Mathtrace – manuale

VI. Applicazioni: fisica e ingegneria

Indice

VI. Applicazioni: fisica e ingegneria

42. Applicazioni delle equazioni differenziali

43. Fisica

44. Statica e resistenza dei materiali

45. Astronomia e astrofisica

46. Applicazioni dell’analisi complessa

42. Applicazioni delle equazioni differenziali

Le applicazioni sono nella sezione «Applicazioni» della schermata iniziale – riquadri degli ambiti che scegli nelle impostazioni (l'ingranaggio, «I miei ambiti») e singole applicazioni fissate con la puntina nell'elenco o nel modulo; «Tutte le applicazioni» le mostra tutte per ambiti (un'applicazione può appartenere a più ambiti, per esempio un circuito RC alla fisica e all'elettrotecnica). Le equazioni differenziali usano un modulo con 23 modelli: datazione al radiocarbonio, decadimento e tempo di dimezzamento, crescita esponenziale, una catena di decadimenti, il raffreddamento di Newton (anche l'ora del decesso da due misure), cinetica chimica di ordine 0–2, un farmaco nel sangue (una dose, dosi ripetute, un'infusione), alcol nel sangue, risparmi e prestiti, circuiti RC, RL e RLC, un corpo su una molla, una caduta con resistenza dell'aria, lo svuotamento di un serbatoio, la miscelazione in un serbatoio, crescita logistica e di Gompertz, una popolazione sfruttata, l'epidemia SIR, predatore e preda, due specie in competizione e un chemostato.

Scegli il modello, la sua variante e cosa cerchi; le costanti (il tempo di dimezzamento del ^{14}C, l'accelerazione di gravità, …) sono precompilate e si possono cambiare. Ogni grandezza e il risultato hanno un'unità da scegliere – l'app converte i valori (la conversione è un passaggio). Il «?» accanto al modello spiega da dove viene la sua equazione.

I passaggi iniziano impostando il modello (perché questa equazione), proseguono risolvendo l'equazione (separazione delle variabili, un fattore integrante, l'equazione caratteristica), sostituiscono le condizioni, ricavano la grandezza cercata e finiscono sostituendo i numeri. I sistemi (SIR, predatore e preda, competizione, chemostato) si risolvono numericamente con il metodo di Runge–Kutta, i loro equilibri e la stabilità esattamente. Il grafico mostra le grandezze nel tempo con la risposta evidenziata, per i sistemi anche il piano delle fasi.

Esempi

L’età di un reperto con il 35 % di ¹⁴C rimasto.

Input: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Risultato

$$t \approx 8700\,\text{anno}$$

Passaggi

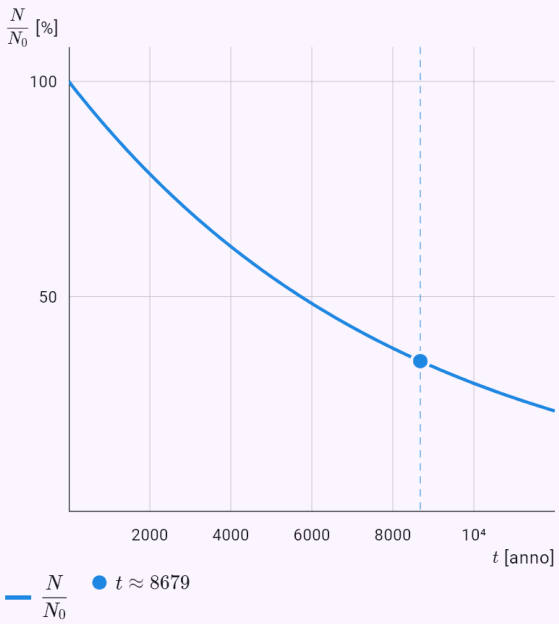
- Incognita t; dati: $T_{1/2} = 5730\,\text{anno}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Convertiamo le unità: $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Gli organismi viventi assorbono carbonio dall’aria, quindi contengono la stessa frazione dell’isotopo radioattivo ¹⁴C dell’atmosfera. Dopo la morte l’assorbimento cessa e il ¹⁴C decade. Il numero di decadimenti nell’unità di tempo è proporzionale al numero di nuclei rimasti: dN/dt = −λN, dove λ è la costante di decadimento. La soluzione è N = N₀·e^(−λt) e metà scompare dopo il tempo di dimezzamento T½ = 5730 anni, quindi λ = ln 2 / T½. Dalla frazione di ¹⁴C rimasta (o dall’attività misurata rispetto a un campione vivente) si ricava l’età. Equazione del modello: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separiamo le variabili: $\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Integriamo entrambi i membri: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Passiamo all’esponenziale – la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- Nel tempo di dimezzamento la quantità si dimezza – costante di decadimento

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\text{ann}$$

- Ricaviamo l’incognita: $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N_0}{N}$
- Sostituiamo: $t = \frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\text{anno}$

- I laboratori indicano l’«età radiocarbonica» con il tempo di dimezzamento di Libby di 5568 anni e la convertono con una curva di calibrazione (il contenuto di ¹⁴C nell’atmosfera non è sempre stato lo stesso) – l’età reale può quindi differire leggermente.

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

L’ora del decesso: il corpo era a 30 °C al ritrovamento, a 28 °C un’ora dopo, la stanza a 20 °C.

Input: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

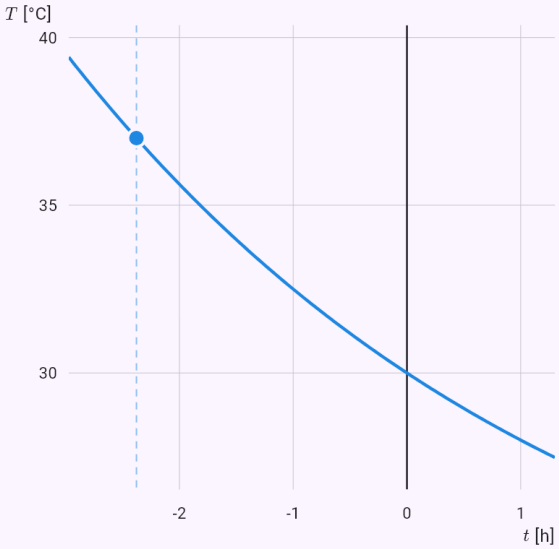
Risultato

$$t \approx -2{,}38\,\text{h}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $T_0 = 30\,^\circ\text{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\text{C}, \quad t_1 = 1\,\text{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\text{C},$
- Un corpo cede calore tanto più rapidamente quanto maggiore è la differenza di temperatura: dT/dt = −k(T − T_a), dove T_a è la temperatura ambiente e k dipende dal corpo (dimensioni, materiale, flusso d'aria). La soluzione è T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt) − la differenza diminuisce esponenzialmente. k si ricava da due misure. Così i medici legali stimano l'ora del decesso: misurano la temperatura del corpo al ritrovamento e un po' più tardi e calcolano quando era 37 °C. Equazione del modello: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separiamo le variabili: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Integriamo entrambi i membri: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Passiamo all'esponenziale − la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $T(0) = T_0$: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k dalla seconda misura
  $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Ricaviamo l'incognita
  $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Sostituiamo: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\text{h}$
- Un tempo negativo significa prima della prima misura (per l'ora del decesso: tante ore prima del ritrovamento del corpo).

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Un farmaco da 500 mg ogni 8 ore – il livello stazionario tra le dosi.

Input: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Risultato

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\text{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\text{mg/l}$$

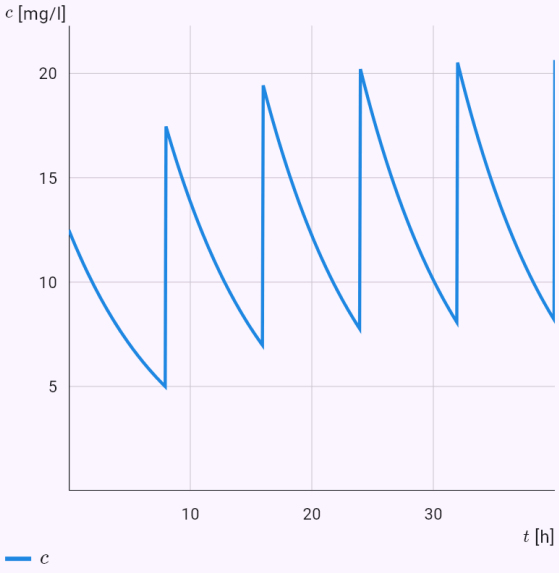
Passaggi

- Incognita c_{max}; dati $D = 500\,\text{mg}, \quad V = 40\,\text{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\text{h}, \quad \tau = 8\,\text{h}$
- Il farmaco nel sangue si distribuisce nel volume di distribuzione V; reni e fegato lo eliminano con una velocità proporzionale alla concentrazione: dc/dt = −kc, k = ln 2 / T½ (emivita biologica). Dopo una dose singola D si ha c = (D/V)·e^(−kt). Con dosi ripetute ogni τ i residui si sommano (serie geometrica) e il livello si stabilizza tra c_min e c_max. Un'infusione con velocità R dà dc/dt = R/V − kc e la concentrazione si avvicina al valore stazionario R/(kV). Equazione del modello: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Concentrazione iniziale dopo la dose: $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\text{mg/l}$
- Costante di eliminazione dall'emivita biologica: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\text{h}^{-1}$
- Separiamo le variabili: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Integriamo entrambi i membri: $\ln|c| = -kt + C$
- Passiamo all'esponenziale – la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $c = Ce^{-kt}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $c = c_0 e^{-kt}$
- Frazione di farmaco rimasta alla dose successiva: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Ricaviamo l'incognita

$$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$$

- Sostituiamo: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\text{mg/l}$
- Sostituiamo: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\text{mg/l}$
- Fattore di accumulo (quante volte il livello stazionario supera quello di una dose singola): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Grafico



Come variano le grandezze nel tempo.

La rata mensile di un prestito di 1.000.000 CZK per 20 anni al 5 %.

Input: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];`

```
kind=loan)
```

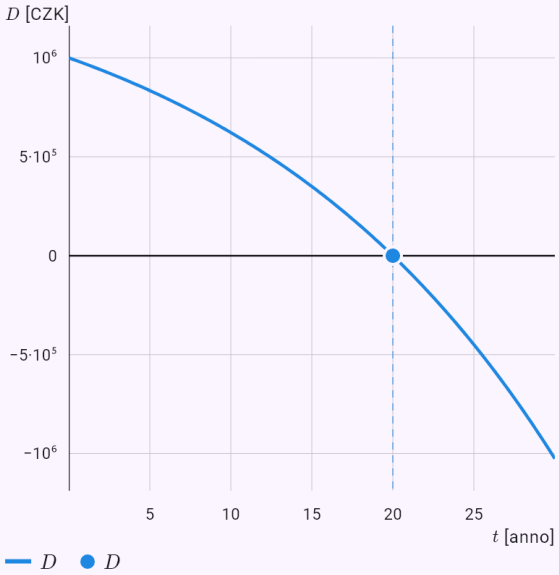
Risultato

$$a \approx 6.592\,\mathrm{CZK/mese}$$

Passaggi

- Incognita a; dati
  $D_0 = 1.000.000\,\mathrm{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{annuo}, \quad t = 20\,\text{anno}$
- Convertiamo le unità: $r = 5\,\%\ \text{annuo} = 0{,}05\,\text{anno}^{-1}$
- Con la capitalizzazione continua gli interessi maturano in ogni istante in proporzione al saldo: dB/dt = rB, dove r è il tasso annuo. Versamenti regolari a aumentano il saldo (dB/dt = rB + a), le rate di un prestito riducono il debito (dD/dt = rD − a). L'equazione si risolve per separazione delle variabili e la soluzione dà il saldo, la durata del rimborso o la rata (l'analogo continuo di una rendita).
  Equazione del modello: $\dfrac{dD}{dt} = rD - a$
- Separiamo le variabili: $\dfrac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Integriamo entrambi i membri: $\ln\left|D - \dfrac{a}{r}\right| = rt + C$
- Passiamo all'esponenziale − la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $D = \dfrac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \dfrac{a}{r}$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $D = \dfrac{a}{r} + \left(D_0 - \dfrac{a}{r}\right)e^{rt}$
- La capitalizzazione continua è un modello − le banche capitalizzano mensilmente o annualmente; i risultati differiscono solo di poco.
- Ricaviamo l'incognita: $a = \dfrac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Sostituiamo
  $a = \dfrac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79.100\,\mathrm{CZK/anno}$
- Pagato in totale: $a\,t = 1.582.000\,\mathrm{CZK}$
- Convertiamo le unità:
  $a \approx 79.100\,\mathrm{CZK/anno} = 6.592\,\mathrm{CZK/mese}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Quanto impiega un condensatore a caricarsi a metà della tensione della sorgente.

Input: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

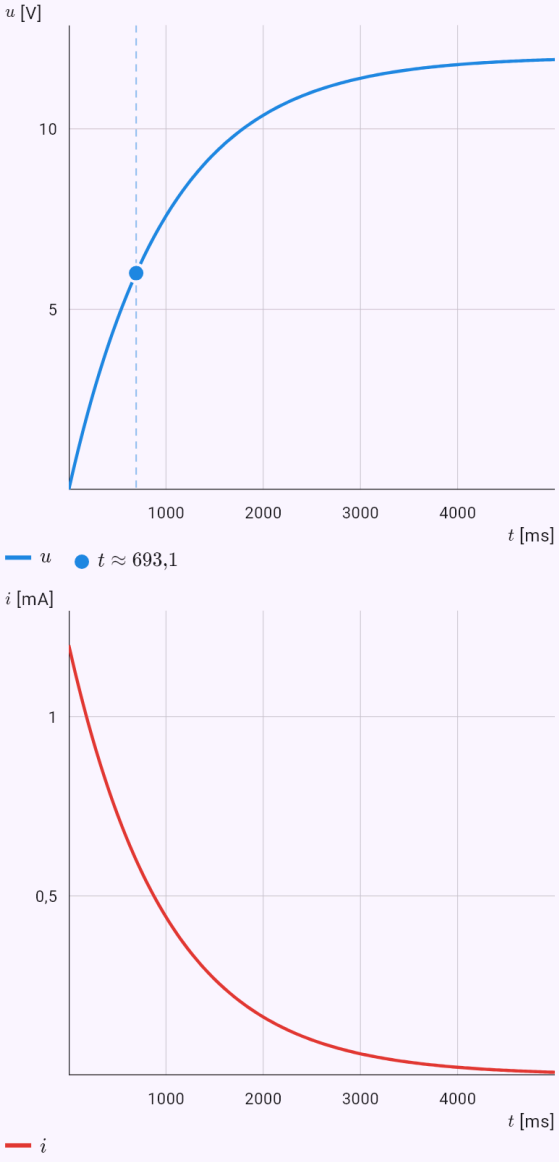
Risultato

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Caricando un condensatore attraverso un resistore, la legge di Kirchhoff dà U = Ri + u e la corrente carica il condensatore: i = C·du/dt. Insieme RC·du/dt + u = U. La tensione si avvicina a quella della sorgente: u = U(1 − e^(−t/τ)), dove τ = RC è la costante di tempo; la corrente i = (U/R)·e^(−t/τ) diminuisce. Nella scarica u = U₀·e^(−t/τ). Equazione del modello: $RC\frac{du}{dt} + u = U$
- Costante di tempo: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Separiamo le variabili: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integriamo entrambi i membri: $\ln|u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Passiamo all'esponenziale – la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $u(0) = 0$:
  $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Ricaviamo l'incognita: $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Sostituiamo: $t = -1000 \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Una molla smorzata – lo spostamento dopo 1 s.

Input: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

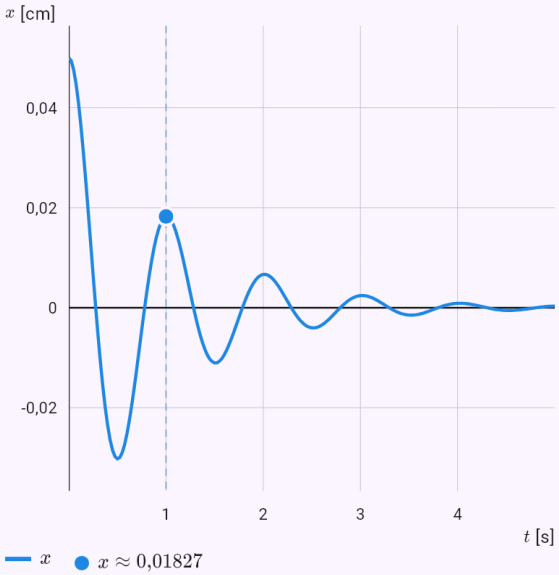
Risultato

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Passaggi

- Incognita x; dati
  $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Convertiamo le unità: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Su un corpo attaccato a una molla agiscono la forza elastica −kx (legge di Hooke), lo smorzamento −b·v (resistenza proporzionale alla velocità) ed eventualmente una forza esterna $F_0 \cdot \cos \omega t$. Dal secondo principio della dinamica $m \cdot x'' = -kx - b \cdot x' + F_0 \cdot \cos \omega t$, cioè $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – un'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti. Le radici dell'equazione caratteristica dicono se il corpo oscilla (smorzamento debole) o torna soltanto all'equilibrio. Una forzante vicina alla pulsazione propria $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ provoca la risonanza. Equazione del modello:
  $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Pulsazione propria (senza smorzamento):
  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Coefficiente di smorzamento:
  $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Cerchiamo soluzioni x = e^(λt); sostituendo e dividendo per e^(λt) si ottiene l'equazione caratteristica:
  $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica:
  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Smorzamento debole ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): radici complesse – oscillazioni smorzate.
- La soluzione dell'equazione omogenea:
  $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale:
  $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, da cui
  $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare):
  $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Sostituiamo: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Convertiamo le unità: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Un’epidemia con R_0 = 2,5 – il picco e il numero finale di infetti.

Input: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Risultato

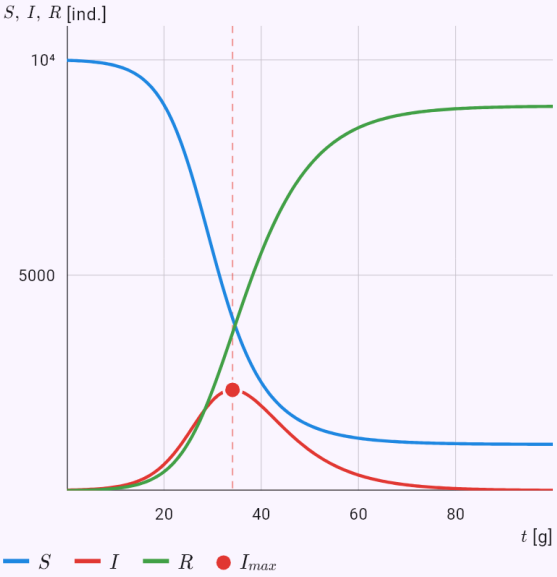
$$I_{max} \approx 2340\,\text{ind.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{g}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{ind.}$$

Passaggi

- Incognita t_{max}; dati
  $N = 10\,000\,\text{ind.}, \quad I_0 = 10\,\text{ind.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{g}$
- La popolazione N si divide in suscettibili S, infetti I e guariti (immuni) R. Le infezioni aumentano in proporzione agli incontri tra suscettibili e infetti: β·S·I/N; gli infetti guariscono con tasso γ = 1/D, dove D è la durata della malattia. Il sistema S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI non ha soluzione in funzioni elementari – si risolve numericamente. Ricaviamo però esattamente il numero di riproduzione di base R_0 = β/γ, il picco dell’epidemia, il numero finale di infetti e la soglia di immunità di gregge 1 − 1/R_0. Equazione del modello
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Tasso di guarigione: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{g}^{-1}$
- Tasso di trasmissione: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{g}^{-1}$
- La somma S + I + R = N è costante (le equazioni sommate danno zero).
- Soglia di immunità di gregge (quota di immuni alla quale la malattia smette di diffondersi): $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- L’epidemia si sviluppa, perché inizialmente
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- L’epidemia raggiunge il picco per S = N/R_0; dall’equazione per dI/dS
  $$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$
- Risolviamo l’equazione numericamente (per bisezione)
  $$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{ind.}$$
- In totale la malattia colpirà:
  $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{ind.}\ (89{,}3\,\%)$
- Il sistema non si risolve in funzioni elementari – lo risolviamo numericamente con il metodo di Runge–Kutta del 4° ordine con passo $0{,}05$ su $[0;\ 100]$
- › Il metodo: metodo di Runge–Kutta del 4° ordine, 2000 passi
- Dalla soluzione numerica: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{g}$

Grafico

Nel tempo | Piano delle fasi



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Predatore e preda – l’equilibrio, la sua stabilità e il periodo.

Input: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo];`

d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])

Risultato

$[x^*;\, y^*] \approx [80;\, 50]$

$T \approx 14{,}9\,\text{mese}$

Passaggi

- Incognita T; dati

  $a = 0{,}5\,\text{mese}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{ind.}\cdot\text{mese})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{n}$

- Le prede x si moltiplicano senza predatori (ax), i predatori y si estinguono senza prede (−cy). Gli incontri, proporzionali al prodotto xy, sottraggono prede (−bxy) e danno cibo ai predatori (+dxy). Il sistema x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) ha l'equilibrio (c/d; a/b). Linearizzato in esso ha autovalori puramente immaginari – le popolazioni oscillano intorno all'equilibrio, i predatori in ritardo rispetto alle prede. Si risolve numericamente; gli equilibri e l'integrale primo si ricavano esattamente. Equazione del modello

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Equilibri – tutte le derivate sono nulle

  $x(a - by) = 0,\ y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0;\, 0],\ \left[\frac{c}{d};\, \frac{a}{b}\right] \approx [80;$

- Stabilità per linearizzazione – matrice jacobiana del sistema

  $J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$

- In $[0;\, 0]$ autovalori $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – una sella (instabile).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- In $[80;\, 50]$ autovalori $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – un centro (oscillazioni intorno all'equilibrio).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Dividendo le equazioni e separando le variabili si ottiene un integrale primo – una grandezza costante lungo la traiettoria: $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Poiché V non cambia lungo una traiettoria, le traiettorie sono curve chiuse – le popolazioni oscillano periodicamente intorno all'equilibrio.

- Periodo delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio (dagli autovalori): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{mese}$

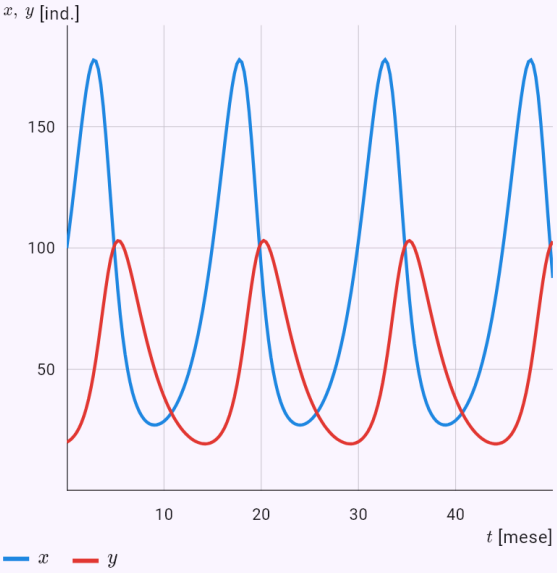
- Il sistema non si risolve in funzioni elementari – lo risolviamo numericamente con il metodo di Runge–Kutta del 4° ordine con passo $0{,}0125$ su $[0;\, 50]$

- › Il metodo: metodo di Runge–Kutta del 4° ordine, 4000 passi

- Dalla soluzione numerica: $T \approx 14{,}95\,\text{mese}$

Grafico

Nel tempo | Piano delle fasi



Come variano le grandezze nel tempo.

Un recipiente conico: il tempo di svuotamento.

Input: model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

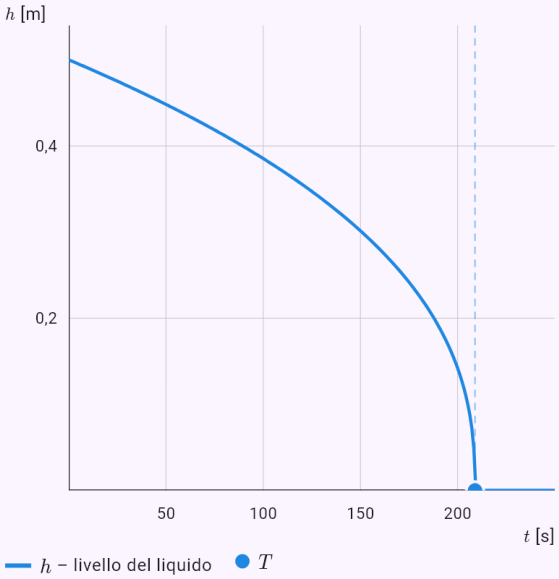
Risultato

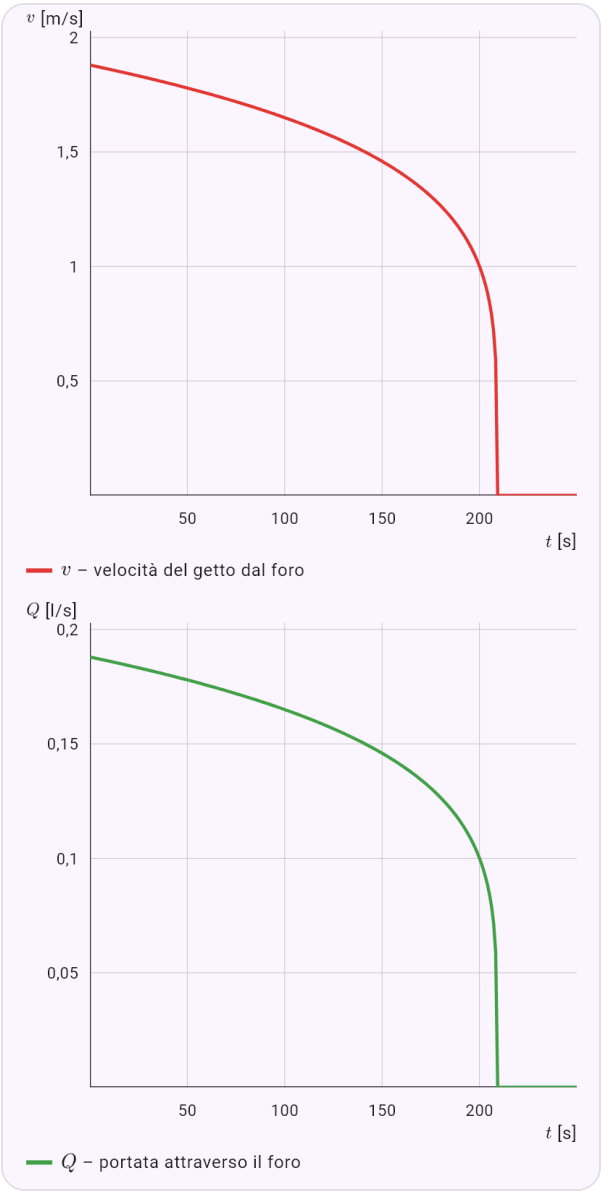
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

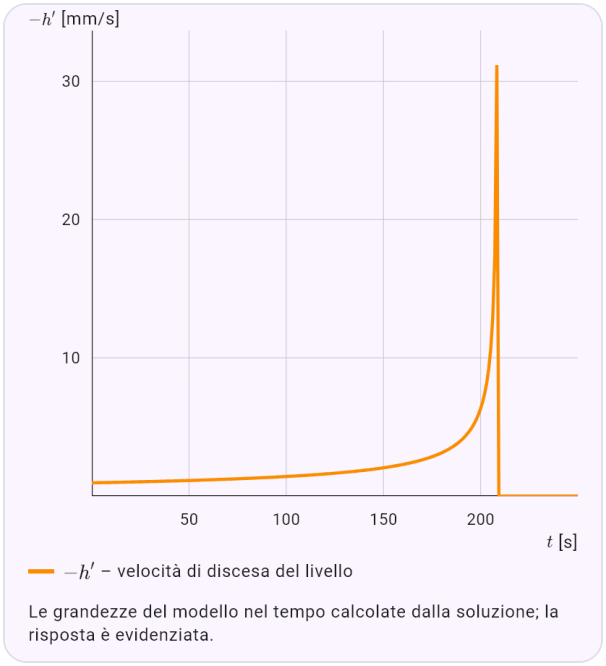
Passaggi

- Incognita T; dati
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Convertiamo le unità
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Un recipiente di rotazione della forma scelta ha un foro sul fondo. Il liquido esce con una velocità data dal bilancio energetico: Torricelli v = μ√(2gh), corretta per un foro grande (il termine s²/S²), per un tubo di uscita di lunghezza L (aggiunge l'altezza L, ma anche l'attrito dovuto alla viscosità del liquido – laminare o turbolento) e, in un recipiente chiuso, per la depressione dell'aria sopra il pelo libero, che rallenta il deflusso fino a fermarlo. Nel tempo dt esce il volume s·v·dt e il livello scende di dh, quindi dt = −S(h)/(s·v) dh e il tempo si ottiene integrando. Il grafico mostra il livello, la velocità del getto e la portata. Per r = R·(h/H)^p senza tubo né coperchio è mostrata per confronto la formula. Con r = k·h^(1/4) il livello scende uniformemente – così funzionavano gli orologi ad acqua. Equazione del modello
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- La sezione del recipiente all'altezza h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Acqua a 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Liquida a pressione normale da 0 a 100 °C.
- Separiamo le variabili: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La velocità del getto dipende dal livello in modo complicato, quindi l'integrale si calcola numericamente.
- Per confronto, Torricelli senza la correzione per il foro grande: $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Ricaviamo l'incognita: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Sostituiamo: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Convertiamo le unità: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Grafico







Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Olio da un recipiente sferico attraverso un tubo – il livello, la velocità del getto, la portata e la velocità con cui scende il livello.

Input: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

Risultato

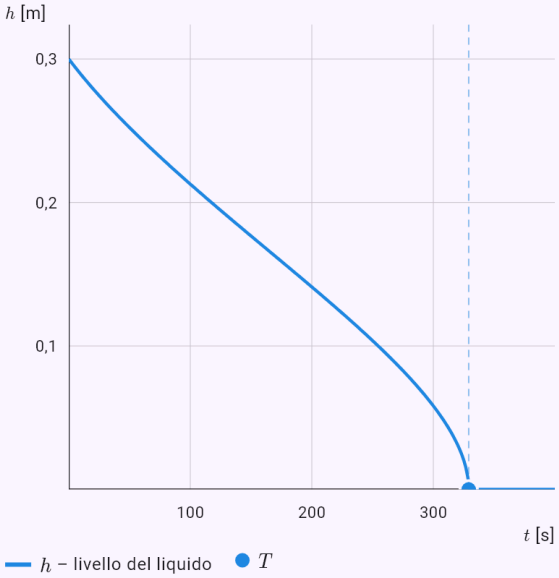
$$T \approx 5{,}48\,\text{min}$$

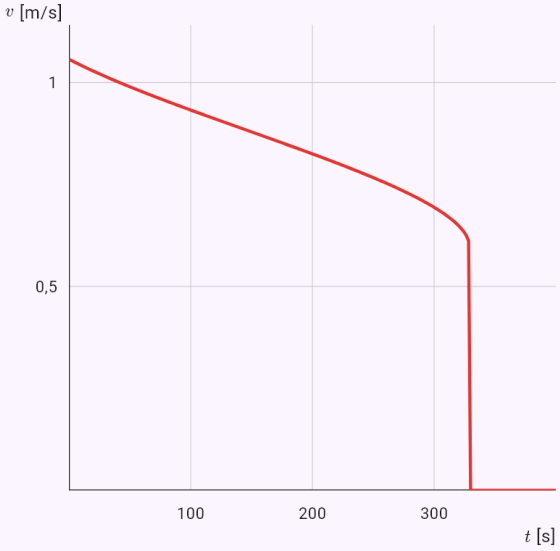
Passaggi

- Incognita T; dati
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Convertiamo le unità
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Un recipiente di rotazione della forma scelta ha un foro sul fondo. Il liquido esce con una velocità data dal bilancio energetico: Torricelli v = μ√(2gh), corretta per un foro grande (il termine s²/S²), per un tubo di uscita di lunghezza L (aggiunge l'altezza L, ma anche l'attrito dovuto alla viscosità del liquido – laminare o turbolento) e, in un recipiente chiuso, per la depressione dell'aria sopra il pelo libero, che rallenta il deflusso fino a fermarlo. Nel tempo dt esce il volume s·v·dt e il livello scende di dh, quindi dt = −S(h)/(s·v) dh e il tempo si ottiene integrando. Il grafico mostra il livello, la velocità del getto e la portata. Per r = R·(h/H)^p senza tubo né coperchio è mostrata per confronto la formula. Con r = k·h^(1/4) il livello scende uniformemente – così funzionavano gli orologi ad acqua. Equazione del modello
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- La sezione del recipiente all'altezza h:
  $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Olio di girasole a 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Solidifica attorno a −17 °C e non bolle – sopra i 200 °C si decompone; la sua viscosità cala ripidamente con la temperatura.

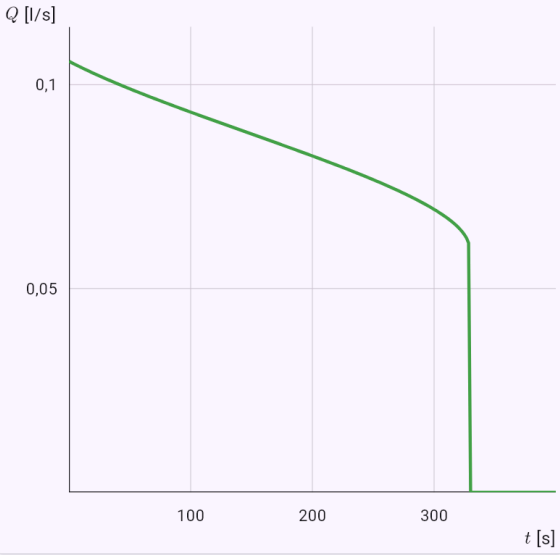
- Separiamo le variabili: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La velocità del getto dipende dal livello in modo complicato, quindi l'integrale si calcola numericamente.
- Ricaviamo l'incognita: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Sostituiamo: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Convertiamo le unità: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

Grafico

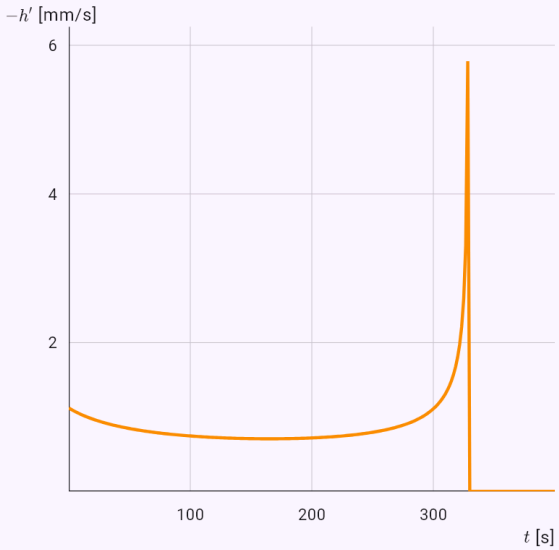




v – velocità del getto dal foro



Q – portata attraverso il foro



$-h'$ – velocità di discesa del livello

Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

La forma del recipiente in cui il livello scende uniformemente.

