Mathtrace – manuale

IV. Equazioni differenziali e analisi avanzata

Indice

IV. Equazioni differenziali e analisi avanzata

34. Analisi funzionale

35. Funzioni di una variabile complessa

36. Equazioni differenziali

37. Calcolo delle variazioni

38. Equazioni alle derivate parziali

39. Ricorrenze e funzioni generatrici

40. Metodi numerici

34. Analisi funzionale

> *«L'analisi funzionale lineare è in realtà algebra lineare in dimensione infinita.»*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., nella lezione introduttiva

La parte computazionale dell'analisi funzionale lineare. Scrivi la norma di un vettore come ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ o un altro numero; senza indice l'app calcola tutte e tre), la norma di una successione nello spazio ℓ^p come ||1/n||_2 – l'app somma la serie $\Sigma|a_n|^p$, e se diverge la successione non appartiene allo spazio. La norma L^p di una funzione è ||x^2||_{L^2(0; 1)}: l'app elimina il valore assoluto dividendo l'integrale negli zeri della funzione. La norma del sup ||f||_{C⟨a; b⟩} è il valore massimo di |f| dai punti stazionari e dagli estremi. dist(f, g, ⟨a; b⟩) dà la distanza di due funzioni nella norma del sup e in L^2, holder(...) e minkowski(...) verificano la disuguaglianza di Hölder e di Minkowski su funzioni o vettori dati.

Una successione di funzioni convergence(x^n, ⟨0; 1⟩) (o f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) si studia in tre passi: il limite puntuale a tratti (una potenza q^n tende a zero per |q| < 1), la convergenza uniforme con $s_n = \sup |f_n - f|$ dal punto stazionario x_n (un limite discontinuo di funzioni continue non può essere uniforme) e la convergenza in L^2 con $\int (f_n - f)^2$. Dove non risulta una formula, l'app stima il sup e l'integrale numericamente. Il grafico ha un cursore sui termini da f_1 a f_{20}.

Il prodotto scalare in L^2 con un peso, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (facoltativamente w = ...), dà anche le norme e l'angolo delle funzioni. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) esegue il procedimento di Gram–Schmidt e riconosce i polinomi classici: di Legendre, di Čebyšëv con il peso $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ o $\sqrt{(1 - x^2)}$, di Laguerre con e^(−x) su ⟨0; ∞) e di Hermite con e^(−x²); funziona anche per i vettori. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) trova la migliore approssimazione con un polinomio di grado n come proiezione ortogonale, con l'errore e la disuguaglianza di Bessel. L'identità di Parseval (e la derivazione di $\Sigma 1/n^2 = \pi^2/6$) è nel capitolo Serie di Fourier.

Le norme di matrice si scrivono ||[1 2; 3 4]||_1 (anche _2, _oo e _F per Frobenius; senza pedice l'app le calcola tutte), il numero di condizionamento cond([1 2; 3 4]) (facoltativamente p = 1). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) calcola la norma di un operatore integrale con nucleo K(x, t): su C[a; b] come massimo di $\int |K|\, dt$, in L^2 esattamente per un nucleo degenere, altrimenti maggiorata dalla norma di Hilbert–Schmidt. fnorm(g, ⟨a; b⟩) dà la norma del funzionale $\varphi(u) = \int u \cdot g$ su C e su L^2 (teorema di Riesz), con p = ... su L^p.

Scrivi un'equazione integrale di seconda specie come la vedi: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholm) o u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterra); funziona anche una foto, o i comandi fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) e volterra(K; f; λ; a). Un nucleo degenere diventa un sistema di equazioni lineari; con un parametro λ l'app trova i valori caratteristici e le autofunzioni e decide con l'alternativa di Fredholm. Gli altri nuclei si risolvono con la serie di Neumann e il metodo di Nyström, un'equazione di Volterra con nucleo k(x − t) con la trasformata di Laplace.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) verifica le ipotesi del teorema del punto fisso di Banach (g manda l'intervallo in sé, q = max |g′| < 1), calcola il numero di passi a priori e itera con la stima dell'errore a posteriori (facoltativamente eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) fa lo stesso per il sistema x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) dà le approssimazioni successive di Picard con l'intervallo in cui l'operatore è una contrazione e una stima dell'errore. Le equazioni funzionali di tipo Cauchy – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), di Jensen e di d'Alembert – si risolvono con la derivazione.

Come inserirlo

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Norme di un vettore, di una successione (ℓᵖ) e di una funzione (Lᵖ, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	La distanza di due funzioni nella norma del sup e in L².
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	La disuguaglianza di Hölder e quella di Minkowski.
`convergence(f_n, ⟨a; b⟩)`	Convergenza puntuale, uniforme e in L² di una successione di funzioni.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Il prodotto scalare, le norme e l'angolo di funzioni.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Il procedimento di Gram–Schmidt per funzioni e vettori.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	La migliore approssimazione con un polinomio di grado n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Norme di matrice 1, 2, ∞, di Frobenius e il numero di condizionamento.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	La norma di un operatore integrale e del funzionale ∫u·g.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Equazioni integrali di Fredholm e di Volterra di seconda specie.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Il teorema del punto fisso di Banach e le approssimazioni di Picard.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Equazioni funzionali di tipo Cauchy.

Esempi

Le norme 1, 2 e ∞ di un vettore.

Input: `||(1; -2; 3)||`

Risultato

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Passaggi

- Le tre norme più comuni del vettore $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: la somma dei valori assoluti delle componenti ($\|\cdot\|_1$), la lunghezza euclidea ($\|\cdot\|_2$) e il massimo valore assoluto di una componente ($\|\cdot\|_\infty$)
  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$
  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$
  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

||1/n||₂ = π/√6 – il problema di Basilea.

Input: `||1/n||_2`

Risultato

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Passaggi

- La norma della successione $a_n = \frac{1}{n}$ nello spazio ℓ^2 per p = 2: sommiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ ed estraiamo la radice
  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

La serie armonica diverge – 1/n non appartiene a ℓ¹.

Input: `||1/n||_1`

Risultato

La successione (funzione) non appartiene a questo spazio – la sua norma è infinita.

Passaggi

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ – la successione $a_n = \frac{1}{n}$ non ha norma finita, non appartiene allo spazio ℓ^2 per p = 1

Il valore assoluto eliminato dividendo l'integrale.

Input: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Risultato

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Passaggi

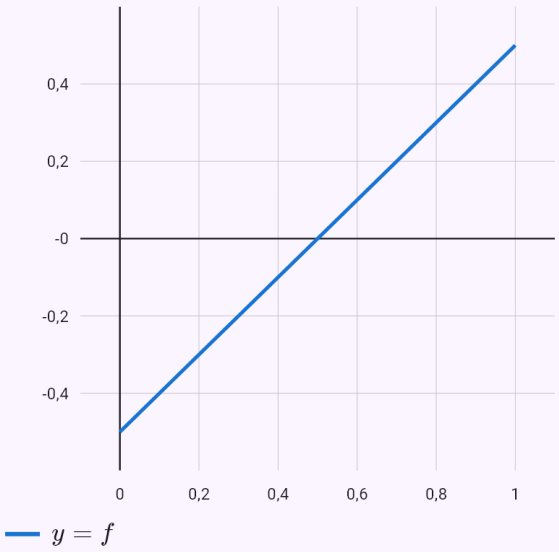
- Eliminiamo il valore assoluto dividendo l'integrale negli zeri della funzione $x = \frac{1}{2}$ – su ogni pezzo la funzione mantiene il segno

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- La norma nello spazio L𝕡 per p = 3: l'integrale $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, e quindi

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Grafico



La funzione sull'intervallo dato.

La norma del sup dai punti stazionari e dagli estremi.

Input: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Risultato

$$\|f\|_\infty = 18$$

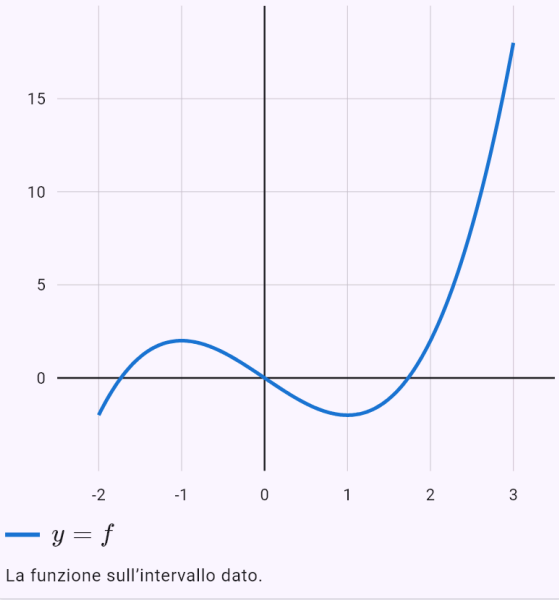
Passaggi

- La norma del sup di una funzione continua su un intervallo chiuso è il massimo valore di |f|. Lo cerchiamo negli estremi e nei punti stazionari interni: la derivata $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, i punti stazionari $x = -1,\ x = 1$
- I valori di |f| in questi punti

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- Il più grande di essi è la norma del sup $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in \langle -2;\, 3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Grafico



La funzione sull'intervallo dato.

La distanza nella norma del sup e in L².

Input: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Passaggi

- La distanza di due funzioni è la norma della loro differenza: $f - g = x(1-x)$
- La norma del sup di una funzione continua su un intervallo chiuso è il massimo valore di |f|. Lo cerchiamo negli estremi e nei punti stazionari interni: la derivata $(f-g)'(x) = 1 - 2x$, i punti stazionari $x = \frac{1}{2}$
- I valori di |f| in questi punti

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

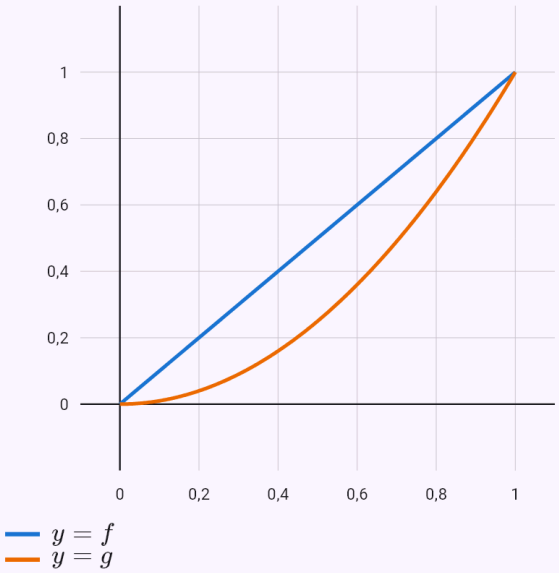
- Il più grande di essi è la norma del sup

$$\|(f-g)\|_\infty = \max_{x \in \langle 0;\, 1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

- La norma nello spazio L² per p = 2: l'integrale $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, e quindi

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

Grafico



Entrambe le funzioni sull'intervallo dato.

La disuguaglianza di Hölder con l’esponente coniugato q = 3/2.

Input: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

$$\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Passaggi

- La disuguaglianza di Hölder usa l’esponente coniugato q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- La norma nello spazio L^3 per p = 3: l’integrale $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, e quindi
  $\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$
- La norma nello spazio $L^{\frac{3}{2}}$ per p = $\frac{3}{2}$: l’integrale $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, e quindi
  $\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$
- Il primo membro $\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, il secondo membro $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – la disuguaglianza di Hölder vale.

x^n – puntualmente sì, uniformemente no, in L^2 sì.

Input: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

La successione di funzioni converge puntualmente, ma non uniformemente.

Passaggi

- Il limite è deciso dalla potenza q^n di base $q = x$: per $|q| < 1$ $q^n \to 0$ (più velocemente di quanto cresca qualsiasi potenza di n), per $|q| > 1$ cresce illimitatamente. I punti in cui $|q| = 1$ si calcolano a parte.
- Il limite puntuale: per ogni x fissato $f_n(x) = x^n$ è una successione di numeri; ne calcoliamo il limite per $n \to \infty$

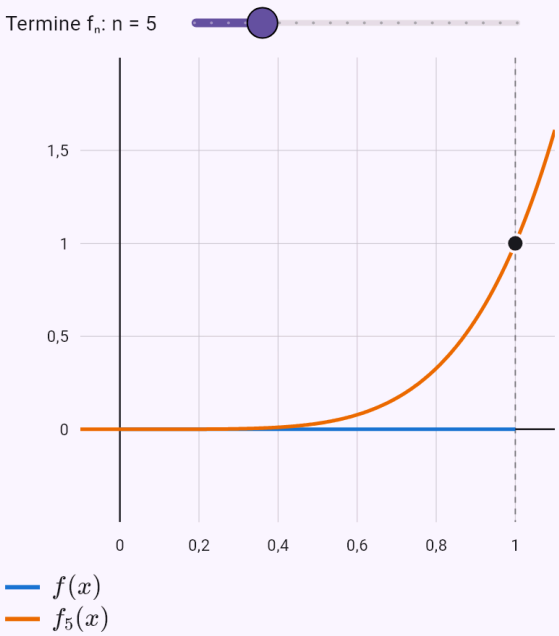
$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- La funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Tutte le funzioni f_n sono continue, ma la funzione limite non è continua in $x = 1$. Un limite uniforme di funzioni continue è continuo – quindi la convergenza non è uniforme.
- Convergenza in L^2: $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – la successione converge in L^2.

Grafico



La funzione limite f e il termine scelto f_n – sposta il cursore e osserva f_n avvicinarsi a f.

Convergenza uniforme: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Input: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Risultato

La successione di funzioni converge uniformemente.

Passaggi

- Il limite puntuale: per ogni x fissato $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ è una successione di numeri; ne calcoliamo il limite per n → ∞

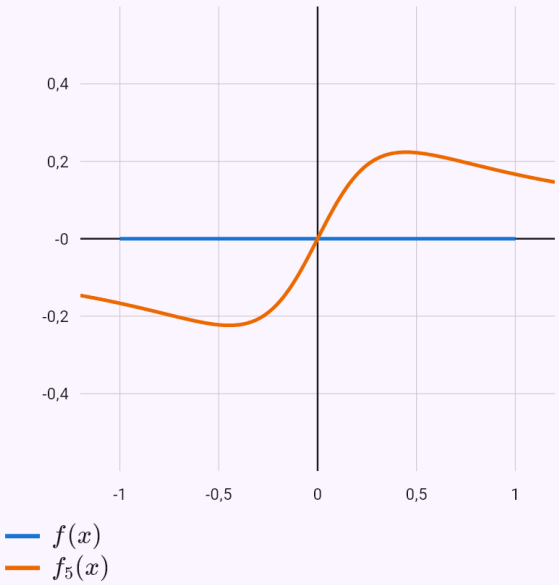
  $x \in \langle -1;\ 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

- La funzione limite: $f(x) = 0$
- Valutiamo l'uniformità tramite $s_n = \sup |f_n - f|$. La differenza $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ ha derivata $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; i candidati per il valore massimo sono $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Poiché $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, la convergenza è uniforme.
- Convergenza in L^2 – calcoliamo l'integrale $\|f_n - f\|_2^2$ numericamente. I valori decrescono a zero – la successione converge in L^2.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Grafico

Termine f_n: n = 5



La funzione limite f e il termine scelto f_n – sposta il cursore e osserva f_n avvicinarsi a f.

La gobba viaggiante – puntualmente a zero, ma s_n e $\|f_n\|_2$ crescono.

Input: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Risultato

La successione di funzioni converge puntualmente, ma non uniformemente.

Passaggi

- Il limite è deciso dalla potenza q^n di base $q = e^{-x^2}$: per $|q| < 1$ $q^n \to 0$ (più velocemente di quanto cresca qualsiasi potenza di n), per $|q| > 1$ cresce illimitatamente. I punti in cui $|q| = 1$ si calcolano a parte.
- Il limite puntuale: per ogni x fissato $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ è una successione di numeri; ne calcoliamo il limite per $n \to \infty$

  $$x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

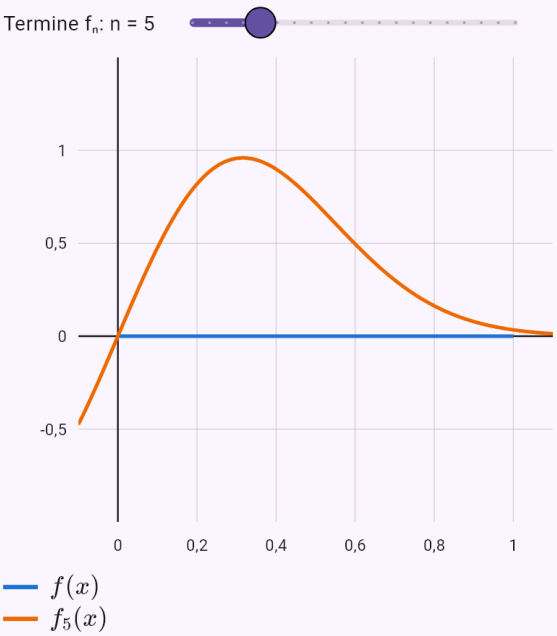
- La funzione limite: $f(x) = 0$
- Valutiamo l'uniformità tramite $s_n = \sup |f_n - f|$. La differenza $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ ha derivata $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; i candidati per il valore massimo sono $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Poiché $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (non 0), la convergenza non è uniforme.

  $$s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$$

- Convergenza in L² – calcoliamo l'integrale $\|f_n - f\|_2^2$ numericamente. I valori non decrescono a zero – la successione non converge in L².

n	10	100	1000
$\|f_n - f\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Grafico



La funzione limite f e il termine scelto f_n – sposta il cursore e osserva f_n avvicinarsi a f.

Il prodotto scalare, le norme e l'angolo di due funzioni.

Input: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

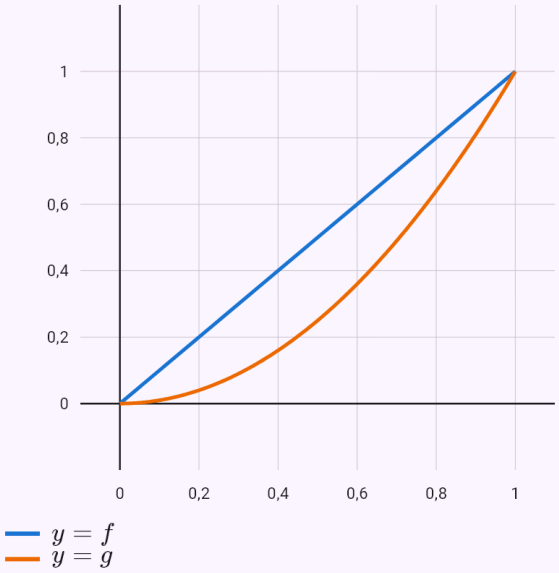
Risultato

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Passaggi

- Il prodotto scalare nello spazio L^2:
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- Le norme di entrambe le funzioni date dal prodotto scalare
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- L'angolo tra le funzioni (la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz garantisce $|\cos\varphi| \le 1$)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Grafico



Entrambe le funzioni sull'intervallo dato.

Polinomi di Legendre da 1, x, x², x³.

Input: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Risultato

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Passaggi

- Il procedimento di Gram–Schmidt – teniamo la prima funzione: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Passo 2: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. I prodotti scalari necessari: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Passo 3: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. I prodotti scalari necessari: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Passo 4: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. I prodotti scalari necessari

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0$, $\langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5}$, $\langle f_4, e_3\rangle = 0$

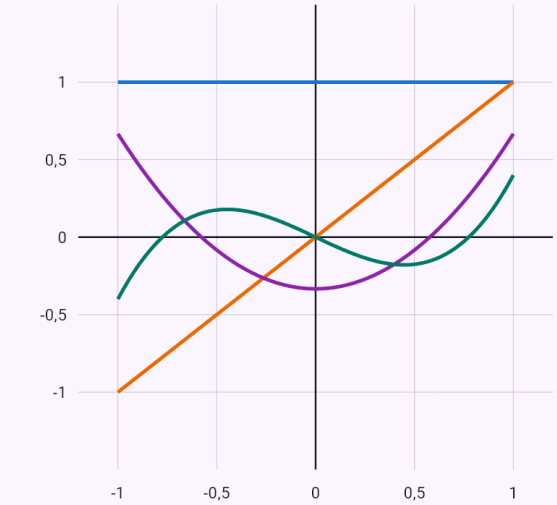
- Dividendo per le norme si ottiene un sistema ortonormale

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$, $\hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$

- Sono i polinomi di Legendre – nella forma usuale con $P_k(1) = 1$

  $P_0(x) = 1$
  $P_1(x) = x$
  $P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$
  $P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$

Grafico



Le funzioni ortogonali sull'intervallo dato.

Polinomi di Čebyšëv – gli integrali dai momenti del peso.

Input: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Risultato

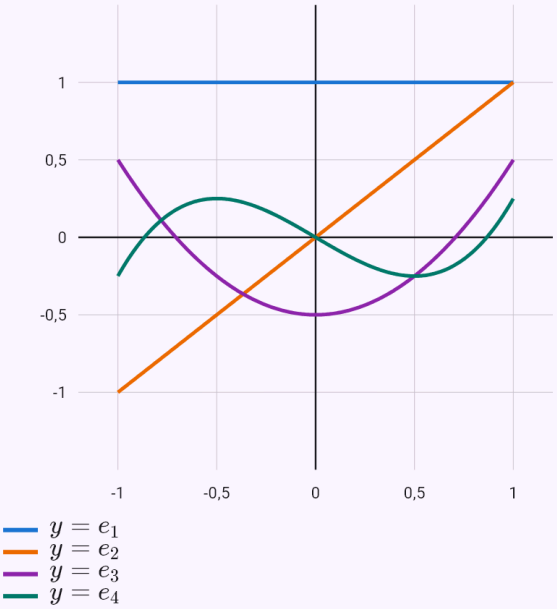
$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Passaggi

- I prodotti scalari di polinomi con il peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ si ricavano dai momenti del peso
  $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$
  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$
- Il procedimento di Gram–Schmidt – teniamo la prima funzione: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$
- Passo 2: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. I prodotti scalari necessari: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Passo 3: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. I prodotti scalari necessari
  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Passo 4: sottraiamo le proiezioni della funzione sulle precedenti: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$,
  $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. I prodotti scalari necessari
  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Dividendo per le norme si ottiene un sistema ortonormale
  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$
- Sono i polinomi di Čebyšëv di prima specie, $T_k(\cos t) = \cos kt$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$$

Grafico



Le funzioni ortogonali sull'intervallo dato.

La migliore approssimazione quadratica di e^x su [−1; 1].

Input: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Risultato

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Passaggi

- La migliore approssimazione in L² è la proiezione ortogonale sui polinomi di grado al più n. Il procedimento di Gram–Schmidt applicato a 1, x, x², … dà una base ortogonale: $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$; $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- I coefficienti della proiezione

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

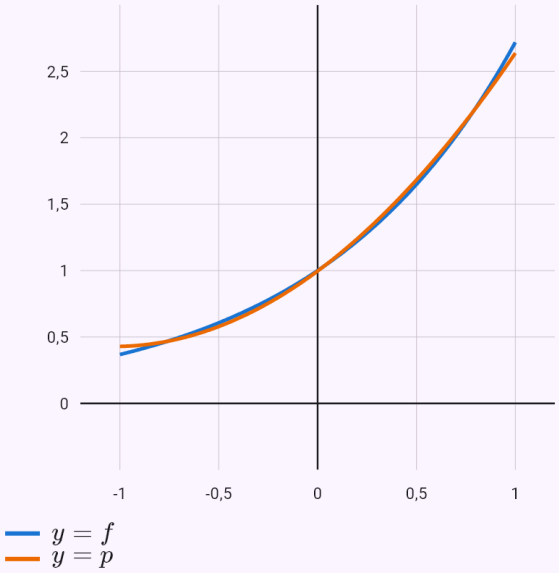
- La migliore approssimazione

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$

- L'errore dal teorema di Pitagora: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Disuguaglianza di Bessel: $\sum c_k^2\|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Per un sistema completo (n → ∞) diventa un'uguaglianza – l'identità di Parseval.

$$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2\|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Grafico



La funzione f e la sua migliore approssimazione p.

Le norme 1, 2, ∞ e di Frobenius di una matrice.

Input: `||[1 2; 3 4]||`

Risultato

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Passaggi

- La matrice
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- La norma per colonne è la massima somma dei valori assoluti in una colonna:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, quindi
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- La norma spettrale è la radice quadrata del massimo autovalore di. Gli autovalori quindi
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- La norma per righe è la massima somma dei valori assoluti in una riga: $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, quindi $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- La norma di Frobenius è la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti gli elementi
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Una matrice quasi singolare – κ ≈ 4·10⁴.

Input: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Risultato

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Passaggi

- La matrice
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- La norma spettrale è la radice quadrata del massimo autovalore di. Gli autovalori quindi
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- Il numero di condizionamento. Dice di quante volte può crescere l'errore relativo dei dati; risolvendo un sistema si possono perdere circa $4{,}6$ cifre significative – la matrice è mal condizionata.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$

Il nucleo cambia segno – l'integrale diviso in t = x.

Input: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Passaggi

- La norma di un operatore integrale su C[a; b] è il valore massimo di φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Il nucleo $K(x,t) = x - t$ cambia segno dove K = 0 – lì l'integrale viene diviso

$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- La norma del sup di una funzione continua su un intervallo chiuso è il massimo valore di |f|. Lo cerchiamo negli estremi e nei punti stazionari interni: la derivata $\varphi'(x) = 2x - 1$, i punti stazionari $x = \frac{1}{2}$
- I valori di |f| in questi punti

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Il più grande di essi è la norma del sup

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Il nucleo è degenere, $K(x,t) = -t + x$. La sua norma L² si ricava allora dalle matrici di Gram delle funzioni a(x) e b(t). Per confronto, la norma di Hilbert–Schmidt non è mai minore.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

La norma di un funzionale su C e su L² (teorema di Riesz).

