Mathtrace – manuale

III. Analisi matematica

Indice

III. Analisi matematica

25. Limiti

26. Derivate

27. Studio di funzione

28. Funzioni di più variabili
    - Una mappa dei teoremi integrali
    - Applicazioni fisiche dei teoremi integrali

29. Polinomio di Taylor

30. Integrali indefiniti
    - Integrali immediati e sostituzione
    - Integrazione per parti
    - Funzioni razionali
    - Funzioni goniometriche
    - Funzioni iperboliche
    - Radici

31. Integrali definiti e loro applicazioni
    - Integrale definito
    - Integrali impropri
    - Area sotto una curva e tra curve
    - Lunghezza d'arco
    - Volume di un solido di rotazione
    - Superficie di un solido di rotazione
    - Applicazioni con parametri
    - Baricentro
    - Curve parametriche e curve in coordinate polari
    - Curve date da un'equazione

32. Serie infinite
    - Serie numeriche

- Serie di potenze
- Serie di Taylor

33. Serie di Fourier

25. Limiti

Mathtrace calcola il limite di una funzione di una variabile in un punto, all'infinito e i limiti unilaterali, e procede come a scuola: prima prova a sostituire nella funzione. Il limite di una successione (n → ∞) funziona allo stesso modo – anche la forma 1^∞, o una somma di potenze con il termine a crescita più rapida raccolto.

Se la sostituzione dà una forma indeterminata (0/0, ∞/∞, …), sceglie una trasformazione secondo la forma della funzione – scomposizione e semplificazione, moltiplicazione per il coniugato, divisione per la potenza massima, un limite notevole (sin x / x) o la regola di de l'Hôpital, ripetutamente se serve. Una potenza con la variabile sia nella base sia nell'esponente (le forme 0^0, ∞^0, 1^∞) si scrive come e^(g·ln f) e il limite si calcola nell'esponente; dove la funzione è definita solo da un lato del punto (x^(ln(x+1)) solo per x > 0), calcola il limite da quel lato e lo dice. Il chip «Regola di de l'Hôpital» sceglie subito la regola; dove la sostituzione non dà una forma indeterminata, i passaggi spiegano perché non si può usare.

Altre lettere nel problema (k in (1 + k/x)^x) sono parametri – costanti con cui lavora in generale; quando il risultato vale solo per valori positivi del parametro, lo dice. La lettera può essere anche nel punto del limite: lim (x² − a²)/(x − a) per x → a = 2a. Un limite con un parametro non ha grafico.

Un limite infinito, o un limite che non esiste (i limiti unilaterali differiscono), non viene mai fatto passare per un numero – l'app lo dice a parole e mostra i limiti unilaterali. Il risultato ha un grafico della funzione vicino al punto con il valore del limite segnato.

Per il limite di una successione il grafico mostra i punti a_1, a_2, a_3, … invece di una curva continua.

Come inserirlo

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Un limite digitato: dopo la parola lim, tra parentesi la variabile, la freccia -> e il punto, poi la funzione.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Un limite all'infinito: l'infinito si scrive oo (meno infinito -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Un limite unilaterale: + (da destra) o − (da sinistra) dopo il punto.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Da una foto, o in LaTeX come lo riconosce la fotocamera.
`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	Il limite di una successione all'infinito.

Esempi

La forma indeterminata 0/0 – scomponiamo il numeratore e semplifichiamo.

Input: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

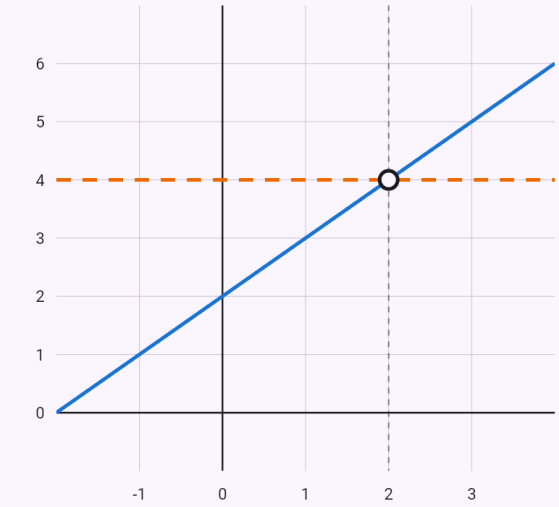
Risultato

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Passaggi

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Trasformiamo e semplifichiamo $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Sostituiamo: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Grafico



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$y = 4$

Limite:

○ $(2; 4)$

Punto vuoto – il valore a cui la funzione si avvicina (nel punto stesso può non essere definita); tratteggiato – il limite.

Un limite all'infinito – numeratore e denominatore divisi per la potenza massima.

Input: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Risultato

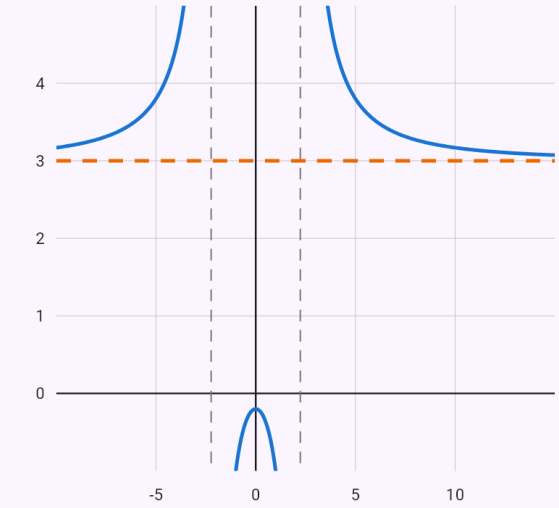
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Passaggi

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ – l'espressione va trasformata.
- Dividiamo numeratore e denominatore per x^2 – i termini come c/xⁿ tendono a zero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Grafico



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Punto vuoto – il valore a cui la funzione si avvicina (nel punto stesso può non essere definita); tratteggiato – il limite.

Il limite notevole sin x / x.

Input: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Risultato

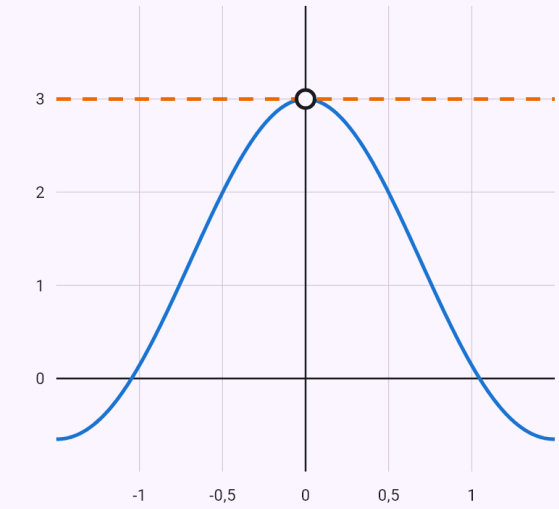
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Passaggi

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Usiamo il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Grafico



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Limite:

○ $(0; 3)$

Punto vuoto – il valore a cui la funzione si avvicina (nel punto stesso può non essere definita); tratteggiato – il limite.

La regola di de l'Hôpital, applicata due volte di seguito.

Input: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Risultato

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Passaggi

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Teorema di de l'Hôpital – deriviamo numeratore e denominatore

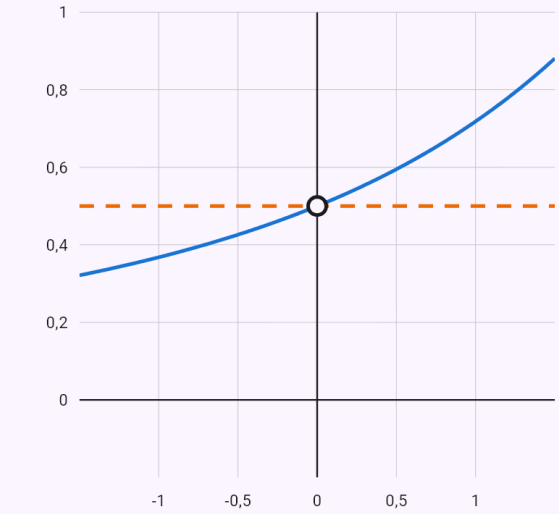
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Teorema di de l'Hôpital – deriviamo numeratore e denominatore

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Sostituiamo: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Grafico



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Limite:

$\circ\ \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Punto vuoto – il valore a cui la funzione si avvicina (nel punto stesso può non essere definita); tratteggiato – il limite.

La forma indeterminata 0^0 – la potenza scritta come e^(g·ln f); la funzione è definita solo per x > 0,

quindi il limite da destra.

Input: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Risultato

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Passaggi

- A sinistra di 0 la funzione non è definita, quindi calcoliamo il limite da destra.
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata 0^0 – l'espressione va trasformata.
- Sia la base sia l'esponente contengono la variabile – scriviamo la potenza come e elevato all'esponente per il logaritmo della base e calcoliamo il limite all'esponente

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $0\cdot\infty$ – l'espressione va trasformata.
- Scriviamo il prodotto come quoziente

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ – l'espressione va trasformata.
- Teorema di de l'Hôpital – deriviamo numeratore e denominatore

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Il fattore $x+1$ nel punto vale 1 – lo portiamo fuori dal limite

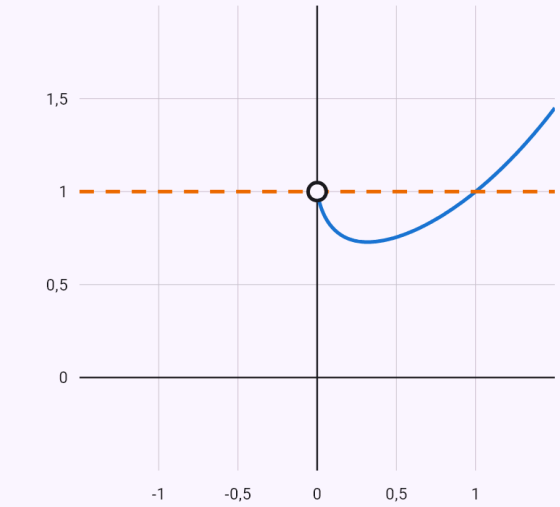
  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1\cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Teorema di de l'Hôpital – deriviamo numeratore e denominatore

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$
- Sostituiamo

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- Rimettiamo il limite dell'esponente:

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$$

Grafico



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Limite:
○ $(0; 1)$

Punto vuoto – il valore a cui la funzione si avvicina (nel punto stesso può non essere definita); tratteggiato – il limite.

I limiti unilaterali differiscono – il limite non esiste.

Input: `lim(x->0) 1/x`

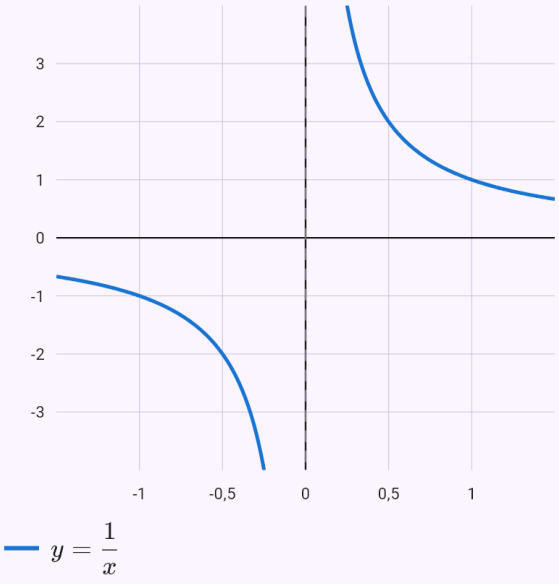
Risultato

Il limite non esiste – i limiti unilaterali sono diversi.

Passaggi

- Sostituendo si ottiene un numero non nullo diviso zero – il limite è infinito, il suo segno da sinistra e da destra: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Limiti unilaterali: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Grafico



Il limite di una successione – raccogliamo il termine a crescita più rapida 9^n.

Input: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Risultato

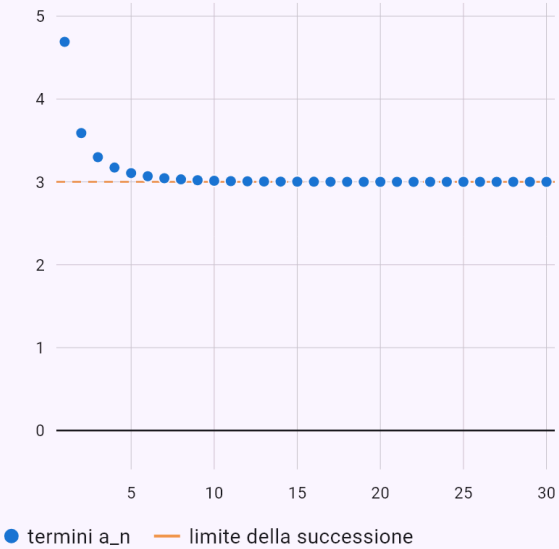
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Passaggi

- Raccogliamo il termine che cresce più in fretta 9^n – gli altri divisi per esso tendono a zero

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Grafico



I punti sono i termini a_n per n = 1, 2, 3, … Se la successione ha un limite, i termini vi si avvicinano (tratteggiato).

Un limite con un parametro k – il limite notevole (1 + 1/x)^x = e dà e^k.

Input: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Risultato

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Passaggi

- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri – numeri fissi che trattiamo come costanti: k
- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata 1^{∞} – l'espressione va trasformata.
- Scriviamo la base come $1+\frac{1}{t}$ con t = $\frac{x}{k}$, e la potenza come $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ elevato a k. L'espressione tra parentesi quadre tende a e – il limite notevole $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Resta il limite dell'esponente

  $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Derivate

L'app deriva con le regole – della somma, del multiplo, del prodotto, del quoziente e della funzione composta – e a ogni passo dice quale regola ha usato. Gestisce anche derivate di ordine superiore e il valore della derivata in un punto. Le funzioni elementari (x^2, $\sin x$, e^x, …) si possono derivare anche dalla definizione, come limite del rapporto incrementale. Il risultato ha un grafico della funzione e della sua derivata.

Per una funzione data implicitamente da un'equazione in x e y ($x^3 + y^3 = 3xy$) deriva entrambi i membri rispetto a x (y come funzione di x) ed esplicita y', o usa la formula $y' = -F_x / F_y$; trova anche y'' e, in un punto dato, la tangente e la normale, e disegna la curva.

In un punto singolare (la curva si interseca o ha una cuspide) trova le tangenti dai termini di grado minimo dell'equazione – per il folium nell'origine x = 0 e y = 0.

Il differenziale $df = f'(x)\,dx$, in un punto con un passo («differential √x, x0 = 4, dx = 0.1») con il valore approssimato $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. «approx √4.1» sceglie il punto $x_0 = 4$, dove il valore è noto esattamente, e confronta la stima con il valore vero.

Come inserirlo

`(x^2 sin x)'`	Una derivata con un apice dopo la parentesi.
`d/dx (e^x / x)`	La notazione d/dx, anche da una foto (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Derivate di ordine superiore con più apici, o con l'ordine nel chip «Deriva».
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	La derivata in un punto, o inserisci il punto nel chip.
`x^2 sin x`	Un'espressione con il chip «Deriva» – lì scegli anche l'ordine, il punto e il metodo (con le regole / dalla definizione).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Un'equazione in x e y – il chip «Derivata implicita» (ordine 1 o 2, il metodo, un punto $[x_0; y_0]$) o «Grafico della curva»; scritto diff(x^3+y^3=3xy, x).
`differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`	Il differenziale in un punto con un passo (senza punto in generale: differential x^2 sin x).

`approx √4.1`	Un valore approssimato con il differenziale.

Esempi

La regola del prodotto.

Input: `(x^2 sin x)'`

Risultato

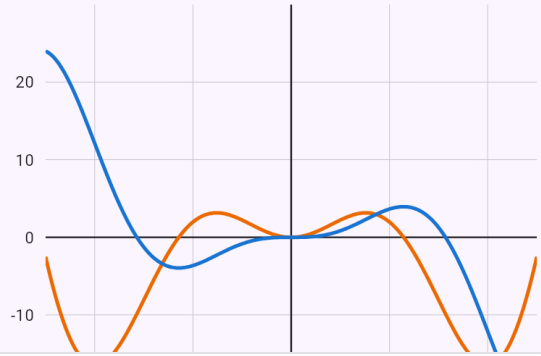
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

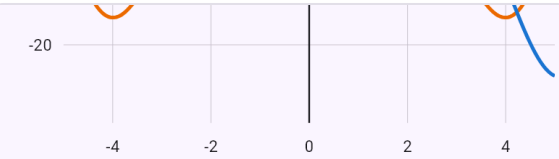
Passaggi

- Regola del prodotto (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Grafico





$y = x^2 \sin x$

$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Dove la derivata è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce. Negli zeri della derivata la funzione ha tangente orizzontale.

La regola del quoziente.

Input: `d/dx (e^x / x)`

Risultato

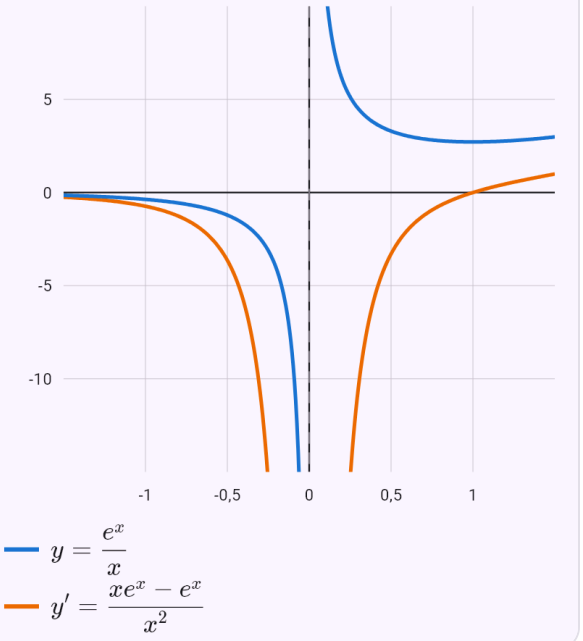
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Passaggi

- Regola del quoziente (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Grafico



Dove la derivata è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce. Negli zeri della derivata la funzione ha tangente orizzontale.

La derivata seconda.

Input: `(x^3 ln x)''`

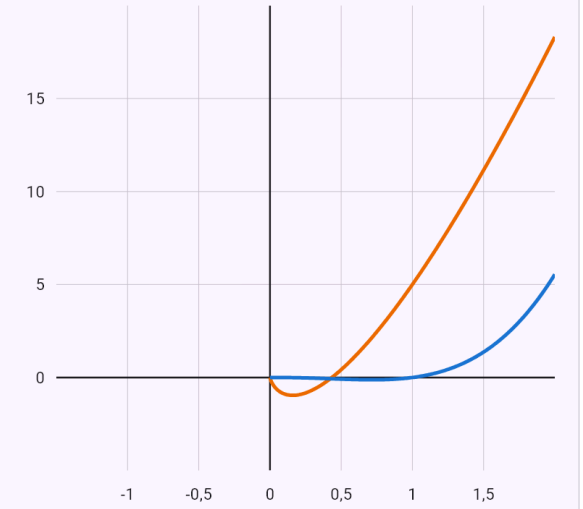
Risultato

$$y'' = 5x + 6x\ln x$$

Passaggi

- Derivata di ordine 1: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Regola del prodotto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Derivata di ordine 2: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- La derivata di una somma è la somma delle derivate:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Portiamo la costante fuori dalla derivata:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Regola del prodotto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Sostituiamo:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Sostituiamo: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Semplifichiamo: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Grafico



Dove la derivata seconda è positiva la funzione è convessa (curva verso l'alto), dove è negativa è concava (curva verso il basso).

La derivata dalla definizione, come limite.

Input: x^2 Deriva → Dalla definizione

Risultato

$$y' = 2x$$

Passaggi

- La derivata per definizione

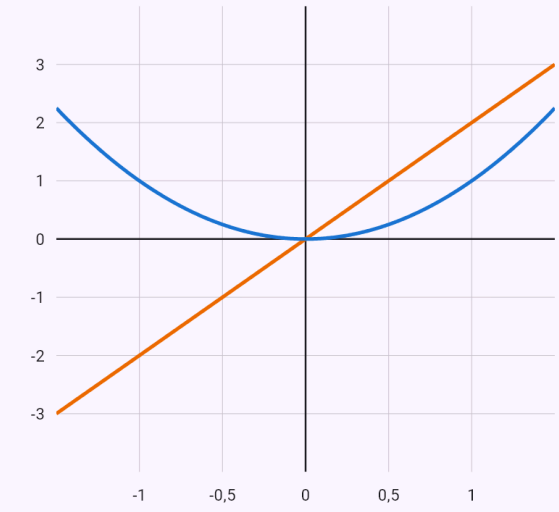
$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Sostituendo si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ – l'espressione va trasformata.
- Trasformiamo e semplifichiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

- Sostituiamo: $\lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$

Grafico



$y = x^2$
$y' = 2x$

Dove la derivata è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce. Negli zeri della derivata la funzione ha tangente orizzontale.

Una derivata implicita – il folium di Cartesio, la tangente e la normale in [3/2; 3/2], la derivata seconda.

Input: `x^3 + y^3 = 3xy` Derivata implicita, ordine 2, punto [3/2; 3/2]

Risultato

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

t: $y = 3 - x$

n: $y = x$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Condizioni: $y^2 - x \neq 0$

Passaggi

- La funzione y = y(x) è data dall'equazione $x^3 + y^3 = 3xy$ – deriviamo entrambi i membri rispetto a x, considerando y funzione di x (derivata della funzione composta: es. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivando entrambi i membri: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- I termini con y' a sinistra, il resto a destra, y' raccolto: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Ricaviamo y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- La derivata seconda – deriviamo di nuovo y' rispetto a x (y e y' sono funzioni di x)

$$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

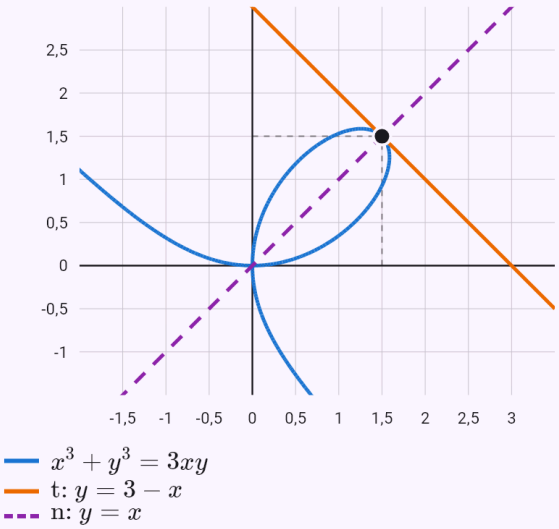
- Sostituiamo y'

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Sulla curva vale $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – il che semplifica l'espressione: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Il punto $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ appartiene alla curva: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\, y=\frac{3}{2}} = 0$
- La derivata nel punto $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – il coefficiente angolare della tangente: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- La tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- La normale è perpendicolare alla tangente, il suo coefficiente angolare è 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- La derivata seconda nel punto: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Grafico



La curva data dall'equazione. Nel punto dato, la tangente (continua) e la normale (tratteggiata).

Il differenziale di √x in 4 con il passo 0,1.

Input: `differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Risultato

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Passaggi

- Il differenziale – la parte lineare dell'incremento della funzione: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Il differenziale in x_0 per il passo h

  $\mathrm{d}f(4) = f'(4) \cdot h = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Sostituiamo l'incremento con il differenziale. Il valore esatto è $2{,}0248457$, l'errore della stima $0{,}00015$

  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Un valore approssimato di ∛27,1 con il differenziale.

Input: `approx \sqrt[3]{27.1}`

Risultato

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Passaggi

- Scriviamo il numero come valore della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ vicino a $x_0 = 27$, dove lo conosciamo esattamente; il passo è $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- Il differenziale – la parte lineare dell'incremento della funzione: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- Il differenziale in x_0 per il passo h

  $\mathrm{d}f(27) = f'(27) \cdot h = \frac{1}{27} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Sostituiamo l'incremento con il differenziale. Il valore esatto è $3{,}0036991$, l'errore della stima $0{,}0000046$

  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Studio di funzione

L'app studia una funzione nell'ordine usuale: dominio, parità o disparità, intersezioni con gli assi, segno della funzione, limiti agli estremi del dominio e asintoti, la derivata prima – monotonia ed estremi (anche con le derivate successive), la derivata seconda – concavità e punti di flesso, e infine l'insieme immagine. Riassume tutto in una panoramica e disegna un grafico con i punti segnati.

Per una funzione goniometrica l'app trova il periodo, studia la funzione su un periodo e scrive i risultati con il periodo (un massimo in $x = \pi/2 + 2k\pi$); se è periodica solo la derivata ($x + 2 \sin x$), estremi e monotonia si ripetono con il periodo. I valori assoluti si eliminano con i segni sugli intervalli e nei punti angolosi si confrontano le derivate unilaterali; dove la derivata è infinita, viene mostrata una tangente verticale. Valori assoluti annidati e somme di valori assoluti si studiano a tratti; dove la funzione è costante su un intervallo, lo si dice con il suo valore (un minimo in ogni punto dell'intervallo).

Estremi assoluti (globali) su un intervallo chiuso: «extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]» – l'app trova i punti stazionari e i punti senza derivata all'interno dell'intervallo e confronta i valori lì e negli estremi. Senza intervallo, «extrema …» studia la funzione. La funzione inversa («inverse of f(x) = …») si ottiene risolvendo $y = f(x)$ rispetto a x, verificata per composizione; il grafico mostra f, f^{-1} e la retta $y = x$.

Il vertice di una parabola («vertex of the parabola y = x^2 - 4x + 7», basta un semplice y = …) completando il quadrato – con l'asse, l'insieme immagine e la traslazione del grafico di $y = ax^2$. Scrivi una funzione composta con le sue definizioni: «f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))».

Un grafico con traslazioni, dilatazioni e simmetrie: «graph transformations y = 2sin(3(x - 1)) + 1» – l'app parte dalla funzione elementare (sin, cos, tg, cotg, e^x, a^x, ln, $\log_a$, una radice, una potenza, 1/x, |x|) e passo per passo la comprime o la dilata lungo l'asse x, la trasla a destra o a sinistra, la dilata lungo l'asse y, la riflette e la trasla in alto o in basso; anche |f(x)| e f(|x|). Il grafico mostra la funzione elementare e quella risultante.

Come inserirlo

`analysis y = x^3 - 3x`	Con la parola «analysis» prima della funzione.
`x^3 - 3x`	Una funzione con il chip «Studia la funzione».
`extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]`	Estremi assoluti su un intervallo chiuso (anche «max and min …, x ∈ [a, b]»).
`inverse of f(x) = (2x+1)/(x-3)`	La funzione inversa (anche «f^{-1}, f(x) = …»).

Esempi

Un polinomio – estremi e un punto di flesso.

Input: `x^3 - 3x` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parità: dispari

Zeri: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$

Crescente: $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$

Decrescente: $[-1;\ 1]$

Massimo relativo: $[-1;\ 2]$

Minimo relativo: $[1;\ -2]$

Convessa: $[0;\ \infty)$

Concava: $(-\infty;\ 0]$

Punti di flesso: $[0;\ 0]$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – la funzione è dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine).
- Intersezioni con l'asse x:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, cioè
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  La funzione è positiva per $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ \infty\right)$ e negativa per $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$
- I limiti agli estremi del dominio
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- La funzione non ha asintoti verticali.
- Nessun asintoto a ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- La derivata prima: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- Punti stazionari: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

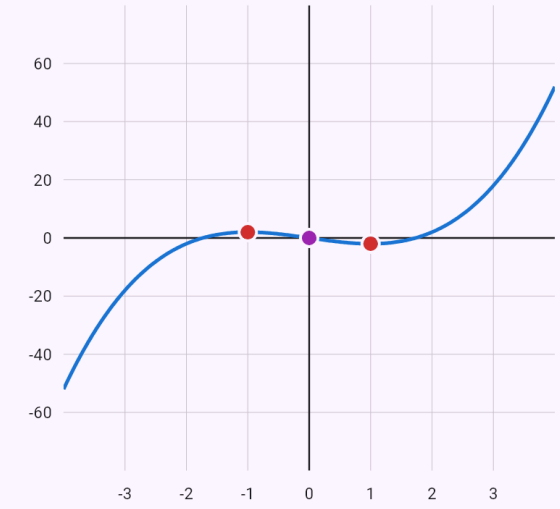
	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  La funzione è crescente in $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$ e decrescente in $[-1;\ 1]$
- In $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – un massimo relativo.
- In $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – un minimo relativo.
- Massimo relativo $[-1;\ 2]$, minimo relativo $[1;\ -2]$
- La derivata seconda: $f''(x) = 6x$
- Candidati punti di flesso: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  La funzione è convessa in $[0;\ \infty)$ e concava in $(-\infty;\ 0]$
- In $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – la prima derivata non nulla (dalla terza in poi) è di ordine dispari: un punto di flesso.
- Punti di flesso: $[0;\ 0]$
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Grafico



$y = x^3 - 3x$

Punti notevoli:

● massimo $(-1;\ 2)$ ● flesso $(0;\ 0)$ ● minimo $(1;\ -2)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Una funzione razionale – asintoti.

