazioni

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Le incognite che le equazioni non determinano si scelgono come parametri: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Risolviamo: $z = 1$
- Sostituiamo nell'equazione 1:
  $x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- La soluzione in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema senza soluzioni – risulta un'equazione che non vale mai.

Input: `x + y + z = 2`

`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Risultato

Nessuna soluzione.

Passaggi

- Eliminiamo x dalle equazioni sottostanti

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

- Eliminiamo y dalle equazioni sottostanti

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Abbiamo ottenuto l'equazione $0 = 1$, che non ha soluzione – quindi il sistema non ha soluzione.

Un sistema omogeneo – una base dello spazio delle soluzioni.

Input: `x + 2y - z = 0`
`2x + 4y - 2z = 0`
`x - y + z = 0` Gauss – matrice

Risultato

Le soluzioni sono infinite.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Il sistema è omogeneo (tutti i termini noti sono 0) – ha sempre la soluzione banale (tutti zeri); ne ha una non banale esattamente quando il rango della sua matrice è minore del numero di incognite.
- La matrice completa del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Scambiamo le equazioni 2 e 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- L'equazione 0 = 0 vale sempre – la tralasciamo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Teorema di Rouché–Capelli:
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – i ranghi sono uguali ma minori del numero di incognite, quindi il sistema ha infinite soluzioni.
- Riscriviamo la matrice a scala (triangolare) come equazioni
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Le incognite che le equazioni non determinano si scelgono come parametri: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Sostituiamo nell'equazione 2: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Sostituiamo nell'equazione 1: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- La soluzione in forma vettoriale
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Una base dello spazio delle soluzioni (dimensione 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Un sistema dato dalla sua matrice completa.

Input: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Risultato

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Passaggi

- La matrice completa del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$
- Teorema di Rouché–Capelli: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – il rango della matrice è uguale al rango della matrice completa e al numero di incognite, quindi il sistema ha esattamente una soluzione.
- Riscriviamo la matrice a scala (triangolare) come equazioni
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Risolviamo: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- Sostituiamo nell'equazione 2: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- Sostituiamo nell'equazione 1: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Un sistema con un parametro – la matrice completa, i casi a = 1 e a = −2.

Input: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matrice

Risultato

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Passaggi

- Le incognite sono $x,\ y,\ z$, il parametro a è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i casi (discussione).
- La matrice completa del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Scambiamo le equazioni 1 e 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Proseguiamo con l'elemento $1 - a$, che può essere zero – supponiamo quindi $a \neq 1$; il caso $a = 1$ si tratta a parte.
- Scambiamo le equazioni 2 e 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Proseguiamo con l'elemento $-a - 2$, che può essere zero – supponiamo quindi $a \neq -2$; il caso $a = -2$ si tratta a parte.
- Per $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – il sistema ha esattamente una soluzione: $x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Per $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$ – il sistema ha infinite soluzioni: $x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Per $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – il sistema non ha soluzione. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Due parametri – una discussione secondo a e b.

Input: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Risultato

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{}{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Passaggi

- Le incognite sono $x,\ y,\ z$, i parametri $a,\ b$ sono numeri reali qualsiasi. La soluzione dipende dai loro valori, quindi esaminiamo i casi (discussione).
- La matrice completa del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Operazioni sulle righe $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Proseguiamo con l'elemento $(a-2)(a-1)$, che può essere zero – supponiamo quindi $a \neq 1,\ a \neq 2$; il caso $a = 2,\ a = 1$ si tratta a parte.
- Per $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – il sistema ha esattamente una soluzione
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Per $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – il sistema non ha soluzione. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Per $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – il sistema ha infinite soluzioni:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Per $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – il sistema non ha soluzione. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Per $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – il sistema ha infinite soluzioni:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matrice con il valore inserito
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Una circonferenza e una retta.

Input: `x^2 + y^2 = 25`

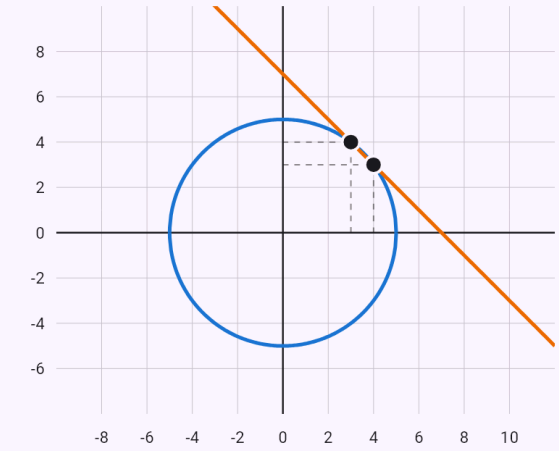
```
x + y = 7
```

Risultato

$x_1 = 3,\ y_1 = 4$

$x_2 = 4,\ y_2 = 3$

Grafico



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Intersezioni dei grafici:

● $(3; 4)$ ● $(4; 3)$

Ogni intersezione corrisponde a una soluzione del sistema – le sue coordinate sono i valori di x e y.

Limiti noti

- I sistemi non lineari sono per ora senza lo svolgimento.

11. Equazioni e disequazioni con un parametro

Una lettera in un'equazione oltre all'incognita è un parametro – un numero reale qualsiasi da cui dipende la soluzione. L'app trasforma l'equazione nella forma A·x = B (una di secondo grado in A·x² + B·x + C = 0) e discute la soluzione secondo i valori del parametro: dove il coefficiente dell'incognita è nullo, dove il discriminante è positivo, nullo o negativo, dove le condizioni escludono una radice e per quali valori il problema non ha senso. Il risultato riassume i casi.

L'app prende l'incognita nell'ordine x, y, z, u, v, w, t; le altre lettere sono parametri. Scegli un'altra incognita con il chip «Incognita» o scrivila dopo una virgola. Il grafico mostra tutte le soluzioni come una curva (una regione per una disequazione) nel piano parametro–incognita; scegli il valore del parametro con il cursore e leggi le soluzioni sulla retta verticale.

Dopo una virgola puoi anche chiedere delle radici: «x^2 + px + 4 = 0, x > 0» – per quali p ogni radice è positiva (il chip «La condizione vale per» passa ad almeno una radice), «…, x = 3» – per quali p 3 è una radice. La radice di un'equazione lineare si sostituisce nella condizione, quella di una di secondo grado con le formule di Viète. Un sistema di due equazioni lineari con un parametro si risolve con i determinanti (la regola di Cramer), con i casi di una, nessuna e infinite soluzioni. Una disequazione di secondo grado o fratta si discute secondo l'ordine dei suoi zeri. Il cursore del grafico si ferma esattamente sui valori critici del parametro, che sono anche elencati sotto il grafico. Un sistema con un parametro con più equazioni, con due parametri o con il metodo matriciale è nel capitolo Sistemi di equazioni.

In un integrale indefinito le altre lettere sono costanti – l'app aggiunge quali non devono essere nulle (∫ dx/(a − bx)³ per b ≠ 0). In un limite e in un integrale definito le lettere sono anch'esse parametri – vedi i capitoli Limiti e Integrale definito.

Come inserirlo

`2ax + a = 4x`	Ogni altra lettera è un parametro; l'incognita è x (o y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, unknown q`	Puoi nominare l'incognita o il parametro dopo una virgola («a is a parameter», «unknown q»).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Una domanda sulle radici dopo una virgola: per quali p ogni radice (o almeno una) ha la proprietà.

Esempi

Un’equazione lineare – nessuna soluzione per a = 2.

Input: `2ax + a = 4x`

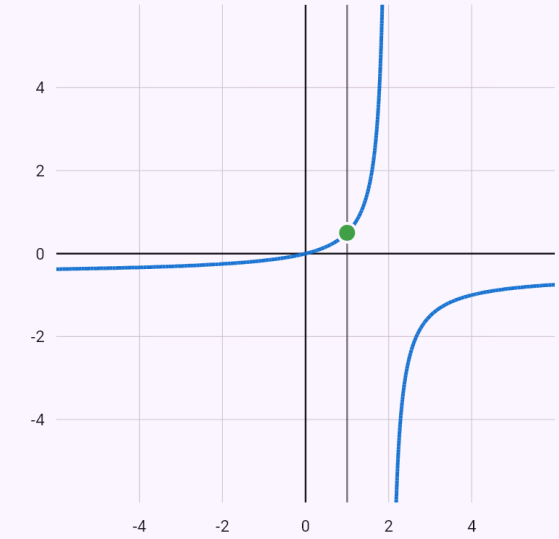
Risultato

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Passaggi

- L’incognita è x, il parametro a è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i singoli casi (discussione).
- Riportiamo alla forma normale: $2(a-2)x = -a$
- Per $a \neq 2$, $2(a-2)$ è diverso da zero, quindi possiamo dividere per esso: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Per $a = 2$, il coefficiente dell’incognita è zero: $0 \cdot x = -2$, quindi $x \in \emptyset$

Grafico



$2ax + a = 4x$

Ogni punto (a; x) della curva è una soluzione. Per un valore scelto di a, le soluzioni stanno sulla retta verticale – spostala con il cursore.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Un’equazione di secondo grado – discussa secondo il discriminante.

Input: `x^2 + 6x + p = 0`

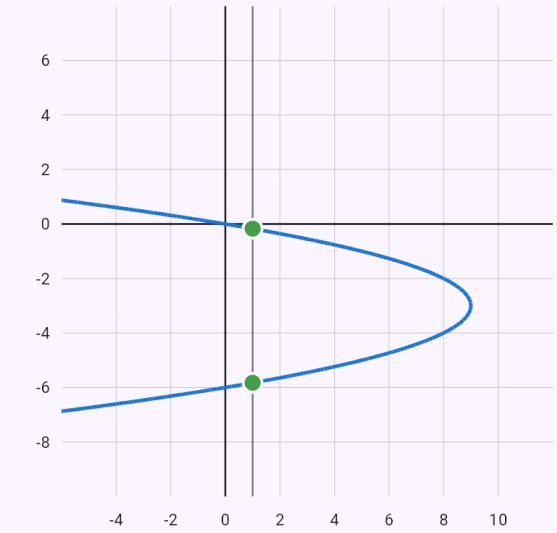
Risultato

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Passaggi

- L’incognita è x, il parametro p è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i singoli casi (discussione).
- Riportiamo alla forma normale: $x^2 + 6x + p = 0$
- Il discriminante in funzione del parametro: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Per $p < 9$, D > 0 e l’equazione ha due radici distinte: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Per $p > 9$, D < 0 e l’equazione non ha soluzioni reali.
- Per $p = 9$, D = 0 e l’equazione ha una radice doppia: $x = -3$

Grafico



$x^2 + 6x + p = 0$

Ogni punto (p; x) della curva è una soluzione. Per un valore scelto di p, le soluzioni stanno sulla retta verticale – spostala con il cursore.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Una disequazione – il segno del coefficiente decide il verso.