Input: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

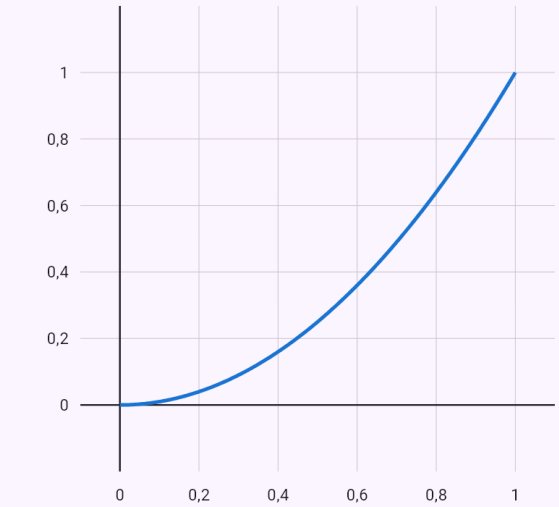
$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Passaggi

- Il funzionale φ(u) = ∫u·g su $C\langle 0;\,1\rangle$ con la norma del sup: la sua norma è l'integrale di |g|, approssimato da u continue ≈ sgn g: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_1$
- La norma nello spazio L¹ per p = 1: l'integrale $\int_0^1 |x^2|\,dx = \frac{1}{3}$, e quindi $\|g\|_1 = \int_0^1 |x^2|\,dx = \frac{1}{3}$
- Su $L^2\langle 0;\,1\rangle$ il funzionale φ(u) = ∫u·g è il prodotto scalare con g (teorema di Riesz). Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz la sua norma è ‖g‖₂, raggiunta per u = g/‖g‖₂: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_2$
- La norma nello spazio L² per p = 2: l'integrale $\int_0^1 (x^2)^2\,dx = \frac{1}{5}$, e quindi

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x^2)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Grafico



La funzione sull'intervallo dato.

Un nucleo degenere con il parametro λ.

Input: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Risultato

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Condizioni: $\lambda \neq 3$

Passaggi

- Un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie (estremi fissi): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\, u(t)\, dt$, il nucleo $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Il nucleo è degenere – il prodotto di una funzione di x e di una funzione di t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Gli integrali con la funzione incognita sono numeri – chiamiamoli costanti incognite $c = \int_0^1 t\, u(t)\, dt$. La soluzione ha quindi la forma $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Sostituendo questa forma nelle definizioni delle costanti si ottiene un sistema di equazioni lineari con i coefficienti

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}$

  $c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$
- Il sistema ha esattamente una soluzione dove il suo determinante è diverso da zero: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Le sue radici sono i valori caratteristici del nucleo: $\lambda_1 = 3$
- Per $\lambda \neq 3$ la soluzione del sistema è $c = \frac{1}{3-\lambda}$, quindi $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Per $\lambda_1 = 3$ l'equazione omogenea ha soluzioni non nulle – le autofunzioni $\varphi_1(x) = x$
- Alternativa di Fredholm per $\lambda_1 = 3$: il sistema è incompatibile ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), quindi l'equazione non ha soluzione per questo λ (l'autofunzione $\varphi(x) = x$).

Valori caratteristici e autofunzioni.

Input: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Risultato

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Passaggi

- Un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie (estremi fissi): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\, u(t)\, dt$, il nucleo $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Il nucleo è degenere – una somma di 2 prodotti di una funzione di x e di una funzione di t: $K(x,t) = t + x$
- Gli integrali con la funzione incognita sono numeri – chiamiamoli costanti incognite $c_1 = \int_0^1 t\, u(t)\, dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\, dt$. La soluzione ha quindi la forma $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Sostituendo questa forma nelle definizioni delle costanti si ottiene un sistema di equazioni lineari con i coefficienti

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

  $c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$

  $c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$
- Il sistema ha esattamente una soluzione dove il suo determinante è diverso da zero: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Le sue radici sono i valori caratteristici del nucleo: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Per $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ l'equazione omogenea ha soluzioni non nulle – le autofunzioni $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Per $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ l'equazione omogenea ha soluzioni non nulle – le autofunzioni $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Un nucleo non degenere – la serie di Neumann e il metodo di Nyström.

Input: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Risultato

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Passaggi

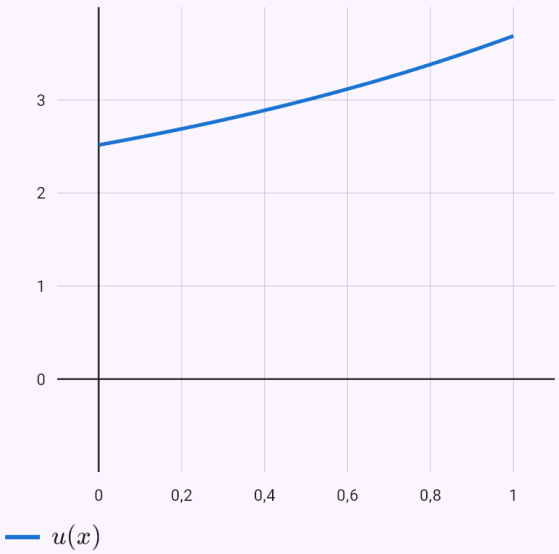
- Un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie (estremi fissi): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, il nucleo $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Il nucleo non è degenere. La serie di Neumann – le approssimazioni successive $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – converge, perché

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Metodo di Nyström: l'integrale diventa una quadratura di Gauss con 32 nodi, l'equazione nei nodi un sistema lineare, e i valori tra i nodi seguono dall'equazione stessa. Rispetto a metà dei nodi, l'accuratezza è circa 10^{-8}. I valori della soluzione

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$u(x)$	$2{,}517$	$2{,}7372$	$2{,}9997$	$3{,}3134$	$3{,}6894$

Grafico



La soluzione dell'equazione integrale.

Un'equazione di Volterra con la trasformata di Laplace – cos x.

Input: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

Risultato

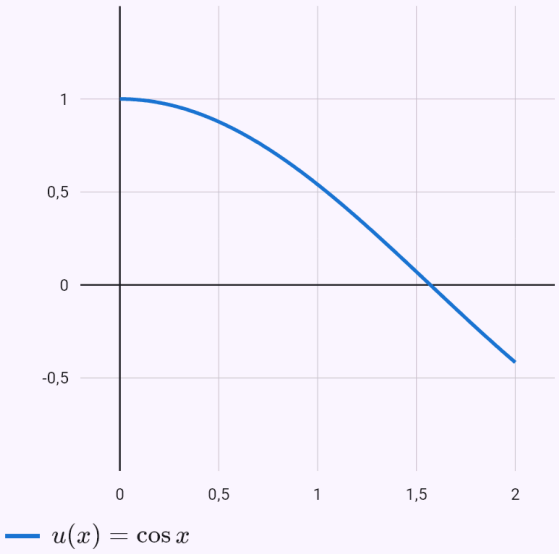
$$u(x) = \cos x$$

Passaggi

- Un'equazione integrale di Volterra di seconda specie (l'estremo superiore è x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, il nucleo $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Il nucleo dipende solo da x – t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – l'integrale è una convoluzione, che la trasformata di Laplace trasforma in un prodotto. Le trasformate. L'equazione per le trasformate $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, quindi $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Antitrasformando, $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

Grafico



La soluzione dell'equazione integrale.

Il punto fisso di cos x con le stime a priori e a posteriori.

Input: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Risultato

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Passaggi

- Il teorema del punto fisso di Banach richiede che $g(x) = \cos x$ mandi l'intervallo $I = \langle 0;\ 1\rangle$ in sé. La sua immagine (dagli estremi e dai punti stazionari) è $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – sta in I.
- La norma del sup di una funzione continua su un intervallo chiuso è il massimo valore di |f|. La derivata $g''(x) = -\cos x$ non ha zeri all'interno dell'intervallo – bastano gli estremi.
- I valori di |f| in questi punti

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- Il più grande di essi è la norma del sup

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Per il teorema del valor medio |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y| con q il massimo valore di |g'|:
$q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g è una contrazione.
- La stima a priori: partiamo da
$x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. Da con $\varepsilon = 10^{-6}$ e $q = \sin 1$ servono n ≥ 86 passi.

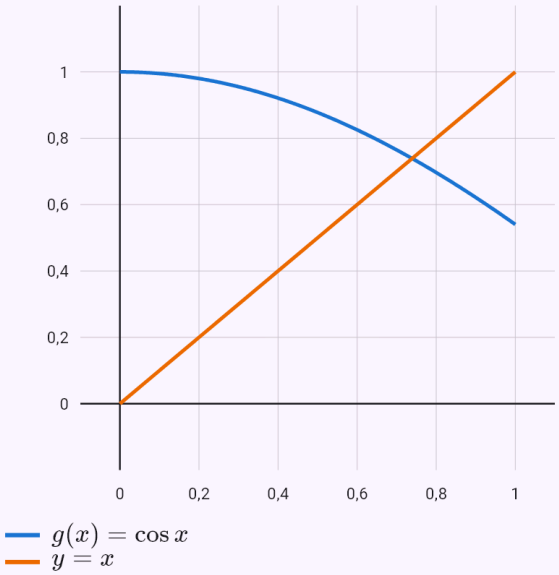
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\ln q}$$

- Iteriamo $x_{n+1} = g(x_n)$; l'ultima colonna è la stima a posteriori dell'errore e il calcolo si ferma quando scende sotto ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- Il punto fisso:
$x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Sono bastati 38 passi invece dei 86 a priori – la stima a posteriori è di solito molto più precisa.

Grafico



La funzione g e la retta y = x – il punto fisso è dove si incontrano.

Il sistema x = Ax + b, una contrazione nella norma ∞.

Input: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Risultato

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Passaggi

- Il sistema nella forma per l'iterazione

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- La norma per colonne è la massima somma dei valori assoluti in una colonna quindi

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- La norma per righe è la massima somma dei valori assoluti in una riga quindi $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- La mappa x ↦ Ax + b è una contrazione quando una norma di A è minore di 1. Prendiamo la minore:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- La stima a priori: partiamo da $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Da con $\varepsilon = 10^{-6}$ e $q = 0{,}6$ servono n ≥ 31 passi.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iteriamo $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; l'ultima colonna è la stima a posteriori dell'errore e il calcolo si ferma quando scende sotto ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Il punto fisso. Sono bastati 28 passi invece dei 31 a priori – la stima a posteriori è di solito molto più precisa.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Per confronto, il punto fisso esatto dal sistema lineare

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Le approssimazioni di Picard e la soluzione esatta.

Input: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Risultato

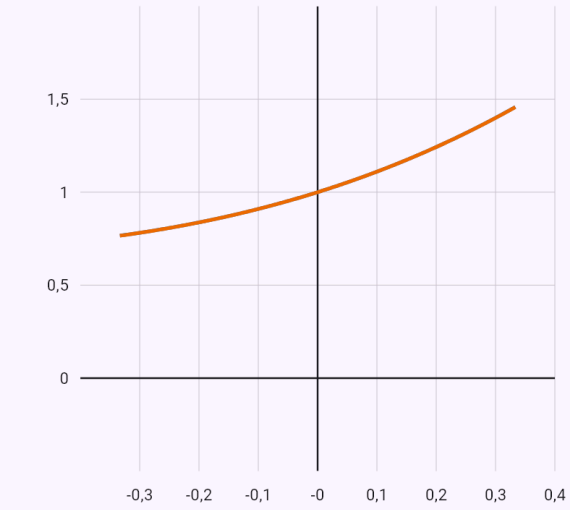
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Passaggi

- Il problema $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ diventa l'equazione integrale y = T(y); le approssimazioni successive di Picard iterano l'operatore T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Approssimazione 1:
  $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Approssimazione 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Approssimazione 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Dove T è una contrazione (teorema di Picard–Lindelöf): sul rettangolo $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ abbiamo $M = \max_R |f| \doteq 3$ e. Sull'intervallo con $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ le approssimazioni restano nel rettangolo e $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- La stima dell'errore dell'ultima approssimazione per $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$
- La soluzione esatta per confronto: $y(x) = -x + 2e^x - 1$

; l'errore effettivo all'estremo dell'intervallo $|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Grafico



L'approssimazione di Picard e la soluzione esatta (se nota).

L’equazione di Cauchy – f(x) = cx.

Input: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Risultato

$$f(x) = c\,x$$

Passaggi

- L’equazione funzionale di Cauchy di una funzione additiva: $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Assumiamo che la funzione f sia continua. Senza questa ipotesi l’equazione di Cauchy ha anche soluzioni discontinue «patologiche» (costruite da una base di Hamel).
- Sostituiamo: $x = y = 0:\quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- La sostituzione y = −x mostra che la funzione è dispari: $y = -x:\quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Per induzione per n naturale: $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Per r = m/n razionale $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- I razionali sono densi e la funzione è continua, quindi vale per ogni x reale: $f(x) = \lim_{r \to x} f(r) = \lim_{r \to x} c\,r = c\,x$
- Tutte le soluzioni continue (a, b, c costanti arbitrarie): $f(x) = c\,x$
- Verifica per sostituzione: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

L’equazione di d’Alembert – cos e cosh.

Input: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Risultato

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Passaggi

- L’equazione funzionale di d’Alembert:
  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Assumiamo che la funzione f sia continua. Senza questa ipotesi l’equazione di Cauchy ha anche soluzioni discontinue «patologiche» (costruite da una base di Hamel).
- Sostituiamo
  $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- La sostituzione x = 0 mostra che la funzione è pari:
  $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- Le soluzioni continue sono regolari; derivando due volte rispetto a y in y = 0 si ottiene un’equazione differenziale
  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Secondo il segno della costante k:
  $k = -c^2: \cos(cx), \qquad k = 0: 1, \qquad k = c^2: \cosh(cx)$
- Tutte le soluzioni continue (a, b, c costanti arbitrarie):
  $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Verifica per sostituzione:
  $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Limiti noti

- L’app trova il limite puntuale per successioni il cui limite è deciso da una potenza q^n o da un’espressione razionale in n; quelle più complesse (sin nx senza dividere per n) può rifiutarle.
- La convergenza si studia su un intervallo chiuso e limitato; un intervallo infinito non ancora.
- Il procedimento di Gram–Schmidt per al massimo 6 funzioni, l’approssimazione con un polinomio di grado al massimo 5.
- Un nucleo degenere con al massimo 4 termini; con un parametro λ solo nuclei degeneri, gli altri nuclei si risolvono numericamente per un λ numerico. Un’equazione di Volterra esattamente solo con un nucleo k(x − t) da zero o a(x)·b(t), altrimenti con approssimazioni successive e numericamente.
- Matrici fino a 6 × 6, al massimo 6 approssimazioni di Picard. Equazioni funzionali solo dei tipi elencati (e quella di Cauchy con un termine polinomiale in più), sempre con soluzioni continue.

35. Funzioni di una variabile complessa

Le equazioni di Cauchy–Riemann di f(z) si verificano con cr(z^2 + 3z); la funzione si può scrivere in z, $\bar{z}$ (conj(z)), |z|, Re z, Im z o direttamente in x e y. L'app scompone f = u + iv, calcola le derivate parziali e sostituisce in u_x = v_y, u_y = −v_x. Se valgono ovunque, la funzione è analitica e il risultato è la derivata f'(z) scritta in z; altrimenti l'app dice dove valgono (punti o una curva) e la funzione non è analitica. Per una funzione armonica harmonic(u = x^2 - y^2) trova l'armonica coniugata integrando le equazioni e l'intera f(z) ponendo x = z, y = 0; si può dare anche la parte immaginaria, harmonic(v = 2xy).

Valori delle funzioni elementari in $\mathbb{C}$: il logaritmo principale ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w con tutti i valori che differiscono di 2kπi, una potenza con esponente complesso i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh e cosh di un numero complesso con le formule di addizione. L'argomento è nello stesso intervallo che per i numeri complessi (il chip «Argomento principale»). Le equazioni sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 si risolvono con la sostituzione w = e^(iz) (e^z) e un'equazione di secondo grado, e^z = 1 + i con il logaritmo; il risultato è la soluzione generale con k ∈ $\mathbb{Z}$ e più soluzioni nel piano di Gauss. Un'equazione in x senza soluzione reale (sin x = 2) offre il pulsante della soluzione complessa.

Singolarità e residui: singularities(f) trova le radici del denominatore e le singolarità essenziali (e^(1/z), sin(1/z)), ne indica il tipo – eliminabile, un polo di ordine m, essenziale – e calcola i residui: in un polo semplice g(a)/q'(a), in un polo di ordine superiore con la derivata di (z − a)^m f(z), in una singolarità essenziale dalla serie di Laurent. Res(f, z = a) calcola un residuo. La serie di Laurent di una funzione razionale in una corona laurent(f, 1 < |z| < 2) (o |z| > 1, 0 < |z − a| < r, attorno a un punto laurent(f, z = a)) si costruisce dai fratti semplici su $\mathbb{C}$ e dalla serie geometrica di ciascun fratto – secondo che il suo polo stia dentro o fuori la corona. L'integrale su una circonferenza oint(f, |z − a| = r) (da una foto \oint_{|z−a|=r}) si calcola con il teorema dei residui; senza singolarità all'interno è nullo, una singolarità sulla circonferenza viene segnalata.

Residui nell'analisi reale: un integrale improprio di una funzione razionale su tutto l'asse, con cos ax o sin ax (lemma di Jordan) e da 0 a ∞ di una funzione pari; un integrale di una funzione razionale di cos t e sin t su [0; 2π] con z = e^(it). Gli integrali con un coseno o un seno e su [0; 2π] passano subito per i residui, per gli altri scegli il chip «Con i residui» (indietro con «Nel modo usuale»). Lo stesso chip su una serie somma Σ R(n) da 1 (da 0 o da un altro intero) con il nucleo π cotg πz, una serie a segni alterni con π/sin πz; una somma su tutti gli interi da −∞ va subito. L'antitrasformata di Laplace di una funzione razionale invlaplace(F) (da una foto \mathcal{L}^{-1}\{F\}) si calcola come somma dei residui di F(s)e^(st).

Il teorema di Rouché rouche(p, |z| < r) conta le radici di un polinomio in un cerchio con il termine che sulla circonferenza domina la somma degli altri, in una corona r < |z| < R come differenza di due cerchi; le radici sono mostrate nel piano di Gauss. Una mappa conforme w = f(z) si scompone in u e v, l'app dice dove è conforme (f' ≠ 0) e per una trasformazione di Möbius (αz + β)/(γz + δ) trova i punti fissi e le

immagini dell'asse reale e immaginario e della circonferenza unitaria. Il grafico mostra l'immagine della griglia di rette x = c e y = c.

La trasformata di Fourier di una funzione razionale ftransform(1/(1 + t^2)) (da una foto \mathcal{F}\{f\}) si calcola con i residui – per ω > 0 il cammino si chiude nel semipiano inferiore, per ω < 0 in quello superiore – e per una funzione pari (dispari) il risultato si scrive con |ω|. Per una densità in x dà la funzione caratteristica della distribuzione a meno del segno di ω, per la distribuzione di Cauchy simmetrica direttamente e^(−|t|). L'antitrasformata Z invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) è la somma dei residui di $F(z)z^{n-1}$ con il valore iniziale x[0] = lim F(z) per z → ∞. Il loro uso in filtri, controllo e ottica è nel capitolo Applicazioni dell'analisi complessa.

Come inserirlo

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Le equazioni di Cauchy–Riemann e la derivata.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	L'armonica coniugata di una parte reale (immaginaria).
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Il logaritmo, le potenze, le funzioni goniometriche e le equazioni in $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Un residuo in un punto, tutte le singolarità.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Una serie di Laurent in una corona o attorno a un punto.
`oint(f, |z - a| = r)`	Un integrale su una circonferenza con il teorema dei residui.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Integrali reali con i residui.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	Una somma di una serie con i residui.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Il numero di radici di un polinomio in un cerchio o in una corona.
`w = (z - i)/(z + i)`	Una mappa conforme, una trasformazione di Möbius.
`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	L'antitrasformata di Laplace con i residui.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	La trasformata di Fourier con i residui.

`invz(z/(z - 1/2))`	L’antitrasformata Z con i residui.

Esempi

Una funzione analitica – le equazioni valgono ovunque, la derivata in z.

Input: `cr(z^2 + 3z)`

Risultato

$$f'(z) = 2z + 3$$

Passaggi

- Separiamo la funzione nella parte reale e immaginaria, f = u + iv con z = x + iy:
  $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Le derivate parziali di u e v rispetto a x e y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Sostituiamo nelle equazioni di Cauchy–Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Entrambe le equazioni valgono in tutto il piano e le derivate parziali sono continue – la funzione è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.
- La derivata della funzione olomorfa, scritta in z:
  $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

Le equazioni valgono solo sulla retta y = x – la funzione non è analitica.

Input: `cr(x^2 + i y^2)`

Risultato

La funzione non è olomorfa – le equazioni di Cauchy–Riemann non valgono in alcuna regione.

Passaggi

- Separiamo la funzione nella parte reale e immaginaria, f = u + iv con z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Le derivate parziali di u e v rispetto a x e y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Sostituiamo nelle equazioni di Cauchy–Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Entrambe le equazioni valgono solo dove $2(x - y) = 0$. Lì la funzione ha derivata, ma nessun intorno di un punto le soddisfa – la funzione non è olomorfa da nessuna parte.

L'armonica coniugata e f(z) = z² + z.

Input: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Risultato

$$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$$

Passaggi

- È data la parte reale u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Verifichiamo che è armonica – il suo laplaciano è zero: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- La prima equazione di Cauchy–Riemann $v_y = u_x$ dà v integrando rispetto a y – la "costante" può dipendere da x:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- Troviamo C(x) dalla seconda equazione $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- L'armonica coniugata: $v = 2xy + y + C$
- Scriviamo f(z) = u + iv in z – basta porre x = z e y = 0:
  $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

Il valore principale del logaritmo e tutti i suoi valori.

Input: `ln(1 + i)`

Risultato

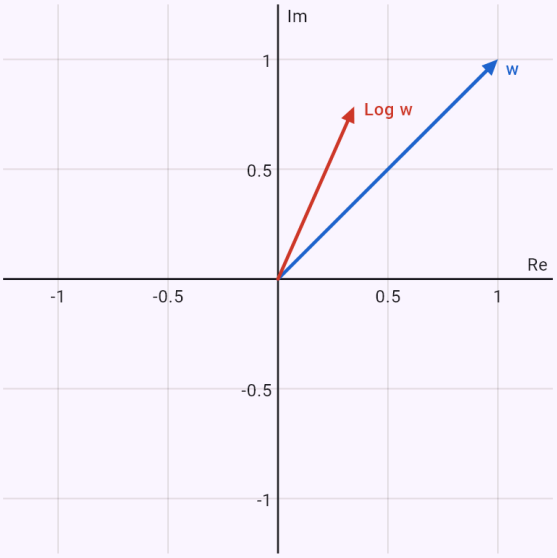
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Passaggi

- Il valore principale del logaritmo è $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, l'argomento in $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- Il modulo e l'argomento principale del numero: $|1+i| = \sqrt{2}, \ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- L'esponenziale è periodica di periodo 2πi, quindi il logaritmo ha infiniti valori – differiscono per multipli di 2πi

  $$\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

i^i è il numero reale e^(−π/2).

Input: `i^i`

Risultato

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

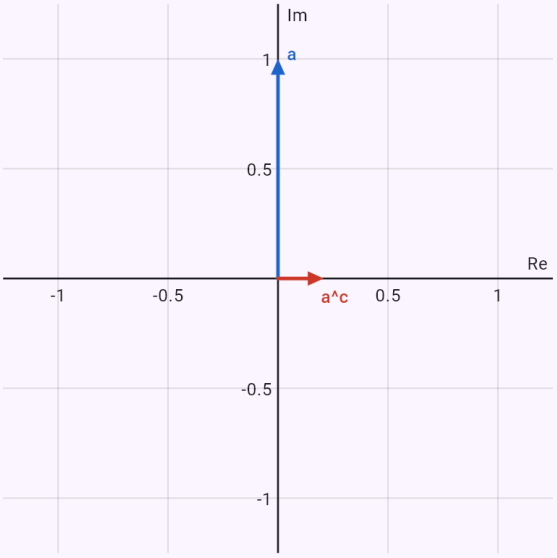
Passaggi

- Una potenza con esponente complesso si definisce con il logaritmo principale (l'argomento in $\langle 0; 2\pi)$)

  $$a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$$

- Separiamo l'esponente nella parte reale e immaginaria: $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Il valore principale della potenza, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Gli altri valori del logaritmo danno tutti i valori della potenza: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$

Grafico



Il piano complesso – i numeri dati in blu, il risultato in rosso, l'argomento φ come arco dal semiasse reale positivo.

L’equazione sin z = 2 – la sostituzione w = e^(iz) e un’equazione di secondo grado.

Input: `sin z = 2`

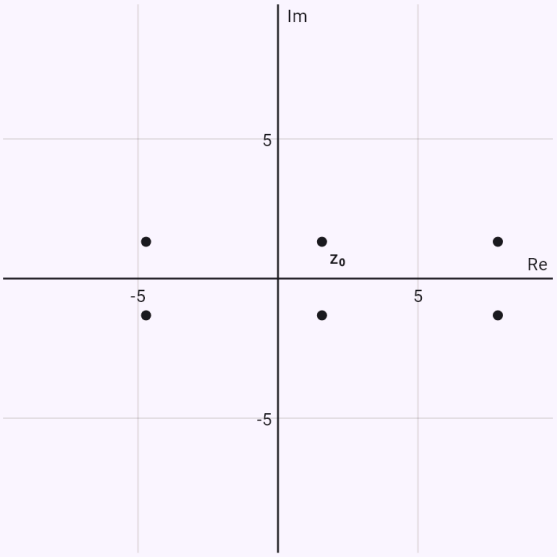
Risultato

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Passaggi

- Scriviamo la funzione con gli esponenziali e sostituiamo: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Moltiplicando l’equazione per w si ottiene un’equazione di secondo grado: $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Le sue radici: $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Torniamo a z: $iz = \log w$, quindi $z = -i \log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i \ln|w|$ (l’argomento in $\langle 0; 2\pi)$): $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Grafico



Il piano complesso (di Gauss) – le soluzioni come punti: la parte reale sull’asse orizzontale, la parte immaginaria su quello verticale.