Input: `x^2/(x - 1)` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty;\ 0] \cup [4;\ \infty)$

Parità: né pari né dispari

Zeri: $[0;\ 0]$

Crescente: $(-\infty;\ 0],\ [2;\ \infty)$

Decrescente: $[0;\ 1),\ (1;\ 2]$

Massimo relativo: $[0;\ 0]$

Minimo relativo: $[2;\ 4]$

Convessa: $(1;\ \infty)$

Concava: $(-\infty;\ 1)$

Asintoti: $x = 1,\ y = x + 1$

Passaggi

- Dominio – condizioni $x \neq 1$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Il dominio $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ non è simmetrico rispetto allo zero – la funzione non è né pari né dispari.
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

  La funzione è positiva per $x \in (1;\ \infty)$ e negativa per $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$
- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Asintoti verticali (lì il limite è infinito): $x = 1$
- Asintoto a ±∞: $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – la retta $y = x + 1$
- La derivata prima

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Punti stazionari: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

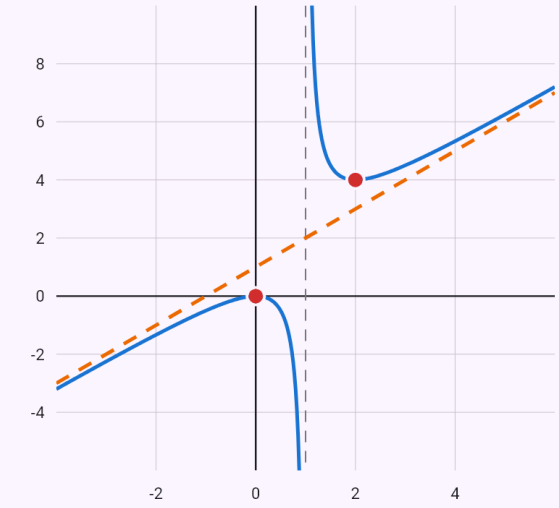
	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

  La funzione è crescente in $(-\infty;\ 0],\ [2;\ \infty)$ e decrescente in $[0;\ 1),\ (1;\ 2]$
- In $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – un massimo relativo.
- In $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – un minimo relativo.
- Massimo relativo $[0;\ 0]$, minimo relativo $[2;\ 4]$
- La derivata seconda: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- L'equazione $f''(x) = 0$ non ha soluzione.
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  La funzione è convessa in $(1;\ \infty)$ e concava in $(-\infty;\ 1)$
- La funzione non ha punti di flesso.
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty;\ 0] \cup [4;\ \infty)$

Grafico



$y = \frac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Punti notevoli:

● massimo $(0;\ 0)$ ● minimo $(2;\ 4)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Una funzione periodica – tutto su un periodo, i risultati con il periodo.

Input: `sin 2x + 2cos x` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Parità: né pari né dispari

Periodo: $p = 2\pi$

Zeri: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Crescente: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Decrescente: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Massimo relativo: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Minimo relativo: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convessa:
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\right.$

Concava:
$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\right.\right.$

Punti di flesso:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- La funzione è periodica di periodo 2π – la studiamo su un periodo (da 0 a 2π) e ripetiamo i risultati con il periodo, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – né f(x) né −f(x): la funzione non è né pari né dispari.
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, cioè $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 2$, cioè $[0;\ 2]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

  La funzione è positiva per $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e negativa per $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Una funzione periodica (non costante) non ha limite a ±∞.
- La derivata prima: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Punti stazionari

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(0;\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  La funzione è crescente in $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ e decrescente in $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$
- Massimo relativo $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, minimo relativo $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- La derivata seconda: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Candidati punti di flesso

  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$

- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right))$	$(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3}{2}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

  La funzione è convessa in e concava in

  $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi-\right.$

  $\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $\left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right.$

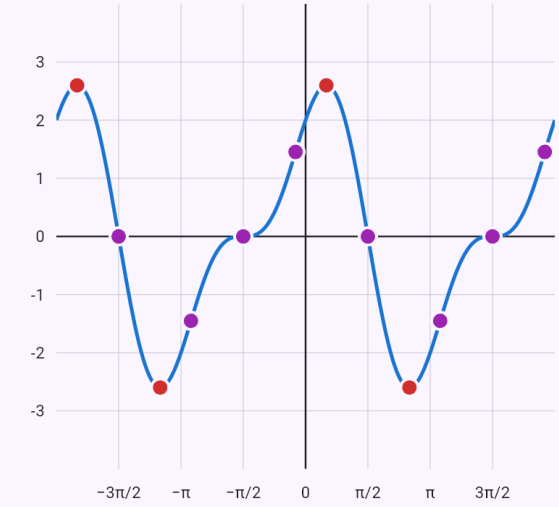
- Punti di flesso

  $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right]$, $\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$, $\left[2\pi\right.$

- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti:

  $\mathrm{Im}\,(f)=\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Grafico



$y=\sin 2x+2\cos x$

Punti notevoli:

- massimo $\left(-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- flesso $\left(-\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- minimo $\left(-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- flesso $\left(-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- flesso $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- flesso $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- massimo $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- flesso $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- minimo $\left(\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- flesso $\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- flesso $\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- flesso $\left(2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Tangente – asintoti verticali, insieme immagine $\mathbb{R}$.

Input: `tg x` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parità: dispari

Periodo: $p = \pi$

Zeri: $[k\pi;\ 0]$

Crescente: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Convessa: $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Concava: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right]$

Punti di flesso: $[k\pi;\ 0]$

Asintoti: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Passaggi

- Dominio – condizioni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- La funzione è periodica di periodo π – la studiamo su un periodo (da 0 a π) e ripetiamo i risultati con il periodo, k $\in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ – la funzione è dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine).
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, cioè $[k\pi;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  La funzione è positiva per $x \in \left(k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e negativa per $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right)$
- Una funzione periodica (non costante) non ha limite a ±∞.
- I limiti agli estremi del dominio
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Asintoti verticali (lì il limite è infinito): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- La derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- L'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzione – non ci sono punti stazionari.
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

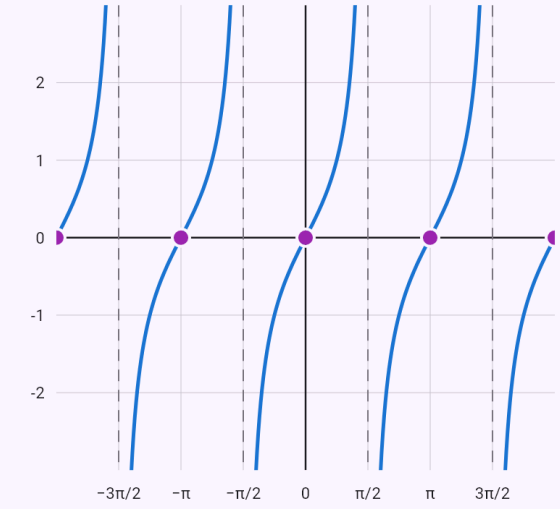
	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  La funzione è crescente in $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- La funzione non ha estremi relativi.
- La derivata seconda: $f''(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
- Candidati punti di flesso: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  La funzione è convessa in $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e concava in $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right]$
- Punti di flesso: $[k\pi;\ 0]$
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Grafico



$y = \operatorname{tg} x$

Punti notevoli:

- flesso $(-2\pi; 0)$
- flesso $(-\pi; 0)$
- flesso $(0; 0)$
- flesso $(\pi; 0)$
- flesso $(2\pi; 0)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Tangente iperbolica – asintoti orizzontali y = ±1.

Input: `tanh x` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = (-1;\ 1)$

Parità: dispari

Zeri: $[0;\ 0]$

Crescente: $\mathbb{R}$

Convessa: $(-\infty;\ 0]$

Concava: $[0;\ \infty)$

Punti di flesso: $[0;\ 0]$

Asintoti: $y = -1,\ y = 1$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – la funzione è dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine).
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  La funzione è positiva per $x \in (0;\ \infty)$ e negativa per $x \in (-\infty;\ 0)$
- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

- La funzione non ha asintoti verticali.
- Asintoto a -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – la retta $y = -1$
- Asintoto a +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – la retta $y = 1$
- La derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- L'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzione – non ci sono punti stazionari.
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  La funzione è crescente in $\mathbb{R}$
- La funzione non ha estremi relativi.
- La derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Candidati punti di flesso: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  La funzione è convessa in $(-\infty;\ 0]$ e concava in $[0;\ \infty)$
- In $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – la prima derivata non nulla (dalla terza in poi) è di ordine dispari: un punto di flesso.
- Punti di flesso: $[0;\ 0]$
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = (-1;\ 1)$

È periodica solo la derivata – i valori degli estremi crescono con k.

Input: `x + 2sin x` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Parità: dispari

Periodo: $p = 2\pi$

Zeri: $[0;\ 0]$

Crescente: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Decrescente: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Massimo relativo: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Minimo relativo: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convessa: $[\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$

Concava: $[2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Punti di flesso: $[2k\pi;\ 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- La funzione stessa non è periodica, ma la sua derivata sì (periodo 2π) – monotonia, estremi e convessità si ripetono con questo periodo, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – la funzione è dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine).
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- I limiti agli estremi del dominio

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

- La derivata prima: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Punti stazionari

  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(0;\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  La funzione è crescente in $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ e decrescente in $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

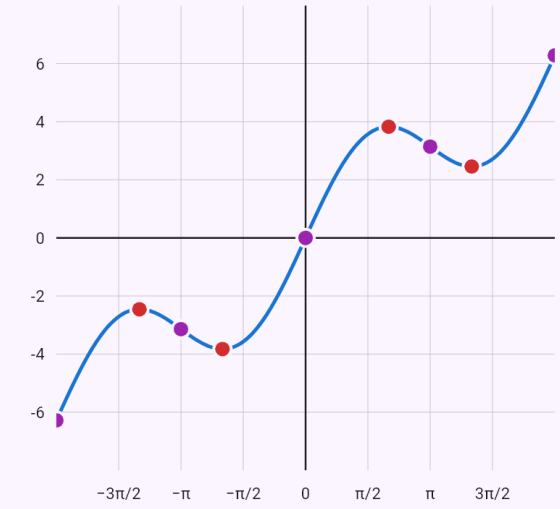
- Massimo relativo $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, minimo relativo $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- La derivata seconda: $f''(x) = -2\sin x$
- Candidati punti di flesso: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(0;\ \pi)$	$(\pi;\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  La funzione è convessa in $[\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$ e concava in $[2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

- Punti di flesso: $[2k\pi;\ 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Grafico



$y = x + 2\sin x$

Punti notevoli:

- flesso $(-2\pi; -2\pi)$
- massimo $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- flesso $(-\pi; -\pi)$
- minimo $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- flesso $(0; 0)$
- massimo $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- flesso $(\pi; \pi)$
- minimo $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- flesso $(2\pi; 2\pi)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Valore assoluto – punti angolosi, derivate unilaterali.

Input: `|x^2 - 1|` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = [0;\ \infty)$

Parità: pari

Zeri: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Crescente: $[-1;\ 0],\ [1;\ \infty)$

Decrescente: $(-\infty;\ -1],\ [0;\ 1]$

Massimo relativo: $[0;\ 1]$

Minimo relativo: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Convessa: $(-\infty;\ -1],\ [1;\ \infty)$

Concava: $[-1;\ 1]$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Eliminiamo i valori assoluti in ogni intervallo secondo i segni dei loro argomenti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty;\ -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1;\ 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1;\ \infty) \end{cases}$$

- – la funzione è pari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, cioè $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 1$, cioè $[0;\ 1]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La funzione è positiva per $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ \infty)$ e negativa per $x \in \emptyset$

- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La funzione non ha asintoti verticali.
- Nessun asintoto a -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Nessun asintoto a +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- La derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Punti stazionari: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- In $x = -1$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- In $x = 1$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

La funzione è crescente in $[-1;\,0],\ [1;\,\infty)$ e decrescente in $(-\infty;\,-1],\ [0;\,1]$

- In $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – un massimo relativo.
- Massimo relativo $[0;\ 1]$, minimo relativo $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- La derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

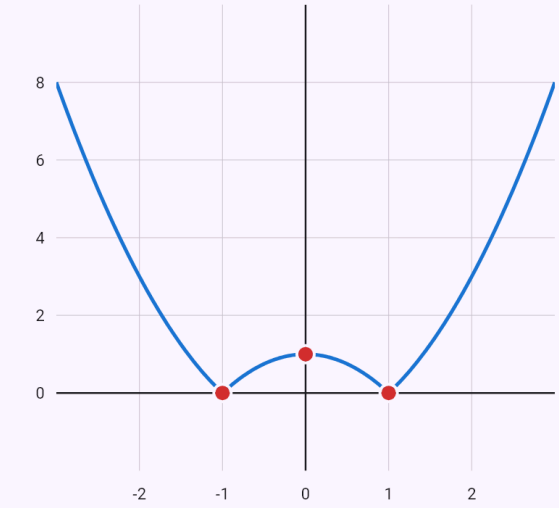
- L'equazione $f''(x) = 0$ non ha soluzione.
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\,-1)$	$(-1;\,1)$	$(1;\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

La funzione è convessa in $(-\infty;\,-1],\ [1;\,\infty)$ e concava in $[-1;\,1]$

- La funzione non ha punti di flesso.
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = [0;\,\infty)$

Grafico



$y = |x^2 - 1|$

Punti notevoli:

- minimo $(-1;0)$
- massimo $(0;1)$
- minimo $(1;0)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Radice cubica – una tangente verticale nello zero.

Input: `x^(1/3)` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parità: dispari

Zeri: $[0;\ 0]$

Crescente: $\mathbb{R}$

Convessa: $(-\infty;\ 0]$

Concava: $[0;\ \infty)$

Punti di flesso: $[0;\ 0]$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – la funzione è dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine).
- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 0$, cioè $[0;\ 0]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  La funzione è positiva per $x \in (0;\ \infty)$ e negativa per $x \in (-\infty;\ 0)$
- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- La funzione non ha asintoti verticali.
- Nessun asintoto a -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ma $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Nessun asintoto a +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, ma $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- La derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- L'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzione – non ci sono punti stazionari.
- In $x = 0$ la derivata è infinita ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – il grafico ha lì una tangente verticale (un flesso a tangente verticale).
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

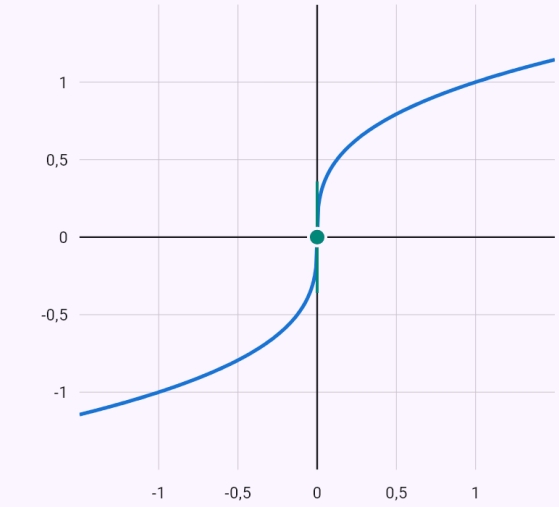
	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  La funzione è crescente in $\mathbb{R}$
- La funzione non ha estremi relativi.
- La derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- L'equazione $f''(x) = 0$ non ha soluzione.
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  La funzione è convessa in $(-\infty;\ 0]$ e concava in $[0;\ \infty)$
- Punti di flesso: $[0;\ 0]$
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Grafico



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Punti notevoli:

● flesso $(0;0)$ ● tangente verticale $(0;0)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Un valore assoluto annidato – a tratti, una funzione pari.

Input: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = [0;\, \infty)$

Parità: pari

Zeri: $[-3;\, 0],\ [3;\, 0]$

Crescente: $[-3;\, -1],\ [0;\, 1],\ [3;\, \infty)$

Decrescente: $(-\infty;\, -3],\ [-1;\, 0],\ [1;\, 3]$

Massimo relativo: $[-1;\, 4],\ [1;\, 4]$

Minimo relativo: $[-3;\, 0],\ [0;\, 3],\ [3;\, 0]$

Convessa: $(-\infty;\, -3],\ [3;\, \infty)$

Concava: $[-3;\, 0],\ [0;\, 3]$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Eliminiamo i valori assoluti in ogni intervallo secondo i segni dei loro argomenti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty;\, -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3;\, 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0;\, 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3;\, \infty) \end{cases}$$

- – la funzione è pari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Intersezioni con l'asse x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, cioè $[-3;\, 0],\ [3;\, 0]$
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 3$, cioè $[0;\, 3]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\, -3)$	$(-3;\, 3)$	$(3;\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La funzione è positiva per $x \in (-\infty;\, -3) \cup (-3;\, 3) \cup (3;\, \infty)$ e negativa per $x \in \emptyset$

- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La funzione non ha asintoti verticali.
- Nessun asintoto a -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- Nessun asintoto a +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- La derivata prima

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+}{|x|\left|-x^2 + \right.}$$

- Punti stazionari: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- In $x = -3$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- In $x = 0$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- In $x = 3$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(-\infty;\,-3)$	$(-3;\,-1)$	$(-1;\,0)$	$(0;\,1)$	$(1;\,3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

La funzione è crescente in $[-3;\,-1]$, $[0;\,1]$, $[3;\,\infty)$ e decrescente in $(-\infty;\,-3]$, $[-1;\,0]$, $[1;\,3]$

- In $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – un massimo relativo.
- In $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – un massimo relativo.
- Massimo relativo $[-1;\,4]$, $[1;\,4]$, minimo relativo $[-3;\,0]$, $[0;\,3]$, $[3;\,0]$
- La derivata seconda

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

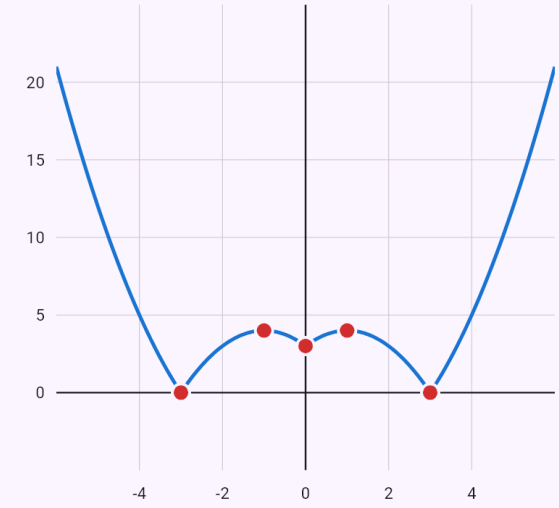
- L'equazione $f''(x) = 0$ non ha soluzione.
- Il segno della derivata seconda – dove è positiva la funzione è convessa, dove è negativa concava:

	$(-\infty;\,-3)$	$(-3;\,0)$	$(0;\,3)$	$(3;\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

La funzione è convessa in $(-\infty;\,-3]$, $[3;\,\infty)$ e concava in $[-3;\,0]$, $[0;\,3]$

- La funzione non ha punti di flesso.
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = [0;\,\infty)$

Grafico



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Punti notevoli:

- minimo $(-3;0)$
- massimo $(-1;4)$
- minimo $(0;3)$
- massimo $(1;4)$
- minimo $(3;0)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Una somma di valori assoluti – un tratto costante e due asintoti obliqui.

Input: `|x - 2| + |x + 3|` Studia la funzione

Risultato

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$

Immagine: $\mathrm{Im}\,(f) = [5;\,\infty)$

Parità: né pari né dispari

Crescente: $[2;\,\infty)$

Decrescente: $(-\infty;\,-3]$

Costante: $[-3;\,2]$

Minimo relativo: $f(x) = 5,\ x \in [-3;\,2]$

Asintoti: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Passaggi

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Eliminiamo i valori assoluti in ogni intervallo secondo i segni dei loro argomenti

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\,-3) \\ 5, & x \in [-3;\,2) \\ 2x + 1, & x \in [2;\,\infty) \end{cases}$$

- – né f(x) né -f(x): la funzione non è né pari né dispari.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- L'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzione – il grafico non interseca l'asse x.
- Intersezione con l'asse y: $f(0) = 5$, cioè $[0;\ 5]$
- Il segno della funzione tra i suoi zeri e i punti fuori dal dominio:

	$(-\infty;\,\infty)$
$f(x)$	$+$

La funzione è positiva per $x \in \mathbb{R}$ e negativa per $x \in \emptyset$

- I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La funzione non ha asintoti verticali.
- Asintoto a -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – la retta $y = -2x - 1$
- Asintoto a +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – la retta $y = 2x + 1$
- La derivata prima

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

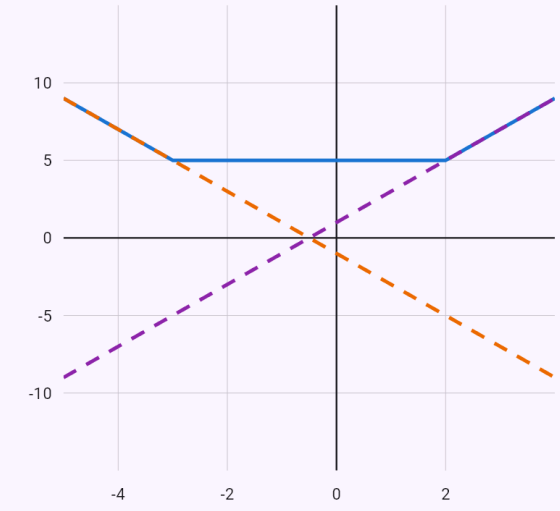
- L'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzione – non ci sono punti stazionari.
- In $x = -3$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- In $x = 2$ la derivata non esiste – le derivate unilaterali sono diverse ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), il grafico ha lì un punto angoloso.
- Il segno della derivata prima – dove è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce:

	$(-\infty;\,-3)$	$(-3;\,2)$	$(2;\,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

La funzione è crescente in $[2;\,\infty)$ e decrescente in $(-\infty;\,-3]$. In $[-3;\,2]$ è costante (f' = 0).

- Minimo relativo $f(x) = 5,\ x \in [-3;\,2]$, nessun massimo relativo.
- La derivata seconda: $f''(x) = 0$
- La derivata seconda è zero – il grafico è (una parte di) una retta, né convesso né concavo.
- Immagine – dalla monotonia, dagli estremi e dai limiti: $\mathrm{Im}\,(f) = [5;\,\infty)$

Grafico



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

Estremi assoluti su un intervallo – punti stazionari ed estremi.

Input: `extrema of x^3 - 3x on [-2, 3]`

Risultato

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

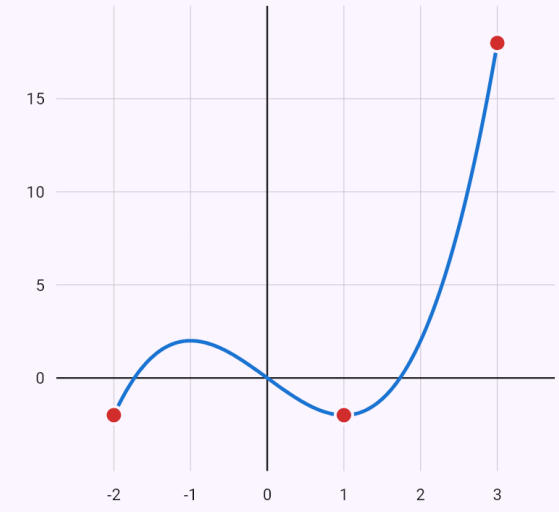
Passaggi

- La derivata: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Punti stazionari ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; stanno tutti nell'intervallo $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Una funzione continua su un intervallo chiuso assume il valore massimo e minimo (teorema di Weierstrass) – in un punto stazionario, in un punto senza derivata o in un estremo dell'intervallo. Confrontiamo i valori

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- Il valore massimo su $\langle -2;\ 3 \rangle$ è $f(3) = 18$, il minimo $f(-2) = f(1) = -2$

Grafico



$y = x^3 - 3x$

Punti notevoli:

- massimo $(3; 18)$
- minimo $(-2; -2)$
- minimo $(1; -2)$

Estremi relativi in rosso, punti di flesso in viola, un cerchio vuoto – un punto in cui la funzione non è definita; asintoti tratteggiati.

L'inversa di una funzione omografica, con verifica.

Input: `inverse of f(x) = (2x+1)/(x-3)`

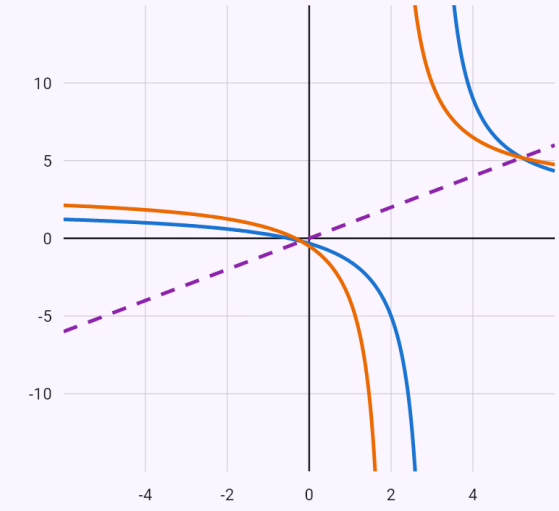
Risultato

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Passaggi

- La funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, le condizioni del suo dominio: $x - 3 \neq 0$
- Risolviamo $y = f(x)$ rispetto a x: $y = \dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{y-2}$
- Scambiamo x e y: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$. Il dominio dell'inversa è l'insieme immagine di f: $x - 2 \neq 0$
- Verifica per composizione: $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

Grafico



$y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

f^{-1}

$y = x$

Il grafico dell'inversa è simmetrico al grafico di f rispetto alla retta y = x.

Il vertice di una parabola completando il quadrato.

Input: `vertex of the parabola y = x^2 - 4x + 7`

Risultato

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Passaggi

- Completamento del quadrato: $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Vertice $V = [2;\ 3]$, asse $x = 2$; la parabola ha la concavità verso l'alto, immagine $H(f) = \langle 3; \infty)$
- Il grafico è il grafico di $y = x^2$ traslato del vettore $(2;\ 3)$

Un grafico del seno comprimendo, traslando e dilatando.

Input: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

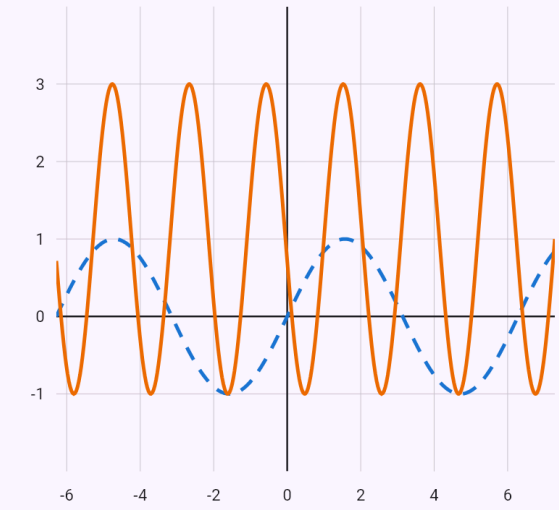
Risultato

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Passaggi

- Partiamo dal grafico della funzione elementare $y = \sin x$
- Comprimiamo il grafico lungo l'asse x del fattore 3 (verso l'asse y): $y = \sin\left(3x\right)$
- Trasliamo il grafico di 1 verso destra lungo l'asse x: $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Dilatiamo il grafico lungo l'asse y del fattore 2: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Trasliamo il grafico di 1 verso l'alto lungo l'asse y: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Grafico



$y = \sin x$

$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Tratteggiato: il grafico della funzione elementare; continuo: il grafico risultante.