Input: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

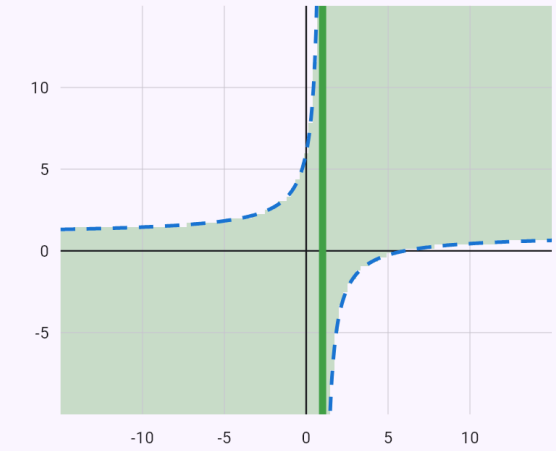
Risultato

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Passaggi

- L'incognita è x, il parametro p è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i singoli casi (discussione).
- Riportiamo alla forma normale: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Per $p < 1$, $2(1-p)$ è positivo – dividendo il verso della disequazione resta: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Per $p > 1$, $2(1-p)$ è negativo – dividendo il verso della disequazione si inverte: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Per $p = 1$, il coefficiente dell'incognita è zero: $0 \cdot x < 10$, quindi $x \in \mathbb{R}$

Grafico



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{p-6}{p-1}$

La regione ombreggiata contiene tutte le soluzioni (p; x). Per un valore scelto di p, la soluzione è la parte evidenziata della retta verticale – spostala con il cursore.

p = 1

$p = 1$

Entrambe le radici maggiori di 1 – il discriminante e le formule di Viète.

Input: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

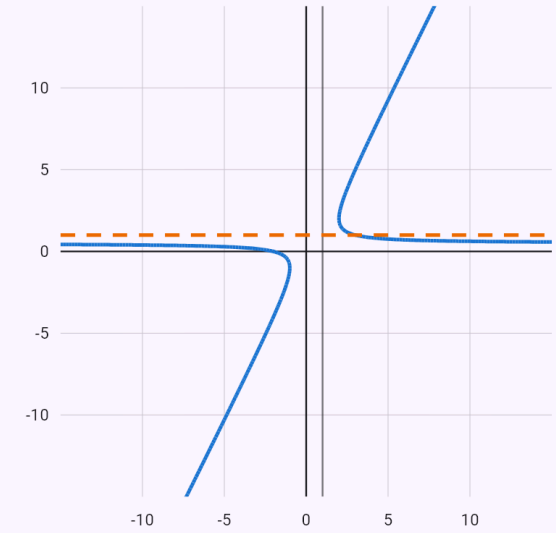
Risultato

$$2 \leq p < 3$$

Passaggi

- L'incognita è x, il parametro p è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i singoli casi (discussione).
- Riportiamo alla forma normale: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Il discriminante in funzione del parametro $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p-2$
- Per $p \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$, D > 0 e l'equazione ha due radici distinte: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Per $-1 < p < 2$, D < 0 e l'equazione non ha soluzioni reali.
- Per $p = -1$, D = 0 e l'equazione ha una radice doppia: $x = -1$
- Per $p = 2$, D = 0 e l'equazione ha una radice doppia: $x = 2$
- Cerchiamo i valori del parametro per cui ogni radice dell'equazione soddisfa $x > 1$ (e una radice esiste).
- Per le relazioni tra radici e coefficienti (Viète): $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- L'equazione deve avere radici reali: $D \geq 0$, quindi $p \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ \infty)$
- La condizione sulla somma: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, quindi $p > 1$
- La condizione sul prodotto: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, quindi $p < 3$
- La condizione vale per $2 \leq p < 3$

Grafico



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Ogni punto (p; x) della curva è una soluzione. Per un valore scelto di p, le soluzioni stanno sulla retta verticale – spostala con il cursore.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1:\quad x \in \emptyset$

Un sistema con un parametro – i determinanti; le rette si intersecano, sono parallele o coincidono.

Input: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Risultato

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Passaggi

- Le incognite sono $x,\ y$, il parametro a è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i casi (discussione).
- Riportiamo alla forma normale

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Risolviamo il sistema con i determinanti (regola di Cramer)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Per $a \neq -1,\ a \neq 1$, D ≠ 0 – il sistema ha una sola soluzione (le rette si incontrano): $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$
- Per $a = -1$, D = 0 e il sistema non ha soluzione (le rette sono parallele).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Per $a = 1$, D = 0 ed entrambe le equazioni di descrivono la stessa retta – infinite soluzioni: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Una disequazione fratta – secondo l'ordine dello zero p e del punto 1.

Input: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Risultato

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty), & p > 1 \end{cases}$$

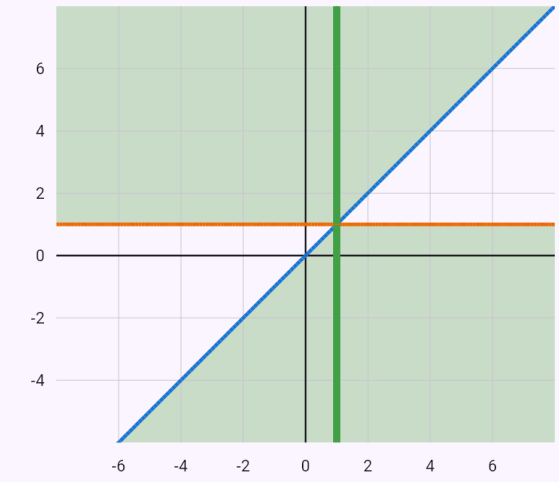
Condizioni: $x \neq 1$

Passaggi

- L'incognita è x, il parametro p è un numero reale qualsiasi. La soluzione dipende dal suo valore, quindi esaminiamo i singoli casi (discussione).
- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $x \neq 1$
- Riportiamo alla forma normale: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Gli zeri del numeratore: p; il denominatore è zero per 1
- Per $p < 1$ – secondo l'ordine degli zeri e i segni negli intervalli: $x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty)$
- Per $p > 1$ – secondo l'ordine degli zeri e i segni negli intervalli: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty)$
- Per $p = 1$, risolviamo $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$:

  $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$

Grafico



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

La regione ombreggiata contiene tutte le soluzioni (p; x). Per un valore scelto di p, la soluzione è la parte evidenziata della retta verticale – spostala con il cursore.

p = 1

$p = 1$

Limiti noti

- La discussione completa per intervalli solo con un parametro, con più parametri i casi generali.
- Domande sulle radici solo per equazioni lineari e di secondo grado; sistemi con un parametro solo due equazioni lineari; un parametro sotto radice o in un logaritmo non ancora.

12. Formule inverse

Una formula di matematica, fisica o chimica (m = ρV, S = πr², v = s/t) si trasforma in modo che la lettera scelta stia da sola da un lato. Le altre lettere sono grandezze date – l'app lavora con esse come con numeri noti. I passaggi sono trasformazioni equivalenti come a scuola: portare termini dall'altra parte, moltiplicare per un denominatore, dividere, raccogliere, estrarre una radice, i reciproci.

La lettera da ricavare si sceglie con il chip «Ricava»; senza scelta l'app ricava la prima lettera dal lato della formula. Il risultato è la formula con le sue condizioni – ciò per cui divide non deve essere nullo (V = m/ρ per ρ ≠ 0). Le grandezze in una formula sono positive, quindi una radice ha solo il valore positivo: r = √(S/π).

Un'equazione in x e y si risolve rispetto a y (la retta 2x + y = x + 2y è y = x); le altre equazioni in x e y hanno «Ricava y» e «Ricava x» tra i chip della derivata, dell'integrale e del grafico. Qui una radice dà entrambi i segni: x² + y² = 25 è y = ±√(25 − x²).

Le equazioni con un parametro (2ax + a = 4x, l'incognita x) non si trasformano come formula ma si risolvono con la discussione – vedi il capitolo precedente.

Come inserirlo

`m = ρV`	Una formula – una grandezza da sola da un lato, lettere maiuscole e minuscole (E, I, V sono grandezze).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indici con il trattino basso (R_1, v_0), lettere greche (ρ, rho, \rho), π è la costante.
`2x + y = x + 2y`	Un'equazione in x e y – risolta rispetto a y.

Esempi

Densità – dividere per una grandezza con la condizione ρ ≠ 0.

Input: `m = ρV`

Risultato

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Condizioni: $\rho \neq 0$

Passaggi

- Ricaviamo V. Le altre lettere ($m,\ \rho$) si trattano come numeri noti, e l'equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché V resta da sola in un membro.
- Scambiamo i membri dell'equazione: $\rho V = m$
- Dividiamo entrambi i membri per ρ, che non può essere zero ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

L'area di un trapezio – moltiplicare per due, dividere per l'altezza, portare a dall'altra parte.

Input: `S = (a + c)/2 · v`

Risultato

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Condizioni: $v \neq 0$

Passaggi

- Ricaviamo c. Le altre lettere ($S,\ a,\ v$) si trattano come numeri noti, e l'equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché c resta da sola in un membro.
- Scambiamo i membri dell'equazione: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Moltiplichiamo entrambi i membri per 2: $v(a+c) = 2S$
- Dividiamo entrambi i membri per v, che non può essere zero ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Sottraiamo a da entrambi i membri: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Riduciamo allo stesso denominatore: $c = \frac{2S - av}{v}$

L’area di un cerchio – estrarre la radice, il raggio è positivo.