Un polo di ordine inferiore grazie a uno zero del numeratore, e un polo semplice.

Input: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

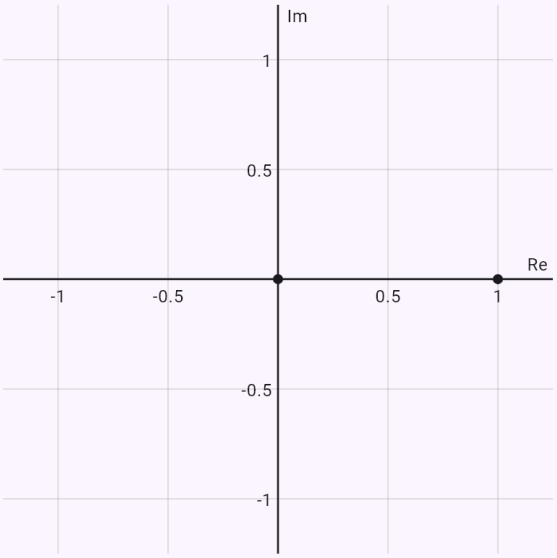
Risultato

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Passaggi

- I punti singolari – le radici del denominatore: $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- In 0 il denominatore ha una radice di molteplicità 3, il numeratore di molteplicità 1 – è un polo di ordine 2
- Il residuo in un polo di ordine 2 $\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},$ I
- In 1 il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q $\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z^$

Grafico



Piano di Gauss – i punti singolari della funzione.

Una singolarità essenziale – il residuo dalla serie di Laurent.

Input: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Risultato

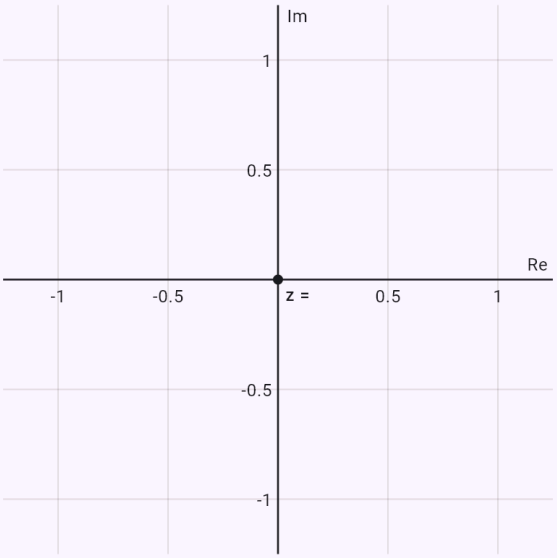
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Passaggi

- In 0 c'è una singolarità essenziale – l'esponente (l'argomento) ha lì un polo e la parte principale della serie di Laurent è infinita.
- Il residuo è il coefficiente c_{-1} di $\frac{1}{z-a}$ nella serie di Laurent attorno a 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Grafico



Piano di Gauss – i punti singolari della funzione.

La serie di Laurent nella corona 1 < |z| < 2 – un fratto in potenze di 1/z, l'altro in potenze di z.

Input: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

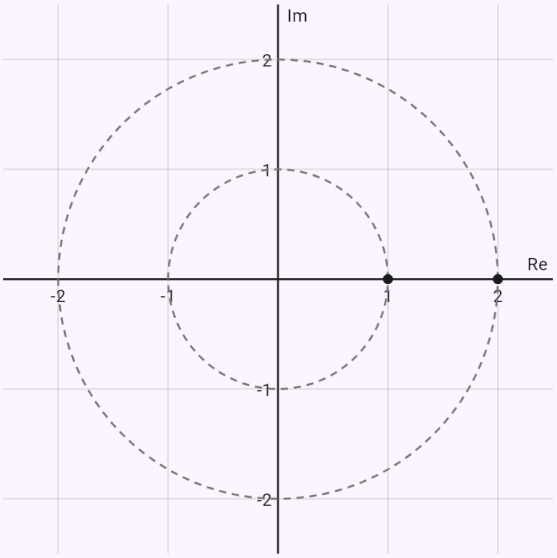
Risultato

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Passaggi

- Punti singolari: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Cerchiamo la serie di Laurent nella corona circolare $1 < |z| < 2$ – non contiene alcun punto singolare.
- Scomponiamo la funzione in fratti semplici (in $\mathbb{C}$):
  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Il polo della frazione sta dentro la circonferenza interna – raccogliamo $\frac{1}{z-c}$ e usiamo la serie geometrica nelle potenze di $\frac{1}{z-c}$
  $$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
- Il polo della frazione sta fuori dalla corona – raccogliamo una costante e usiamo la serie geometrica nelle potenze di z - c
  $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
- Sommiamo le serie termine a termine
  $$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$
- Il termine generale: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

Grafico



Piano di Gauss – la corona della serie di Laurent (tratteggiata) e i punti singolari.

Il teorema dei residui in un polo di ordine 2.

Input: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Risultato

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

Passaggi

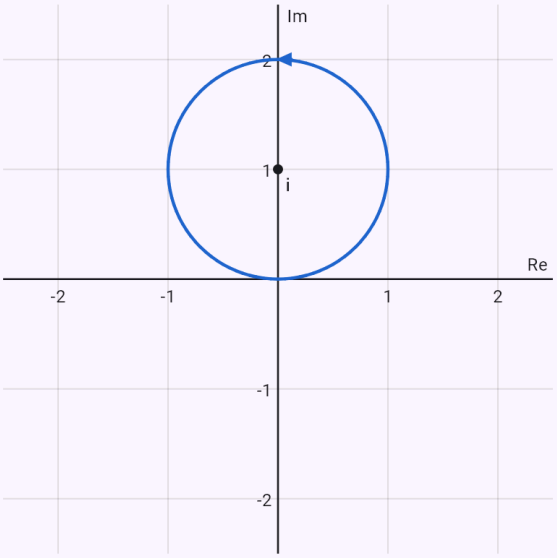
- Integriamo sulla circonferenza di centro i e raggio 1, in senso antiorario: $|z-i|=1$
- Dentro la circonferenza stanno i punti singolari $z_0 = i$, fuori $\emptyset$
- In i il denominatore ha una radice di molteplicità 2, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 2
- Il residuo in un polo di ordine 2

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2 f(z)\Big], \quad (z-i)^2 f(z) = \,$$

- Per il teorema dei residui

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\big(e^i\big) = 2\pi i\, e^i$$

Grafico



Piano di Gauss – la circonferenza su cui integriamo (la freccia mostra il verso) e i punti singolari.

Un integrale improprio con un coseno – il lemma di Jordan.

Input: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

Passaggi

- Con un coseno o un seno bastano $\deg Q \geq \deg P + 1$ e Q senza radici reali – l'integrale sulla semicirconferenza tende allora a zero per il lemma di Jordan:

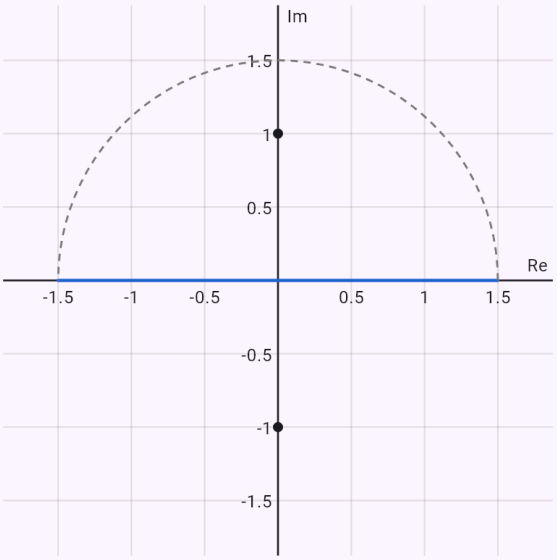
$$R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$$

- Il coseno è la parte reale di e^{iax}
- Chiudiamo l'asse reale con una grande semicirconferenza nel semipiano superiore. All'interno stanno i poli $z_0 = i$, l'integrale sulla semicirconferenza tende a zero.
- In i il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$$

- Per il teorema dei residui l'integrale è 2πi per la somma dei residui nel semipiano superiore: $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Grafico



Piano di Gauss – l'asse reale chiuso da una semicirconferenza nel semipiano superiore (tratteggiata) e i poli della funzione integranda.

Un integrale su [0; 2π] come integrale sulla circonferenza unitaria.

Input: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Risultato

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Passaggi

- Trasformiamo l'integrale su [0; 2π] in un integrale sulla circonferenza unitaria con la sostituzione

  $$z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$$

- Dopo la sostituzione e la semplificazione otteniamo un integrale di una funzione razionale su |z| = 1:

  $$\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$$

- Dentro la circonferenza stanno i punti singolari $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, fuori $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- In $-2 + \sqrt{3}$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1

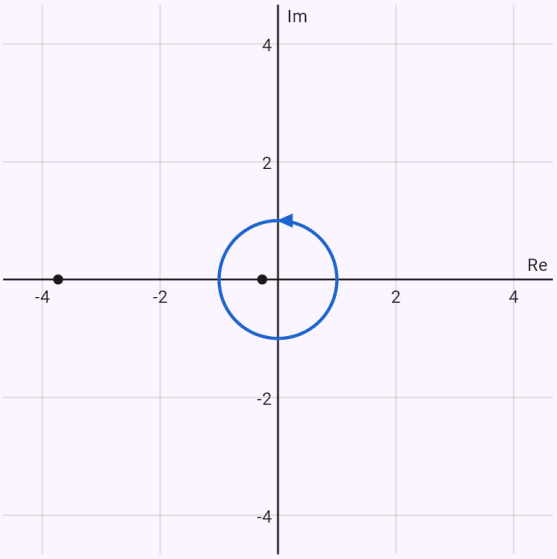
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g\left(-2+\sqrt{3}\right)}{q'\left(-2+\sqrt{3}\right)} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3},\quad g =$$

- Per il teorema dei residui

  $$\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i\left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Grafico



Piano di Gauss – la circonferenza unitaria z = e^(it) e i poli della funzione integranda.

Σ 1/n² = π²/6 – il residuo nello zero, dove anche il nucleo ha un polo.

Input: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Con i residui

Risultato

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Calcolo dell'integrale o della somma

Nel modo usuale ✓ Con i residui

Passaggi

- La funzione π ctg πz ha in ogni intero n un polo semplice con residuo 1. L'integrale su un grande quadrato tende a zero, quindi la somma della serie è meno la somma dei residui nei poli di R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- La condizione $\deg Q \geq \deg P + 2$ è soddisfatta: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- I punti singolari – le radici del denominatore: $z^2 = 0:\ z_0 = 0$
- In 0 hanno un polo sia R sia il nucleo – il residuo è il coefficiente di 1/z del loro prodotto

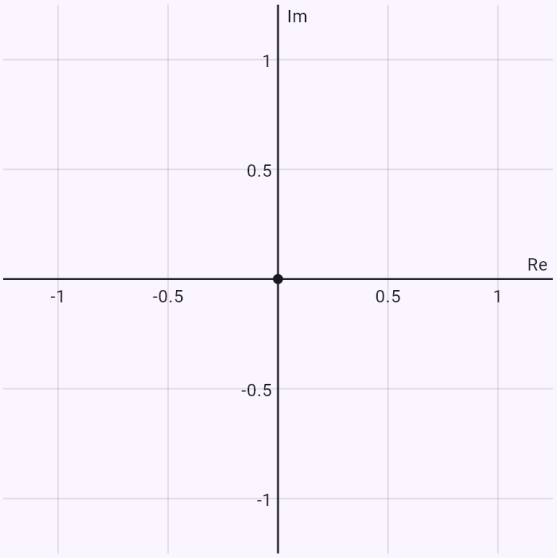
$$\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- La somma su tutti gli interi:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R è pari, R(−n) = R(n), quindi la somma da 1 è la sua metà (senza il termine n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Grafico



Piano di Gauss – i poli di R(z); il nucleo π ctg πz ha poli anche in tutti gli interi.

Il teorema di Rouché – quattro radici nella corona 1 < |z| < 2.

Input: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

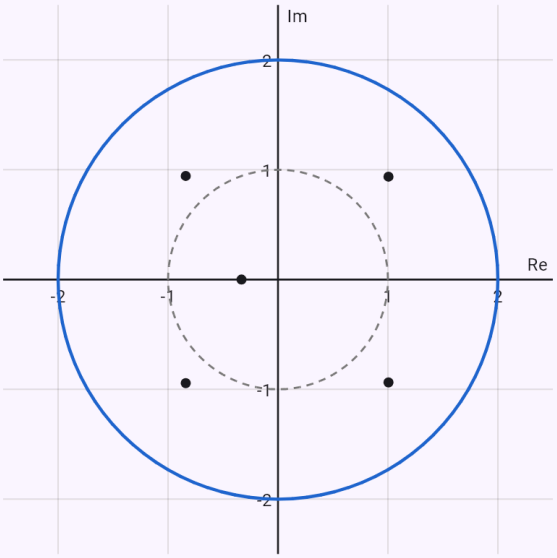
Risultato

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Passaggi

- Sulla circonferenza |z| = 2 il termine z^5 domina la somma degli altri – per il teorema di Rouché il polinomio ha nel disco tante radici quante z^5, cioè 5:
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32,\quad 32 > 7$
- Sulla circonferenza |z| = 1 il termine $3z$ domina la somma degli altri – per il teorema di Rouché il polinomio ha nel disco tante radici quante $3z$, cioè 1:
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1,\quad 3 > 2$
- Nella corona è la differenza dei conteggi nel disco più grande e in quello più piccolo: $5 - 1 = 4$
- Le radici numericamente, come verifica
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Grafico



Piano di Gauss – le circonferenze e le radici del polinomio (calcolate numericamente).

Una trasformazione di Möbius – il semipiano superiore sul cerchio unitario.

Input: `w = (z - i)/(z + i)`

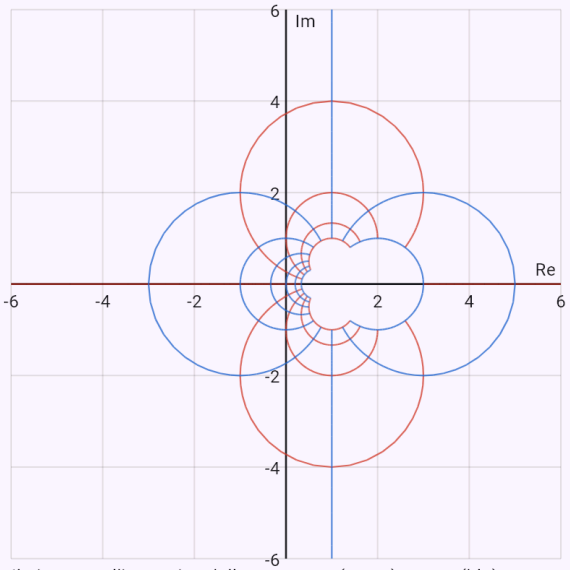
Risultato

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Passaggi

- Scriviamo la trasformazione con le sue componenti
  $w = u + iv,\quad u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- La trasformazione è conforme ovunque tranne nel polo $z_0 = -i$: $f'(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- È una trasformazione di Möbius $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- I punti fissi risolvono l'equazione f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0 :\ z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- L'asse reale viene trasformato in $|w| = 1$
- L'asse immaginario viene trasformato in $\operatorname{Im} w = 0$
- La circonferenza unitaria viene trasformata in $\operatorname{Re} w = 0$
- Il grafico mostra l'immagine di una griglia – le rette x = c (rosse) e y = c (blu) per |c| ≤ 2 con passo $0{,}5$

Grafico



Il piano w – l'immagine delle rette x = c (rosse) e y = c (blu) tramite w = f(z).

L’antitrasformata di Laplace come somma di residui.

Input: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Risultato

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Passaggi

- L’antitrasformata di Laplace di una funzione razionale è la somma dei residui di $F(s)\,e^{st}$ in tutti i poli di F

  $f(t) = \sum \mathrm{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$

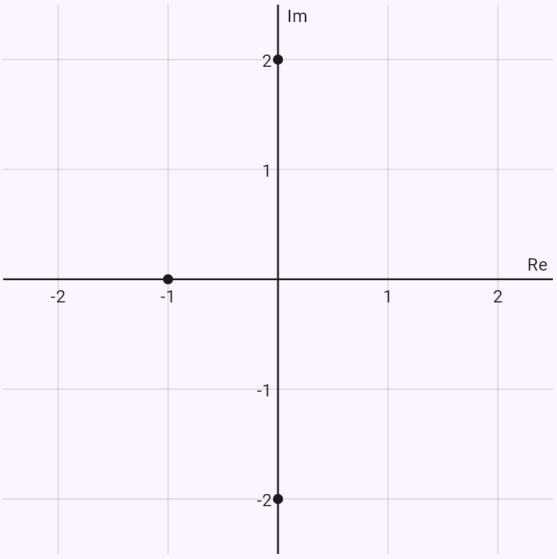
- I punti singolari – le radici del denominatore:
  $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0: \; s_1 = -1, \; s_2 = -2i, \; s_3 = 2i$
- In -1 il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

  $\mathrm{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$
- In $-2i$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

  $\mathrm{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$
- In $2i$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

  $\mathrm{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$
- Sommiamo i residui e scriviamo il risultato in forma reale: $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Grafico



Piano di Gauss – i poli di F(s).

La trasformata di Fourier della funzione di Lorentz: π·e^(−|ω|).

Input: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Risultato

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Passaggi

- La trasformata di Fourier di una funzione razionale: chiudiamo l'integrale con una grande semicirconferenza (lemma di Jordan) e sommiamo i residui

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- I punti singolari – le radici del denominatore: $t^2 + 1 = 0 : \; t_1 = -i, \; t_2 = i$
- In $-i$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' =$$

- In i il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw}, \; q' = 2t$$

- Per ω > 0 chiudiamo il cammino nel semipiano inferiore (verso negativo, −2πi)

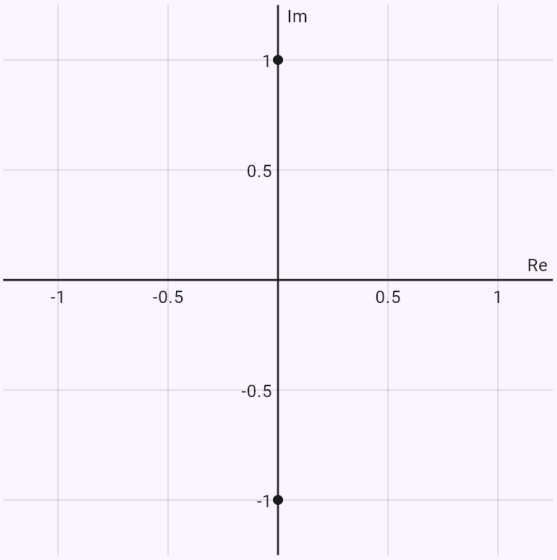
$$\omega > 0 : \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Per ω < 0 chiudiamo il cammino nel semipiano superiore (+2πi)

$$\omega < 0 : \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Il risultato – la trasformata di Fourier: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Grafico



Piano di Gauss – i poli di F(s).

La funzione caratteristica della distribuzione di Cauchy e^(−|t|).

Input: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Risultato

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Passaggi

- La trasformata di Fourier di una funzione razionale: chiudiamo l'integrale con una grande semicirconferenza (lemma di Jordan) e sommiamo i residui

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- I punti singolari – le radici del denominatore: $\pi x^2 + \pi = 0 : \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- In $-i$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2} i e^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- In i il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2} i e^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Per ω > 0 chiudiamo il cammino nel semipiano inferiore (verso negativo, −2πi)

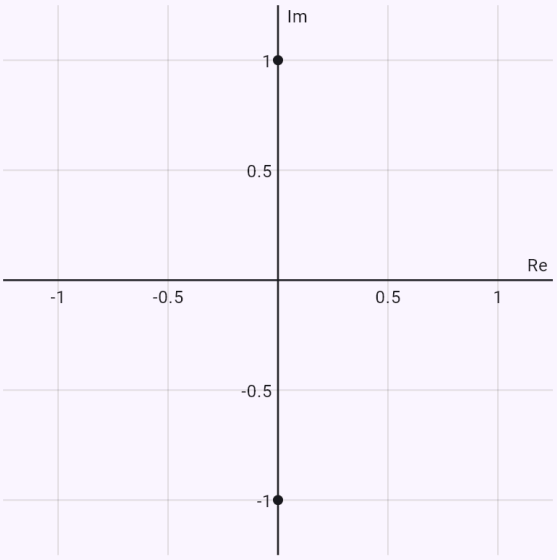
$$\omega > 0 : \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k < 0} \mathrm{Res} = e^{-\omega}$$

- Per ω < 0 chiudiamo il cammino nel semipiano superiore (+2πi)

$$\omega < 0 : \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k > 0} \mathrm{Res} = e^{\omega}$$

- Il risultato – la trasformata di Fourier: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Grafico



Piano di Gauss – i poli di F(s).

L’antitrasformata Z con due poli: x[n] = 2 − 2^{-n}.

Input: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Risultato

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Passaggi

- L’antitrasformata Zeta è la somma dei residui di $F(z)z^{n-1}$ nei poli di F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- I punti singolari – le radici del denominatore: $2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- In $\frac{1}{2}$ il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

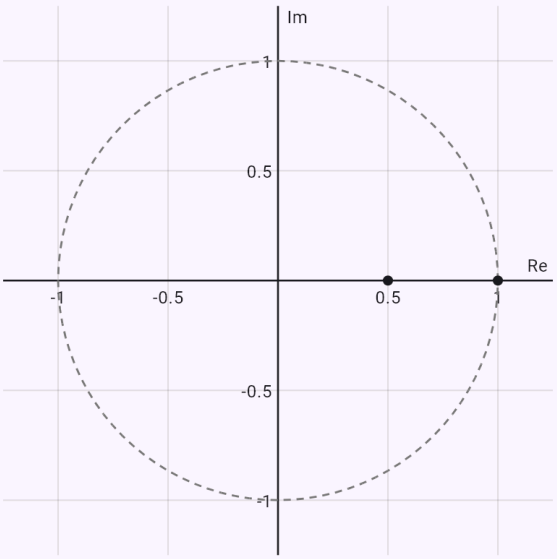
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- In 1 il denominatore ha una radice di molteplicità 1, il numeratore di molteplicità 0 – è un polo di ordine 1
- Il residuo in un polo semplice, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- Il valore iniziale è il limite per z → ∞: $x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Sommiamo i residui: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Grafico



Piano di Gauss – i poli di F(s).

Limiti noti

- Le singolarità si trovano per funzioni con un polinomio al denominatore (e le singolarità essenziali di e^h, sin h, cos h); un denominatore come sin z (infiniti poli) non è ancora supportato.
- La serie di Laurent in una corona funziona per funzioni razionali, in una singolarità essenziale solo attorno al punto quando la funzione non ha altre singolarità.
- Integrali su curve diverse da una circonferenza (un quadrato, un’ellisse), il valore principale di un integrale con un polo sull’asse e il principio dell’argomento generale non sono ancora supportati.
- Una somma di una serie da 1 con i residui richiede una funzione razionale R pari; poli di R in interi diversi da zero non sono ammessi.
- Una mappa conforme mostra l’immagine di una griglia; l’immagine di una regione data (un semipiano, una striscia) solo per gli assi e la circonferenza unitaria di una trasformazione di Möbius.
- La trasformata di Fourier funziona per funzioni razionali senza poli sull’asse reale, l’antitrasformata Z per funzioni razionali senza un polo nello zero.

36. Equazioni differenziali

L'app risolve equazioni differenziali ordinarie del primo ordine: a variabili separabili, lineari, esatte, omogenee ($y' = f(y/x)$), equazioni di Bernoulli ed equazioni $y' = f(ax + by + c)$. Riconosce da sola il tipo e mostra i passaggi come si insegna a scuola – separare le variabili, la variazione della costante o un fattore integrante, una sostituzione, il potenziale di un'equazione esatta. Gli integrali nei passaggi hanno passaggi propri. Verifica la soluzione: la soluzione e la sua derivata si sostituiscono nell'equazione e i due membri si portano alla stessa forma.

Ordini superiori: equazioni lineari a coefficienti costanti di qualsiasi ordine con l'equazione caratteristica (anche radici multiple e complesse), una soluzione particolare con il metodo di somiglianza (anche risonanza e somma di termini noti) o con la variazione delle costanti, un problema ai valori iniziali in zero anche con la trasformata di Laplace (il chip «Metodo»). Inoltre l'equazione di Eulero con $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ con integrazione ripetuta e l'abbassamento dell'ordine – quando manca y ($p = y'$) o x ($y' = p(y)$).

L'equazione $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ diventa lineare con la sostituzione $z = \ln y$. Un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili si risolve quando una soluzione si può indovinare (x^k, e^{cx}, …): la seconda con l'abbassamento dell'ordine (d'Alembert), il termine noto con la variazione delle costanti. L'ordine si abbassa anche di più di uno ($p = y^{(m)}$ con un'equazione del secondo ordine per p). Con i parametri si distinguono i casi – un oscillatore smorzato secondo il segno di $\delta^2 - \omega^2$ (smorzamento forte, critico, debole), una risonanza ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ per $\omega = 2$) e il segno di una costante da cui dipende l'integrale ($y'' = 2yy'$). La trasformata di Laplace risolve anche un problema ai valori iniziali in un punto diverso da 0 (con la traslazione $\tau = t - t_0$) e con parametri.

Un'equazione di Riccati $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ si risolve quando è nota una soluzione particolare y_1: data nella riga successiva (y1 = 1/x), o indovinata di forma semplice (una costante, ax, a/x, ax^2, ae^{±x}, x + a). La sostituzione $y = y_1 + 1/z$ la rende allora lineare. Equazioni non lineari in y': quella di Clairaut $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – le rette $y = Cx + \psi(C)$ e la soluzione singolare (il loro inviluppo) – e quella di Lagrange $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ con una soluzione parametrica (il parametro $p = y'$).