Input: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

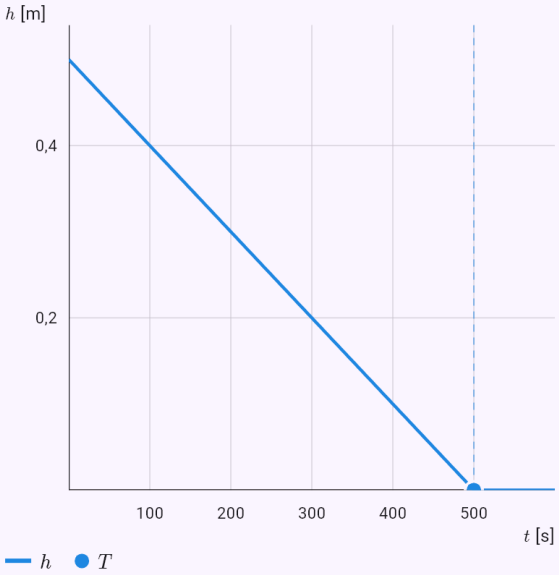
Risultato

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\text{cm}$$

Passaggi

- Incognita $r(h_0)$; dati
  $s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\text{cm}, \quad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$
- Convertiamo le unità
  $s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
- Un recipiente di rotazione della forma scelta ha un foro sul fondo. Il liquido esce con una velocità data dal bilancio energetico: Torricelli v = μ√(2gh), corretta per un foro grande (il termine s²/S²), per un tubo di uscita di lunghezza L (aggiunge l'altezza L, ma anche l'attrito dovuto alla viscosità del liquido – laminare o turbolento) e, in un recipiente chiuso, per la depressione dell'aria sopra il pelo libero, che rallenta il deflusso fino a fermarlo. Nel tempo dt esce il volume s·v·dt e il livello scende di dh, quindi dt = −S(h)/(s·v) dh e il tempo si ottiene integrando. Il grafico mostra il livello, la velocità del getto e la portata. Per r = R·(h/H)^p senza tubo né coperchio è mostrata per confronto la formula. Con r = k·h^(1/4) il livello scende uniformemente – così funzionavano gli orologi ad acqua. Equazione del modello: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Ricaviamo l'incognita:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Il livello scende uniformemente quando la sezione è proporzionale a √h, cioè r = k·h^(1/4). Era la forma degli orologi ad acqua.
- Sostituiamo: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\text{m}$
- Convertiamo le unità: $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\text{m} = 24{,}46\,\text{cm}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

43. Fisica

I calcoli di fisica sono nella sezione «Applicazioni», l'ambito Fisica. Il motore a razzo ha cinque modalità: spinta, impulso specifico, l'equazione di Ciolkovskij, un razzo a più stadi e la velocità di efflusso dalla termodinamica di un ugello ideale.

La spinta si calcola dalla portata in massa e dalla velocità di efflusso, facoltativamente con il termine di pressione; il grafico mostra allora come cresce con la quota nell'atmosfera standard. Nell'equazione di Ciolkovskij puoi cercare la variazione di velocità, il propellente necessario, la massa iniziale o finale, o la velocità di efflusso. I risultati sono ideali, senza perdite gravitazionali e aerodinamiche.

Le leggi di Keplero hanno un modulo proprio con cinque modalità: ellisse, aree, posizione nel tempo, periodo e la velocità dall'equazione vis-viva. Il grafico disegna l'orbita in scala reale e il corpo si muove lungo di essa con il cursore o il pulsante di riproduzione. Per la seconda legge mostra settori colorati spazzati in tempi uguali.

Il modulo sui corpi che si influenzano a vicenda calcola il baricentro, i punti di Lagrange, le maree, le risonanze orbitali e la precessione del perielio. Il grafico del baricentro mostra entrambi i corpi attorno al [[barycenter|baricentro]] B in scala reale. Quando la circonferenza del corpo maggiore è troppo piccola per vederla nell'immagine intera (il Sole attorno al baricentro del Sole e di Giove), l'interruttore «Dettaglio intorno al baricentro» la mostra ingrandita, con il raggio R anche il contorno del corpo – il baricentro si trova appena sopra la superficie del Sole. Una storia famosa: Urano si discostava dalla traiettoria prevista, e nel 1846 Le Verrier calcolò da queste perturbazioni dove doveva trovarsi un pianeta sconosciuto. Nettuno fu poi trovato quasi esattamente lì.

Il problema dei tre corpi si calcola numericamente in unità in cui G = 1: la soluzione periodica a otto, il caotico problema pitagorico in cui due simulazioni quasi identiche alla fine si separano, e valori propri. La variazione dell'energia totale verifica l'accuratezza.

La fisica nucleare nelle applicazioni è solo per usi pacifici: il laboratorio, la medicina e l'energia. Il modulo Fisica nucleare calcola l'attività di un campione, l'equilibrio radioattivo, le equazioni di Bateman di una catena di decadimento, l'energia di legame con un grafico secondo il numero di massa, l'energia di una reazione e l'energia del combustibile confrontata con il carbone.

Il modulo Reattore nucleare mostra le generazioni di neutroni come successione geometrica, il periodo del reattore con i neutroni ritardati e le dimensioni del nocciolo nel modello di diffusione a un gruppo, solo per reticoli moderati (grafite, acqua leggera).

La balistica calcola il volo di un proiettile per la fisica scolastica, lo sport e la caccia. Nel vuoto ci sono formule esatte con i passaggi; con la resistenza dell'aria una soluzione numerica con Runge-Kutta che include vento contrario e laterale, la densità dell'aria secondo la quota e la forza di Coriolis. Il grafico

mostra una vista laterale e un confronto con il vuoto, con una deriva laterale anche una vista dall'alto. Per i proiettili supersonici il coefficiente di resistenza viene da una curva approssimata secondo il numero di Mach. Si calcola solo il volo, non l'effetto su un bersaglio, e la deriva di un proiettile in rotazione non è inclusa. Il compito inverso trova entrambi gli angoli di lancio, teso e ripido, per una distanza data.

Aereo calcola le prestazioni per l'aviazione civile e la didattica: volo livellato su una polare di resistenza parabolica, la corsa di decollo e di atterraggio numericamente con vento e quota, una virata e una planata. Un effetto suolo facoltativo riduce la resistenza indotta. Il modello trascura la compressibilità dell'aria, quindi per gli aerei di linea in crociera il risultato è solo indicativo. Velocità e lunghezze si possono dare anche in nodi e piedi.

Rientro atmosferico calcola l'attraversamento dell'atmosfera da parte di un veicolo spaziale numericamente con il metodo di Runge-Kutta: la velocità, l'angolo di volo e la quota sopra una Terra sferica con l'atmosfera standard. Il risultato è un atterraggio, un rimbalzo nello spazio o un limite superato, il carico g massimo (verificato con la formula di Allen ed Eggers), il flusso di calore nel [[stagnationPoint|punto di ristagno]] e la temperatura dello scudo per [[radiativeEquilibrium|equilibrio radiativo]]. La modalità Corridoio di rientro trova per bisezione il limite radente e quello ripido dell'angolo di ingresso – per un ritorno dalla Luna il [[entryCorridor|corridoio]] risulta largo circa 2°, con una nota su Apollo 13. Preimpostazioni: Vostok, Apollo, Sojuz e lo Space Shuttle (con una nota fattuale sulla perdita del Columbia). L'unico controllo è un [[bankAngle|angolo di rollio]] costante; la Terra nel modello non ruota. Una demo interattiva in cui ruoti la portanza durante il volo è su mathtrace.app alla voce "Prova tu".

Corpi in acqua è un modulo per la didattica e l'uso civile: galleggiamento e spinta di Archimede incluso un pallone, la pressione con la profondità, l'equazione di Bernoulli, affondamento e risalita con una massa aggiunta, la portata e la caduta di un fucile subacqueo per la pesca sportiva, un veicolo sommerso a motore, la zavorra e una nave. Il coefficiente di resistenza di una sfera segue il numero di Reynolds e una bolla ha una correlazione propria. La resistenza di una nave è l'attrito secondo la linea ITTC-57 più un coefficiente residuo dato, quindi oltre le velocità dislocanti è solo indicativa. Per una nave puoi attivare un confronto con l'ekranoplano KM: il lavoro contro la resistenza per tonnellata e chilometro e un grafico della potenza secondo la velocità.

La fusione termonucleare ha due moduli, entrambi solo per uso civile (centrali, laboratori, il Sole e le stelle). Il modulo Fusione termonucleare calcola l'energia di una reazione (D-T, D-D, D-^{3}He e la catena p-p del Sole) con la sua ripartizione tra i prodotti, l'energia del combustibile confrontata con la fissione dell'uranio e con il carbone, l'altezza della [[coulombBarrier|barriera coulombiana]] e il [[gamowPeak|picco di Gamow]]. Un reattore a fusione non può andare fuori controllo come uno a fissione: la fusione non ha massa critica, e se qualcosa si guasta, il plasma si raffredda e la reazione si ferma da sola.

Il modulo Plasma da fusione calcola il [[lawsonCriterion|criterio di Lawson]] con un grafico del prodotto triplo necessario a ogni temperatura, il guadagno Q, la velocità di reazione ⟨σv⟩ come integrale sulla distribuzione di Maxwell con la regola di Simpson (confrontata con il fit pubblicato di Bosch e Hale), la densità di potenza di fusione, la perdita per bremsstrahlung e il raggio di Larmor di una particella carica in un campo magnetico. L'app non calcola la dinamica del plasma (magnetoidrodinamica).

Gli acceleratori di particelle hanno due moduli. La cinematica relativistica calcola il [[lorentzFactor|fattore di Lorentz]], la velocità, l'energia e la quantità di moto da una velocità o da un'energia cinetica, e la dilatazione del tempo con il percorso di particelle instabili (muone, pione, kaone). Il modulo Acceleratori di particelle confronta l'energia di collisione √s di fasci in collisione e di un bersaglio fisso, calcola il raggio di curvatura di un anello e il campo necessario, e la perdita per radiazione di sincrotrone. Il menu inserisce i valori di LHC, LEP o Tevatron.

Esempi

La spinta del motore al livello del mare, confrontata con il vuoto.

Input: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa]; pa=101.325[kPa];`

```
Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)
```

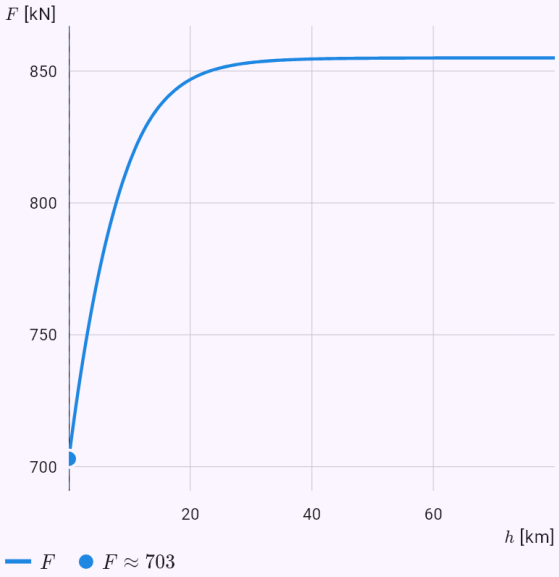
Risultato

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Passaggi

- Incognita F; dati
  $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Convertiamo le unità
  $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Un razzo è spinto espellendo massa: ogni secondo una massa Δm/Δt esce a velocità v_e e la conservazione della quantità di moto dà la spinta F = (Δm/Δt)·v_e. Se la pressione del gas all'uscita dell'ugello p_e differisce da quella ambiente p_a, si aggiunge il termine (p_e − p_a)·A_e, per questo la spinta cresce con la quota. Equazione del modello: $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Termine di pressione della spinta
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Il gas è sovraespanso nell'ugello (p_e < p_a), quindi la pressione ambiente riduce la spinta. Tipico al decollo per un motore progettato per quote più alte.
- Termine di quantità di moto della spinta:
  $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Sostituiamo: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Impulso specifico
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$$
- Spinta nel vuoto: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- Convertiamo le unità: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La velocità di efflusso dall'impulso specifico di RP-1/LOX.

Input: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Risultato

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita v_e; dati: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- L'impulso specifico I_sp = v_e/g_0 dice per quanti secondi 1 kg di propellente può produrre una spinta pari al peso di 1 kg, quindi confronta i propellenti. Equazione del modello: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Accelerazione di gravità standard: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Ricaviamo l'incognita: $v_e = I_{sp} g_0$
- Sostituiamo: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Più alto è l'impulso specifico, meno propellente il motore brucia a parità di spinta. Valori tipici nel vuoto: propellente solido ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

La variazione di velocità con l'equazione di Ciolkovskij.

Input: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

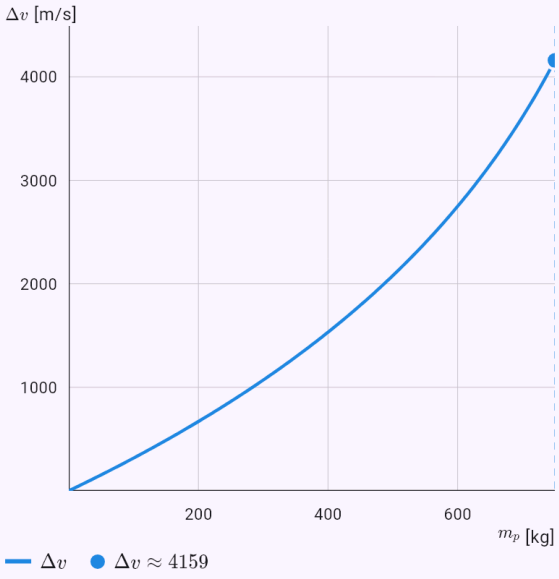
Risultato

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita Δv; dati: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- La quantità di moto del propellente espulso accelera il razzo: integrando m·dv = −v_e·dm si ottiene l'equazione di Ciolkovskij Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Equazione del modello: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separiamo le variabili: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integriamo entrambi i membri: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Sostituiamo: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Rapporto di massa: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Quota di propellente nella massa iniziale: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Un risultato ideale senza perdite gravitazionali e aerodinamiche. Per raggiungere l'orbita terrestre bassa servono in realtà circa 9,4 km/s.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Quanto propellente serve a 1 t di razzo per raggiungere l'orbita bassa.

Input: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

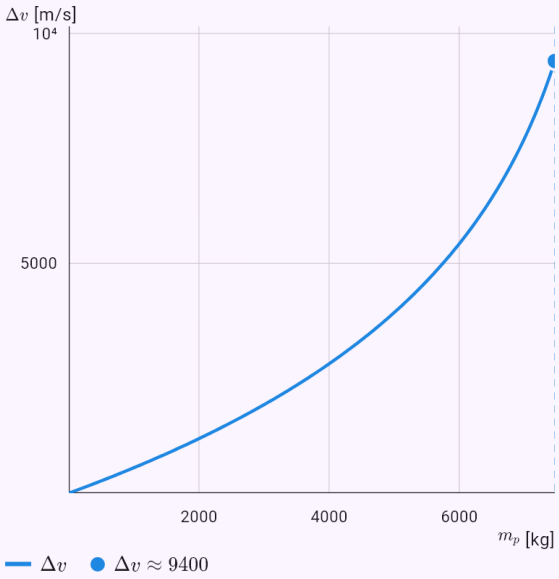
Risultato

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Passaggi

- Incognita m_p; dati: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- La quantità di moto del propellente espulso accelera il razzo: integrando m·dv = −v$_e$·dm si ottiene l'equazione di Ciolkovskij Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Equazione del modello: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separiamo le variabili: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integriamo entrambi i membri: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Ricaviamo l'incognita: $m_p = m_0 - m_f = m_f \left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1\right)$
- Sostituiamo: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1\right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Rapporto di massa: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Quota di propellente nella massa iniziale: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Un risultato ideale senza perdite gravitazionali e aerodinamiche. Per raggiungere l'orbita terrestre bassa servono in realtà circa 9,4 km/s.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un razzo a tre stadi della classe Saturn V e cosa fanno guadagnare gli stadi.

Input: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

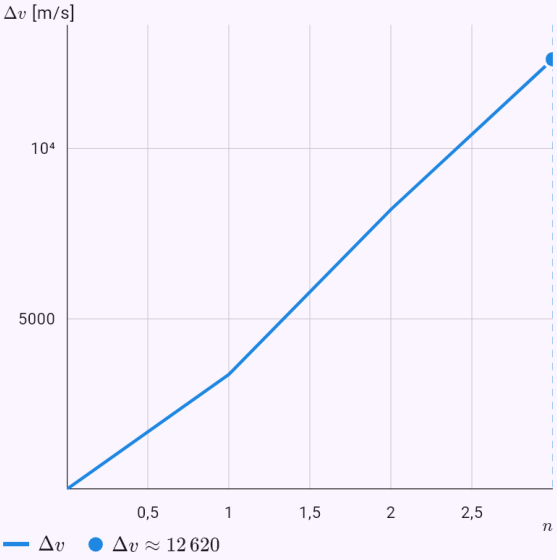
Risultato

$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita Δv; dati
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sp}$
- Convertiamo le unità
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Ogni stadio aggiunge velocità secondo l'equazione di Ciolkovskij e i suoi serbatoi vuoti vengono sganciati, così lo stadio successivo non porta più massa inutile. Gli incrementi di velocità si sommano. Equazione del modello: $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Accelerazione di gravità standard: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Variazione di velocità dello stadio
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Variazione di velocità dello stadio
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Variazione di velocità dello stadio
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Per confronto, un solo stadio con la stessa massa e lo stesso propellente
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Sganciando gli stadi vuoti il razzo guadagna $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ in più rispetto a un solo stadio con lo stesso propellente.
- Un risultato ideale senza perdite gravitazionali e aerodinamiche. Per raggiungere l'orbita terrestre bassa servono in realtà circa 9,4 km/s.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La velocità di efflusso di un motore a idrogeno dalla termodinamica dell'ugello.

Input: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];`

```
mode=nozzle; propellant=hydrogen)
```

Risultato

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita v_e; dati

  $$T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$$

- Convertiamo le unità: $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- La velocità di efflusso deriva dalla termodinamica di un ugello ideale: cresce con la temperatura della camera di combustione e diminuisce con la massa molare dei gas di scarico. Equazione del modello

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Costante universale dei gas: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Termine di espansione

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Sostituiamo

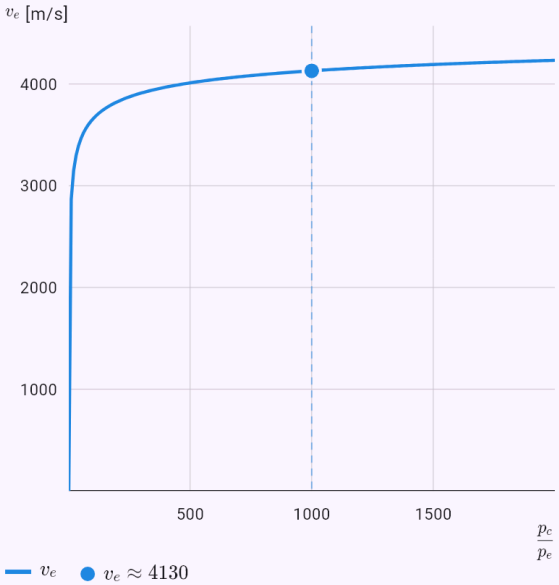
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Impulso specifico: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Velocità limite per espansione nel vuoto:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- La velocità di efflusso cresce con √(T/M), per questo l'idrogeno (gas di scarico leggeri) ha l'impulso specifico più alto.
- Flusso isentropico ideale; un ugello reale raggiunge circa il 92–98 % di questo valore.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il perielio della cometa di Halley dal semiasse maggiore e dall’eccentricità.

Input: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

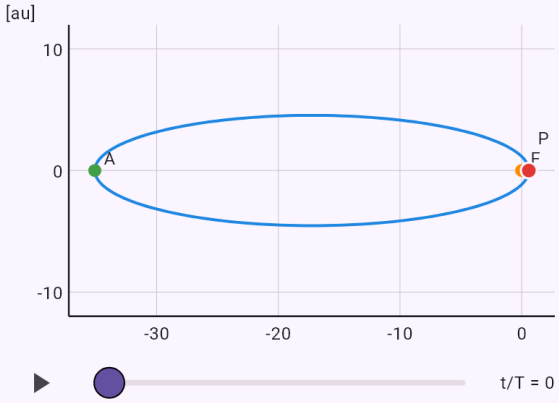
Risultato

$$r_p \approx 0{,}586\,\text{au}$$

Passaggi

- Incognita r_p; dati: $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671$
- Prima legge di Keplero: un pianeta si muove su un’ellisse con il corpo centrale in uno dei fuochi. La distanza r dipende dall’angolo θ dal perielio; è minima al perielio r_p = a(1 − e) e massima all’afelio r_a = a(1 + e). L’eccentricità e dice quanto è allungata l’ellisse.
  Equazione del modello: $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- Ricaviamo l’incognita: $r_p = a(1-e)$
- Sostituiamo: $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\text{au}$
- Distanza all’afelio: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\text{au}$

Grafico



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La velocità della Terra all’afelio dalla seconda legge di Keplero; settori di tempo uguale.

Input: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

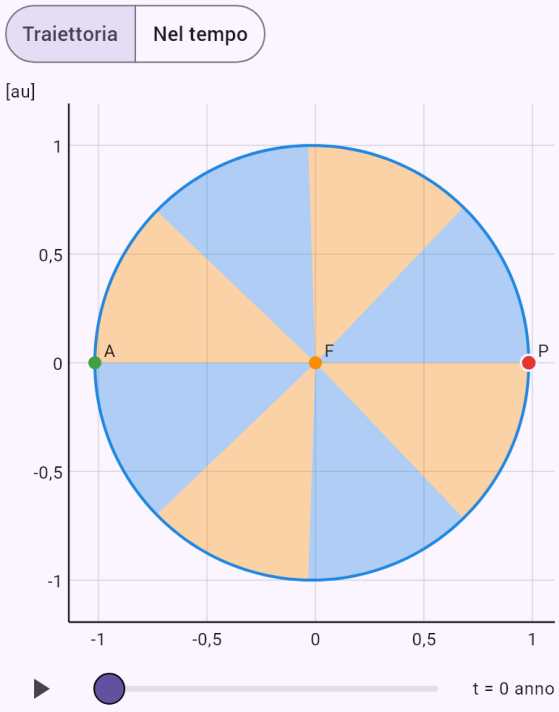
Risultato

$$v_a \approx 29{,}29\,\text{km/s}$$

Passaggi

- Incognita v_a; dati
  $r_p = 0{,}9833\,\text{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\text{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\text{km/s}$
- Seconda legge di Keplero: il raggio vettore dal fuoco spazza aree uguali in tempi uguali, perché il momento angolare si conserva. La velocità areolare è costante, quindi un corpo è più veloce al perielio: v_p·r_p = v_a·r_a. I settori colorati nel grafico hanno richiesto lo stesso tempo e hanno la stessa area. Equazione del modello:
  $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Ricaviamo l’incognita: $v_a = v_p \dfrac{r_p}{r_a}$
- Sostituiamo: $v_a = 30{,}29 \cdot \dfrac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\text{km/s}$
- Rapporto delle velocità: $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Un corpo è più veloce al perielio e più lento all’afelio; per questo la Terra si muove più rapidamente a gennaio.

Grafico



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Dove si trova la cometa di Halley 10 anni dopo il perielio (metodo di Newton).

Input: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr]; mode=position; body=halley)`

Risultato

$$\theta \approx 168\,^\circ$$

Passaggi

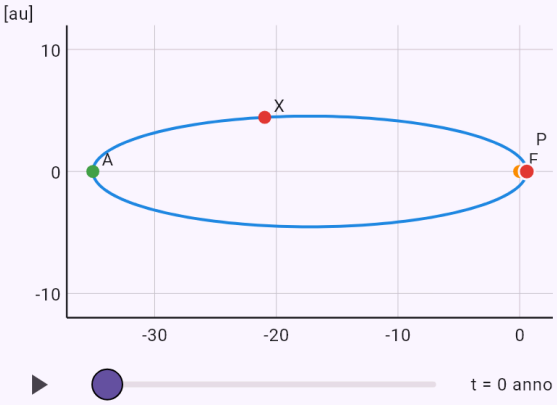
- Incognita θ; dati
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{anno}, \quad t = 1$
- Dove sarà un corpo all'istante t segue dall'equazione di Keplero M = E − e·sin E. L'anomalia media M cresce uniformemente nel tempo; l'anomalia eccentrica E non si può esprimere da essa con una formula, quindi la trova il metodo di Newton. Equazione del modello:
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Anomalia media: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- L'equazione di Keplero non ha soluzione in formule, quindi E si trova numericamente.
- Iterazione di Newton: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Passo: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Passo: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Passo: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Passo: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Passo: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Passo: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Passo: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Anomalia eccentrica: $E \approx 1{,}78021$
- Anomalia vera

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Distanza dal fuoco: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La quota dell'orbita geostazionaria dalla terza legge di Keplero.

Input: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

central=earth)

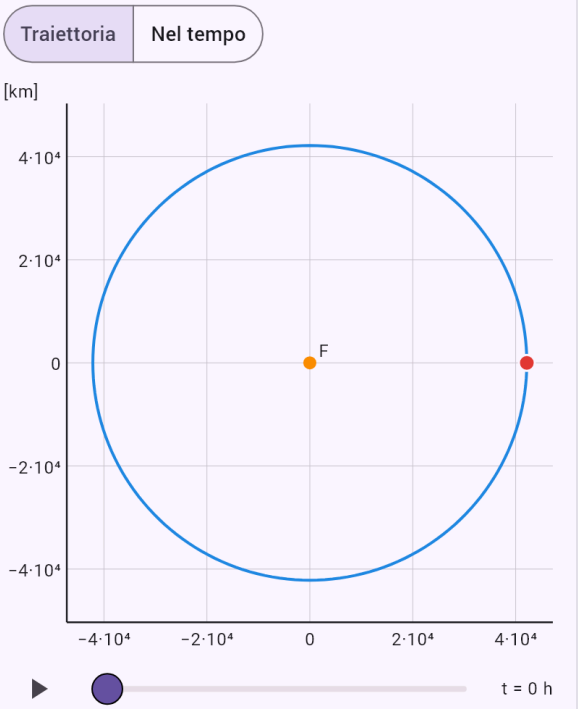
Risultato

$h \approx 35\,790\,\text{km}$

Passaggi

- Incognita h; dati
  $T = 86\,160\,\text{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R = 6378\,\text{km}$
- Convertiamo le unità: $R = 6378\,\text{km} = 6\,378\,000\,\text{m}$
- Terza legge di Keplero: il rapporto T²/a³ dipende solo dalla massa del corpo centrale. L'orbita di una luna dà quindi la massa del pianeta, e un periodo richiesto dà la quota dell'orbita, come quella geostazionaria. Equazione del modello: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Ricaviamo l'incognita: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Sostituiamo
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Ricaviamo l'incognita: $h = a - R$
- Sostituiamo:
  $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Vale per una massa orbitante trascurabile rispetto a M; altrimenti va usato M + m.
- Convertiamo le unità: $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m} = 35\,790\,\text{km}$

Grafico



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La velocità della cometa di Halley al perielio dall'equazione vis-viva.

Input: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg]; mode=visviva;`

`central=sun)`

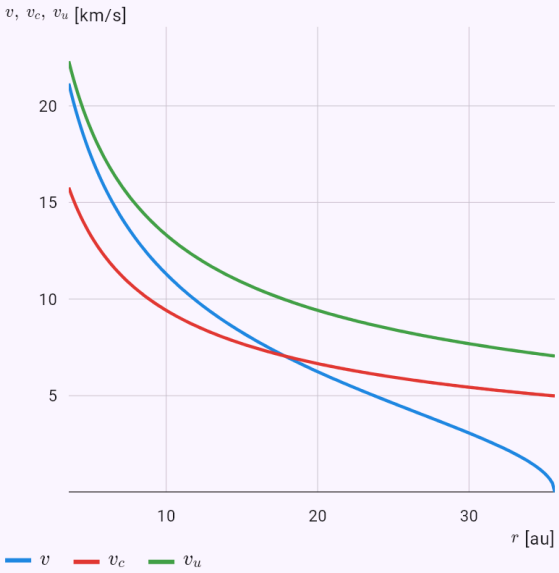
Risultato

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Passaggi

- Incognita v; dati
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Convertiamo le unità
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- La legge vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) segue dalla conservazione dell'energia e dà la velocità in qualsiasi punto dell'orbita. La velocità circolare mantiene un corpo su una circonferenza; la velocità di fuga è √2 volte maggiore e il corpo non torna più. Equazione del modello: $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Sostituiamo
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Velocità circolare a questa distanza:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Velocità di fuga a questa distanza:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Convertiamo le unità: $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il baricentro del Sole e di Giove si trova appena sopra la superficie del Sole; «Dettaglio intorno al baricentro» mostra il Sole che gli gira attorno.

Input: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

Risultato

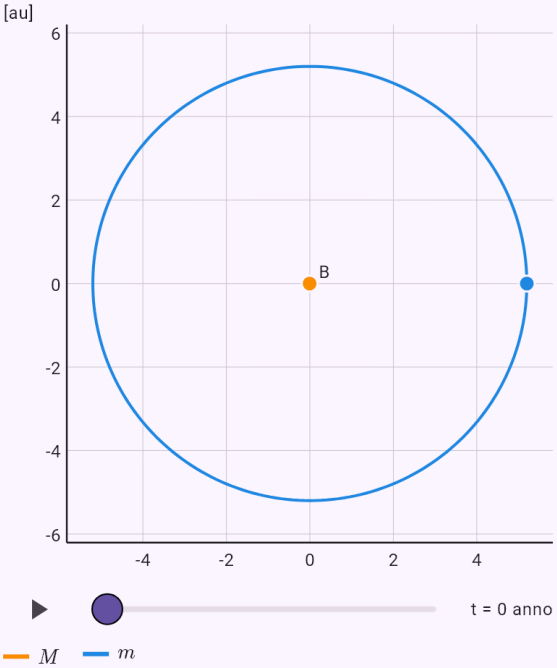
$$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$$

Passaggi

- Incognita r_b; dati
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Convertiamo le unità
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- In realtà entrambi i corpi orbitano intorno al comune centro di massa (baricentro). Il problema dei due corpi si riduce al moto di un solo corpo con la massa ridotta, e la terza legge di Keplero contiene la somma M + m. L'oscillazione di una stella intorno al baricentro rivela gli esopianeti. Equazione del modello
  $$r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$$
- Sostituiamo
  $$r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$$
- Distanza dell'altro corpo dal baricentro:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Il baricentro si trova fuori dal corpo: $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Il corpo maggiore stesso descrive una circonferenza visibile.
- Convertiamo le unità: $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Grafico

Traiettoria | Dettaglio intorno al baricentro



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La distanza di L2, dove lavora il telescopio James Webb.

Input: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

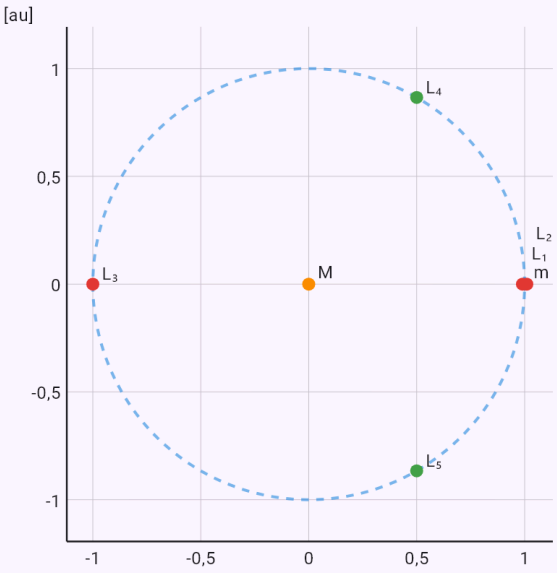
Risultato

$$r_{L_2} \approx 1{,}508 \,\text{milioni di km}$$

Passaggi

- Incognita r_{L_2}; dati
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- In un sistema rotante con il corpo m ci sono cinque punti in cui la gravità dei due corpi e la forza centrifuga si equilibrano. L1, L2 e L3 stanno sulla retta per i corpi e si trovano numericamente; L4 e L5 formano triangoli equilateri con i due corpi. Equazione del modello
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Rapporto delle masse: $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Approssimativamente per m piccolo:
  $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{milioni di km}$
- Il punto di Lagrange è una radice dell'equazione sulla retta per i corpi, trovata per bisezione.
- Esattamente dall'equazione: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{milioni di km}$
- L1, L2 e L3 sono instabili: un corpo deve mantenere la posizione con correzioni, come il telescopio James Webb in L2.
- L4 e L5 sono stabili perché M/m > 25; Giove vi trattiene i suoi troiani.

Grafico



I corpi e i punti importanti in scala reale.

L'accelerazione di marea causata dalla Luna.

Input: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide;`

`tideSource=moon)`

Risultato

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

Passaggi

- Incognita a_s; dati
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- Convertiamo le unità
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- Il lato vicino di un corpo è attratto più di quello lontano. L'accelerazione di marea 2GMR/d³ diminuisce con il cubo della distanza, per questo la Luna conta più del Sole, molto più massiccio. Equazione del modello:
  $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- Sostituiamo
  $a_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$
- Esattamente, la differenza di gravità sul lato vicino e al centro
  $\dfrac{GM}{(d-R)^2} - \dfrac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- Il corpo attraente solleva due rigonfiamenti di marea, sul lato vicino e su quello opposto, quindi in una rotazione ci sono due alte maree.
- L'attrito di marea rallenta la rotazione: la Luna mostra alla Terra sempre la stessa faccia e si allontana di circa 3,8 cm all'anno.

La risonanza delle lune Io, Europa e Ganimede.

Input: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Risultato

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Passaggi

- Dati: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{g}$
- Una risonanza orbitale si ha quando i periodi stanno in un rapporto di piccoli numeri interi; i corpi allora si incontrano regolarmente e si influenzano. Esempi: Io, Europa e Ganimede 1 : 2 : 4, Nettuno e Plutone 2 : 3. Le lacune di Kirkwood nella fascia degli asteroidi si trovano in risonanze con Giove. Equazione del modello:
  $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Scostamento massimo da un rapporto di numeri interi:
  $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- I periodi stanno in un rapporto di piccoli numeri interi: una risonanza orbitale.

La precessione del perielio di Mercurio secondo la relatività generale.

Input: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km]; e=0.2056[one];`

`mode=precession)`

Risultato

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{anni}$$

Passaggi

- Incognita $\Delta\varphi$; dati
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- Convertiamo le unità:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Nella relatività generale il perielio di un'orbita ruota lentamente di 6πGM/(c²a(1 − e²)) per rivoluzione. Per Mercurio sono 43" al secolo, la differenza che la meccanica newtoniana non sapeva spiegare. Equazione del modello: $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Rotazione per rivoluzione
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Rivoluzioni in 100 anni: $N = \dfrac{100\,\text{anno}}{T} \approx 415{,}3$
- Sostituiamo: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{anni}$
- La meccanica newtoniana prevede per Mercurio una rotazione minore; i restanti 43" al secolo li ha spiegati solo la relatività generale.

La soluzione periodica a otto di tre corpi uguali.

Input: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Risultato

$$E \approx -1{,}28714$$

Passaggi

- Incognita E; dati: $t_k = 6{,}326$
- Tre corpi in generale non hanno una soluzione in formule. Esistono però orbite periodiche eccezionali: nella soluzione a otto (Chenciner e Montgomery, 2000) tre corpi uguali si inseguono lungo un'unica curva a forma di 8. Equazione del modello

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

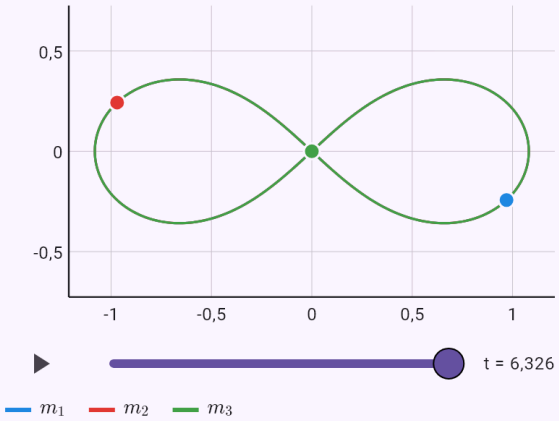
- In generale tre corpi non hanno soluzione in formule, quindi il moto si calcola numericamente, in unità in cui G = 1.
- Numero di passi del calcolo: $N = 2748$
- Energia totale:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

- Variazione relativa dell'energia (verifica dell'accuratezza): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$
- Tre corpi uguali percorrono un'unica curva a forma di 8 e dopo un periodo tornano ai loro posti.

- Distanza massima dalla partenza dopo un periodo: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Grafico



I corpi in scala reale. Segui il moto con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Caos: quando due simulazioni quasi identiche si separano.