Input: `S = πr^2`

Risultato

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Passaggi

- Ricaviamo r. Le altre lettere (S) si trattano come numeri noti, e l’equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché r resta da sola in un membro.
- Scambiamo i membri dell’equazione: $\pi r^2 = S$
- Dividiamo entrambi i membri per π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Estraiamo la radice di entrambi i membri. r è una grandezza, e le grandezze sono positive – vale solo la radice positiva: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Resistori in parallelo – un denominatore comune e i reciproci.

Input: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Risultato

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Condizioni: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Passaggi

- Ricaviamo R_1. Le altre lettere ($R,\ R_2$) si trattano come numeri noti, e l’equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché R_1 resta da sola in un membro.
- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Scambiamo i membri dell’equazione: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Sottraiamo $\frac{1}{R_2}$ da entrambi i membri: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Riduciamo allo stesso denominatore: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Se due espressioni sono uguali, lo sono anche i loro reciproci: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Una retta – i termini con y a sinistra, gli altri a destra.

Input: `2x + y = x + 2y`

Risultato

$$y = x$$

Passaggi

- Ricaviamo y. Le altre lettere (x) si trattano come numeri noti, e l'equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché y resta da sola in un membro.
- Portiamo i termini con y nel primo membro e gli altri nel secondo (con il segno opposto), poi li sommiamo

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per (-1): $y = x$

Una circonferenza risolta rispetto a y – la radice con ±.

Input: `x^2 + y^2 = 25`

Risultato

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Passaggi

- Ricaviamo y. Le altre lettere (x) si trattano come numeri noti, e l'equazione si trasforma con passaggi equivalenti finché y resta da sola in un membro.
- Sottraiamo x^2 da entrambi i membri: $y^2 = 25 - x^2$
- Estraiamo la radice quadrata di entrambi i membri; un numero e il suo opposto hanno lo stesso quadrato, da cui ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Limiti noti

- La lettera solo in potenze, frazioni e radici; non ancora in funzioni (sin, log, un esponente) o al quadrato insieme a sé stessa (s = v_0t + ½at^2 rispetto a t).

13. Semplificare espressioni

L’app trasforma un’espressione senza segno di uguale secondo il chip scelto: la semplifica (un’espressione razionale a denominatore comune e semplificata, con le condizioni), la sviluppa, la scompone in fattori (raccogliendo un fattore comune, con i prodotti notevoli e con la regola di Ruffini) o la scompone in fratti semplici – come su carta, con equazioni per i coefficienti incogniti. La scomposizione è negli interi; se l’espressione si scompone ulteriormente nei reali (con radici irrazionali), il passaggio successivo lo mostra. Una radice di un monomio si porta fuori in parte – con una radice di indice pari come valore assoluto dove la base può essere negativa. Funzionano anche i numeri complessi – un quoziente moltiplicando per il complesso coniugato.

Le espressioni numeriche con frazioni si svolgono passo per passo come a scuola: prima le parentesi più interne (tonde, quadre o graffe), numeratore e denominatore di una frazione composta separatamente, poi potenze, moltiplicazioni e divisioni (per una frazione come moltiplicazione per la reciproca, anche con i due punti o ÷) e la somma a denominatore comune per ultima. Scrivi un numero misto con uno spazio – 2 1/3 (da una foto anche 2⅓) – e l’app lo trasforma prima in frazione; scrivi un prodotto di due numeri sempre con il punto. Un risultato maggiore di 1 è mostrato anche come numero misto.

Scrivi un polinomio diviso per un polinomio con i due punti: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). L’app fa la divisione in colonna come su carta – divide i termini di grado massimo, moltiplica il divisore per il risultato e sottrae – e mostra il quoziente, il resto e una verifica; per un divisore x − a offre anche la regola di Ruffini. Una frazione p/q si semplifica come prima; la divisione la scegli con il chip «Divisione tra polinomi».

Il binomio di Newton: il k-esimo termine di uno sviluppo («5th term of (2x - 1/x)^8») e il termine senza x («term without x in (x + 1/x)^10») dal termine generale. Le permutazioni P(5) e con ripetizione P′(2, 3, 1) si calcolano con i fattoriali.

Il calcolo combinatorio si può chiedere anche con una breve frase (per ora in inglese): «How many ways can we choose 3 of 10?» (con «order matters», «with repetition»), «In how many ways can 5 people be arranged?» (anche attorno a un tavolo rotondo), «How many three-digit even numbers can be made from the digits 0-5 without repetition?» e «How many words can be formed from the letters of the word BANANA?». Anche due problemi classici di probabilità: il paradosso del compleanno (almeno due di n persone compiono gli anni lo stesso giorno) e il guardarobiere che perde i biglietti (nessuno riceve il proprio cappotto – o le lettere nelle buste).

Esempi

Un’espressione numerica con frazioni – prima la moltiplicazione, poi il denominatore comune.

Input: `2/3 - 1/6*2` Semplifica

Risultato

$$\frac{1}{3}$$

Passaggi

- Prima moltiplicazioni e divisioni: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Parentesi annidate dalla più interna.

Input: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Risultato

$$7$$

Passaggi

- Prima la parentesi più interna: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Sostituito: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Prima la parentesi più interna: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Sostituito: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Prima la parentesi più interna: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Sostituito: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Moltiplichiamo – numeratore per numeratore, denominatore per denominatore – e semplifichiamo: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Una frazione composta – numeratore e denominatore separatamente, poi per la reciproca.

Input: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Risultato

$$\frac{10}{21}$$

Passaggi

- Prima separatamente il numeratore e il denominatore della frazione composta: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Prima separatamente il numeratore e il denominatore della frazione composta: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Sostituito: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Una frazione composta: il numeratore per il reciproco del denominatore
  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Numeri misti – in frazioni e il risultato anche come numero misto.

Input: `2 1/3 + 1 1/2`

Risultato

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Passaggi

- Trasformiamo i numeri misti in frazioni – la parte intera per il denominatore più il numeratore
  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Sostituito: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Riduciamo allo stesso denominatore: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Il risultato come numero misto: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Semplificazione di un'espressione razionale.

Input: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Semplifica

Risultato

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Condizioni: $x \neq -1$

Passaggi

- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $x \neq -1$
- Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Semplifichiamo il fattore comune $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Sviluppo.

Input: `(x + 2)^3` Sviluppa

Risultato

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Passaggi

- Sviluppiamo le parentesi e sommiamo i termini simili: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Scomposizione con la regola di Ruffini.

Input: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Scomponi

Risultato

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Passaggi

- Le radici razionali possono essere solo divisori del termine noto -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- La regola di Ruffini conferma la radice $x = 1$ e divide il polinomio per essa:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Sostituendo si vede che questi candidati non sono radici: $P(-1) = -24 \neq 0$
- La regola di Ruffini conferma la radice $x = 2$ e divide il polinomio per essa:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Fratti semplici.

Input: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Fratti semplici

Risultato

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Condizioni: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Passaggi

- Condizioni di esistenza – un denominatore non può essere zero: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Scomponiamo in fattori il denominatore: $(x-1)(x+2)$
- Cerchiamo una scomposizione della forma: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Sostituiamo $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Sostituiamo $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Portare fuori in parte da una radice, con un valore assoluto.

Input: `sqrt(8a^5 b^2)` Semplifica

Risultato

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Passaggi

- Portiamo fuori dalla radice quello che si può – le potenze sotto radice escono davanti (con una radice di indice pari come valore assoluto dove la base può essere negativa): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Divisione di numeri complessi.

Input: `(3+4i)/(1-2i)` Forma algebrica

Risultato

$$-1+2i$$

Passaggi

- Moltiplichiamo la frazione per il complesso coniugato del denominatore, $1+2i$
  $$\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-5+10i}{5}=-1+2i$$

Un’equazione con fattoriali – condizioni, semplificazione e verifica delle radici.

Input: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Risultato

$$x=5$$

Passaggi

- Condizioni: fattoriali e coefficienti binomiali esistono solo per interi non negativi – ogni argomento (per un coefficiente binomiale n, k e n − k) deve essere un intero ≥ 0: $x+1\geq 0,\ x-1\geq 0\ \Rightarrow\ x\in\mathbb{Z},\ x\geq 1$
- I fattoriali scritti tramite il più piccolo, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), e semplificati; un coefficiente binomiale come prodotto: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!}=30\ \Rightarrow\ x^2+x=30$
- Resta un’equazione senza fattoriali, tutto in un membro: $x^2+x-30=0$
- Le radici dell’equazione sono $x=-6,\ x=5$; le condizioni sono soddisfatte da $x=5$

Divisione in colonna – il quoziente, il resto e una verifica.

Input: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Risultato

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Passaggi

- Passo 1 – dividiamo i termini di grado massimo $2x^3:x^2=2x$, moltiplichiamo il divisore per il risultato $2x\cdot\left(x^2+1\right)=2x^3+2x$ e sottraiamo, resta $3x^2-3x+5$
- Passo 2 – dividiamo i termini di grado massimo $3x^2:x^2=3$, moltiplichiamo il divisore per il risultato $3\cdot\left(x^2+1\right)=3x^2+3$ e sottraiamo, resta $-3x+2$
- Divisione in colonna $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$2x^3$	$+3x^2$	$-x$	$+5$
$-2x^3$		$-2x$	
	$3x^2$	$-3x$	$+5$
	$-3x^2$		-3
		$-3x$	$+2$

- Il quoziente è $2x+3$, il resto $-3x+2$
- Verifica – il quoziente per il divisore più il resto dà il dividendo: $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

Divisione per x − 1 con la regola di Ruffini.

Input: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Regola di Ruffini

Risultato

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Passaggi

- La regola di Ruffini per $x=1$ – i coefficienti del dividendo in alto, le loro somme progressive sotto; l'ultimo numero è il resto

	1	0	-2	1
1	1	1	-1	$\boxed{0}$

- Il quoziente è x^2+x-1, il resto 0
- Verifica – il quoziente per il divisore più il resto dà il dividendo: $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Un’equazione con un coefficiente binomiale C(n, 2) – anche V(n, k), C′, V′ con ripetizione.

Input: `C(n, 2) = 45`

Risultato

$$n = 10$$

Passaggi

- Condizioni: fattoriali e coefficienti binomiali esistono solo per interi non negativi – ogni argomento (per un coefficiente binomiale n, k e n − k) deve essere un intero ≥ 0: $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- I fattoriali scritti tramite il più piccolo, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), e semplificati; un coefficiente binomiale come prodotto: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Resta un’equazione senza fattoriali, tutto in un membro: $n^2 - n - 90 = 0$
- Le radici dell’equazione sono $n = -9,\ n = 10$; le condizioni sono soddisfatte da $n = 10$

Scegliere k tra n in una frase – combinazioni.