Il risultato è la soluzione generale con una costante C, per ordini superiori con costanti C_1, C_2, … (in forma esplicita, o implicita dove non può essere esplicita); con condizioni, la soluzione che le soddisfa – iniziali e al contorno, compresi «nessuna soluzione» e «infinite soluzioni». Si trovano anche le soluzioni costanti perse dividendo. Ogni soluzione è verificata sostituendola nell'equazione. Per il primo ordine il grafico mostra il campo delle direzioni e soluzioni per diversi C, per ordini superiori soluzioni per diverse costanti; per un'equazione autonoma del secondo ordine (senza x) un interruttore mostra anche il piano delle fasi (y, y'). Sotto il grafico puoi inserire valori propri delle costanti e aggiungerne la curva; l'interruttore «Curve predefinite» nasconde quelle scelte dall'app. Toccando il grafico si disegna la soluzione per quel punto – per un'equazione lineare del secondo ordine imposti anche la pendenza della tangente nel punto con un cursore.

Un sistema di due equazioni lineari a coefficienti costanti (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, anche dx/dt) con gli autovalori e gli autovettori della matrice – reali, complessi e doppi – con le condizioni iniziali x(0), y(0). Il punto stazionario [0; 0] viene classificato (nodo, sella, fuoco, centro) e il piano delle fasi mostrato.

L'oscillazione di un'equazione lineare del secondo ordine (ogni soluzione ha infiniti zeri) si studia con oscillation(y" + x y = 0), anche per un'equazione in forma autoaggiunta (x y')' + y/x = 0 o con y′ (l'app la porta a questa forma). I passaggi: esattamente per un q costante e l'equazione di Eulero y″ + (k/x²)y = 0 con il limite k = 1/4, i criteri di Leighton–Wintner e di Kneser (nel caso critico anche il confronto con l'equazione di Riemann–Weber), la sostituzione di Riccati w = r y′/y, la trasformazione di Prüfer e il conteggio numerico degli zeri su un intervallo (dallo dopo un punto e virgola: ; ⟨1; 50⟩) con la stima di Sturm della loro distanza. Un'equazione semilineare (|y'| y')' + q |y| y = 0 (in generale l'esponente |y'|^(p−2)) si giudica con la costante critica ((p − 1)/p)^p, l'analogo discreto Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (anche Δ(r_n Δy_n)) con i suoi zeri generalizzati. Il grafico mostra la soluzione con i suoi zeri e l'angolo di Prüfer φ.

L'asintotica delle soluzioni di un'equazione non lineare con il p-laplaciano (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y con a, b positivi si studia con il comando asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (anche asymptotika(...) in ceco); |y'|^k y' e |y|^k y si possono scrivere anche con sgn, come potenza dispari (y')³, y³, e per α = 1 come (a y')' o y". Le soluzioni si dividono nelle classi M^+ (|y| cresce) e M^- (|y| decresce) secondo i limiti di y e della quasiderivata y^[1] = a|y′|^α sgn y′. Per un'equazione semilineare (β = α) l'app calcola gli integrali J_1, J_2, Y_1, Y_2 (con Symja, altrimenti confrontando il comportamento potenza e logaritmico), determina uno dei casi C1–C8 e le classi non vuote secondo il teorema 3.1 di Z. Došlá e M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), e mostra l'equazione reciproca. Per un'equazione di tipo Emden–Fowler con β ≠ α usa i teoremi di M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): il caso superlineare e sublineare, soluzioni fortemente e debolmente crescenti e regolarmente decrescenti. Il grafico mostra soluzioni numeriche delle classi non vuote (M^- con lo shooting) con le loro quasiderivate sotto. Dai l'inizio dell'intervallo dopo un punto e virgola (; x ≥ 1). Per un'equazione con q negativo, oscillation offre il chip Asintotica delle soluzioni, e asymptotics il chip Oscillazione dell'equazione.

Come inserirlo

`y' = x*y`	La derivata con un apice.
`dy/dx = x y^2`	La notazione di Leibniz – nomina anche la variabile (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Notazione da una foto.

`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	La forma M dx + N dy = 0 (un’equazione esatta).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Una condizione iniziale dopo una virgola o nella riga successiva.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	La funzione e la variabile possono essere lettere qualsiasi.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Una soluzione particolare nota di un’equazione di Riccati nella riga successiva (o dopo un punto e virgola).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Un’equazione di ordine superiore – le derivate con più apici.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Derivate superiori come y^{(4)} (anche da una foto).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Condizioni iniziali y(0), y′(0) – o al contorno in punti diversi.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	I punti di Newton (derivate rispetto al tempo t) e parametri greci.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Un sistema di due equazioni lineari – dopo una virgola o su righe, con le condizioni x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscillazione di un’equazione del secondo ordine, facoltativamente con un intervallo per gli zeri.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Un’equazione semilineare (qui p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	L’analogo discreto – una ricorrenza lineare del secondo ordine.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asintotica delle soluzioni di un’equazione con il p-laplaciano, facoltativamente con l’inizio dell’intervallo.

Esempi

Un’equazione a variabili separabili – la soluzione generale e il campo delle direzioni.

Input: `y' = x*y`

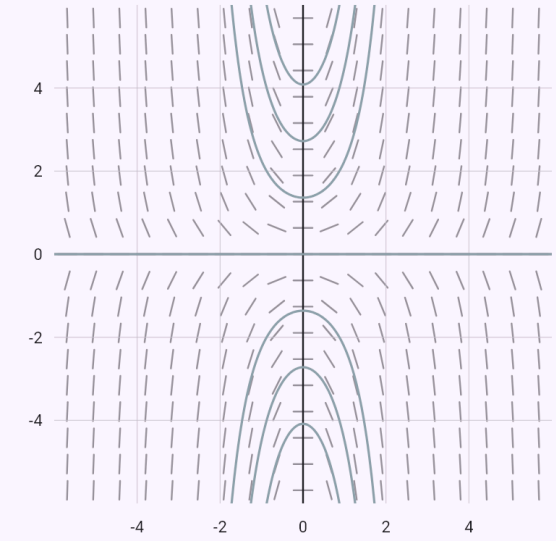
Risultato

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un’equazione a variabili separabili – il secondo membro è il prodotto di una funzione della variabile e di una funzione dell’incognita: $y' = xy$
- Separiamo le variabili (dividendo, supponendo $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Integriamo entrambi i membri: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- L’integrale generale in forma implicita: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Passiamo all’esponenziale – la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- La soluzione costante $y = 0$, esclusa dividendo, è compresa nell’integrale generale per C = 0
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ sostituita nell’equazione dà un’identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Grafico



soluzioni per diversi C

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

La condizione iniziale determina la costante C.

Input: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Risultato

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Risolvi con un metodo numerico:

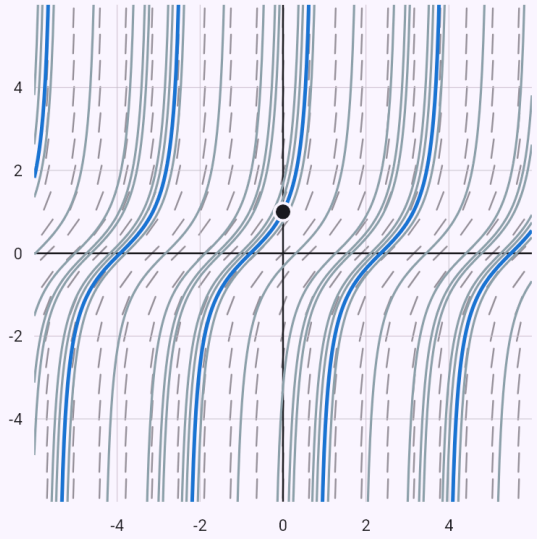
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Eulero

Passaggi

- Un'equazione a variabili separabili – il secondo membro è il prodotto di una funzione della variabile e di una funzione dell'incognita: $y' = y^2 + 1$
- Separiamo le variabili (dividendo, supponendo $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Integriamo entrambi i membri: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg} y$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 1\,dx = x$
- L'integrale generale in forma implicita: $\operatorname{arctg} y = x + C$
- Ricaviamo la soluzione: $y = \operatorname{tg}(x + C)$
- Sostituiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$: $1 = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ sostituita nell'equazione dà un'identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente $\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell'equazione e semplificate con l'identità – i due membri sono uguali $1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 +$$

Grafico



soluzioni per diversi C

$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

I trattini mostrano la direzione che l'equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini. È evidenziata la soluzione del problema di Cauchy; il punto è la condizione iniziale.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C | + Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

Un’equazione lineare con la variazione della costante.

Input: `y' + 2y = e^x` Variazione della costante

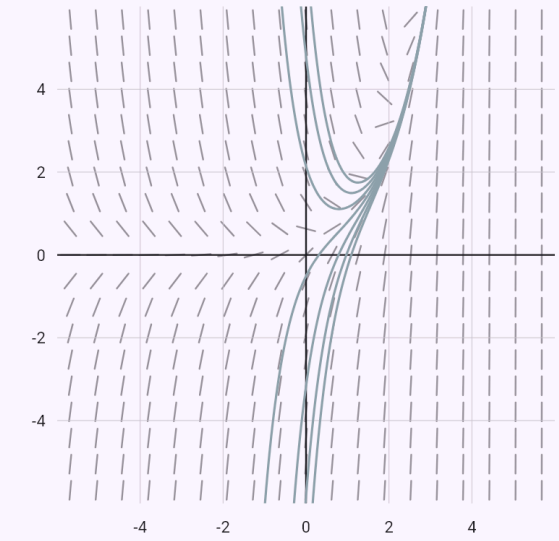
Risultato

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un’equazione lineare del primo ordine y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Prima l’equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y' + 2y = 0$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 2\,dx = 2x$
- La soluzione dell’equazione omogenea: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variazione della costante – cerchiamo la soluzione nella forma $y = C(x)\,e^{-2x}$; sostituita nell’equazione: $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Da cui $C'(x) = e^{3x}$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integrando: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- L’integrale generale: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sostituita nell’equazione dà un’identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Grafico



soluzioni per diversi C

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

La stessa equazione con un fattore integrante.

Input: `y' + 2y = e^x` Fattore integrante

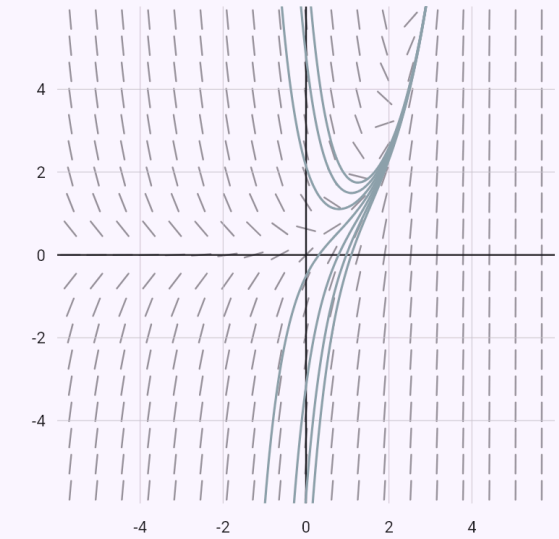
Risultato

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un'equazione lineare del primo ordine y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 2\,dx = 2x$
- Il fattore integrante: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Moltiplicando per il fattore integrante – il primo membro è la derivata di un prodotto: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integriamo entrambi i membri: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- L'integrale generale: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sostituita nell'equazione dà un'identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell'equazione – i due membri sono uguali: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Grafico



soluzioni per diversi C

I trattini mostrano la direzione che l'equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

Un’equazione omogenea – la sostituzione u = y/x.

Input: `y' = (x - y)/(x + y)`

Risultato

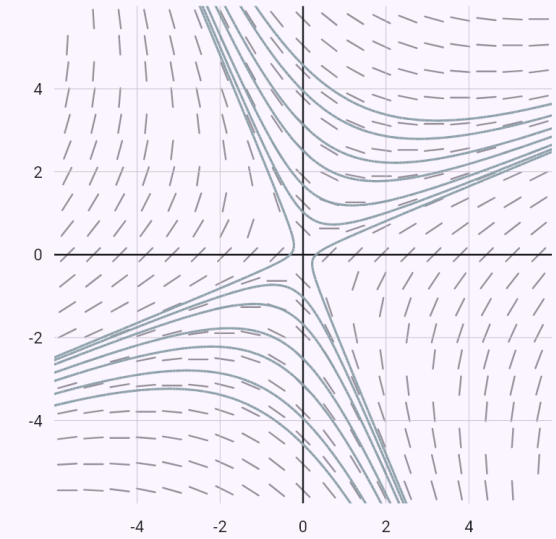
$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un’equazione omogenea – il secondo membro dipende solo dal rapporto y/x: $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$
- La sostituzione $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ trasforma l’equazione in $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u + 1}$
- Separiamo le variabili (dividendo, supponendo $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u + 1}{u^2 + 2u - 1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Integriamo entrambi i membri: $\displaystyle\int \frac{u + 1}{u^2 + 2u - 1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\displaystyle\int -\frac{u + 1}{-u^2 - 2u + 1}\,du = -\int \frac{u + 1}{-u^2 - 2u + 1}\,du$
- Il numeratore è la derivata del denominatore (o un suo multiplo), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, con la formula $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$

  $\displaystyle\int \frac{u + 1}{-u^2 - 2u + 1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u - 2}{-u^2 - 2u + 1}\,du = -\ln$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- L’integrale generale in forma implicita: $\dfrac{\ln|-u^2 - 2u + 1|}{2} = C - \ln|x|$
- Passiamo all’esponenziale – la costante ±e^C si chiama di nuovo C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- La soluzione costante $u = -1 - \sqrt{2}$, esclusa dividendo, è compresa nell’integrale generale per C = 0
- La soluzione costante $u = -1 + \sqrt{2}$, esclusa dividendo, è compresa nell’integrale generale per C = 0
- Torniamo all’incognita originale: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- L’integrale generale in forma implicita: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Grafico



soluzioni per diversi C

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

Un’equazione di Bernoulli – la sostituzione z = y^(1−n) e la soluzione costante y = 0.

Input: `xy' - y = -xy^2`

Risultato

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Passaggi

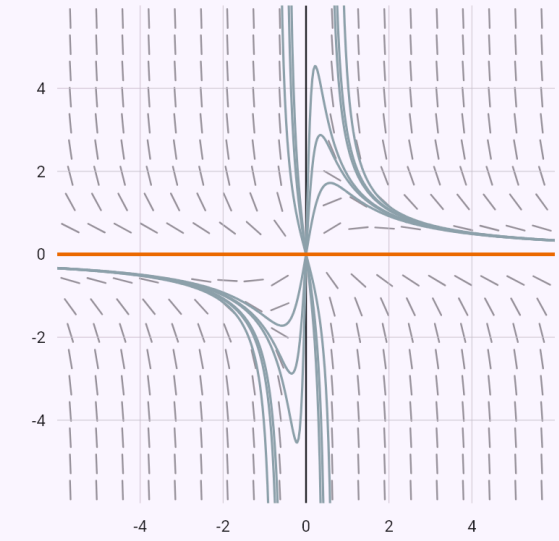
- Un’equazione di Bernoulli y' + p(x)·y = q(x)·y^n: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- La sostituzione $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ trasforma l’equazione in $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Prima l’equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- La soluzione dell’equazione omogenea: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variazione della costante – cerchiamo la soluzione nella forma $z = C(x)\cdot\frac{1}{x}$; sostituita nell’equazione: $C'(x)\cdot\frac{1}{x} = 1$
- Da cui $C'(x) = x$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Integrando: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- L’integrale generale: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Torniamo all’incognita originale: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Ricaviamo la soluzione: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Dividendo abbiamo escluso la soluzione costante $y = 0$ – è un’altra soluzione dell’equazione.
- Rinominiamo la costante (un multiplo di una costante arbitraria è una costante arbitraria): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ sostituita nell’equazione dà un’identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2\cdot\frac{x^2 + C - x\cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Grafico



soluzioni per diversi C

$y = 0$

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

Un’equazione esatta – il potenziale F(x, y) = C.

Input: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

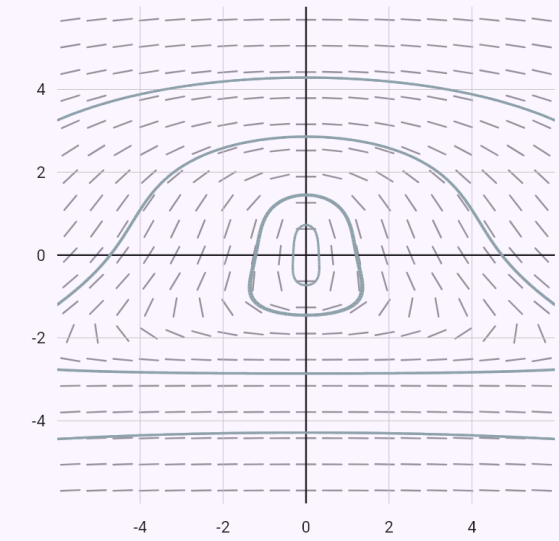
Risultato

$$y^4 + x^2 y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un’equazione M dx + N dy = 0 – verifichiamo se è esatta (il primo membro un differenziale esatto):
  $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; l’equazione è esatta, poiché
  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- L’integrale di una somma è la somma degli integrali:
  $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Il potenziale F integrando M rispetto a x:
  $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2 y + 3x^2 + \varphi(y)$
- La costante portata fuori dall’integrale:
  $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- Da ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- L’integrale generale in forma implicita:
  $y^4 + x^2 y + 3x^2 = C$

Grafico



soluzioni per diversi C

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

La sostituzione z = x − y; qui Symja perderebbe un fattore 2, l'app verifica il risultato.

Input: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Risultato

$$y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1)$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Eulero

Passaggi

- Il secondo membro è una funzione di ax + by + c – la prendiamo come nuova incognita: $y' = \cos(x-y)$
- La sostituzione $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ trasforma l'equazione in $z' = 1 - \cos z$
- Separiamo le variabili (dividendo, supponendo $1-\cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Integriamo entrambi i membri: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Nessuna sostituzione più semplice è adatta – la sostituzione universale (parametrica) $t = \mathrm{tg}\left(\dfrac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Torniamo alla variabile originale

  $t = \mathrm{tg}\left(\dfrac{z}{2}\right)$: $\quad -\mathrm{ctg}\left(\dfrac{z}{2}\right)$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- L'integrale generale in forma implicita: $-\mathrm{ctg}\left(\dfrac{z}{2}\right) = x + C$
- Ricaviamo la soluzione: $z = 2\,\mathrm{arcctg}\,(C-x)$
- Dividendo abbiamo escluso la soluzione costante $z = 0$ – è un'altra soluzione dell'equazione.
- Torniamo all'incognita originale: $y = x - 2\,\mathrm{arcctg}\,(C-x)$
- Rinominiamo la costante (un multiplo di una costante arbitraria è una costante arbitraria): $y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+C)$
- Sostituiamo la condizione iniziale $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arcctg}\,C \Rightarrow C = 1$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $y = x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1)$
- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ sostituita nell'equazione dà un'identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente

  $$(2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{2}{x^2+2}$$
- Sommato e semplificato

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell'equazione – i due membri sono uguali

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos\left(x - (x + 2\,\mathrm{arcctg}\,(x+1))\right)$$

Un’equazione di Riccati – la soluzione particolare $y_1 = -2/x$ indovinata, la sostituzione $y = y_1 + 1/z$.

Input: `y' = y^2 - 2/x^2`

Risultato

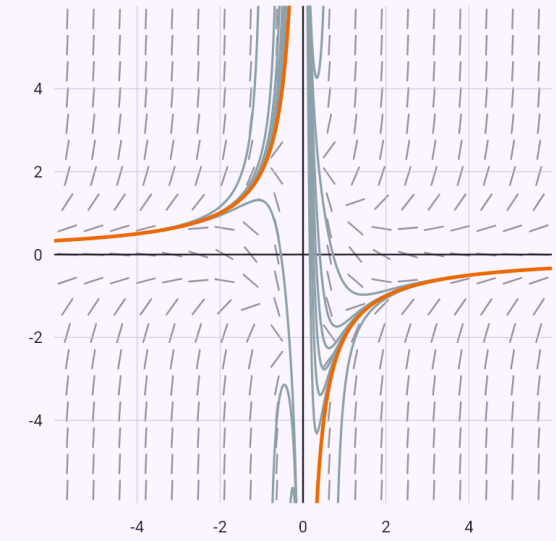
$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Passaggi

- Un’equazione di Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Senza una soluzione particolare un’equazione di Riccati non si può risolvere. Proviamo a indovinarne una di forma semplice (una costante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) – $y_1 = -\frac{2}{x}$ soddisfa l’equazione: $y_1' = \frac{2}{x^2}$, e sostituendola nel secondo membro si ottiene lo stesso.
- La sostituzione $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ trasforma l’equazione in $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Prima l’equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- La soluzione dell’equazione omogenea: $z_h = Cx^4$
- Variazione della costante – cerchiamo la soluzione nella forma $z = C(x)\cdot x^4$; sostituita nell’equazione: $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Da cui $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Integrando: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- L’integrale generale: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Torniamo all’incognita originale: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- La soluzione $y = -\frac{2}{x}$ stessa viene persa dalla sostituzione y = y_1 + 1/z (corrisponde a z → ∞) – la aggiungiamo al risultato.

- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ sostituita nell’equazione dà un’identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente $\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali $\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$

Grafico



soluzioni per diversi C

$y = -\frac{2}{x}$

I trattini mostrano la direzione che l’equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

La stessa equazione con la soluzione particolare $y_1 = 1/x$ data.

Input: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Risultato

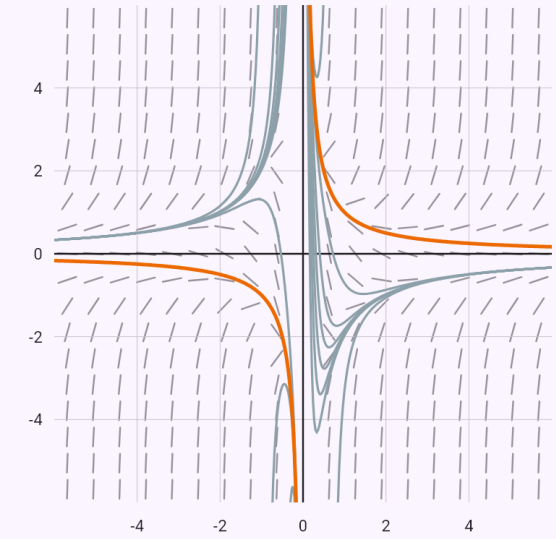
$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Passaggi

- Un'equazione di Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- La soluzione particolare data $y_1 = \frac{1}{x}$ soddisfa l'equazione: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, e sostituendola nel secondo membro si ottiene lo stesso.
- La sostituzione $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ trasforma l'equazione in $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- La soluzione dell'equazione omogenea: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variazione della costante – cerchiamo la soluzione nella forma $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; sostituita nell'equazione: $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Da cui $C'(x) = -x^2$
- La costante portata fuori dall'integrale: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Integrando: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- L'integrale generale: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Torniamo all'incognita originale: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- La soluzione $y = \frac{1}{x}$ stessa viene persa dalla sostituzione y = y₁ + 1/z (corrisponde a z → ∞) – la aggiungiamo al risultato.

- Verifica – la derivata della soluzione $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ sostituita nell'equazione dà un'identità.
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell'equazione – i due membri sono uguali $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Grafico



soluzioni per diversi C

$y = \frac{1}{x}$

I trattini mostrano la direzione che l'equazione prescrive in ogni punto (il campo di direzioni). Le curve grigie sono soluzioni per diversi C – sono ovunque tangenti ai trattini.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C

+ Aggiungi curva

Tocca il grafico – viene disegnata la soluzione per quel punto.

Un’equazione di Clairaut – le rette y = Cx + C² e il loro inviluppo y = −x²/4.

Input: `y = xy' + y'^2`

Risultato

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Passaggi

- Un’equazione di Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Sia $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Deriviamo l’equazione rispetto a x (p = y' dipende da x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Se p' = 0, p è una costante e la soluzione generale sono le rette: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- L’altro fattore x + ψ'(p) = 0 dà la soluzione singolare – l’inviluppo di tutte quelle rette. In forma parametrica $x = -2p,\ y = -p^2$, eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Grafico



soluzioni per diversi C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Le rette grigie sono le soluzioni per vari valori di C; a colori la soluzione singolare – il loro inviluppo, toccato da ogni retta.

Per il punto [2; −1] sull’inviluppo passa una sola retta y = 1 − x – e l’inviluppo stesso.

Input: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Risultato

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Passaggi

- Un’equazione di Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Sia $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Deriviamo l’equazione rispetto a x (p = y' dipende da x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Se p' = 0, p è una costante e la soluzione generale sono le rette: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- L’altro fattore x + ψ'(p) = 0 dà la soluzione singolare – l’inviluppo di tutte quelle rette. In forma parametrica $x = -2p,\ y = -p^2$, eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Sostituiamo la condizione iniziale $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Grafico



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

A colori le soluzioni per il punto dato – rette, eventualmente anche l’inviluppo.

Un’equazione di Lagrange – la soluzione in forma parametrica e la retta y = 0.