Una radice traslata e riflessa rispetto all’asse x.

Input: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

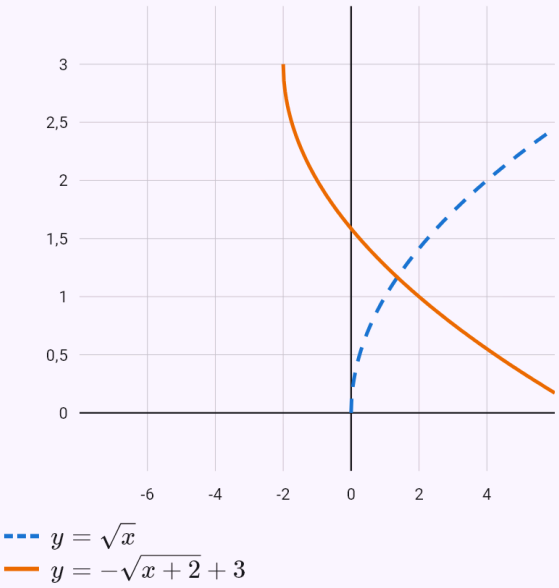
Risultato

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Passaggi

- Partiamo dal grafico della funzione elementare $y = \sqrt{x}$
- Trasliamo il grafico di 2 verso sinistra lungo l’asse x: $y = \sqrt{x+2}$
- Ribaltiamo il grafico rispetto all’asse x: $y = -\sqrt{x+2}$
- Trasliamo il grafico di 3 verso l’alto lungo l’asse y: $y = -\sqrt{x+2} + 3$

Grafico



Tratteggiato: il grafico della funzione elementare; continuo: il grafico risultante.

Una funzione composta f(g(x)).

Input: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Risultato

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Passaggi

- Nella funzione esterna f sostituiamo la funzione interna g al posto di x: $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Limiti noti

- Una funzione senza nemmeno una derivata periodica (x·sin x) si studia solo numericamente su [−2π; 2π], senza il periodo; le funzioni goniometriche inverse (arcsin, arctg) non sono ancora supportate.
- Estremi assoluti solo su un intervallo chiuso e per una funzione continua; l’inversa solo dove una formula la esprime – per una funzione non iniettiva (x²) l’inversa su una parte del dominio non viene ancora cercata.

28. Funzioni di più variabili

Derivate parziali (prime e seconde, miste) e il gradiente di una funzione di due o tre variabili – derivando rispetto a una variabile, le altre sono costanti.

Estremi locali di una funzione di due variabili: i punti stazionari da $f_x = 0$, $f_y = 0$, ciascuno deciso dal determinante hessiano $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$ (un minimo, un massimo, una sella). Estremi vincolati con un vincolo («extrema of xy, x + y = 1») con il metodo di Lagrange e l'hessiano orlato.

La derivata direzionale (il gradiente per un versore), il differenziale totale con un valore approssimato e il piano tangente a una superficie. Un integrale doppio si inserisce con estremi iterati o come regione di disuguaglianze; l'app divide la regione in domini normali, mostra l'integrale interno ed esterno e disegna la regione; l'interruttore 3D mostra sopra di essa la superficie della funzione integranda. I chip sotto il risultato cambiano l'ordine di integrazione e passano alle coordinate polari.

Analisi vettoriale: la divergenza, il rotore (per un campo piano un solo numero $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$), il laplaciano e il potenziale di un campo conservativo – l'app verifica prima che il rotore sia nullo, poi trova φ integrando le componenti una per una e verifica $\nabla\varphi = F$. Un campo si inserisce come vettore (P; Q; R) o (P; Q), anche con i versori i, j, k o con nome «F = …» su una riga a parte. Per un campo piano il grafico mostra le frecce del campo e le curve di livello del potenziale. I chip sotto il risultato passano tra divergenza, rotore e potenziale dello stesso campo.

Integrali curvilinei: di prima specie $\int_C f\,ds$ (la lunghezza di una curva, la massa di un filo) e di seconda specie $\int_C F \cdot dr$ (il lavoro di una forza, una circuitazione $\oint$ lungo una curva chiusa). La curva si dà con una parametrizzazione r(t) o una preimpostazione – un segmento, una circonferenza, un grafico y = f(x), una spezzata; i passaggi mostrano il vettore tangente, la sostituzione nel campo e l'integrale in t. Per un campo conservativo l'app verifica il risultato con il potenziale $\varphi(B) - \varphi(A)$ (indipendenza dal cammino), per una curva piana chiusa (una circonferenza, un'ellisse, un poligono convesso) con il teorema di Green – calcola anche l'integrale doppio sulla regione interna. I chip sotto il risultato cambiano quale via è la principale. Il modulo «Integrale curvilineo» (la sezione «Applicazioni», l'ambito Analisi in più variabili) offre le preimpostazioni delle curve; il grafico mostra la curva con la sua orientazione sopra le frecce del campo e la regione di Green, una curva nello spazio in 3D, ruotata con un dito.

Integrali tripli: con estremi iterati, su un solido di disuguaglianze ($\iiint_V$, anche da una foto) o con il modulo «Integrale triplo» (la sezione «Applicazioni», l'ambito Analisi in più variabili) con le preimpostazioni parallelepipedo, sfera, cilindro, cono, solido tra grafici e disuguaglianze. L'app descrive il solido come dominio normale – la variabile più interna tra due superfici sopra la proiezione – e calcola tre integrali uno dopo l'altro (teorema di Fubini). In coordinate cilindriche e sferiche mostra la sostituzione con lo jacobiano (r, $\rho^2 \sin\theta$) e gli estremi nelle nuove variabili; quando le coordinate cartesiane non danno un risultato esatto, ci passa da sola, e per una sfera, un cilindro o $x^2 + y^2$ nel

problema le offre un chip. Il modulo calcola anche il volume, la massa con una densità ρ, il baricentro e il momento d'inerzia rispetto a un asse. Un grafico 3D ruotabile mostra il solido.

Le lettere diverse da x, y, z (un raggio r, un'altezza h, spigoli a, b, c) sono parametri positivi: il risultato è una formula, come V = 4/3 πr³ per la sfera ball(r) – accanto al raggio r la coordinata cilindrica si scrive ϱ – o V = abc per un parallelepipedo. L'app verifica la formula numericamente per alcuni valori dei parametri; l'immagine 3D del solido è disegnata per il valore 1.

Integrali di superficie: di prima specie ∬_S f dS (l'area di una superficie, la massa di un guscio) e di seconda specie – il flusso ∬_S F·n dS. La superficie si dà con una preimpostazione – un grafico z = g(x, y) su una regione D, una sfera, una semisfera, un cilindro, un cono (l'intera superficie con i suoi dischi, o la sola superficie laterale) – o con una parametrizzazione r(u, v). I passaggi mostrano i vettori tangenti r_u, r_v, il vettore normale r_u × r_v con la sua orientazione (uscente per una superficie chiusa, verso l'alto per un grafico, altrimenti secondo la parametrizzazione; uscente, entrante, verso l'alto, verso il basso a scelta), l'elemento di superficie e l'integrale doppio sui parametri; una superficie chiusa si somma dalle sue parti. Il flusso attraverso una superficie chiusa viene verificato con il teorema di Gauss (l'integrale triplo della divergenza), il flusso di un rotore con il teorema di Stokes – l'integrale curvilineo lungo il bordo; i chip sotto il risultato cambiano la via principale. Il modulo «Integrale di superficie» (la sezione «Applicazioni», l'ambito Analisi in più variabili) offre le preimpostazioni delle superfici; un grafico 3D ruotabile mostra la superficie con le sue normali, le frecce del campo e il bordo.

Fili e gusci: i moduli dell'integrale curvilineo e di superficie (la scelta «Cosa calcolare») e la notazione quantity=mass / centroid / inertia calcolano la massa di un filo o di un guscio con una densità f (vuoto = 1), il suo baricentro e il suo momento d'inerzia rispetto a un asse (axis=x, y, z). Il planimetro lineint(area; C) calcola l'area dentro una curva piana chiusa come ½∮ x dy − y dx e la verifica con il teorema di Green.

Come inserirlo

`partial derivatives x^2 y + y^3`	Tutte le derivate parziali prime (con «second» le seconde).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Una derivata parziale (anche \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	Il gradiente.
`extrema of x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Estremi locali di una funzione di due variabili.
`extrema of xy, x + y = 1`	Estremi vincolati – la funzione e il vincolo dopo una virgola.

`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Derivata direzionale: la funzione, il punto, la direzione (anche a parole).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Differenziale totale; il punto e gli incrementi h sono facoltativi (anche a parole).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Piano tangente in un punto, per z = f(x, y) o F(x, y, z) = 0 (anche a parole).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Un integrale doppio con estremi iterati (anche \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Un integrale doppio su una regione di disuguaglianze (anche \iint_D ..., D: ...); puoi aggiungere order=dxdy o polar.
`div(x y; y z; z x)`	La divergenza di un campo (anche ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, a parole «divergence»).
`∇×(y z; x z; x y)`	Il rotore (anche rot, curl, \nabla \times); per un campo (P; Q) un solo numero.
`Δ(x^2 y + y^3)`	Il laplaciano di una funzione di due o tre variabili (anche laplace(...), ∇², \Delta).
`potential (2x + y; x + 2y)`	Il potenziale di un campo conservativo (anche potential(...)); il campo può avere un nome: «div F, F = (y; x; 0)».
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Un integrale curvilineo – un campo (P; Q) o una funzione f, poi la curva: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); anche cw (in senso orario), method=green / method=potential (anche a parole «line integral … along …»). Dopo la curva anche quantity=mass / centroid / inertia (con axis=…); area al posto della funzione calcola l'area dentro una curva chiusa.
`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	La massa di un filo con la densità f, quantity=centroid il suo baricentro, quantity=inertia il suo momento d'inerzia (axis=x, y, z).

`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	Il planimetro – l'area dentro una curva piana chiusa dall'integrale lungo il suo bordo (teorema di Green).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	Da una foto $\oint_C$ o $\int_C$ con P dx + Q dy, F·dr o f ds; la curva dopo una virgola o nella riga successiva (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Un integrale di prima specie – la curva in forma parametrica con l'intervallo del parametro (anche t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Un integrale triplo – la funzione, poi il solido con disuguaglianze o una preimpostazione ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); coordinate cart, cyl, sph, l'ordine order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (con axis=x). A parole «triple integral of z over V: …», «volume of the solid …», «mass of the solid … with density …», «centroid of the solid …», «moment of inertia of the solid … about the z-axis».
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Da una foto $\iiint$ (\iiint_V) con dV o dx dy dz; il solido dopo una virgola (V: …) o sotto l'integrale.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Con estremi iterati – tre integrali di seguito, i differenziali alla fine o subito dopo il loro integrale.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Un integrale di superficie – una funzione f, un campo (P; Q; R) o curl(P; Q; R), poi la superficie: graph(z = …; disuguaglianze di D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (la sola superficie laterale), closed (una semisfera con la sua base), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. A parole «surface integral of … over …», «flux of … through …». Con una funzione f anche quantity=mass / centroid / inertia (con axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	Da una foto $\iint_S$ o $\oiint_S$ con f dS, F·dS o F·n dS; la superficie dopo una virgola o nella riga successiva: S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (con $z \ge 0$ una semisfera), $x^2 + y^2 = R^2$ con limiti di z (la superficie laterale di un cilindro), z =

	g(x, y) con disuguaglianze, r(u, v) con gli intervalli dei parametri.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	Il flusso di un rotore (∇ × F, rot F, curl F) – il campo con nome a parte; verificato con il teorema di Stokes.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	La massa, il baricentro o il momento d'inerzia di un guscio con la densità superficiale f.

Esempi

Derivate parziali seconde, anche quella mista.

Input: `second partial derivatives x^2 y + y^3`

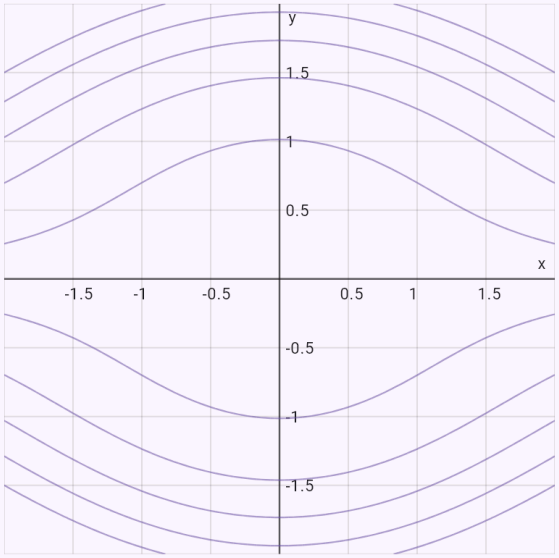
Risultato

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Passaggi

- La derivata parziale rispetto a x – le altre variabili sono costanti: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- La derivata parziale rispetto a y – le altre variabili sono costanti: $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- La derivata parziale rispetto a xx – le altre variabili sono costanti: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- La derivata parziale rispetto a xy – le altre variabili sono costanti: $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- La derivata parziale rispetto a yy – le altre variabili sono costanti: $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Grafico



Curve di livello di f.

Estremi locali – un punto di sella e un minimo.

Input: `extrema of x^3 - 3xy + y^3`

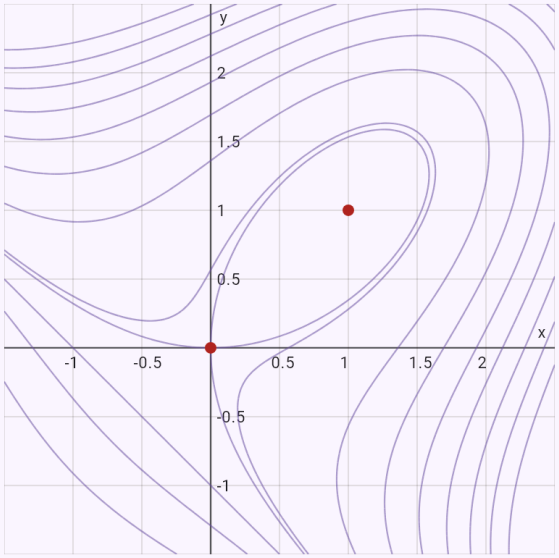
Risultato

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Passaggi

- La derivata parziale rispetto a x – le altre variabili sono costanti: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- La derivata parziale rispetto a y – le altre variabili sono costanti: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- I punti stazionari $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ risolvono il sistema in cui entrambe le derivate parziali sono nulle
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Le derivate parziali seconde $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ e il determinante hessiano
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- In $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – un punto di sella, nessun estremo ($f(0;\ 0) = 0$).
- In $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$ – un minimo locale $f(1;\ 1) = -1$

Grafico



Curve di livello di f.

Un estremo vincolato con il metodo di Lagrange.

Input: `extrema of xy, x + y = 1`

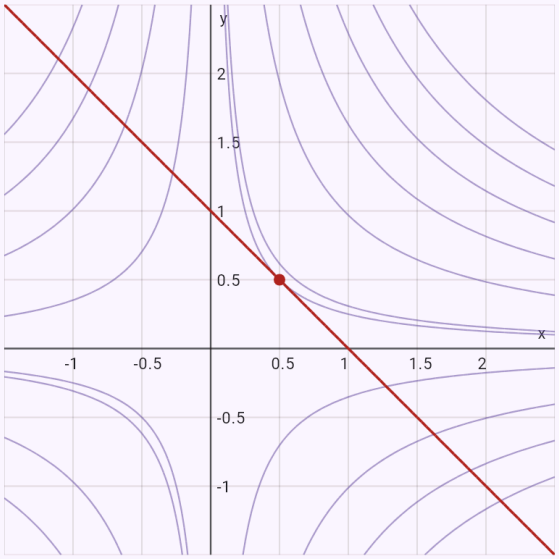
Risultato

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Passaggi

- La funzione lagrangiana con il moltiplicatore λ: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Le sue derivate parziali sono nulle e il vincolo è soddisfatto
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Candidati per un estremo vincolato (le soluzioni del sistema): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- In $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ l'hessiano orlato è positivo – un massimo locale vincolato $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Grafico



Curve di livello di f.

La derivata direzionale e la crescita più rapida.

Input: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

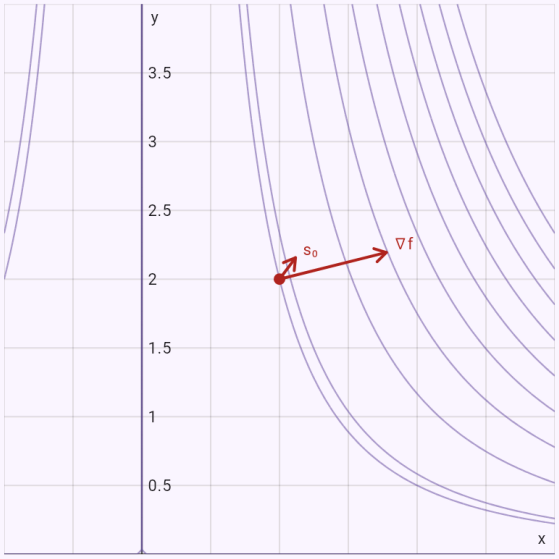
Risultato

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Passaggi

- La derivata parziale rispetto a x – le altre variabili sono costanti: $f_x = 2xy$
- La derivata parziale rispetto a y – le altre variabili sono costanti: $f_y = x^2$
- Trasformiamo la direzione in un versore: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Il gradiente in $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- La derivata direzionale è il prodotto scalare del gradiente e del versore $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- La crescita più rapida è lungo il gradiente, con velocità $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Grafico



Curve di livello di f. La freccia ∇f punta nella direzione di crescita più rapida.

Il piano tangente a un paraboloide.

Input: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

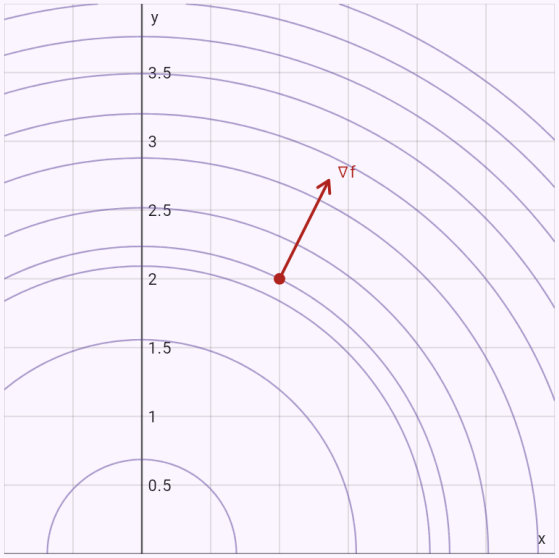
Risultato

$$z = 2x + 4y - 5$$

Passaggi

- La derivata parziale rispetto a x – le altre variabili sono costanti: $f_x = 2x$
- La derivata parziale rispetto a y – le altre variabili sono costanti: $f_y = 2y$
- La terza coordinata del punto di tangenza: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Sostituiamo nel piano tangente z − z_0 = f_x·(x − x_0) + f_y·(y − y_0): $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Il vettore normale del piano: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Grafico



Curve di livello di f. La freccia ∇f punta nella direzione di crescita più rapida.

Un integrale doppio su un triangolo.

Input: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Risultato

$$\frac{1}{8}$$

Ordine di integrazione:

✓ dy dx | dx dy

Coordinate:

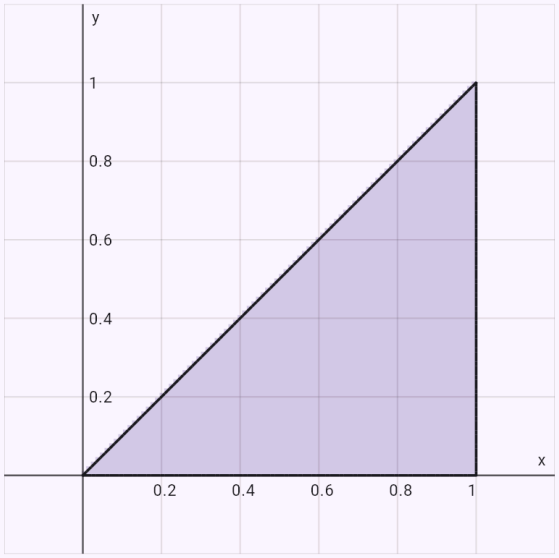
✓ Cartesiane | Polari

Passaggi

- Descriviamo la regione come dominio normale: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- L'integrale interno rispetto a y (l'altra variabile è una costante): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- L'integrale esterno rispetto a x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Grafico

✓ 2D | 3D



La regione di integrazione.

L’integrale interno non è elementare – l’app scambia l’ordine da sola.

Input: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Risultato

$$\frac{e-1}{2}$$

Ordine di integrazione:

✓ dx dy | dy dx

Coordinate:

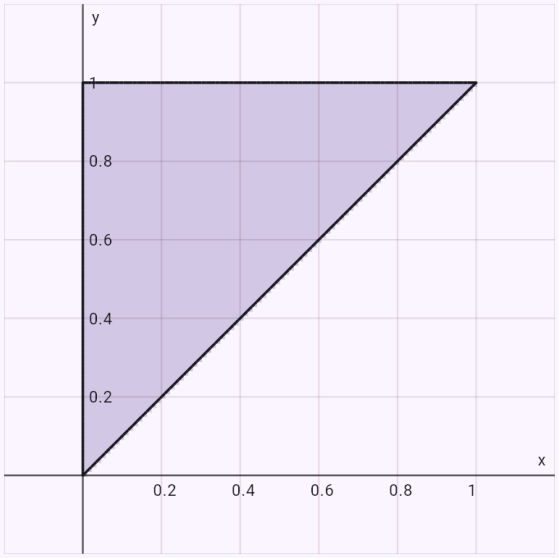
✓ Cartesiane | Polari

Passaggi

- L’integrale interno rispetto a y non ha una primitiva elementare, quindi scambiamo l’ordine di integrazione.
- Descriviamo la regione come dominio normale: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato: $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- L’integrale interno rispetto a x (l’altra variabile è una costante): $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- L’integrale esterno rispetto a y: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Grafico

✓ 2D | 3D



La regione di integrazione.

Un quarto di cerchio in coordinate polari.

Input: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Risultato

$$\frac{\pi}{8}$$

Coordinate:

Cartesiane | ✓ Polari

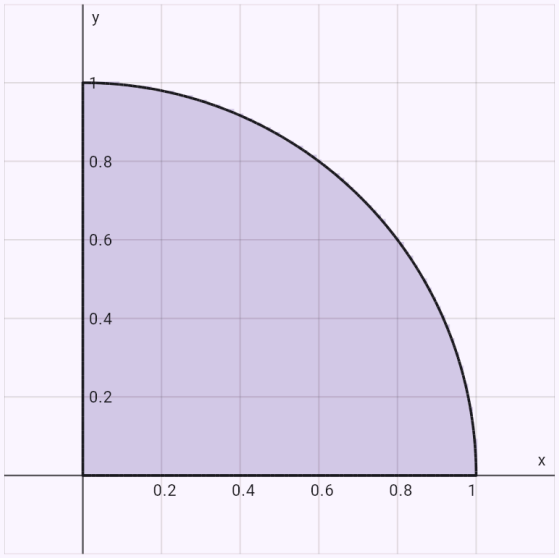
Passaggi

- Coordinate polari: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, dove r è lo jacobiano della trasformazione. La funzione integranda: $f \cdot r = r^3$
- La regione in coordinate polari: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- L'integrale interno rispetto a r (l'altra variabile è una costante): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- L'integrale esterno rispetto a φ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

Grafico

✓ 2D | 3D



La regione di integrazione.

La divergenza di un campo nello spazio come somma di tre derivate parziali.

Input: `div(x y; y z; z x)`

Risultato

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Per questo campo calcola:

✓ divergenza | rotore | potenziale

Passaggi

- Il campo vettoriale e le sue componenti: $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- La derivata parziale rispetto a x – le altre variabili sono costanti: $\frac{\partial P}{\partial x} = y$
- La derivata parziale rispetto a y – le altre variabili sono costanti: $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$
- La derivata parziale rispetto a z – le altre variabili sono costanti: $\frac{\partial R}{\partial z} = x$
- La divergenza è la somma delle derivate parziali delle componenti, ciascuna rispetto alla “sua” variabile $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

Il rotore di un vortice piano – le frecce del campo girano attorno all’origine.

Input: `rot(-y; x)`

Risultato

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

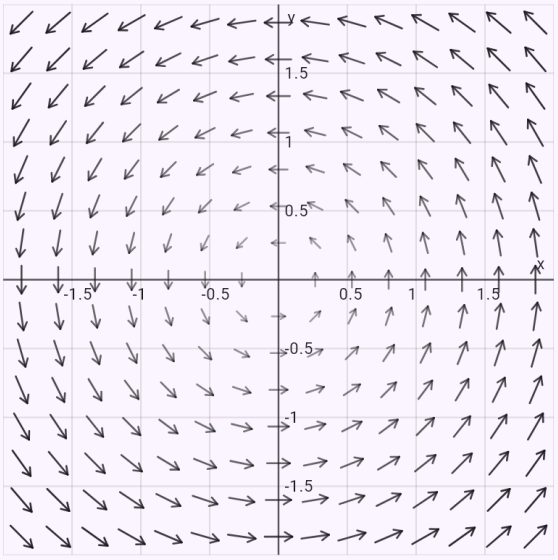
Per questo campo calcola:

divergenza | ✓ rotore | potenziale

Passaggi

- Il campo vettoriale e le sue componenti: $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Per un campo piano il rotore è un solo numero – la componente z, ∂Q/∂x − ∂P/∂y $(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Grafico



Le frecce mostrano direzione e intensità del campo (più lunga e più scura = più intenso).

Una funzione armonica – il laplaciano è nullo.

Input: `Δ(x^2 - y^2)`

Risultato

$$\Delta f = 0$$

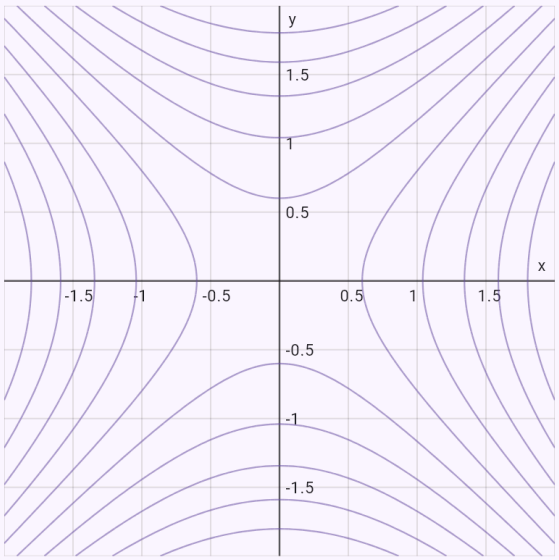
Per questa funzione calcola:

✓ laplaciano Δf | gradiente ∇f

Passaggi

- La derivata parziale prima e seconda rispetto a x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- La derivata parziale prima e seconda rispetto a y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- Il laplaciano è la somma delle derivate parziali seconde:
  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – la funzione è armonica.

Grafico



Curve di livello di f.

Il potenziale come a scuola: P integrata rispetto a x, confrontata con Q, verificata; grafico con le

equipotenziali.