Input: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Risultato

$$120$$

Passaggi

- Scegliamo 3 tra 10, l’ordine non conta e nulla si ripete – il numero di combinazioni:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Numeri pari di tre cifre – due casi secondo l’ultima cifra.

Input: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Risultato

52

Passaggi

- I numeri hanno 3 cifre prese da $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Lo zero non può stare all'inizio. Le cifre non possono ripetersi. Un numero è pari esattamente quando la sua ultima cifra è pari.
- L'ultima cifra è 0 – per gli altri posti restano tutte le altre cifre: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- L'ultima cifra è una cifra adatta diversa da 0 – allora all'inizio non possono stare né lo zero né essa: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Sommiamo i due casi: $20 + 32 = 52$

Parole dalle lettere di una parola – permutazioni con ripetizione.

Input: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Risultato

151200

Passaggi

- La parola ha 10 lettere; contiamo quante volte compare ciascuna: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Le parole sono permutazioni con ripetizione – scambiare lettere uguali dà la stessa parola: $P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$

Il paradosso del compleanno tramite l'evento complementare.

Input: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Risultato

$P(A) \approx 0{,}5073$

Passaggi

- L'evento contrario A' è più facile: tutte le 23 persone compiono gli anni in giorni diversi (365 giorni, ciascuno ugualmente probabile).
- La probabilità che tutti i compleanni siano diversi $P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- La probabilità cercata è il complemento a uno: $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

I biglietti del guardaroba persi – dismutazioni.

Input: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Risultato

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Passaggi

- I modi in cui nessuno riceve il proprio sono gli scombussolamenti (permutazioni senza punti fissi) – il loro numero per inclusione–esclusione
  $$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$
- I modi in tutto sono n!, la probabilità è il rapporto:
  $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Per più persone la probabilità cambia appena:
  $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

Il termine senza x di uno sviluppo binomiale.

Input: `term without x in (x + 1/x)^10`

Risultato

$$T_6 = 252$$

Passaggi

- Il termine generale $(k+1)$-esimo dello sviluppo del binomio: $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- Il termine senza x ha l'esponente di x nullo:
  $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- Il termine richiesto, il numero 6:
  $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Divisibilità e numeri primi

Un numero intero da solo l'app lo scompone in fattori primi – lo divide per i primi più piccoli uno dopo l'altro e scrive 360 = 2³·3²·5; per un primo mostra che nessun primo fino alla sua radice quadrata lo divide. Puoi scrivere il test anche come isprime(97).

Il massimo comune divisore gcd(60, 90) e il minimo comune multiplo lcm(18, 30) vengono dalle scomposizioni in fattori primi o, con il chip «Algoritmo di Euclide», dalla divisione con resto. L'algoritmo di Euclide esteso con la sua tabella dà l'identità di Bézout bezout(240, 46): gcd(240, 46) = 240·u + 46·v.

I divisori di un numero divisors(36) vengono a coppie 1·36, 2·18, … fino alla radice quadrata, il loro numero è verificato con la scomposizione. I criteri di divisibilità divisibility(1236) formano una tabella per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 25 (l'ultima cifra, la somma delle cifre, la somma a segni alterni…); un divisore si scrive divisibility(1236, 7), con la frase «is 1236 divisible by 7» (per ora in inglese) o 7 | 1236 – un divisore senza criterio scolastico si divide con resto. I primi fino a 200 vengono dal crivello di Eratostene («primes up to 50»). Un'equazione lineare ax + by = c negli interi («3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ» o il chip ℤ) si risolve con l'identità di Bézout – tutte le soluzioni $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Aritmetica modulare: il resto 17 mod 5, l'inverso 3^(-1) mod 11 (dall'algoritmo di Euclide esteso, con verifica) e la potenza 7^13 mod 13 con quadrati ripetuti. Su di esse si basa RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) calcola n, φ(n), la chiave privata d, poi cifra il messaggio e lo decifra di nuovo; e ed m si possono omettere.

Come inserirlo

`360, factor(360), isprime(97)`	La scomposizione in fattori primi, un test di primalità.
`gcd(60, 90), lcm(18, 30)`	Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo.
`divisors(36), divisibility(1236), divisibility(1236, 7)`	I divisori di un numero e i criteri di divisibilità – tutti o un divisore (anche la frase «is 1236 divisible by 7», 7 | 1236).
`primes up to 50`	I primi fino a n (al massimo 200) con il crivello di Eratostene; anche primes(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Un'equazione lineare negli interi (diofantea); anche diophantine(3, 5, 1).

`bezout(240, 46)`	L’identità di Bézout.
`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Il resto, l’inverso e la potenza modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA con numeri piccoli.

Esempi

La scomposizione in fattori primi con divisioni successive.

Input: `360`

Risultato

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Passaggi

- Dividiamo 360 per i primi più piccoli, uno dopo l’altro, finché resta 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- La scomposizione in fattori primi: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Un primo – nessun divisore fino alla radice quadrata.

Input: `97`

Risultato

Il numero è primo.

Passaggi

- Basta provare i primi fino a $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – nessuno di essi divide 97, quindi è primo.

Il MCD dalle scomposizioni in fattori primi.

Input: `gcd(60, 90)`

Risultato

$$\mathrm{MCD}\,(60, 90) = 30$$

Passaggi

- La scomposizione in fattori primi: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- La scomposizione in fattori primi: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Il massimo comune divisore è il prodotto dei fattori primi comuni con gli esponenti minori:
  $\mathrm{MCD}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Il mcm tramite il MCD con l'algoritmo di Euclide.

Input: `lcm(60, 90)` Algoritmo di Euclide

Risultato

$$\mathrm{mcm}\,(60, 90) = 180$$

Passaggi

- L'algoritmo di Euclide – dividiamo il numero maggiore per il minore con resto, poi il divisore per il resto, finché il resto è 0; l'ultimo resto non nullo è il massimo comune divisore

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{MCD}\,(60, 90) = 30$$

- Il minimo comune multiplo è il prodotto dei numeri diviso per il loro massimo comune divisore

$$\mathrm{mcm}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{MCD}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

I divisori a coppie, il loro numero dalla scomposizione.

Input: `dělitelé(36)`

Risultato

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Passaggi

- Cerchiamo i divisori a coppie d · 36/d – basta provare d fino a 6, l'altro divisore della coppia segue

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Una verifica del numero di divisori dalla scomposizione in fattori primi – gli esponenti aumentati di 1 moltiplicati: $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

La tabella dei criteri di divisibilità.

Input: `dělitelnost(1236)`

Risultato

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Passaggi

- Criteri di divisibilità: 2, 5, 10 – l'ultima cifra; 4, 25 – le ultime due cifre; 8 – le ultime tre cifre; 3, 9 – la somma delle cifre; 6 = 2 · 3 e 12 = 3 · 4 – entrambi insieme; 7 – togliamo l'ultima cifra e sottraiamo il suo doppio dal resto; 11 – la somma a segni alterni delle cifre

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Divisibilità per sette – togliendo l’ultima cifra.

Input: `dělitelnost(1309, 7)`

Risultato

$$7 \mid 1309$$

Passaggi

- Divisibilità per 7: togliamo l’ultima cifra, sottraiamo il suo doppio dal resto e ripetiamo finché restano al massimo due cifre – quel numero è divisibile per 7 esattamente quando lo è quello originale (per numeri grandi una divisione è spesso più rapida):
  $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Il crivello di Eratostene.

Input: `prvočísla do 50`

Risultato

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Passaggi

- 2 è primo – cancelliamo tutti i suoi multipli; quelli minori sono già cancellati, quindi partiamo da $2^2 = 4$:
  $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 è primo – cancelliamo tutti i suoi multipli; quelli minori sono già cancellati, quindi partiamo da $3^2 = 9$:
  $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 è primo – cancelliamo tutti i suoi multipli; quelli minori sono già cancellati, quindi partiamo da $5^2 = 25$:
  $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 è primo – cancelliamo tutti i suoi multipli; quelli minori sono già cancellati, quindi partiamo da $7^2 = 49$: 49
- Il crivello di Eratostene: basta cancellare i multipli dei primi fino alla radice quadrata di 50. I numeri rimasti sono i primi – sono 15

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

L’identità di Bézout con l’algoritmo di Euclide esteso.

Input: `bezout(240, 46)`

Risultato

$$\mathrm{MCD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46$$

Passaggi

- L’algoritmo di Euclide esteso – ogni resto r si scrive come r = 240·u + 46·v; una nuova riga è la penultima meno q volte l’ultima

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- L’ultima riga non nulla della tabella dà l’identità di Bézout: $\mathrm{MCD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Un’equazione diofantea con l’identità di Bézout.

Input: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Risultato

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

- Risolviamo $3x + 5y = 1$ negli interi. Ha soluzione esattamente quando il massimo comune divisore di 3 e 5 divide il secondo membro.
- L’algoritmo di Euclide esteso – ogni resto r si scrive come r = 5·u + 3·v; una nuova riga è la penultima meno q volte l’ultima

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- L’ultima riga non nulla della tabella dà l’identità di Bézout: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- L’identità di Bézout moltiplicata per 1 dà una soluzione: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, quindi $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Tutte le soluzioni: aggiungiamo multipli di 5 a x e contemporaneamente multipli di -3 a y (il primo membro non cambia); spostate al minimo non negativo $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Verifica: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Una potenza modulo n con quadrati ripetuti.

Input: `7^13 mod 13`

Risultato

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Passaggi

- Scriviamo l'esponente come somma di potenze di 2:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Eleviamo ripetutamente al quadrato, prendendo i resti modulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Moltiplichiamo le potenze necessarie, prendendo man mano i resti modulo 13
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – le chiavi, la cifratura e la decifratura.