Input: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Risultato

$$t_s \approx 42{,}9$$

Passaggi

- Incognita t_s; dati: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Il problema dei tre corpi è caotico: una minima variazione all'inizio cresce finché le traiettorie non hanno più nulla in comune. Il problema pitagorico con masse 3, 4 e 5 è calcolato due volte, la seconda con un piccolo scostamento δ. Equazione del modello

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

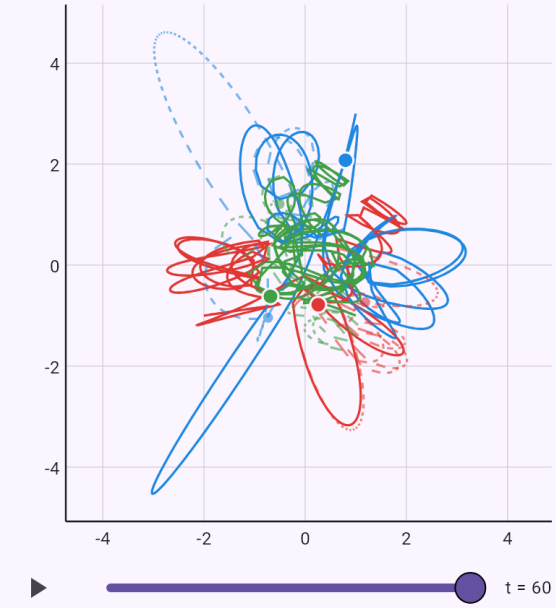
- In generale tre corpi non hanno soluzione in formule, quindi il moto si calcola numericamente, in unità in cui G = 1.
- Numero di passi del calcolo: $N = 52\,307$
- Energia totale:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

- Variazione relativa dell'energia (verifica dell'accuratezza): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$
- Si calcola anche una seconda simulazione spostata di $\delta = 0{,}001$. Le linee tratteggiate sono quella simulazione; la loro separazione mostra il caos. Una retta del logaritmo nel tempo indica una crescita esponenziale.
- All'istante t_s la posizione di qualche corpo differisce tra le due simulazioni di più di 1.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



La linea continua e quella tratteggiata sono due simulazioni con partenze minimamente diverse.

L'attività di 1 g di radio, circa un curie.

Input: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

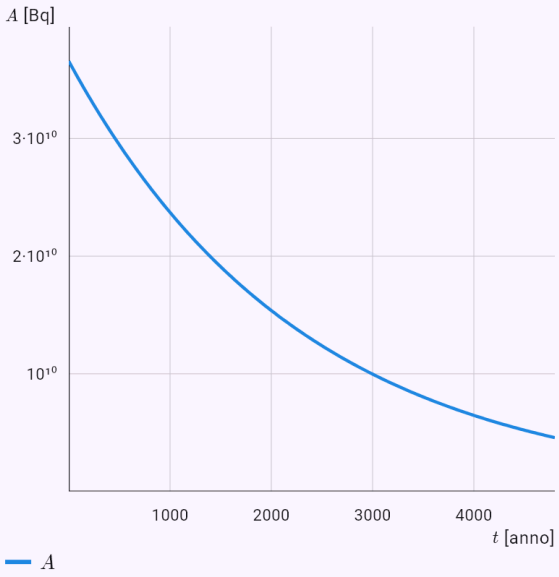
Risultato

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Passaggi

- Incognita A; dati:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{anno}$
- Convertiamo le unità: $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{anno} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- L'attività A = λN dice quanti nuclei decadono al secondo. Il numero di nuclei N segue dalla massa, dalla massa molare e dalla costante di Avogadro, la costante di decadimento λ dal tempo di dimezzamento. Equazione del modello: $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- Nel tempo di dimezzamento la quantità si dimezza – costante di decadimento: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Numero di nuclei: $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Sostituiamo
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Un becquerel è un decadimento al secondo. L'unità storica curie è circa l'attività di 1 g di radio, 3,7·10¹⁰ Bq.

Grafico



Come variano le grandezze nel tempo.

Il rapporto delle attività in un generatore Mo-99 / Tc-99m usato negli ospedali.

Input: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

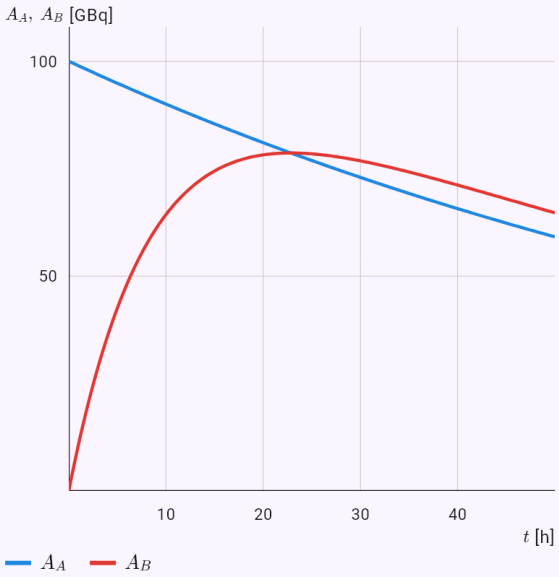
Risultato

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Passaggi

- Incognita $\frac{A_B}{A_A}$; dati:
  $A_{A,0} = 100\,\text{GBq}, \quad T_A = 66\,\text{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\text{h}$
- Quando da un genitore a vita lunga nasce una figlia a vita breve, la sua attività raggiunge quella del genitore e poi lo segue in un rapporto fisso. Su questo si basano i generatori di radionuclidi ospedalieri. Equazione del modello
  $A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$
- Nel tempo di dimezzamento la quantità si dimezza – costante di decadimento: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Ricaviamo l'incognita: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$
- Sostituiamo: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Equilibrio transitorio: dopo alcuni tempi di dimezzamento della figlia il rapporto delle attività è costante.

Grafico



Come variano le grandezze nel tempo.

Una catena di decadimento a tre membri con le equazioni di Bateman.

Input: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

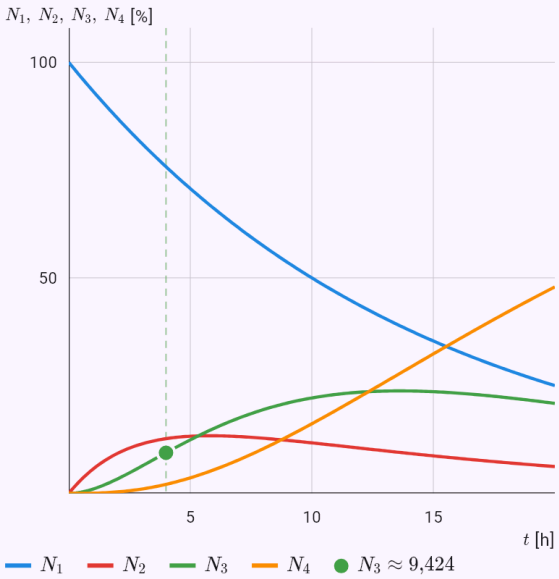
Risultato

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Passaggi

- Incognita N_n; dati:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\text{h}, \quad t = 4\,\text{h}$
- Le equazioni di Bateman descrivono una catena di decadimento: ogni membro nasce dal precedente e decade nel successivo. È un sistema di equazioni differenziali lineari con soluzione in forma chiusa. Equazione del modello: $N_k' = \lambda_{k-1}N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- Nel tempo di dimezzamento la quantità si dimezza – costante di decadimento
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Ricaviamo l'incognita
  $N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j}(\lambda_l - \lambda_j)}$
- Sostituiamo: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- Il grafico mostra anche il prodotto finale stabile; la somma di tutti i membri è costante.

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

L’energia di legame per nucleone del ferro-56.

Input: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

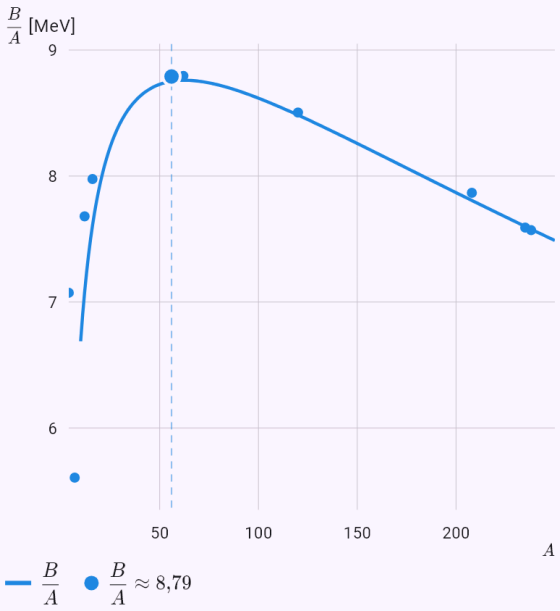
Risultato

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Passaggi

- Incognita $\frac{B}{A}$; dati: $Z = 26,\quad A = 56,\quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Un nucleo pesa meno dei suoi protoni e neutroni liberi. Secondo E = mc² alla differenza Δm corrisponde l’energia di legame. La sua curva per nucleone ha il massimo vicino al ferro, per questo liberano energia sia la fissione dei nuclei pesanti sia la fusione di quelli leggeri. Equazione del modello: $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a,\quad B = \Delta m\, c^2$
- Difetto di massa $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Equivalente energetico: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Sostituiamo: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Energia di legame per nucleone: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L’energia della fissione dell’uranio-235.

Input: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Risultato

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Passaggi

- L’energia di una reazione Q è la differenza delle masse prima e dopo, convertita con E = mc². Un Q positivo significa che l’energia viene liberata. Equazione del modello: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right) c^2$
- Reazione: $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Somma delle masse: $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u},\quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Sostituiamo: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Questa energia si libera subito; con i decadimenti dei prodotti di fissione sono circa 200 MeV per fissione.

Quanto carbone sostituisce 1 g di uranio-235.

Input: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg];`

`mode=fuel)`

Risultato

$$m_c \approx 2832\,\text{kg}$$

Passaggi

- Incognita m_c; dati
  $m = 1\,\text{g}, \quad E_f = 200\,\text{MeV}, \quad M = 235\,\text{g/mol}, \quad q = 2$
- La massa del combustibile dà il numero di nuclei, e l'energia di una fissione dà l'energia totale, che si può confrontare con la combustione del carbone. Equazione del modello: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Numero di nuclei: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Sostituiamo
  $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\text{J}$
- Sostituiamo
  $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\text{kg}$
- Un calcolo ideale: un reattore reale usa solo qualche per cento del combustibile e trasforma in elettricità circa un terzo del calore.

Il numero di neutroni dopo 10 generazioni con k = 1,05.

Input: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

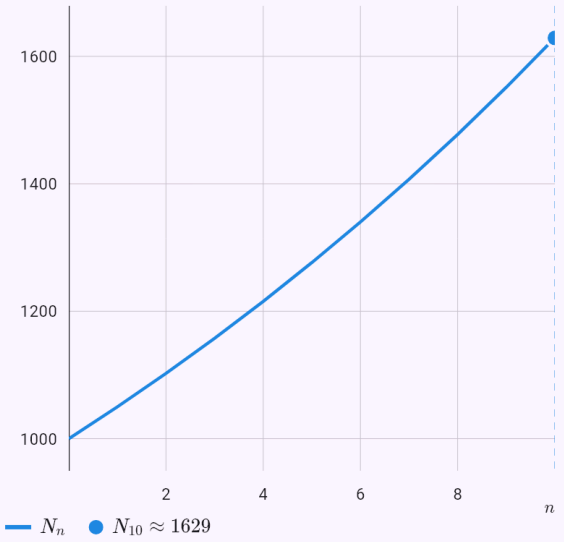
Risultato

$$N_n \approx 1629$$

Passaggi

- Incognita N_n; dati: $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Il fattore di moltiplicazione k dice quanti neutroni della generazione successiva provoca un neutrone. Il numero di neutroni è la successione geometrica $N_0 k^n$: con k < 1 la reazione si spegne, con k = 1 procede stabile e con k > 1 cresce. Equazione del modello: $N_n = N_0 k^n$
- Stato supercritico: k > 1, la potenza cresce. Un reattore entra in questo stato solo brevemente e di pochissimo, quando la potenza deve aumentare.
- Sostituiamo: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La somma di tutte le generazioni nello stato sottocritico.

Input: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

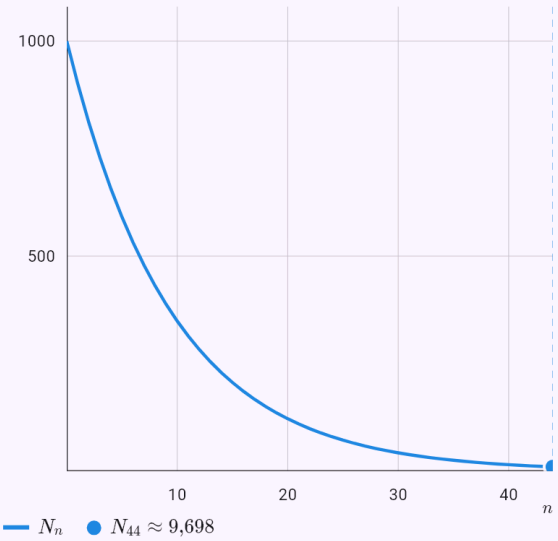
Risultato

$$S \approx 10\,000$$

Passaggi

- Incognita S; dati: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Il fattore di moltiplicazione k dice quanti neutroni della generazione successiva provoca un neutrone. Il numero di neutroni è la successione geometrica N_0k^n: con k < 1 la reazione si spegne, con k = 1 procede stabile e con k > 1 cresce. Equazione del modello: $N_n = N_0 k^n$
- Stato sottocritico: k < 1, la reazione si spegne.
- Ricaviamo l'incognita: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Sostituiamo: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il periodo del reattore con i neutroni ritardati.

Input: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s]; mode=kinetics)`

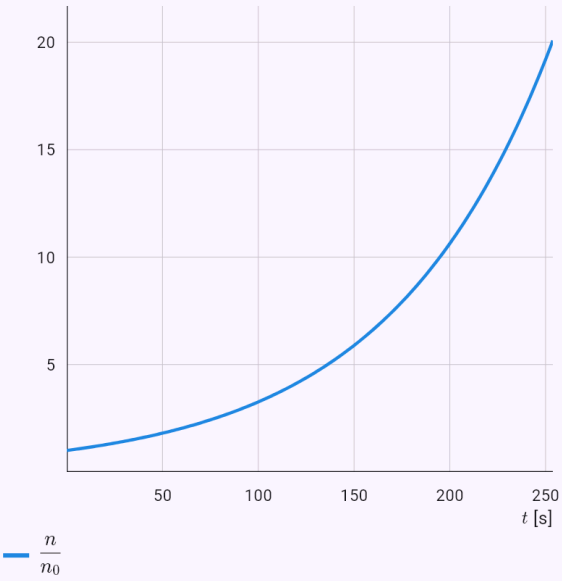
Risultato

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Passaggi

- Incognita T; dati
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- La potenza di un reattore varia esponenzialmente con il periodo T = ℓ/(k − 1). I neutroni ritardati allungano il tempo medio di generazione di circa mille volte, ed è questo che rende un reattore controllabile. Equazione del modello: $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \frac{\ell}{k-1}$
- Reattività: $\rho = \frac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Sostituiamo: $T_p = \frac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Tempo medio di generazione con i neutroni ritardati: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Sostituiamo: $T = \frac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Senza neutroni ritardati il periodo sarebbe una frazione di secondo. Grazie a essi le barre di controllo hanno il tempo di reagire alle variazioni di potenza.
- La potenza cresce con questo periodo.

Grafico



Come variano le grandezze nel tempo.

Il raggio di un nocciolo sferico di grafite.

Input: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite; shape=sphere)`

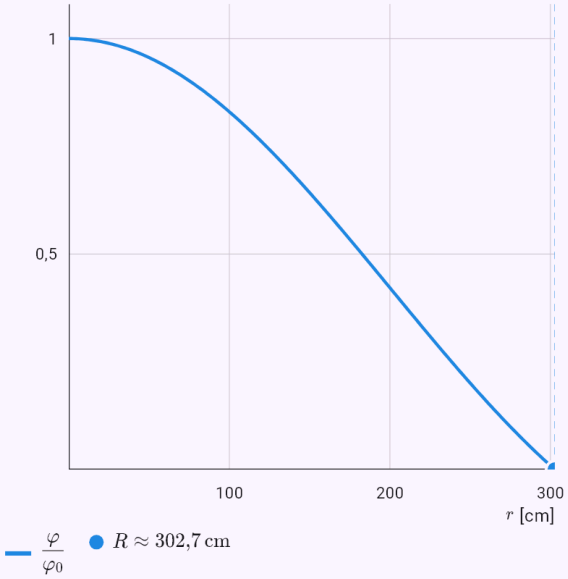
Risultato

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Passaggi

- Incognita R; dati: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- Nel modello di diffusione a un gruppo la forma del flusso neutronico deve soddisfare ∇²φ + B²φ = 0. Le dimensioni del nocciolo seguono dal fatto che il flusso si annulla al bordo. È un problema agli autovalori, pensato per i reticoli moderati dei reattori di potenza. Equazione del modello: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Buckling: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Equazione con simmetria sferica: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Sostituzione: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Condizione al contorno: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Sostituiamo: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Il modello di diffusione a un gruppo senza riflettore: i reattori reali hanno un riflettore e sono quindi più piccoli. Una forma generale porta a un'equazione alle derivate parziali.
- Convertiamo le unità: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Lo spigolo di un nocciolo cubico di grafite.

Input: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite;`

shape=cube)

Risultato

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

Passaggi

- Incognita a; dati: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- Nel modello di diffusione a un gruppo la forma del flusso neutronico deve soddisfare ∇²φ + B²φ = 0. Le dimensioni del nocciolo seguono dal fatto che il flusso si annulla al bordo. È un problema agli autovalori, pensato per i reticoli moderati dei reattori di potenza. Equazione del modello: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Buckling: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Separazione delle variabili in x, y, z

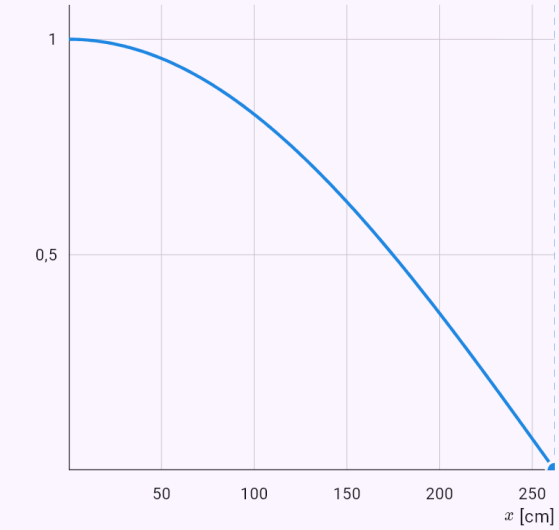
  $$\varphi = \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

- Sostituiamo

  $$a = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

- Il modello di diffusione a un gruppo senza riflettore: i reattori reali hanno un riflettore e sono quindi più piccoli. Una forma generale porta a un'equazione alle derivate parziali.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Una sbarra di rame a 100 °C con gli estremi a 20 °C – il centro dopo 10 minuti.

Input: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC]; Te=20[degC];`

x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)

Risultato

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

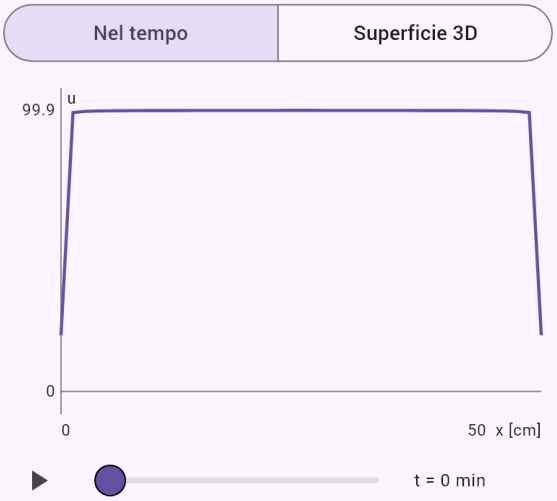
Passaggi

- Incognita T; dati
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e =$
- Convertiamo le unità
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- La temperatura in una sbarra obbedisce all'equazione del calore T_t = α·T_xx; la diffusività termica α = λ/(ρc) dice quanto rapidamente la temperatura si uniforma. All'inizio la sbarra ha ovunque la temperatura T_0; da t = 0 i suoi estremi sono mantenuti a T_e (o un estremo è isolato). La soluzione per separazione delle variabili è una serie di Fourier; ogni termine decade esponenzialmente, il primo più lentamente, con la costante di tempo τ. Entrambi gli estremi sono mantenuti a T_e; il centro della sbarra mantiene più a lungo la sua temperatura. Equazione del modello
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Soluzione per separazione delle variabili (una serie di Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Costante di tempo del termine più lento
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Ricaviamo l'incognita

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$$

- Somma della serie nel punto: $S \approx 0{,}07967$
- Sostituiamo:
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una sbarra d'acciaio con un estremo isolato – dopo quanto resta il 5 % della differenza di temperatura.

Input: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC]; Te=20[degC];`

```
p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)
```

Risultato

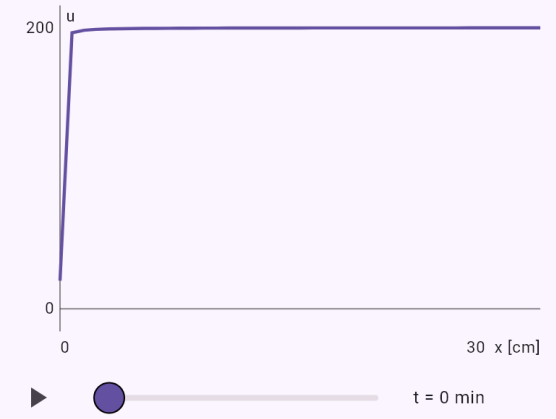
$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Convertiamo le unità
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- La temperatura in una sbarra obbedisce all'equazione del calore T_t = α·T_xx; la diffusività termica α = λ/(ρc) dice quanto rapidamente la temperatura si uniforma. All'inizio la sbarra ha ovunque la temperatura T₀; da t = 0 i suoi estremi sono mantenuti a T_e (o un estremo è isolato). La soluzione per separazione delle variabili è una serie di Fourier; ogni termine decade esponenzialmente, il primo più lentamente, con la costante di tempo τ. L'estremo x = 0 è mantenuto a T_e e l'estremo x = L è isolato (non vi passa calore) – la sbarra si comporta come metà di una sbarra lunga il doppio; l'estremo isolato mantiene più a lungo la sua temperatura. Equazione del modello
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Soluzione per separazione delle variabili (una serie di Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -$
- Costante di tempo del termine più lento
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Ricaviamo l'incognita
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- Sostituiamo: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- L'estremo isolato è il più caldo. Dopo un po' domina il primo termine della serie, quindi basta il suo decadimento; il tempo esatto viene dall'intera serie.
- Convertiamo le unità: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una piastra di rame 30 × 20 cm da 100 °C con i bordi a 20 °C – la temperatura al centro dopo 2 minuti.

Input: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

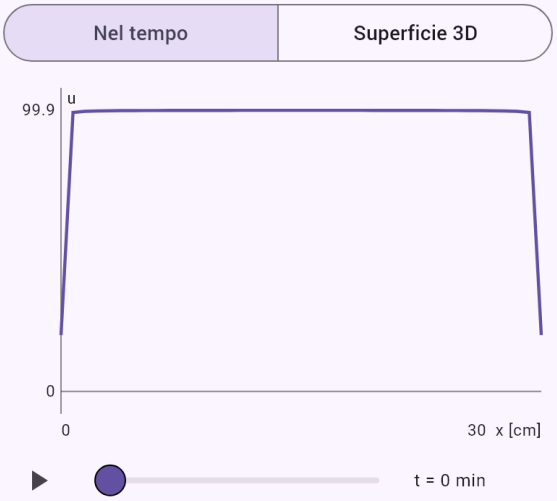
Risultato

$$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

Passaggi

- Incognita T; dati
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Convertiamo le unità
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- La temperatura in una piastra rettangolare a × b segue l'equazione del calore T_t = α(T_xx + T_yy). La piastra parte ovunque a T_0 e da t = 0 i suoi bordi sono mantenuti a T_e. Il problema si separa in due sbarre: la frazione residua della differenza di temperatura è il prodotto delle serie per una sbarra di lunghezza a e una di lunghezza b – per questo una piastra si raffredda più rapidamente di ciascuna delle due sbarre. Il centro mantiene più a lungo la sua temperatura. Equazione del modello
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separazione in due sbarre – il prodotto di due serie di Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- La costante di tempo del termine più lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Ricaviamo l'incognita:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Le somme di entrambe le serie nel punto:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Sostituiamo
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$
- Il grafico mostra la temperatura lungo la linea:
  $y = 10\,\mathrm{cm}$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una lastra di calcestruzzo con un bordo isolato – dopo quante ore resta il 5 % della differenza di temperatura.

Input: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Risultato

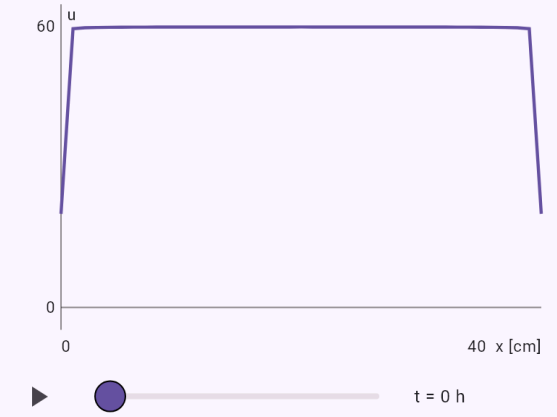
$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Convertiamo le unità
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- La temperatura in una piastra rettangolare a × b segue l'equazione del calore T_t = α(T_xx + T_yy). La piastra parte ovunque a T_0 e da t = 0 tre bordi sono mantenuti a T_e mentre il bordo y = b è isolato (non vi passa calore). Il problema si separa in due sbarre; il bordo isolato funge da asse di simmetria di una piastra alta il doppio. Il centro del bordo isolato mantiene più a lungo la sua temperatura. Equazione del modello
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separazione in due sbarre – il prodotto di due serie di Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- La costante di tempo del termine più lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)} \approx$
- Ricaviamo l'incognita
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Sostituiamo: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$
- Il centro del bordo isolato è il più caldo. Dopo un po' domina il prodotto dei primi termini di entrambe le serie (16/π²)·e^(−t/τ), quindi basta il suo decadimento; il tempo esatto viene dall'intera serie.
- Il grafico mostra la temperatura lungo la linea: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

La corda di Mi cantino di una chitarra – la frequenza fondamentale.

Input: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

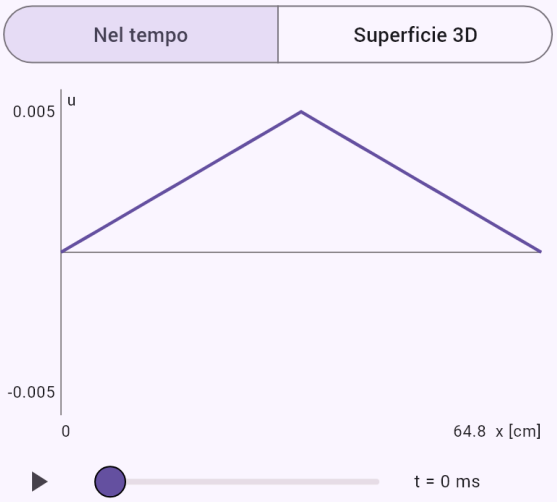
Risultato

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Passaggi

- Incognita f_1; dati:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Convertiamo le unità
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Una corda tesa con gli estremi fissati obbedisce all'equazione delle onde u_tt = c²·u_xx; la velocità dell'onda c = √(F/μ) viene dalla tensione F e dalla densità lineare μ. La separazione delle variabili dà onde stazionarie sin(nπx/L) con le frequenze f_n = n·c/(2L). Una corda pizzicata ha la forma di un triangolo – si sviluppa in serie di Fourier e ogni armonica vibra alla propria frequenza. Equazione del modello
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Velocità dell'onda: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- I modi della corda (onde stazionarie)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Sostituiamo: $f_1 = \dfrac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Le frequenze più alte sono multipli interi della fondamentale (armoniche) – per questo una corda ha un'altezza del suono netta.

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una corda pizzicata – lo spostamento al centro dopo 1 ms.

Input: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

x=32.4[cm]; t=1[ms])

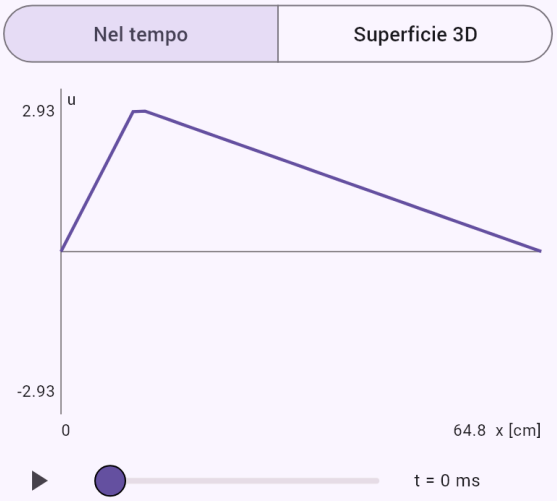
Risultato

$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

Passaggi

- Incognita u; dati
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- Convertiamo le unità
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
- Una corda tesa con gli estremi fissati obbedisce all'equazione delle onde u_tt = c²·u_xx; la velocità dell'onda c = √(F/μ) viene dalla tensione F e dalla densità lineare μ. La separazione delle variabili dà onde stazionarie sin(nπx/L) con le frequenze f_n = n·c/(2L). Una corda pizzicata ha la forma di un triangolo – si sviluppa in serie di Fourier e ogni armonica vibra alla propria frequenza. Equazione del modello
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Velocità dell'onda: $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$
- I modi della corda (onde stazionarie)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Una corda pizzicata – una serie di Fourier
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Sostituiamo: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$
- Dopo un periodo la forma della corda ritorna:
  $T = \dfrac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$
- Convertiamo le unità: $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Un tamburo – la frequenza del modo (1, 1) con un diametro nodale.

Input: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

n=1[one])

Risultato

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

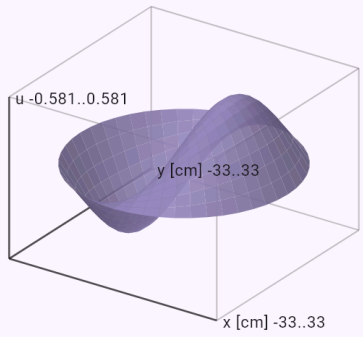
Passaggi

- Incognita f_{mn}; dati $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Convertiamo le unità: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Una membrana circolare fissata al bordo (la pelle di un tamburo) obbedisce all'equazione delle onde u_tt = c²·Δu con la velocità c = √(T/σ). In coordinate polari le variabili si separano: la parte angolare è cos(mφ), quella radiale una funzione di Bessel J_m(kr). La condizione al bordo J_m(ka) = 0 dà k = j_mn/a, dove j_mn è l'n-esima radice di J_m, e le frequenze f_mn = j_mn·c/(2πa). Il modo (m, n) ha m diametri nodali e n − 1 circonferenze nodali. Equazione del modello
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a, \varphi, t) = 0$$
- Velocità dell'onda nella membrana:
$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$
- Separazione in coordinate polari – l'equazione di Bessel $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- Il bordo della membrana è fissato:
$$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$
- Sostituiamo: $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- I modi più alti non sono multipli interi del fondamentale.

Per questo un tamburo non ha un'altezza del suono netta come una corda.

$$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

La gittata di un lancio nel vuoto.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Risultato

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

Passaggi

- Incognita R; dati: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Senza resistenza dell'aria il moto si scompone in due moti indipendenti: uniforme in orizzontale e uniformemente accelerato in verticale. La traiettoria è una parabola e ogni valore ha una formula esatta. Equazione del modello:
  $$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$
- Componenti della velocità di lancio
  $$v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$$
  $$v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$$
- Tempo di volo
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81 (0 - 0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Ricaviamo l'incognita: $R = v_{0x} T$
- Sostituiamo: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Con altezze di lancio e di arrivo uguali valgono le formule scolastiche
  $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
  $$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
  $$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

- La gittata massima si ha a 45°; gli angoli α e 90° − α danno la stessa gittata.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La velocità all’arrivo di un lancio da un’altezza.

Input: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

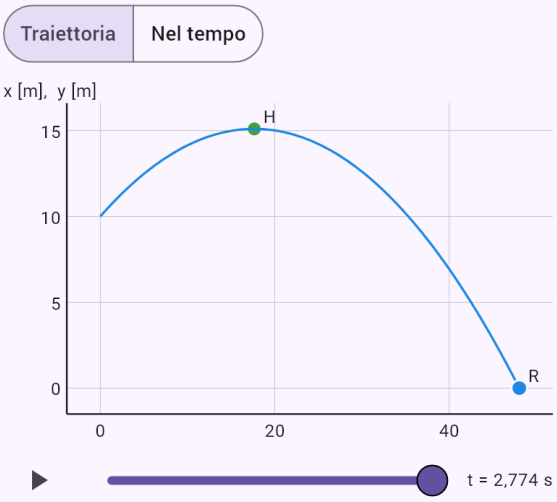
Risultato

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita v_k; dati:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Senza resistenza dell’aria il moto si scompone in due moti indipendenti: uniforme in orizzontale e uniformemente accelerato in verticale. La traiettoria è una parabola e ogni valore ha una formula esatta. Equazione del modello:
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 20\cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Ricaviamo l’incognita: $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Sostituiamo
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Segue dalla conservazione dell’energia meccanica e non dipende dall’angolo.

Grafico



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Due angoli di lancio per una distanza di 200 m.

Input: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Risultato

$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

Passaggi

- Incognita α; dati: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- La distanza e l'altezza del bersaglio si sostituiscono nell'equazione della traiettoria. Con u = tg α diventa un'equazione di secondo grado, di solito con due radici: una traiettoria tesa e una ripida. Equazione del modello

$$h_k = h_0 + d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$$

- Equazione di secondo grado per tg α

$$u = \mathrm{tg}\,\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$$
$$a = \frac{gd^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81 \cdot (200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$$
$$c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$$

- Discriminante:

$$D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4 \cdot 78{,}48 \cdot 78{,}48 \approx 15\,360$$

- Radici: $u_{1,2} = \dfrac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Soluzione

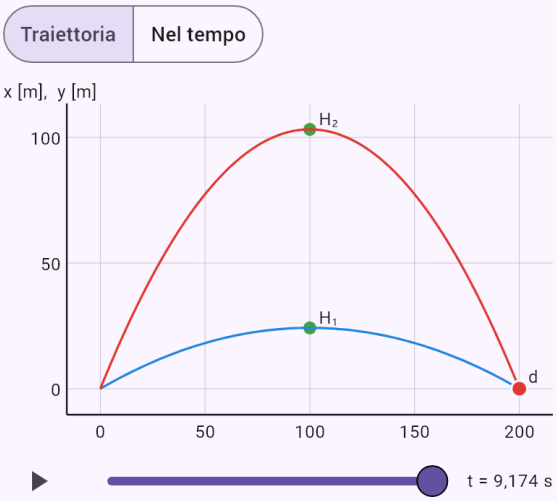
$$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$$

- Soluzione

$$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$$

- Su terreno piano i due angoli sommano 90°.

Grafico



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La gittata di un pallone da calcio con la resistenza dell'aria, confrontata con il vuoto.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Risultato

$$R \approx 38{,}65\,\text{m}$$

Passaggi

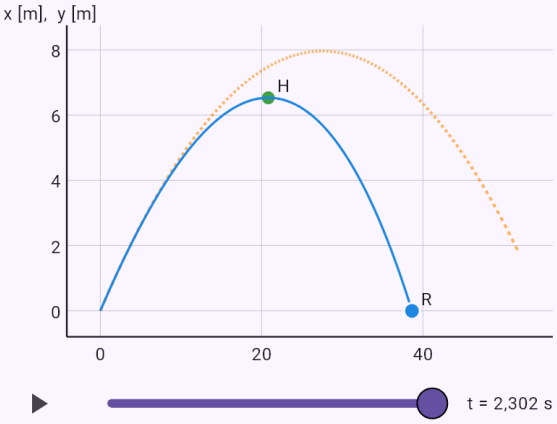
- Incognita R; dati
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$
- Convertiamo le unità
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Sul corpo agiscono la gravità e la resistenza dell'aria, opposta alla sua velocità rispetto all'aria, quindi nelle equazioni entra anche il vento. Le componenti della velocità sono accoppiate e non esiste una soluzione esatta, quindi il sistema si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine. Equazione del modello: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Il sistema di sei equazioni per x, y, z e le componenti della velocità è stato risolto con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; il numero di passi: $N = 1807$
- Andamento del volo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Valori chiave
  $H \approx 6{,}534\,\text{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\text{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\text{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- Lo stesso lancio nel vuoto
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Gittata in aria come frazione di quella nel vuoto:
  $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



La linea continua è la traiettoria in aria, quella tratteggiata nel vuoto. Gli assi hanno scale diverse.