Input: `y = 2xy' + y'^2`

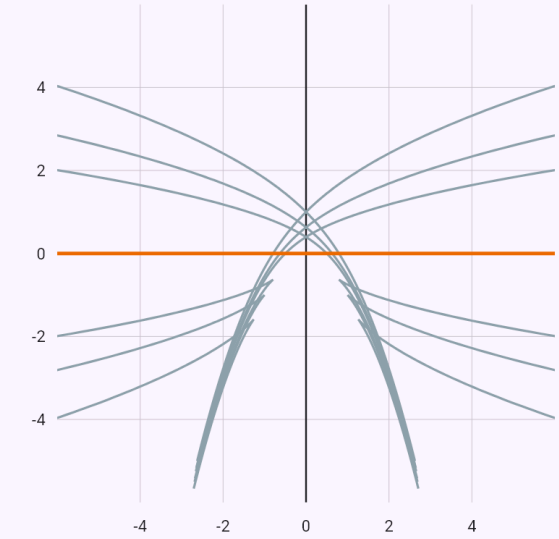
Risultato

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un’equazione di Lagrange y = x·φ(y') + ψ(y'). Sia $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Deriviamo l’equazione rispetto a x (p = y' dipende da x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Cerchiamo x come funzione di p: dx/dp dall’equazione – è lineare nell’incognita x: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Un’equazione lineare del primo ordine y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Prima l’equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- La soluzione dell’equazione omogenea: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variazione della costante – cerchiamo la soluzione nella forma $x = C(p) \cdot \frac{1}{p^2}$; sostituita nell’equazione: $C'(p) \cdot \frac{1}{p^2} = -2$
- Da cui $C'(p) = -2p^2$
- La costante portata fuori dall’integrale: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Integrando: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- L’integrale generale: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Rinominiamo la costante (un multiplo di una costante arbitraria è una costante arbitraria): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Sostituendo x nell’equazione data si ottiene la soluzione generale in forma parametrica (parametro p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Abbiamo diviso per p − φ(p), tralasciando i valori per cui $p = 2p$. Ognuno di essi dà una retta che soddisfa anch’essa l’equazione: $y = 0$

Grafico



Le curve grigie sono soluzioni per vari valori delle costanti.

L’equazione caratteristica con radici complesse −2 ± 3i.

Input: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Risultato

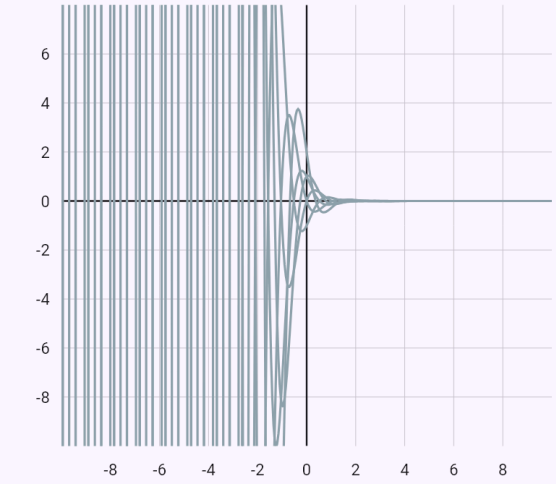
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Passaggi

- Un’equazione lineare a coefficienti costanti:
  $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l’equazione caratteristica:
  $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Il discriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; le radici:
  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale:
  $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- L’integrale generale:
  $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Grafico

Soluzioni | Piano delle fasi



soluzioni per diversi C

Le curve grigie sono soluzioni per vari valori delle costanti.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C_1 C_2 + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

Un termine noto di forma speciale con risonanza – 2 è una radice dell'equazione caratteristica.

Input: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Secondo membro speciale

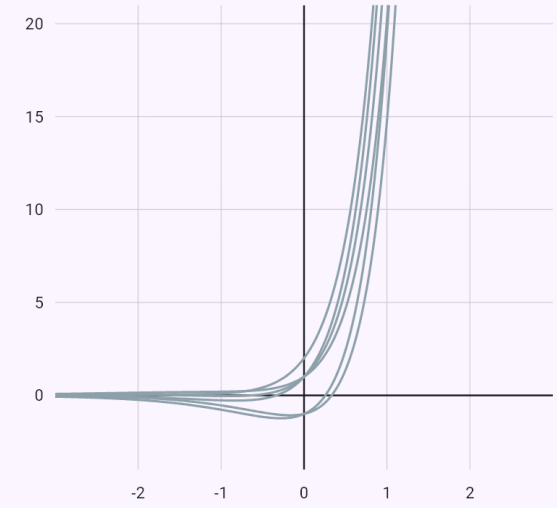
Risultato

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Il discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; le radici: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- La soluzione dell'equazione omogenea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Il secondo membro $3e^{2x}$ ha una forma speciale; il numero 2 è radice dell'equazione caratteristica (molteplicità 1), quindi la forma si moltiplica per x: $y_p = Axe^{2x}$
- Le derivate: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Sostituito nell'equazione (diviso per l'esponenziale), con i termini simili sommati: $A = 3$
- Una soluzione particolare: $y_p = 3xe^{2x}$
- L'integrale generale: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Grafico



soluzioni per diversi C

Le curve grigie sono soluzioni per vari valori delle costanti.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C_1 C_2 + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

Il termine noto tg x non è speciale – variazione delle costanti e il wronskiano.

Input: `y'' + y = tan x`

Risultato

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' + y = \operatorname{tg} x$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y'' + y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- La soluzione dell'equazione omogenea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variazione delle costanti – cerchiamo la soluzione nella forma $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, le derivate delle funzioni C_k soddisfano il sistema
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$
- Il determinante del sistema (il wronskiano)
$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$
- Da cui $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$
- Da cui $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- La costante portata fuori dall'integrale
$$\int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$
- La funzione è dispari rispetto al coseno – la sostituzione
$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- L'integrale di una somma è la somma degli integrali
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int -1 \, dt = -t$
- La costante portata fuori dall'integrale:
$$\int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} \, dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
$$\int \frac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$$
- La costante portata fuori dall'integrale:
$$\int \frac{1}{2(t+1)} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} \, dt$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
$$\int \frac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$$
- Torniamo alla variabile originale
$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Integrato (le costanti di integrazione sono già nella soluzione omogenea)
$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- Dalla tabella degli integrali immediati:
$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$
- Integrato (le costanti di integrazione sono già nella soluzione omogenea): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Una soluzione particolare:
$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$
- L'integrale generale
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrali della variazione delle costanti non esprimibili con funzioni elementari – una soluzione con un

integrale.

Input: `y'' + y' + y = tan x`

Risultato

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{2\sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x\right)}{3} - \frac{2\sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x\right)}{3}$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti:
  $y'' + y' + y = \operatorname{tg} x$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y'' + y' + y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica:
  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Il discriminante $D = 1^2 - 4 = -3$; le radici:
  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale
  $y_1 = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- La soluzione dell'equazione omogenea
  $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Variazione delle costanti – cerchiamo la soluzione nella forma le derivate delle funzioni C_k soddisfano il sistema
  $y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
  $$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$
- Il determinante del sistema (il wronskiano)
  $$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} \end{vmatrix}$$
- Da cui
  $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x}{3}$
- Da cui
  $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x}{3}$
- Integrato (le costanti di integrazione sono già nella soluzione omogenea)
  $C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x}{3}\,dx$
- Integrato (le costanti di integrazione sono già nella soluzione omogenea)
  $C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x}{3}\,dx$
- Questi integrali non si possono esprimere con funzioni elementari (portano a funzioni superiori, non elementari), quindi la soluzione li lascia come integrali
  $\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\operatorname{tg} x}{3}\,dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$
- L'integrale generale
  $y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$

Un problema ai valori iniziali – un sistema per le costanti C_1, C_2.

Input: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Risultato

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

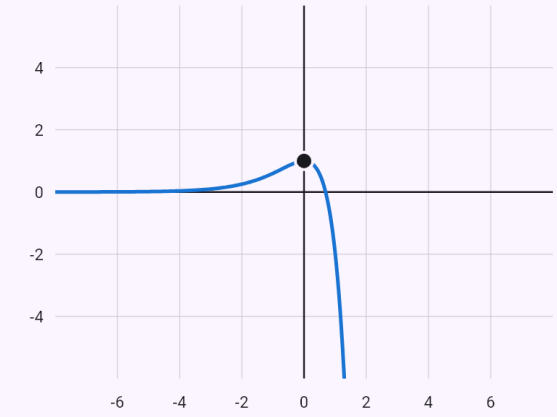
Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Il discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; le radici: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- La soluzione dell'equazione omogenea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- Il secondo membro e^{2x} ha una forma speciale; il numero 2 non è radice dell'equazione caratteristica, quindi cerchiamo una soluzione particolare $y_p = Ae^{2x}$
- Le derivate: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Sostituito nell'equazione (diviso per l'esponenziale), con i termini simili sommati: $-A = 1$
- Da cui $A = -1$
- Una soluzione particolare: $y_p = -e^{2x}$
- L'integrale generale: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Le derivate dell'integrale generale: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Le condizioni danno il sistema da cui $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Grafico



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Quella evidenziata soddisfa le condizioni, i punti sono i valori dati.

Valori propri delle costanti

C_1 | C_2 | + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

Lo stesso problema con la trasformata di Laplace.

Input: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Trasformata di Laplace

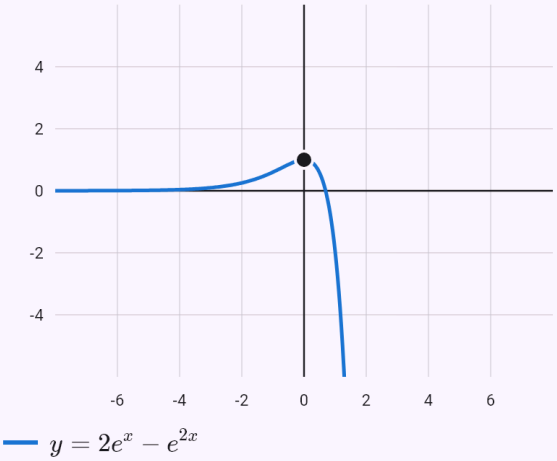
Risultato

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- La trasformata di Laplace di entrambi i membri: $\mathcal{L}$(y) = Y, $\mathcal{L}$(y') = sY − y(0), $\mathcal{L}$(y") = s²Y − s·y(0) − y'(0); con le condizioni iniziali: $(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Ricaviamo l'immagine Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Fratti semplici: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- L'antitrasformata (dalla tabella delle trasformate) dà la soluzione: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Grafico



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Quella evidenziata soddisfa le condizioni, i punti sono i valori dati.

Un problema al contorno con infinite soluzioni.

Input: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Risultato

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' + y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- L'integrale generale: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = 0$
  $\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$
- La costante C_2 resta arbitraria – il problema ha infinite soluzioni.
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $y = C_2 \sin x$

L’equazione di Eulero – la sostituzione x = eᵗ.

Input: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

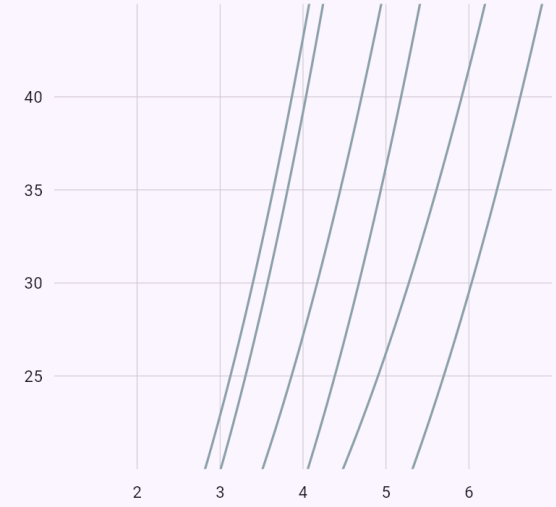
Risultato

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Passaggi

- Equazione di Eulero – ogni derivata y^(k) è accompagnata da x^k; la sostituzione x = e^t la trasforma in una a coefficienti costanti: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- La sostituzione $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ trasforma l’equazione in $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Prima l’equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λt); sostituendo e dividendo per e^(λt) si ottiene l’equazione caratteristica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Il discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; le radici: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- La soluzione dell’equazione omogenea: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Dividiamo il secondo membro in parti di forma speciale – una soluzione particolare per ciascuna, poi le sommiamo: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Il secondo membro 2 ha una forma speciale; il numero 0 non è radice dell’equazione caratteristica, quindi cerchiamo una soluzione particolare $y_{p_1} = A$
- Le derivate: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Sostituito nell’equazione (diviso per l’esponenziale), con i termini simili sommati: $2A = 2$
- Da cui $A = 1$
- Una soluzione particolare: $y_{p_1} = 1$
- Il secondo membro e^{2t} ha una forma speciale; il numero 2 è radice dell’equazione caratteristica (molteplicità 1), quindi la forma si moltiplica per x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Le derivate: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Sostituito nell’equazione (diviso per l’esponenziale), con i termini simili sommati: $A = 1$
- Una soluzione particolare: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Una soluzione particolare: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- L’integrale generale: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Torniamo alla variabile originale (t = ln x, per $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Grafico



soluzioni per diversi C

Le curve grigie sono soluzioni per vari valori delle costanti.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C₁ | C₂ | + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

L’abbassamento y' = p(y), le costanti dalle condizioni iniziali passo per passo.

Input: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Risultato

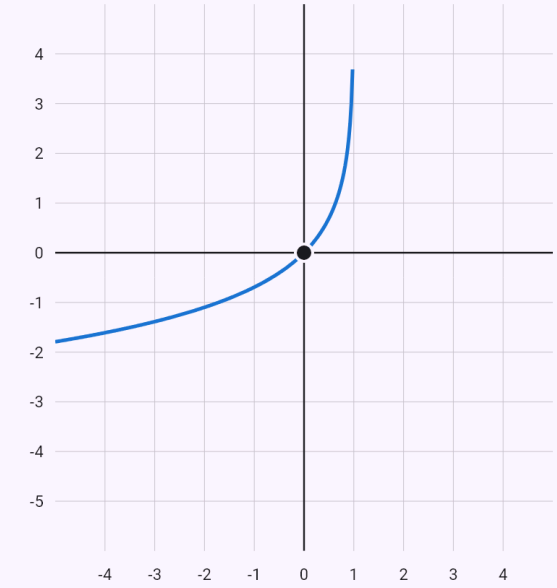
$$y = -\ln(1 - x)$$

Passaggi

- Manca la variabile indipendente – consideriamo y' come funzione di y: $y'' = e^{2y}$
- La sostituzione $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ trasforma l’equazione in $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; le condizioni iniziali danno $p(0) = 1$
- Un’equazione a variabili separabili – il secondo membro è il prodotto di una funzione della variabile e di una funzione dell’incognita: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Separiamo le variabili: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Integriamo entrambi i membri: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- L’integrale generale in forma implicita: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Ricaviamo la soluzione: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Sostituiamo la condizione iniziale $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $p = e^y$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Torniamo all’incognita originale: $y' = e^y$
- Un’equazione a variabili separabili – il secondo membro è il prodotto di una funzione della variabile e di una funzione dell’incognita: $y' = e^y$
- Separiamo le variabili (dividendo, supponendo $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Integriamo entrambi i membri: $\int \dfrac{dy}{e^y} = \int dx$
- Dalla tabella – la funzione interna è lineare, quindi il risultato si divide per il suo coefficiente della variabile: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int 1\,dx = x$
- L’integrale generale in forma implicita: $-e^{-y} = x + C_2$
- Ricaviamo la soluzione: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Sostituiamo la condizione iniziale $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- La soluzione del problema di Cauchy (la soluzione particolare): $y = -\ln(1 - x)$
- Il termine derivato con le regole per una funzione composta, un prodotto e un quoziente: $(-\ln(1 - x))' = -\dfrac{1}{1 - x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{1 - x}$
- La soluzione e la sua derivata sostituite nell’equazione – i due membri sono uguali: $\dfrac{1}{1 - x} = e^{(-\ln(1 - x))}$

Grafico

Soluzioni | Piano delle fasi



$y = -\ln(1 - x)$

Quella evidenziata soddisfa le condizioni, i punti sono i valori dati.

Un oscillatore smorzato – tre casi secondo δ e ω.

Input: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Risultato

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x)e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti:
  $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l'equazione caratteristica:
  $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica:
  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Per $\delta > \omega$ quindi
  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$
  $y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2-\omega^2}-\delta)x}$
- Per $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, quindi $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\delta x}$
- Per $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, quindi
  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}x\right)\right.$

Risonanza – per ω = 2 la soluzione ha un'altra forma.

Input: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Risultato

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Passaggi

- Un'equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Prima l'equazione omogenea associata (secondo membro nullo): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λt); sostituendo e dividendo per e^(λt) si ottiene l'equazione caratteristica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- La soluzione dell'equazione omogenea: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Il secondo membro $\cos(2t)$ ha una forma speciale; il numero $2i$ non è radice dell'equazione caratteristica, quindi cerchiamo una soluzione particolare $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Le derivate

$$y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$$

- Sostituito nell'equazione (diviso per l'esponenziale), con i termini simili sommati $(A\omega^2 - 4A)\cos(2t) + (B\omega^2 - 4B)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Confrontiamo i coefficienti dei termini simili nei due membri da cui $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Una soluzione particolare: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- L'integrale generale

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Per $\omega = 2$ il numero del secondo membro è radice dell'equazione caratteristica (risonanza) – la soluzione ha una forma diversa:

$$y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$$

Una soluzione indovinata $y_1 = x$ e l'abbassamento dell'ordine (d'Alembert).

Input: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Risultato

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Passaggi

- Un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili: $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$
- Indoviniamo una soluzione e la verifichiamo per sostituzione: $y_1 = x$. La seconda abbassando l'ordine (d'Alembert, y = $y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$

- La funzione razionale scomposta in un polinomio e fratti semplici

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- L'integrale di una somma è la somma degli integrali

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

- La costante portata fuori dall'integrale:

$$\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

- Dalla tabella degli integrali immediati:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$

- La costante portata fuori dall'integrale:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Dalla tabella degli integrali immediati:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

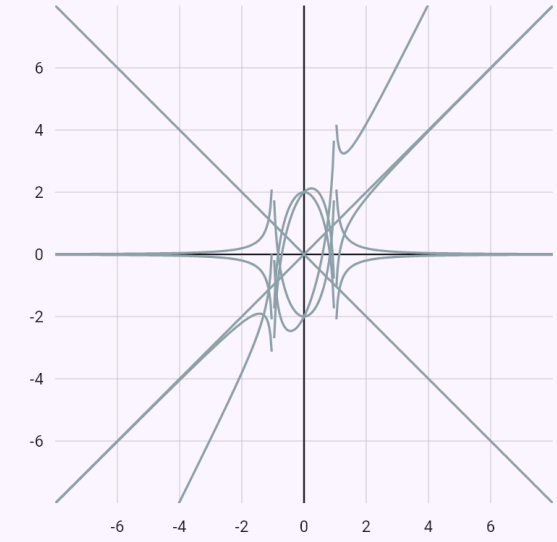
- La costante portata fuori dall'integrale:

$$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Dalla tabella degli integrali immediati: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$

- L'integrale generale:
  $y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$

Grafico



soluzioni per diversi C

Le curve grigie sono soluzioni per vari valori delle costanti.

Curve predefinite

Valori propri delle costanti

C_1 | C_2 | + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

Un sistema – autovalori di segno opposto, una sella.

Input: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Risultato

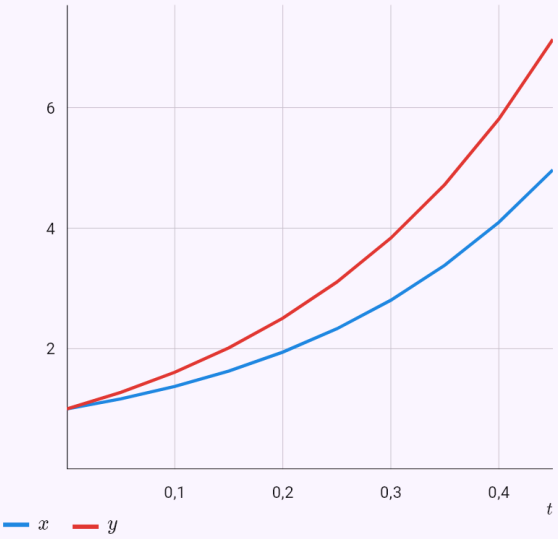
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Passaggi

- Il sistema in forma matriciale
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Gli autovalori della matrice dall'equazione caratteristica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – due reali distinti.
- Autovettori, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- La soluzione generale
  $$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$$
  $$y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$$
- Il punto stazionario $[0;\ 0]$ è una sella – gli autovalori hanno segni opposti, è instabile.

Grafico

Nel tempo | Piano delle fasi



La soluzione del sistema nel tempo per le condizioni iniziali date (senza di esse per x(0) = y(0) = 1).

Autovalori complessi – un fuoco instabile.

Input: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Risultato

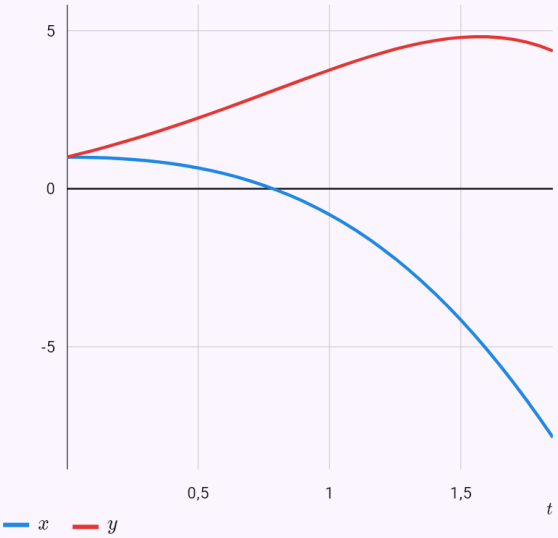
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Passaggi

- Il sistema in forma matriciale
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Gli autovalori della matrice dall'equazione caratteristica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – complessi coniugati.
- Autovettori, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La soluzione generale
  $$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$$
  $$y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$$
- Il punto stazionario $[0;\ 0]$ è un fuoco instabile – la parte reale degli autovalori è positiva, le traiettorie se ne allontanano a spirale.

Grafico

Nel tempo | Piano delle fasi



La soluzione del sistema nel tempo per le condizioni iniziali date (senza di esse per x(0) = y(0) = 1).

Un sistema con condizioni iniziali – un centro.

Input: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Risultato

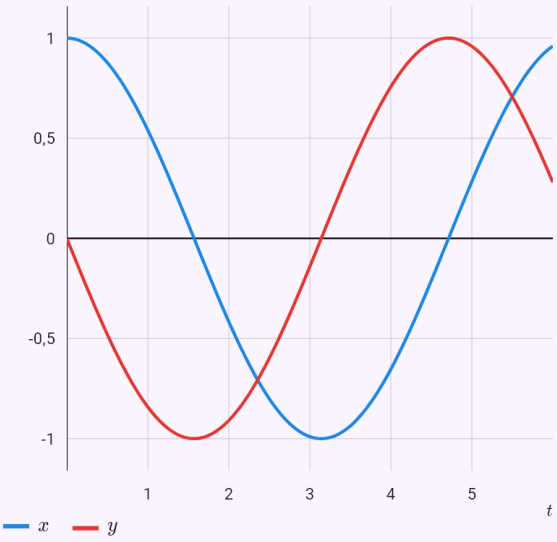
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Passaggi

- Il sistema in forma matriciale
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Gli autovalori della matrice dall'equazione caratteristica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – complessi coniugati.
- Autovettori, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La soluzione generale
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Le costanti dalle condizioni iniziali quindi
  $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $C_1 = 1$
  $C_2 = 0$
- Il punto stazionario $[0;\ 0]$ è un centro – gli autovalori sono puramente immaginari, le traiettorie sono curve chiuse intorno a esso.

Grafico

Nel tempo | Piano delle fasi



La soluzione del sistema nel tempo per le condizioni iniziali date (senza di esse per x(0) = y(0) = 1).

L’equazione di Airy – il criterio di Leighton–Wintner e 12 zeri.

Input: `oscillation(y'' + x y = 0)`

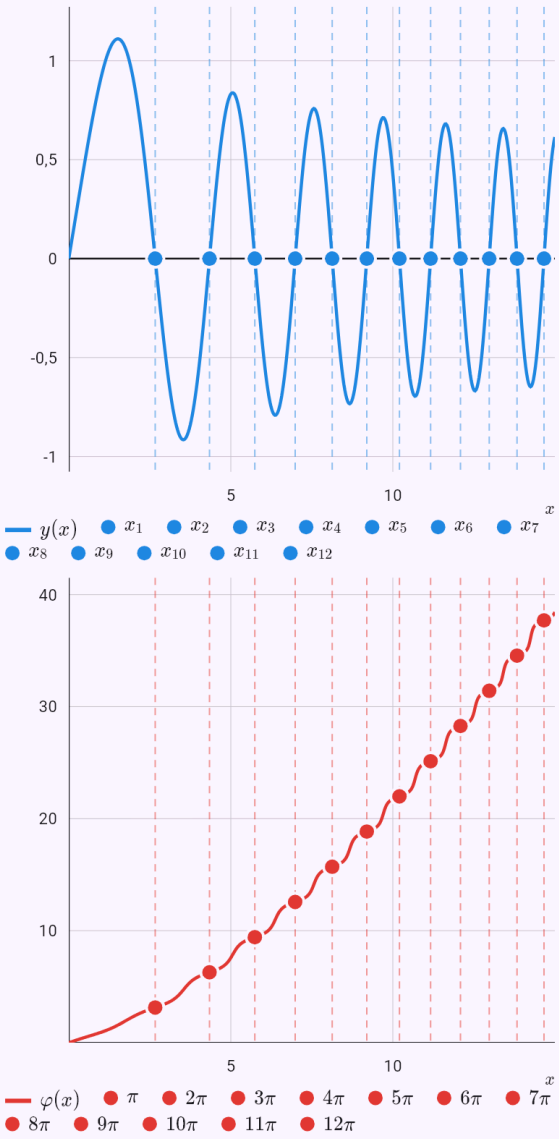
Risultato

L’equazione è oscillatoria.