Input: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Risultato

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Passaggi

- Il modulo: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- La funzione di Eulero:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- L'algoritmo di Euclide – dividiamo il numero maggiore per il minore con resto, poi il divisore per il resto, finché il resto è 0; l'ultimo resto non nullo è il massimo comune divisore

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{MCD}\,(120, 7) = 1$$

- L'esponente pubblico e deve essere coprimo con φ(n):
  $\mathrm{MCD}\,(7, 120) = 1$ – lo è.
- L'algoritmo di Euclide esteso – ogni resto r si scrive come r = 120·u + 7·v; una nuova riga è la penultima meno q volte l'ultima

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- L'esponente privato d è l'inverso di e modulo φ(n):
  $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- La chiave pubblica $(n, e) = (143, 7)$, la chiave privata $(n, d) = (143, 103)$
- Cifriamo il messaggio m:
  $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Scriviamo l'esponente come somma di potenze di 2:
  $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Eleviamo ripetutamente al quadrato, prendendo i resti modulo 143
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Moltiplichiamo le potenze necessarie, prendendo man mano i resti modulo 143
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Decifriamo – torna il messaggio originale:
  $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Scriviamo l'esponente come somma di potenze di 2:
  $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Eleviamo ripetutamente al quadrato, prendendo i resti modulo 143
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Moltiplichiamo le potenze necessarie, prendendo man mano i resti modulo 143
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Limiti noti

- La scomposizione in fattori primi funziona per numeri fino a 10^{18}; un primo più grande è solo confermato da un test.
- RSA è un esempio scolastico con numeri piccoli (n = p·q fino a circa mille miliardi), non una vera cifratura.

15. Angoli in gradi, primi e secondi

Un angolo da solo viene convertito in tutte le sue forme: gradi, primi e secondi (5,5° = 5°30′), gradi decimali, primi, secondi e radianti – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Una sola forma la dà «= ?′», «= ?°», «= ?″» o «= ? rad». Radianti in gradi: «π/6 rad».

Gli angoli si sommano e si sottraggono come a scuola – gradi, primi e secondi separatamente; 60′ si riportano come 1°, e quando i primi non bastano, un grado si scompone in 60′. Si moltiplicano e si dividono per un numero: 100° : 3 si divide per gradi, il resto dei gradi trasformato in primi e quello dei primi in secondi.

Primi e secondi si scrivono con ′ e ″ (sulla tastiera dell'app) o con apostrofo e virgolette: 25°30'15". I gradi con una funzione (sin 30°) appartengono al capitolo Equazioni goniometriche.

Come inserirlo

`25°30′15″, 25°30'15", 5,5°`	Un angolo – gradi, primi, secondi, anche gradi decimali.
`25°30′ + 18°45′, 3 · 25°30′, 100° : 3`	Una somma, una differenza, un multiplo e un quoziente per un numero.
`5,5° = ?′, 30° = ? rad, π/6 rad`	Una sola forma della conversione, radianti in gradi.

Esempi

Gradi decimali in tutte le forme.

Input: `5,5°`

Risultato

$$5^\circ 30' = 330' = 19800'' = \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}$$

Passaggi

- La parte decimale del grado va in primi (1° = 60'), la parte decimale del primo in secondi (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- In primi: i gradi per 60 (1° = 60') più i primi: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- In secondi: i primi per 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- In radianti: 180° = π rad, quindi i gradi per π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}$

Una somma – 60′ riportati come 1°.

Input: `25°30′ + 18°45′`

Risultato

$$44^\circ 15'$$

Passaggi

- Sommiamo separatamente gradi, primi e secondi: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Ogni 60" fanno 1' e ogni 60' fanno 1° – riportiamo: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Una differenza – un grado scomposto in 60′.

Input: `25°15′ - 18°45′`

Risultato

$6^\circ 30'$

Passaggi

- I primi (secondi) sono meno di quelli da sottrarre – un grado (primo) si scompone in 60′ (60″): $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Sottraiamo separatamente gradi, primi e secondi: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Divisione per un numero, il resto in primi.

Input: `100° : 3`

Risultato

$33^\circ 20'$

Passaggi

- Dividiamo per gradi: i gradi, il resto trasformato in primi e aggiunto; i primi, il resto in secondi; i secondi

$$100^\circ : 3 = 33^\circ,\ 1^\circ = 60'$$
$$60' : 3 = 20'$$
$$\Rightarrow\ 100^\circ : 3 = 33^\circ 20'$$

Radianti in gradi.

Input: `π/6 rad`

Risultato

$$30^\circ$$
$$= 1800'$$
$$= 108000''$$

Passaggi

- Dai radianti ai gradi: π rad = 180°, quindi per 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- In primi: i gradi per 60 (1° = 60′) più i primi: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- In secondi: i primi per 60 (1′ = 60″): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Limiti noti

- Equazioni con angoli in primi (x + 25°30′ = 90°) non ancora.

16. Percentuali, rapporti e regola del tre

Le percentuali si inseriscono in breve, senza testo del problema: una parte «20 % of 480», il totale «15 % = 45», l'aliquota «96 of 480 = ? %», un aumento e una diminuzione «480 + 15 %», «480 − 20 %» e il valore originale prima di una variazione «x − 20 % = 384». L'app calcola tramite l'1 % come si insegna oggi a scuola (1 % = 480 : 100 = 4,8); il chip «Formula» passa a parte = totale · aliquota con l'aliquota come numero decimale (480 · 0,2).

Un rapporto «12 : 18» si riduce a 2 : 3, un intero si ripartisce in un rapporto («300 in the ratio 2 : 3 : 5» – le parti sommate, una parte, le quote) e una proporzione «3 : 4 = x : 20» si risolve con il prodotto dei medi e degli estremi. Un rapporto di frazioni («2/3 : 4/9») si moltiplica prima per il minimo comune multiplo dei denominatori; dentro un'espressione più lunga i due punti dividono.

La regola del tre si scrive come a scuola – due righe con tre puntini (o …, →): «10 kg … 250 Kč, 12 kg … x», le unità si possono omettere. Per impostazione una proporzionalità diretta, il chip «Inversa» (o la parola «inverse» dopo una virgola) per una inversa. Interesse semplice: interest(capitale, tasso %, anni, imposta %) – l'imposta è facoltativa. Interesse composto: compound interest(capitale, tasso %, anni, imposta %, frequenza) – l'imposta e la frequenza (annually, semiannually, quarterly, monthly, continuously) sono facoltative; altri compiti (risparmi, prestiti, interessi per giorni) sono in Applicazioni, il capitolo Economia.

Come inserirlo

`20 % of 480, 15 % = 45, 96 of 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Percentuali – una parte, il totale, l'aliquota, una variazione, il valore originale.
`12 : 18, 300 in the ratio 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Un rapporto ridotto, una ripartizione in un rapporto, una proporzione.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	La regola del tre – proporzionalità diretta e inversa.
`interest(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Interesse semplice con un'imposta.
`compound interest(10000, 3 %, 5, 15 %, monthly)`	Interesse composto con un'imposta e la frequenza di capitalizzazione.

Esempi

Una parte tramite l’1 %.

Input: `20 % z 480`

Risultato

$$96$$

Passaggi

- Prima l’1 % – il totale (l’intero, 100 %) diviso per 100:
  $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Le percentuali richieste sono tante volte l’1 %:
  $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Una diminuzione con la formula.

Input: `480 - 20 %` Formula parte = totale · aliquota

Risultato

$$384$$

Passaggi

- Valore diminuito = totale · (1 − aliquota), $20\,\% = 0{,}2$:
  $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Il prezzo originale prima di uno sconto.

Input: `x - 20 % = 384`

Risultato

$$x = 480$$

Passaggi

- Il valore originale è il 100 %; dopo la diminuzione restano meno punti percentuali – il valore noto:
  $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- L’1 % è il valore noto diviso per il suo numero di punti percentuali: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- Il totale è il 100 %, cento volte l’1 %:
  $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Una ripartizione in un rapporto.

Input: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Risultato

$$60,\ 90,\ 150$$

Passaggi

- L'intero si divide in tante parti quanto la somma dei termini: $2 + 3 + 5 = 10$
- Una parte è: $300 : 10 = 30$
- Ogni quota ha tante parti quante dice il suo termine: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; verifica $60 + 90 + 150 = 300$

Un rapporto di frazioni.

Input: `2/3 : 4/9`

Risultato

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Passaggi

- Eliminiamo le frazioni – ogni termine del rapporto per il minimo comune multiplo dei denominatori, 9
  $$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$$
- Il rapporto ridotto – tutti i termini divisi per il loro massimo comune divisore 2:
  $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Una proporzionalità inversa.

Input: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Inversa

Risultato

$$x = 8\,\text{dní}$$

Passaggi

- La regola del tre. Una proporzionalità inversa – tante volte di più dell'una, tante volte di meno dell'altra, le frecce opposte
  $$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$
- Secondo le frecce una proporzione – il secondo rapporto capovolto: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Interesse semplice con un’imposta del 15 %.

Input: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Risultato

$$10000 + 510 = 10510$$

Passaggi

- Interesse = capitale · p/100 · tempo in anni: $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Sull’interesse si paga l’imposta $15\,\%$, resta l’interesse netto: $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Alla fine, il capitale con l’interesse: $10000 + 510 = 10510$

Interesse composto con un’imposta del 15 %, capitalizzato mensilmente.

Input: `compound interest(10000, 3 %, 5, 15 %, monthly)`

Risultato

$$K_n \approx 11.358{,}31$$

Passaggi

- Dati: $K_0 = 10.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Convertiamo le unità: $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Con l’interesse semplice gli interessi si calcolano sempre sul deposito iniziale: K_n = K₀(1 + pn). Con l’interesse composto si accreditano e producono a loro volta interessi: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), dove m è il numero di capitalizzazioni l’anno (annuale, semestrale, trimestrale, mensile). La capitalizzazione continua è il limite m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Un’imposta sugli interessi d abbassa il tasso a p(1 − d). Il tasso effettivo annuo confronta le frequenze. L’attualizzazione è il calcolo inverso – quanto depositare oggi. Con l’inflazione π il valore reale è K_n/(1 + π)^n. L’interesse misto (come le banche accreditano gli interessi una volta l’anno) capitalizza gli anni interi e aggiunge l’interesse semplice per il resto dell’ultimo: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Equazione del modello: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Capitalizzazioni l’anno: $m = 12$
- Il tasso dopo l’imposta sugli interessi: $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Tasso effettivo annuo: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Sostituiamo: $K_n = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11.358{,}31$
- Interessi in totale: $K_n - K_0 \approx 1.358{,}31$

Limiti noti

- Per ora niente problemi con testo – il problema va scritto in breve; l’interesse composto con versamenti regolari e altri compiti finanziari sono nei moduli in Applicazioni.