La deriva laterale di un pallone nel vento, con una vista laterale e dall'alto.

Input: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Risultato

$$z \approx 2{,}621\,\text{m}$$

Passaggi

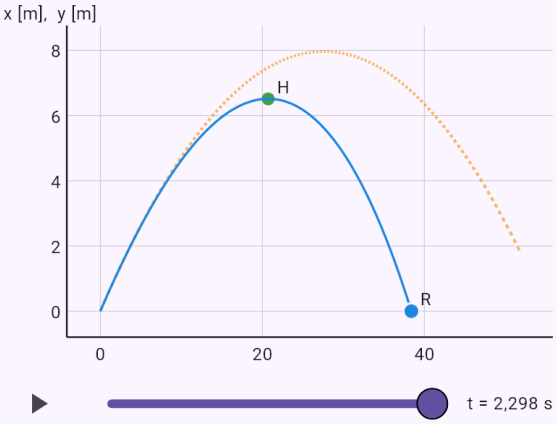
- Incognita z; dati
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$ ‹
- Convertiamo le unità
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Sul corpo agiscono la gravità e la resistenza dell'aria, opposta alla sua velocità rispetto all'aria, quindi nelle equazioni entra anche il vento. Le componenti della velocità sono accoppiate e non esiste una soluzione esatta, quindi il sistema si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine. Equazione del modello: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- Il sistema di sei equazioni per x, y, z e le componenti della velocità è stato risolto con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; il numero di passi: $N = 1804$
- Andamento del volo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Valori chiave
  $H \approx 6{,}51\,\text{m}$
  $T \approx 2{,}298\,\text{s}$
  $R \approx 38{,}4\,\text{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\,\text{m}$
- Lo stesso lancio nel vuoto
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Gittata in aria come frazione di quella nel vuoto:
  $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Effetto del vento: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\text{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\text{m}$

Grafico

Vista laterale | Vista dall'alto | Nel tempo



La linea continua è la traiettoria in aria, quella tratteggiata nel vuoto. Gli assi hanno scale diverse.

Una carabina sportiva calibro 22: la velocità alla fine del volo, la curva G1.

Input: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Risultato

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

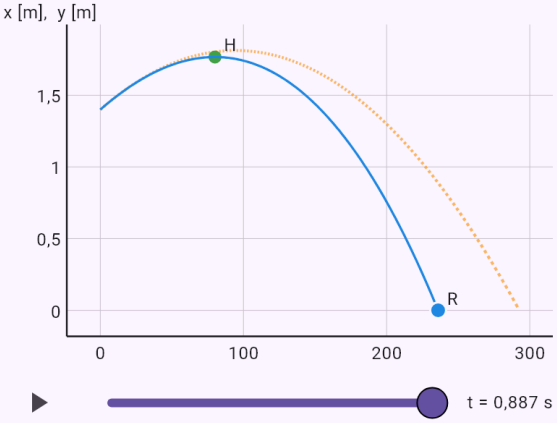
- Incognita v_k; dati
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Convertiamo le unità
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Sul corpo agiscono la gravità e la resistenza dell'aria, opposta alla sua velocità rispetto all'aria, quindi nelle equazioni entra anche il vento. Le componenti della velocità sono accoppiate e non esiste una soluzione esatta, quindi il sistema si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine. Equazione del modello: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Numero di Mach e coefficiente di resistenza al lancio:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Il sistema di sei equazioni per x, y, z e le componenti della velocità è stato risolto con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; il numero di passi: $N = 73$
- Andamento del volo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Valori chiave
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- Lo stesso lancio nel vuoto
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Gittata in aria come frazione di quella nel vuoto:
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Il coefficiente di resistenza viene da una curva approssimata secondo il numero di Mach; per un proiettile dalla curva G1 per il fattore di forma. Le tabelle del produttore hanno la precedenza. La deriva di un proiettile in rotazione non è inclusa.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



La linea continua è la traiettoria in aria, quella tratteggiata nel vuoto. Gli assi hanno scale diverse.

Una carabina da caccia: la gittata con la densità dell'aria secondo la quota.

Input: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

`cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)`

Risultato

$$R \approx 2365\,\text{m}$$

Passaggi

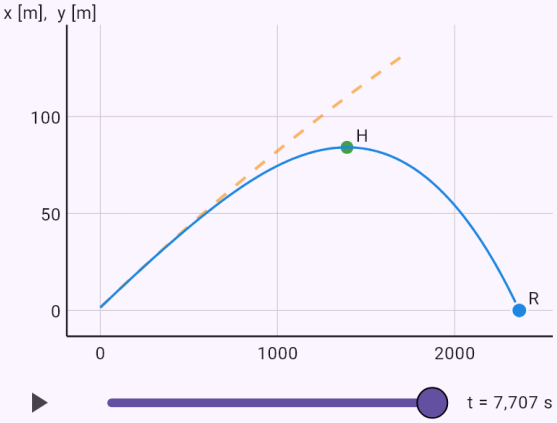
- Incognita R; dati
  $v_0 = 860\,\text{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\text{m}, \quad m = 9{,}72\,\text{g},$
- Convertiamo le unità
  $m = 9{,}72\,\text{g} = 0{,}00972\,\text{kg}, \quad S = 48{,}1\,\text{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Sul corpo agiscono la gravità e la resistenza dell'aria, opposta alla sua velocità rispetto all'aria, quindi nelle equazioni entra anche il vento. Le componenti della velocità sono accoppiate e non esiste una soluzione esatta, quindi il sistema si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine. Equazione del modello: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\text{m/s}$
- Densità dell'aria secondo l'atmosfera standard:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\text{kg/m}^3$
- Numero di Mach e coefficiente di resistenza al lancio:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\text{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\text{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Il sistema di sei equazioni per x, y, z e le componenti della velocità è stato risolto con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; il numero di passi: $N = 335$
- Andamento del volo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Valori chiave
  $H \approx 84{,}15\,\text{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\text{s}$
  $R \approx 2365\,\text{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Lo stesso lancio nel vuoto
  $R_v \approx 13\,110\,\text{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\text{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\text{s}$
- Gittata in aria come frazione di quella nel vuoto:
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Il coefficiente di resistenza viene da una curva approssimata secondo il numero di Mach; per un proiettile dalla curva G1 per il fattore di forma. Le tabelle del produttore hanno la precedenza. La deriva di un proiettile in rotazione non è inclusa.
- Durante il volo la velocità è scesa sotto quella del suono; in questa zona il coefficiente di resistenza cambia di più.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



La linea continua è la traiettoria in aria, quella tratteggiata nel vuoto. Gli assi hanno scale diverse.

Una palla di cannone della fisica scolastica: la deviazione dovuta alla forza di Coriolis.

Input: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)

Risultato

$$z \approx 2{,}119\,\text{m}$$

Passaggi

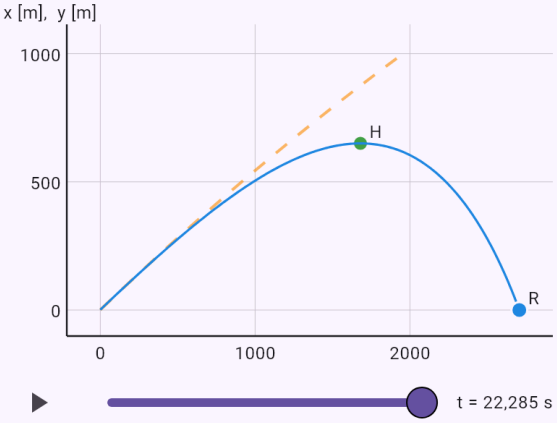
- Incognita z; dati
  $v_0 = 439\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\text{m}, \quad m = 5580\,\text{g},$
- Convertiamo le unità
  $m = 5580\,\text{g} = 5{,}58\,\text{kg}, \quad S = 10\,200\,\text{mm}^2 = 0{,}0102\,\text{m}^2$
- Sul corpo agiscono la gravità e la resistenza dell'aria, opposta alla sua velocità rispetto all'aria, quindi nelle equazioni entra anche il vento. Le componenti della velocità sono accoppiate e non esiste una soluzione esatta, quindi il sistema si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine. Equazione del modello
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Componenti della velocità di lancio
  $v_{0x} = 439\cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 439\sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\text{m/s}$
- Numero di Mach e coefficiente di resistenza al lancio:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\text{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\text{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Velocità angolare della Terra (forza di Coriolis):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$
- Il sistema di sei equazioni per x, y, z e le componenti della velocità è stato risolto con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; il numero di passi: $N = 1023$
- Andamento del volo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Valori chiave
  $H \approx 650{,}1\,\text{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\text{s}$
  $R \approx 2706\,\text{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\text{m}$
- Lo stesso lancio nel vuoto
  $R_v \approx 17\,020\,\text{m}, \quad H_v \approx 2457\,\text{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\text{s}$
- Gittata in aria come frazione di quella nel vuoto:
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Effetto della forza di Coriolis
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\text{m}$
- Il coefficiente di resistenza viene da una curva approssimata secondo il numero di Mach; per un proiettile dalla curva G1 per il fattore di forma. Le tabelle del produttore hanno la precedenza. La deriva di un proiettile in rotazione non è inclusa.
- Durante il volo la velocità è scesa sotto quella del suono; in questa zona il coefficiente di resistenza cambia di più.

Grafico

Vista laterale | Vista dall'alto | Nel tempo



La linea continua è la traiettoria in aria, quella tratteggiata nel vuoto. Gli assi hanno scale diverse.

Un angolo teso e uno ripido per un pallone con la resistenza dell'aria.

Input: model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic; projectile=ball;

`cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Risultato

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

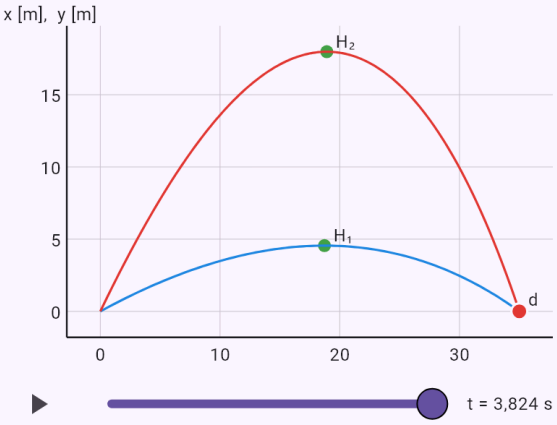
$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

Passaggi

- Incognita α; dati
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Convertiamo le unità
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Con la resistenza dell'aria non c'è una formula. Il calcolo prova angoli diversi e osserva a che altezza vola il corpo alla distanza del bersaglio. Gli angoli per cui passa esattamente per il bersaglio si trovano per bisezione. Equazione del modello: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Costante di resistenza dell'aria (coefficiente di resistenza): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Velocità limite di una caduta libera:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Resistenza dell'aria rispetto alla gravità al lancio:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Gli angoli sono stati trovati con il metodo di shooting: bisezione sull'altezza alla distanza d, cioè cercando una radice di $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Soluzione
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Soluzione
  $\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

La velocità di stallo di un aereo leggero.

Input: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

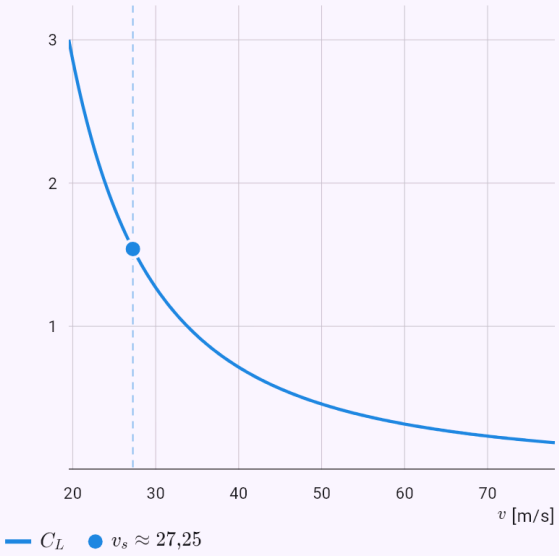
Risultato

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Passaggi

- Incognita v_s; dati
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- In volo livellato la portanza è uguale al peso e la spinta alla resistenza. La resistenza ha due parti: quella parassita cresce con il quadrato della velocità e quella indotta diminuisce con essa, quindi c'è una velocità di minima resistenza. Equazione del modello:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Il peso dell'aereo: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Ricaviamo l'incognita:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Sostituiamo
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Convertiamo le unità: $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La resistenza in volo livellato e un grafico della resistenza parassita e indotta.

Input: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

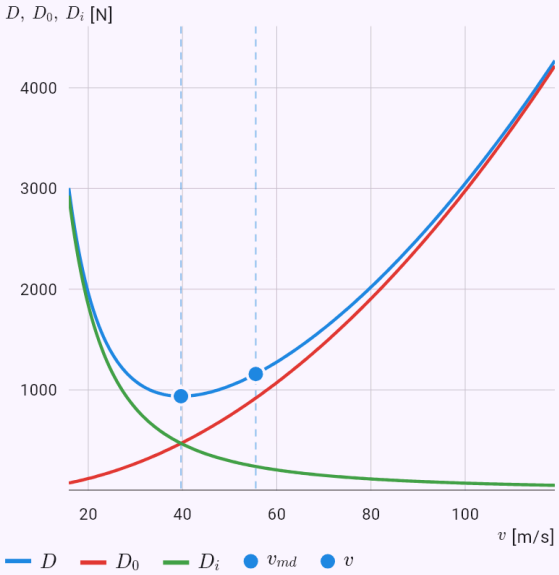
Risultato

$$D \approx 1{,}158\,\text{kN}$$

Passaggi

- Incognita D; dati
  $v = 200\,\text{km/h}, \quad m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad b = 1$
- Convertiamo le unità: $v = 200\,\text{km/h} = 55{,}56\,\text{m/s}$
- In volo livellato la portanza è uguale al peso e la spinta alla resistenza. La resistenza ha due parti: quella parassita cresce con il quadrato della velocità e quella indotta diminuisce con essa, quindi c'è una velocità di minima resistenza. Equazione del modello:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Il peso dell'aereo: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Allungamento alare: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Fattore di resistenza indotta (fattore di Oswald e, polare):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Pressione dinamica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\text{Pa}$
- Il coefficiente di portanza necessario:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Resistenza parassita e indotta:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\text{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\text{N}$
- L'efficienza a questa velocità: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Ricaviamo l'incognita: $D = D_0 + D_i$
- Sostituiamo: $D \approx 1158\,\text{N}$
- Convertiamo le unità: $D \approx 1158\,\text{N} = 1{,}158\,\text{kN}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L'ekranoplano KM: quanta resistenza fa risparmiare l'effetto suolo.

Input: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

aircraft=km; air=constant; ground=on)

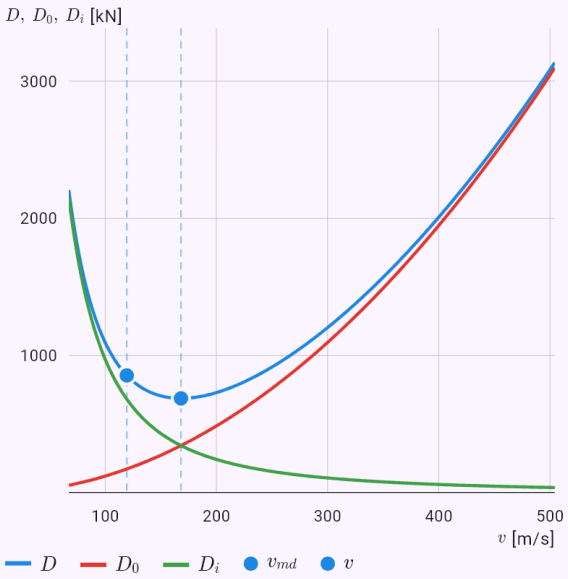
Risultato

$$D \approx 855{,}6\,\text{kN}$$

Passaggi

- Incognita D; dati
  $v = 430\,\text{km/h}, \quad m = 544\,000\,\text{kg}, \quad S = 662{,}5\,\text{m}^2, \quad b$
- Convertiamo le unità: $v = 430\,\text{km/h} = 119{,}4\,\text{m/s}$
- In volo livellato la portanza è uguale al peso e la spinta alla resistenza. La resistenza ha due parti: quella parassita cresce con il quadrato della velocità e quella indotta diminuisce con essa, quindi c'è una velocità di minima resistenza. Equazione del modello:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Il peso dell'aereo: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\text{kN}$
- Allungamento alare: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Fattore di resistenza indotta (fattore di Oswald e, polare):
  $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- L'effetto suolo riduce la resistenza indotta
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- L'aumento di portanza allo stesso angolo di attacco (una stima con la teoria della linea portante)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- La formula empirica di McCormick per ali normali. Per un'ala a basso allungamento con piastre d'estremità, come su un ekranoplano, l'effetto reale è più forte.
- Pressione dinamica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\text{Pa}$
- Il coefficiente di portanza necessario:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Resistenza parassita e indotta
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\text{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\text{kN}$
- L'efficienza a questa velocità: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Resistenza risparmiata grazie all'effetto suolo:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\text{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Ricaviamo l'incognita: $D = D_0 + D_i$
- Sostituiamo: $D \approx 855{,}6\,\text{kN}$
- Convertiamo le unità: $D \approx 855\,600\,\text{N} = 855{,}6\,\text{kN}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La corsa di decollo di un aereo leggero con un grafico della velocità e della distanza.

Input: model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Risultato

$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Passaggi

- Incognita s_g; dati

  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$

- Convertiamo le unità: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$

- L'aereo accelera da fermo fino alla velocità di distacco sotto la spinta, la resistenza dell'aria e l'attrito di rotolamento, che diminuisce al crescere della portanza. L'equazione si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine; la spinta è una media costante. Equazione del modello

  $$m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = \iota$$

- Il peso dell'aereo: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$

- Velocità di stallo

  $$v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$$

- Velocità di distacco rispetto all'aria:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$

- Allungamento alare: $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$

- Fattore di resistenza indotta (fattore di Oswald e, polare):
  $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$

- Coefficiente di resistenza sulla pista:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$

- L'accelerazione all'inizio e alla fine

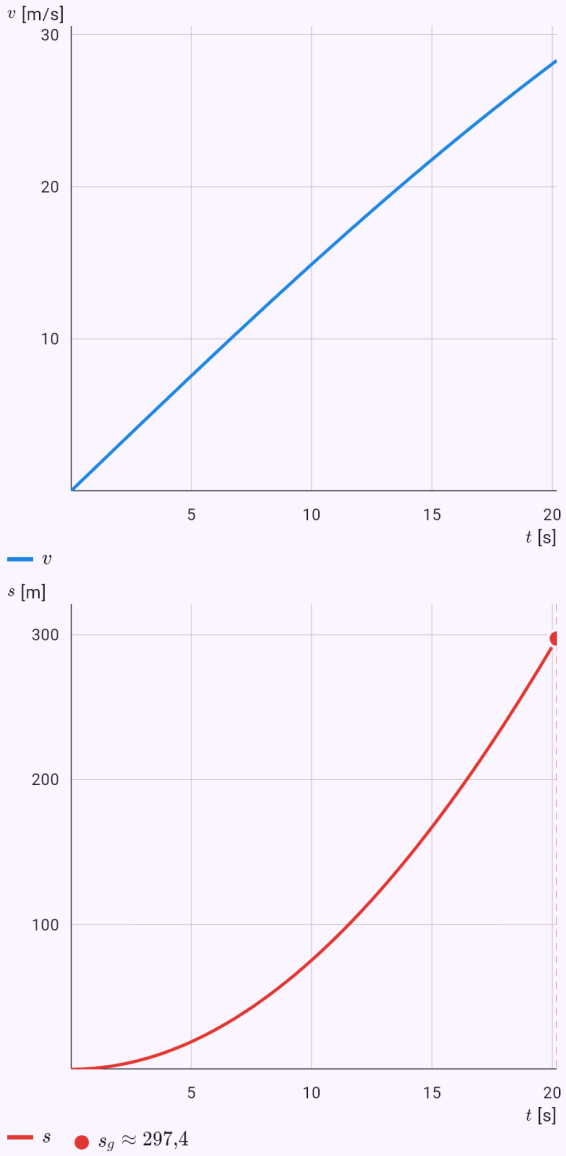
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$

- L'equazione è stata risolta con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine, passi: $N = 2172$

- La corsa nel dettaglio

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Il raggio di virata con un’inclinazione di 30°.

Input: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

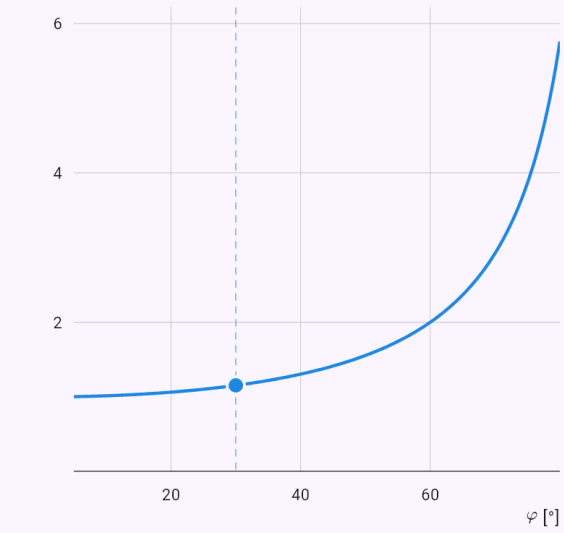
Risultato

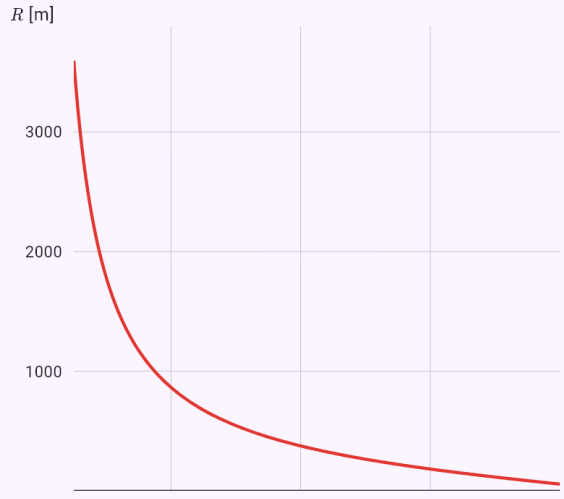
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

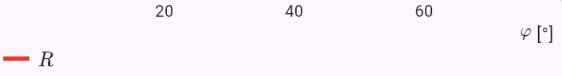
Passaggi

- Incognita R; dati: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Convertiamo le unità: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- In una virata coordinata la parte verticale della portanza sostiene il peso e quella orizzontale curva la traiettoria. Il fattore di carico dipende solo dall’inclinazione, il raggio anche dalla velocità. Equazione del modello:
  $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Ricaviamo l’incognita: $R = \dfrac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}$
- Sostituiamo
  $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81 \cdot \mathrm{tg}\,30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

Grafico







Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La distanza percorribile da un aliante da una quota di 1000 m.

Input: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Risultato

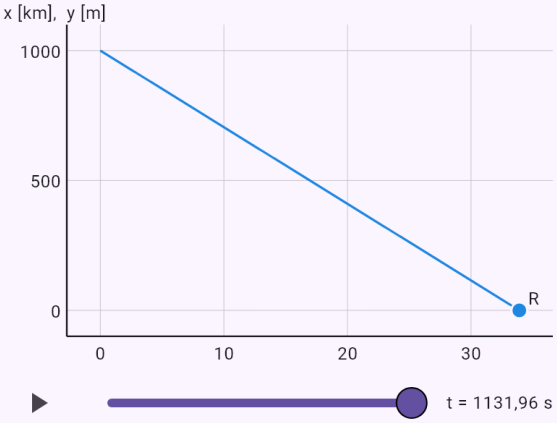
$$R \approx 33{,}91\,\text{km}$$

Passaggi

- Incognita R; dati
  $h = 1000\,\text{m}, \quad m = 600\,\text{kg}, \quad S = 17{,}95\,\text{m}^2, \quad b = 17$
- Senza spinta l'aereo scende lungo una retta la cui pendenza è data dal rapporto tra portanza e resistenza. La distanza percorribile da una quota è la quota per l'efficienza, massima alla velocità di massima efficienza. Equazione del modello:
  $\text{tg}\,\gamma = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \frac{v}{E}$
- Il peso dell'aereo: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\text{N}$
- Allungamento alare: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Fattore di resistenza indotta (fattore di Oswald e, polare): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Coefficiente di portanza alla massima efficienza: $C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Velocità di massima efficienza
  $v = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\text{m/s}$
- La massima efficienza e la minima resistenza
  $E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Angolo di planata: $\gamma = \text{arctg}\,\frac{1}{E} \approx 1{,}689°$
- Si assume un piccolo angolo di planata, in cui la portanza è praticamente uguale al peso, e una densità dell'aria costante.
- Ricaviamo l'incognita: $R = hE$
- Sostituiamo: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\text{m}$
- Convertiamo le unità: $R \approx 33\,910\,\text{m} = 33{,}91\,\text{km}$

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Apollo 13: il carico g di un ingresso a −6,20°.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km]; nlim=10[gn];`

gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])

Risultato

$$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$$

Passaggi

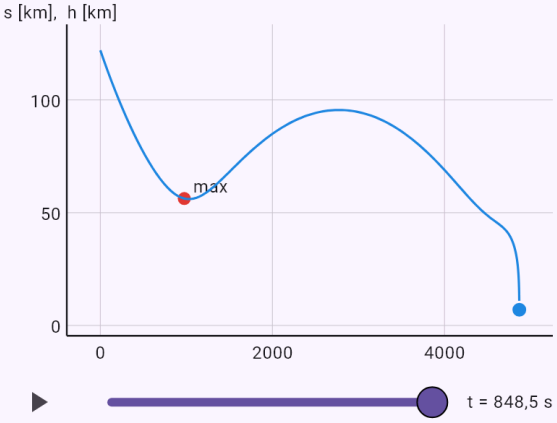
- Incognita a_{max}; dati
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Un attraversamento dell'atmosfera dalla quota di ingresso h_0 (122 km per impostazione) con l'angolo di volo dato γ_0 e un angolo di rollio costante σ fino alla quota h_k (l'apertura dei paracadute, il volo planato per lo Shuttle). Il carico g massimo è confrontato con la formula di Allen ed Eggers per un rientro balistico. Il flusso di calore nel punto di ristagno segue dalla formula di Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³ e la temperatura superficiale dello scudo dall'equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Equazione del modello
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Area frontale e coefficiente balistico
  $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Densità dell'aria secondo l'atmosfera standard (isoterma sopra 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Componente verticale della portanza all'angolo di rollio σ: $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Cattura: il veicolo è sceso alla quota h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Carico g massimo (numericamente)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Un rientro balistico senza portanza darebbe secondo Allen ed Eggers molto di più – la portanza riduce il carico g
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$$
- Flusso di calore massimo nel punto di ristagno (Sutton–Graves) e calore totale per m²

$$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$$

- Temperatura superficiale dello scudo per equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$$
- Semplificazioni: la Terra è sferica e non ruota, C_D e L/D sono costanti e il rollio σ è lo stesso per tutto il volo (la guida reale lo varia). Il flusso di calore è solo convettivo; tornando dalla Luna si aggiunge la radiazione dello strato d'urto incandescente. Uno scudo ablativo porta via parte del calore vaporizzandosi, quindi la temperatura di equilibrio radiativo è una stima per eccesso.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Il corridoio di rientro della capsula Apollo al ritorno dalla Luna.

Input: model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];

`nlim=10[gn])`

Risultato

$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$

$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$

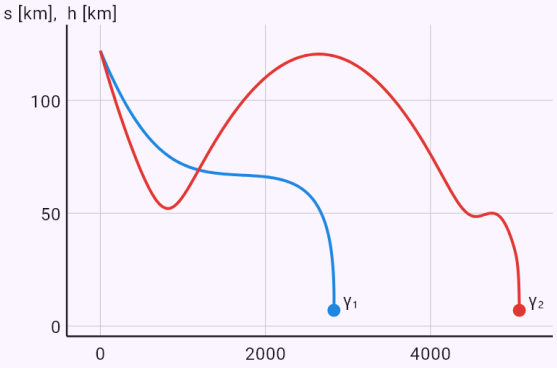
$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$

Passaggi

- Incognita $\Delta\gamma$; dati
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- I limiti dell'angolo di ingresso per bisezione. Il limite radente è l'ingresso più radente che, con la portanza verso il basso (σ = 180°), non risale sopra la quota di ingresso; il limite ripido è l'ingresso più ripido che, con la portanza verso l'alto (σ = 0°), resta entro il carico g dato (e il flusso di calore, se dato). Per un ritorno dalla Luna il corridoio risulta largo solo circa 2°. Apollo 13 (aprile 1970) tornò dopo l'esplosione del serbatoio di ossigeno con il modulo di comando spento per risparmiare energia. L'equipaggio corresse la traiettoria con un'accensione manuale del motore del modulo lunare, puntata sulla Terra nel mirino del finestrino, e l'ultima correzione mirò al centro del corridoio. L'angolo di ingresso previsto era −6,20°; il computer del modulo di comando fu riacceso solo prima del rientro. Equazione del modello
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Area frontale e coefficiente balistico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densità dell'aria secondo l'atmosfera standard (isoterma sopra 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Limite radente del corridoio (portanza verso il basso):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Limite ripido del corridoio (portanza verso l'alto):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Larghezza del corridoio di rientro:
  $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Semplificazioni: la Terra è sferica e non ruota, C_D e L/D sono costanti e il rollio σ è lo stesso per tutto il volo (la guida reale lo varia). Il flusso di calore è solo convettivo; tornando dalla Luna si aggiunge la radiazione dello strato d'urto incandescente. Uno scudo ablativo porta via parte del calore vaporizzandosi, quindi la temperatura di equilibrio radiativo è una stima per eccesso.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse.

Vostok: una discesa balistica senza portanza e 8–9 g.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg]; sigma=0[deg];`

hk=7[km]; nlim=10[gn])

Risultato

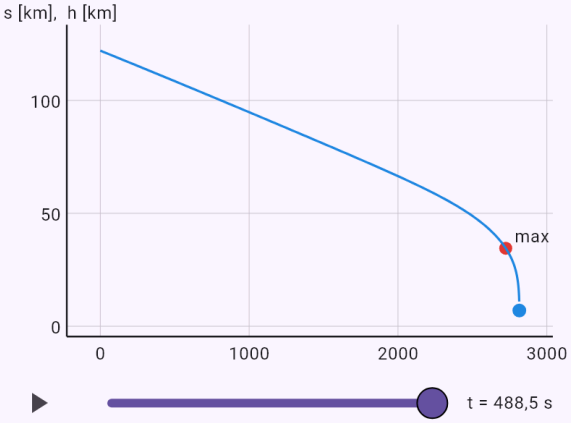
$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

Passaggi

- Incognita a_{max}; dati
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Un attraversamento dell'atmosfera dalla quota di ingresso h_0 (122 km per impostazione) con l'angolo di volo dato γ_0 e un angolo di rollio costante σ fino alla quota h_k (l'apertura dei paracadute, il volo planato per lo Shuttle). Il carico g massimo è confrontato con la formula di Allen ed Eggers per un rientro balistico. Il flusso di calore nel punto di ristagno segue dalla formula di Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³ e la temperatura superficiale dello scudo dall'equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Equazione del modello
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Area frontale e coefficiente balistico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densità dell'aria secondo l'atmosfera standard (isoterma sopra 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Cattura: il veicolo è sceso alla quota h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Carico g massimo (numericamente)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Verifica con la formula di Allen ed Eggers per un rientro balistico (senza gravità, un'atmosfera esponenziale con altezza di scala H)
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$
- Flusso di calore massimo nel punto di ristagno (Sutton–Graves) e calore totale per m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Temperatura superficiale dello scudo per equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Semplificazioni: la Terra è sferica e non ruota, C_D e L/D sono costanti e il rollio σ è lo stesso per tutto il volo (la guida reale lo varia). Il flusso di calore è solo convettivo; tornando dalla Luna si aggiunge la radiazione dello strato d'urto incandescente. Uno scudo ablativo porta via parte del calore vaporizzandosi, quindi la temperatura di equilibrio radiativo è una stima per eccesso.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Lo Space Shuttle: la temperatura dello scudo per equilibrio radiativo.

Input: `model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];`

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Risultato

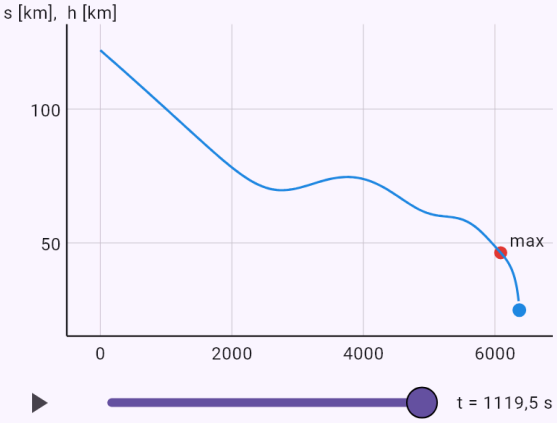
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Passaggi

- Incognita T_{max}; dati
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Un attraversamento dell'atmosfera dalla quota di ingresso h_0 (122 km per impostazione) con l'angolo di volo dato γ_0 e un angolo di rollio costante σ fino alla quota h_k (l'apertura dei paracadute, il volo planato per lo Shuttle). Il carico g massimo è confrontato con la formula di Allen ed Eggers per un rientro balistico. Il flusso di calore nel punto di ristagno segue dalla formula di Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³ e la temperatura superficiale dello scudo dall'equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Equazione del modello
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Lo Space Shuttle rientrava con un angolo di attacco di circa 40° e smaltiva la portanza in eccesso ruotando intorno all'asse longitudinale (fino a circa 70°); atterrava come aliante senza motore. I valori della preimpostazione sono approssimati. Quanto sia estremamente sollecitata la protezione termica lo ha mostrato la perdita del Columbia (missione STS-107). Al lancio del 16 gennaio 2003 un pezzo di schiuma isolante del serbatoio esterno sfondò un pannello in carbonio-carbonio rinforzato (RCC) sul bordo d'attacco dell'ala sinistra. I bordi d'attacco si scaldano fino a circa 1.650 °C (circa 3.000 °F) durante il rientro. Il 1° febbraio 2003 il plasma caldo entrò nell'ala attraverso la breccia, la struttura fuse e l'orbiter si disintegrò sopra il Texas; tutti i sette membri dell'equipaggio persero la vita.
- Area frontale e coefficiente balistico
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Densità dell'aria secondo l'atmosfera standard (isoterma sopra 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Componente verticale della portanza all'angolo di rollio σ: $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Cattura: il veicolo è sceso alla quota h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Carico g massimo (numericamente)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Un rientro balistico senza portanza darebbe secondo Allen ed Eggers molto di più – la portanza riduce il carico g
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Flusso di calore massimo nel punto di ristagno (Sutton–Graves) e calore totale per m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Temperatura superficiale dello scudo per equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Semplificazioni: la Terra è sferica e non ruota, C_D e L/D sono costanti e il rollio σ è lo stesso per tutto il volo (la guida reale lo varia). Il flusso di calore è solo convettivo; tornando dalla Luna si aggiunge la radiazione dello strato d'urto incandescente. Uno scudo ablativo porta via parte del calore vaporizzandosi, quindi la temperatura di equilibrio radiativo è una stima per eccesso.

Grafico

Traiettoria | Nel tempo



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

Quanto di un iceberg sta sotto la superficie.