Passaggi

- Studiamo l’equazione $y'' + xy = 0$ sull’intervallo $[0;\,\infty)$, cioè y" + q(x)y = 0 con q = x
- L’equazione è oscillatoria se ogni soluzione non banale ha infiniti zeri sull’intervallo. Per il teorema di separazione di Sturm gli zeri di due soluzioni indipendenti si alternano, quindi basta una soluzione: o oscillano tutte le soluzioni o nessuna.
- Il criterio di Leighton–Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, l’equazione è oscillatoria. Qui $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$ e $\int_0^\infty x\,dx = \infty$, quindi l’equazione è oscillatoria.
- Il criterio di Kneser con la costante critica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, l’equazione è oscillatoria.
- La tecnica di Riccati: la sostituzione $w = \frac{y'}{y}$ trasforma l’equazione nell’equazione di Riccati $w' + w^2 + x = 0$. L’equazione è non oscillatoria esattamente quando l’equazione di Riccati ha una soluzione su un intero intervallo [T; ∞) per qualche T. Per un’equazione oscillatoria non ce n’è: w «scappa» a −∞ in ogni zero di y.
- La trasformazione di Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ trasforma l’equazione in un’equazione per l’angolo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. In uno zero di y l’angolo φ è un multiplo di π e φ' > 0, quindi φ attraversa i multipli di π solo crescendo. Il numero di zeri su (a; b] è quindi ⌊φ(b)/π⌋. Calcoliamo numericamente con il metodo di Runge–Kutta (RK4) dai valori iniziali $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Sull’intervallo $(0;\,15]$ la soluzione ha questo numero di zeri: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Gli zeri vicini distano da $0{,}8322$ a $1{,}6761$. Gli zeri $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,\ $
- Il teorema di confronto di Sturm: sull’intervallo $[0;\,15]$ abbiamo $q \in [0;\,15]$. Lì q non è ovunque positivo, quindi otteniamo solo una stima dal basso della distanza di zeri vicini: $0{,}8112 \le \Delta$
- Conclusione: l’equazione è oscillatoria – ogni soluzione non banale ha infiniti zeri.

Grafico



La soluzione con gli zeri evidenziati; sotto l’angolo di Prüfer φ, che passa per i multipli di π negli zeri.

L’equazione di Eulero al limite k = 1/4 – non ancora oscillatoria.

Input: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

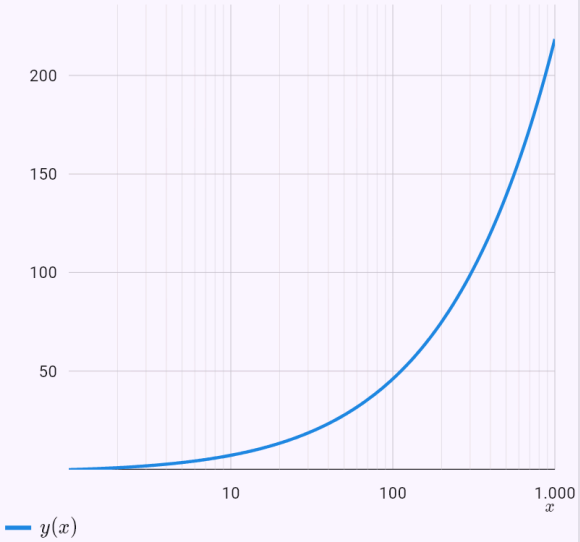
Risultato

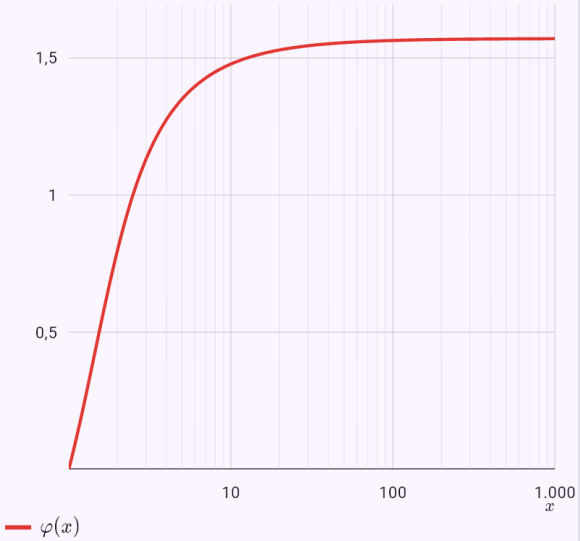
L’equazione non è oscillatoria.

Passaggi

- Studiamo l’equazione $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ sull’intervallo $[1;\,\infty)$, cioè y" + q(x)y = 0 con q = $\frac{1}{4x^2}$
- L’equazione è oscillatoria se ogni soluzione non banale ha infiniti zeri sull’intervallo. Per il teorema di separazione di Sturm gli zeri di due soluzioni indipendenti si alternano, quindi basta una soluzione: o oscillano tutte le soluzioni o nessuna.
- È l’equazione di Eulero y" + (k/x²)y = 0 con il valore limite k = $\frac{1}{4}$. L’equazione caratteristica $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{4}=0$ ha la radice doppia $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}$, la soluzione $y=\sqrt{x}(C_1+C_2\ln x)$ ha al più uno zero. L’equazione non è ancora oscillatoria.
- Il criterio di Leighton–Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, l’equazione è oscillatoria. Qui $\int_1^\infty 1\,dx=\infty$, ma $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,dx=\frac{1}{4}$, quindi il criterio non decide.
- Il criterio di Kneser: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{4}$ è uguale alla costante critica $\frac{1}{4}$, quindi da solo non decide. Decide il termine successivo.
- Nel caso critico confrontiamo con l’equazione di Riemann–Weber y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, che oscilla esattamente per μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)\ln^2 x=0<\frac{1}{4}$, l’equazione non è oscillatoria.
- La tecnica di Riccati: la sostituzione $w=\frac{y'}{y}$ trasforma l’equazione nell’equazione di Riccati $w'+w^2+\frac{1}{4x^2}=0$. Questa ha la soluzione $w=\frac{1}{2x}$ su tutto l’intervallo – le corrisponde una soluzione y senza zeri, quindi l’equazione non è oscillatoria.
- La trasformazione di Prüfer $y=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho\cos\varphi$ trasforma l’equazione in un’equazione per l’angolo φ: $\varphi'=\cos^2\varphi+\frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. In uno zero di y l’angolo φ è un multiplo di π e φ' > 0, quindi φ attraversa i multipli di π solo crescendo. Il numero di zeri su (a; b] è quindi ⌊φ(b)/π⌋. Calcoliamo numericamente con il metodo di Runge–Kutta (RK4) dai valori iniziali $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ \varphi(1)=0$
- Sull’intervallo $(1;\,1000]$ la soluzione non ha zeri: $\varphi(1000)\doteq 1{,}5702\doteq 0{,}4998\pi$, l’angolo non ha raggiunto π.
- Conclusione: l’equazione non è oscillatoria – ogni soluzione non banale ha solo un numero finito di zeri.

Grafico





La soluzione non ha zeri sull’intervallo scelto; l’angolo di Prüfer φ sotto non raggiunge π.

Il criterio di Kneser: $x^2 q \to 1 > 1/4$, gli zeri crescono geometricamente.

Input: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

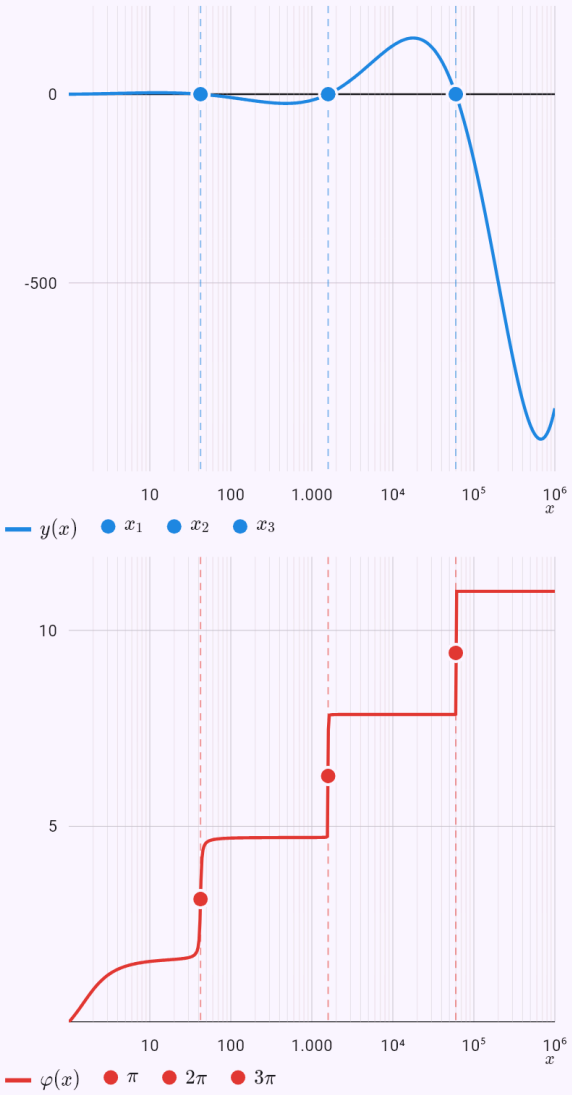
Risultato

L'equazione è oscillatoria.

Passaggi

- Studiamo l'equazione $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ sull'intervallo $[0;\ \infty)$, cioè y" + q(x)y = 0 con q = $\frac{1}{x^2+1}$
- L'equazione è oscillatoria se ogni soluzione non banale ha infiniti zeri sull'intervallo. Per il teorema di separazione di Sturm gli zeri di due soluzioni indipendenti si alternano, quindi basta una soluzione: o oscillano tutte le soluzioni o nessuna.
- Il criterio di Leighton–Wintner: se ∫ 1/r = ∞ e ∫ q = ∞, l'equazione è oscillatoria. Qui $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$, ma $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, quindi il criterio non decide.
- Il criterio di Kneser con la costante critica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, l'equazione è oscillatoria.
- La tecnica di Riccati: la sostituzione $w = \frac{y'}{y}$ trasforma l'equazione nell'equazione di Riccati $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. L'equazione è non oscillatoria esattamente quando l'equazione di Riccati ha una soluzione su un intero intervallo [T; ∞) per qualche T. Per un'equazione oscillatoria non ce n'è: w «scappa» a −∞ in ogni zero di y.
- La trasformazione di Prüfer $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ trasforma l'equazione in un'equazione per l'angolo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. In uno zero di y l'angolo φ è un multiplo di π e φ' > 0, quindi φ attraversa i multipli di π solo crescendo. Il numero di zeri su (a; b] è quindi ⌊φ(b)/π⌋. Calcoliamo numericamente con il metodo di Runge–Kutta (RK4) dai valori iniziali $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Sull'intervallo $(1;\ 1\,000\,000]$ la soluzione ha questo numero di zeri: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Gli zeri vicini distano da $1548{,}7974$ a $58269{,}3046$. Gli zeri: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Conclusione: l'equazione è oscillatoria – ogni soluzione non banale ha infiniti zeri.

Grafico



La soluzione con gli zeri evidenziati; sotto l'angolo di Prüfer φ, che passa per i multipli di π negli zeri.

L’equazione di Eulero semilineare, k = 1 > (2/3)³.

Input: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Risultato

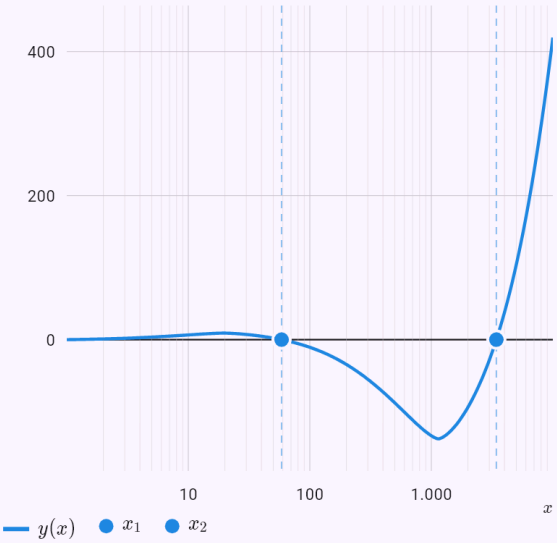
L’equazione è oscillatoria.

Passaggi

- Studiamo l’equazione semilineare $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ con p = 3 sull’intervallo $[1;\ \infty)$, dove $\Phi(s) = |s|^{1}s$. Un multiplo di una soluzione è ancora una soluzione, ma la somma di due soluzioni in generale no. Per p = 2 è l’equazione lineare y" + q(x)y = 0.
- L’equazione è oscillatoria se ogni soluzione non banale ha infiniti zeri sull’intervallo. Il teorema di separazione di Sturm vale anche per le equazioni semilineari: o oscillano tutte le soluzioni o nessuna.
- È l’equazione di Eulero semilineare con k = 1. Sostituendo y = x^λ con 0 < λ < 1 si ottiene k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ per p = 3. La funzione G raggiunge il massimo, la costante critica $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, in λ = (p − 1)/p. Qui k è maggiore, non c’è alcuna soluzione x^λ e l’equazione è oscillatoria.
- Il criterio di Leighton–Wintner (se ∫ q = ∞, l’equazione è oscillatoria) qui non decide: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Il criterio di Kneser per le equazioni semilineari con la costante critica $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ è maggiore, l’equazione è oscillatoria.
- La tecnica di Riccati per un’equazione semilineare: la sostituzione $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ porta all’equazione di Riccati $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. L’equazione è non oscillatoria esattamente quando questa ha una soluzione su un intero intervallo [T; ∞).

- Numericamente (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) la soluzione ha sull’intervallo $(1;\ 10\,000]$ questo numero di zeri: 2, distanti $3369{,}2413$. Gli zeri: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Conclusione: l’equazione è oscillatoria – ogni soluzione non banale ha infiniti zeri.

Grafico



La soluzione con gli zeri evidenziati.

Il criterio di Kneser discreto: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Input: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

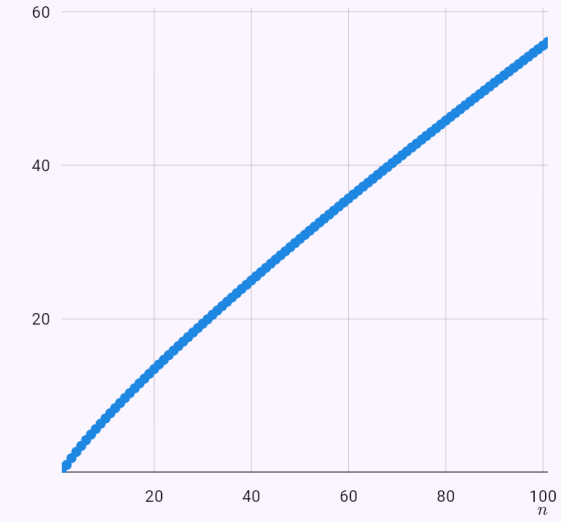
Risultato

L'equazione non è oscillatoria.

Passaggi

- Studiamo l'analogo discreto di (r y')' + q y = 0, la ricorrenza lineare $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ per $n \geq 1$, dove $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Come ricorrenza: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Per una successione contiamo gli zeri generalizzati: $y_n = 0$, o un cambio di segno tra y_n e y_{n+1}. L'equazione è oscillatoria se ogni soluzione non banale ha infiniti zeri generalizzati. Il teorema di separazione di Sturm vale anche qui.
- Il criterio di Leighton–Wintner discreto: se $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ e $\Sigma\, q_n = \infty$, l'equazione è oscillatoria. Qui $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, quindi il criterio non decide.
- Il criterio di Kneser discreto con la costante critica $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, l'equazione non è oscillatoria.
- La tecnica di Riccati discreta: la sostituzione $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ porta a $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. L'equazione è non oscillatoria esattamente quando questa equazione da un certo punto in poi ha una soluzione con $w_n + r_n > 0$.
- La soluzione con $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ non ha zeri generalizzati per n in $(1;\ 101]$
- Conclusione: l'equazione non è oscillatoria – ogni soluzione non banale ha solo un numero finito di zeri.

Grafico



La soluzione non ha zeri sull'intervallo scelto.

L'esempio 4.2 di Došlá e Marini – il caso C5: soluzioni regolarmente crescenti e fortemente

decrescenti.

Input: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Risultato

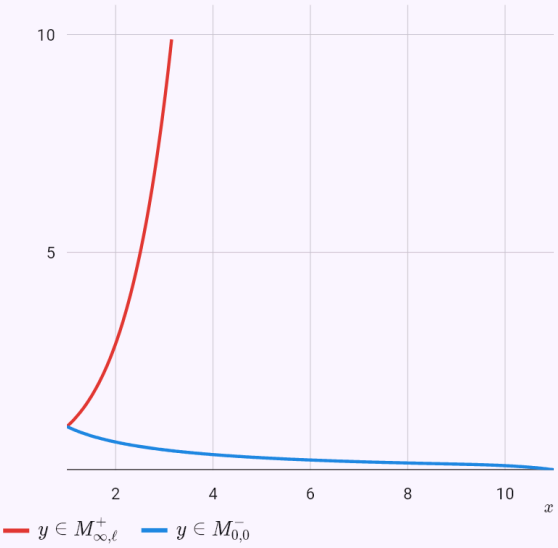
$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

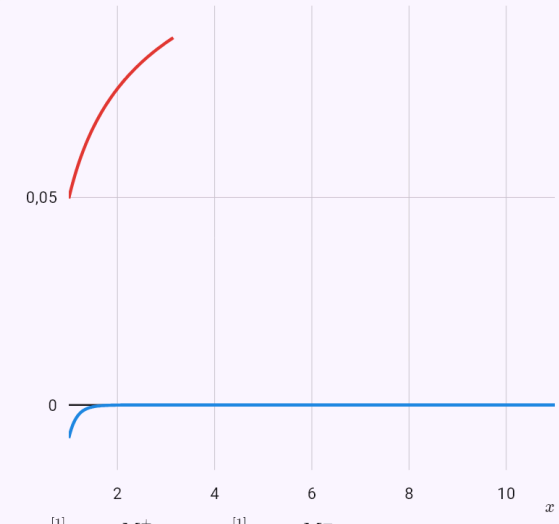
Passaggi

- Studiamo l'equazione semilineare $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \frac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ sull'intervallo $[1;\,\infty)$ con α = 3, a = e^{-3x} > 0 e b = $\frac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. È un'equazione con il p-laplaciano per p = α + 1 e un "potenziale negativo" – non oscilla. La forma generale dell'equazione è $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- Il comportamento di una soluzione è descritto, insieme a y, dalla sua quasi-derivata $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3 \operatorname{sgn} y'$. Ogni soluzione non banale appartiene a una di due classi: M^+ – y·y' > 0 da un certo x in poi e |y| cresce – oppure M^- – y·y' < 0 su tutto l'intervallo e |y| decresce. Le classi si suddividono secondo i limiti di |y| e $|y^{[1]}|$ per x → ∞: l'indice ∞ (infinito), ℓ (finito non nullo) o 0 (zero), per esempio $M^+_{\infty,\ell}$
- Per il teorema 2.1 (Došlá–Marini) ogni soluzione è definita su tutto l'intervallo ed entrambe le classi M^+ e M^- sono non vuote. Per esempio, le soluzioni con $y(x_0) > 0$ e $y'(x_0) \geq 0$ appartengono a M^+
- L'integrale A: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come e^x (a meno di una costante positiva). Decide l'esponenziale, quindi $\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- L'integrale B $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- L'integrale J_1: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come e^x (a meno di una costante positiva, con l'integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Decide l'esponenziale, quindi $\int_1^\infty e^x \left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- L'integrale J_2: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come $x^{-\frac{2}{3}}$ (a meno di una costante positiva, con l'integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1 $\int_1^\infty e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- L'integrale Y_1 diverge, perché già l'integrale interno diverge $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- L'integrale Y_2: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come x^{-2} (a meno di una costante positiva, con l'integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1 $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x < \infty$
- Lemma 2.1 (un'estensione del teorema di Fubini): per α = 3 ≥ 1, $Y_2 = \infty$ implica $J_2 = \infty$ e $Y_1 = \infty$ implica $J_1 = \infty$.
- Gli integrali sono risultati $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – è il caso C_5 della classificazione (teorema 3.1).
- L'equazione reciproca $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a e b si scambiano i ruoli e α diventa 1/α) ha come soluzioni le quasi-derivate delle soluzioni dell'equazione data. I suoi integrali J_1, J_2 si leggono come Y_2, Y_1, quindi si ha il caso C_8. Le classi si corrispondono con gli indici scambiati: $M^+_{\infty,\ell}$ dell'equazione data corrisponde a $M^+_{\ell,\infty}$ di quella reciproca.

- $M^{+}_{\infty,\ell} \neq \emptyset$: soluzioni regolarmente crescenti – $|y| \to \infty$, ma la quasi-derivata ha un limite finito non nullo; y cresce come $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (teorema 3.1).
- $M^{-}_{0,0} \neq \emptyset$: soluzioni fortemente decrescenti – $y \to 0$ e $y^{[1]} \to 0$ (teorema 3.1).
- La soluzione di M^{-} nel grafico si trova numericamente con il metodo di shooting: cerchiamo il valore iniziale della quasi-derivata per cui la soluzione con $y(1) = 1$ su un lungo intervallo non raggiunge lo zero né inizia a crescere – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Questo valore è unico, poiché $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (teorema 4).

Grafico





Sopra, soluzioni numeriche y(x) delle classi non vuote (M^{+} da $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} con lo shooting); sotto, le loro quasi-derivate y^[1](x). Una curva finisce dove |y| supera 10.

Il caso C4 – soluzioni crescenti limitate e un intero intervallo di decrescenti.

Input: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Risultato

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oscillazione dell'equazione

Passaggi

- Studiamo l'equazione lineare $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ sull'intervallo $[1;\ \infty)$, cioè (a(x)y')' = b(x)y con a = x^4 > 0 e b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. Scritta come (a y')' + q y = 0 ha q = −b negativo, quindi l'equazione non è oscillatoria – ogni soluzione ha al più uno zero.
- Il comportamento di una soluzione è descritto, insieme a y, dalla sua quasi-derivata $y^{[1]} = x^4 y'$. Ogni soluzione non banale appartiene a una di due classi: M^+ – y·y' > 0 da un certo x in poi e |y| cresce – oppure M^- – y·y' < 0 su tutto l'intervallo e |y| decresce. Le classi si suddividono secondo i limiti di |y| e $|y^{[1]}|$ per x → ∞: l'indice ∞ (infinito), ℓ (finito non nullo) o 0 (zero), per esempio $M^+_{\infty,\ell}$
- Per il teorema 2.1 (Došlá–Marini) ogni soluzione è definita su tutto l'intervallo ed entrambe le classi M^+ e M^- sono non vuote. Per esempio, le soluzioni con y(x₀) > 0 e y'(x₀) ≥ 0 appartengono a M^+
- L'integrale A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- L'integrale B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- L'integrale J_1: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come x^{-4} (a meno di una costante positiva, con l'integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

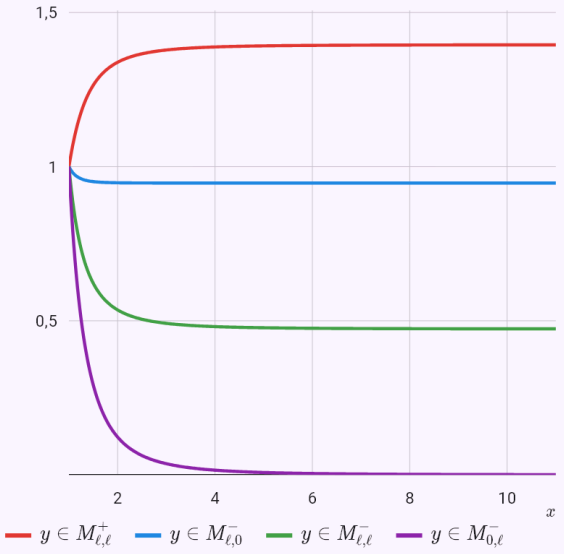
- L'integrale J_2: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come x^{-7} (a meno di una costante positiva, con l'integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1

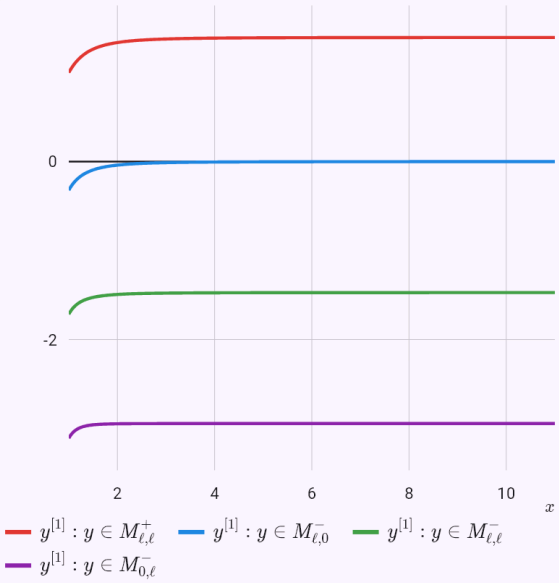
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Gli integrali sono risultati $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – è il caso C_4 della classificazione (teorema 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluzioni crescenti con limiti finiti di y e della quasi-derivata (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluzioni decrescenti in cui y e la quasi-derivata hanno limiti non nulli (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: soluzioni decrescenti verso un limite non nullo, la quasi-derivata → 0 (teorema 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: soluzioni regolarmente decrescenti – y → 0, ma la quasi-derivata ha un limite non nullo; y decresce come $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (teorema 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – nessuna soluzione di questo tipo (teorema 3.1).
- Le soluzioni di M^- nel grafico si trovano numericamente con il metodo di shooting: con $y(1) = 1$ restano positive

e decrescenti per un intero intervallo di valori iniziali della quasi-derivata $y^{[1]}(1) \in [-3{,}1103;\ -0{,}3215]$, poiché $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (teorema 4). Gli estremi dell'intervallo e il suo punto medio danno soluzioni di classi diverse.

Grafico





Sopra, soluzioni numeriche y(x) delle classi non vuote (M^{+} da $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} con lo shooting); sotto, le loro quasi-derivate y^[1](x). Una curva finisce dove |y| supera 10.