17. Conversioni di unità

Una conversione si scrive come «5 m² = ? cm²» (o «5 m2 to cm2»). L'app scrive la relazione di conversione e moltiplica per essa (verso un'unità più piccola) o divide (verso una più grande); per le unità decimali aggiunge di quanti posti si sposta la virgola. Per aree e volumi spiega perché il numero è una potenza: 1 m = 100 cm, quindi 1 m² = 100² cm² = 10.000 cm².

Lunghezza da mm a km, area da mm² a km² e ara ed ettaro, volume da mm³ a m³ e ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), massa da mg a t, tempo s, min, h, d – anche composto «1 h 30 min» e il risultato in ore e minuti –, velocità km/h e m/s (1 m/s = 3,6 km/h) e temperatura °C, K, °F con le loro formule.

Come inserirlo

`5 m² = ? cm², 3.5 l to m³, 1 h 30 min = ? min`	Un valore con la sua unità, «= ?» (o «to») e l'unità di arrivo.

Esempi

Un'area – il numero è un quadrato.

Input: `5 m² = ? cm²`

Risultato

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Passaggi

- Per aree e volumi si convertono entrambe (tutte e tre) le dimensioni – il numero per le lunghezze si eleva a potenza
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- In un'unità più piccola – ce ne sono di più, quindi moltiplichiamo: $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Moltiplicare per un uno seguito da zeri (qui 4) sposta la virgola a destra di tanti posti quanti sono gli zeri; i posti mancanti diventano zeri.

Litri in metri cubi.

Input: `3,5 l = ? m³`

Risultato

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Passaggi

- La relazione di conversione: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- In un'unità più grande – ce ne sono di meno, quindi dividiamo: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Dividere per un uno seguito da zeri (qui 3) sposta la virgola a sinistra di tanti posti quanti sono gli zeri; i posti mancanti diventano zeri.

Minuti in ore, anche in ore e minuti.

Input: `150 min = ? h`

Risultato

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Passaggi

- La relazione di conversione: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- In un'unità più grande – ce ne sono di meno, quindi dividiamo: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- In ore e minuti: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Velocità – divisa per 3,6.

Input: `72 km/h = ? m/s`

Risultato

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- La relazione di conversione: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- In un'unità più grande – ce ne sono di meno, quindi dividiamo: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Una temperatura con la sua formula.

Input: `20 °C = ? K`

Risultato

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Passaggi

- Le temperature non si convertono con un multiplo ma con una formula (le scale hanno zeri diversi):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logica e insiemi

Una proposizione con i connettivi ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ si valuta con una tavola di verità – una colonna per ogni connettivo, uni per vero – e l'app dice se è una tautologia, una contraddizione o solo soddisfacibile; per una soddisfacibile aggiunge le forme normali disgiuntiva e congiuntiva e una forma semplificata.

Con il chip «Negazione» l'app nega la proposizione passo per passo con le leggi di De Morgan e le negazioni di un'implicazione e di un'equivalenza. Una proposizione con quantificatori (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) si nega direttamente – il quantificatore universale diventa esistenziale, una disuguaglianza quella opposta. Per un'implicazione offre anche la contronominale e l'inversa.

Insiemi dati dai loro elementi ({1, 2, 3}) o come intervalli ((1; 5), [3; 7)) e la loro unione, intersezione, differenza, complementare nell'universo U e differenza simmetrica si calcolano operazione per operazione. Gli insiemi elencati ricevono un diagramma di Venn con gli elementi nelle sue regioni, gli intervalli il risultato sulla retta reale.

Senza elementi (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) l'app verifica un'uguaglianza di espressioni insiemistiche con una tabella di appartenenza e i diagrammi di Venn di entrambi i membri; un'espressione da sola, (A \ B) ∪ (B \ C), viene ombreggiata in un diagramma di Venn. Decide anche se vale 3 ∈ A o A ⊆ B.

Come inserirlo

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	I connettivi dalla tastiera dell'app (la scheda ∧∪) o da una foto (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Un'implicazione e un'equivalenza come frecce da una tastiera normale. &, | e ! non sono letti come connettivi – sono il valore assoluto e il fattoriale.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Quantificatori con un dominio (∈ ℝ) o una condizione (> 0), la proposizione dopo i due punti.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	Il compito come parola – la negazione, la contronominale e l'inversa (anche negace, obmena, obracena).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Un insieme dai suoi elementi (separati da virgole, da punti e virgola con la virgola decimale), un intervallo,

	l’universo U; ogni definizione su una riga o dopo una virgola.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	L’unione, l’intersezione, la differenza (anche \), il complementare A', la differenza simmetrica; l’intersezione precede le altre.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Un elemento di un insieme e un sottoinsieme – vero o falso.

Esempi

Una tautologia – un’implicazione è equivalente alla sua contronominale.

Input: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Risultato

La proposizione è una tautologia – vera per ogni valutazione.

Passaggi

- La tavola di verità (1 – vero, 0 – falso), una colonna per ogni connettivo

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- L’ultima colonna ha solo uno – la proposizione è vera per ogni valutazione, una tautologia.

Una proposizione soddisfacibile con le sue forme normali.

Input: `(p ∨ q) ⇒ r`

Risultato

La proposizione è soddisfacibile – vera solo per alcune valutazioni. Una forma equivalente semplificata: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Passaggi

- La tavola di verità (1 – vero, 0 – falso), una colonna per ogni connettivo

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- L'ultima colonna ha uno e zeri – la proposizione è soddisfacibile ma non è una tautologia.
- Una forma semplificata: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; la forma normale disgiuntiva completa – la disgiunzione delle righe in cui è vera $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- La forma normale congiuntiva – dalle righe in cui è falsa $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Una negazione con le leggi di De Morgan passo per passo.

Input: `p ∧ (q ⇒ r)` Negazione

Risultato

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Passaggi

- La negazione: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Legge di De Morgan, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$: $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- La negazione di un'implicazione, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$: $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

La negazione di una proposizione quantificata.

Input: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Risultato

$$\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$$

Passaggi

- La negazione: $\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 > 0\right)$
- Negare “per ogni … vale” dà “esiste uno per cui non vale”: $\exists x \in \mathbb{R}:\ \neg\left(x^2 + 1 > 0\right)$
- La negazione di un’uguaglianza o di una disuguaglianza è la relazione opposta ($<$ in $\geq$, $=$ in $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$

La contronominale.

Input: `p ⇒ ¬q` Contronominale

Risultato

$$q \Rightarrow \neg p$$

Passaggi

- La contronominale di $A \Rightarrow B$ è $\neg B \Rightarrow \neg A$ – equivalente a essa: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, con le negazioni semplificate $q \Rightarrow \neg p$

Il complementare di un'unione con un diagramma di Venn.

Input: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

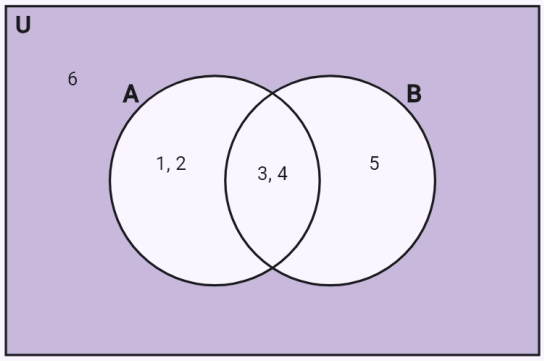
Risultato

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Passaggi

- Dati: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Dati: $B = \{3, 4, 5\}$
- Dati: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'unione – gli elementi che stanno in almeno uno degli insiemi: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Il complementare – gli elementi dell'universo che non stanno nell'insieme: $(A \cup B)' = \{6\}$

Grafico



L'intersezione di intervalli sulla retta reale.

Input: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

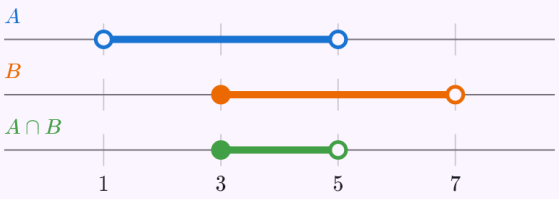
Risultato

$$A \cap B = [3;\, 5)$$

Passaggi

- Dati: $A = (1;\, 5)$
- Dati: $B = [3;\, 7)$
- L'intersezione – gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi: $A \cap B = [3;\, 5)$

Grafico



Ogni insieme dato ha la propria riga sull'asse, il risultato è in verde. Un punto pieno appartiene all'insieme, uno vuoto no.

La proprietà distributiva con una tabella di appartenenza.

Input: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Risultato

L'uguaglianza vale – i due membri sono lo stesso insieme.

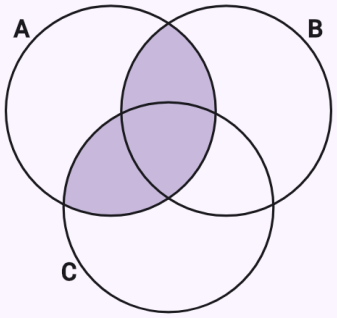
Passaggi

- La tabella di appartenenza – per ogni modo in cui un elemento può appartenere agli insiemi (1 – appartiene), i due membri confrontati

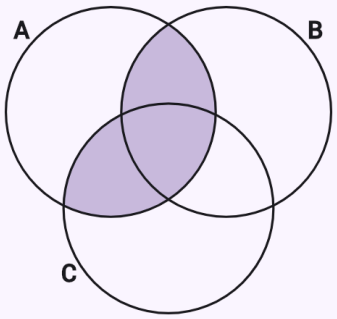
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Grafico

$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



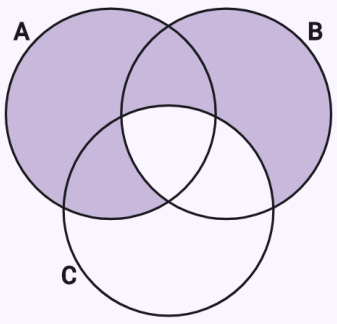
Un'espressione insiemistica in un diagramma di Venn.