Input: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float; fluid=sea;`

`body=ice)`

Risultato

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Passaggi

- Incognita φ; dati: $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Un corpo in un fluido riceve una spinta di Archimede pari al peso del fluido spostato. Un corpo galleggiante è immerso secondo il rapporto delle densità. La stessa legge sostiene un pallone nell'aria. Equazione del modello: $F_b = \rho_f V g$
- Ricaviamo l'incognita: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Sostituiamo: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Convertiamo le unità: $\varphi \approx 0{,}8946 \ = 89{,}46\,\%$

Cosa può sollevare una mongolfiera.

Input: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Risultato

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Passaggi

- Incognita m_p; dati
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Un corpo in un fluido riceve una spinta di Archimede pari al peso del fluido spostato. Un corpo galleggiante è immerso secondo il rapporto delle densità. La stessa legge sostiene un pallone nell'aria. Equazione del modello: $F_b = \rho_f V g$
- Massa che il gas può sollevare
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Ricaviamo l'incognita: $m_p = m_v - m_0$
- Sostituiamo: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

La pressione sul fondo della Fossa delle Marianne.

Input: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

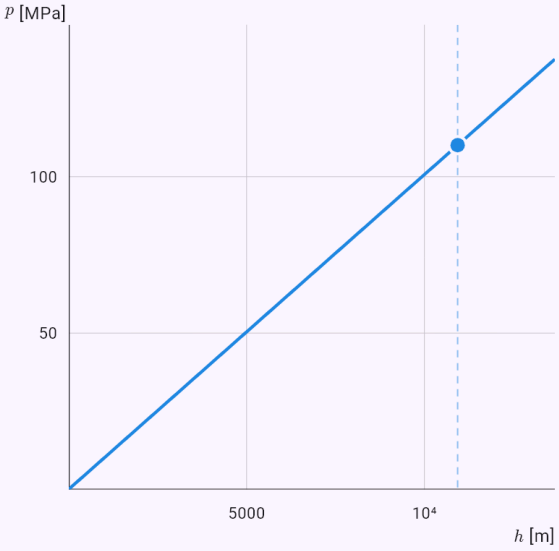
Risultato

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

Passaggi

- Incognita p; dati: $h = 10\,940\ \text{m}, \quad \rho_f = 1025\ \text{kg/m}^3$
- La pressione cresce linearmente con la profondità, della densità per g per la profondità. In superficie vi si aggiunge la pressione atmosferica. L'acqua è considerata incomprimibile. Equazione del modello: $p = p_0 + \rho_f g h$
- A grande profondità l'acqua si comprime leggermente e la sua densità cambia anche con la temperatura e la salinità; il risultato può differire di circa il 2 %.
- Ricaviamo l'incognita: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Sostituiamo: $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\ \text{MPa}$
- Quante volte la pressione atmosferica: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Convertiamo le unità: $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\ \text{Pa} = 1101\ \text{bar}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La pressione in un restringimento di un tubo.

Input: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa];`

`rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Risultato

$$p_2 \approx 170{,}1\,\text{kPa}$$

Passaggi

- Incognita p_2; dati
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2, \quad v_1 = 2\,\text{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Convertiamo le unità
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2 = 0{,}002\,\text{m}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2,$
- Lungo una linea di corrente di un liquido ideale la somma della pressione e dell'energia cinetica e potenziale di un volume si conserva. In un restringimento la velocità aumenta e la pressione diminuisce; se raggiunge la tensione di vapore, inizia la cavitazione. Equazione del modello: $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Equazione di continuità:
  $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \frac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\,\text{m/s}$
- Ricaviamo l'incognita:
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Sostituiamo
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - (\ldots$
- Convertiamo le unità: $p_2 \approx 170\,100\,\text{Pa} = 170{,}1\,\text{kPa}$

La velocità limite di un sasso in acqua e un grafico dell'avvio.

Input: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)

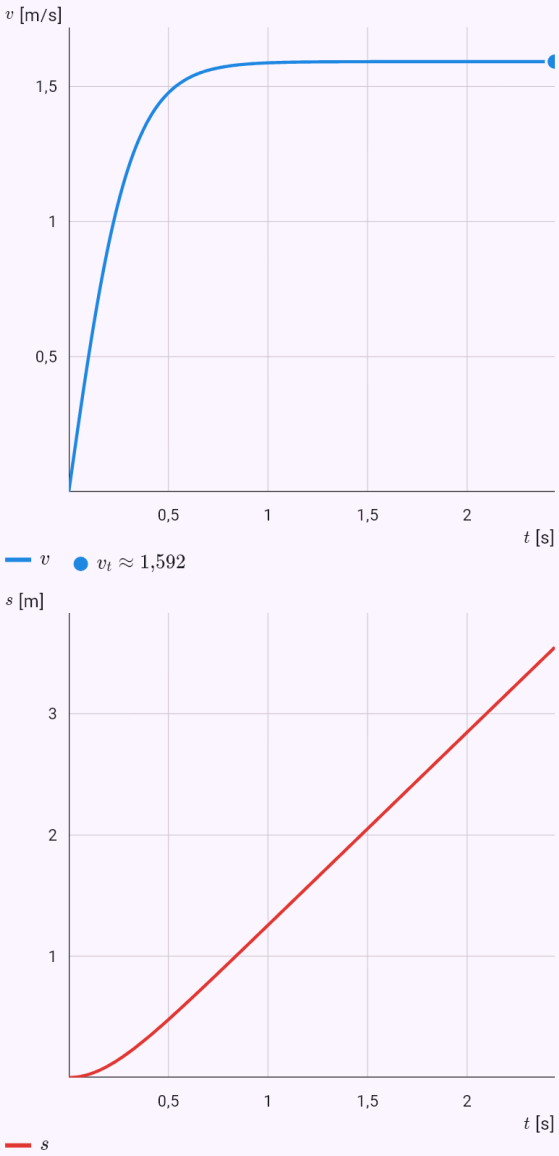
Risultato

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Passaggi

- Incognita v_t; dati
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Convertiamo le unità: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un corpo affonda o risale finché la resistenza equilibra la differenza tra il suo peso e la spinta, raggiungendo la velocità limite. Partendo, deve anche mettere in moto l'acqua circostante, come descrive la massa aggiunta. L'equazione si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. Equazione del modello:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, sezione e massa della sfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- La forza risultante è verso il basso, il corpo affonda:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Massa con la massa aggiunta:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Numero di Reynolds e coefficiente di resistenza alla velocità limite: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Velocità limite: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Costante di tempo dell'avvio con e senza la massa aggiunta
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- La massa aggiunta cambia solo l'avvio. La velocità limite non ne dipende, perché nel moto stazionario nulla accelera.
- Sostituiamo: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

Quanto impiega una bolla a risalire da una profondità di 10 m.

Input: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

```
nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)
```

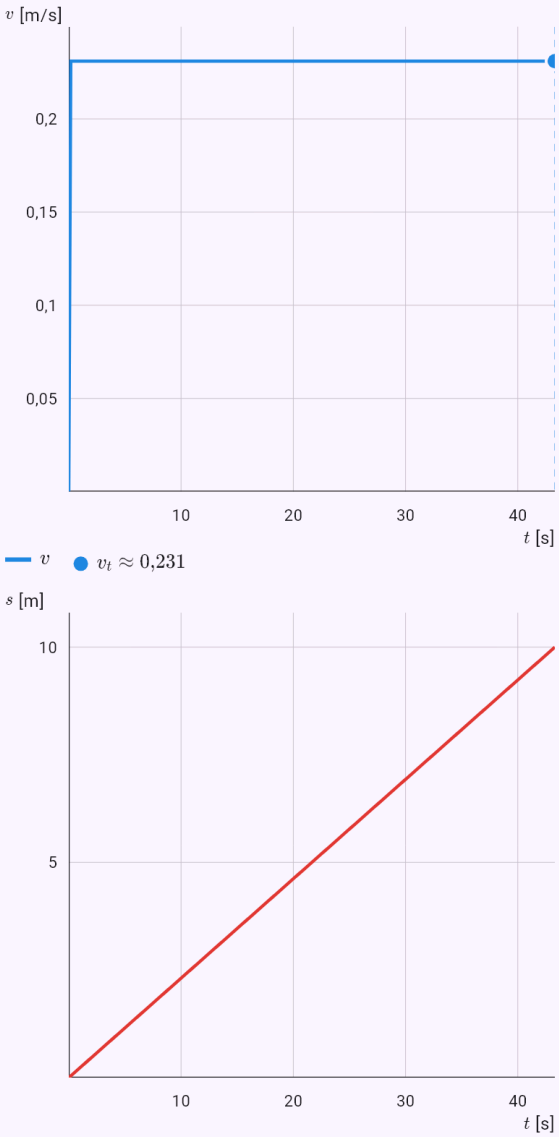
Risultato

$$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Convertiamo le unità: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Un corpo affonda o risale finché la resistenza equilibra la differenza tra il suo peso e la spinta, raggiungendo la velocità limite. Partendo, deve anche mettere in moto l'acqua circostante, come descrive la massa aggiunta. L'equazione si risolve numericamente con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. Equazione del modello:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, sezione e massa della sfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- La forza risultante è verso l'alto, il corpo risale:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Massa con la massa aggiunta:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Il numero di Eötvös dice quanto si deforma la bolla:
  $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Numero di Reynolds e coefficiente di resistenza alla velocità limite: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Velocità limite: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Costante di tempo dell'avvio con e senza la massa aggiunta
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- La massa aggiunta cambia solo l'avvio. La velocità limite non ne dipende, perché nel moto stazionario nulla accelera.
- La correlazione di Tomiyama vale per acqua comune, leggermente contaminata. In acqua pulita le bolle piccole salgono più velocemente, quelle grandi si rompono o oscillano.
- L'equazione è stata risolta con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine, numero di passi: $N = 3363$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

La caduta dell'asta di un fucile subacqueo a 5 m.

Input: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)

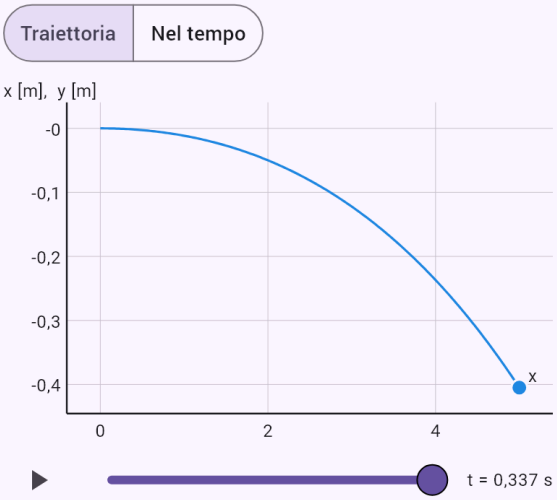
Risultato

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\text{cm}$$

Passaggi

- Incognita Δy; dati
  $x = 5\,\text{m}, \quad v_0 = 20\,\text{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\text{kg}, \quad d = 7\,\text{mm},$
- Convertiamo le unità: $d = 7\,\text{mm} = 0{,}007\,\text{m}$
- Un fucile subacqueo per la pesca sportiva: un'asta sottile è frenata soprattutto dall'attrito lungo la sua superficie, quindi perde la velocità in pochi metri. La caduta deriva dal peso meno la spinta. Le equazioni si risolvono numericamente. Equazione del modello
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Coefficiente d'attrito secondo la linea ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Coefficiente di resistenza dell'asta: la punta e l'attrito lungo di essa: $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Il percorso in cui la velocità scende a circa il 37 % e l'accelerazione verso il basso in acqua
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\text{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\text{m/}$
- L'equazione è stata risolta con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine, numero di passi: $N = 1538$
- Il modello trascura la resistenza della sagola, che accorcia ulteriormente la portata reale. La massa aggiunta dell'asta lungo il suo asse è trascurabile.
- Convertiamo le unità: $\Delta y \approx 0{,}405\,\text{m} = 40{,}5\,\text{cm}$

Grafico



Gli assi hanno scale diverse. Segui il volo nel tempo con il cursore o con il pulsante di riproduzione.

L'autonomia di un drone subacqueo con la batteria.

Input: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

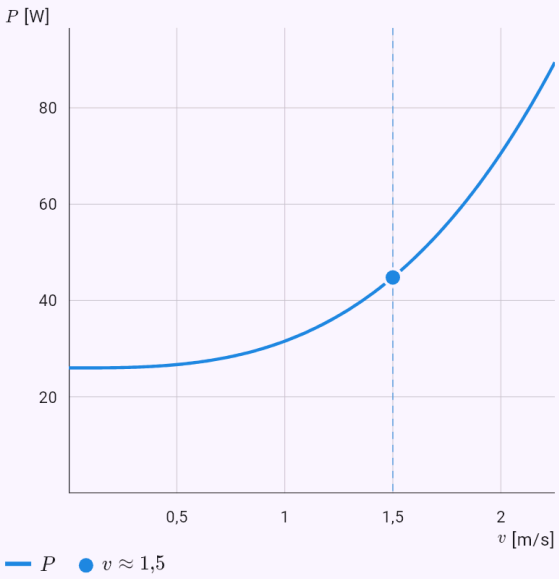
Risultato

$$R \approx 120{,}5\,\text{km}$$

Passaggi

- Incognita R; dati
  $v = 1{,}5\,\text{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\text{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Convertiamo le unità: $E = 1\,\text{kWh} = 3\,600\,000\,\text{J}$
- In moto stazionario la spinta è uguale alla resistenza. La resistenza cresce con il quadrato della velocità e la potenza con il suo cubo. Con una batteria conta anche il carico costante degli strumenti, quindi c'è una velocità di massima autonomia. Equazione del modello:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Il fattore K della resistenza D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\text{kg/m}$
- Potenza necessaria: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\text{W}$
- Velocità di massima percorrenza:
  $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\text{m/s}$
- Autonomia della batteria: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\text{h}$
- Ricaviamo l'incognita: $R = vt_E$
- Sostituiamo: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\text{km}$
- Convertiamo le unità: $R \approx 120\,500\,\text{m} = 120{,}5\,\text{km}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un sottomarino storico: la potenza cresce con il cubo della velocità.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

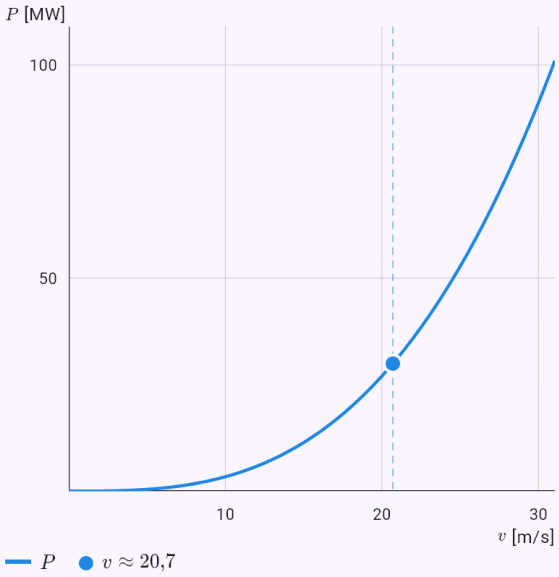
Risultato

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Passaggi

- Incognita P; dati
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- In moto stazionario la spinta è uguale alla resistenza. La resistenza cresce con il quadrato della velocità e la potenza con il suo cubo. Con una batteria conta anche il carico costante degli strumenti, quindi c'è una velocità di massima autonomia. Equazione del modello:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Il fattore K della resistenza D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- Ricaviamo l'incognita: $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h$
- Sostituiamo: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- La potenza cresce con il cubo della velocità: il doppio della velocità richiede otto volte la potenza:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Convertiamo le unità: $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Quanta acqua deve imbarcare un sottomarino per restare sospeso.

Input: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Risultato

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Passaggi

- Incognita m_b; dati
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Un mezzo sommerso resta sospeso quando la sua massa con la zavorra è uguale alla massa dell'acqua spostata. Facendo uscire o entrare acqua sale o scende. Svuotare una cassa in profondità richiede più aria, perché deve vincere la pressione circostante. Equazione del modello: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Ricaviamo l'incognita: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Sostituiamo:
  $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Volume dell'acqua di zavorra: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- Convertiamo le unità: $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

La potenza di una portacontainer con la resistenza divisa nelle sue parti.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

Risultato

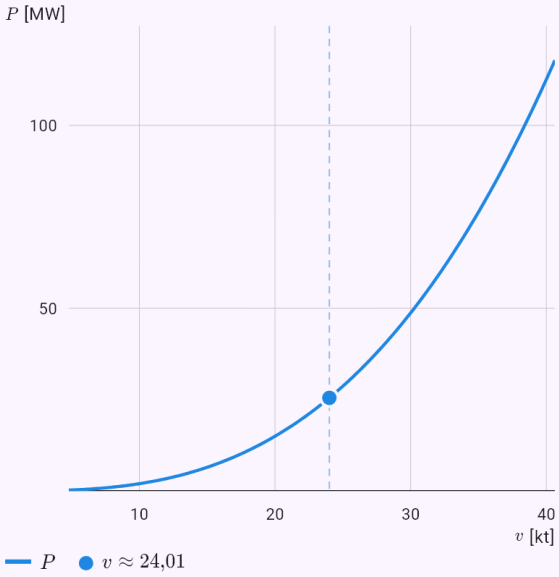
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Passaggi

- Incognita P; dati
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- L'immersione segue dal dislocamento e la stabilità trasversale dal metacentro. La resistenza ha una parte d'attrito secondo la linea ITTC-57 e una parte residua da un coefficiente dato. Il numero di Froude e la velocità di carena mostrano quando le onde lungo lo scafo cominciano ad aumentare bruscamente la resistenza. Equazione del modello
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Numeri di Froude e di Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Coefficiente d'attrito secondo la linea ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Resistenza d'attrito e resistenza residua
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Il coefficiente residuo è preso costante. In realtà cambia con la velocità e viene da prove su modelli.
- Resistenza totale: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Ricaviamo l'incognita: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Sostituiamo: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Convertiamo le unità: $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Altezza metacentrica: la stabilità di una nave.

Input: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Risultato

$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$

Passaggi

- Incognita GM; dati
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- L'immersione segue dal dislocamento e la stabilità trasversale dal metacentro. La resistenza ha una parte d'attrito secondo la linea ITTC-57 e una parte residua da un coefficiente dato. Il numero di Froude e la velocità di carena mostrano quando le onde lungo lo scafo cominciano ad aumentare bruscamente la resistenza. Equazione del modello
  $Fn = \dfrac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \dfrac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Volume di carena e area del galleggiamento (coefficiente di finezza)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Altezza del centro di carena sulla chiglia (formula di Morrish)
  $KB = T - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Altezza del metacentro sul centro di carena:
  $BM = \dfrac{I}{\nabla} = \dfrac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Ricaviamo l'incognita: $GM = KB + BM - KG$
- Sostituiamo: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Il metacentro è sopra il baricentro: la nave è stabile trasversalmente.
- Vale per piccoli angoli di sbandamento. Il momento del galleggiamento è una stima dal suo coefficiente, esatta per un rettangolo; per una nave reale il risultato è solo una prima stima.

Una nave da 544 t che naviga accanto all'ekranoplano KM in volo appena sopra l'acqua.

Input: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

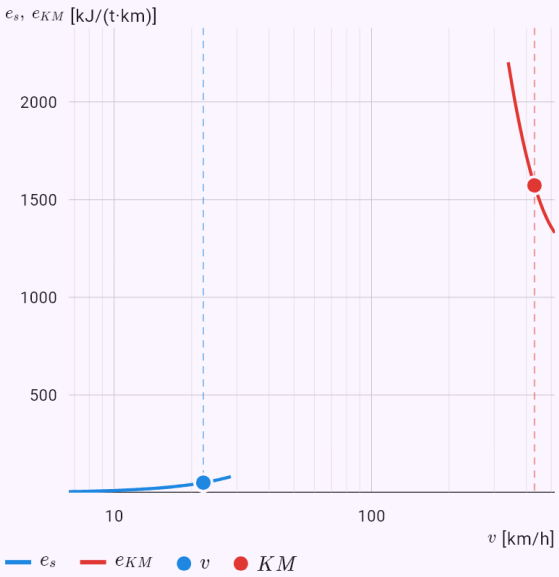
Risultato

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Passaggi

- Incognita P; dati
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- L'immersione segue dal dislocamento e la stabilità trasversale dal metacentro. La resistenza ha una parte d'attrito secondo la linea ITTC-57 e una parte residua da un coefficiente dato. Il numero di Froude e la velocità di carena mostrano quando le onde lungo lo scafo cominciano ad aumentare bruscamente la resistenza. Equazione del modello
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Numeri di Froude e di Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Coefficiente d'attrito secondo la linea ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Resistenza d'attrito e resistenza residua
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Il coefficiente residuo è preso costante. In realtà cambia con la velocità e viene da prove su modelli.
- L'ekranoplano KM in crociera (lo stesso calcolo del modulo Aereo)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Lavoro contro la resistenza per tonnellata e chilometro: la nave e KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Quante volte più energia richiede KM e quante volte è più veloce: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM è calcolato in effetto suolo con il fattore di McCormick. Il confronto riguarda il lavoro contro la resistenza; trascura il rendimento dei motori, le onde e il meteo.
- Resistenza totale: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Ricaviamo l'incognita: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Sostituiamo: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Convertiamo le unità: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Grafico



L'asse orizzontale è logaritmico perché le velocità differiscono di molte volte. I punti sono la velocità data della nave e la velocità di crociera dell'ekranoplano.

L’energia del neutrone dalla D-T – ripartita con la conservazione della quantità di moto.

Input: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Risultato

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Passaggi

- L’energia di una reazione dalle masse atomiche. Con due prodotti l’energia si ripartisce per la conservazione della quantità di moto: la particella più leggera prende la parte maggiore. Equazione del modello:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reazione: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Masse prima e dopo:
  $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Sostituiamo:
  $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- I prodotti si allontanano con quantità di moto opposte e di uguale modulo, quindi le loro energie cinetiche stanno nel rapporto inverso delle masse.
- Ricaviamo l’incognita: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Sostituiamo:
  $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energia del nucleo di elio: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Quanto carbone sostituisce 1 g di combustibile D-T.

Input: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Risultato

$$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$$

Passaggi

- Incognita m_c; dati: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Convertiamo le unità: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Quanta energia libera una data quantità di combustibile, a confronto con la fissione dell’uranio-235 (circa 200 MeV per nucleo) e con la combustione del carbone.
  Equazione del modello: $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\,m$
- Reazione: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energia di una reazione:
  $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Sostituiamo
  $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Sostituiamo: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Sostituiamo: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- La fusione non ha massa critica. Se qualcosa si guasta, il plasma si raffredda e la reazione si ferma da sola; il reattore non può andare fuori controllo come uno a fissione.
- Convertiamo le unità: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Il picco di Gamow della catena p-p nel nucleo del Sole.

Input: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one]; T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Risultato

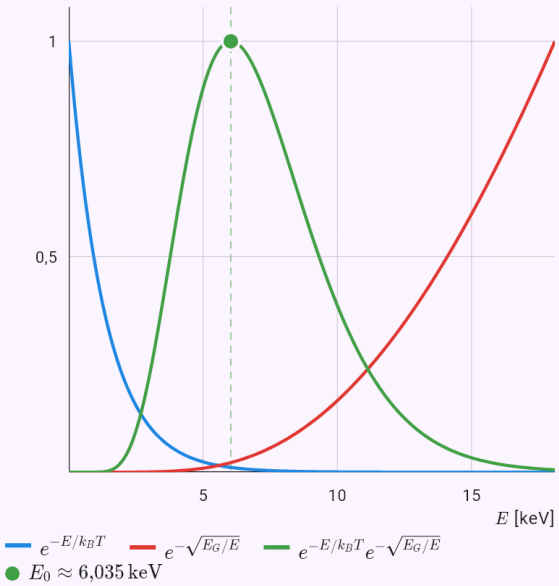
$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

Passaggi

- Incognita E_0; dati:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- In realtà i nuclei attraversano la barriera per effetto tunnel. La probabilità di tunnel e^(−√(E_G/E)) cresce ripidamente con l'energia, mentre i nuclei veloci della distribuzione di Maxwell diventano ripidamente più rari. Il loro prodotto ha un netto picco di Gamow E_0, dove le reazioni avvengono davvero. Il fattore di Gamow è preso come formula pronta, perché la sua derivazione appartiene alla meccanica quantistica. Equazione del modello

  $$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$
- Massa ridotta
  $$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$
- Sostituiamo
  $$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$
- Sostituiamo
  $$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$
- Larghezza del picco: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Posizione del picco in multipli di k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- Le reazioni avvengono soprattutto in una stretta fascia di energie attorno a E_0, alcune volte l'energia media k_BT. Il grafico mostra entrambe le funzioni e il loro prodotto, ciascuna divisa per il proprio massimo.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il prodotto triplo con i parametri di ITER, confrontato con la condizione di ignizione.

Input: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s]; mode=lawson)`

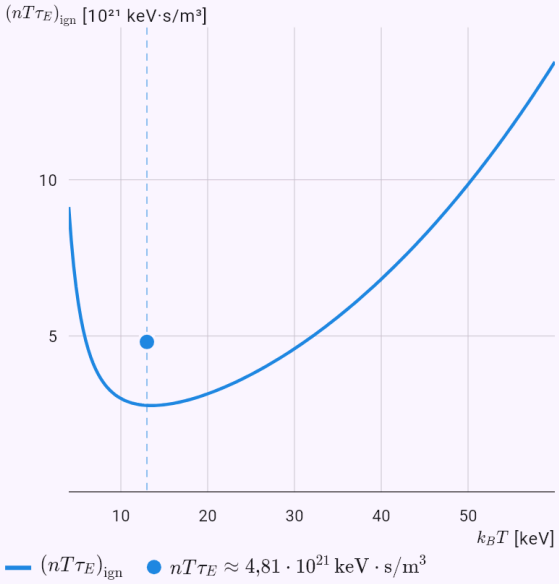
Risultato

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$$

Passaggi

- Incognita $nT\tau_E$; dati
  $n = 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\,\mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\,\mathrm{s}$
- Il criterio di Lawson: il plasma si mantiene caldo da solo (ignizione) quando il riscaldamento delle particelle alfa delle reazioni D-T compensa le perdite di calore 3nk_BT/τ_E. Decide il prodotto triplo della densità n, della temperatura T e del tempo di confinamento dell'energia τ_E. Il suo minimo, circa 3·10²¹ keV·s/m³, sta vicino a 14 keV. Equazione del modello
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Velocità di reazione D-T (fit)
  $\langle\sigma v\rangle(13\,\mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$
- Sostituiamo
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12\cdot(13)^2}{3520\cdot 2{,}073\cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s}$$
- Sostituiamo
  $nT\tau_E = 10^{20}\cdot 13\cdot 3{,}7 \approx 4{,}81\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$
- Il prodotto triplo basta per l'ignizione: il riscaldamento alfa copre le perdite – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Il prodotto triplo minimo necessario, circa 3·10²¹ keV·s/m³, è vicino a 14 keV. Le perdite per bremsstrahlung qui sono trascurate.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La velocità di reazione D-T a 10 keV come integrale con la regola di Simpson.

Input: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Risultato

$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Passaggi

- Incognita $\langle \sigma v \rangle$; dati: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- La velocità di reazione ⟨σv⟩ è la sezione d'urto σ(E) mediata sulla distribuzione di Maxwell delle velocità. È calcolata come integrale con la regola di Simpson e confrontata con un fit pubblicato. Le sezioni d'urto sono quelle di Bosch e Hale (Nuclear Fusion, 1992). Equazione del modello

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$

- Reazione: ${}^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} + n$
- Sezione d'urto (Bosch-Hale):

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$$

- Regola di Simpson: $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Integrale

$$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$

- Valori nel SI

$$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2,$$

- Sostituiamo

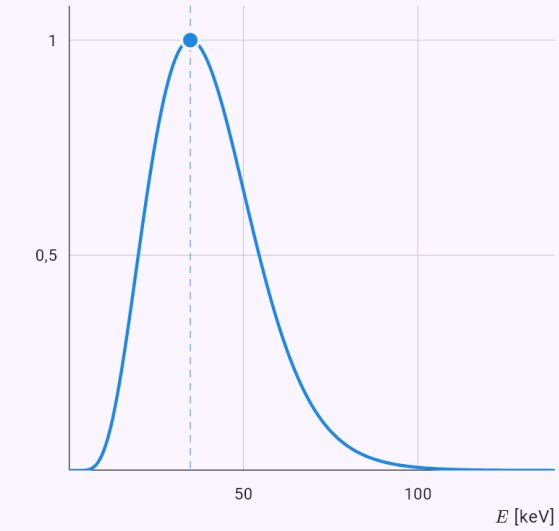
$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$

- Confronto con il fit

$$\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$$

- La funzione integranda conta soprattutto attorno al picco di Gamow, quindi basta integrare fino a 40 k_BT. La differenza dal fit è dell'ordine dell'uno per cento.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il raggio di Larmor di una particella alfa da fusione in 5 T.

Input: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T]; mode=larmor;`

`particle=alpha)`

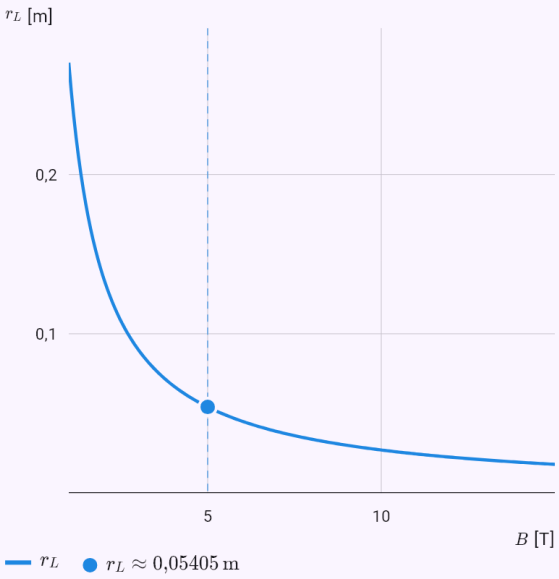
Risultato

$$r_L \approx 5{,}405\,\text{cm}$$

Passaggi

- Incognita r_L; dati:
  $m = 4{,}002\,\text{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\text{keV}, \quad B = 5\,\text{T}$
- Una particella carica in un campo magnetico gira attorno a una linea di campo (il raggio di Larmor), ed è per questo che un campo magnetico tiene il plasma caldo lontano dalle pareti. Il calcolo è relativistico; per ioni lenti γ ≈ 1. Equazione del modello:
  $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Massa: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- Fattore di Lorentz e velocità
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\text{m/s} \approx 0{,}04$
- Quantità di moto
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
- Sostituiamo
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\text{m}$
- Gli ioni in un tokamak girano su raggi da millimetri a centimetri, per questo il campo magnetico li tiene lontani dalle pareti.
- Convertiamo le unità: $r_L \approx 0{,}05405\,\text{m} = 5{,}405\,\text{cm}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il fattore di Lorentz di un protone in LHC.

Input: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Risultato

$\gamma \approx 7248{,}37$

Passaggi

- Incognita γ; dati:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Convertiamo le unità:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Dalla velocità (come frazione di c) o dall'energia cinetica calcola γ, la velocità, l'energia totale e la quantità di moto. Un protone nell'LHC (6,8 TeV) è più lento della luce di pochi metri al secondo. Equazione del modello
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Energia a riposo: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Sostituiamo: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Velocità: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- Quanto più lenta della luce:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Una particella ultrarelativistica: quasi tutta la sua energia è cinetica e la sua velocità differisce da c solo di poco.

Quanti muoni da 15 km raggiungono il suolo grazie alla dilatazione del tempo.

Input: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

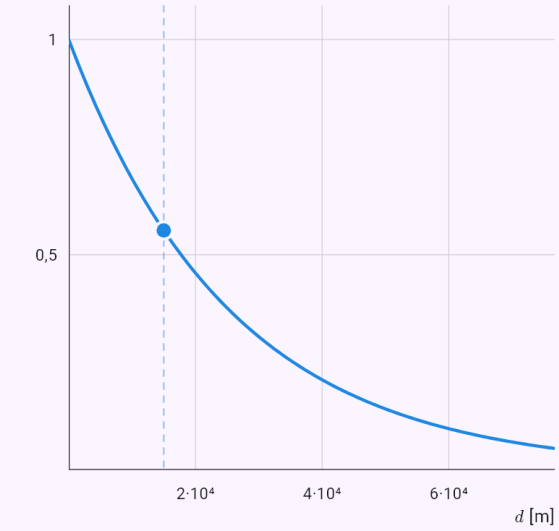
Risultato

$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Passaggi

- Incognita $\frac{N}{N_0}$; dati
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Convertiamo le unità
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Una particella instabile decade con la propria vita media τ_0. In laboratorio il suo tempo scorre γ volte più lentamente, quindi arriva γ volte più lontano. Senza la dilatazione del tempo, i muoni prodotti a 15 km di quota nell'atmosfera arriverebbero a terra a malapena.
  Equazione del modello:
  $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Sostituiamo: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Velocità: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Sostituiamo
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{m}$
- Sostituiamo: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Frazione che arriva senza dilatazione del tempo:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- Nel sistema proprio della particella il tempo non rallenta, ma la distanza si accorcia (contrazione delle lunghezze). Entrambi i punti di vista danno lo stesso numero di decadimenti.
- Convertiamo le unità: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 = 55{,}64\,\%$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L'energia di collisione di un fascio di LHC su un bersaglio fisso.

Input: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2]; mode=collision;`

machine=lhc)

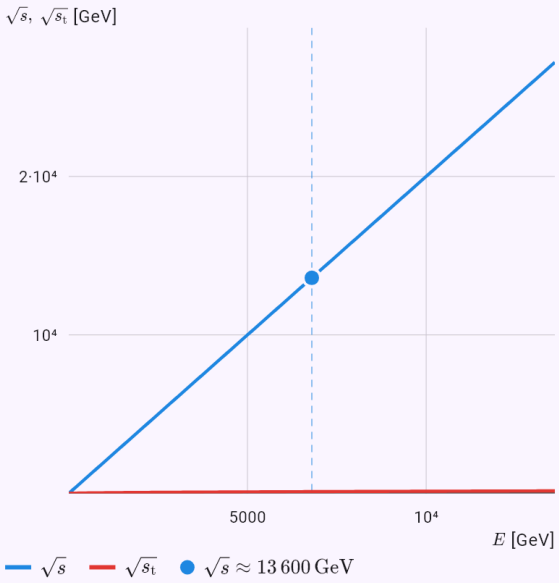
Risultato

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Passaggi

- Incognita $\sqrt{s_t}$; dati:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- In fasci che collidono tutta l'energia delle due particelle va nella collisione: √s = 2E. Un fascio diretto su un bersaglio fisso spende gran parte dell'energia per muovere il centro di massa, e √s cresce solo con la radice quadrata di E. Ecco perché si costruiscono i collisori. Equazione del modello:
  $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s è la massa invariante del sistema: l'energia disponibile per produrre nuove particelle.
- Sostituiamo
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Fasci che collidono: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La perdita di energia di un elettrone per giro in LEP.

Input: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

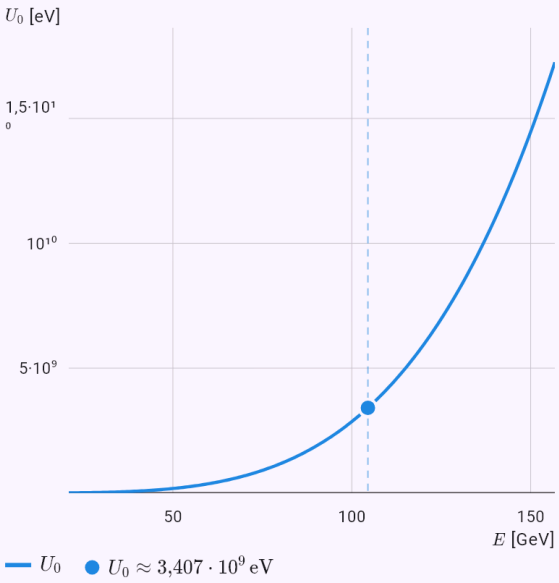
Risultato

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Passaggi

- Incognita U_0; dati
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Convertiamo le unità: $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Una particella carica su una traiettoria curva irraggia (radiazione di sincrotrone). La perdita per giro cresce con γ⁴, quindi a parità di energia come 1/m⁴. Un elettrone perde 10¹³ volte più di un protone, per questo il LEP si è fermato a 104 GeV e l'LHC accelera protoni. Equazione del modello: $U_0 = \dfrac{e^2\beta^3\gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Fattore di Lorentz: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Sostituiamo
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- In elettronvolt: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\mathrm{eV}$
- Gli elettroni irraggiano 10¹³ volte più dei protoni della stessa energia: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- L'altro tipo di particella alla stessa energia e raggio: $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- Convertiamo le unità: $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

44. Statica e resistenza dei materiali

Il modulo Statica (Applicazioni, l'ambito Ingegneria) ha tre modalità. Una trave giace sull'asse x da 0 a L ed è vincolata con una cerniera, un carrello o un incastro; puoi caricarla con forze verticali e inclinate, momenti e un carico distribuito – uniforme, triangolare o trapezoidale. Più forze vanno in un campo separate da spazi, le loro posizioni e i loro angoli nello stesso ordine. Le cerniere interne formano una [[gerberBeam|trave Gerber]].