Un’equazione superlineare – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (la soluzione $\sqrt{2}/(x + \sqrt{2})$).

Input: `asymptotics(y'' = y^3)`

Risultato

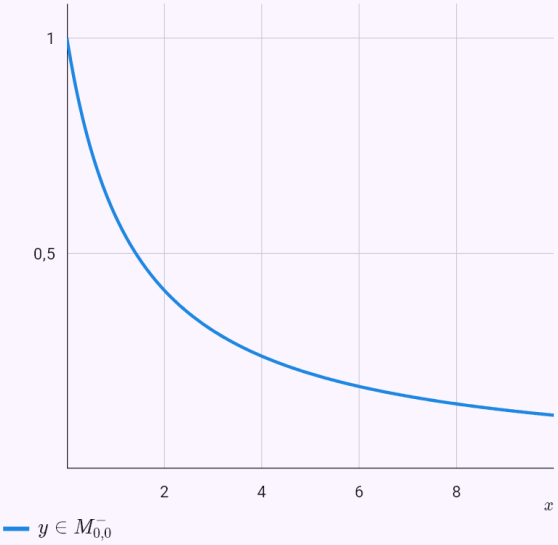
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

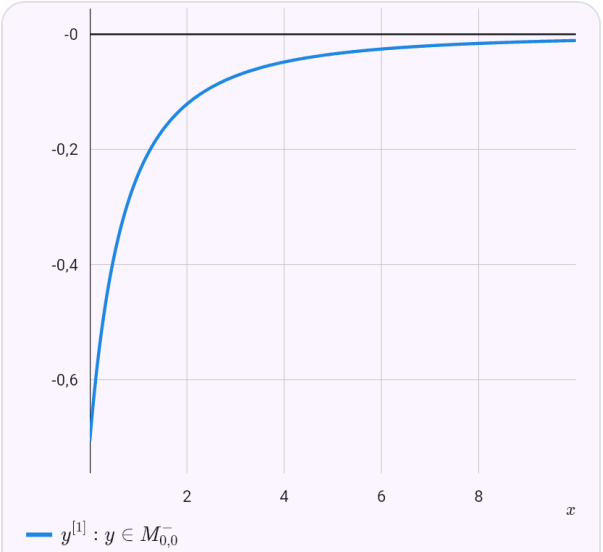
Passaggi

- Studiamo l’equazione di tipo Emden–Fowler $y'' = |y|^2 y$ sull’intervallo $[0;\ \infty)$ con α = 1, β = 3, a = 1 > 0 e b = 1 > 0. Poiché β > α, l’equazione è superlineare. La forma generale dell’equazione è $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Il comportamento di una soluzione è descritto, insieme a y, dalla sua quasi-derivata $y^{[1]} = y'$. Ogni soluzione non banale definita fino all’infinito appartiene a una di due classi: M^+ – y·y' > 0 da un certo x in poi e |y| cresce – oppure M^- – y·y' < 0 e |y| decresce. Le classi si suddividono secondo i limiti di |y| e $|y^{[1]}|$ per x → ∞: l’indice ∞ (infinito), ℓ (finito non nullo) o 0 (zero).
- Per il teorema 1 (Cecchi–Došlá–Marini) la classe M^- è non vuota per β > α. Alcune soluzioni però “esplodono”: |y| → ∞ già in un punto finito, quindi non sono definite fino all’infinito. La classe M^+ può essere vuota.
- L’integrale A: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come 1 (a meno di una costante positiva). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- L’integrale B: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come 1 (a meno di una costante positiva). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- L’integrale J_1: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come x (a meno di una costante positiva, con l’integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- L’integrale $Y_2^{(\beta)}$: per x → ∞ la funzione integranda si comporta come x^3 (a meno di una costante positiva, con l’integrale interno sostituito dal suo comportamento asintotico). Per il criterio del confronto con $\int x^\mu\,dx$, che converge esattamente per μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- L’integrale $Y_1^{(\beta)}$ diverge, perché già l’integrale interno diverge: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \varnothing$ – nessuna soluzione di questo tipo (Kiguradze, citato in Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \varnothing$ – nessuna soluzione di questo tipo (lemma 1).
- $M^-_{\ell,0} = \varnothing$ – nessuna soluzione di questo tipo (lemma 2).
- $M^-_{0,\ell} = \varnothing$ – nessuna soluzione di questo tipo (lemma 1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: soluzioni fortemente decrescenti – y → 0 e $y^{[1]}$ → 0 (teorema 1).

- La soluzione di M^- nel grafico si trova numericamente con il metodo di shooting: cerchiamo il valore iniziale della quasi-derivata per cui la soluzione con $y(0) = 1$ su un lungo intervallo non raggiunge lo zero né inizia a crescere – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Questo valore è unico, poiché $\int (a^{-1/\alpha} + b)\, dx = \infty$ (teorema 4).

Grafico





Sopra, soluzioni numeriche y(x) delle classi non vuote (M^+ da $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- con lo shooting); sotto, le loro quasi-derivate y^[1](x). Una curva finisce dove |y| supera 10.

Limiti noti

- Un'equazione che richiede un suggerimento dal problema (diverso da z = ln y) non si può ancora risolvere.
- Per un'equazione con un parametro (k, λ, ω) l'app non disegna il grafico e considera i parametri positivi.
- Dove la soluzione non si può esprimere in modo esplicito, resta implicita.
- La trasformata di Laplace non conosce ancora la funzione di Heaviside, le traslazioni e i termini noti periodici.
- Quando gli integrali della variazione delle costanti non si possono esprimere con funzioni elementari (y″ + y′ + y = tg x), la soluzione li mantiene come integrali; allora non c'è grafico e non si applicano condizioni iniziali.
- Sistemi solo di due equazioni lineari a coefficienti costanti senza termine noto; sistemi non lineari solo nelle applicazioni (modelli).
- Un'equazione di Riccati senza una soluzione particolare data si risolve solo se se ne indovina una di forma semplice – altrimenti l'app dice che ne serve una.
- Un'equazione di Lagrange solo senza condizione iniziale; per un'equazione di Clairaut la condizione sceglie le rette (e l'inviluppo) per il punto.

- Oscillazione solo per equazioni con coefficienti numerici (k deve essere un numero); un'equazione semilineare solo con r = 1. Gli zeri si contano numericamente su un intervallo finito – sull'infinito decidono solo i criteri.
- L'asintotica di un'equazione di tipo Emden–Fowler ($\beta \neq \alpha$) si decide solo dove lo dicono i teoremi citati – le altre classi sono segnate come indecise. I coefficienti a, b devono essere positivi; il loro comportamento all'infinito è riconosciuto per prodotti di potenze, logaritmi ed esponenziali, altrimenti solo integrali esatti con Symja.

37. Calcolo delle variazioni

L’app cerca un’estremale di un funzionale J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx con le condizioni al contorno y(a), y(b): imposta l’equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (con le derivate parziali nei passaggi), mostra l’integrale primo di un’integranda senza y e risolve l’equazione differenziale risultante con il risolutore di equazioni differenziali con le condizioni al contorno e una verifica. Il problema è anche un modulo negli ambiti Analisi matematica e Fisica (Applicazioni).

Se l’equazione non ha soluzione in forma chiusa e F non dipende da x, usa l’identità di Beltrami e riconosce le estremali note: la brachistocrona (una cicloide, confrontata con la retta, con il tempo della discesa), la catenaria e la superficie minima di rotazione (due, una o nessuna catenaria – la soluzione di Goldschmidt), un problema isoperimetrico con un moltiplicatore di Lagrange (un arco di circonferenza di lunghezza data, una catena appesa). Le costanti si trovano numericamente. Il principio di minima azione trasforma una lagrangiana nell’equazione del moto, per un pendolo con sin θ ≈ θ. Una demo interattiva – una gara di palline lungo la brachistocrona – è su mathtrace.app alla voce “Prova tu”.

Come inserirlo

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	La funzione integranda e le condizioni al contorno, separate da punti e virgola.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	Il vincolo ∫ G dx = L come ultimo elemento.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Una lagrangiana L = T − V e la parola action – l’equazione del moto.

Esempi

Il percorso più breve tra due punti è un segmento.

Input: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Risultato

$$y = 2x$$

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, le condizioni al contorno $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$

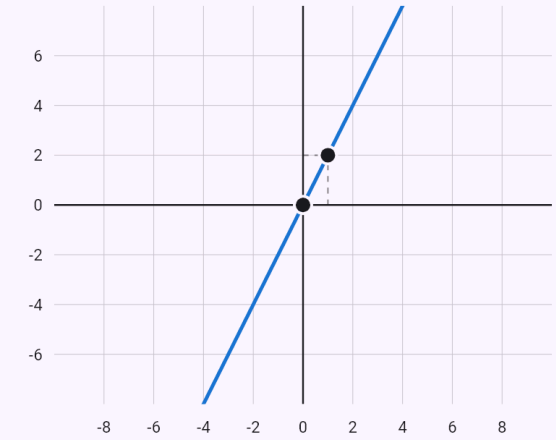
- L'equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- La funzione integranda non dipende da y – l'equazione di Eulero–Lagrange ha un integrale primo: $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Risolviamo l'equazione differenziale:
- Il secondo membro è funzione solo della variabile indipendente – integriamo l'equazione passo per passo: $y'' = 0$
- Integriamo entrambi i membri: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Integriamo entrambi i membri: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = 2, \; C_2 = 0$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $y = 2x$

Grafico

Soluzioni | Piano delle fasi



$y = 2x$

Quella evidenziata soddisfa le condizioni, i punti sono i valori dati.

Valori propri delle costanti

C_1 | C_2 | + Aggiungi curva

Tocca il grafico e imposta la pendenza con il cursore – viene disegnata la soluzione per quel punto con quella pendenza della tangente.

L’equazione di Eulero–Lagrange y'' = y con condizioni al contorno.

Input: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Risultato

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, le condizioni al contorno $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- L’equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Risolviamo l’equazione differenziale:
- Un’equazione lineare a coefficienti costanti: $y'' - y = 0$
- Cerchiamo soluzioni y = e^(λx); sostituendo e dividendo per e^(λx) si ottiene l’equazione caratteristica: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Le radici dell’equazione caratteristica: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^x$
- L’integrale generale: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
- Sostituiamo le condizioni nell’integrale generale da cui $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$
  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

La brachistocrona – una cicloide da A [0; 0] a B [2; 1], una discesa di 0,806 s contro 1,010 s lungo la

retta.

Input: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

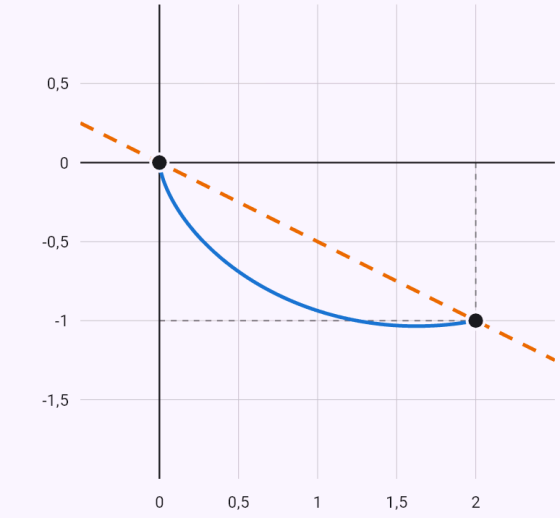
Risultato

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, le condizioni al contorno $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- L'equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- La funzione integranda non dipende da x − vale l'identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identità di Beltrami dà y·(1 + y'²) = cost. La soluzione è una cicloide − la curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola (l'asse y rivolto verso il basso, partenza da ferma in A):
$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Le costanti dal punto finale B (θ_B numericamente per bisezione)
$$\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$$
- Il valore del funzionale:
$J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; lungo la retta $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Per J = ∫ ds/v con v = √(2gy), J è il tempo della discesa: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s
- θ_B > π − il percorso più rapido scende sotto il livello di B e poi risale verso B.

Grafico



L'asse y è rivolto verso il basso − la traiettoria passa sotto il punto A. Continua la cicloide (la discesa più rapida), tratteggiata la retta di confronto.

La superficie minima di rotazione tra due anelli – due catenarie, la meno profonda è il minimo.

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

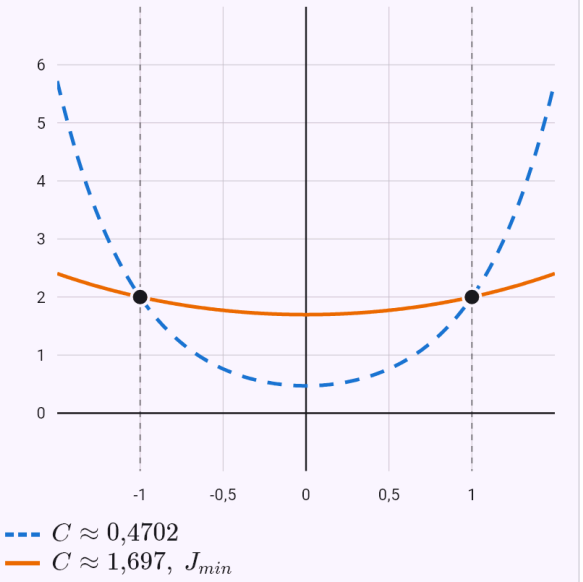
Risultato

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min}\approx 3{,}814$$

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y]=\int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, le condizioni al contorno $y(-1)=2,\quad y(1)=2$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial y}=\sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{}{\sqrt{(y}$
- L'equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy''+y'^2+1\right)=0$
- La funzione integranda non dipende da x − vale l'identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}}=C_1$
- L'identità di Beltrami dà una catenaria (il coseno iperbolico): $y=C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Due catenarie soddisfano le condizioni al contorno (numericamente). Il minimo è quella con J minore − la meno profonda; quella più profonda è solo stazionaria.
  $C\approx 0{,}4702,\ x_0\approx 0,\ J\approx 4{,}358;\quad C\approx 1{,}697,\ x_0\approx 0,$

Grafico



$C\approx 0{,}4702$
$C\approx 1{,}697,\ J_{min}$

L'estremale tra i punti dati; tratteggiata l'altra soluzione o una curva di confronto.

Anelli molto distanti – nessuna catenaria (la soluzione di Goldschmidt).

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Risultato

Nessuna soluzione.

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, le condizioni al contorno $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- L'equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- La funzione integranda non dipende da x − vale l'identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identità di Beltrami dà una catenaria (il coseno iperbolico): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Nessuna catenaria passa per entrambi i punti – gli anelli sono troppo piccoli rispetto alla loro distanza. La superficie minima è allora solo i due dischi e l'asse tra di essi (la soluzione di Goldschmidt); non esiste un'estremale regolare.

L’area massima sotto una curva di lunghezza π – una semicirconferenza.

Input: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Risultato

$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Passaggi

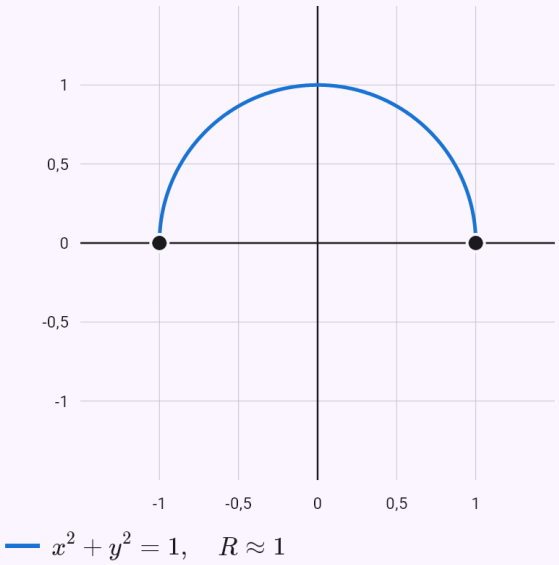
- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, le condizioni al contorno $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Un problema isoperimetrico con il vincolo $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: lo aggiungiamo con un moltiplicatore di Lagrange λ e cerchiamo un estremo del funzionale con la funzione integranda $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$

- L’equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- La funzione integranda non dipende da x – vale l’identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- L’identità di Beltrami per F + λG dà una circonferenza – un arco di raggio |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Le costanti dalla lunghezza dell’arco e dalla corda, l’angolo al centro 2α (numericamente)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Grafico



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

L’estremale tra i punti dati; tratteggiata l’altra soluzione o una curva di confronto.

Una catena appesa di lunghezza 3 – una catenaria con un moltiplicatore di Lagrange.

Input: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Risultato

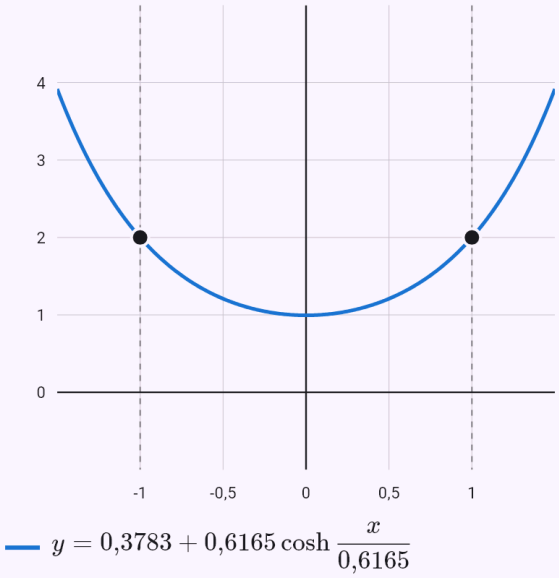
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$$

Passaggi

- Cerchiamo la funzione per cui il funzionale ha un estremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, le condizioni al contorno $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Un problema isoperimetrico con il vincolo $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2+1}\right) dx = 3$: lo aggiungiamo con un moltiplicatore di Lagrange λ e cerchiamo un estremo del funzionale con la funzione integranda $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- L'equazione di Eulero–Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- La funzione integranda non dipende da x − vale l'identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identità di Beltrami per F + λG dà una catenaria traslata di λ: $y = c + C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Le costanti dalla lunghezza della catena e dalle condizioni al contorno (numericamente)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Grafico



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$

L'estremale tra i punti dati; tratteggiata l'altra soluzione o una curva di confronto.

Il principio di minima azione – una molla, l'equazione del moto m x'' + k x = 0.

Input: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Risultato

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Passaggi

- Il principio di minima azione: il moto rende stazionaria l'azione: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- L'equazione di Eulero–Lagrange della lagrangiana è l'equazione del moto: $-kx - mx'' = 0$
- Risolviamo l'equazione differenziale:
- Un'equazione lineare a coefficienti costanti:
  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Cerchiamo soluzioni x = e^(λt); sostituendo e dividendo per e^(λt) si ottiene l'equazione caratteristica:
  $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- L'integrale generale
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Un pendolo – sin θ ≈ θ per piccole oscillazioni.

Input: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Risultato

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Passaggi

- Il principio di minima azione: il moto rende stazionaria l'azione: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Le derivate parziali della funzione integranda rispetto a y e y' e la derivata totale rispetto a x (sia y sia y' dipendono da x)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- L'equazione di Eulero–Lagrange della lagrangiana è l'equazione del moto: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- La funzione integranda non dipende da x – vale l'identità di Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁:
  $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- L'equazione con sin θ non ha una soluzione elementare. Per piccole oscillazioni sin θ ≈ θ dà l'equazione dell'oscillazione armonica: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Risolviamo l'equazione differenziale:
- Un'equazione lineare a coefficienti costanti:
  $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Cerchiamo soluzioni \theta = e^(λt); sostituendo e dividendo per e^(λt) si ottiene l'equazione caratteristica:
  $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Ogni radice λ dà la soluzione e^(λx), una radice di molteplicità k anche x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), e una coppia α ± βi le soluzioni e^(αx)·cos βx ed e^(αx)·sin βx. Il sistema fondamentale
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- L'integrale generale
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Limiti noti

- Una sola funzione incognita e al massimo la sua derivata prima nell’integranda; funzionali di più funzioni o con y'' non ancora.
- Le estremali note (cicloide, catenaria, arco di circonferenza) si riconoscono dalla forma dell’integranda; altre equazioni non lineari restano come equazione di Eulero–Lagrange.
- La brachistocrona parte da ferma – il punto iniziale deve avere $y(a) = 0$ e l’asse y è rivolto verso il basso.

38. Equazioni alle derivate parziali

Scrivi l'equazione con i pedici u_t, u_xx, u_xy (da una foto l'app legge anche ∂u/∂t e ∂²u/∂x²), il laplaciano come Δu; le condizioni e il dominio separati da un punto e virgola. Senza condizioni l'app trova il tipo di un'equazione lineare del secondo ordine (ellittica, parabolica, iperbolica – per regione con coefficienti variabili), l'equazione caratteristica, la forma canonica e, senza termini di ordine inferiore, la soluzione generale. Un'equazione del primo ordine a·u_x + b·u_y + c·u = f si risolve con le caratteristiche con una verifica.

Con condizioni al contorno e iniziali risolve per separazione delle variabili l'equazione del calore u_t = k·u_xx e quella delle onde u_tt = c²·u_xx su un intervallo (estremi a temperatura fissa o isolati, valori non nulli tramite lo stato stazionario) e l'equazione di Laplace su un rettangolo e in un disco (o fuori di esso). I coefficienti di Fourier risultano come formula in n; una funzione iniziale che è somma di autofunzioni dà una somma finita. Su tutta la retta usa la formula di d'Alembert e la trasformata di Fourier (il nucleo del calore), su una semiretta x > 0 la trasformata di Laplace nel tempo. Gestisce anche una sorgente f(x, t) (il principio di Duhamel), un flusso di calore a un estremo, valori al contorno variabili nel tempo e, per l'equazione di Laplace, derivate sui lati. Tra le equazioni non lineari risolve quella di Burgers – con le caratteristiche finché si forma un urto, con viscosità con la trasformazione di Cole-Hopf; l'equazione delle onde sulla retta è mostrata anche con la trasformata di Fourier. L'equazione di Poisson Δu = f su un rettangolo si risolve con una serie di Fourier doppia (la sorgente come somma di prodotti p(x)·q(y)); con tutti e quattro i lati dati dalla derivata si verifica la condizione di risolubilità e la soluzione è a meno di una costante. Le equazioni con i coefficienti variabili αx²u_xx + βxu_x diventano un problema di Sturm–Liouville con un peso.

Numericamente su una griglia con lo schema come intestazione, come per gli altri metodi numerici: l'equazione del calore in modo esplicito (ftcs), implicito (btcs), con Crank-Nicolson (cranknicolson) e il θ-metodo (theta) – i sistemi impliciti con l'algoritmo di Thomas, con l'analisi di stabilità di von Neumann; l'equazione del trasporto con upwind, laxwendroff e leapfrog con la condizione CFL, l'equazione delle onde con leapfrog; l'equazione di Laplace (Poisson) con lo schema a cinque punti e le iterazioni jacobi, gaussseidel e sor con il numero di iterazioni confrontato. Valori con nome: h il passo spaziale, k il passo temporale, to il tempo finale, theta, omega, tol, max. L'equazione del calore è anche un modulo in Metodi numerici. Il calore in 2D su un rettangolo si risolve con gli schemi ftcs e adi (direzioni alternate), l'equazione di Laplace anche con il gradiente coniugato (cg), il multigrid (multigrid) e gli elementi finiti con triangoli (fem); l'equazione di Burgers con lo schema di Godunov (upwind). Le equazioni del trasporto e di Laplace sono anche moduli nell'ambito Metodi numerici, le applicazioni (una sbarra, una corda, un tamburo, la diffusione) moduli in fisica e chimica. Per le leggi di conservazione ci sono gli schemi laxfriedrichs e muscl (con il limitatore minmod) – per l'equazione del trasporto e di Burgers, quest'ultima anche con viscosità (confrontata con la trasformazione di Cole–Hopf). Il metodo degli elementi finiti (fem) funziona anche su un poligono generico dato dai suoi vertici, polygon = (0,0), (2,0), …,

con il valore al contorno u = …; la mesh viene dal taglio delle orecchie e dalla suddivisione dei triangoli. Il calore in una piastra è un modulo in fisica.

Il risultato è un grafico di u(x, t): una curva nel tempo con un cursore e un pulsante di riproduzione, e una superficie 3D da ruotare; una soluzione numerica ha quella esatta tratteggiata. L'u(x, y) stazionaria di Laplace è una superficie 3D.

Come inserirlo

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	L'equazione, le condizioni al contorno e iniziali; una derivata in una condizione come u_t(x,0) o u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Il dominio: x ∈ ℝ, x > 0 o 0 < x < π; senza condizioni al contorno tutta la retta.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	L'equazione di Laplace in un disco: Δu, il raggio r e l'angolo φ (o θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numericamente: lo schema come intestazione, i passi h e k e il tempo finale to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Calore in 2D: u(x,y,t), condizioni come u(x,y,0) = … e u(0,y,t) = …; i lati senza condizione valgono 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Elementi finiti su un poligono: i vertici dopo polygon =, il valore al contorno u = …, il lato più lungo h.

Esempi

Un’equazione iperbolica – caratteristiche, la forma canonica u_ξη = 0 e la soluzione generale.

Input: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Risultato

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- I coefficienti delle derivate seconde nella forma a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Il discriminante: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, l’equazione è iperbolica (come l’equazione delle onde): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- L’equazione delle caratteristiche: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Due famiglie reali di caratteristiche: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nuove variabili lungo le caratteristiche: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Dopo il cambio di variabili (la regola della catena) otteniamo la forma canonica: $u_{\xi\eta} = 0$
- L’equazione u_ξη = 0 si integra due volte – la soluzione generale con due funzioni arbitrarie $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

L’equazione di Tricomi – il tipo per regione.

Input: `y u_xx + u_yy = 0`

Risultato

$$D = -y$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- I coefficienti delle derivate seconde nella forma a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Il discriminante dipende dalla posizione: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Il tipo per regione – iperbolica per $y < 0$, parabolica per $y = 0$, ellittica per $y > 0$
- L’equazione delle caratteristiche: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

L’equazione del trasporto con le caratteristiche – l’onda si muove a velocità 2.