Input: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Risultato

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

Grafico



Limiti noti

- Una tavola di verità per al massimo 5 variabili (32 righe), un diagramma di Venn per al massimo 4 insiemi.
- Gli insiemi dati da una proprietà ($\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$) non sono ancora letti – scrivili come intervalli.

19. Numeri complessi

Scrivi un numero complesso con l'unità immaginaria i: 1 - i√3 (o 1 - i*sqrt(3)), in forma trigonometrica 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) o cis(pi/3), in forma esponenziale 3e^(i pi/4); gli angoli possono essere anche in gradi (cos 60° + i sin 60°). I numeri si possono nominare, ciascuno su una riga (z_1 = 1 + i), con un'espressione nei loro nomi nell'ultima riga (z_1/z_2, z^8).

Per un singolo numero l'app calcola il modulo $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ e l'argomento φ – dai valori noti di coseno e seno, altrimenti con l'angolo acuto da $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ e il quadrante (esattamente con arctg e approssimato in radianti e gradi) – e scrive le forme trigonometrica ed esponenziale. Un numero in forma trigonometrica viene convertito in quella algebrica. L'argomento sta in $[0; 2\pi)$; il chip «Argomento principale» lo porta in $(-\pi; \pi]$. Il grafico mostra il numero nel piano complesso come vettore con l'arco dell'argomento.

Una potenza come (1 + i)^10 si calcola con la formula di De Moivre con l'argomento ridotto di multipli di 2π; un prodotto e un quoziente con moduli e argomenti. I chip scelgono «Forma trigonometrica» (per una potenza «Formula di De Moivre») o «Forma algebrica»; la divisione di numeri algebrici con il coniugato è nel capitolo Semplificare espressioni. Una radice root(3, 8i) e un'equazione binomia $z^3 = 8i$ danno tutte le n radici con $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; nel grafico sono i vertici di un n-agono regolare. Un'equazione nell'incognita z si risolve subito nei complessi; il chip «Risolvi in:» la porta in $\mathbb{R}$. Un'equazione di secondo grado con coefficienti complessi ($z^2 + i = 2z$) si risolve completando il quadrato, $(z - 1)^2 = 1 - i$, e la radice quadrata complessa si trova come a + bi confrontando parte reale e immaginaria.

Un'equazione con il coniugato $\bar{z}$ (il tasto $\bar{z}$ scrive conj(z), una foto dà \bar{z}), con |z|, Re z e Im z si risolve sostituendo z = x + yi: l'app scrive entrambi i membri come a + bi, confronta le parti reali e immaginarie e risolve il sistema risultante di due equazioni in x e y – un'equazione si risolve rispetto a una variabile e si sostituisce nell'altra, e se si scompone (y(2x + 1) = 0), la soluzione si divide in casi. Le soluzioni sono mostrate come punti del piano complesso. Se le parti immaginarie coincidono da sole ($|z - 1| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $|z - i| < |z + 1|$), il risultato è un insieme di punti: l'app eleva al quadrato i moduli, completa i quadrati e descrive la circonferenza (il cerchio, l'esterno di una circonferenza), la retta, il semipiano o l'asse del segmento. Più condizioni, ciascuna su una riga o separate da virgole ($|z| \leq 2$, $\operatorname{Re} z > 0$), e una doppia disuguaglianza ($1 < |z - 1| \leq 2$) si disegnano come loro intersezione – una regione ombreggiata; un bordo continuo appartiene all'insieme, uno tratteggiato no.

Come inserirlo

`1 - i*sqrt(3)`	La forma algebrica con l'unità immaginaria i.

`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	La forma trigonometrica, in breve cis φ.
`3e^(i pi/4)`	La forma esponenziale.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Numeri con nome, ciascuno su una riga, e un'espressione in essi.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Tutte le radici n-esime, un'equazione binomia.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Il coniugato, la parte reale e quella immaginaria.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Un insieme di punti nel piano complesso, più condizioni riga per riga.

Esempi

Il modulo, l'argomento da valori noti, le forme trigonometrica ed esponenziale.

Input: `1 - i*sqrt(3)`

Risultato

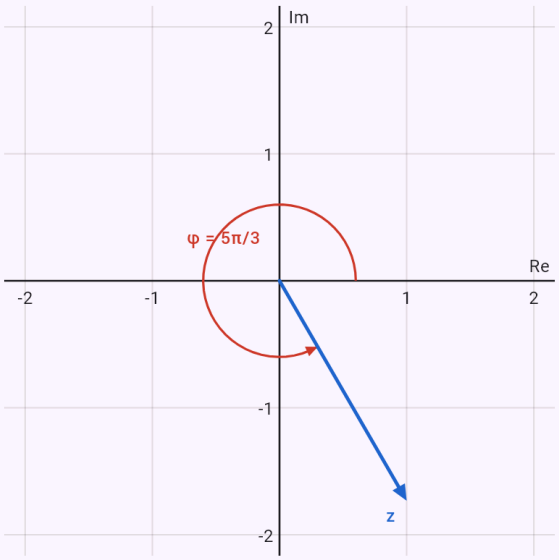
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Passaggi

- Il modulo |z| = √(a² + b²):
$$\left|1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- L'argomento φ da cos φ = a/|z| e sin φ = b/|z| – valori dalla tabella
$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- La forma trigonometrica z = |z|(cos φ + i sin φ):
$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- La forma esponenziale $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

Un argomento non tra i valori noti – l'angolo acuto e il quadrante.

Input: `-3 + 4i`

Risultato

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

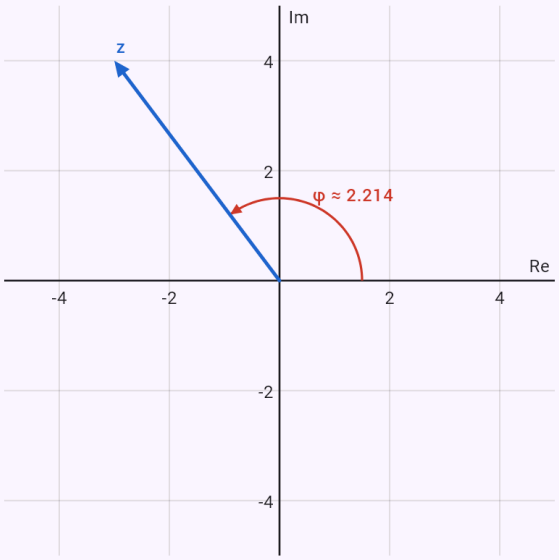
$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Passaggi

- Il modulo |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- L'angolo acuto α da tg α = |b/a|. Il numero sta nel quadrante 2, quindi l'argomento è
  $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$

  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- La forma trigonometrica z = |z|(cos φ + i sin φ)
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$
- La forma esponenziale $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

Dalla forma trigonometrica a quella algebrica.

Input: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Risultato

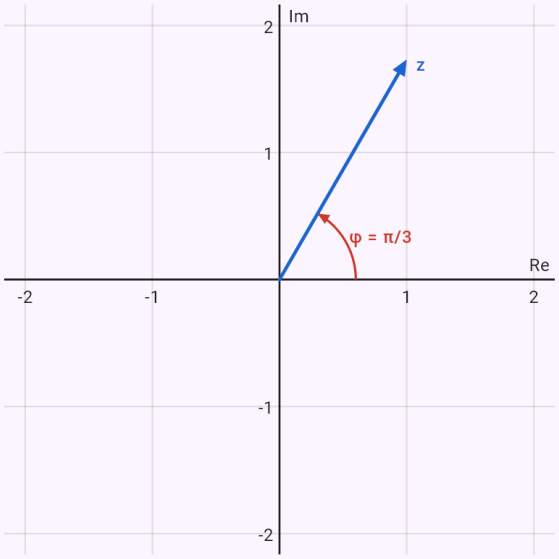
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Passaggi

- Il numero è dato in forma trigonometrica (esponenziale) – leggiamo il modulo e l'argomento
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- La forma algebrica – sostituiti i valori di coseno e seno, sviluppato
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- La forma esponenziale $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

La formula di De Moivre.

Input: `(1 + i)^10` Formula di De Moivre

Risultato

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

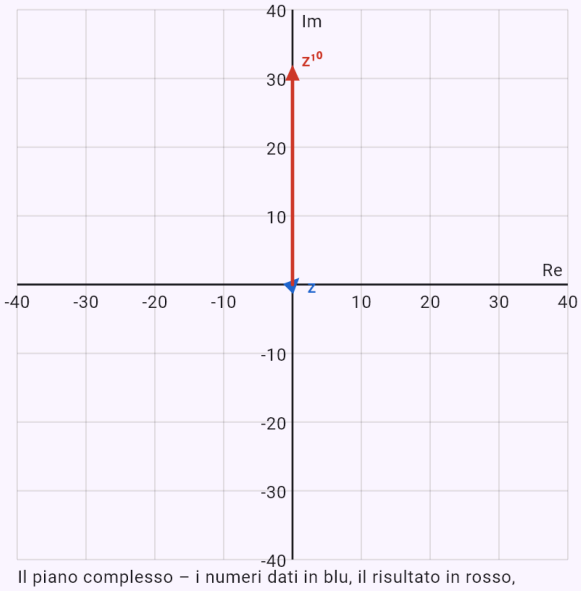
Passaggi

- Il modulo |z| = √(a² + b²): $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- L'argomento φ da cos φ = a/|z| e sin φ = b/|z| – valori dalla tabella

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- La formula di De Moivre $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- L'argomento riportato in $\langle 0; 2\pi)$ con un multiplo dell'angolo giro: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- La forma algebrica – sostituiti i valori di coseno e seno, sviluppato: $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

Un quoziente in forma trigonometrica.