Input: `potential(2x y; x^2)`

Risultato

$$\varphi = x^2 y + C$$

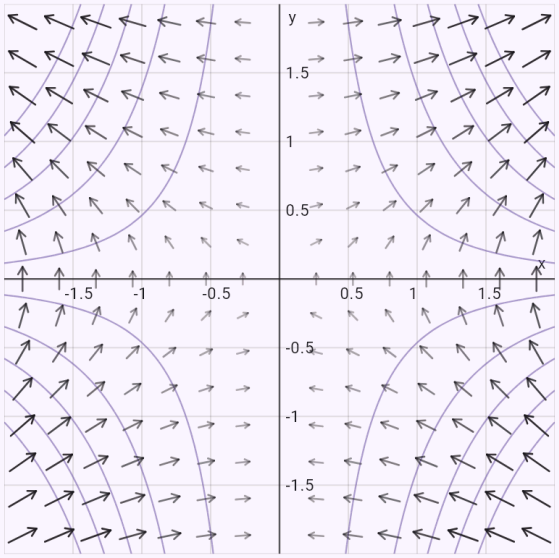
Per questo campo calcola:

divergenza | rotore | ✓ potenziale

Passaggi

- Il campo vettoriale e le sue componenti:
  $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Il rotore è zero (nel piano ∂Q/∂x = ∂P/∂y), il campo è conservativo, quindi ha senso cercare un potenziale:
  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Cerchiamo φ con ∇φ = F. Integriamo P rispetto a x; la costante di integrazione può dipendere dalle altre variabili: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Deriviamo φ rispetto a y e confrontiamo con la componente Q – resta la derivata della "costante"
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- Integriamo la "costante" rispetto a y; la nuova può dipendere solo dalle variabili rimanenti, alla fine è un numero C: $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Verifica – il gradiente del potenziale è il campo dato:
  $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Grafico



Le frecce mostrano direzione e intensità del campo (più lunga e più scura = più intenso). Le linee di livello del potenziale φ (equipotenziali) – il campo è ovunque perpendicolare a esse.

Il lavoro di un campo conservativo – con la parametrizzazione, verificato con il potenziale φ = x²y.

Input: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Risultato

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Calcola:

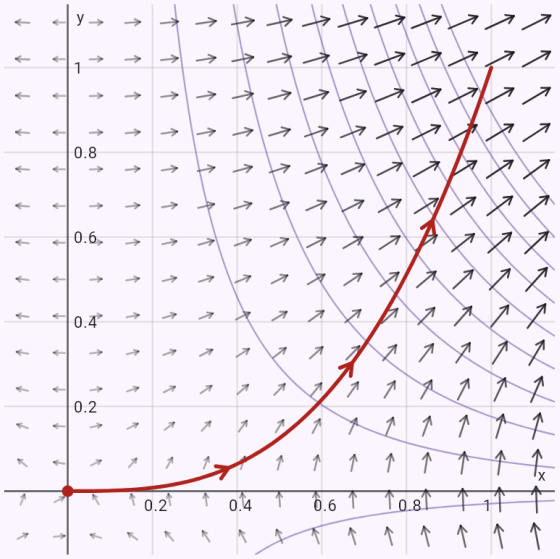
✓ con la parametrizzazione | con il potenziale

Modifica nel modulo

Passaggi

- Un integrale curvilineo di seconda specie di un campo vettoriale lungo la curva orientata C (per esempio il lavoro di una forza lungo un percorso):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- La parametrizzazione della curva:
  $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione:
  $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Resta un normale integrale definito sull'intervallo del parametro: $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Verifica: il campo è conservativo, ha un potenziale φ e l'integrale è indipendente dal percorso – basta la differenza φ(B) − φ(A)
  $\varphi = x^2 y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale). Le frecce mostrano direzione e intensità del campo (più lunga e più scura = più intenso). Le linee di livello del potenziale φ (equipotenziali) – il campo è ovunque perpendicolare a esse.

Una circuitazione lungo la circonferenza unitaria da una foto, verificata con il teorema di Green in

coordinate polari.

Input: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Risultato

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Calcola:

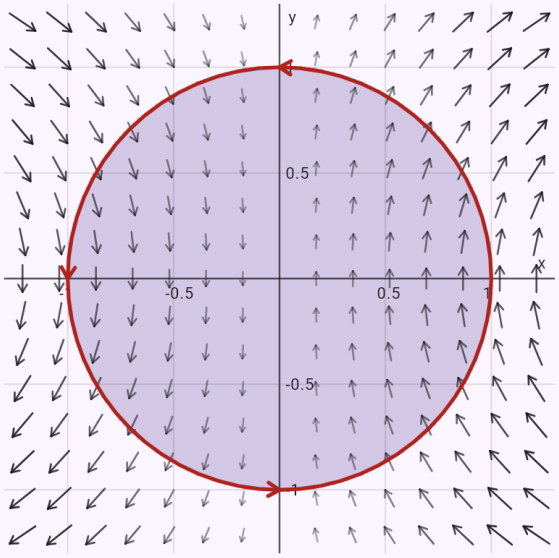
- ✓ con la parametrizzazione
- con il teorema di Green

Modifica nel modulo

Passaggi

- La curva è chiusa – l'integrale di seconda specie lungo di essa è la circuitazione del campo:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- La circonferenza di centro S e raggio r, percorsa una volta (parametrizzazione con l'angolo t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione:
  $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cos$
- Resta un normale integrale definito sull'intervallo del parametro: $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Verifica con il teorema di Green: la curva è orientata positivamente (in senso antiorario), l'integrale lungo di essa è uguale all'integrale doppio sulla regione D interna
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- La regione D dentro la curva – l'integrale doppio su di essa: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Coordinate polari: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, dove r è lo jacobiano della trasformazione. La funzione integranda: $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- La regione in coordinate polari: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- L'integrale interno rispetto a r (l'altra variabile è una costante)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$
- L'integrale esterno rispetto a φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- I due membri del teorema di Green coincidono:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale). Le frecce mostrano direzione e intensità del campo (più lunga e più scura = più intenso). È ombreggiata la regione D dentro la curva del teorema di Green.

La lunghezza di una parabola – l'integrale di 1 di prima specie.

Input: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Risultato

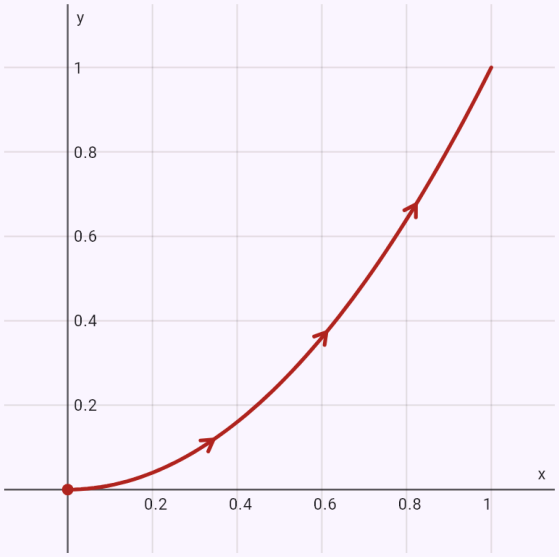
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Modifica nel modulo

Passaggi

- Un integrale curvilineo di prima specie di f lungo la curva C – sommiamo f per la lunghezza ds di piccoli pezzi di curva: $\int_C ds$
- Il grafico di una funzione – il parametro è x stesso (parametrizzazione r(x) = (x; f(x))): $y = x^2: \quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione: $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- La sua lunghezza; l'elemento di lunghezza d'arco è ds = | r'(t)| dt: $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Sostituiamo la parametrizzazione in f e moltiplichiamo per la lunghezza del vettore tangente: $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Resta un normale integrale definito sull'intervallo del parametro $\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$
- L'integrale di 1 ds è la lunghezza della curva (con una densità f al posto di 1 sarebbe la massa di un filo).

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale).

Un’elica nello spazio – un grafico 3D ruotabile con le frecce del campo.

Input: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Risultato

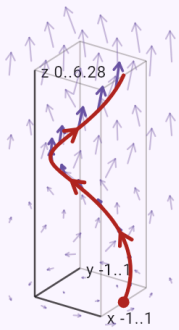
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Modifica nel modulo

Passaggi

- Un integrale curvilineo di seconda specie di un campo vettoriale lungo la curva orientata C (per esempio il lavoro di una forza lungo un percorso):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- La parametrizzazione della curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Resta un normale integrale definito sull’intervallo del parametro: $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale). Le frecce mostrano il campo, più marcate sulla curva. Ruotalo trascinando un dito.

Il baricentro di una semicirconferenza – la massa e due momenti statici.

Input: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Risultato

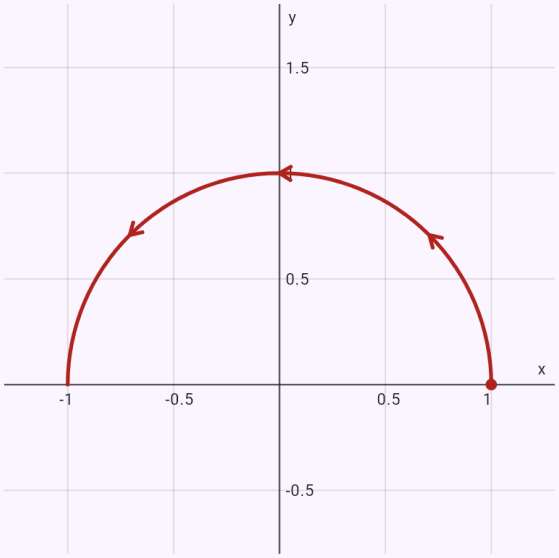
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Modifica nel modulo

Passaggi

- Un integrale curvilineo di prima specie di f lungo la curva C – sommiamo f per la lunghezza ds di piccoli pezzi di curva: $\int_C ds$
- Il baricentro del filo: i momenti statici (l'integrale di una coordinata per la densità) divisi per la massa, analogamente per y (e z)
  $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- La parametrizzazione della curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- La sua lunghezza; l'elemento di lunghezza d'arco è ds = | r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Sostituiamo la parametrizzazione in f e moltiplichiamo per la lunghezza del vettore tangente:
  $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Resta un normale integrale definito sull'intervallo del parametro: $\int_0^\pi 1\, dt = \pi$
- Il momento statico per la coordinata x – gli stessi passaggi con la funzione integranda $x \cdot \rho$:
  $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Il momento statico per la coordinata y – gli stessi passaggi con la funzione integranda $y \cdot \rho$:
  $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Le coordinate del baricentro sono i momenti divisi per la massa: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale).

L’area di un’ellisse con il planimetro: ½∮ x dy − y dx = πab.

Input: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Risultato

$$A = 6\pi$$

Calcola:

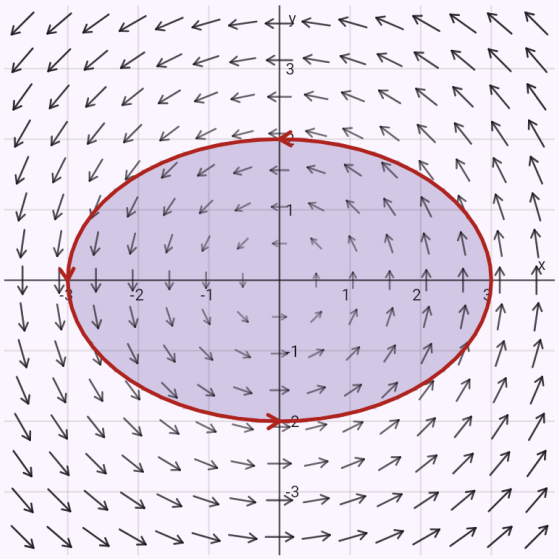
- ✓ con la parametrizzazione
- con il teorema di Green

Modifica nel modulo

Passaggi

- La curva è chiusa – l’integrale di seconda specie lungo di essa è la circuitazione del campo:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- L’area dentro una curva chiusa come integrale curvilineo lungo il suo bordo (il planimetro) – con il teorema di Green con Q_x − P_y = 1: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- La parametrizzazione della curva:
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Il vettore tangente – la derivata della parametrizzazione:
  $\vec{r}'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \frac{3}{2}$
- Resta un normale integrale definito sull’intervallo del parametro: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Verifica con il teorema di Green: la curva è orientata positivamente (in senso antiorario), l’integrale lungo di essa è uguale all’integrale doppio sulla regione D interna
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- La regione D dentro la curva – l’integrale doppio su di essa: $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Descriviamo la regione come dominio normale:
  $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato
  $\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$
- L’integrale interno rispetto a y (l’altra variabile è una costante)
  $\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$
- L’integrale esterno rispetto a x
  $\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$
- I due membri del teorema di Green coincidono:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

Grafico



La curva C con frecce nel verso della sua orientazione (il punto = il punto iniziale). Le frecce mostrano direzione e intensità del campo (più lunga e più scura = più intenso). È ombreggiata la regione D dentro la curva del teorema di Green.

La semisfera superiore in coordinate sferiche – lo jacobiano ρ² sin θ, gli estremi di ρ, θ, φ.

Input: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Risultato

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Calcola in coordinate:

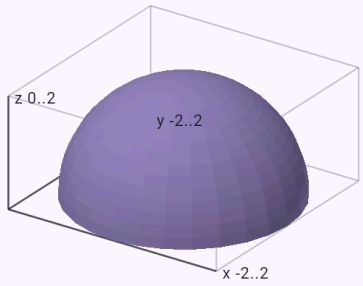
cartesiane | cilindriche | ✓ sferiche

Modifica nel modulo

Passaggi

- L'integrale triplo della funzione sul solido V: $\iiint_V z\,dV$
- Coordinate sferiche – J = ρ² sin θ è lo jacobiano della trasformazione (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); la sostituzione e la funzione integranda
  $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$
  $f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$
- Il solido in coordinate sferiche:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo
  $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$
- L'integrale più interno rispetto a ρ (le altre variabili sono costanti)
  $\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$
- L'integrale intermedio rispetto a θ
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$
- L'integrale esterno rispetto a φ: $\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

Grafico



Il solido V su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Un tetraedro con estremi iterati – tre integrali uno dopo l'altro.

Input: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Risultato

$$\frac{1}{24}$$

Calcola in coordinate:

- ✓ cartesiane
- cilindriche
- sferiche

Modifica nel modulo

Passaggi

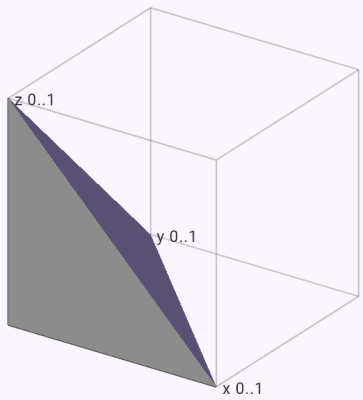
- L'integrale triplo della funzione sul solido V: $\iiint_V x \, dV$
- Descriviamo il solido come dominio normale – z sta tra due superfici sopra la proiezione del solido: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le -x-y+1$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- L'integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti): $\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x-y+1)$
- L'integrale intermedio rispetto a y

$$\int_0^{1-x} (x(-x-y+1))\, dy = \left[-\frac{x(x+y-1)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

- L'integrale esterno rispetto a x

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Grafico



Il solido V su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il volume di un cono in coordinate cilindriche.

Input: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Risultato

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Calcola in coordinate:

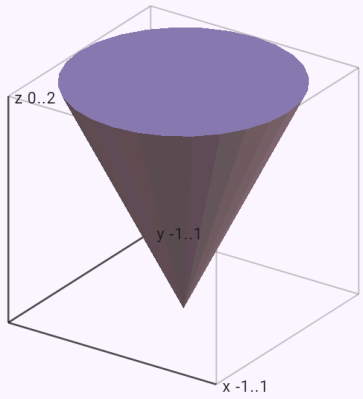
cartesiane | ✓ cilindriche

Modifica nel modulo

Passaggi

- Il volume del solido è l'integrale triplo di uno:
  $V = \iiint_V dV$
- Coordinate cilindriche – J = r è lo jacobiano della trasformazione (dV = r dr dφ dz); la sostituzione e la funzione integranda
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- Il solido in coordinate cilindriche:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 r\,dz\,dr\,d\varphi$
- L'integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti): $\int_{2r}^2 r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- L'integrale intermedio rispetto a r
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- L'integrale esterno rispetto a φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Grafico



Il solido V su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il baricentro di una semisfera – la massa e tre momenti statici.

Input: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Risultato

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Il solido o la funzione contiene x² + y² + z² – le coordinate sferiche sono spesso più semplici:

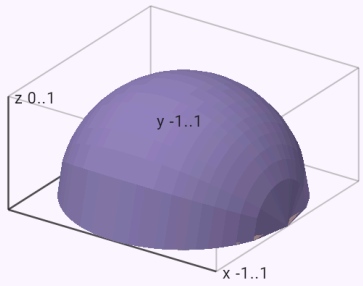
✓ cartesiane | cilindriche | sferiche

Modifica nel modulo

Passaggi

- Il baricentro del solido: ogni coordinata è un momento statico (l'integrale della coordinata per la densità) diviso per la massa m, analogamente per y e z:
$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$$
- Descriviamo il solido come dominio normale – z sta tra due superfici sopra la proiezione del solido
$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-}$$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- L'integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti)
$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- L'integrale intermedio rispetto a y
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\sqrt{}\right.}{2}\right.$$
- L'integrale esterno rispetto a x
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- Il momento statico per la coordinata x – gli stessi passaggi con la funzione integranda $x \cdot \rho$
$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Il momento statico per la coordinata y – gli stessi passaggi con la funzione integranda $y \cdot \rho$
$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Il momento statico per la coordinata z – gli stessi passaggi con la funzione integranda $z \cdot \rho$
$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- Le coordinate del baricentro sono i momenti divisi per la massa
$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Grafico



Il solido V su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il momento d’inerzia di un cilindro rispetto al suo asse.

Input: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Risultato

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Calcola in coordinate:

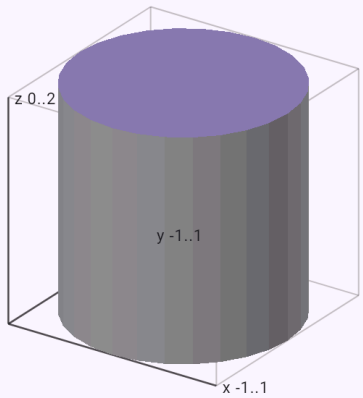
cartesiane | ✓ cilindriche

Modifica nel modulo

Passaggi

- Il momento d’inerzia rispetto all’asse z – la densità per il quadrato della distanza d dall’asse:
  $$I_z = \iiint_V d^2\, dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$
- Coordinate cilindriche – J = r è lo jacobiano della trasformazione (dV = r dr dφ dz); la sostituzione e la funzione integranda
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- Il solido in coordinate cilindriche:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo: $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{2} r^3\, dz\, dr\, d\varphi$
- L’integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti): $\int_0^2 r^3\, dz = \left[z r^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- L’integrale intermedio rispetto a r:
  $$\int_0^1 2r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$$
- L’integrale esterno rispetto a φ
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Grafico



Il solido V su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il flusso uscente attraverso una sfera – parametrizzata con gli angoli θ, φ e verificato con il teorema di

Gauss.

Input: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Risultato

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Calcola:

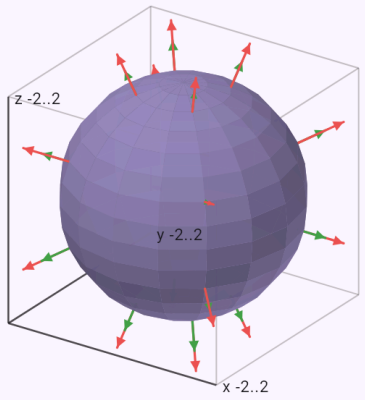
- ✓ con la parametrizzazione
- con il teorema della divergenza

Modifica nel modulo

Passaggi

- Il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie S – un integrale di superficie di seconda specie:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Una parametrizzazione della sfera con gli angoli θ (dall'asse z positivo) e φ (attorno all'asse z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Le derivate parziali rispetto ai parametri – i vettori tangenti della superficie
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Il vettore normale (il prodotto vettoriale dei vettori tangenti) orientato verso l'esterno del solido
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot si\right.$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore normale (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- L'integrale doppio sul rettangolo dei parametri
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$$
- Verifica con il teorema della divergenza (di Gauss): il flusso uscente dalla superficie chiusa è l'integrale triplo della divergenza sul solido interno
- L'integrale triplo della funzione sul solido V: $\iiint_V 3\,dV$
- Descriviamo il solido come dominio normale – z sta tra due superfici sopra la proiezione del solido
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$$
- L'integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti)
  $$\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = \left[3z\right]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2-}$$
- L'integrale intermedio rispetto a y
  $$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right)dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right($$
- L'integrale esterno rispetto a x
  $$\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- Il teorema della divergenza dà lo stesso valore:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$

Grafico



La superficie S con le sue normali (verdi) e le frecce del campo (rosse). Ruotalo trascinando un dito.

L’area di un paraboloide – l’elemento di superficie del grafico, un integrale doppio in coordinate polari.

Input: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Risultato

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Modifica nel modulo

Passaggi

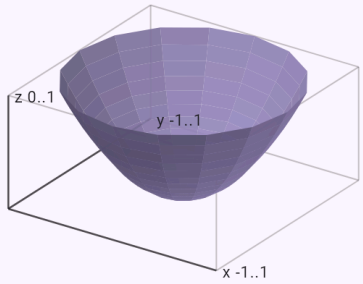
- L’area della superficie S è l’integrale di superficie di uno: $\iint_S dS$
- La superficie è il grafico di z = g(x, y) sopra la regione D nel piano xy: $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \le 1$
- Le derivate parziali di g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- L’elemento di superficie del grafico: $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Sostituiamo la parametrizzazione in f e moltiplichiamo per l’elemento di superficie: $f(x, y, g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- L’integrale di superficie su un grafico è un integrale doppio sulla sua proiezione D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Coordinate polari: $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, dove r è lo jacobiano della trasformazione. La funzione integranda: $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- La regione in coordinate polari: $0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1$
- Per il teorema di Fubini, lo scriviamo come integrale iterato: $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- L’integrale interno rispetto a r (l’altra variabile è una costante)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2 + 1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1 + 5\sqrt{}}{12}$$

- L’integrale esterno rispetto a φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1 + 5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{(-1 +}{}$$

Grafico



La superficie S su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il flusso attraverso un cilindro chiuso con il teorema di Gauss, verificato parte per parte – la superficie

laterale e due dischi.

Input: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Risultato

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$$

Calcola:

con la parametrizzazione

✓ con il teorema della divergenza

Modifica nel modulo

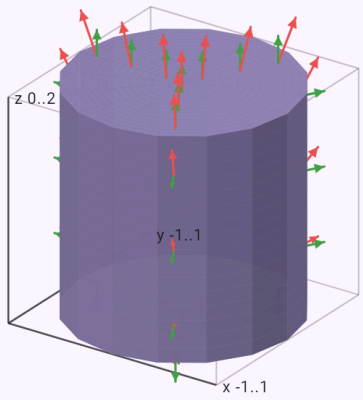
Passaggi

- Il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie S – un integrale di superficie di seconda specie:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Per il teorema della divergenza (di Gauss) il flusso uscente da una superficie chiusa è uguale all'integrale triplo della divergenza sul solido V interno
- L'integrale triplo della funzione sul solido V: $\iiint_V 3\,dV$
- Descriviamo il solido come dominio normale – z sta tra due superfici sopra la proiezione del solido:
  $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Per il teorema di Fubini lo scriviamo come integrale iterato triplo: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} 3\,dz\,dy\,dx$
- L'integrale più interno rispetto a z (le altre variabili sono costanti): $\int_0^2 3\,dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- L'integrale intermedio rispetto a y

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\,dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$$

- L'integrale esterno rispetto a x
  $$\int_{-1}^{1}\left(12\sqrt{1-x^2}\right)dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$$
- La verifica con la parametrizzazione della superficie dà lo stesso valore: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$

Grafico



La superficie S con le sue normali (verdi) e le frecce del campo (rosse). Ruotalo trascinando un dito.

Il flusso di un rotore attraverso una semisfera – verificato con il teorema di Stokes lungo l'equatore.

Input: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Risultato

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Calcola:

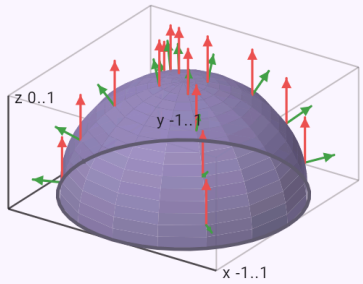
- ✓ con la parametrizzazione
- con il teorema di Stokes

Modifica nel modulo

Passaggi

- Il flusso del rotore del campo attraverso S – un integrale di superficie di seconda specie, calcolabile anche con il teorema di Stokes
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Il rotore del campo
$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Una parametrizzazione della semisfera superiore – θ solo fino a π/2
$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Le derivate parziali rispetto ai parametri – i vettori tangenti della superficie
$$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Il vettore normale (il prodotto vettoriale dei vettori tangenti) orientato verso l'esterno del solido
$$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Sostituiamo la parametrizzazione nel campo e facciamo il prodotto scalare con il vettore normale (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$
- L'integrale doppio sul rettangolo dei parametri
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Verifica con il teorema di Stokes: il flusso del rotore è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo (regola della mano destra)
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- I lati del rettangolo dei parametri che vanno in un punto o sono percorsi due volte in versi opposti (una cucitura) si compensano – resta il vero bordo della superficie.
- Una parte del bordo
$$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- L'integrale curvilineo lungo di essa:
$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$
- Il teorema di Stokes dà lo stesso valore:
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Grafico



La superficie S con le sue normali (verdi) e le frecce del campo (rosse). Il bordo con una freccia del suo verso. Ruotalo trascinando un dito.

Un integrale di superficie di prima specie su una semisfera data dalla sua equazione.

Input: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Risultato

$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Modifica nel modulo

Passaggi

- L'integrale di superficie di prima specie di f sulla superficie S: $\iint_S z \, dS$
- Una parametrizzazione della semisfera superiore – θ solo fino a π/2

  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Le derivate parziali rispetto ai parametri – i vettori tangenti della superficie

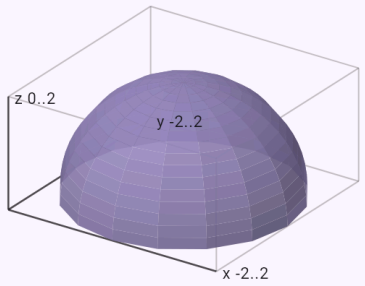
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Il prodotto vettoriale dei vettori tangenti è un vettore normale, la sua lunghezza dà l'elemento di superficie dS = |r_u × r_v| du dv

  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Sostituiamo la parametrizzazione in f e moltiplichiamo per l'elemento di superficie:

  $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- L'integrale doppio sul rettangolo dei parametri

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$$

Grafico



La superficie S su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Il momento d’inerzia di un guscio sferico rispetto all’asse z.

Input: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Risultato

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

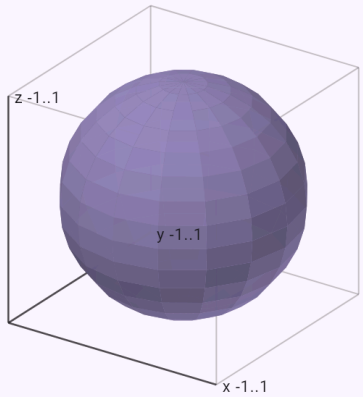
Modifica nel modulo

Passaggi

- L’integrale di superficie di prima specie di f sulla superficie S: $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- Il momento d’inerzia del guscio rispetto all’asse z – la densità per il quadrato della distanza d dall’asse: $I_z = \iint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Una parametrizzazione della sfera con gli angoli θ (dall’asse z positivo) e φ (attorno all’asse z) $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Le derivate parziali rispetto ai parametri – i vettori tangenti della superficie $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Il prodotto vettoriale dei vettori tangenti è un vettore normale, la sua lunghezza dà l’elemento di superficie dS = |r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Sostituiamo la parametrizzazione in f e moltiplichiamo per l’elemento di superficie: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- L’integrale doppio sul rettangolo dei parametri

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Grafico



La superficie S su cui si integra. Ruotalo trascinando un dito.

Una mappa dei teoremi integrali

Tutti i teoremi integrali dicono la stessa cosa: l’integrale di una derivata su una regione è uguale a un integrale sul suo bordo. Il bordo di un segmento sono due punti, di una superficie una curva, di un solido una superficie chiusa; il teorema di Stokes generalizzato ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω dice tutto in una volta. L’app usa i teoremi come seconda via di calcolo e come verifica (i chip sotto un risultato); il glossario mostra la stessa mappa alla voce «Teoremi integrali».