I passaggi iniziano con un [[freeBody|diagramma di corpo libero]]: le reazioni sostituiscono i vincoli e il rango delle equazioni di equilibrio mostra la [[staticDeterminacy|determinatezza statica]]. Quando la trave è staticamente indeterminata o vincolata in modo improprio, l'app lo dice con il grado di iperstaticità. Le equazioni si risolvono una alla volta – sempre quella con una sola incognita rimasta (un momento rispetto a un vincolo, per una trave Gerber prima la parte oltre una cerniera) – e un'equazione non usata serve da verifica.

L'app elenca le sollecitazioni interne N, T e M tratto per tratto tra i punti notevoli e trova il momento flettente massimo con il [[schwedlerTheorem|teorema di Schwedler]]: dove il taglio è nullo o dove ha un salto. Sotto lo schizzo della trave con i carichi e le reazioni ci sono i diagrammi di N, T e M alla stessa scala delle lunghezze.

La modalità Corpo nel piano calcola le reazioni di un corpo dato dai punti dei vincoli e dai punti di applicazione delle forze – per esempio una scala appoggiata a un muro. Per un carrello scegli la direzione della reazione con l'angolo β.

Le caratteristiche della sezione sono l'area, il [[centroid|baricentro]], i momenti d'inerzia con il [[parallelAxisTheorem|teorema di Huygens–Steiner]], i [[sectionModulus|moduli di resistenza]] e per una sezione non simmetrica anche gli [[principalAxes|assi principali]] – per un rettangolo, un tubo, profilati T, I, U, L e una sezione composta da rettangoli e cerchi con fori. La figura mostra la sezione in scala reale con il baricentro e gli assi. I raccordi dei profilati laminati sono trascurati.

Il modulo Cisterna con un liquido calcola una cisterna parzialmente piena in frenata, in accelerazione e in curva. La superficie si inclina perpendicolarmente alla risultante della gravità e della forza d'inerzia (tg θ = a/g), il baricentro del liquido si sposta e con esso quello complessivo. I carichi sugli assi sono le reazioni di una trave su due appoggi; in curva l'app calcola il [[loadTransferRatio|trasferimento di carico]] sulle ruote esterne e la velocità critica alla quale la cisterna si ribalta – confrontata con un carico rigido, anche con la frequenza propria dello [[sloshing|sciabordio]]. Una demo interattiva è su mathtrace.app alla voce "Prova tu".

Il modulo Progetto di una trave confronta tre varianti di una trave inflessa: il profilato normalizzato più leggero dalle tabelle (IPE, HEB, tubi tondi e rettangolari), la sezione costante ottimale di una forma scelta (un rettangolo, un cerchio, un tubo con snellezza della parete limitata) e una

[[uniformStrengthBeam|trave di uniforme resistenza]]. Controlla la resistenza, la freccia ammissibile L/n e il taglio all'estremità libera; i passaggi mostrano quale condizione è [[activeConstraint|attiva]] e il grafico la sezione, il momento e la freccia lungo la trave. L'ispirazione è stata una tesi di ottimizzazione: un braccio progettato con l'ottimizzazione è risultato molto più leggero di uno dalle tabelle.

Esempi

Una trave semplicemente appoggiata con una forza e un carico distribuito su una parte: le reazioni, i tratti e il momento massimo.

Input: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

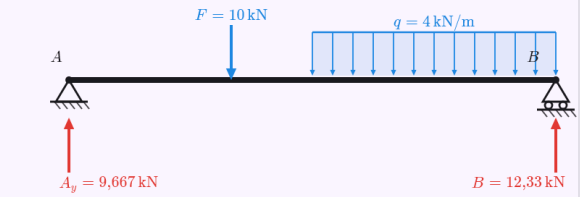
Risultato

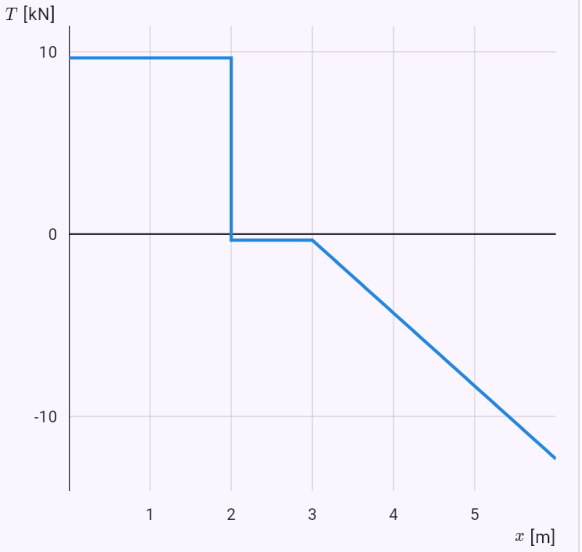
$$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN\cdot m}$$
$$x \approx 2\,\mathrm{m}$$

Passaggi

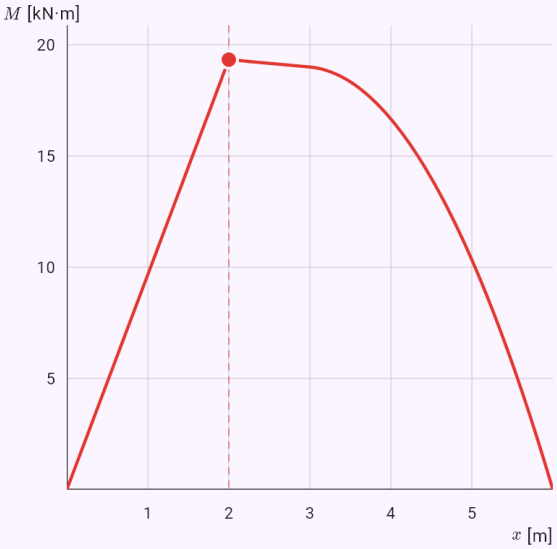
- Incognita M_{max}; dati
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- La trave sta sull'asse x da 0 a L. Una cerniera porta una forza orizzontale e una verticale, un carrello solo la forza perpendicolare al suo piano di scorrimento, un incastro anche un momento. Una forza forma con la trave l'angolo α (90° = verticalmente verso il basso), un momento è positivo in senso antiorario, un carico distribuito positivo verso il basso. Le cerniere interne formano una trave Gerber: il momento flettente in una cerniera è zero, il che dà un'equazione in più. I diagrammi di N, T e M si costruiscono tratto per tratto con il teorema di Schwedler. Equazione del modello:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- La risultante del carico distribuito (nel baricentro dell'area del carico):
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \dfrac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Le reazioni incognite: $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostatico: tante incognite quante equazioni indipendenti (n incognite, e equazioni, h il rango):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Somma delle forze orizzontali:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Una verifica con un'equazione non usata:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Teorema di Schwedler: la derivata del momento flettente è il taglio e la derivata del taglio è meno il carico distribuito. Dove T è zero, M ha un estremo.
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m): $x \in [0;\ 2]: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m):
  $x \in [2;\ 3]: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m):
  $x \in [3;\ 6]: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2x^2$
- Il momento flettente massimo è dove il taglio fa un salto:
  $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN\cdot m}$
- Un momento flettente positivo inflette la trave verso il basso (le fibre inferiori tese), uno negativo verso l'alto, tipicamente sopra un appoggio o in un incastro.

Grafico





T – taglio



M – momento flettente $M_{max} = 19{,}33\,\text{kN} \cdot \text{m}$

La trave libera con i carichi (blu) e le reazioni (rosse), sotto i diagrammi delle azioni interne alla stessa scala delle lunghezze. Le frecce non sono in scala con le forze.

Una mensola con una forza inclinata all'estremità e un carico uniforme: le reazioni orizzontale e verticale e il momento dell'incastro.

Input: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

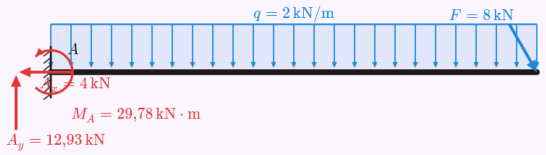
Risultato

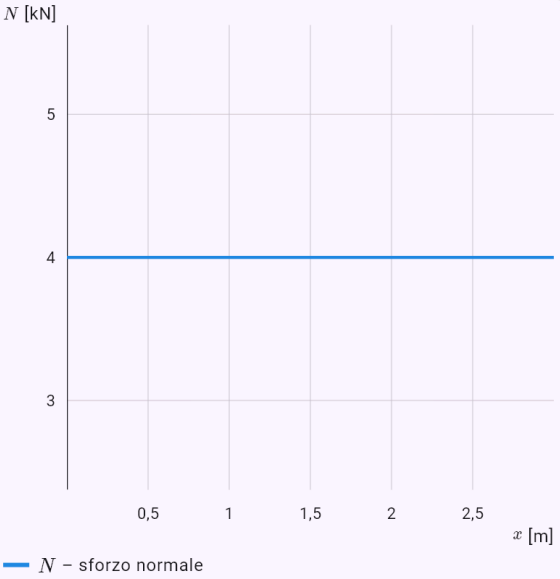
$$A_x = -4\,\text{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\text{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

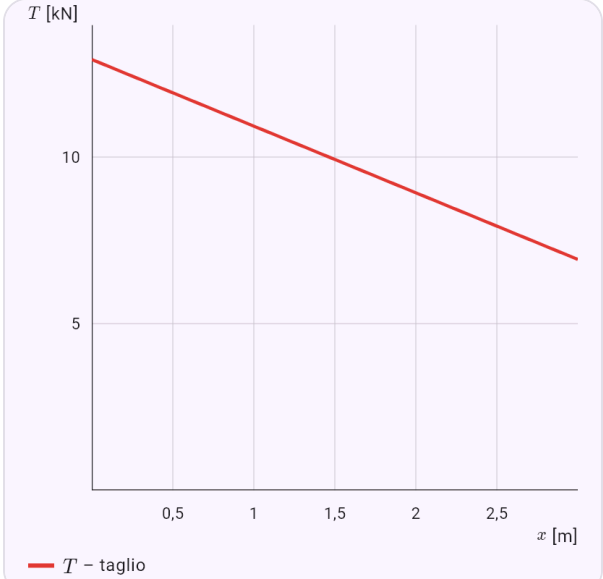
Passaggi

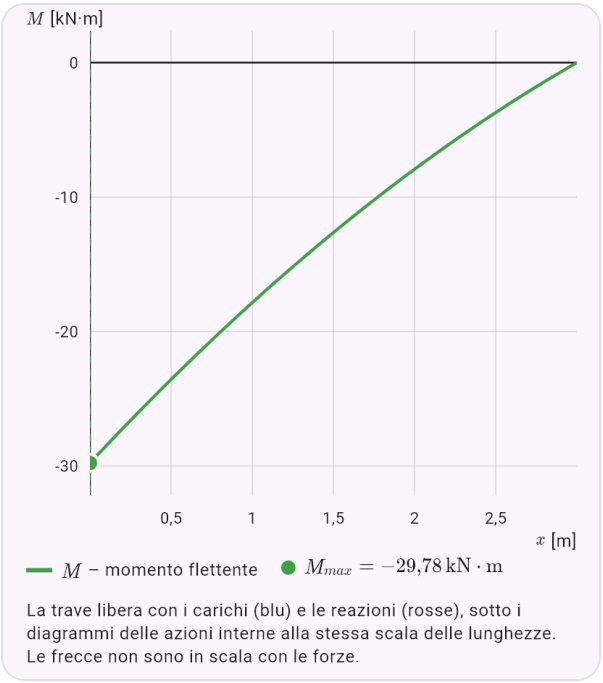
- Incognita R; dati
  $L = 3\,\text{m}, \quad F = 8\,\text{kN}, \quad x_F = 3\,\text{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- La trave sta sull'asse x da 0 a L. Una cerniera porta una forza orizzontale e una verticale, un carrello solo la forza perpendicolare al suo piano di scorrimento, un incastro anche un momento. Una forza forma con la trave l'angolo α (90° = verticalmente verso il basso), un momento è positivo in senso antiorario, un carico distribuito positivo verso il basso. Le cerniere interne formano una trave Gerber: il momento flettente in una cerniera è zero, il che dà un'equazione in più. I diagrammi di N, T e M si costruiscono tratto per tratto con il teorema di Schwedler. Equazione del modello:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- La risultante del carico distribuito (nel baricentro dell'area del carico):
  $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{m}$
- Le componenti di una forza inclinata:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\text{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\text{kN}$
- Le reazioni incognite: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Isostatico: tante incognite quante equazioni indipendenti (n incognite, e equazioni, h il rango):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Somma delle forze orizzontali:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\text{kN}$
- Somma delle forze verticali
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

Grafico









La trave libera con i carichi (blu) e le reazioni (rosse), sotto i diagrammi delle azioni interne alla stessa scala delle lunghezze. Le frecce non sono in scala con le forze.

Una trave Gerber su tre appoggi con una cerniera: il calcolo parte dalla parte oltre la cerniera.

Input: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

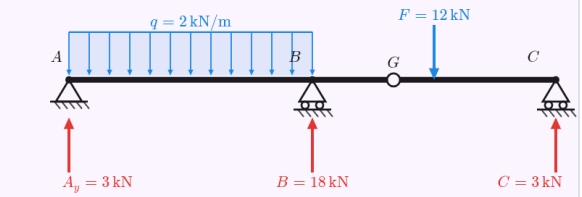
Risultato

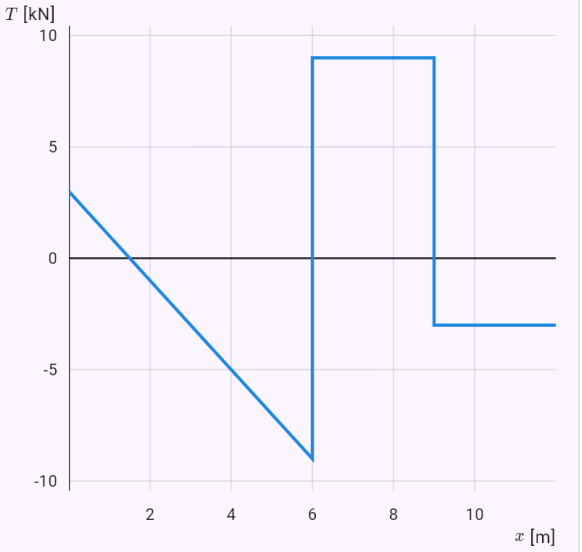
$$M_{max} \approx -18\,\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$x \approx 6\,\text{m}$$

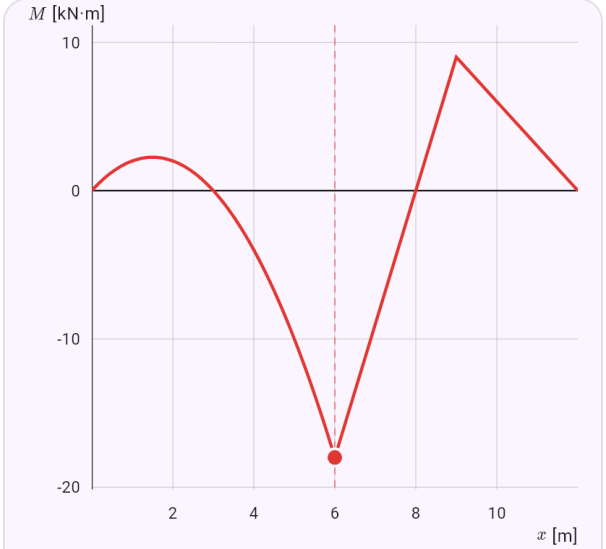
Passaggi

- Incognita M_{max}; dati
  $L = 12\,\text{m}, \quad x_B = 6\,\text{m}, \quad x_s = 12\,\text{m}, \quad x_G = 8\,\text{m}, \quad F$
- La trave sta sull'asse x da 0 a L. Una cerniera porta una forza orizzontale e una verticale, un carrello solo la forza perpendicolare al suo piano di scorrimento, un incastro anche un momento. Una forza forma con la trave l'angolo α (90° = verticalmente verso il basso), un momento è positivo in senso antiorario, un carico distribuito positivo verso il basso. Le cerniere interne formano una trave Gerber: il momento flettente in una cerniera è zero, il che dà un'equazione in più. I diagrammi di N, T e M si costruiscono tratto per tratto con il teorema di Schwedler. Equazione del modello:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- La risultante del carico distribuito (nel baricentro dell'area del carico):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{6}{2} = 3\,\text{m}$
- Le reazioni incognite: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Isostatico: tante incognite quante equazioni indipendenti (n incognite, e equazioni, h il rango):
  $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Il momento della parte a destra della cerniera rispetto alla cerniera è zero:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\text{kN}$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Il momento della parte a sinistra della cerniera rispetto alla cerniera è zero
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Somma delle forze orizzontali:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\text{kN}$
- Una verifica con un'equazione non usata:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Teorema di Schwedler: la derivata del momento flettente è il taglio e la derivata del taglio è meno il carico distribuito. Dove T è zero, M ha un estremo.
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m): $x \in [0;\ 6]: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m): $x \in [6;\ 9]: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Le azioni interne nel tratto (x in m, forze in kN, momenti in kN·m): $x \in [9;\ 12]: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Il momento flettente massimo è dove il taglio fa un salto:
  $M_{max} = M(6) = -18\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Un momento flettente positivo inflette la trave verso il basso (le fibre inferiori tese), uno negativo verso l'alto, tipicamente sopra un appoggio o in un incastro.

Grafico







La trave libera con i carichi (blu) e le reazioni (rosse), sotto i diagrammi delle azioni interne alla stessa scala delle lunghezze. Le frecce non sono in scala con le forze.

Una scala appoggiata a un muro liscio con il peso della scala e di una persona: le reazioni a terra e sul muro.

Input: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

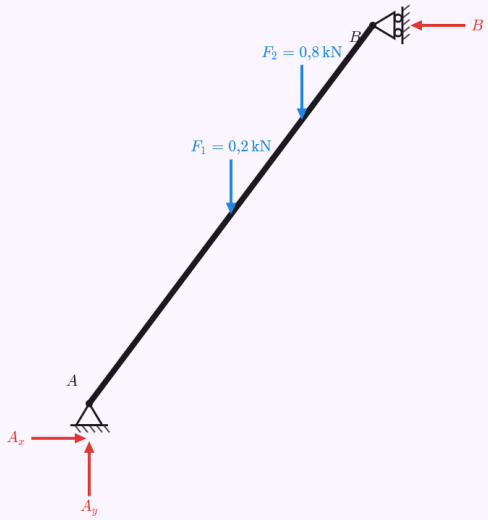
Risultato

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Passaggi

- Incognita R; dati
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Un corpo nel piano dato dai punti dei vincoli e dai punti di applicazione delle forze (x verso destra, y verso l'alto). Per un carrello l'angolo β dà la direzione della reazione: 90° dal basso, 0° da una parete a sinistra verso destra, 180° da una parete a destra verso sinistra. Esempio: una scala appoggiata a una parete liscia – il piede tenuto sul pavimento dall'attrito (una cerniera), la cima che scivola lungo la parete (un carrello). Equazione del modello:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Le reazioni incognite: $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostatico: tante incognite quante equazioni indipendenti (n incognite, e equazioni, h il rango):
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Somma delle forze orizzontali
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Somma dei momenti rispetto a un vincolo – un'equazione con una sola incognita
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Una verifica con un'equazione non usata:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Grafico



Il corpo libero: i carichi in blu, le reazioni vincolari in rosso. Le frecce non sono in scala con le forze. I valori delle reazioni sono nel risultato.

Un incastro con un carrello è una volta iperstatico.

Input: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

xF=2[m])

Risultato

$$s = n - h = 1$$

Passaggi

- Incognita R; dati: $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- La trave sta sull'asse x da 0 a L. Una cerniera porta una forza orizzontale e una verticale, un carrello solo la forza perpendicolare al suo piano di scorrimento, un incastro anche un momento. Una forza forma con la trave l'angolo α (90° = verticalmente verso il basso), un momento è positivo in senso antiorario, un carico distribuito positivo verso il basso. Le cerniere interne formano una trave Gerber: il momento flettente in una cerniera è zero, il che dà un'equazione in più. I diagrammi di N, T e M si costruiscono tratto per tratto con il teorema di Schwedler. Equazione del modello:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Le reazioni incognite: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Iperstatico: più incognite che equazioni indipendenti:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Le reazioni incognite sono più di quante ne diano le equazioni di equilibrio. Le equazioni mancanti vengono dalla deformazione (es. freccia nulla sopra un appoggio)

– l'app non risolve ancora travi iperstatiche. Il grado s dice quanti vincoli sono sovrabbondanti.

Grafico



La trave libera con i carichi (blu) e le reazioni (rosse), sotto i diagrammi delle azioni interne alla stessa scala delle lunghezze. Le frecce non sono in scala con le forze.

Una sezione a T: il baricentro, il momento d'inerzia e il modulo di resistenza.

Input: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm]; tf=20[mm];`

```
tw=20[mm])
```

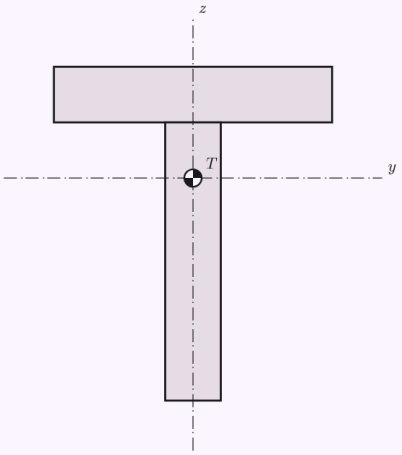
Risultato

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Passaggi

- Incognita W_y; dati
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Dividiamo la sezione in rettangoli e cerchi e sottraiamo i fori. Il baricentro è la media pesata dei baricentri delle parti, i momenti d'inerzia rispetto agli assi per esso vengono dal teorema di Huygens–Steiner. L'asse y è orizzontale, z verticale, quindi I_y governa la flessione nel piano verticale. Il momento e la distanza delle fibre estreme danno il modulo di resistenza W, per una sezione non simmetrica (L) anche gli assi principali. I raccordi dei profilati laminati si trascurano, quindi i valori differiscono leggermente dalle tabelle. Equazione del modello
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Una parte della sezione
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Una parte della sezione
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- L'area della sezione: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Il baricentro come media pesata dei baricentri delle parti
  $$y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $$I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $$I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$$
- I momenti d'inerzia dell'intera sezione
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- I moduli di resistenza (e = la distanza delle fibre estreme dal baricentro)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$$
- I raggi d'inerzia
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$$

Grafico



La sezione in scala reale con il baricentro T e gli assi y, z per esso; per una sezione non simmetrica anche gli assi principali 1, 2.

Un angolare a lati uguali L: il momento centrifugo e gli assi principali a 45°.

Input: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm]; t=10[mm])`

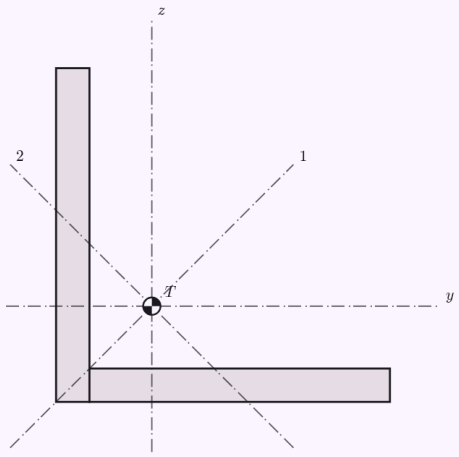
Risultato

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\text{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\text{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Passaggi

- Incognita I_1; dati:
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad t = 10\,\text{mm}$
- Dividiamo la sezione in rettangoli e cerchi e sottraiamo i fori. Il baricentro è la media pesata dei baricentri delle parti, i momenti d'inerzia rispetto agli assi per esso vengono dal teorema di Huygens–Steiner. L'asse y è orizzontale, z verticale, quindi I_y governa la flessione nel piano verticale. Il momento e la distanza delle fibre estreme danno il modulo di resistenza W, per una sezione non simmetrica (L) anche gli assi principali. I raccordi dei profilati laminati si trascurano, quindi i valori differiscono leggermente dalle tabelle. Equazione del modello
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Una parte della sezione
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\text{mm}, \quad z_1 =$$
- Una parte della sezione
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\text{mm}, \quad z_2 =$$
- L'area della sezione: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\text{mm}^2$
- Il baricentro come media pesata dei baricentri delle parti
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\text{mm}, \quad z_T =$$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\text{mm}^4,$$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\text{mm}^4,$$
- I momenti d'inerzia dell'intera sezione
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Il momento centrifugo
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\text{mm}^4$$
- I momenti d'inerzia principali
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- L'asse principale 1 ruotato dall'asse y
  $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- I moduli di resistenza (e = la distanza delle fibre estreme dal baricentro)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- I raggi d'inerzia
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}$$

Grafico



La sezione in scala reale con il baricentro T e gli assi y, z per esso; per una sezione non simmetrica anche gli assi principali 1, 2.

Una piastra con un foro circolare eccentrico: una sezione composta e il baricentro spostato.

Input: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm]; rh=100[mm];`

`ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])`

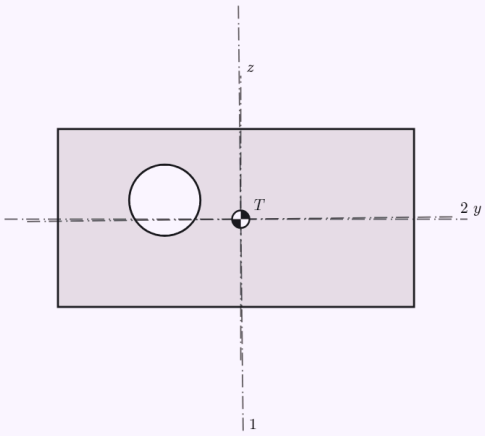
Risultato

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\text{mm}^4$$

Passaggi

- Incognita I_y; dati
  $b = 200\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad y = 0\,\text{mm}, \quad z = 0\,\text{mm}$
- Dividiamo la sezione in rettangoli e cerchi e sottraiamo i fori. Il baricentro è la media pesata dei baricentri delle parti, i momenti d'inerzia rispetto agli assi per esso vengono dal teorema di Huygens–Steiner. L'asse y è orizzontale, z verticale, quindi I_y governa la flessione nel piano verticale. Il momento e la distanza delle fibre estreme danno il modulo di resistenza W, per una sezione non simmetrica (L) anche gli assi principali. I raccordi dei profilati laminati si trascurano, quindi i valori differiscono leggermente dalle tabelle. Equazione del modello
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \sum$
- Una parte della sezione
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\text{mm},$
- Un foro (sottratto)
  $2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\text{mm},$
- L'area della sezione: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\text{mm}^2$
- Il baricentro come media pesata dei baricentri delle parti
  $y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\text{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Teorema di Huygens–Steiner: il momento proprio della parte + la sua area × il quadrato della distanza degli assi
  $I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\text{mm}^4,$
- I momenti d'inerzia dell'intera sezione
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Il momento centrifugo
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\text{mm}^4$
- I momenti d'inerzia principali
  $I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$
- L'asse principale 1 ruotato dall'asse y
  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$
- I moduli di resistenza (e = la distanza delle fibre estreme dal baricentro)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$
- I raggi d'inerzia
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\text{mm}$

Grafico



La sezione in scala reale con il baricentro T e gli assi y, z per esso; per una sezione non simmetrica anche gli assi principali 1, 2.

Una cisterna piena d'acqua a metà che frena a 5 m/s²: l'asse anteriore porta decine di per cento in più.

Input: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])

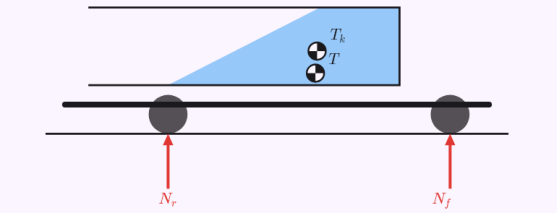
Risultato

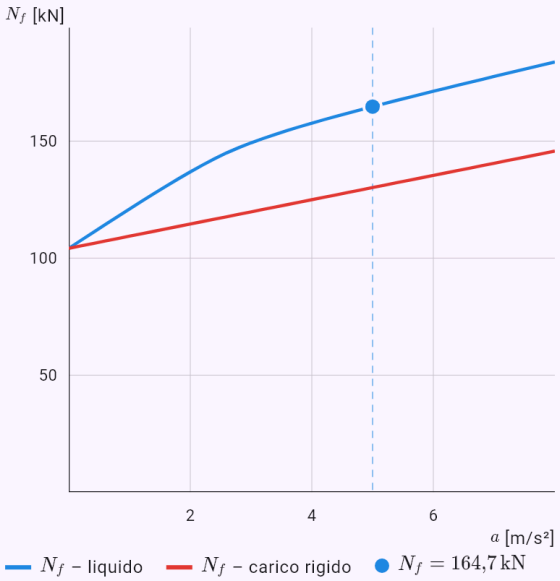
$$N_f \approx 164{,}7\,\text{kN}$$

Passaggi

- Incognita N_f; dati
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\text{m/s}^2, \quad \rho = 1000\,\text{kg/m}^3, \quad L_n = 8$
- Frenata con decelerazione a: il liquido si sposta in avanti, la sua superficie si inclina dell'angolo θ e il baricentro si sposta in avanti e verso l'alto. I carichi sugli assi sono le reazioni di una trave su due appoggi con la forza d'inerzia m·a nel baricentro. Equazione del modello:
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g}$
- Il volume del serbatoio e del liquido
  $V = 25{,}13\,\text{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\text{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- L'inclinazione della superficie – perpendicolare alla risultante della gravità e della forza d'inerzia
  $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Il baricentro del liquido si sposta in avanti e verso l'alto
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\text{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\text{m}, \quad \Delta x_k =$
- Il baricentro dell'intero veicolo
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\text{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\text{m}$
- Carichi sugli assi dai momenti rispetto all'asse posteriore (forza d'inerzia nel baricentro)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Asse anteriore da fermo e in movimento; con carico rigido
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\text{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\text{rigid}} = 130{,}2$
- Frequenza propria della prima onda (sciabordio)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\text{s}^{-1}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- Il modello quasi-statico vale per una frenata costante. Dopo un arresto brusco il liquido oscilla con periodo T e i suoi urti contro l'estremità della cisterna possono aumentare ancora per un attimo il carico; per questo le cisterne hanno paratie.

Grafico





Vista laterale con la superficie inclinata, il baricentro del liquido T_k, quello complessivo T e i carichi sugli assi; il grafico mostra il carico sull'asse anteriore in funzione della decelerazione per liquido e carico rigido.

La stessa cisterna in una curva di R = 60 m: la velocità critica con il liquido e con un carico rigido.

Input: model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m];

```
H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])
```

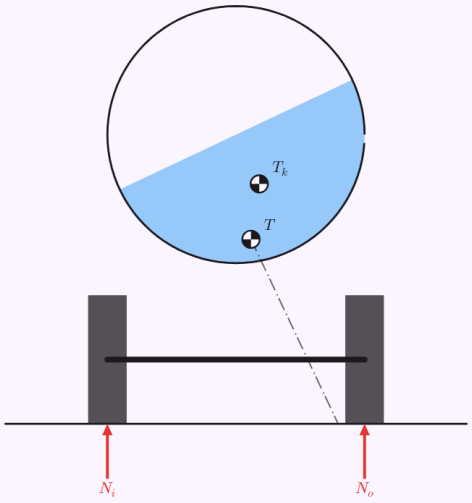
Risultato

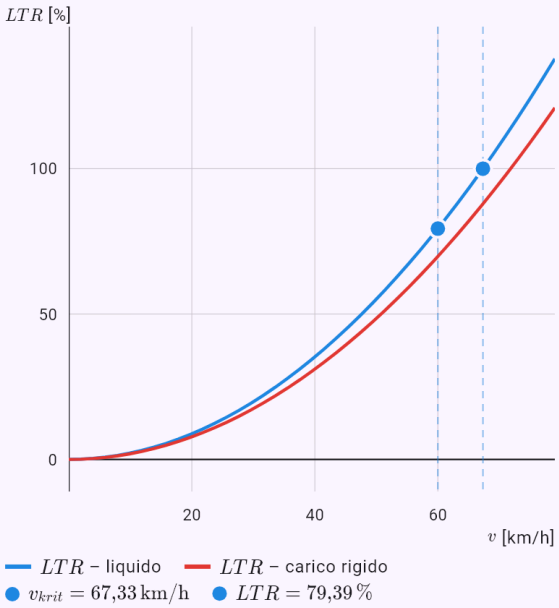
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Passaggi

- Incognita v_{krit}; dati
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Una curva di raggio R alla velocità v: l'accelerazione centripeta a = v²/R, il liquido si sposta verso l'esterno e con esso il baricentro. Il veicolo si ribalta quando la risultante della gravità e della forza centrifuga passa per le ruote esterne (LTR = 100 %). Il rollio della cassa sulle sospensioni (k_r gradi per g) sposta il baricentro ancora più fuori. Equazione del modello: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Il volume del serbatoio e del liquido
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Accelerazione centripeta in curva
  $$a_y = \frac{v^2}{R} = \frac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$$
- L'inclinazione della superficie – perpendicolare alla risultante della gravità e della forza d'inerzia
  $$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$$
- Baricentro del liquido nella sezione trasversale (y verso l'esterno della curva): $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Il rollio della carrozzeria sposta l'intero baricentro ancora più all'esterno
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Trasferimento di carico sulle ruote esterne
  $$LTR = \frac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \frac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$$
- Limite di ribaltamento: la risultante passa per le ruote esterne
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Carico rigido per confronto:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Frequenza propria della prima onda (sciabordio)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Le cisterne reali si ribaltano già a circa 0,35–0,45 g: oltre al rollio sulle sospensioni si deformano gli pneumatici e il liquido oscilla anche in curva. Il limite quasi-statico è una stima per eccesso.

Grafico





Vista posteriore in curva (esterno a destra) con la superficie inclinata, il baricentro e la risultante; il grafico mostra il trasferimento di carico sulle ruote esterne in funzione della velocità – al 100 % le ruote interne si sollevano.