Input: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Forma trigonometrica

Risultato

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Passaggi

- Il modulo |z| = √(a² + b²): $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- L'argomento φ da cos φ = a/|z| e sin φ = b/|z| – valori dalla tabella

  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- Il modulo |z| = √(a² + b²):

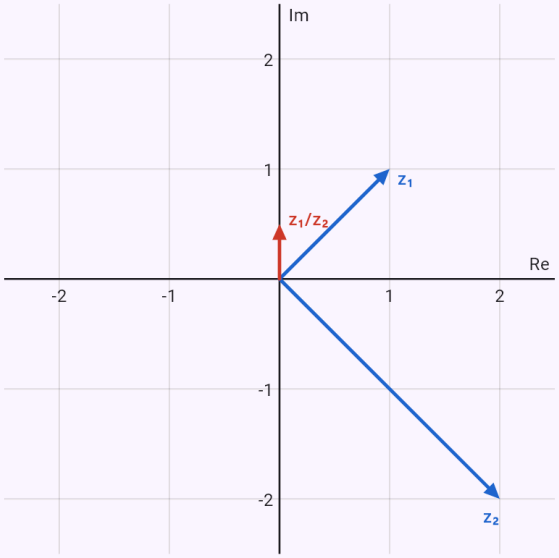
  $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- L'argomento φ da cos φ = a/|z| e sin φ = b/|z| – valori dalla tabella

  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Dividendo, i moduli si dividono e gli argomenti si sottraggono

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- L'argomento riportato in $\langle 0; 2\pi)$ con un multiplo dell'angolo giro: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- La forma algebrica – sostituiti i valori di coseno e seno, sviluppato

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

Un’equazione binomia – tre radici ai vertici di un triangolo.

Input: `z^3 = 8i`

Risultato

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

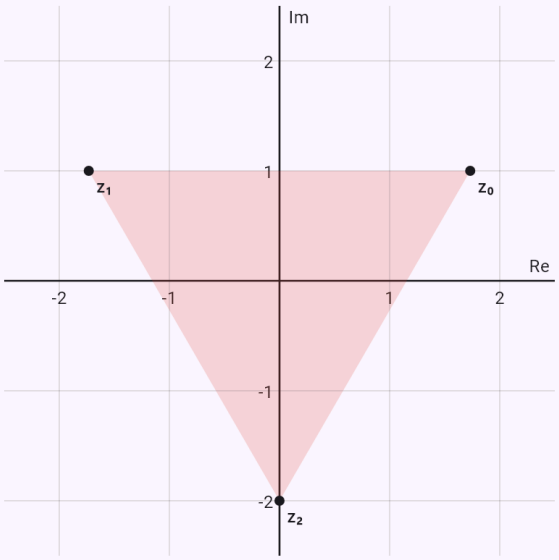
Passaggi

- Un’equazione binomia $z^n = a$ – le sue radici sono tutte le radici n-esime di a: $z^3 = 8i$
- Il modulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Il numero sta su un asse – il suo argomento subito: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Tutte le 3 radici con la formula $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Per k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Per k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Per k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- Nel piano complesso le radici sono i vertici di un poligono regolare di 3 lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio 2

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l’argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

Un’equazione con il coniugato – parti reali e immaginarie confrontate.

Input: `z + 2conj(z) = 3 - i`

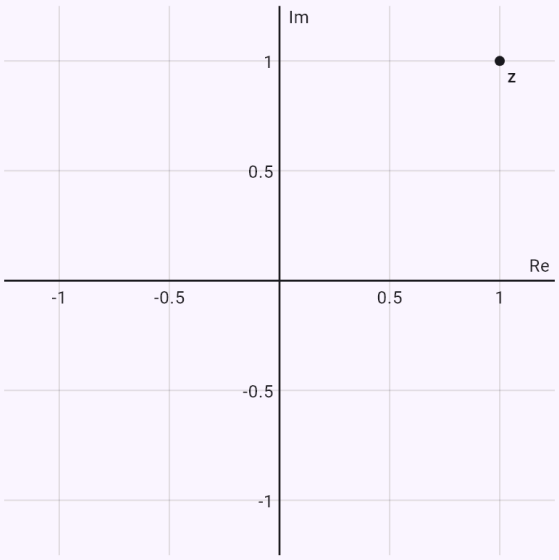
Risultato

$$z = 1 + i$$

Passaggi

- Sostituiamo z = x + yi con x e y reali: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Scriviamo entrambi i membri nella forma a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Due numeri complessi sono uguali quando sono uguali le loro parti reali e le loro parti immaginarie: $3x = 3$ e $-y = -1$
- Sostituiamo $y = 1$ nell’altra equazione: $3x = 3$
- Portiamo tutto in un membro: $3x - 3 = 0$
- Lasciamo i termini con l’incognita a sinistra e portiamo il resto a destra: $3x = 3$
- Dividiamo per il coefficiente 3: $x = 1$

Grafico



Il piano complesso (di Gauss) – le soluzioni come punti: la parte reale sull’asse orizzontale, la parte immaginaria su quello verticale.

L’equazione z² = z̄ – scomposizione e casi, quattro punti.

Input: `z^2 = conj(z)`

Risultato

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Newton (tangenti) | Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

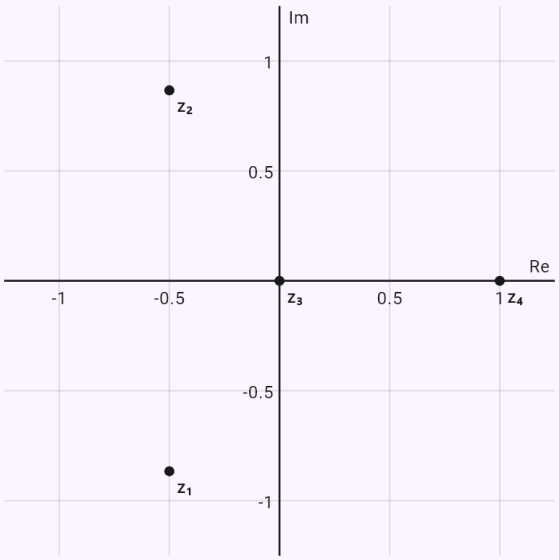
Passaggi

- Sostituiamo z = x + yi con x e y reali: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Scriviamo entrambi i membri nella forma a + bi: $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Due numeri complessi sono uguali quando sono uguali le loro parti reali e le loro parti immaginarie: $x^2 - y^2 = x$ e $2xy = -y$
- Scomponiamo l’equazione – un prodotto è zero quando uno dei suoi fattori è zero

  $$2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$$

- Sostituiamo $x = -\frac{1}{2}$ nell’altra equazione: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Portiamo tutto in un membro: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Sostituiamo $y = 0$ nell’altra equazione: $x^2 = x$
- Portiamo tutto in un membro: $x^2 - x = 0$
- Calcoliamo il discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Sostituiamo nella formula risolutiva dell’equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Grafico



Il piano complesso (di Gauss) – le soluzioni come punti: la parte reale sull’asse orizzontale, la parte immaginaria su quello verticale.

L’intersezione di un cerchio e di un semipiano – una regione ombreggiata, il bordo tratteggiato escluso.

Input: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

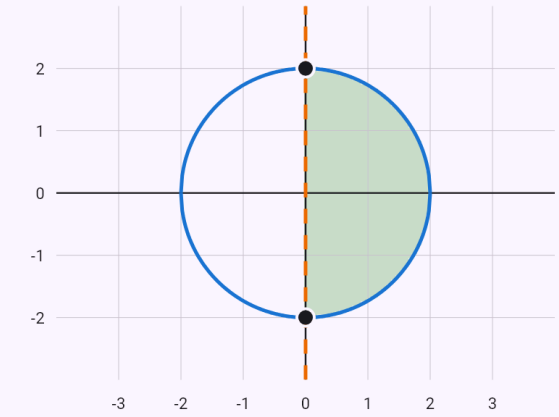
Risultato

$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Passaggi

- Sostituiamo z = x + yi con x e y reali: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- La condizione 1 per x e y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Entrambi i membri sono non negativi, quindi li eleviamo al quadrato: $x^2 + y^2 \leq 4$
- È il cerchio di centro 0 e raggio 2, circonferenza di bordo inclusa.
- La condizione 2 per x e y: $x > 0$
- È il semipiano a destra della retta $x = 0$, la retta di bordo esclusa.
- Disequazione 1: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Il bordo è la curva $x^2 + y^2 = 4$ – tracciata a linea continua, i suoi punti appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ è verificata – la soluzione è la parte del piano che contiene il punto.
- Disequazione 2: $x > 0$
- Il bordo è la curva $x = 0$ – tracciata a linea tratteggiata, i suoi punti non appartengono alla soluzione.
- Sostituiamo il punto $[1;\ 0]$: $1 > 0$ è verificata – la soluzione è la parte del piano che contiene il punto.
- La soluzione del sistema è la parte comune di queste regioni – ombreggiata nel grafico.
- I vertici della regione (dove si incontrano i bordi): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Grafico



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Il piano complesso (di Gauss) – x = Re z sull'asse orizzontale, y = Im z su quello verticale. L'insieme dei punti è la regione ombreggiata. Un bordo continuo le appartiene, uno tratteggiato no.

I punti equidistanti da i e da −1 – un asse del segmento.

Input: `|z - i| = |z + 1|`

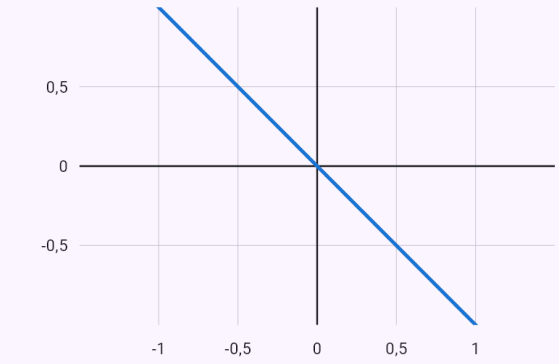
Risultato

$$y = -x$$

Passaggi

- Sostituiamo z = x + yi con x e y reali: $z = x + yi$
- La condizione per x e y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Entrambi i membri sono non negativi, quindi li eleviamo al quadrato: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Sono i punti equidistanti da i e -1 – l'asse del segmento tra i e -1: $y = -x$

Grafico



$|z - i| = |z + 1|$

Il piano complesso (di Gauss) – x = Re z sull'asse orizzontale, y = Im z su quello verticale. L'insieme dei punti è la linea disegnata.

Limiti noti

- Le radici il cui argomento non è un valore noto sono date in forma trigonometrica e in modo approssimato in quella algebrica.
- Un insieme di punti viene descritto quando è una circonferenza (un cerchio), una retta (un semipiano) o un asse del segmento; altre coniche ($\mathrm{Im}\, z^2 = 2$) sono solo disegnate e una somma di moduli ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, un'ellisse) non è ancora supportata.
- Un sistema in x e y che non si può risolvere esplicitando un'incognita viene risolto senza passaggi.

Generato dall'app Mathtrace