Come inserirlo

`∫ f’(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	La formula di Newton–Leibniz – all’interno: la derivata su [a; b], sul bordo: i valori agli estremi.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Il teorema del gradiente (un potenziale, l’indipendenza dal cammino) – all’interno: il gradiente lungo una

	curva, sul bordo: il potenziale ai suoi estremi.
`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Il teorema di Green – all'interno: ∂Q/∂x − ∂P/∂y su una regione piana, sul bordo: la circuitazione lungo la curva chiusa.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Il teorema di Stokes – all'interno: il flusso del rotore attraverso una superficie, sul bordo: la circuitazione lungo il suo contorno.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Il teorema di Gauss – all'interno: la divergenza su un solido, sul bordo: il flusso uscente attraverso la superficie chiusa.

Applicazioni fisiche dei teoremi integrali

La sezione «Applicazioni» (gli ambiti Fisica e Analisi in più variabili, l'elettricità anche in Elettrotecnica, il flusso e il calore in Ingegneria) ha modelli con unità: la legge di Gauss (una sfera, una retta, un piano), la legge di Ampère e quella di Biot–Savart (un filo, un solenoide, un toroide, una spira), l'induzione elettromagnetica (un flusso magnetico, un campo variabile, un generatore), un condensatore (piano, sferico, cilindrico), l'energia di un campo, il lavoro in un campo di forze (gravità, una molla, la forza di Coulomb), il flusso di un fluido (una portata, un profilo parabolico, l'equazione di continuità, circuitazione e rotore), la conduzione del calore (una parete piana e una cilindrica) e il campo gravitazionale con la legge di Gauss.

I passaggi iniziano con la legge integrale, poi spiegano la simmetria (sulla superficie o curva scelta il campo è costante e diretto lungo la normale o la tangente), mostrano l'integrale calcolato, la carica, la corrente o la massa racchiusa e la formula in cui sostituire. Le leggi elettromagnetiche hanno anche la loro forma differenziale – la voce del glossario «Equazioni di Maxwell» ha entrambe le forme affiancate. Il grafico mostra il campo in funzione della distanza (E(r), B(r), g(r)), un profilo di velocità, la temperatura in una parete o la tensione di un generatore.

Esempi

Il campo dentro una sfera uniformemente carica – la carica racchiusa Q r³/R³, il campo cresce

linearmente.

Input: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Risultato

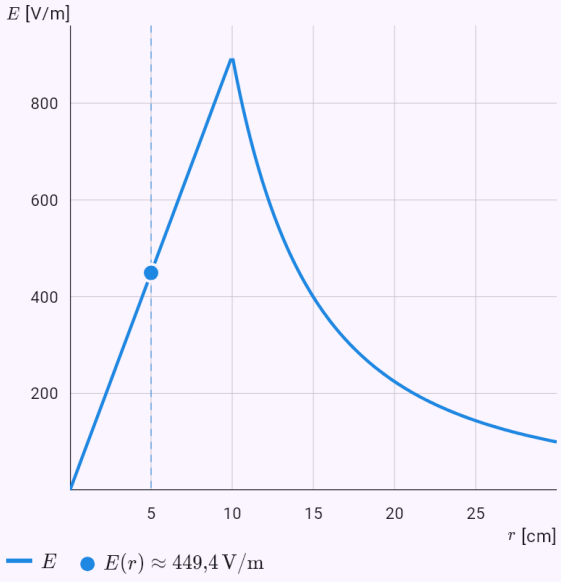
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Passaggi

- Incognita E; dati: $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Una carica Q distribuita simmetricamente rispetto al centro – sulla superficie di una sfera (una sfera conduttrice, un guscio) o uniformemente in tutto il suo volume. La superficie gaussiana è una sfera concentrica di raggio r; all'esterno la carica agisce come una carica puntiforme. Equazione del modello: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$
- Simmetria: il campo è radiale e ha lo stesso modulo su ogni sfera concentrica. Prendiamo come superficie gaussiana una sfera di raggio r – su di essa il campo è parallelo alla normale e costante.
- L'integrale calcolato: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- La carica racchiusa
  $$Q_{\text{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$$
- Ricaviamo l'incognita
  $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
- Sostituiamo
  $$E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

- La stessa legge in forma differenziale (equazioni di Maxwell): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il campo magnetico di un filo rettilineo con la legge di Ampère lungo una circonferenza attorno all'asse.

Input: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

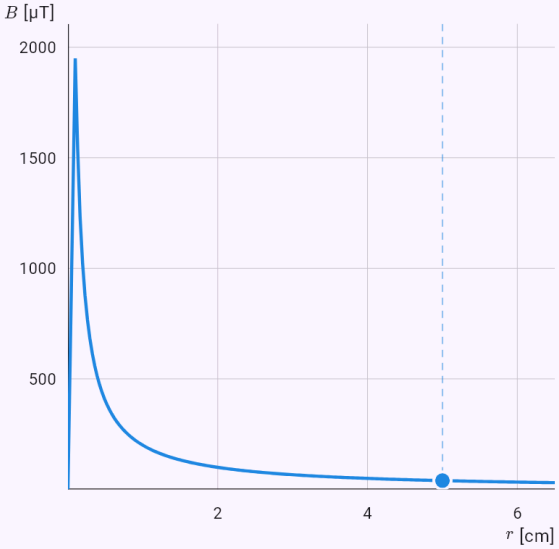
Risultato

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Passaggi

- Incognita B; dati: $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un lungo filo rettilineo di raggio R percorso da una corrente I distribuita uniformemente sulla sezione. La curva è una circonferenza attorno all'asse del filo; dentro il filo racchiude solo parte della corrente. Equazione del modello: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Simmetria: le linee di campo sono circonferenze attorno all'asse del filo; B è tangente a esse e costante su una circonferenza di raggio r.
- L'integrale calcolato: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- La corrente concatenata: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Ricaviamo l'incognita: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Sostituiamo
  $$B = \frac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- La stessa legge in forma differenziale (equazioni di Maxwell): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Convertiamo le unità: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il campo sull’asse di una spira con la legge di Biot–Savart.

Input: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

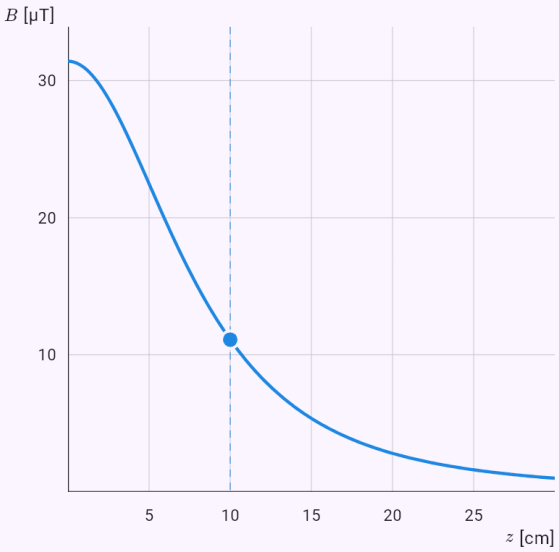
Risultato

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Passaggi

- Incognita B; dati: $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I. Il campo sul suo asse a una distanza z dal centro segue dalla legge di Biot–Savart – le componenti perpendicolari dei contributi si annullano, quelle assiali si sommano. Equazione del modello: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Ogni pezzo dl della spira dista ugualmente da un punto dell’asse, ρ = √(R² + z²), ed è perpendicolare alla retta che li congiunge. Le componenti perpendicolari all’asse si annullano lungo la spira; si sommano solo quelle assiali, dB · R/ρ.
- L’integrale calcolato
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- Ricaviamo l’incognita: $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Sostituiamo
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- Nel centro della spira (z = 0):
  $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Convertiamo le unità: $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L’ampiezza della fem di un generatore ε = NBAω e il suo andamento sinusoidale nel grafico.

Input: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2]; omega=314.16[rad_s];`

`mode=rotating)`

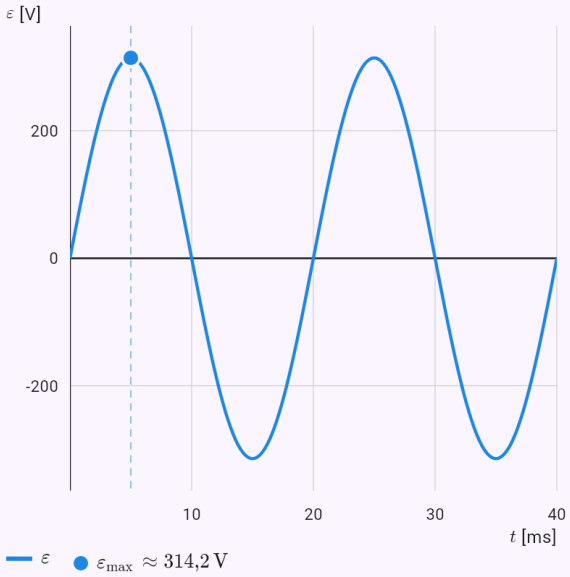
Risultato

$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$

Passaggi

- Incognita $\varepsilon_{\max}$; dati $N = 200, \quad B = 0{,}1\,\mathrm{T}, \quad A = 500\,\mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\,\mathrm{ra}$
- Convertiamo le unità: $A = 500\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$
- Una spira di N avvolgimenti ruota con velocità angolare ω in un campo uniforme B – il principio dell'alternatore. La forza elettromotrice è sinusoidale con ampiezza NBAω. Equazione del modello: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- Il flusso magnetico attraverso una spira: $\Phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- L'integrale calcolato: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Ricaviamo l'incognita: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Sostituiamo: $\varepsilon_{\max} = 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$
- La frequenza: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\,\mathrm{Hz}$
- La stessa legge in forma differenziale (equazioni di Maxwell): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Grafico



Le grandezze del modello nel tempo calcolate dalla soluzione; la risposta è evidenziata.

La capacità di un metro di cavo coassiale – il campo con la legge di Gauss, la tensione come integrale del campo.

Input: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m];`

`mode=cylindrical)`

Risultato

$$C \approx 102{,}1\,\text{pF}$$

Passaggi

- Incognita C; dati
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\,\text{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\,\text{mm}, \quad L = 1\,\text{m}$
- Convertiamo le unità
  $R_1 = 1\,\text{mm} = 0{,}001\,\text{m}, \quad R_2 = 3{,}5\,\text{mm} = 0{,}0035\,\text{m}$
- Due armature cilindriche coassiali di raggi $R_1 < R_2$ e lunghezza L – per esempio un cavo coassiale. Equazione del modello
  $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$$
- La superficie gaussiana è un cilindro coassiale di raggio r e lunghezza L tra le armature; racchiude la carica Q dell'armatura interna, e attraverso le sue basi non passa campo.
- Il campo tra le armature dalla legge di Gauss
  $$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$
- La tensione come integrale curvilineo del campo
  $$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$
- La capacità
  $$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$$
- Convertiamo le unità: $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\,\text{F} = 102{,}1\,\text{pF}$

L'energia di un campo magnetico di 1 T in un litro di volume.

Input: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Risultato

$$W \approx 397{,}9\,\text{J}$$

Passaggi

- Incognita W; dati: $B = 1\,\text{T}, \quad V = 1\,\text{l}$
- Convertiamo le unità: $V = 1\,\text{l} = 0{,}001\,\text{m}^3$
- La densità di energia di un campo magnetico nel vuoto, $w = B^2/(2\mu_0)$ – per esempio il campo dentro una bobina. Equazione del modello: $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Sostituiamo
  $$w = \frac{(1)^2}{2\cdot 1{,}257\cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\text{J/m}^3$$
- In un campo uniforme la densità di energia è ovunque la stessa; l'integrale di volume è la densità per il volume.
- Ricaviamo l'incognita: $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Sostituiamo: $W = 397\,900\cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\text{J}$
- Così una bobina percorsa da corrente immagazzina la sua energia: $W = \frac{1}{2}LI^2$

Il lavoro della gravità sollevando 1 kg dalla superficie terrestre a un'altezza di un raggio.

Input: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km]; mode=gravity)`

Risultato

$$W \approx -31{,}28\,\mathrm{MJ}$$

Passaggi

- Incognita W; dati
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 6371\,\mathrm{km}, \quad r_2$
- Convertiamo le unità
  $r_1 = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\mathrm{km} = 1{,}27$
- La forza è conservativa (ha un potenziale): il lavoro è indipendente dal percorso, dipende solo dall'inizio e dalla fine. Prendiamo quindi il percorso più semplice – lungo la retta che li congiunge.
- La gravità di un corpo di massa M agisce su un corpo m spostato da una distanza r_1 a r_2 dal centro. Un lavoro negativo del campo significa che il corpo è stato sollevato. Equazione del modello:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- L'integrale calcolato
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- Sostituiamo
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- L'energia potenziale
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Il lavoro di una forza conservativa è uguale alla perdita di energia potenziale: $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}$
- Convertiamo le unità:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J} = -31{,}28\,\mathrm{MJ}$

La portata di un flusso laminare – l'integrale del profilo parabolico in coordinate polari.

Input: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

Risultato

$$Q \approx 7{,}854\,\mathrm{l/s}$$

Passaggi

- Incognita Q; dati: $v_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}, \quad R = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertiamo le unità: $R = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Moto laminare (di Poiseuille): il fluido è fermo alla parete ed è più veloce sull'asse; il profilo di velocità è la parabola v = v_max(1 − r²/R²). Equazione del modello

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- La velocità dipende solo dalla distanza r dall'asse, quindi sulla sezione si integra in coordinate polari (dS = r dr dφ).
- L'integrale calcolato

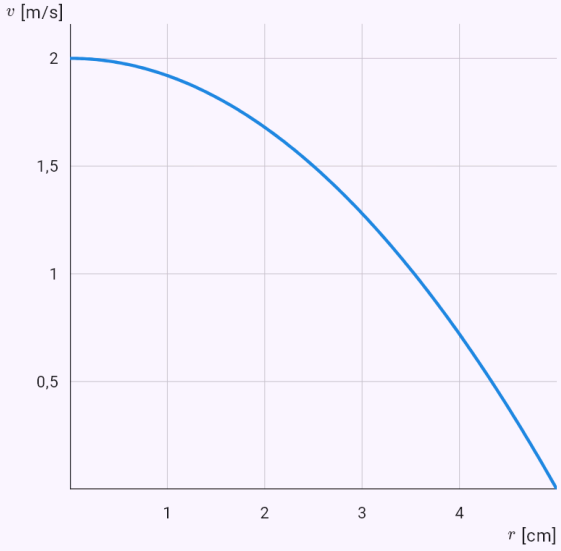
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \cdot\right.$$

- Sostituiamo

$$Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s}$$

- La velocità media sulla sezione: $\bar{v} = \dfrac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\mathrm{m/s}$
- Convertiamo le unità: $Q \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s} = 7{,}854\,\mathrm{l/s}$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La perdita di calore di un tubo isolato – la temperatura scende logaritmicamente nella parete.

Input: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC];`

`T2=20[degC]; mode=cylinder)`

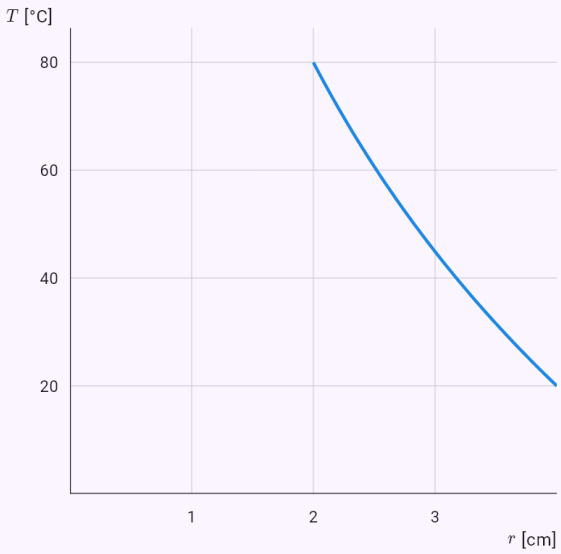
Risultato

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Passaggi

- Incognita P; dati
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Convertiamo le unità:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Una parete cilindrica – l'isolamento di un tubo di raggio interno r_1, raggio esterno r_2 e lunghezza L. Il calore attraversa cilindri di area crescente, quindi la temperatura cala logaritmicamente. Equazione del modello: $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Un regime stazionario senza sorgenti di calore – lo stesso flusso di calore attraversa ogni strato: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- L'integrale calcolato
  $$P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$$
- Ricaviamo l'incognita
  $$T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$
- Sostituiamo
  $$P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L'accelerazione di gravità a metà strada verso il centro della Terra.

Input: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

Risultato

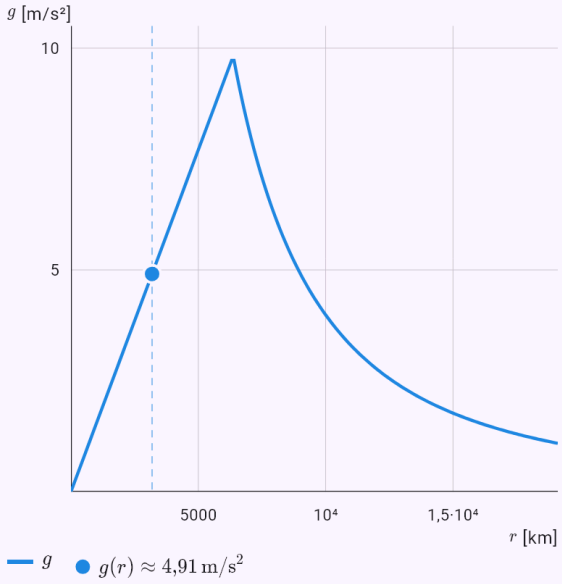
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

Passaggi

- Incognita g; dati
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- Convertiamo le unità
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Una sfera omogenea (un pianeta di densità costante). All'interno l'accelerazione di gravità cresce linearmente con la distanza dal centro. Equazione del modello:
  $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{in}}$
- Simmetria: il campo è radiale e ha lo stesso modulo su ogni sfera concentrica. Prendiamo come superficie gaussiana una sfera di raggio r – su di essa il campo è parallelo alla normale e costante.
- L'integrale calcolato: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- La massa racchiusa
  $M_{\text{in}} = M\dfrac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \dfrac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Ricaviamo l'incognita:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\text{in}} \Rightarrow g = \dfrac{G M_{\text{in}}}{r^2}$
- Sostituiamo
  $g = \dfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- La stessa legge in forma differenziale (con il teorema della divergenza): $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Limiti noti

- Estremi solo per funzioni di due variabili, quelli vincolati con un vincolo. Un integrale doppio solo su una regione limitata il cui bordo è al più quadratico in una variabile; la superficie z = f(x, y) per ora è disegnata in 3D solo per l'integrale doppio. Campi vettoriali solo nelle variabili x, y (z), le altre lettere sono costanti; le frecce si disegnano solo per un campo piano. Il potenziale si trova integrando le componenti – se un integrale non è elementare, non viene trovato. Integrali curvilinei: il teorema di Green si verifica solo per una circonferenza, un'ellisse e un poligono convesso; una curva chiusa fatta di un grafico e un segmento si può inserire solo come spezzata o a tratti in forma parametrica. Un integrale triplo solo su un solido limitato normale rispetto a una variabile (una superficie inferiore e una superiore su tutta la proiezione) e le cui disuguaglianze sono al più quadratiche in essa; coordinate sferiche solo per un solido i cui angoli θ e φ formano un rettangolo.
- Integrali di superficie: il teorema di Gauss si verifica solo per le preimpostazioni (una sfera, una semisfera chiusa, un cilindro, un cono), quello di Stokes solo per il flusso di un rotore scritto come curl

o $\nabla \times F$; un grafico $z = g(x, y)$ solo su una regione gestita dall'integrale doppio; inserisci una sfera con un limite diverso da $z \geq 0$ come grafico o con una parametrizzazione.

- Le applicazioni fisiche dei teoremi integrali calcolano solo casi simmetrici (una sfera, una retta e un piano infiniti, una bobina lunga, un campo uniforme) in cui l'integrale diventa un prodotto; inserisci una distribuzione generale di carica o di corrente come integrale curvilineo o di superficie. Trascurano la corrente di spostamento nella legge di Ampère–Maxwell e modellano i materiali solo con la permittività relativa di un condensatore.

29. Polinomio di Taylor

L’app costruisce il polinomio di Taylor (in 0 di Maclaurin) di un grado dato: una tabella delle derivate nel punto, la sostituzione nella formula e il resto nella forma di Lagrange. Sa anche trovare da sola il grado – il minimo per cui l’errore in un punto dato o su un intervallo resta sotto un limite dato. Il grafico mostra la funzione e il polinomio; un cursore cambia il grado così vedi l’approssimazione migliorare.

Gradi alti (fino a circa 1000) si calcolano esattamente e si abbreviano nella soluzione e nel grafico; il cursore del grado è allora logaritmico. Le funzioni le cui derivate crescono rapidamente (tg x) passano per la divisione di serie, l’errore con la stima di Cauchy nel piano complesso o la stima di una serie a segni alterni. Se anche questo fallisce, l’app spiega perché e dà un consiglio.

Come inserirlo

`taylor(sin x, 0, 5)`	La funzione, il punto e il grado.
`maclaurin(e^x, 4)`	Il polinomio di Maclaurin – il punto è 0.
`taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`	Il grado secondo l’errore nel punto x (su un intervallo inserisci r=… al posto di x).
`ln(1 + x)`	Una funzione con il chip «Polinomio di Taylor» – lì inserisci il punto, il grado o l’accuratezza.

Esempi

Un polinomio di grado 4 con il resto.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Risultato

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Passaggi

- Il polinomio di Mac Laurin (il polinomio di Taylor in 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Le derivate e i loro valori in a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

- Inseriamo i valori delle derivate

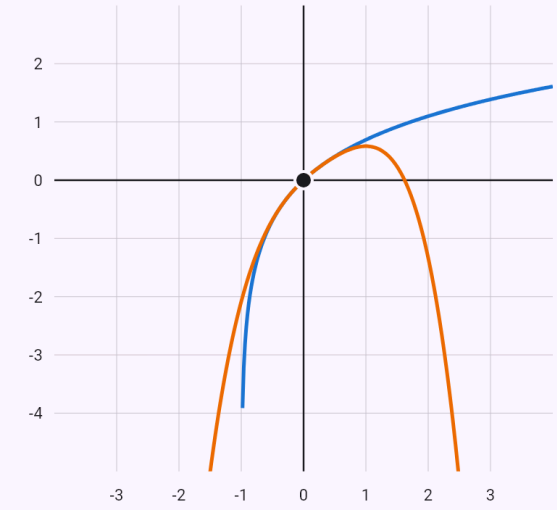
$$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- Il resto (l'errore) nella forma di Lagrange, ξ tra a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$$

Grafico

Grado: 4



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Il punto intorno a cui il polinomio approssima la funzione:

- $(0; 0)$

Con il cursore sopra il grafico scegli il grado – con un grado più alto il polinomio approssima meglio la funzione, e più lontano dal punto.

Il grado secondo l’accuratezza richiesta – un valore approssimato di e^0.5.

Input: `taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`

Risultato

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Passaggi

- Il polinomio di Mac Laurin (il polinomio di Taylor in 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Le derivate e i loro valori in a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Inseriamo i valori delle derivate

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Il resto (l’errore) nella forma di Lagrange, ξ tra a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!}x^5$$

- Il grado n più basso la cui stima del resto in x rientra nell’errore

$$M_k = \max_{t \in [0;\, 0{,}5]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

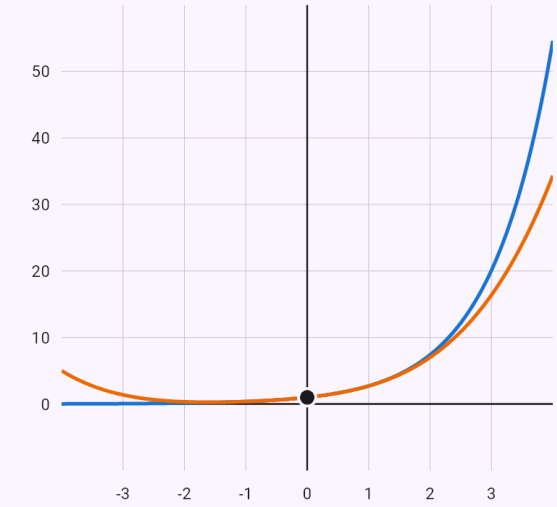
$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- Il valore approssimato:

$$f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$$

Grafico

Grado: 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Il punto intorno a cui il polinomio approssima la funzione:

- $(0; 1)$

Con il cursore sopra il grafico scegli il grado – con un grado più alto il polinomio approssima meglio la funzione, e più lontano dal punto.

Grado 999 – un grado alto è abbreviato nella soluzione.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Risultato

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{}{}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Passaggi

- Il polinomio di Mac Laurin (il polinomio di Taylor in 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Le derivate e i loro valori in a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\
&\vdots \\
f^{(998)}(x) &= -\frac{997!}{(x+1)^{998}} & f^{(998)}(0) &= -997! \\
f^{(999)}(x) &= \frac{998!}{(x+1)^{999}} & f^{(999)}(0) &= 998!
\end{aligned}$$

- Il resto (l'errore) nella forma di Lagrange, ξ tra a e x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

- Il grado n più basso la cui stima del resto in x rientra nell'errore

$$M_k = \max_{t \in [0;\,1]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$

$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$

$$\cdots$$

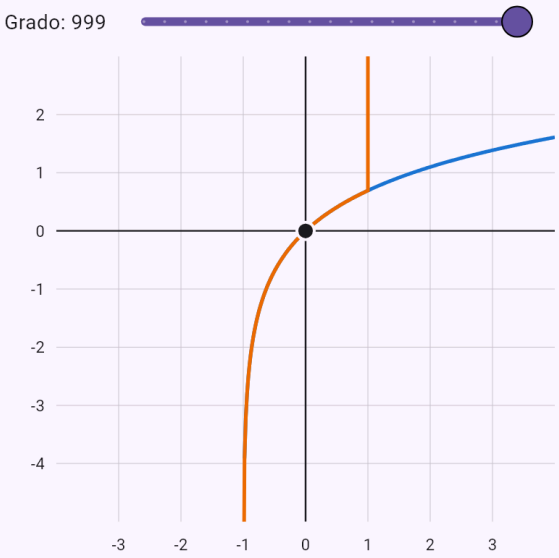
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- Il valore approssimato: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Grafico

Grado: 999



$y = \ln(1 + x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} +$

Il punto intorno a cui il polinomio approssima la funzione:

- $(0; 0)$

Con il cursore sopra il grafico scegli il grado – con un grado più alto il polinomio approssima meglio la funzione, e più lontano dal punto.

Tangente – coefficienti dalle serie, l'errore con la stima di Cauchy.

Input: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Risultato

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Passaggi

- Il polinomio di Mac Laurin (il polinomio di Taylor in 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Le derivate e i loro valori in a

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- I coefficienti si ricavano dall'aritmetica delle serie; le formule delle derivate di ordine alto sarebbero enormi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k \, c_{n-k}}{q_0}$$

- Le derivate sono troppo grandi, quindi usiamo la stima di Cauchy su una circonferenza nel piano complesso

$$|R_n| \le \frac{M \, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- Il valore approssimato: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Limiti noti

- I gradi oltre 1000 non si calcolano; un punto sul bordo di convergenza o oltre non è gestito dalla stima di Cauchy.

30. Integrali indefiniti

L’app integra con i metodi insegnati a scuola e a ogni passo dice cosa fa. Verifica il risultato – lo deriva termine per termine con le regole e riporta la somma alla funzione integranda (un denominatore comune, identità come sin²x + cos²x = 1) – e disegna la funzione integranda e la primitiva.

Le radici di potenze della variabile ($\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt{x^3}$) si riscrivono come potenze con esponente razionale; un valore assoluto ($|\cos x|$, $\sqrt{1 - \sin^2 x}$) si scrive con la funzione segno sgn.

Se un integrale non ha primitiva elementare (come e^(−x²)), l’app lo dice e lo esprime con una funzione speciale (erf, Si, …).