Una mensola di 2 m con una forza di 10 kN: IPE 200 dalle tabelle, il tubo ottimale e un tubo di uniforme resistenza.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

Risultato

$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$

$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$

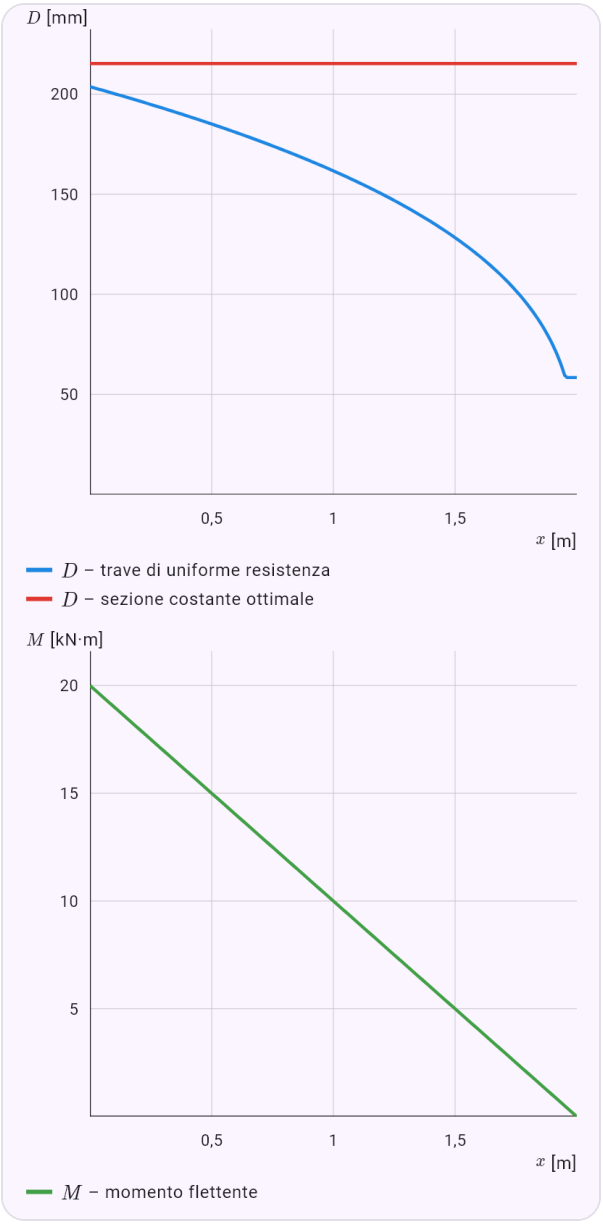
$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$

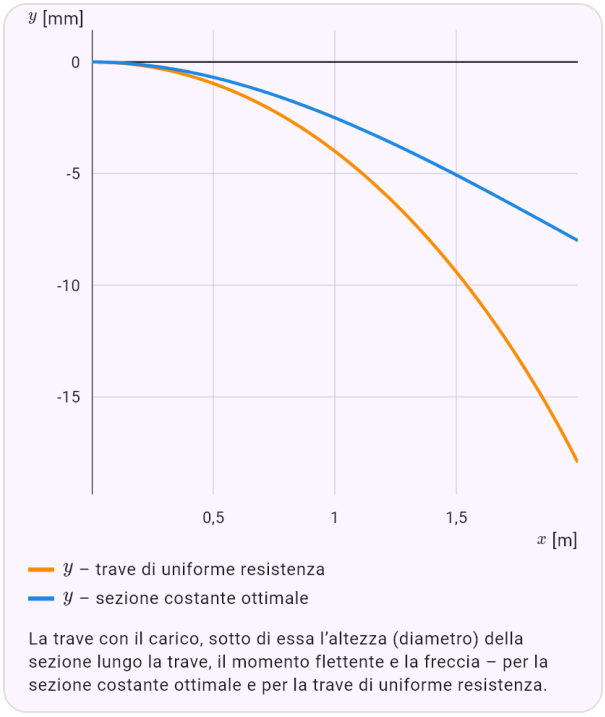
Passaggi

- Incognita m; dati
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Mensola di lunghezza L con una forza F all'estremità libera o un carico distribuito q su tutta la lunghezza. Il momento massimo è all'incastro. Equazione del modello
  $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \dfrac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$
- Momento flettente massimo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condizione di resistenza – modulo di resistenza minimo
  $W \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \dfrac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$
- Condizione di freccia (integrazione di E·I·y'' = −M) – momento d'inerzia minimo
  $y_{max} = \dfrac{FL^3}{3EI} \le \dfrac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$
- Il profilato adatto più leggero di ogni famiglia
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3,\ I = 1943\,\text{cm}^4,\ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Da tabella – il più leggero di tutti
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Una parete più sottile dà un'area minore a parità di W, quindi l'ottimo è al limite di snellezza: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 50$
- 2. Sezione costante ottimale – la dimensione minima che soddisfa entrambe le condizioni
  $D_\sigma = \sqrt[3]{\dfrac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\dfrac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$
- È attiva la condizione di freccia (la tensione risulta minore di quella ammissibile): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Area e massa della sezione ottimale:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Trave di uniforme resistenza – σ(x) = σ_amm ovunque, sezione minima all'estremità libera per il taglio
  $D(x) = \sqrt[3]{\dfrac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\dfrac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$
- Massa e freccia della trave di uniforme resistenza
  $m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$
- La trave di uniforme resistenza controlla solo la tensione, quindi è più deformabile e supera la freccia ammissibile. In pratica se ne aumenta la sezione o la si usa dove decide la resistenza.
- Masse delle varianti rispetto al profilato da tabella:
  $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$
- Il peso proprio della trave è trascurato; per travi lunghe e pesanti si aggiunge al carico distribuito.

Grafico







La trave con il carico, sotto di essa l'altezza (diametro) della sezione lungo la trave, il momento flettente e la freccia – per la sezione costante ottimale e per la trave di uniforme resistenza.

Un rettangolo di uniforme resistenza a larghezza costante: la sua altezza lungo la trave è una parabola, un terzo di materiale in meno.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Risultato

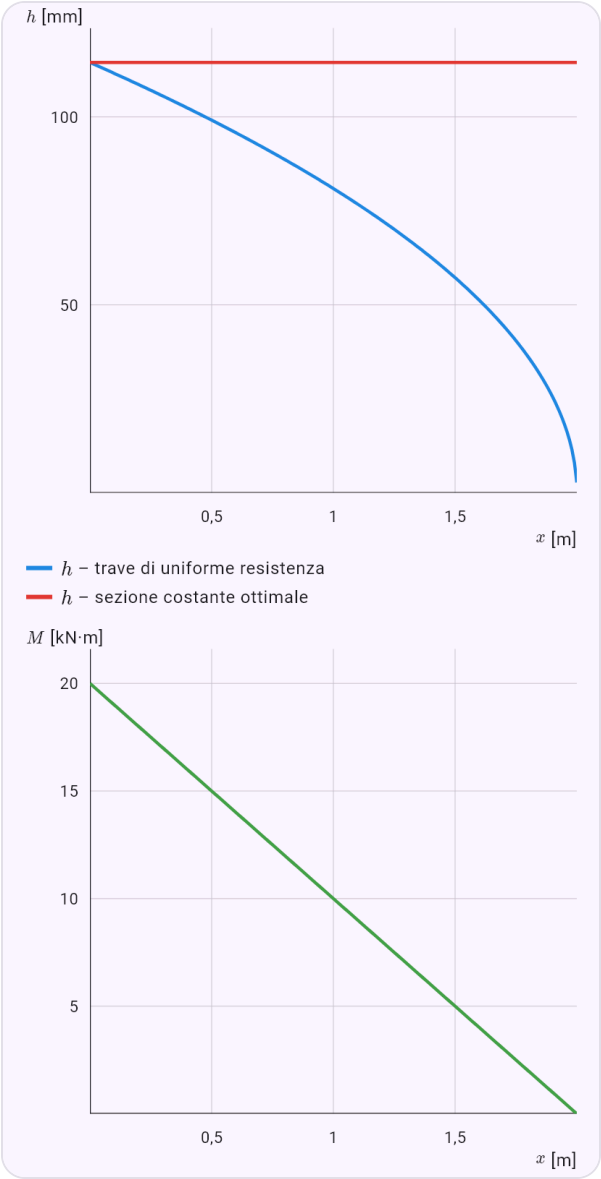
$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$
$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

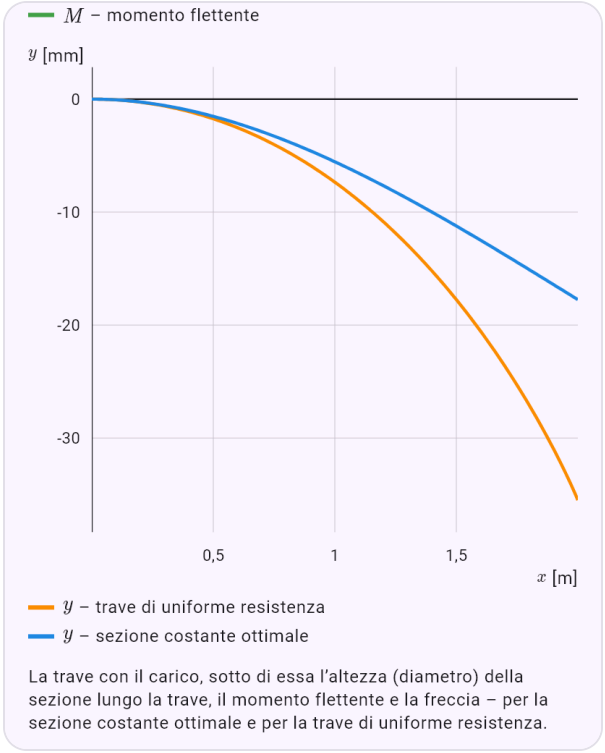
Passaggi

- Incognita m; dati
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Mensola di lunghezza L con una forza F all'estremità libera o un carico distribuito q su tutta la lunghezza. Il momento massimo è all'incastro. Equazione del modello
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento flettente massimo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condizione di resistenza – modulo di resistenza minimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condizione di freccia (integrazione di E·I·y'' = −M) – momento d'inerzia minimo
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- Il profilato adatto più leggero di ogni famiglia
  $\text{IPE}\,180: \ W = 146\,\text{cm}^3, \ I = 1317\,\text{cm}^4, \ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Da tabella – il più leggero di tutti
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Sezione costante ottimale – la dimensione minima che soddisfa entrambe le condizioni
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- È attiva la condizione di resistenza (la freccia risulta minore di quella ammissibile): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Area e massa della sezione ottimale:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Trave di uniforme resistenza – σ(x) = σ_amm ovunque, sezione minima all'estremità libera per il taglio
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Massa e freccia della trave di uniforme resistenza
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Masse delle varianti rispetto al profilato da tabella:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Il peso proprio della trave è trascurato; per travi lunghe e pesanti si aggiunge al carico distribuito.

Grafico







La trave con il carico, sotto di essa l'altezza (diametro) della sezione lungo la trave, il momento flettente e la freccia – per la sezione costante ottimale e per la trave di uniforme resistenza.

Una trave semplicemente appoggiata di 6 m con un carico distribuito: decide la freccia.

Input: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

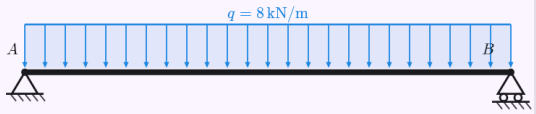
Risultato

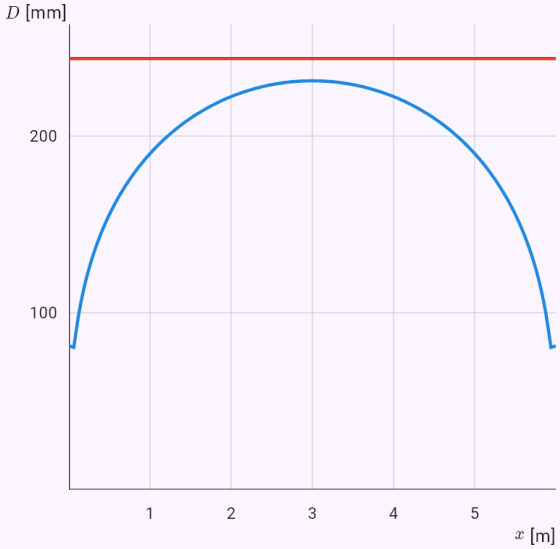
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Passaggi

- Incognita m; dati
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Trave semplicemente appoggiata di lunghezza L con una forza F in mezzeria o un carico distribuito q su tutta la lunghezza. Il momento massimo è in mezzeria.
  Equazione del modello
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento flettente massimo: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condizione di resistenza – modulo di resistenza minimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Condizione di freccia (integrazione di E·I·y'' = −M) – momento d'inerzia minimo
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- Il profilato adatto più leggero di ogni famiglia
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Da tabella – il più leggero di tutti
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Una parete più sottile dà un'area minore a parità di W, quindi l'ottimo è al limite di snellezza: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 40$
- 2. Sezione costante ottimale – la dimensione minima che soddisfa entrambe le condizioni
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- È attiva la condizione di freccia (la tensione risulta minore di quella ammissibile): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Area e massa della sezione ottimale:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Trave di uniforme resistenza – σ(x) = σ_amm ovunque, sezione minima all'estremità libera per il taglio
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Massa e freccia della trave di uniforme resistenza
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- La trave di uniforme resistenza controlla solo la tensione, quindi è più deformabile e supera la freccia ammissibile. In pratica se ne aumenta la sezione o la si usa dove decide la resistenza.
- Masse delle varianti rispetto al profilato da tabella:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$$
- Il peso proprio della trave è trascurato; per travi lunghe e pesanti si aggiunge al carico distribuito.

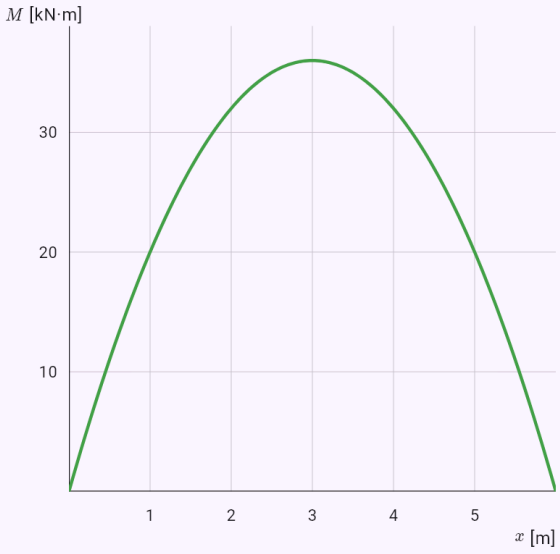
Grafico



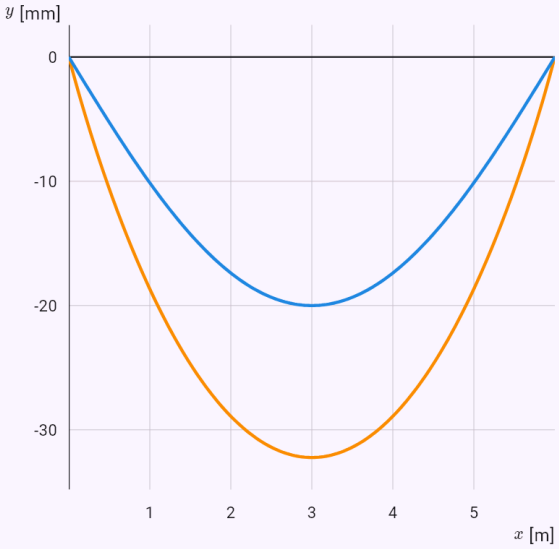


D – trave di uniforme resistenza

D – sezione costante ottimale



M – momento flettente



y – trave di uniforme resistenza

y – sezione costante ottimale

La trave con il carico, sotto di essa l'altezza (diametro) della sezione lungo la trave, il momento flettente e la freccia – per la sezione costante ottimale e per la trave di uniforme resistenza.

45. Astronomia e astrofisica

L’ambito Astronomia e astrofisica è nella sezione Applicazioni. Oltre alle leggi di Keplero, all’influenza reciproca dei corpi e al problema dei tre corpi (descritti nel capitolo Fisica), ha i moduli Buchi neri, Stelle di neutroni, Onde gravitazionali, Magnitudini e distanze, Radiazione delle stelle, Spostamento verso il rosso e legge di Hubble, ed Esopianeti. Le formule sono pronte e i passaggi mostrano la sostituzione. L’app non risolve le equazioni della relatività generale; usa solo i loro risultati per un buco nero non rotante.

Il modulo Buchi neri calcola il [[schwarzschildRadius|raggio di Schwarzschild]], la sfera fotonica e l’orbita stabile più interna, la «densità» di un buco nero con un grafico in funzione della massa su scala logaritmica, la velocità di fuga, la dilatazione gravitazionale del tempo e lo spostamento verso il rosso (anche per due orologi, come il GPS), la forza di marea, la temperatura di Hawking con il tempo di evaporazione e la massa di Sgr A* dall’orbita della stella S2. Il menu degli oggetti inserisce il Sole, la Terra, una stella di neutroni, un buco nero stellare, Sgr A* o M87*.

Le stelle di neutroni hanno la densità, la gravità in superficie, l’accelerazione della rotazione nel collasso per la conservazione del momento angolare e il periodo di rotazione più breve possibile. Le onde gravitazionali danno la frequenza dalla separazione di una coppia orbitante (e viceversa) e l’energia irradiata in una fusione come GW150914.

Le basi di un corso introduttivo di astronomia: l’equazione di Pogson, il modulo di distanza con la [[absoluteMagnitude|magnitudine assoluta]] e la parallasse; la legge di Wien e di Stefan-Boltzmann di un [[blackBody|corpo nero]], la costante solare e la temperatura di equilibrio di un pianeta; lo [[redshift|spostamento verso il rosso]] Doppler e la legge di Hubble con il tempo di Hubble; per gli esopianeti la profondità del transito, il metodo della velocità radiale e la [[habitableZone|zona abitabile]].

Le leggi di Keplero hanno guadagnato il trasferimento di Hohmann tra due orbite circolari (Δv e il tempo di volo), e l’influenza reciproca dei corpi il [[rocheLimit|limite di Roche]] e la sfera di Hill.

Esempi

In che pallina dovrebbe essere compressa la Terra per diventare un buco nero.

Input: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Risultato

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

Passaggi

- Incognita r_s; dati: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Convertiamo le unità:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Il raggio di Schwarzschild r_s = 2GM/c² è il raggio dell'orizzonte degli eventi. La Terra andrebbe compressa in una pallina di circa 18 mm di diametro, il Sole in una sfera di 3 km di raggio. La luce può orbitare sulla sfera dei fotoni a 1,5 r_s, e l'orbita stabile più interna della materia (ISCO) sta a 3 r_s. Equazione del modello
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Sostituiamo
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Per un buco nero non rotante. Attorno a uno rotante (di Kerr), l'ISCO e la sfera dei fotoni stanno più vicino.
- Convertiamo le unità: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

La «densità» del buco nero M87* – più rarefatta dell'aria.

Input: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

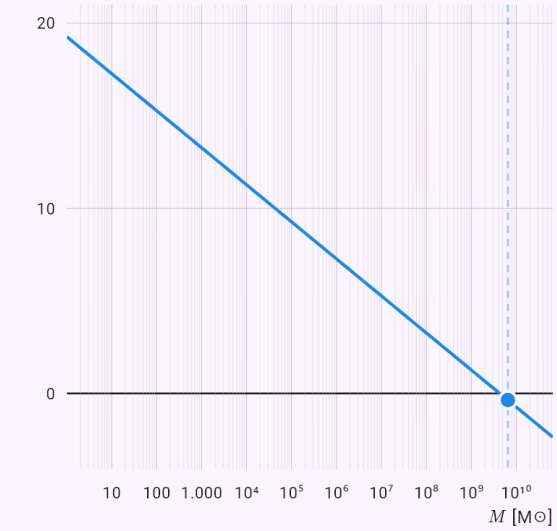
Risultato

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

Passaggi

- Incognita ρ; dati: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Convertiamo le unità:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- La "densità" media dentro l'orizzonte: la massa divisa per il volume di una sfera di raggio r_s. Decresce come 1/M². Un buco nero stellare è più denso di un nucleo atomico, uno da 10^8 masse solari ha la densità dell'acqua, e M87* è più rarefatto dell'aria. Il grafico mostra la massa in scala logaritmica. Equazione del modello:
  $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Sostituiamo
  $\rho = \dfrac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$
- Per confronto: un nucleo atomico, l'acqua e l'aria (circa 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Più rarefatto dell'aria – la "densità" è solo una media sul volume dell'orizzonte.

Grafico



L'asse orizzontale è logaritmico – ogni tacca vale dieci volte la precedente. Il punto è il valore dato o la risposta.

Quanto guadagnano ogni giorno gli orologi dei satelliti GPS a causa della gravità.

Input: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

Risultato

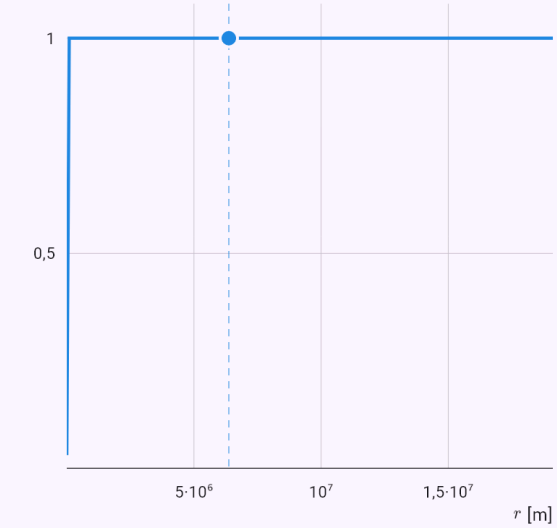
$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Passaggi

- Incognita Δt; dati
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Convertiamo le unità
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Gli orologi vicino a un corpo massiccio vanno più lenti: dτ/dt = √(1 − r_s/r). La luce da lì arriva spostata verso il rosso. Con una seconda distanza r_2 la modalità confronta due orologi. I satelliti GPS (r_2 = 26 571 km) guadagnano rispetto al suolo circa 45,7 µs al giorno. Equazione del modello
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Sostituiamo
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Ritardo per unità di tempo: $1 - \dfrac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Sostituiamo
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Confronto di due orologi a distanze diverse; una differenza positiva significa che l'orologio più vicino va più lento.

- Convertiamo le unità: $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La forza di marea su una persona all'orizzonte di un buco nero stellare.

Input: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

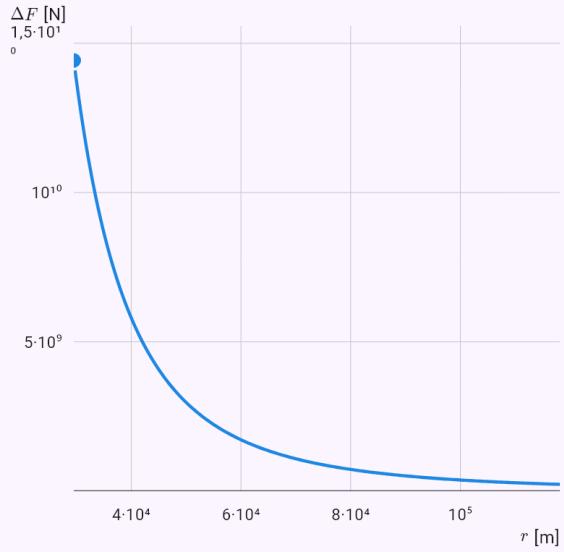
Risultato

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Passaggi

- Incognita ΔF_s; dati:
  $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Convertiamo le unità: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- La forza di marea è la differenza tra la gravità alla testa e ai piedi. Un buco nero stellare fa a pezzi una persona molto prima dell'orizzonte ("spaghettificazione"); all'orizzonte di un grande buco nero (Sgr A*) la forza è minima. Equazione del modello: $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- Sostituiamo
  $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- Ricaviamo l'incognita: $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Sostituiamo
  $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- In multipli del peso del corpo: $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- La forza di marea è molto più di quanto un corpo possa sopportare – "spaghettificazione".

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La massa di Sgr A* dall'orbita della stella S2.

Input: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Risultato

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Passaggi

- Incognita M; dati: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{anno}$
- Convertiamo le unità
  $a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{anno} = 5{,}0$
- La stella S2 orbita attorno al centro della Galassia su un'ellisse con semiasse maggiore di circa 1 019 au in 16,05 anni. La terza legge di Keplero dà la massa di Sgr A*: circa 4 milioni di Soli in una regione più piccola del Sistema solare. Questa misura ha vinto il premio Nobel per la fisica 2020. Equazione del modello:
  $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Sostituiamo
  $M = \dfrac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$
- In masse solari: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Orizzonte di Sgr A*
  $r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \dfrac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Il premio Nobel per la fisica 2020 (Genzel, Ghez) per la scoperta di un oggetto compatto supermassiccio al centro della Galassia.
- Convertiamo le unità:
  $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

Il periodo di rotazione del nucleo dopo il collasso in una stella di neutroni.

Input: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Risultato

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\text{ms}$$

Passaggi

- Incognita T_2; dati:
  $T_1 = 25{,}4\,\text{g}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km}, \quad R_2 = 12\,\text{km}$
- Convertiamo le unità
  $T_1 = 25{,}4\,\text{g} = 2\,195\,000\,\text{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km} = 6{,}96 \cdot$
- Conservazione del momento angolare: quando il nucleo si contrae ruota più in fretta, e il periodo cala con il quadrato del raggio (come una pattinatrice che stringe le braccia). Così nascono le pulsar con periodi da millisecondi a secondi. Equazione del modello
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- La stella è considerata una sfera uniforme che non perde massa.
- Sostituiamo
  $T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$
- Quante volte più veloce ruota:
  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Le pulsar reali ruotano più lentamente (da millisecondi a secondi): prima del collasso il nucleo ruota più piano, e l'involucro espulso porta via momento angolare.
- Convertiamo le unità: $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}6524\,\text{ms}$

L'energia irradiata come onde gravitazionali nella fusione GW150914.

Input: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Risultato

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\text{J}$$

Passaggi

- Incognita E; dati:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Convertiamo le unità
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\text{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- La fusione produce un buco nero più leggero dei due insieme. La differenza di massa è portata via dalle onde gravitazionali come energia E = Δm·c². Equazione del modello: $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Sostituiamo
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Frazione della massa irraggiata:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- Sostituiamo
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\text{J}$
- A confronto con l'intera vita del Sole:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\text{anno}} \approx 4438$
- LIGO ha captato le onde di GW150914 da 1,3 miliardi di anni luce; hanno spostato i suoi specchi di un millesimo del diametro di un protone.

La distanza di Sirio dal modulo di distanza.

Input: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod;`

`star=sirius)`

Risultato

$$d \approx 2{,}655\ \text{pc}$$

Passaggi

- Incognita d; dati: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- La magnitudine assoluta M è quella che la stella avrebbe da 10 pc. Il modulo di distanza m − M dà la distanza quando si conosce la vera luminosità della stella (cefeidi, supernove di tipo Ia). Equazione del modello: $m - M = 5 \log \dfrac{d}{10\ \text{pc}}$
- Ricaviamo l'incognita: $d = 10\ \text{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Sostituiamo: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \text{pc}$
- In anni luce: $d \approx 8{,}658\ \text{a.l.}$
- L'assorbimento della luce da parte della polvere interstellare è trascurato; con esso una stella sembra più lontana.

La lunghezza d'onda del massimo della radiazione del Sole.

Input: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

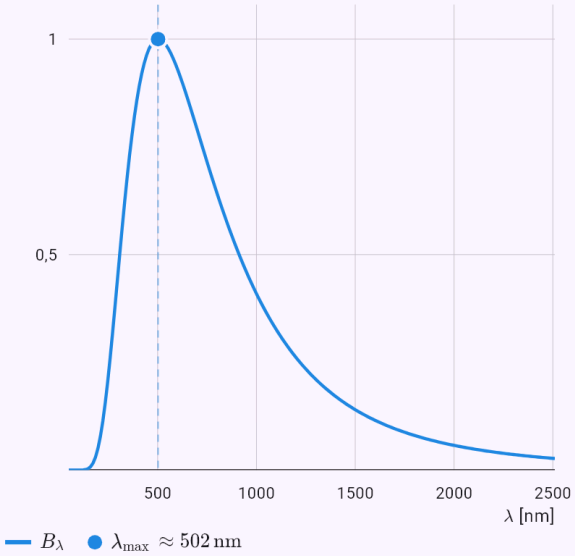
Risultato

$$\lambda_{\max} \approx 502\ \text{nm}$$

Passaggi

- Incognita $\lambda_{\max}$; dati: $T = 5772\ \text{K}$
- La legge dello spostamento di Wien: la lunghezza d'onda a cui un corpo irraggia di più è inversamente proporzionale alla sua temperatura. Il Sole ha il massimo nel verde (circa 500 nm), la fredda Betelgeuse nell'infrarosso, la calda Vega nel blu. Equazione del modello: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$
- Costante di Wien in nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\ \text{nm} \cdot \text{K}$
- Sostituiamo: $\lambda_{\max} = \dfrac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\ \text{nm}$
- Il massimo è nella luce visibile.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La temperatura di equilibrio della Terra senza effetto serra.

Input: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium;`

`planet=earth)`

Risultato

$$T_{\text{eq}} \approx 254\,\text{K}$$

Passaggi

- Incognita T_{eq}; dati: $L = 1\,L_{\odot}, \quad a = 1\,\text{au}, \quad A = 0{,}306$
- Convertiamo le unità
  $L = 1\,L_{\odot} = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\text{W}, \quad a = 1\,\text{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- La costante solare S è la potenza che cade su 1 m² alla distanza a dalla stella. Un pianeta assorbe S(1 − A) sulla sua sezione πR² e irraggia σT⁴ da tutta la superficie 4πR². L'equilibrio dà la sua temperatura senza l'effetto serra. Equazione del modello:
  $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eq}}^4$
- Sostituiamo
  $S = \dfrac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\text{W/m}^2$
- Ricaviamo l'incognita: $T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Sostituiamo
  $T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\text{K}$
- Senza effetto serra. La temperatura media reale della Terra è più alta: $T_{\oplus} \approx 288\,\text{K}$

Il tempo di Hubble come stima dell’età dell’universo.

Input: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Risultato

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$$

Passaggi

- Incognita t_H; dati: $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$
- La legge di Hubble v = H_0·d. Il reciproco della costante di Hubble (il tempo di Hubble) stima l’età dell’universo in circa 14 miliardi di anni; l’età esatta di 13,8 miliardi di anni viene da un modello dell’espansione. Equazione del modello: $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Costante di Hubble in s^{-1}
  $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086\cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Sostituiamo: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269\cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- In miliardi di anni: $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$
- Il tempo di Hubble è solo una stima dell’età; l’espansione ha rallentato e ora accelera.
- Convertiamo le unità: $t_H \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{Ga}$

La profondità del transito della Terra davanti al Sole.

Input: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit; exo=earth)`

Risultato

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\mathrm{ppm}$$

Passaggi

- Incognita $\dfrac{\Delta F}{F}$; dati: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Convertiamo le unità:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\mathrm{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\mathrm{km}$
- Quando un pianeta passa davanti alla sua stella, ne copre parte del disco e la luminosità cala del rapporto delle aree (R_p/R_*)². Giove attenuerebbe il Sole dell’1 %, la Terra solo di 84 milionesimi (ppm). Equazione del modello: $\dfrac{\Delta F}{F} = \dfrac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\dfrac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Sostituiamo: $\dfrac{\Delta F}{F} = \left(\dfrac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386\cdot 10^{-5}$
- In milionesimi (ppm): $\dfrac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\mathrm{ppm}$
- Un transito si vede solo quando guardiamo l’orbita del pianeta quasi di taglio.
- Convertiamo le unità: $\dfrac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386\cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\mathrm{ppm}$

Il tempo di un trasferimento di Hohmann dalla Terra a Marte.

Input: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann; central=sun)`

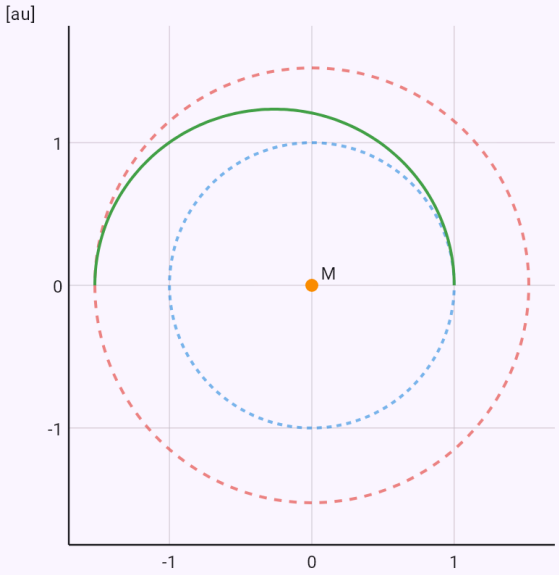
Risultato

$$t \approx 258{,}9\ \mathrm{g}$$

Passaggi

- Incognita t; dati
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\ \mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\ \mathrm{au}$
- Convertiamo le unità
  $r_1 = 1\ \mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\ \mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- Un'orbita di trasferimento di Hohmann è mezza ellisse tangente sia all'orbita circolare iniziale sia a quella di arrivo. Due accensioni (Δv) spostano il veicolo dall'una all'altra con il minimo carburante. Un volo dalla Terra a Marte così dura circa 259 giorni. Equazione del modello
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Sostituiamo
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$
- Sostituiamo
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\ \mathrm{s}$
- In giorni: $t \approx 258{,}9\ \mathrm{g}$
- Verso l'esterno: si accelera nel verso del moto, poi si accelera di nuovo sull'orbita di arrivo.
- Convertiamo le unità: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\ \mathrm{s} = 258{,}9\ \mathrm{g}$

Grafico



I corpi e i punti importanti in scala reale.

Il limite di Roche di Saturno per una luna ghiacciata – perché lì ci sono gli anelli.

Input: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Risultato

$$d_R \approx 129\,000\,\text{km}$$

Passaggi

- Incognita d_R; dati
  $R = 58\,230\,\text{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3, \quad \rho_m = 0{,}917\,\text{g/}$
- Convertiamo le unità
  $R = 58\,230\,\text{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\text{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3 =$
- Il limite di Roche: più vicino al pianeta, le forze di marea fanno a pezzi una luna tenuta insieme solo dalla propria gravità. Ecco perché gli anelli di Saturno stanno dentro il suo limite di Roche. Una luna rigida sopravvive più vicino di una fluida. Equazione del modello: $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\dfrac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Sostituiamo
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m}$
- In raggi del pianeta: $\dfrac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Dentro il limite di Roche non si forma una grande luna; ci sono invece degli anelli (Saturno).
- Convertiamo le unità: $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m} = 129\,000\,\text{km}$

46. Applicazioni dell’analisi complessa

Moduli in Applicazioni (gli ambiti Fisica, Elettrotecnica, Ingegneria, Geometria e Analisi matematica) usano le funzioni di una variabile complessa del capitolo precedente. Ciascuno ha passaggi con un potenziale complesso, una mappa o poli e un grafico nel piano di Gauss.

Flusso ideale e un profilo alare: il [[complexPotential|potenziale complesso]] w(z), le [[streamline|linee di corrente]] come curve di livello di Im w e la pressione dall’equazione di Bernoulli. Flusso attorno a un cilindro, anche con circolazione (punti di ristagno, l’effetto Magnus, portanza $L' = \rho U \Gamma$), il corpo di Rankine, il flusso in un angolo e un vortice. Il profilo di Žukovskij viene dalla mappa conforme $z = \zeta + b^2/\zeta$, la [[kuttaCondition|condizione di Kutta]] fissa la circolazione e il teorema di Kutta–Žukovskij la portanza; il grafico mostra le linee di corrente attorno al profilo e C_L in funzione dell’angolo di attacco.

Campi con mappe conformi: un cavo coassiale ($w = \ln z$ lo trasforma in un condensatore piano – capacità, induttanza e impedenza caratteristica), una linea bifilare con una mappa di Möbius, il potenziale in un cuneo tra lastre e una temperatura stazionaria in un semipiano; linee di campo ed equipotenziali nel grafico. La tensione attorno a un foro circolare in una piastra secondo Kirsch con i potenziali di Kolosov–Muskhelishvili dà una [[stressConcentration|concentrazione delle tensioni]] di 3 in trazione, 2 in trazione uguale nei due sensi e 4 a taglio. La carta di Mercatore è il logaritmo complesso della proiezione stereografica: la scala $1/\cos\varphi$, le indicatrici di Tissot e la [[loxodrome|lossodromia]] come retta contro l’ortodromia.

Controllo e segnali: la stabilità di un anello $K \cdot e^{(-s\tau)}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ con il [[nyquistCriterion|criterio di Nyquist]] (il principio dell’argomento, margini di guadagno e di fase, diagramma di Bode) e con il [[rootLocus|luogo delle radici]] (asintoti, punto di diramazione, guadagno critico). Il progetto di un filtro di [[butterworthFilter|Butterworth]] e di Čebyšëv da poli su una circonferenza e su un’ellisse, un filtro digitale del secondo ordine con poli e zeri nel piano z, la risposta impulsiva con i residui e la risposta in frequenza sulla circonferenza unitaria. La curva di risonanza di un oscillatore meccanico o di un circuito RLC dalle distanze di $i\omega$ dai poli, il [[qualityFactor|fattore di qualità]] e la banda. I circuiti in corrente alternata con i fasori sono nel capitolo Elettrotecnica.