Come inserirlo

`int(x e^x, x)`	Un integrale con la variabile – estremi o un’applicazione (area, volume, …) si possono aggiungere nei campi sotto l’input.
`int(x^2 sin x)`	Senza la variabile quando ce n’è una sola.
`∫ x^2 dx`	Con il segno di integrale, anche da una foto.
`x e^x`	Una funzione con il chip «Integra».

Integrali immediati e sostituzione

L’integrale di una somma termine per termine, costanti portate fuori, integrali immediati (anche con una funzione interna lineare) e la sostituzione quando l’integranda contiene una funzione insieme alla derivata del suo argomento.

Esempi

Termine per termine dalla tabella.

Input: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

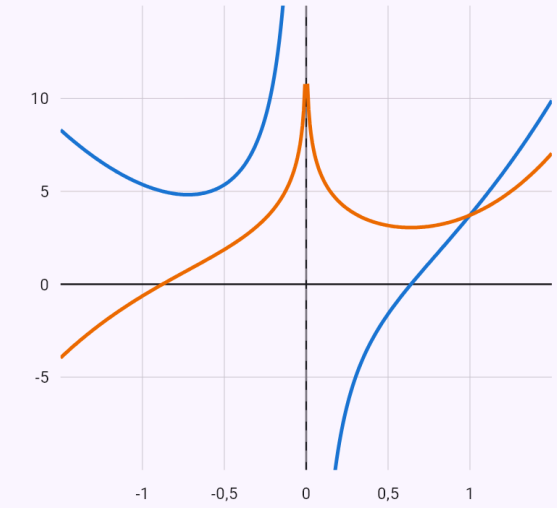
Risultato

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Passaggi

- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int e^x\,dx = e^x$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda:
  $$\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Grafico



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

La sostituzione t = x².

Input: `int(2x cos(x^2))`

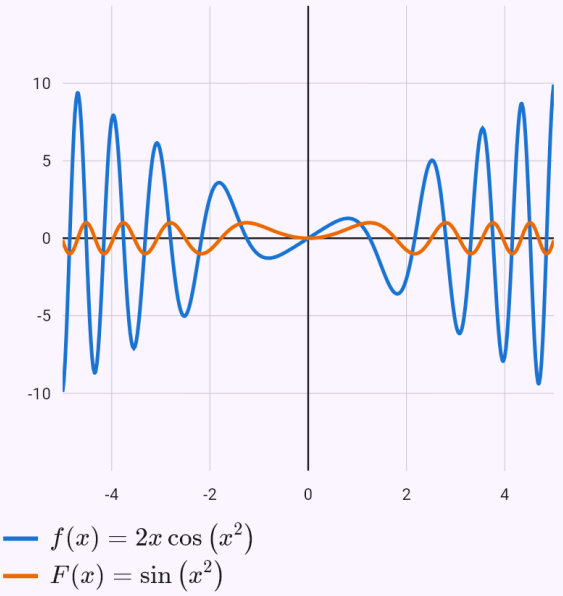
Risultato

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Passaggi

- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Con la sostituzione $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Torniamo alla variabile originale: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Grafico



La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Un integrale con costanti a, b.

Input: `int(1/(a - bx)^3)`

Risultato

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Condizioni: $b \neq 0$

Passaggi

- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Integrazione per parti

L’app integra per parti un prodotto di un polinomio con un’esponenziale, una funzione goniometrica o un logaritmo, ripetutamente se serve; integrali come $e^x \sin x$ per parti in modo ciclico.

Esempi

Integrazione per parti due volte di seguito.

Input: `int(x^2 e^x)`

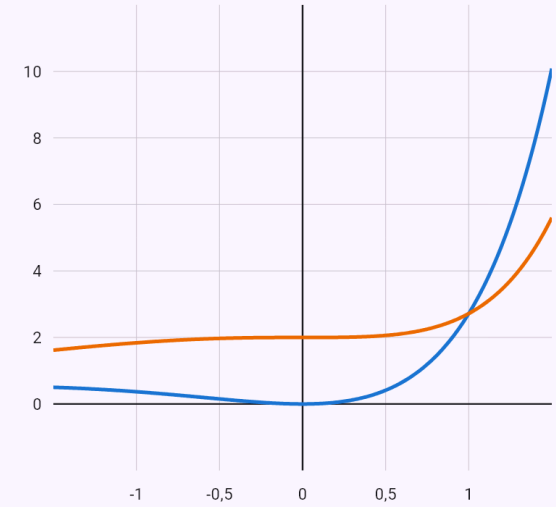
Risultato

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Passaggi

- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = e^x, quindi u' = $2x$, v = e^x: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int 2xe^x \, dx = 2\int xe^x \, dx$
- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = e^x, quindi u' = 1, v = e^x: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int e^x \, dx = e^x$
- Verifica − la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda: $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente: $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente: $(-2xe^x)' = -2 \cdot (e^x \cdot x + e^x) = -2xe^x - 2e^x$
- Sommato e semplificato $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Grafico



La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Funzioni razionali

L’app divide una funzione razionale se serve, scompone il denominatore e scompone la funzione in fratti semplici, che integra in logaritmi e arcotangenti.

Un denominatore che non si può scomporre nei razionali ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) si scompone nei reali − ogni coppia di radici complesse coniugate dà un fattore di secondo grado senza radici reali.

Esempi

Fratti semplici.

Input: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

Risultato

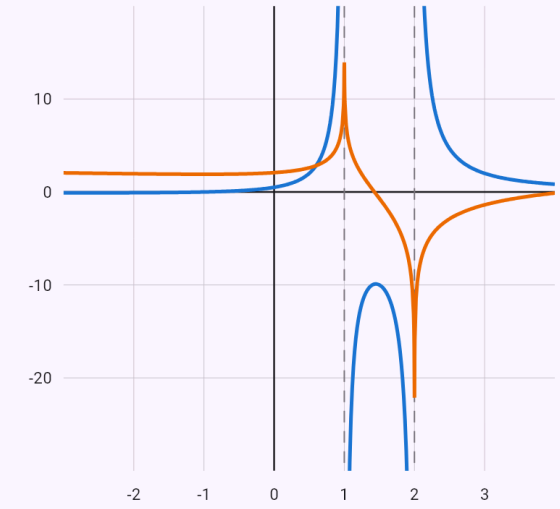
$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Passaggi

- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici:
  $$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
  $$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda:
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente:
  $$(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente:
  $$(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$

- Sommato e semplificato
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Grafico



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Scomposizione del denominatore x⁴ + 1 nei reali.

Input: `int(1/(x^4 + 1))`

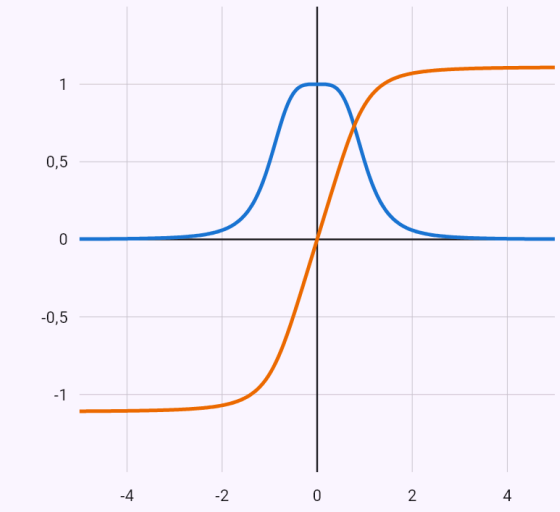
Risultato

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \text{-}\right.\right.$$

Passaggi

- Scomponiamo il denominatore in $\mathbb{R}$: le sue radici complesse sono a coppie coniugate r, r̄ e ogni coppia dà un fattore di secondo grado $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2\cdot\mathrm{Re}\, r\cdot x + |r|^2$ senza radici reali:
$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$
- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$$
- Il denominatore non ha radici reali: un multiplo della sua derivata separato dal numeratore dà ln, il resto – dopo il completamento del quadrato – dà arctg
$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$$
- Il denominatore non ha radici reali: un multiplo della sua derivata separato dal numeratore dà ln, il resto – dopo il completamento del quadrato – dà arctg
$$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Grafico



$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \dfrac{\sqrt{2}\,\text{arc}}{}$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Verifica dei fratti semplici a denominatore comune.

Input: `int(1/(x^3 + 1))`

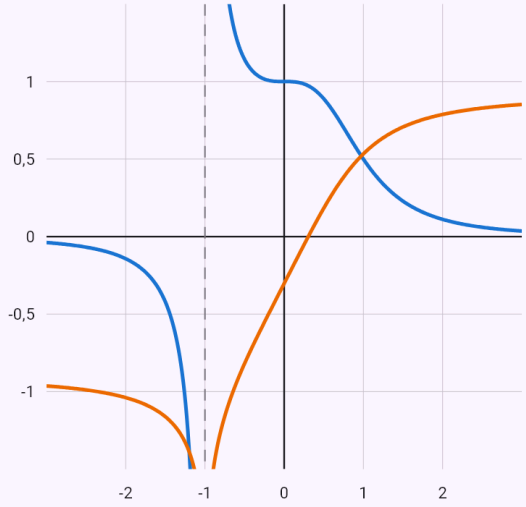
Risultato

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1}{3}\right.$$

Passaggi

- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx = \int \frac{2-x}{3(x^2-x+1}$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
$$\int \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$
- Il denominatore non ha radici reali: un multiplo della sua derivata separato dal numeratore dà ln, il resto – dopo il completamento del quadrato – dà arctg
$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{}}{3}$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
$$\left(-\frac{\ln(x^2-x+1)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$
- Sommato e semplificato
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x-}{3}\right.$$

Grafico



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-}{6}$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Funzioni goniometriche

Prima le identità (sin²x = (1 − cos 2x)/2, prodotti in somme), per una potenza dispari la sostituzione t = sin x o t = cos x, per una funzione razionale di seno e coseno una sostituzione secondo la parità, e le formule parametriche t = tg(x/2) solo come ultima risorsa.

Esempi

Una potenza dispari del seno – la sostituzione t = cos x.

Input: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

Risultato

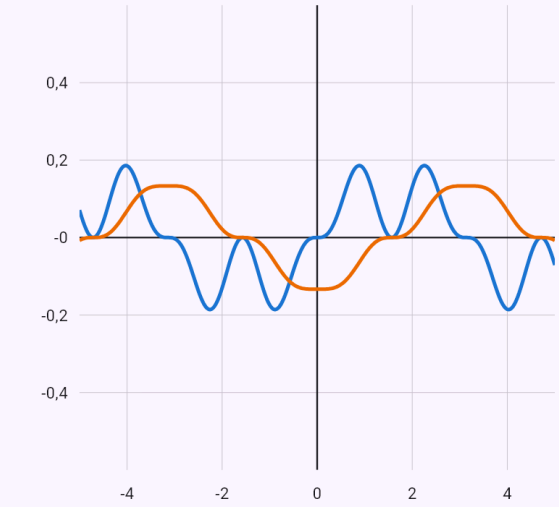
$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Passaggi

- Una potenza dispari – la sostituzione $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Torniamo alla variabile originale:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda:
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$

- Sommato e semplificato con l'identità
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Grafico



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

La verifica: la derivata termine per termine, riportata con l'identità 1 + tg²x = 1/cos²x.

Input: `int(1/cos(x)^4)`

Risultato

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Passaggi

- La funzione non cambia quando seno e coseno cambiano segno insieme – la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali: $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 1\,dt = t$
- Torniamo alla variabile originale: $t = \operatorname{tg} x:\quad \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$

- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda

  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente

  $\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$
- Sommato e semplificato con l'identità

  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos}$

Funzioni iperboliche

Integrali immediati (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx con il logaritmo della derivata, per parti (x sinh x, arsinh x), i quadrati con le formule sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x; il resto con la definizione tramite esponenziali.

Esempi

La formula sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Input: `int(sinh(x)^2)`

Risultato

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Passaggi

- Con la formula $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$

- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda: $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente
  $\left(\frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- Sommato e semplificato con l'identità $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

Radici

Integrali con la radice di una funzione omografica per sostituzione, con la radice di un trinomio di secondo grado con una sostituzione di Eulero, e integrali binomi con le condizioni di Čebyšëv – quando nessuna vale, l'app dice che l'integrale non è elementare.

Esempi

Una sostituzione di Eulero.

Input: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Risultato

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Passaggi

- Sostituzione di Eulero (tipo 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – l'integrale diventa quello di una funzione razionale di t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- La costante portata fuori dall'integrale

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- L'integrale di una somma è la somma degli integrali

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Torniamo alla variabile originale

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Verifica – la derivata del risultato (la primitiva) dà la funzione integranda

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

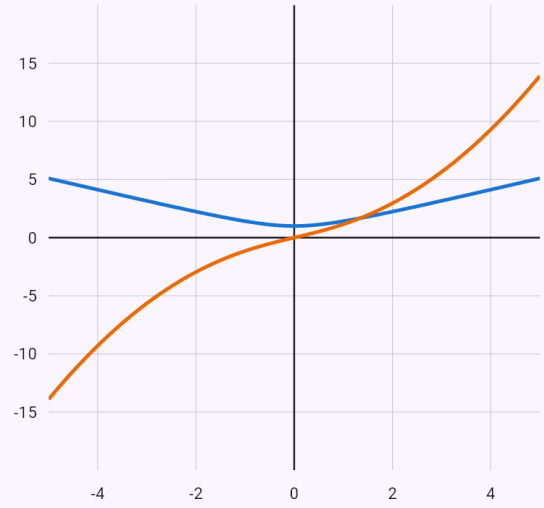
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Sommato e semplificato

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Grafico



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

La funzione integranda f e la primitiva F per C = 0 (un altro C la sposta in alto o in basso). Dove f è positiva F cresce, dove è negativa F decresce.

Limiti noti

- Per alcuni integrali troviamo il risultato senza lo svolgimento – l’app lo dice nei passaggi.
- Un calcolo senza passaggi che dura troppo viene interrotto – l’app lo dice.
- Per risultati lunghi in cui il ritorno all’integranda non sarebbe leggibile (più termini con radici di numeri, es. $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$) l’app omette la verifica.

31. Integrali definiti e loro applicazioni

L’app calcola un integrale definito con la formula di Newton–Leibniz (il teorema fondamentale del calcolo integrale) e disegna l’area sotto il grafico – la parte sopra l’asse x di un colore diverso da quella sotto. Gestisce anche integrali impropri e applicazioni: area, lunghezza d’arco, volume e superficie di un solido di rotazione, anche per curve date in forma parametrica e in coordinate polari.

Integrale definito

L’app trova la primitiva come per un integrale indefinito e sostituisce gli estremi. Con una sostituzione converte subito gli estremi. Su un intervallo simmetrico rispetto allo zero usa la simmetria: l’integrale della parte dispari è nullo senza alcuna primitiva, e $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ viene riconosciuta come l’area di un semicerchio. Senza una primitiva elementare dà la forma esatta con una funzione superiore (come 2 Si(π)) e ne calcola il valore da una serie di potenze con una stima dell’errore; dove non trova una forma esatta, calcola il valore numericamente e dice con quale metodo.

Le lettere nel problema ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ da $-r$ a r) sono parametri positivi: il risultato è una formula ($\pi r^2/2$), verificata numericamente per vari valori dei parametri, e il grafico ha un cursore per ogni lettera.

Come inserirlo

`int(x^2, x, 0, 3)`	Un integrale con la variabile e gli estremi.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Da una foto o in LaTeX.
`x^2`	Una funzione con il chip «Integra» – inserisci gli estremi nei campi.

Esempi

Una sostituzione con gli estremi convertiti.

Input: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Risultato

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

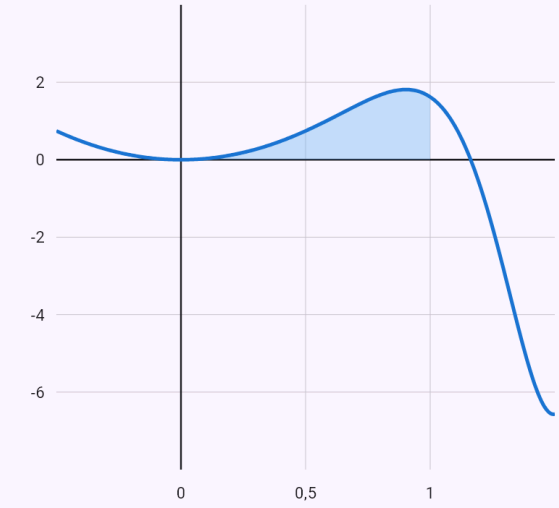
Risolvi con un metodo numerico:

Σ Simpson | Σ Trapezi | Σ Romberg

Passaggi

- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$$
- Con la sostituzione $t = x^3,\ dt = 3x^2\,dx$:
  $$\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

Grafico



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

La parte dispari su un intervallo simmetrico è nulla, il resto è l'area di un semicerchio – il risultato è π.

Input: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Risultato

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx =$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Simpson | Σ Trapezi | Σ Romberg

Passaggi

- L'intervallo è simmetrico rispetto allo zero, quindi dividiamo l'integrale nella sua parte dispari e nel resto

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

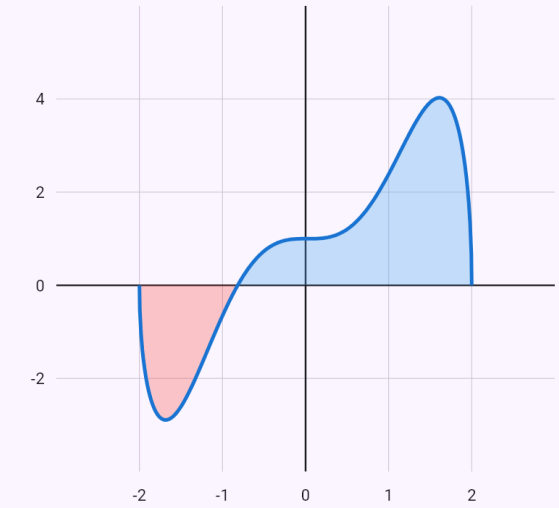
- La funzione $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ è dispari (f(−x) = −f(x)): su [−2; 2] le aree sopra e sotto l'asse si compensano, quindi l'integrale è zero senza alcuna primitiva:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0$$

- Il grafico di √(r² − x²) è la metà superiore di una circonferenza di raggio r = 2, quindi l'integrale è l'area di un semicerchio, πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Grafico



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

La primitiva non è elementare: esattamente 2 Si(π), il valore da una serie di potenze.

Input: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Risultato

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

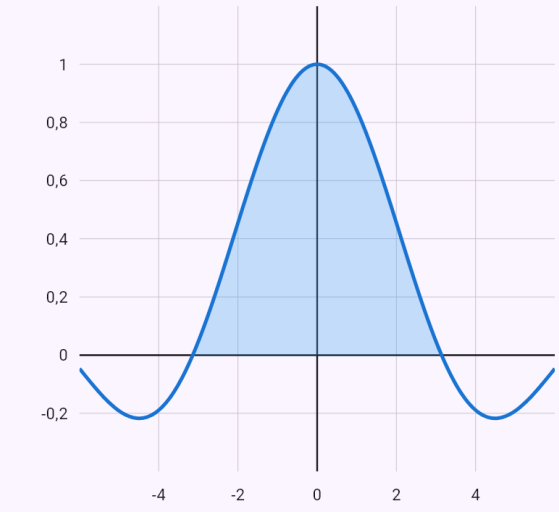
Un metodo numerico calcola il numero anche per la forma esatta:

Σ Simpson | Σ Trapezi | Σ Romberg

Passaggi

- La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari (f(−x) = f(x)), il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y, quindi l'integrale su $[-\pi;\,\pi]$ è il doppio di quello su $[0;\,\pi]$:
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
- La primitiva non è elementare, è una funzione superiore – il risultato esatto si scrive con essa
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$
- Il numero per la forma esatta si ottiene dalla serie di potenze della funzione superiore: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Per t = π sommiamo 6 termini. La serie è a segni alterni, quindi l'errore è minore del primo termine tralasciato, $3{,}6\cdot10^{-5}$ (stima per le serie a segni alterni): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Grafico



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Un integrale con un parametro r – l'area di un semicerchio, πr²/2; il cursore nel grafico cambia r.

Input: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Risultato

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Passaggi

- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri positivi: $r > 0$
- Una radice di una differenza di quadrati – la sostituzione trigonometrica $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, la radice $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Con la formula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

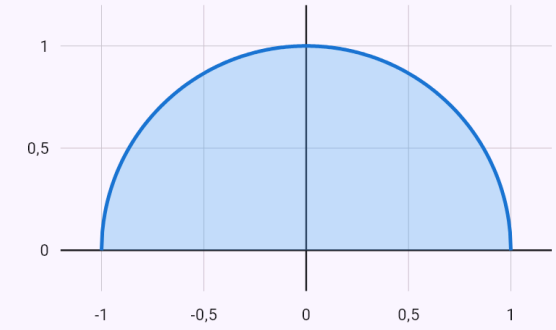
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Valori dei parametri

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Grafico



L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Integrali impropri

L'app tratta un estremo infinito o una funzione illimitata con un limite della primitiva e dice se l'integrale converge o diverge. Se quel limite non si può calcolare, decide con un criterio del confronto.

Gli integrali ∫₀^∞ x^(s − 1) ln^k x/(x^n + a^n)^m dx (0 < s < mn, k = 0 a 3) si calcolano esattamente anche senza primitiva: come derivata k-esima rispetto a s dell'integrale con parametro I(s). L'app trova I(s) con la sostituzione t = x^n/(x^n + a^n) tramite la funzione beta e la formula di riflessione (chip «Funzione beta»), o lungo un contorno a buco di serratura attorno al semiasse positivo con i residui (chip «Residui»). Dove

esiste una primitiva, la formula di Newton–Leibniz resta quella predefinita (chip «Primitiva»). Il valore viene sempre verificato numericamente.

Un altro integrale improprio senza primitiva si confronta con 1/x^α a ogni estremo (un estremo infinito o un punto in cui la funzione cresce oltre ogni limite) con il criterio del confronto asintotico. Solo quando converge a ogni estremo l'app calcola il valore numericamente (≈); un integrale divergente viene segnalato come divergente.

Esempi

Un estremo superiore infinito.

Input: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Risultato

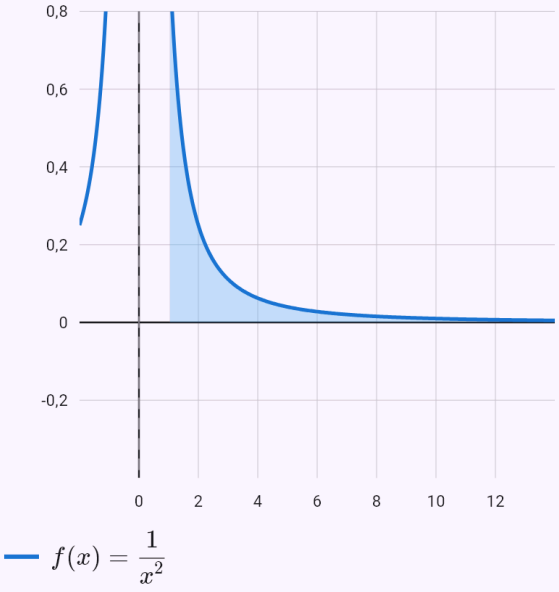
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Passaggi

- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Un integrale improprio – in un estremo infinito e dove la funzione è illimitata calcoliamo il limite della primitiva. I limiti sono finiti, l'integrale converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Grafico



L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Una funzione illimitata all’estremo inferiore.

Input: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Risultato

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Risolvi con un metodo numerico:

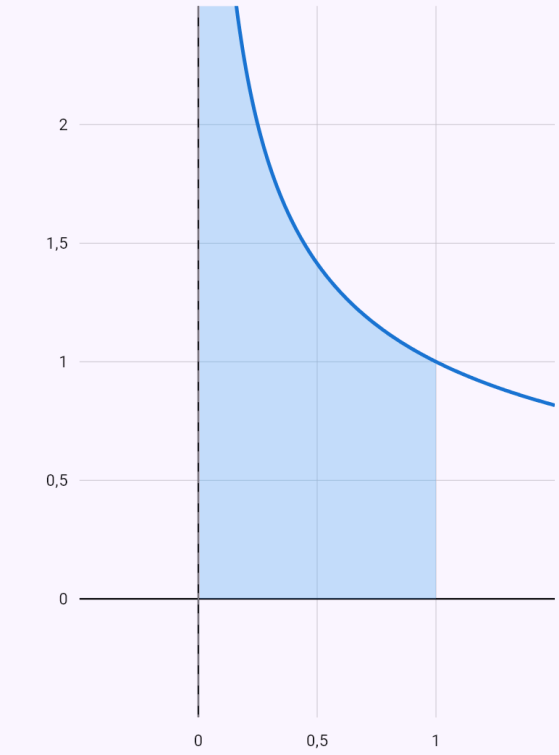
Σ Simpson | Σ Trapezi | Σ Romberg

Passaggi

- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Un integrale improprio – in un estremo infinito e dove la funzione è illimitata calcoliamo il limite della primitiva. I limiti sono finiti, l’integrale converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Grafico



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

sopra l’asse x (+) sotto l’asse x (−)

L’integrale definito è l’area tra il grafico e l’asse x – la parte sopra l’asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I''(4) tramite la funzione beta – 5√3π³/972.

Input: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Risultato

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Passaggi

- Il logaritmo viene dalla derivazione rispetto al parametro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Quindi l'integrale è una derivata dell'integrale dipendente dal parametro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, che converge per $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calcoliamo I(s) per un s generico, deriviamo e sostituiamo.
- La sostituzione porta l'integrale su [0; 1] e dà la funzione beta di Eulero B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Scriviamo la funzione beta con la funzione gamma, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), e usiamo la formula di riflessione Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

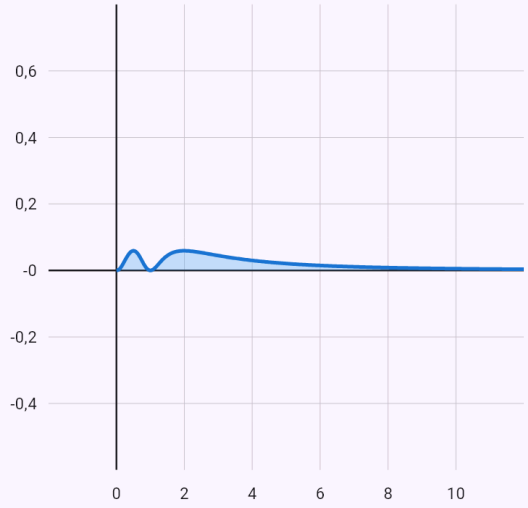
- La derivata rispetto al parametro s (di ordine 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Sostituiamo s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Grafico



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Lo stesso integrale lungo un contorno a buco di serratura con i residui.

Input: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Residui

Risultato

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Passaggi

- Il logaritmo viene dalla derivazione rispetto al parametro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Quindi l'integrale è una derivata dell'integrale dipendente dal parametro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, che converge per $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calcoliamo I(s) per un s generico, deriviamo e sostituiamo.
- Prendiamo la potenza z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) con l'argomento di z in (0; 2π) e integriamo sul cammino a buco di serratura C attorno al semiasse reale positivo. Sul bordo superiore z^(s − 1) = x^(s − 1), su quello inferiore x^(s − 1)·e^(2πis); la circonferenza grande e quella piccola al limite non contribuiscono perché $0 < s < 6$. All'interno stanno i poli $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}},\ j = 0, 1, \ldots, 5$ di ordine 1, e per il teorema dei residui (per s non intero)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \mathrm{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- I poli sono semplici; il residuo è il numeratore diviso per la derivata del denominatore nel polo, con z□ⁿ = −aⁿ

$$\mathrm{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Sostituiamo le potenze dei poli, sommiamo la serie geometrica e semplifichiamo. La formula è stata ricavata per s non intero (altrimenti 1 − e^(2πis) = 0). Entrambi i membri però sono continui in s, quindi vale anche per s = 4 − con il limite s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

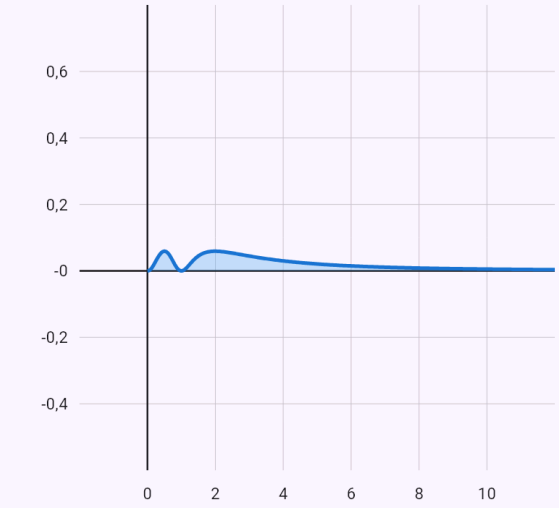
- La derivata rispetto al parametro s (di ordine 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Sostituiamo s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Grafico



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x − la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Nessuna primitiva: convergenza per confronto con 1/x³, poi il valore numericamente.

Input: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

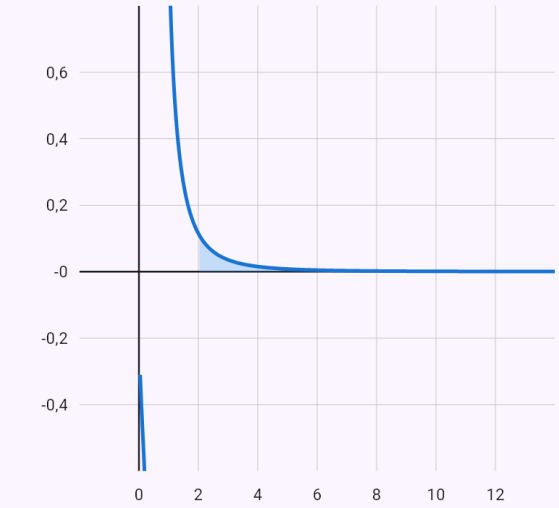
Risultato

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$$

Passaggi

- Per $x \to \infty$ confrontiamo la funzione integranda con $\frac{1}{x^3}$ (criterio del confronto asintotico): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. Il limite è un numero positivo, quindi lì l'integrale si comporta come l'integrale di $\frac{1}{x^3}$, che converge per $\alpha = 3 > 1$
- L'integrale converge in ogni estremo; il suo valore: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$
- Non è stata trovata una forma esatta, quindi il valore dell'integrale improprio è stato calcolato numericamente con la quadratura adattiva di Gauss–Kronrod.

Grafico



$f(x) = \frac{1}{x^3 + \ln x}$

sopra l'asse x (+) sotto l'asse x (−)

L'integrale definito è l'area tra il grafico e l'asse x – la parte sopra l'asse conta positivamente, quella sotto negativamente.

Area sotto una curva e tra curve

L'app calcola l'area tra un grafico e l'asse x, o tra due curve, come integrale del valore assoluto della differenza – le parti sopra e sotto contano entrambe come positive. Non devi inserire gli estremi: li trova come intersezioni delle curve.

Come inserirlo

`area(x^2, x)`	L'area tra due curve, estremi dalle intersezioni.
`area(sin x, 0, pi)`	L'area tra una curva e l'asse x su un intervallo.
`x^2`	Una funzione con il chip «Integra» → «Area tra curve»; inserisci la seconda curva e gli estremi nei campi.

Esempi

L’area tra una parabola e una retta.

Input: `x^2` Area tra curve, seconda curva x

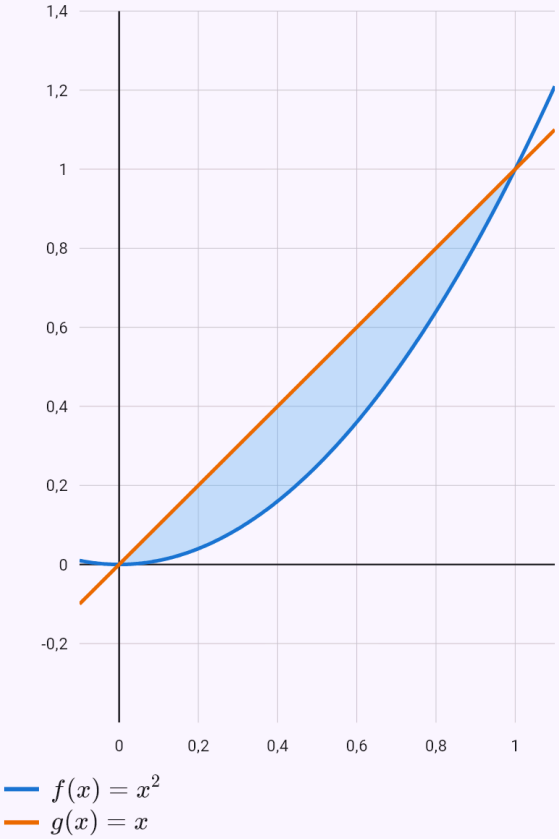
Risultato

$$S = \frac{1}{6}$$

Passaggi

- Gli estremi sono le intersezioni delle curve: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- L’area tra le curve (le parti sopra e sotto contano positivamente), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x|\, dx$
- L’espressione in valore assoluto non cambia segno nell’intervallo – eliminiamo il valore assoluto secondo questo segno: $\int_0^1 |x^2 - x|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx$
- L’integrale di una somma è la somma degli integrali: $\int (-x^2 + x)\, dx = \int -x^2\, dx + \int x\, dx$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int -x^2\, dx = -\int x^2\, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Grafico



La regione ombreggiata – la sua area è il risultato (le parti sopra e sotto l’asse contano positivamente).

Lunghezza d’arco

L’app calcola la lunghezza di un grafico su un intervallo con la formula l = ∫√(1 + f’²) dx. Prova a semplificare la radice (per una semicirconferenza risulta l’arcoseno); dove l’integrale non ha primitiva elementare, il risultato è numerico.

Come inserirlo

`length(x^(3/2), 0, 4)`	La lunghezza d’arco su un intervallo.

Esempi

La lunghezza di una semicirconferenza.

Input: `sqrt(1 - x^2)` Lunghezza dell'arco, estremi −1 e 1

Risultato

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Passaggi

- La lunghezza della curva

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

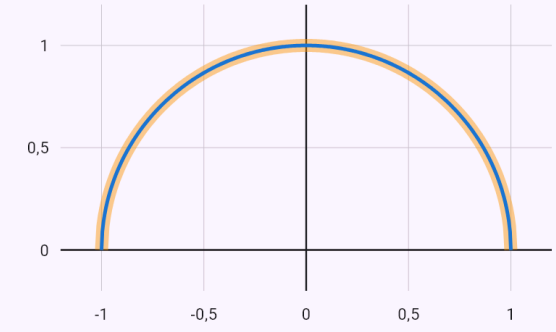
- Dalla tabella degli integrali immediati:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Un integrale improprio – in un estremo infinito e dove la funzione è illimitata calcoliamo il limite della primitiva. I limiti sono finiti, l'integrale converge

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Grafico



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

L'arco evidenziato – la sua lunghezza è il risultato.

Volume di un solido di rotazione

L'app calcola il volume di un solido di rotazione attorno all'asse x con la formula V = π∫f² dx (tra due curve come corone), attorno all'asse y con il metodo dei gusci cilindrici. Mostra anche il solido in 3D – ruotalo con il dito.

Come inserirlo

`volume(sqrt(x), 0, 4)`	Il volume del solido ruotato attorno all'asse x.
`volume(x^2, 0, 2, y)`	Rotazione attorno all'asse y.

Esempi

Un paraboloide di rotazione.

Input: `sqrt(x)` Volume di un solido, estremi 0 e 4

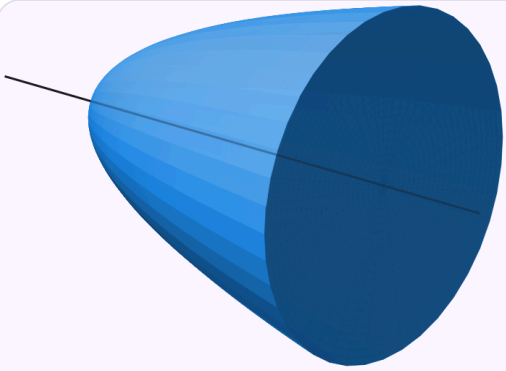
Risultato

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Passaggi

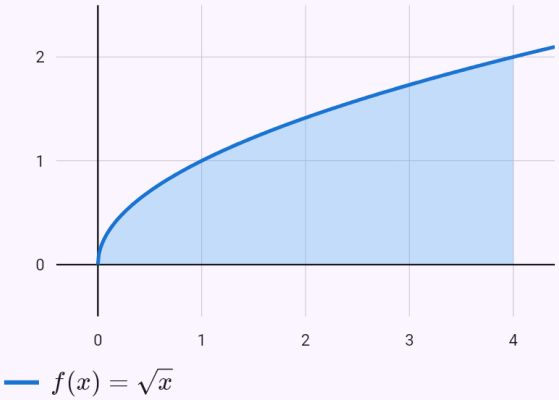
- Il volume del solido di rotazione attorno all'asse x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Il valore dell'integrale per la costante davanti: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse x – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



Superficie di un solido di rotazione

L'app calcola la superficie laterale con la formula S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; il prodotto sotto la radice spesso si semplifica (per una sfera risulta costante).

Come inserirlo

`surface(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	La superficie del solido ruotato attorno all'asse x.

Esempi

La superficie di una sfera di raggio 2.

Input: `sqrt(4 - x^2)` Superficie di un solido, estremi −2 e 2

Risultato

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Passaggi

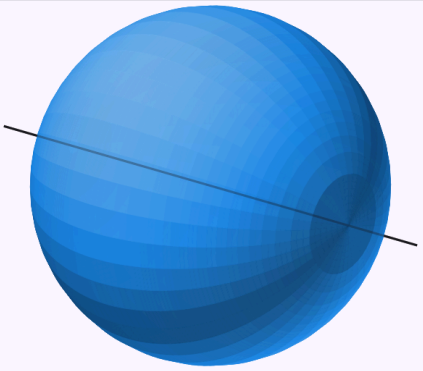
- La superficie laterale del solido di rotazione attorno all'asse x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

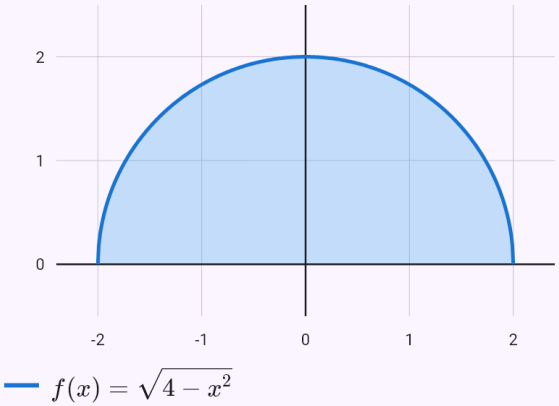
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 2\,dx = 2x$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a): $\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$
- Il valore dell'integrale per la costante davanti: $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse x – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



Applicazioni con parametri

Ogni lettera tranne x è un parametro positivo e il risultato è una formula, come il volume della sfera 4πr³/3. Le verifiche numeriche si fanno con valori sostituiti. Il grafico e il solido 3D hanno un cursore per ogni parametro.

Come inserirlo

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Il volume di una sfera di raggio r.

Esempi

Il volume di una sfera di raggio r.

Input: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Risultato

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Passaggi

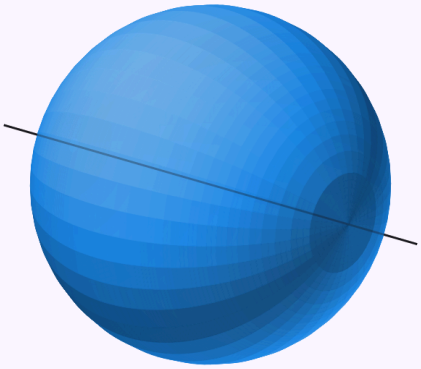
- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri positivi: $r > 0$
- Il volume del solido di rotazione attorno all'asse x,
  $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$
  $V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali:
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Il valore dell'integrale per la costante davanti:
  $V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Valori dei parametri

$r = 1$

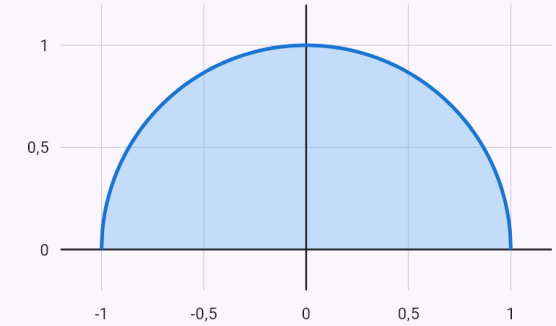
$V \approx 4{,}189$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse x – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



Un tronco di cono con raggi a, b e altezza h.

Input: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Risultato

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Passaggi

- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri positivi: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Il volume del solido di rotazione attorno all'asse x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- Il valore dell'integrale per la costante davanti

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Valori dei parametri

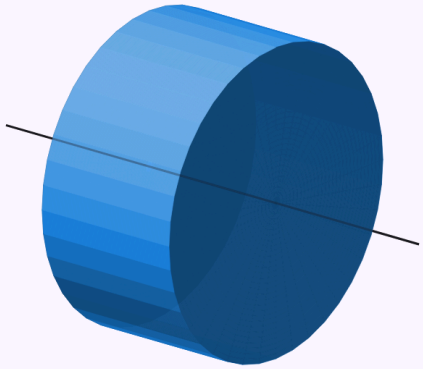
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

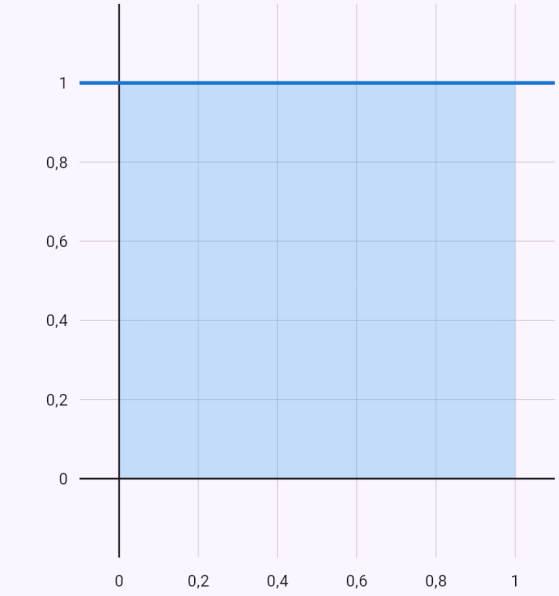
$V \approx 3{,}142$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse x – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

Baricentro

Il baricentro di una regione sotto o tra curve, di un arco e di un solido di rotazione si ricava da integrali con tutti i passaggi ed è segnato nel grafico. Le lettere funzionano come parametri.

Come inserirlo

`teziste(x^2, 0, 1)`	Una regione sotto la curva; una seconda funzione dà una regione tra curve.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	L'ultima parola oblouk o teleso sceglie un arco o un solido di rotazione.

Esempi

Il baricentro di un semicerchio, 4r/(3π).

Input: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Risultato

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Passaggi

- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri positivi: $r > 0$
- Il baricentro si ricava da integrali

  $$x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$$

  $$y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$$

- Calcoliamo l'integrale: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Una radice di una differenza di quadrati – la sostituzione trigonometrica $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, la radice $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Con la formula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int\left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali $\int\left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},\quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

- Calcoliamo l'integrale: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Con la sostituzione $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$: $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale: $x = -r \Rightarrow t = 0,\quad x = r \Rightarrow t = 0$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–

Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^0 = 0-0=0$$

- Calcoliamo l'integrale: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali: $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int r^2\,dx = r^2x$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3}-\left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Le coordinate del baricentro sono quozienti degli integrali

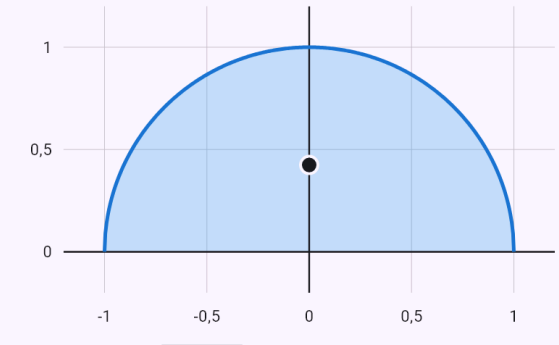
$$x_T = \frac{M_y}{S} = 0$$
$$y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$$

Valori dei parametri

$r = 1$

$T \approx [0;\ 0{,}424]$

Grafico



$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

Il punto T è il baricentro.

Il baricentro di un cono, a 3/4 dell'altezza dal vertice.

Input: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Risultato

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Passaggi

- Le lettere diverse dalla variabile sono parametri positivi: $h > 0,\ r > 0$
- Il baricentro si ricava da integrali

  $x_T = \dfrac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$

  $y_T = 0$

- Calcoliamo l'integrale: $J = \int_0^h \dfrac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- La costante portata fuori dall'integrale:

  $\int \dfrac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \dfrac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $\int_0^h \dfrac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\dfrac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \dfrac{hr^2}{3} - 0 = \dfrac{hr^2}{3}$
- Calcoliamo l'integrale: $M_y = \int_0^h \dfrac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- La costante portata fuori dall'integrale:

  $\int \dfrac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \dfrac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^3\, dx = \dfrac{x^4}{4}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $\int_0^h \dfrac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\dfrac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \dfrac{h^2r^2}{4} - 0 = \dfrac{h^2r^2}{4}$
- Le coordinate del baricentro sono quozienti degli integrali

  $x_T = \dfrac{M_y}{J} = \dfrac{3h}{4}$

  $y_T = 0$

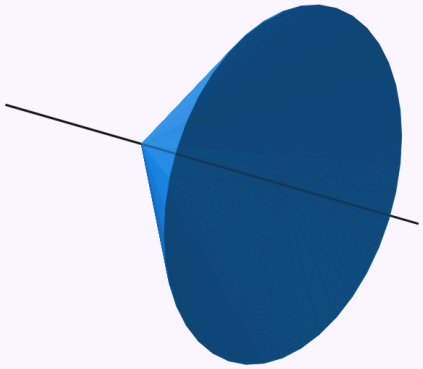
Valori dei parametri

$h = 1$

$r = 1$

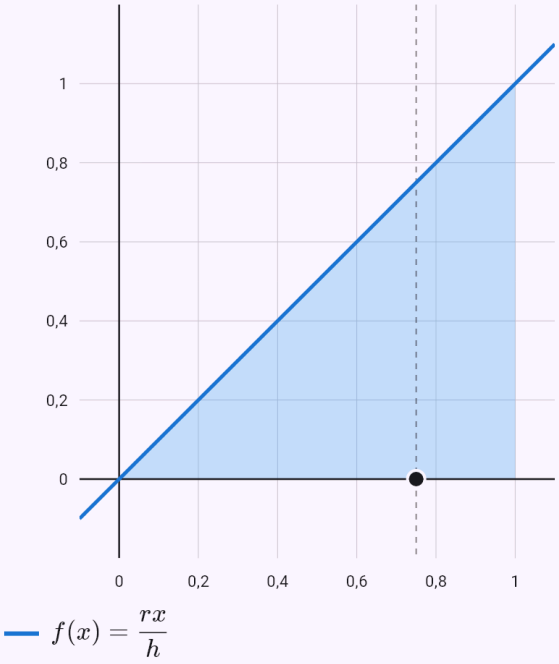
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse x – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



Il punto T è il baricentro.

Curve parametriche e curve in coordinate polari

Scrivi una curva x = φ(t), y = ψ(t) su due righe, una curva in coordinate polari come r = ρ(φ). Il chip «Integra» offre allora l'area, la lunghezza, il volume e la superficie; gli estremi del parametro sono facoltativi (senza, da 0 a 2π). Il grafico ombreggia la regione, e volume e superficie compaiono come solido 3D. La rotazione è attorno all'asse x o y; per l'asse y aggiungi y come ultimo argomento.

Come inserirlo

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Una curva parametrica su due righe.
`r = 1 + cos(phi)`	Una curva in coordinate polari (anche r^2 = … per una lemniscata).
`length(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	La forma scritta con il parametro e gli estremi.

Esempi

L'area sotto un arco di cicloide.

Input: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Area

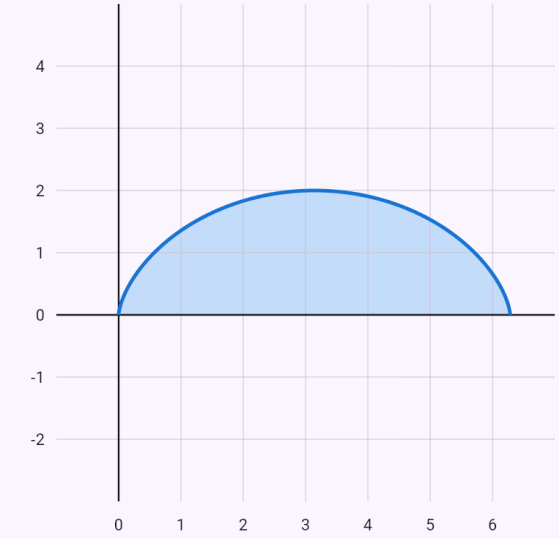
Risultato

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Passaggi

- Le derivate rispetto al parametro:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- L'area sotto una curva parametrica (dentro una chiusa)
  per $t \in [0;\ 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$:
  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt\right|$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 1\, dt = t$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -2\cos t\, dt = -2\int \cos t\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Con la formula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4}\right.$

Grafico



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

La curva data in forma parametrica (o in coordinate polari), disegnata per gli estremi scelti del parametro.

La lunghezza di una cardioide.

Input: `r = 1 + cos(phi)` Lunghezza dell'arco

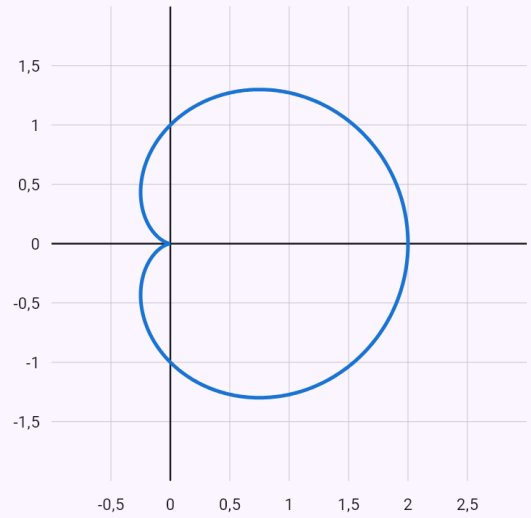
Risultato

$$l = 8$$

Passaggi

- Le derivate rispetto al parametro: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- La lunghezza di una curva polare per $\varphi \in [0;\, 2\pi]$,
  $$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$$
  $$l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left($$
- Dividiamo l'intervallo negli zeri delle espressioni in valore assoluto (π) e in ogni parte eliminiamo il valore assoluto secondo il segno
  $$\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos$$
- La costante portata fuori dall'integrale
  $$\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $$\int_{0}^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{0}^{\pi} = 4 - 0 = 4$$
- La costante portata fuori dall'integrale
  $$\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $$\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =$$
- Sommiamo i valori delle parti:
  $$\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Grafico



$r = \cos\varphi + 1$

La curva data in forma parametrica (o in coordinate polari), disegnata per gli estremi scelti del parametro.

Un'astroide ruotata attorno all'asse y.

Input: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Risultato

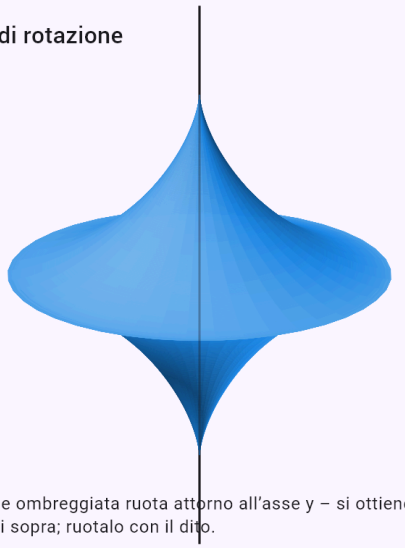
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Passaggi

- Le derivate rispetto al parametro:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Il solido si ottiene dalla parte della curva a destra dell'asse y (x ≥ 0): $t \in \left[0;\, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};\, 2\pi\right]$
- Il volume del solido attorno all'asse y per $t \in [0;\, 2\pi]$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Una potenza dispari – la sostituzione $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int 3w^6\, dw = 3\int w^6\, dw$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -3w^4\, dw = -3\int w^4\, dw$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Una potenza dispari – la sostituzione $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int 3w^6\, dw = 3\int w^6\, dw$

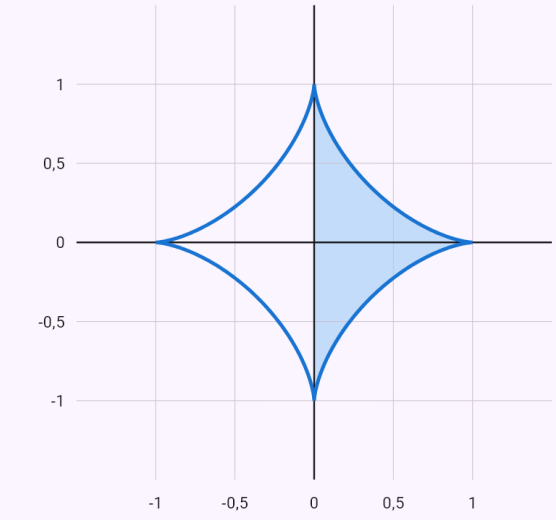
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Con la sostituzione si ricalcolano anche gli estremi di integrazione – non serve tornare alla variabile originale: $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Il valore dell'integrale per la costante davanti: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Solido di rotazione



La regione ombreggiata ruota attorno all'asse y – si ottiene il solido qui sopra; ruotalo con il dito.

Grafico



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

La curva data in forma parametrica (o in coordinate polari), disegnata per gli estremi scelti del parametro.

Curve date da un'equazione

Per un'equazione in x e y (x³ + y³ = 3xy) il chip «Integra» offre l'area, la lunghezza, il volume e la superficie. Senza estremi prende l'intera curva chiusa: una circonferenza o un'ellisse in forma parametrica con cos e sin, un cappio per l'origine (il folium di Cartesio) con le rette y = tx – l'area del cappio allora esattamente dai settori, la lunghezza, il volume e la superficie numericamente. Con estremi in x usa il ramo superiore y = f(x).

Come inserirlo

`x^3 + y^3 = 3xy` Una curva chiusa – il chip «Integra» senza estremi.

`y^2 = x^3`	Una curva non chiusa – il chip «Integra» con estremi in x (il ramo superiore y = x^(3/2)).

Esempi

L'area del cappio del folium – con le rette y = tx e i settori, S = 3/2.

Input: `x^3 + y^3 = 3xy` Integra → Area

Risultato

$$S = \frac{3}{2}$$

Passaggi

- Il cappio passante per l'origine in forma parametrica mediante le rette y = tx – sostituito nell'equazione, ricaviamo x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- L'area del cappio dai settori dall'origine: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, e sulla retta y = tx vale x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- La costante portata fuori dall'integrale

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Con la sostituzione $u = t^3+1,\ du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

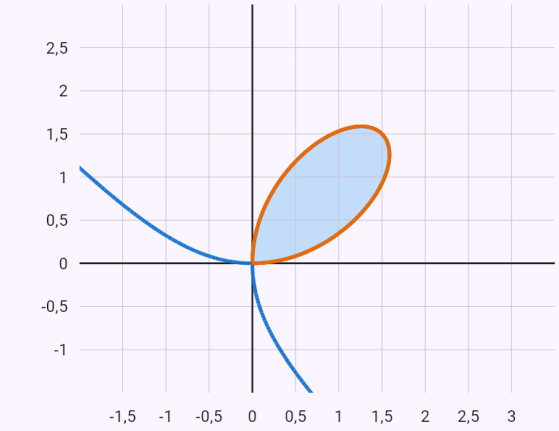
- La costante portata fuori dall'integrale:

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Torniamo alla variabile originale: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Un integrale improprio – in un estremo infinito e dove la funzione è illimitata calcoliamo il limite della primitiva. I limiti sono finiti, l'integrale converge

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Grafico



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Tutta la curva data dall'equazione; è evidenziata la parte usata dal calcolo.