Risposta e linee: l’oscillatore di Lorentz dà l’indice di rifrazione e l’assorbimento di un mezzo; poli nel semipiano inferiore significano causalità e le [[kramersKronig|relazioni di Kramers–Kronig]], che l’app verifica con un integrale numerico a valore principale. La larghezza naturale di una riga spettrale segue dalla trasformata di Fourier di un’onda smorzata. La [[smithChart|carta di Smith]]: il coefficiente di riflessione come trasformazione di Möbius, il rapporto di onda stazionaria, l’impedenza d’ingresso di una linea, un trasformatore a quarto d’onda e l’adattamento con stub.

Giochi su mathtrace.app alla voce “Prova tu”: gli insiemi di Mandelbrot e di Julia e i bacini di Newton – un’iterazione nel piano complesso che puoi spostare e ingrandire.

Esempi

Un cilindro rotante: la circolazione sposta i punti di ristagno sotto l'asse orizzontale.

Input: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Risultato

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

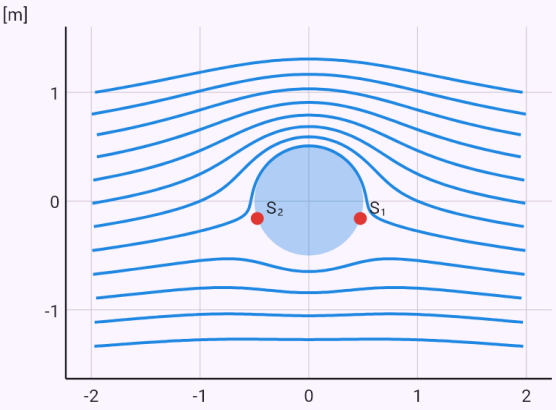
Passaggi

- Incognita θ_s; dati
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Flusso attorno a un cilindro: la corrente U(z + R²/z), eventualmente con un vortice di circuitazione Γ (un cilindro rotante). Sulla superficie la velocità è 2U·sin θ, ai lati il doppio di quella della corrente. La circuitazione sposta i punti di ristagno verso il basso e crea portanza per il teorema di Kutta–Žukovskij, L' = ρUΓ per metro di lunghezza. Equazione del modello:
  $w(z) = U\left(z + \dfrac{R^2}{z}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- La velocità coniugata è la derivata del potenziale
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \dfrac{R^2}{z^2}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi z}$
- Sulla superficie del cilindro la velocità è tangente
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Velocità massima sulla superficie:
  $v_{max} = 2U + \dfrac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Punti di ristagno (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\dfrac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Coefficiente di pressione dall'equazione di Bernoulli
  $c_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \dfrac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Portanza per metro di lunghezza (teorema di Kutta–Žukovskij): $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Un cilindro o una palla rotante con circuitazione riceve una portanza perpendicolare alla corrente – l'effetto Magnus che fa curvare un tiro a effetto. Le navi di Flettner lo usano per la propulsione.

Grafico

Linee di corrente | Grafico



Le linee continue sono linee di corrente, quelle tratteggiate equipotenziali (solo senza circuitazione). Dove le linee di corrente sono più fitte, il fluido scorre più veloce.

Un profilo di Žukovskij al 12 % con curvatura del 2 % a un angolo di attacco di 4°.

Input: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m]; tc=12[pct];`

```
fc=2[pct]; aoa=4[deg])
```

Risultato

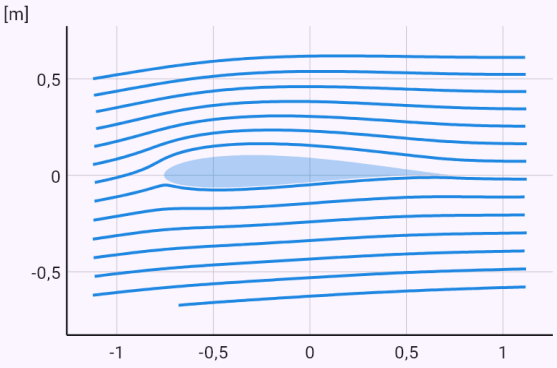
$$C_L \approx 0{,}7243$$

Passaggi

- Incognita C_L; dati
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Il profilo di Žukovskij nasce dalla trasformazione conforme z = ζ + b²/ζ di una circonferenza passante per il punto ζ = b. Spostare il centro a sinistra dà spessore, spostarlo in alto dà curvatura. Il flusso attorno alla circonferenza si trasferisce al profilo, la circuitazione è fissata dalla condizione di Kutta (il flusso lascia dolcemente il bordo d'uscita aguzzo) e la portanza dal teorema di Kutta–Žukovskij. Ne risulta il noto C_L ≈ 2π(α + β), come per un profilo sottile. Le prestazioni di un intero aereo sono nel modulo Aereo. Equazione del modello
  $z = \zeta + \dfrac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}$
- La circonferenza nel piano ζ da cui nasce il profilo
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Circuitazione dalla condizione di Kutta al bordo d'uscita
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Portanza per metro di lunghezza (teorema di Kutta–Žukovskij): $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Coefficiente di portanza, tra parentesi la teoria del profilo sottile
  $C_L = \dfrac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \dfrac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$
- Fluido ideale: vale per piccoli angoli d'attacco senza distacco della vena (all'incirca fino a 10–15° per i profili comuni). Un'ala reale di apertura finita ha meno portanza per la resistenza indotta (il modulo Aereo).

Grafico

Linee di corrente | Grafico



Linee di corrente attorno al profilo in scala reale. Il bordo d'uscita è a destra – il flusso lo lascia dolcemente (condizione di Kutta); sopra il profilo le linee di corrente sono più fitte e la pressione più bassa.

Il corpo di Rankine – la larghezza lontano a valle è Q/U.

Input: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

Risultato

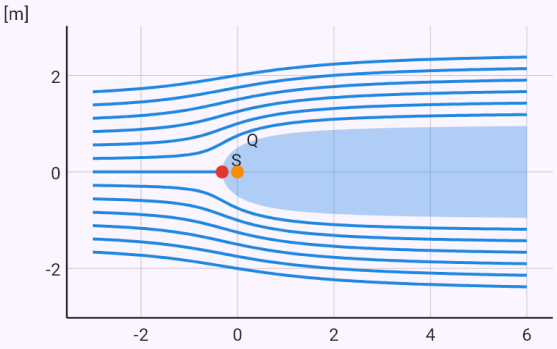
$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Passaggi

- Incognita d; dati: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Una sorgente di intensità Q (m²/s per metro di profondità) in una corrente di velocità U. La linea di corrente di separazione ψ = Q/2 avvolge il semicorpo di Rankine, a forma di fronte di una pila di ponte o di una prua. Davanti c'è un punto di ristagno; molto a valle il corpo è largo Q/U. Equazione del modello:
  $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- La velocità coniugata è la derivata del potenziale:
  $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Punto di ristagno davanti alla sorgente:
  $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Linea di corrente di separazione – il contorno del corpo:
  $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Larghezza del corpo molto a valle:
  $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Velocità massima sulla superficie del corpo (numericamente)
  $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$

- Il corpo di Rankine è una prima stima del flusso attorno a una parte anteriore arrotondata (una pila, uno scafo, un bordo d'attacco). In un fluido ideale dietro il corpo non c'è scia.

Grafico



Le linee continue sono linee di corrente, quelle tratteggiate equipotenziali (solo senza circuitazione). Dove le linee di corrente sono più fitte, il fluido scorre più veloce.

Il cavo coassiale RG-58: un’impedenza caratteristica di circa 50 Ω.

Input: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

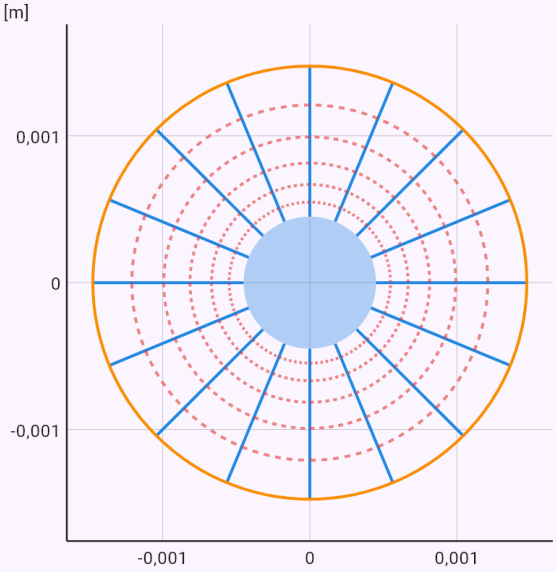
Risultato

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Passaggi

- Incognita Z_0; dati:
  $a = 0{,}45\,\text{mm}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Convertiamo le unità
  $a = 0{,}45\,\text{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm} = 0{,}0014$
- Un cavo coassiale: il logaritmo w = ln z srotola la corona a < |z| < b in un rettangolo largo 2π e alto ln(b/a). Il cavo diventa un condensatore piano e capacità, induttanza e impedenza caratteristica seguono subito. Equazione del modello: $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- L’immagine della corona nel piano w = ln z – un rettangolo
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Il potenziale è lineare in Re w
- Capacità come di un condensatore piano:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\text{pF/m}$
- Induttanza e impedenza caratteristica della linea
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\text{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Il cavo RG-58 (conduttore 0,9 mm, polietilene 2,95 mm) ha circa 50 Ω e 100 pF/m. L’impedenza caratteristica dipende solo dal rapporto b/a, quindi cavi sottili e spessi hanno ugualmente 50 o 75 Ω.

Grafico



Le linee continue sono linee di campo, quelle tratteggiate equipotenziali; si incrociano ad angolo retto. I conduttori sono pieni o spessi.

La capacità di una linea bifilare con una mappa di Möbius.

Input: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

Risultato

$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Passaggi

- Incognita C'; dati: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Convertiamo le unità:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Una linea bifilare (due fili paralleli): la trasformazione di Möbius w = (z − h)/(z + h) trasforma le circonferenze dei fili in circonferenze concentriche – un cavo coassiale. Le equipotenziali sono circonferenze di Apollonio, le linee di campo circonferenze per i punti ±h. Equazione del modello

  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$

- Le immagini dei fili sono circonferenze concentriche

  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$

- Capacità della linea bifilare

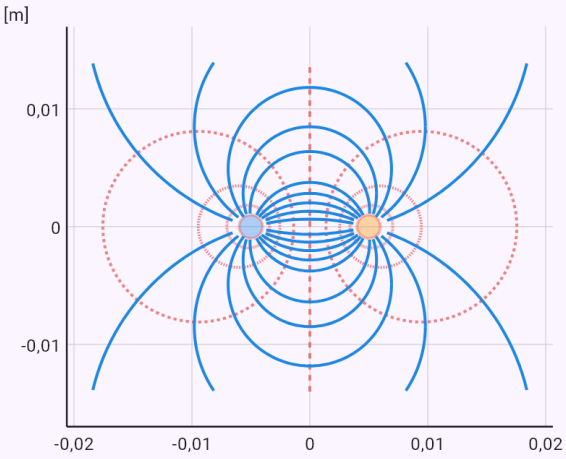
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

- Induttanza e impedenza caratteristica della linea

  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$

- La piattina bifilare per antenne aveva una volta 300 Ω, un doppino intrecciato nei cavi dati circa 100 Ω. La formula vale per fili lontani da altri conduttori.

Grafico



Le linee continue sono linee di campo, quelle tratteggiate equipotenziali; si incrociano ad angolo retto. I conduttori sono pieni o spessi.

Temperatura stazionaria in un semipiano con una parte calda e una fredda del bordo.

Input: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC]; x=0.5[m];`

y=1[m])

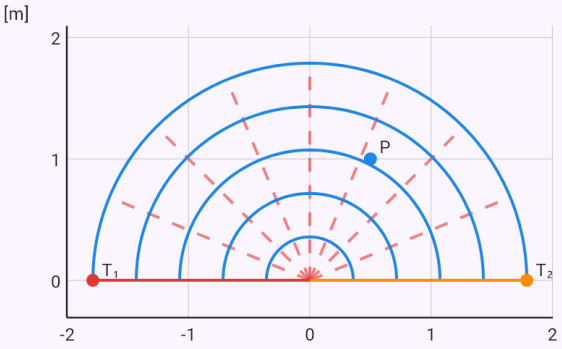
Risultato

$$T \approx 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Passaggi

- Incognita T; dati
  $T_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Conduzione stazionaria del calore nel semipiano y > 0, il cui bordo è a T_1 a sinistra e a T_2 a destra. La temperatura è armonica, come il potenziale in un cuneo di 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Le isoterme sono semirette dall'origine, il calore fluisce lungo semicirconferenze. Equazione del modello
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Una funzione armonica con i valori al bordo dati
- Angolo del punto: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^{\circ}$
- Temperatura nel punto: $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$
- Per esempio il terreno sotto il confine tra due superfici a temperature diverse. Nell'origine la temperatura al bordo salta da T_1 a T_2, quindi lì il flusso cresce illimitatamente.

Grafico



Le semirette tratteggiate sono isoterme, le semicirconferenze continue linee di flusso del calore.

Un foro circolare in una piastra in trazione: un fattore di concentrazione delle tensioni di 3.

Input: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

Risultato

$$K_t \approx 3$$

Passaggi

- Incognita K_t; dati: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Trazione σ_x in una direzione: al bordo del foro trasversalmente al carico 3σ_x, lungo il carico −σ_x (compressione). Equazione del modello

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$$

- Potenziali complessi di Kolosov–Muschelišvili per la trazione σ

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$

- Al bordo del foro la tensione radiale è nulla, la tensione circonferenziale

$$r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$

- Tensione circonferenziale attorno al foro (Kirsch)

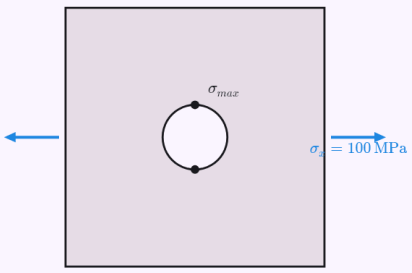
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

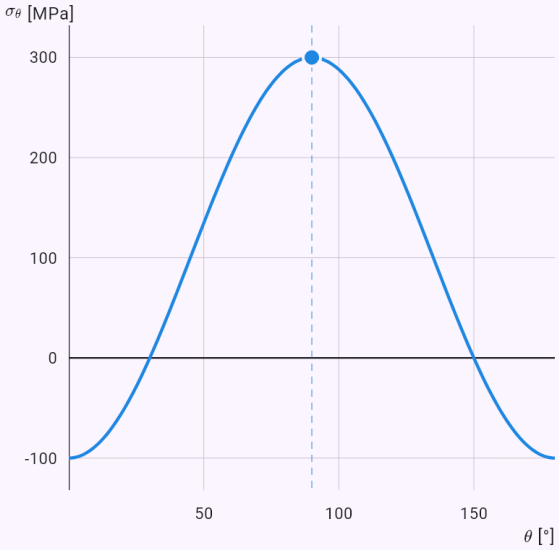
- Tensione massima e fattore di concentrazione

$$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$

- A due raggi dal centro la tensione è solo del 22 % sopra quella della lastra – la concentrazione è locale.
- Vale per un materiale elastico e un foro piccolo rispetto alla lastra (larghezza almeno cinque volte il diametro). In una striscia stretta K_t è minore ma la tensione nella sezione indebolita è maggiore.

Grafico





σ_θ – tensione circonferenziale al bordo del foro

$\sigma_{max} = 300\,\mathrm{MPa}$

La lastra con il foro e la tensione che la carica (le frecce non sono in scala). Il grafico mostra la tensione circonferenziale al bordo del foro in funzione dell'angolo θ dall'asse x; i punti sul foro sono dove la tensione è massima.

A 60° di latitudine le lunghezze sulla carta sono raddoppiate.

Input: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

Risultato

$$k \approx 2$$

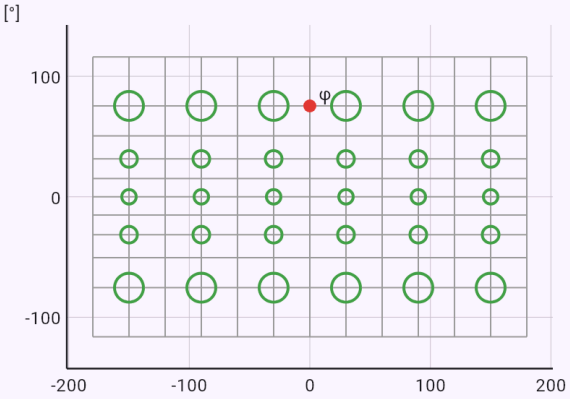
Passaggi

- Incognita k; dati: $\varphi = 60\,^\circ$
- La distanza del parallelo φ dall'equatore su una carta larga W e la scala k = 1/cos φ. I cerchi di Tissot nel grafico sono uguali sul globo. Equazione del modello

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- La carta è conforme, le lunghezze crescono ugualmente in tutte le direzioni: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Scala sul parallelo φ: $k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$
- Le aree crescono come k², quattro volte a 60°. I poli non sono sulla carta, stanno all'infinito.

Grafico



Meridiani ogni 30° e paralleli ogni 15°. I cerchi di Tissot sono uguali sul globo e sulla carta crescono come 1/cos φ – la forma si conserva, l'area no.

Praga – New York: l'ortodromia e la più lunga lossodromia.

Input: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg]; lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Risultato

$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Passaggi

- Incognita d; dati

$$\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$$

- La lossodromia tra due luoghi (latitudine e longitudine, ovest negativo): la sua rotta, la lunghezza e il confronto con l'ortodromia – la via più breve. Equazione del modello

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta = \mathrm{t}$$

- La carta è conforme, le lunghezze crescono ugualmente in tutte le direzioni: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Sulla carta la lossodromia è retta – la sua rotta dalle differenze delle coordinate

$$\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$$

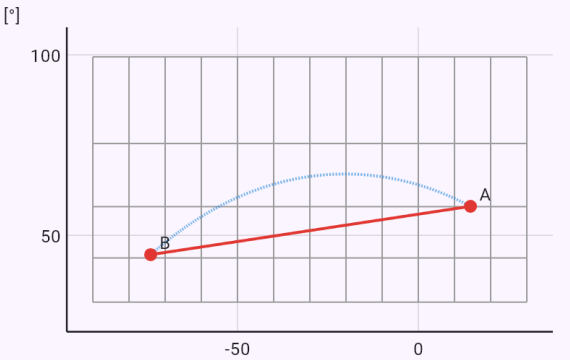
- Lunghezza della lossodromia: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Ortodromia (la via più breve sulla sfera)

$$d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$$

- La lossodromia è più lunga dell'ortodromia ma si può

percorrere con rotta costante. Gli aerei a lungo raggio volano lungo ortodromie e cambiano rotta continuamente.

Grafico



La linea continua è la lossodromia (rotta costante), la curva tratteggiata l'ortodromia (la via più breve), entrambe nella proiezione di Mercatore.

Il margine di fase di un anello con tre ritardi.

Input: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s]; T2=1[s]; T3=1[s])`

Risultato

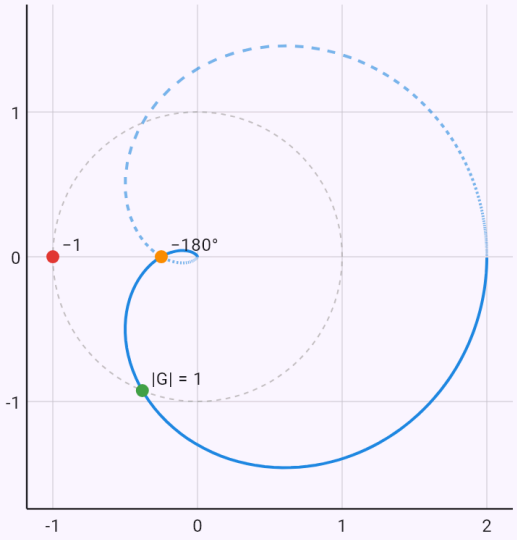
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Passaggi

- Incognita φ_m; dati:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Il criterio di Nyquist segue dal principio dell'argomento: il numero di volte in cui la curva G(iω) gira attorno a −1 è la differenza tra i poli instabili dell'anello chiuso e di quello aperto. Per un anello aperto stabile la curva non deve circondare −1. Quanto ne resta lontana lo mostrano il margine di guadagno e il margine di fase. Equazione del modello
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Principio dell'argomento: N giri attorno a −1, Z poli instabili dell'anello chiuso, P di quello aperto:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frequenza a cui la fase raggiunge −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Margine di guadagno e guadagno critico
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frequenza a cui |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Margine di fase: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- La curva non circonda −1 – l'anello chiuso è stabile:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Un requisito usuale: un margine di guadagno di almeno 6 dB e un margine di fase di 30–60°. Un tempo morto continua a sottrarre fase, per questo un processo con ritardo è più difficile da controllare.

Grafico

Diagramma di Nyquist | Grafico



La curva continua è G(iω) per ω > 0, quella tratteggiata la sua immagine speculare per ω negativi, la circonferenza tratteggiata |G| = 1. L'anello chiuso è stabile quando la curva non circonda −1.

Il luogo delle radici con un integratore: un guadagno critico di 3.

Input: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

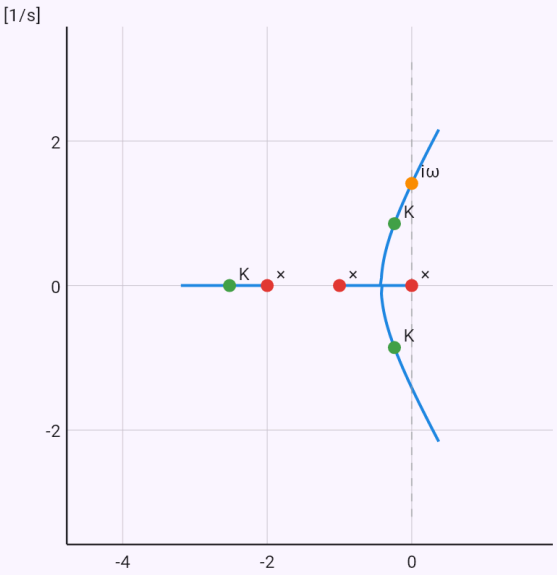
Risultato

$$K_{krit} \approx 3$$

Passaggi

- Incognita K_{krit}; dati: $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- Il luogo delle radici: come si spostano i poli dell'anello chiuso quando il guadagno K cresce da zero. I rami partono dai poli dell'anello aperto, si allontanano lungo asintoti, e sull'asse immaginario il sistema diventa instabile (il guadagno critico dalla condizione di Routh–Hurwitz). Equazione del modello:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Poli dell'anello aperto (gli inizi dei rami): $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Gli asintoti dei rami: baricentro e angoli
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Punto di distacco sull'asse reale:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Attraversamento dell'asse immaginario – il limite di stabilità
  $s = i\omega: \quad \operatorname{Im} D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Il guadagno dato è minore di quello critico – stabile:
  $K = 1 < K_{krit}$
- Poli dell'anello chiuso per il K dato:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Grafico



I rami mostrano i poli dell'anello chiuso per K crescente: partono dai poli dell'anello aperto (×), i punti K sono i poli per il guadagno dato, iω l'attraversamento dell'asse immaginario.

L'ordine del filtro di Čebyšëv necessario per 40 dB un'ottava più in alto.

Input: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB]; fs=2000[Hz];`

As=40[dB])

Risultato

$$n \approx 5$$

Passaggi

- Incognita n; dati

  $f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($

- Čebyšëv: un'ondulazione A_p nella banda passante, in cambio una transizione verso la banda oscura più ripida di un filtro di Butterworth dello stesso ordine. Equazione del modello

  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

- Parametro di ondulazione: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Ordine necessario (arrotondato per eccesso)

- Poli su una semiellisse

  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$$

- Poli (relativi a ω_c)

  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28$$

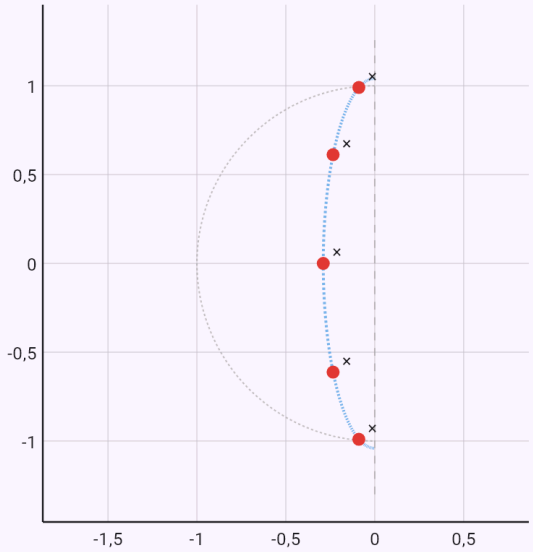
- Funzione di trasferimento – tutti i poli a sinistra, il filtro è stabile

  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$

- Čebyšëv paga la ripidità con l'ondulazione e un ritardo di gruppo peggiore – conserva meno bene la forma degli impulsi.

Grafico

Poli | Grafico



Poli nel piano complesso s (×); un sistema stabile li ha a sinistra dell'asse immaginario.

La risposta impulsiva di un filtro digitale con poli complessi con i residui.

Input: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Risultato

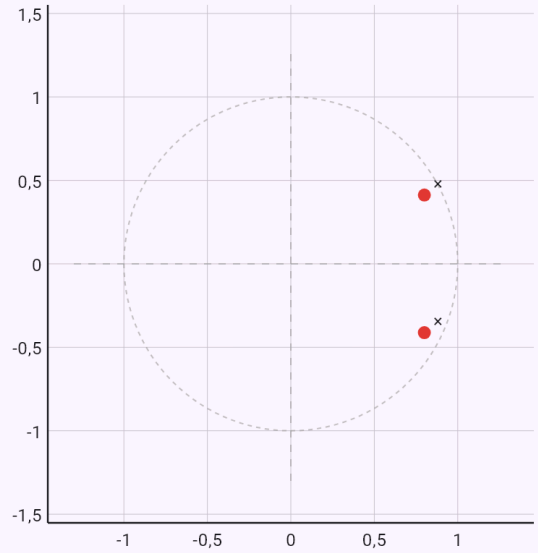
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Passaggi

- Incognita $h[n]$; dati:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Un filtro digitale calcola l'uscita dagli ultimi campioni: y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. La sua funzione di trasferimento è una funzione razionale H(z) (la trasformata Zeta). Il filtro è stabile quando tutti i poli stanno dentro la circonferenza unitaria. La risposta all'impulso si ottiene dall'antitrasformata Zeta con i residui: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n-1}]. La risposta in frequenza è H sulla circonferenza unitaria, z = e^(iΩ). Equazione del modello
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- L'equazione alle differenze del filtro:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Poli della funzione di trasferimento
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Poli dentro la circonferenza unitaria – il filtro è stabile:
  $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Antitrasformata Zeta con i residui:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Poli complessi coniugati danno un'oscillazione smorzata
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \imath$
- Valore della risposta: $h[10] = -0{,}6596$

Grafico

Poli e zeri | Grafico



I poli (×) e gli zeri (○) della funzione di trasferimento nel piano z con la circonferenza unitaria. Il filtro è stabile quando tutti i poli sono dentro.

Il fattore di qualità di un oscillatore dalla posizione dei suoi poli.

Input: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Risultato

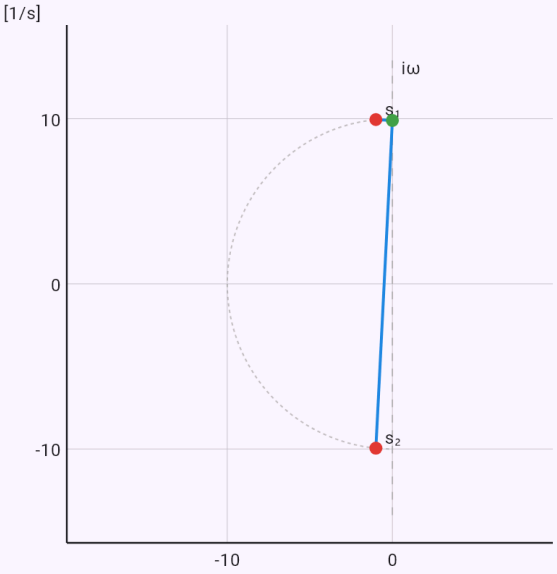
$$Q \approx 5$$

Passaggi

- Incognita Q; dati:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Una massa su una molla smorzata sollecitata da una forza armonica. X/X₀ è l'ampiezza rispetto alla deflessione statica sotto la stessa forza. Equazione del modello: $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Poli della funzione di trasferimento
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Ampiezza dalle distanze dai poli
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Picco della curva di risonanza
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Fattore di qualità e larghezza di banda
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Vicino alla risonanza la curva ha forma lorentziana
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Per questo le macchine non devono funzionare a lungo alla frequenza propria del loro telaio e i ponti si verificano per l'eccitazione da pedoni e vento.

Grafico

Poli | Grafico



Poli nel piano complesso s (×); un sistema stabile li ha a sinistra dell'asse immaginario.

L'indice di rifrazione sotto la risonanza di un oscillatore di Lorentz, verificato con la relazione di

Kramers–Kronig.

Input: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

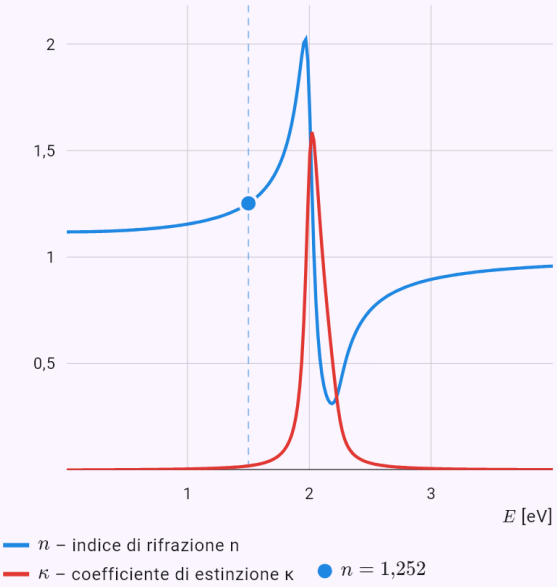
Risultato

$$n \approx 1{,}252$$

Passaggi

- Incognita n; dati
  $E_0 = 2\,\text{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\text{eV}, \quad E_p = 1\,\text{eV}, \quad E = 1{,}5\,\text{eV}$
- L'indice di rifrazione n e il coefficiente di estinzione κ da n + iκ = √(1 + χ). L'energia del fotone E, la risonanza E_0, la larghezza Γ e la forza dell'oscillatore E_p in elettronvolt.
  Equazione del modello: $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- I poli della suscettività stanno nel semipiano inferiore
  $E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4}} - \dfrac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$
- Causalità: la relazione di Kramers–Kronig
  $\text{Im}\, E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \dfrac{2}{\pi}\,\text{P}\int_0^\infty \dfrac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$
- Suscettività all'energia data: $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Verifica: χ' dall'integrale di χ" (numericamente) e direttamente: $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Indice di rifrazione complesso:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Lunghezza d'onda e coefficiente di assorbimento
  $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 826{,}6\,\text{nm}, \quad \alpha = \dfrac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\text{m}^{-1}$
- Sotto la risonanza l'indice di rifrazione cresce con l'energia – dispersione normale, con cui un prisma scompone la luce nei colori.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La larghezza naturale della riga D del sodio – circa 10 MHz.

Input: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

Risultato

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\text{MHz}$$

Passaggi

- Incognita $\Delta\nu$; dati: $\tau = 16\,\text{ns}$
- Un atomo eccitato emette un'onda che decade esponenzialmente con la vita media τ. La sua trasformata di Fourier (un residuo in un polo) dà la forma di riga lorentziana con larghezza totale Δν = 1/(2πτ) – la larghezza naturale di una riga spettrale. Equazione del modello: $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Trasformata di Fourier dell'onda che decade

$$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$

- Forma di riga lorentziana e la sua larghezza

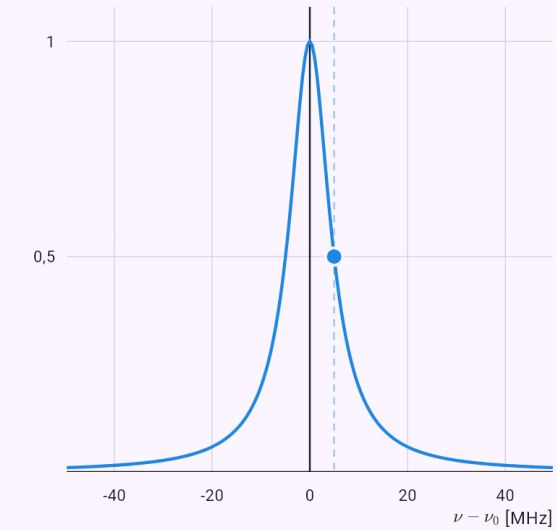
$$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$

- Larghezza naturale della riga:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\text{ns}} = 9{,}947\,\text{MHz}$$

- La riga D del sodio (τ ≈ 16 ns) ha una larghezza naturale di circa 10 MHz. Le righe reali in un gas sono ulteriormente allargate dall'effetto Doppler e dagli urti.

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L'adattamento di un carico di 100 Ω a una linea di 50 Ω con uno stub in cortocircuito.

Input: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

Risultato

$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

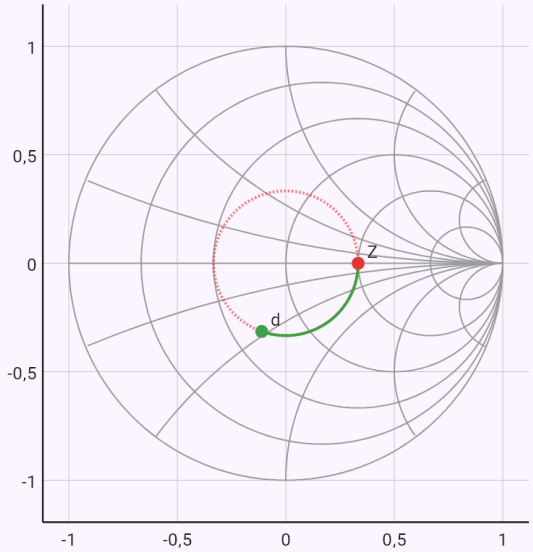
Passaggi

- Incognita d; dati
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Il coefficiente di riflessione Γ = (Z − Z_0)/(Z + Z_0) su una linea di impedenza caratteristica Z_0 è una trasformazione di Möbius. Trasforma il semipiano destro delle impedenze nel disco unitario – la carta di Smith. Muoversi lungo la linea verso il generatore è una rotazione in senso orario lungo la circonferenza |Γ| = cost., mezza lunghezza d'onda è un giro completo. Da qui il rapporto d'onda stazionaria, l'impedenza d'ingresso di una linea, il trasformatore a quarto d'onda e l'adattamento con stub. Equazione del modello
  $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{z-1}{z+1}, \quad z = \dfrac{Z_L}{Z_0}$
- Impedenza normalizzata del carico: $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Coefficiente di riflessione:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Rapporto d'onda stazionaria e perdita di ritorno
  $PSV = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$
- Lunghezza d'onda sulla linea: $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Ammettenza normalizzata del carico: $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Il punto in cui la parte reale dell'ammettenza vale 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Lunghezza dello stub in cortocircuito che annulla la suscettanza

$y_s = -j\,\mathrm{ctg}\,\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arcctg}\,(0{,}707$

- Uno stub è un pezzo di linea chiuso in cortocircuito, collegato in parallelo. Alla frequenza scelta la linea a monte non vede allora riflessioni.

Grafico



Circonferenze a resistenza costante e archi a reattanza costante (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). La circonferenza tratteggiata ha raggio |Γ| (ROS costante), l'arco colorato è lo spostamento lungo la linea verso il generatore.

Limiti noti

- Il flusso è ideale: niente viscosità, separazione o scia. Il modello non dà né la resistenza né il comportamento a grandi angoli di attacco.
- Le mappe conformi sono solo per le forme elencate; una forma generica di conduttori o di un profilo (la trasformazione di Schwarz–Christoffel) non è ancora supportata.
- La funzione di trasferimento dell'anello ha una forma fissa con tre ritardi e al massimo due integratori; zeri al numeratore e un anello aperto instabile non sono ancora supportati.
- Il filtro digitale è del secondo ordine, i filtri analogici solo passa-basso.