L’area di una lemniscata, in coordinate polari.

Input: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

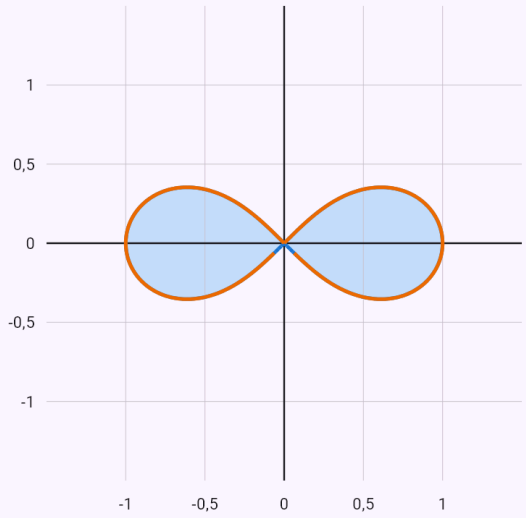
Risultato

$$S = 1$$

Passaggi

- Riscriviamo la curva in coordinate polari
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- L’area delimitata da una curva polare (la somma dei settori dall’origine) per $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$,
  $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- La curva ha cappi congruenti (2); il valore di un cappio per il loro numero: $2 \cdot 1$
- Il valore dell’integrale per la costante davanti:
  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Grafico



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Tutta la curva data dall’equazione; è evidenziata la parte usata dal calcolo.

Un’ellisse ruotata con un termine xy.

Input: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Risultato

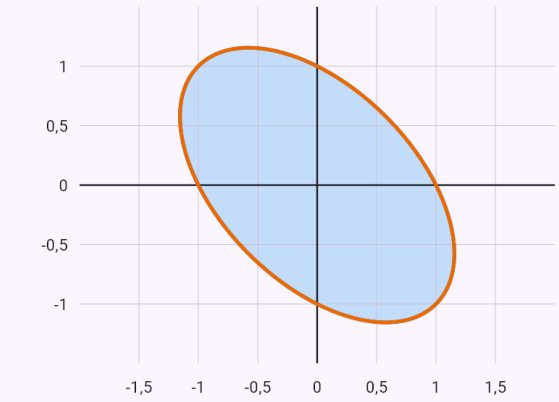
$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Passaggi

- La curva è un’ellisse ruotata – i suoi assi si ricavano dall’angolo di rotazione; in forma parametrica
  $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos t$
- Le derivate rispetto al parametro:
  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$
- L’area sotto una curva parametrica (dentro una chiusa)
  per $t \in [0;\, 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$
  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) d$
- L’integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \int -$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \cos^2 t\, dt$
- Con la formula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L’integrale di una somma è la somma degli integrali
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3}\int \cos t \cdot \sin t\, dt$
- Con la formula $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:
  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(2t)\, dt$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \sin^2 t\, dt$

- Con la formula $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- La formula fondamentale del calcolo integrale (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- L'integrale è risultato negativo (la curva è percorsa da destra a sinistra) – prendiamo il suo valore assoluto:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Grafico



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Tutta la curva data dall'equazione; è evidenziata la parte usata dal calcolo.

Limiti noti

- La lunghezza d'arco di y = $\sqrt[3]{x}$ (e di curve simili) si calcola solo numericamente – porta a un integrale ellittico, che non ha primitiva elementare.
- Rotazione attorno all'asse y solo per una regione da un lato dell'asse.
- Una formula con parametri si dà solo dove il risultato non dipende da come si confrontano; se il segno cambia con i loro valori, non si dà alcuna formula.
- Per curve implicite senza estremi: coniche (anche con un termine xy), un cappio per l'origine e curve di due parti omogenee (una lemniscata).
- Un integrale definito con un parametro per ora solo con estremi finiti.
- Quando il criterio del confronto asintotico non decide (l'integranda oscilla all'infinito, per esempio cos x/(x + ln x)), l'app non dà un valore senza una prova di convergenza e segnala l'integrale come non ancora risolto.

32. Serie infinite

Per una serie numerica l'app verifica prima la condizione necessaria di convergenza (il termine generale tende a zero) e poi sceglie un criterio secondo la forma della serie – serie geometrica, $\Sigma\, 1/n^p$, criterio del rapporto, della radice, del confronto asintotico, dell'integrale o di Leibniz per le serie a segni alterni; per una serie a segni alterni distingue convergenza assoluta e condizionata. Dove possibile somma la serie. Il grafico mostra i termini e le somme parziali.

Serie numeriche

L'app trova la somma di serie geometriche e telescopiche, di serie $\Sigma\, P(n)q^n$ e di serie note ($\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$); altrimenti la calcola numericamente. Una somma finita si calcola come a scuola – telescopica, aritmetica, geometrica, altrimenti termine per termine. Si risolve anche un'equazione con la somma di una serie geometrica, con la verifica della condizione di convergenza $|q| < 1$.

Una somma fino a una lettera (sum(k^2, k, 1, n)) con le formule delle somme di potenze, una geometrica con la sua formula e un termine razionale con i fratti semplici (telescopica); il risultato è verificato sui primi termini.

Come inserirlo

`sum(1/n^2)`	Il termine generale; l'indice n da 1.
`sum(1/n^2, n, 1, oo)`	Con l'indice e il valore iniziale.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Da una foto o in LaTeX.
`1/n^2`	Il termine generale con il chip «Serie» – inserisci l'indice iniziale nel campo.
`sum(2k+1, k, 1, 100)`	Una somma finita – con l'indice, l'estremo inferiore e quello superiore.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Una somma fino a n – la formula della somma.

Esempi

La serie Σ 1/n² – converge, la somma è π²/6.

Input: `sum(1/n^2)`

Risultato

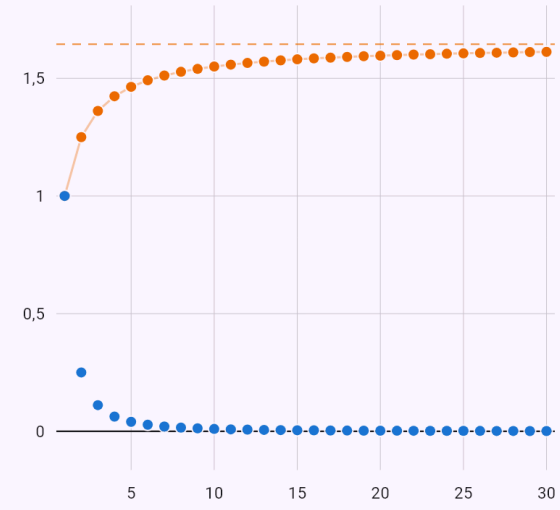
La serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Passaggi

- La condizione necessaria di convergenza è soddisfatta (da sola non decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è Σ 1/n^p con p = 2 > 1 – converge.
- La somma di una serie nota: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Grafico



I punti sono i termini a_n e le somme parziali s_n = a_1 + … + a_n. Se la serie converge, i termini si avvicinano a zero e le somme parziali alla sua somma.

Il criterio di Leibniz – converge condizionatamente.

Input: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Risultato

La serie converge, ma non assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Passaggi

- La condizione necessaria di convergenza è soddisfatta (da sola non decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- I termini hanno entrambi i segni – prima la convergenza assoluta

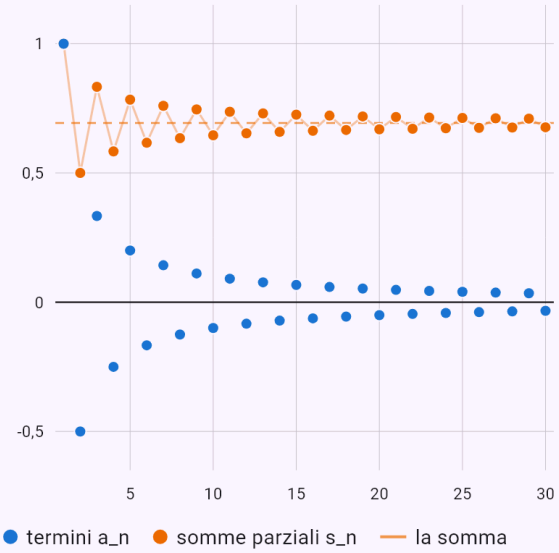
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- La serie armonica diverge – i termini raggruppati per potenze di due, ogni gruppo almeno 1/2

  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Criterio di Leibniz: |a_n| = $\frac{1}{n}$ decresce e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – la serie converge.
- Conclusione: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, ma non assolutamente (per il criterio di Leibniz).
- La somma di una serie nota: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Grafico



I punti sono i termini a_n e le somme parziali s_n = a_1 + … + a_n. Se la serie converge, i termini si avvicinano a zero e le somme parziali alla sua somma.

Il criterio del rapporto e la somma.

Input: `sum(n/2^n)`

Risultato

La serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

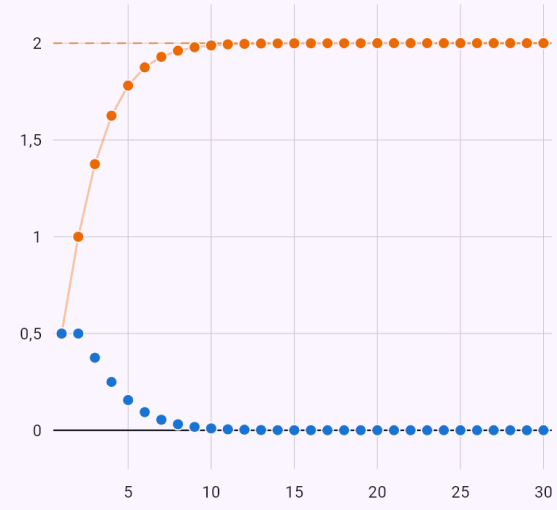
Passaggi

- La condizione necessaria di convergenza è soddisfatta (da sola non decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Il criterio del rapporto (di d'Alembert) – la serie converge.

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Una serie Σ P(n)·qⁿ sommata derivando la serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Grafico



I punti sono i termini a_n e le somme parziali s_n = a_1 + … + a_n. Se la serie converge, i termini si avvicinano a zero e le somme parziali alla sua somma.

La condizione necessaria non vale – la serie diverge.

Input: `sum(n/(n+1))`

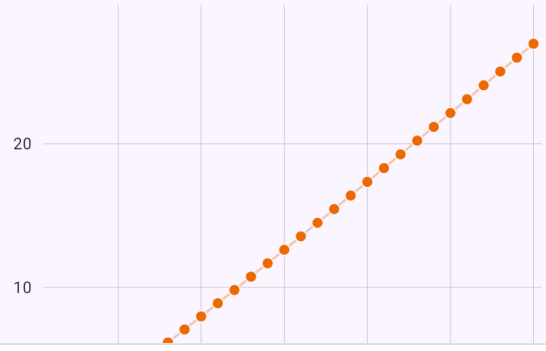
Risultato

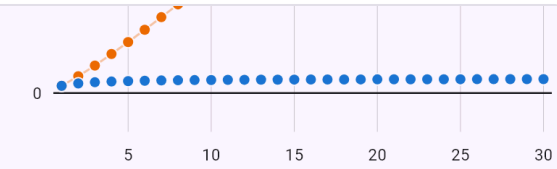
La serie diverge.

Passaggi

- La condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Grafico





I punti sono i termini a_n e le somme parziali s_n = a_1 + … + a_n. Se la serie converge, i termini si avvicinano a zero e le somme parziali alla sua somma.

Una somma telescopica – restano il primo e l'ultimo termine.

Input: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Risultato

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Passaggi

- Una somma telescopica – i termini vicini si elidono, restano solo il primo e l'ultimo:
  $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Un'equazione con la somma di una serie geometrica.

Input: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Risultato

$$x = -1$$

Passaggi

- La serie è geometrica di ragione q = 2^x e converge per $|2^x| < 1$; la sua somma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Risolviamo: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ soddisfa la condizione di convergenza: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

La somma dei quadrati con la formula.

Input: `sum(k^2, k, 1, n)`

Risultato

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passaggi

- Usiamo le formule per le somme di potenze:
  $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- La somma: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Una somma telescopica fino a n – fratti semplici.

Input: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Risultato

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Passaggi

- Scomponiamo il termine in fratti semplici – le loro parti si cancellano una dopo l'altra nella somma (una somma telescopica): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- La somma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Serie di potenze

Per una serie di potenze l'app trova il raggio di convergenza con il criterio del rapporto, studia gli estremi come serie numeriche e indica l'intervallo di convergenza; dove possibile anche la somma. Il grafico mostra le somme parziali con un cursore per il numero di termini.

Esempi

L’intervallo di convergenza [−1; 1).

Input: `sum(x^n/n)`

Risultato

$$x \in [-1;\ 1)$$

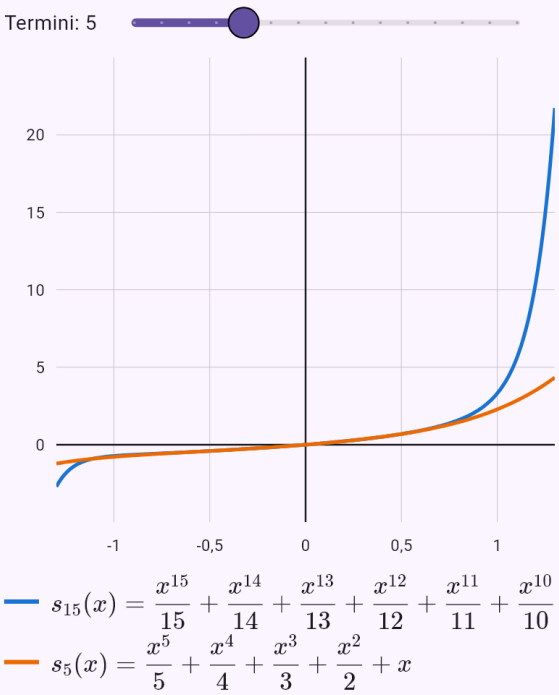
Passaggi

- Il raggio di convergenza R = 1 con il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- L’estremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge, ma non assolutamente (per il criterio di Leibniz).
- L’estremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge per il raggruppamento dei termini della serie armonica.
- L’intervallo di convergenza: $x \in [-1;\ 1)$

Grafico



Scegli il numero di termini con il cursore – le somme parziali si avvicinano alla somma della serie solo dentro l’intervallo di convergenza.

Serie di Taylor

L’app ricava la serie di Taylor di una funzione da sviluppi noti (e^x, sin x, ln(1 + x), …) per sostituzione e ne determina l’intervallo di convergenza.

Come inserirlo

`taylor(e^x, 0, oo)`	La funzione, il punto e oo al posto del grado; o il chip «Polinomio di Taylor» → «Serie».

Esempi

La serie di ln(1 + x) e il suo intervallo di convergenza.

Input: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Risultato

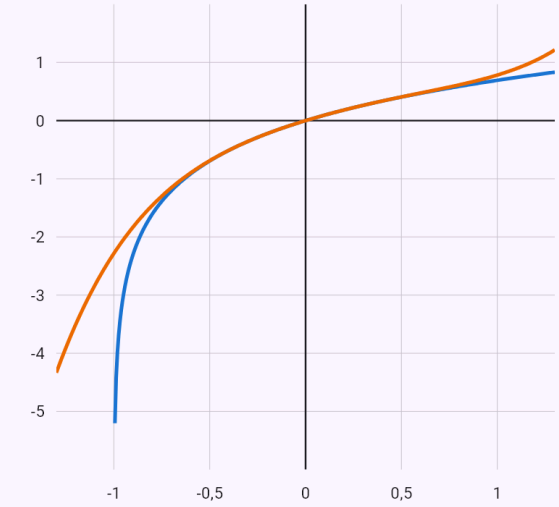
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Passaggi

- Dallo sviluppo noto $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ con $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Il raggio di convergenza R = 1 con il criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- L'estremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge per il raggruppamento dei termini della serie armonica.
- L'estremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, ma non assolutamente (per il criterio di Leibniz).
- L'intervallo di convergenza: $x \in (-1; 1]$

Grafico

Termini: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Scegli il numero di termini con il cursore – le somme parziali si avvicinano alla somma della serie solo dentro l'intervallo di convergenza.

33. Serie di Fourier

L'app costruisce la serie di Fourier di una funzione su un intervallo preso come un periodo (senza, su [−π; π]), o la serie di seni o di coseni di una funzione su [0; L]. La funzione si può dare anche a tratti.

Calcola i coefficienti con integrali con lo svolgimento completo (integrazione per parti con il parametro n), sostituisce sin nπ = 0 e cos nπ = $(-1)^n$ e usa la simmetria per funzioni pari e dispari. Nei punti di discontinuità determina la somma della serie con il teorema di Dirichlet, e sostituendo un punto e con l'identità di Parseval ricava somme di serie numeriche (come Σ $1/n^2 = \pi^2/6$). Il grafico mostra il prolungamento periodico della funzione e le somme parziali con un cursore.

Il chip «Complessa» (o fourierc) mostra anche la serie in forma complessa: i coefficienti c_n, la loro relazione con a_n e b_n e lo spettro di ampiezza e di fase.

Come inserirlo

`fourier(x^2, -pi, pi)`	La funzione e l'intervallo.
`fouriersin(x, 0, pi)`	La serie di seni (fouriercos – la serie di coseni).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Una funzione a tratti riga per riga, con il chip «Serie di Fourier».
`x^2`	Una funzione con il chip «Serie di Fourier» – lì scegli il tipo di serie e l'intervallo.

Esempi

Una funzione pari – solo coseni; le somme Σ 1/n² e Σ 1/n⁴.

Input: `fourier(x^2)`

Risultato

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

Passaggi

- L'intervallo $[-\pi;\ \pi]$ è un periodo: $T = 2\pi$, metà periodo $l = \pi$. Cerchiamo la serie con i coefficienti

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- La funzione è pari, $f(-x) = x^2 = f(x)$, quindi i coefficienti dei seni sono nulli e gli altri si possono calcolare su metà intervallo

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Il coefficiente a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Sostituiamo gli estremi: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Il coefficiente a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$
- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, quindi u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- La costante portata fuori dall'integrale:

  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, quindi u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- La costante portata fuori dall'integrale:

  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:

  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Per n intero, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Sostituiamo gli estremi

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- I coefficienti sostituiti nella serie

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Il prolungamento periodico della funzione è continuo, quindi per il teorema di Dirichlet la somma della serie è uguale a f(x) per $x \in [-\pi;\, \pi]$
- Sostituendo $x = 0$ si ottiene la somma di una serie numerica

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Sostituendo $x = \pi$ si ottiene la somma di una serie numerica

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

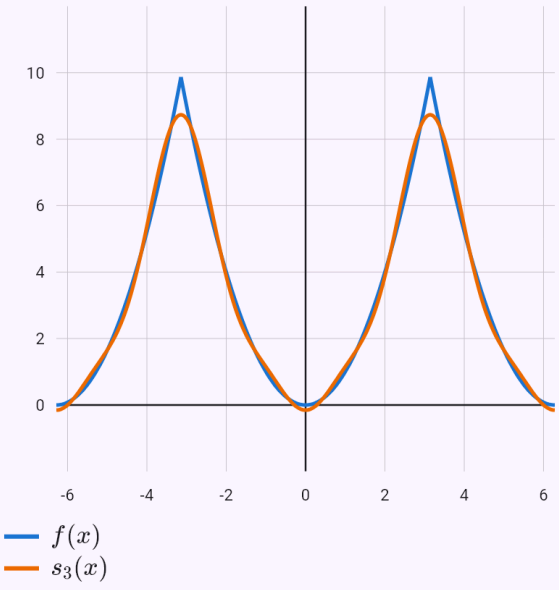
- Dall'identità di Parseval

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Grafico

Termini fino a n = 3



La funzione è prolungata periodicamente. Il cursore aggiunge termini della serie – le somme parziali si avvicinano alla funzione; in un salto la superano (il fenomeno di Gibbs) e passano per la media dei due lati, segnata da un punto.

Una funzione a tratti – salti e il fenomeno di Gibbs.

Input: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Serie di Fourier

Risultato

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Passaggi

- L'intervallo $[-\pi;\ \pi]$ è un periodo: $T = 2\pi$, metà periodo $l = \pi$. Cerchiamo la serie con i coefficienti

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La funzione è dispari, $f(-x) = -f(x)$, quindi il termine costante e i coefficienti dei coseni sono nulli e i coefficienti dei seni si possono calcolare su metà intervallo

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Il coefficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Per n intero, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Sostituiamo gli estremi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- I coefficienti sostituiti nella serie:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- I termini con n pari sono nulli – restano solo gli n dispari = 2k – 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Per il teorema di Dirichlet la somma della serie è uguale a f(x) per $x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi)$; in un punto di discontinuità è la media dei limiti unilaterali

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Sostituendo $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene la somma di una serie numerica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

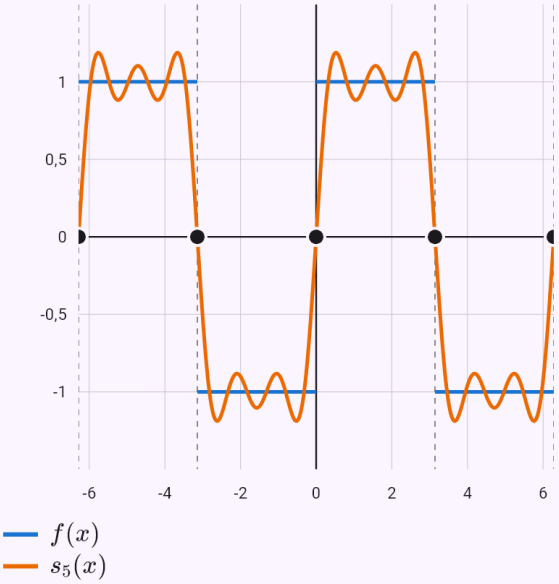
- Dall'identità di Parseval

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Grafico

Termini fino a n = 5



La funzione è prolungata periodicamente. Il cursore aggiunge termini della serie – le somme parziali si avvicinano alla funzione; in un salto la superano (il fenomeno di Gibbs) e passano per la media dei due lati, segnata da un punto.

Una serie di seni e la somma 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Input: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Risultato

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

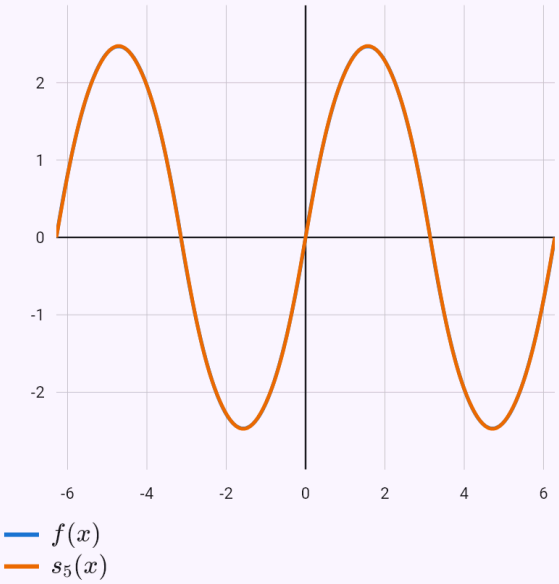
Passaggi

- Prolunghiamo la funzione da $[0;\ \pi]$ come funzione dispari, poi periodicamente ($T = 2\pi$) – una serie di seni
  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, dove
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
- Il coefficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$
- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, quindi u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$
- La costante portata fuori dall'integrale
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$
- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, quindi u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$
- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Per n intero, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Sostituiamo gli estremi
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$
- I coefficienti sostituiti nella serie:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$
- I termini con n pari sono nulli – restano solo gli n dispari = 2k − 1
  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$

- Il prolungamento periodico della funzione è continuo, quindi per il teorema di Dirichlet la somma della serie è uguale a f(x) per $x \in [0;\ \pi]$
- Sostituendo $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene la somma di una serie numerica
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
- Dall'identità di Parseval $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Grafico

Termini fino a n = 5



La funzione è prolungata periodicamente. Il cursore aggiunge termini della serie – le somme parziali si avvicinano alla funzione; in un salto la superano (il fenomeno di Gibbs) e passano per la media dei due lati, segnata da un punto.

La forma complessa con il suo spettro.

Input: `fourierc(x, -pi, pi)`

Risultato

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i \, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Passaggi

- L'intervallo $[-\pi;\ \pi]$ è un periodo: $T = 2\pi$, metà periodo $l = \pi$. Cerchiamo la serie con i coefficienti

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La funzione è dispari, $f(-x) = -x = -f(x)$, quindi il termine costante e i coefficienti dei coseni sono nulli e i coefficienti dei seni si possono calcolare su metà intervallo

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Il coefficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Per parti (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, quindi u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- La costante portata fuori dall'integrale:
  $\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile:
  $\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Per n intero, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Sostituiamo gli estremi

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- I coefficienti sostituiti nella serie:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

- Per il teorema di Dirichlet la somma della serie è uguale a f(x) per $x \in (-\pi;\ \pi)$; in un punto di discontinuità è la media dei limiti unilaterali:
  $s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$

- Sostituendo $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene la somma di una serie numerica

  $$s(\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Dall'identità di Parseval

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- La forma complessa della serie: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$, dove $c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-inx}\,dx$. Relazione con la forma reale

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Sostituiamo i coefficienti della forma reale

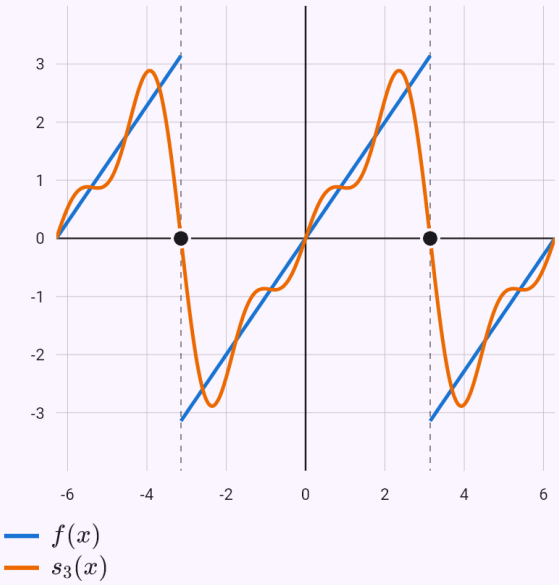
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

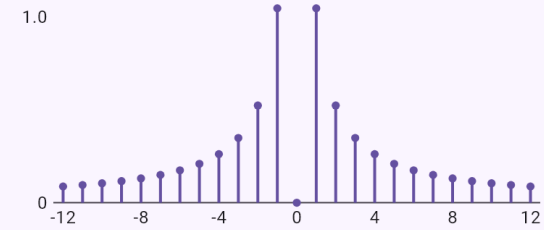
Grafico

Termini fino a n = 3

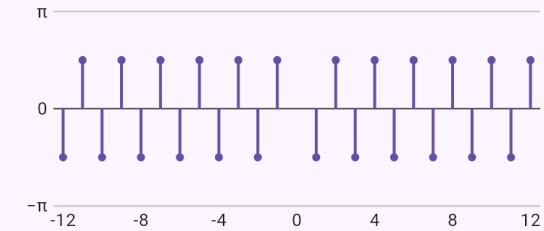


La funzione è prolungata periodicamente. Il cursore aggiunge termini della serie – le somme parziali si avvicinano alla funzione; in un salto la superano (il fenomeno di Gibbs) e passano per la media dei due lati, segnata da un punto.

Spettro di ampiezza $|c_n|$



Spettro di fase arg c_n



L'asse orizzontale è n. L'altezza mostra il modulo o l'angolo di c_n; i coefficienti nulli non hanno fase.

Limiti noti

- Una funzione illimitata a un estremo dell'intervallo (ln x su [0; 2π]) si sviluppa con coefficienti calcolati numericamente; il teorema di Dirichlet non vale nel punto in cui cresce illimitatamente. Una funzione con un polo (1/x) non si sviluppa – non è integrabile.
- Quando i coefficienti portano a un integrale senza primitiva elementare (ln x su [1; 3]), si esprimono con il seno e il coseno integrale.

Generato dall'app Mathtrace