Input: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Risultato

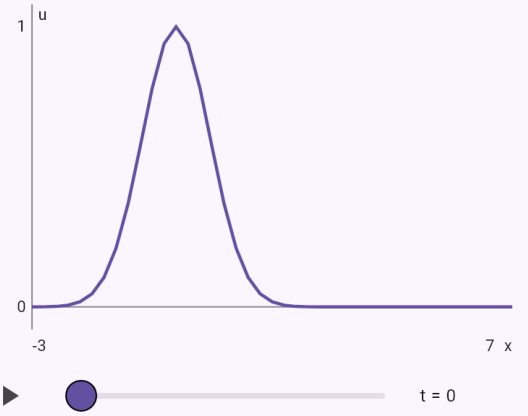
$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_t + 2u_x = 0$
- Condizioni: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Il metodo delle caratteristiche: lungo le curve che risolvono il sistema l’equazione diventa un’equazione differenziale ordinaria per u.
  $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$
- Le caratteristiche sono le curve su cui $x - 2t = \xi$ è costante.
- Lungo una caratteristica risolviamo un’equazione ordinaria, il suo valore iniziale dalla condizione:
  $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$
- Verifica: sostituendo nell’equazione, il primo membro è uguale al secondo.
- La soluzione: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all’istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Il calore in una sbarra con estremi raffreddati – una serie di Fourier.

Input: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Risultato

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(n$$

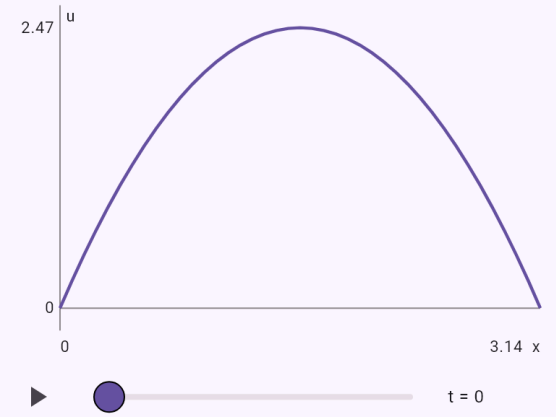
Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = 4u_{xx}$
- Condizioni:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto; sostituendo e dividendo, le variabili si separano – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -4n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-4n^2 t} \sin(nx)$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$
- La soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Estremi a temperature diverse – lo stato stazionario e lo scostamento da esso.

Input: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Risultato

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = 2u_{xx}$
- Condizioni: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Gli estremi hanno valori non nulli. Prima lo stato stazionario $w(x) = x + 1$ (l'equazione senza tempo, w" = 0), poi cerchiamo $u = w(x) + v(x,t)$; lo scostamento v ha valori nulli agli estremi.
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto; sostituendo e dividendo, le variabili si separano – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione)

$$u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)

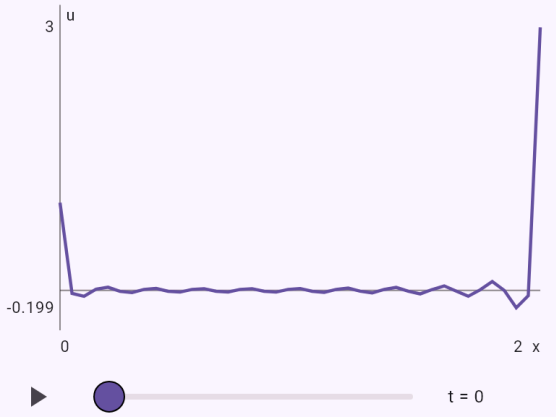
$$c_n = \int_0^2 (-x-1)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$$

- La soluzione

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



t = 0

La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una corda pizzicata – onde stazionarie.

Input: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Risultato

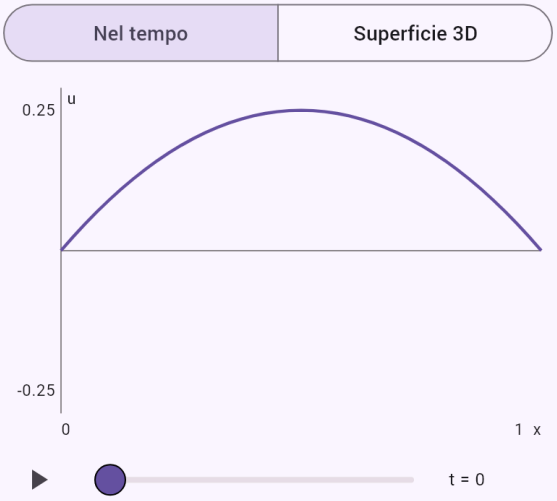
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ s$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Condizioni:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l'equazione è iperbolica (come l'equazione delle onde): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto – onde stazionarie; entrambi i membri sono uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – oscillazioni con la propria frequenza:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione)
  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\ \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- La soluzione
  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

L’equazione di Laplace su un rettangolo con un lato riscaldato.

Input: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Risultato

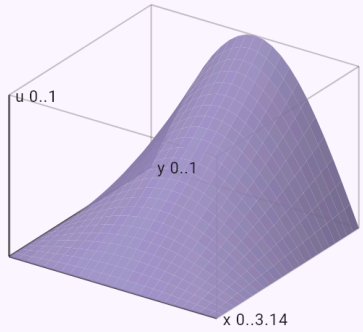
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condizioni: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, l’equazione è ellittica (come l’equazione di Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Il lato con valori non nulli (gli altri hanno u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- L’altra equazione Y" = λY, nulla sul lato opposto, scalata a 1 su quello dato: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- La funzione iniziale (al contorno) è già una somma di autofunzioni, quindi solo pochi coefficienti $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, \sin(nx)\,dx$ non sono nulli: $c_1 = 1$, gli altri sono nulli.

- La soluzione: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

L’equazione di Laplace in un disco – una somma finita di armoniche.

Input: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

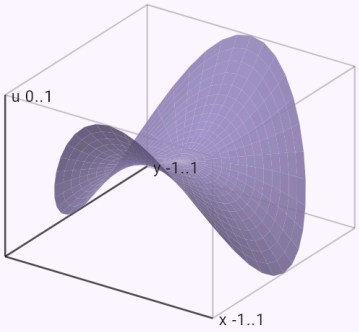
Risultato

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Condizioni: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, l’equazione è ellittica (come l’equazione di Laplace): $\Delta u = 0$
- Separazione delle variabili in coordinate polari:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi):\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- L’angolo ritorna dopo un giro, Φ deve essere periodica:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – le soluzioni
  $\lambda_n = n^2,\quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi,\quad n = 0,1,2,\ldots$
- La parte radiale è l’equazione di Eulero; dentro il disco la soluzione deve essere limitata (r^{-n} e ln r cadono):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- L’equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- I coefficienti di Fourier della funzione al contorno:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- La funzione iniziale (al contorno) è già una somma di autofunzioni, quindi solo pochi coefficienti $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ non sono nulli: $a_2 = -\frac{1}{2}$, gli altri sono nulli.
- Tutti i coefficienti sono nulli:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- La soluzione: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

La formula di d’Alembert – un impulso iniziale si divide in due onde.

Input: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Risultato

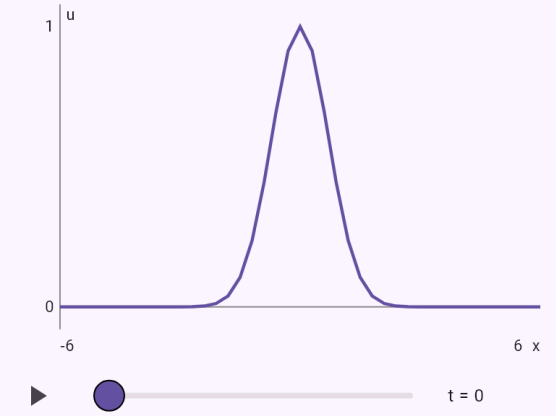
$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_{tt} = u_{xx}$
- Condizioni: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l’equazione è iperbolica (come l’equazione delle onde): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- La soluzione generale dell’equazione delle onde sono due onde che si muovono alla velocità c verso sinistra e verso destra: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- Lo stesso con la trasformata di Fourier in x: ogni frequenza ω oscilla per conto suo. Moltiplicare per e^(±icωt) significa traslare di ∓ct, quindi l’antitrasformata dà – la formula di d’Alembert.
- Le condizioni iniziali u = f e u_t = g danno la formula di d’Alembert: $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Verifica: sostituendo nell’equazione, il primo membro è uguale al secondo.
- La soluzione: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all’istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

La trasformata di Fourier su tutta la retta – un profilo gaussiano si allarga.

Input: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Risultato

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

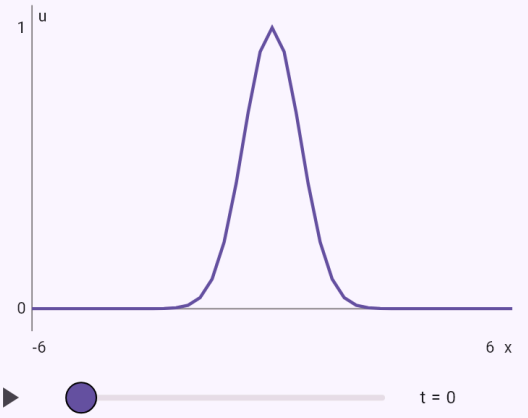
Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx}$
- Condizioni: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Su tutta la retta usiamo la trasformata di Fourier in x – la derivata u_xx diventa una moltiplicazione per −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Per ogni ω resta un'equazione ordinaria nel tempo $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- L'antitrasformata di un prodotto è la convoluzione con il nucleo del calore (una gaussiana che si allarga nel tempo) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- La convoluzione di due gaussiane è di nuovo una gaussiana, solo più larga e più bassa $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Verifica: sostituendo nell'equazione, il primo membro è uguale al secondo.

- La soluzione: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

La trasformata di Laplace – un semispazio riscaldato, la funzione erfc.

Input: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

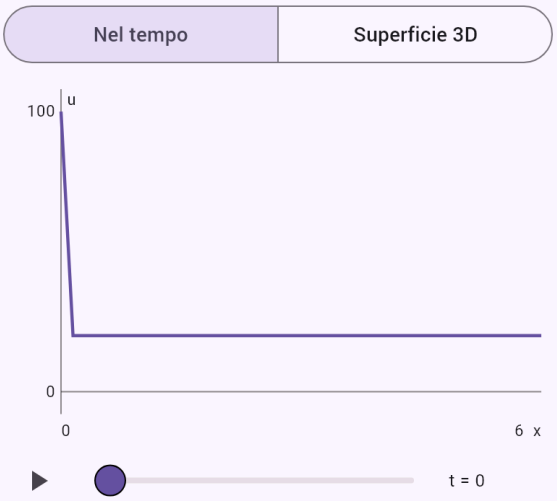
Risultato

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = 4u_{xx}$
- Condizioni: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Su una semiretta usiamo la trasformata di Laplace nel tempo $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – la derivata u_t diventa sU − u(x, 0) e resta un'equazione ordinaria in x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Per x → ∞ U deve restare limitata, l'esponenziale crescente cade: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; la costante dalla condizione al contorno: $U(0,s) = \frac{100}{s} \;\Rightarrow\; A(s) = \frac{80}{s}$
- L'antitrasformata dalla tabella $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- La soluzione: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Lo schema esplicito con r = 0,7 > 1/2 – instabile secondo von Neumann.

Input: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- La griglia: 11 nodi in x, 143 passi temporali fino a t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r è il passo temporale diviso per il quadrato del passo spaziale).
- Lo schema esplicito (in avanti nel tempo, centrato nello spazio) – ogni nuovo valore direttamente da tre vecchi: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- L'analisi di von Neumann: l'errore si scompone in onde e^(iβx), ciascuna moltiplicata in un passo per l'amplificazione G: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. La stabilità richiede $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – qui no, gli errori cresceranno esponenzialmente.
- Il primo livello temporale

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

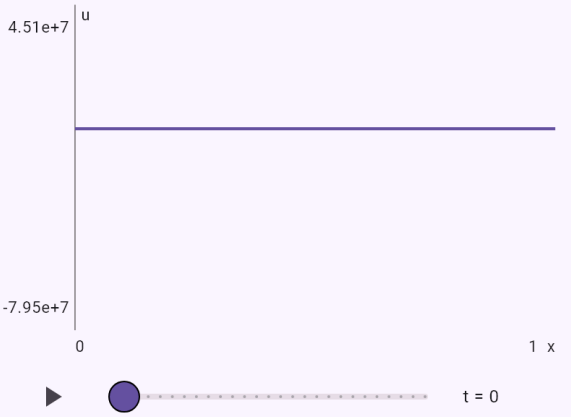
- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- Al livello level.50 i valori sono cresciuti oltre ogni limite – lo schema è instabile, il calcolo è stato interrotto.
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Lo schema di Crank-Nicolson con l'algoritmo di Thomas.

Input: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- La griglia: 11 nodi in x, 10 passi temporali fino a t = 0,1; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r è il passo temporale diviso per il quadrato del passo spaziale).
- Lo schema di Crank-Nicolson – la media di quello esplicito e di quello implicito, del secondo ordine anche nel tempo $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- L'analisi di von Neumann: l'errore si scompone in onde e^(iβx), l'amplificazione in un passo è $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; sempre $|G| \le 1$, lo schema è stabile per qualsiasi passo (incondizionatamente).
- A ogni livello temporale si deve risolvere un sistema tridiagonale a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (i valori al contorno a destra). Il primo livello

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Il sistema con l'algoritmo di Thomas – la passata in avanti e la sostituzione all'indietro $c_i' = \dfrac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \dfrac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

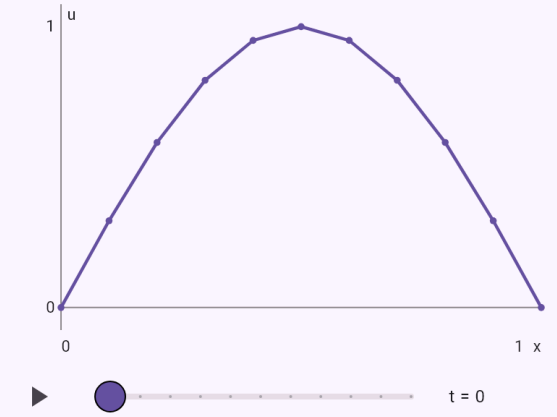
- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,(
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,(
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,(

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (esattamente $0{,}372708$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



Punti: la soluzione numerica nei nodi della griglia; tratteggio: la soluzione esatta. Il cursore sceglie il livello temporale.

Lo schema di Lax-Wendroff per l'equazione del trasporto, la condizione CFL.

Input: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016;`

```
to = 0.4)
```

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- La griglia su $0 \le x \le 1$: 51 nodi, 25 passi temporali fino a t = $0{,}4$; $h = 0{,}02$, $k = 0{,}016$, $\nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ è il numero di Courant.
- La soluzione esatta è trasportata lungo le caratteristiche $x - t = C$ alla velocità a = 1
- Lo schema di Lax-Wendroff – lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, u_tt sostituito da a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- La condizione CFL (il dominio di dipendenza numerico contiene la caratteristica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- L'analisi di von Neumann: l'errore si scompone in onde e^(iβx), ciascuna moltiplicata in un passo per l'amplificazione G. Lo schema è stabile quando |G| ≤ 1 per ogni β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; ciò vale perché $|\nu| \le 1$
- Il primo livello temporale

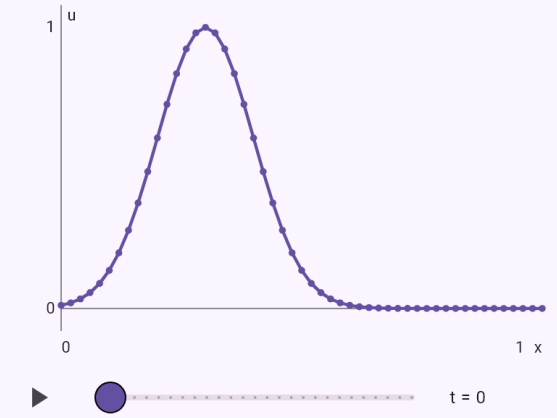
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (esattamente $0{,}135335$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Grafico



Punti: la soluzione numerica nei nodi della griglia; tratteggio: la soluzione esatta. Il cursore sceglie il livello temporale.

Lo schema a cinque punti e SOR con l'ω ottimale – confrontato con Jacobi e Gauss-Seidel.

Input: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Una griglia quadrata: $h = 0{,}1$, 121 nodi, di cui 81 incognite all'interno.
- Lo schema a cinque punti – u_xx + u_yy sostituito da differenze, un'equazione in ogni nodo: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- La sovrarilassamento successivo (SOR) – il passo di Gauss-Seidel «spinto oltre» del fattore ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Il fattore di rilassamento ottimale dal raggio spettrale dell'iterazione di Jacobi $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Le iterazioni da una stima nulla all'interno (nodi scelti e la variazione massima)

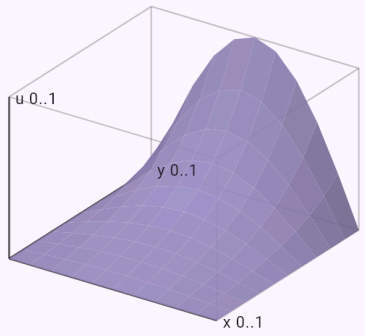
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- L'iterazione si è fermata dopo 20 passi, quando la variazione massima è scesa sotto 10^{-4}
- I metodi sulla stessa griglia con la stessa tolleranza: Jacobi 102 iterazioni, Gauss-Seidel 61, SOR con ω = $1{,}528$ solo 20
- Metodi più rapidi per lo stesso sistema (81 incognite): gradiente coniugato 10 iterazioni, multigrid 5 cicli V. Il numero di cicli V del multigrid quasi non dipende dalla finezza della griglia.
- I valori nei nodi della griglia

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}0028$ (esattamente $0{,}199268$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

Una sorgente di calore che si attenua nel tempo – il principio di Duhamel.

Input: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Risultato

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Passaggi

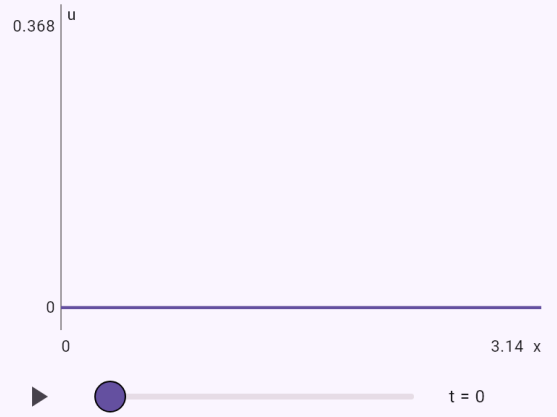
- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Condizioni: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto; sostituendo e dividendo, le variabili si separano – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t)$: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\ \sin(nx)$
- Tutti i coefficienti sono nulli: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Sviluppiamo la sorgente $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ nelle autofunzioni proprio come la condizione iniziale: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, i coefficienti con un integrale.
- La funzione iniziale (al contorno) è già una somma di autofunzioni, quindi solo pochi coefficienti $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x$ non sono nulli: $f_1 = 1$, gli altri sono nulli.
- Il principio di Duhamel: ogni coefficiente della serie soddisfa un'equazione ordinaria lineare con sorgente; la soluzione è il decadimento libero più la convoluzione della sorgente con il decadimento

$$T_n' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- La sorgente ha solo un numero finito di coefficienti non nulli, i loro contributi risultano esatti: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- La soluzione: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una sorgente di calore costante in una sbarra – lo stato stazionario è una parabola.

Input: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Risultato

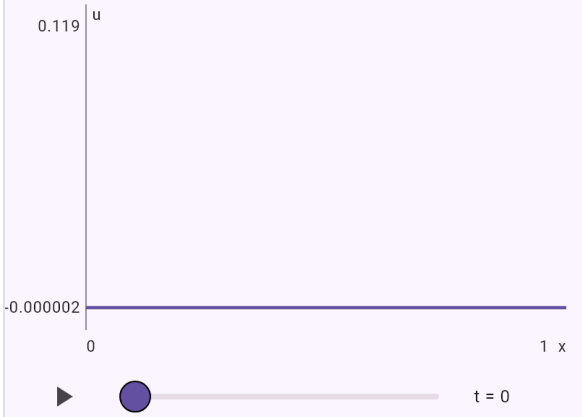
$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx} + 1$
- Condizioni: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Né la sorgente né i valori al contorno dipendono dal tempo. Prima troviamo lo stato stazionario – la soluzione dell'equazione senza la derivata temporale $w'' + 1 = 0$ con le condizioni al contorno: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Cerchiamo $u = w(x) + v(x,t)$; lo scostamento v ha condizioni al contorno nulle e nessuna sorgente.
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto; sostituendo e dividendo, le variabili si separano – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti) $c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \sin(n\pi x)\,dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$
- La soluzione $u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una sbarra isolata con calore entrante da un estremo – la temperatura media cresce linearmente.

Input: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Risultato

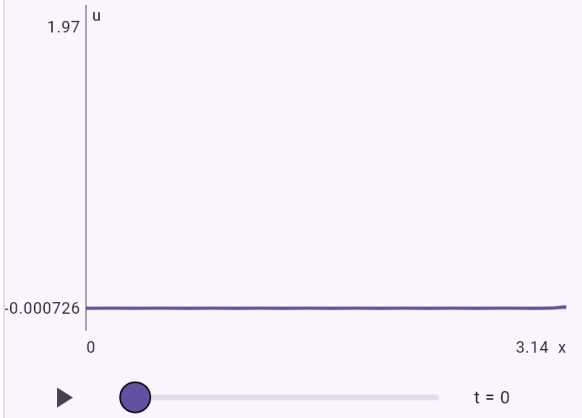
$$u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx}$
- Condizioni: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'equazione è parabolica (come l'equazione del calore): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Entrambi gli estremi sono isolati, ma nella sbarra entra calore (un flusso agli estremi o una sorgente). Non c'è stato stazionario – la temperatura media cresce con velocità $R = \frac{1}{\pi}$. Cerchiamo $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, dove W soddisfa l'equazione senza la derivata temporale: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto; sostituendo e dividendo, le variabili si separano – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X' = 0 a entrambi gli estremi (estremi isolati) ha le soluzioni $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione):
  $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti):
  $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)
  $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- La soluzione
  $u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Una corda scossa all'estremo alla sua frequenza propria – risonanza, l'ampiezza cresce con t.

Input: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Risultato

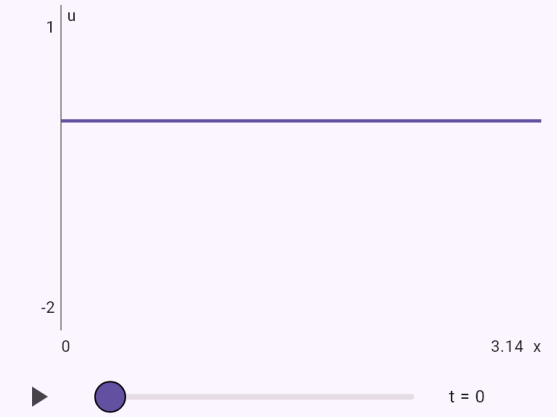
$$u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} = u_{xx}$
- Condizioni:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l'equazione è iperbolica (come l'equazione delle onde): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- I valori al contorno cambiano nel tempo. Scegliamo una funzione $w(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ che soddisfa le condizioni al contorno e cerchiamo $u = w + v$. Lo scostamento v ha condizioni al contorno nulle, ma la sua equazione acquista una sorgente: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x \sin t}{\pi}$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto – onde stazionarie; entrambi i membri sono uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporale per ogni n – oscillazioni con la propria frequenza:
  $T_n'' + n^2 T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$
- L'equazione è lineare – una somma di soluzioni è una soluzione (sovrapposizione):
  $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \sin(nx)$
- Tutti i coefficienti sono nulli: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)
  $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$
- Sviluppiamo la sorgente $F(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ nelle autofunzioni proprio come la condizione iniziale: $F_n(t) = f_n \sin t$, i coefficienti con un integrale.
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti)
  $f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Il principio di Duhamel: ogni coefficiente della serie è un'oscillazione forzata – un oscillatore con la propria frequenza e una forza esterna F_n(t). La soluzione è l'oscillazione libera più la convoluzione della forza con la risposta impulsiva sin(ω_n t)/ω_n
  $T_n'' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(n$
- L'integrale si calcola in generale per ogni n (K_n è il nucleo del passo precedente); dove la formula generale dividerebbe per zero (risonanza), a parte
  $\int_0^t K_n(t-s)\, \sin s\, \mathrm{d}s = \frac{n \sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- La soluzione
  $u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt)\, \sin(nx) + \frac{(\sin}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

L’equazione di Laplace con il lato inferiore isolato (u_y = 0) – cosh invece di sinh.

Input: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Risultato

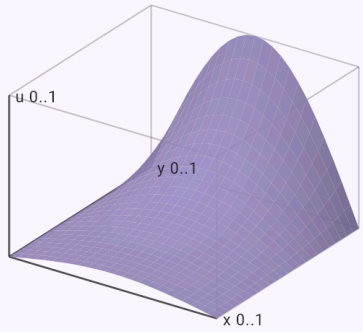
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condizioni: $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, l’equazione è ellittica (come l’equazione di Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Il lato con valori non nulli (gli altri hanno u = 0): $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 a entrambi gli estremi ha soluzioni non nulle solo per $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La seconda equazione Y'' = λY con derivata nulla sul lato opposto (isolato) – da qui cosh –, normalizzata a 1 sul lato dato: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- La funzione iniziale (al contorno) è già una somma di autofunzioni, quindi solo pochi coefficienti $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ non sono nulli: $c_1 = 1$, gli altri sono nulli.

- La soluzione: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

L’equazione di Burgers – le caratteristiche si incrociano e si forma un’onda d’urto.

Input: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

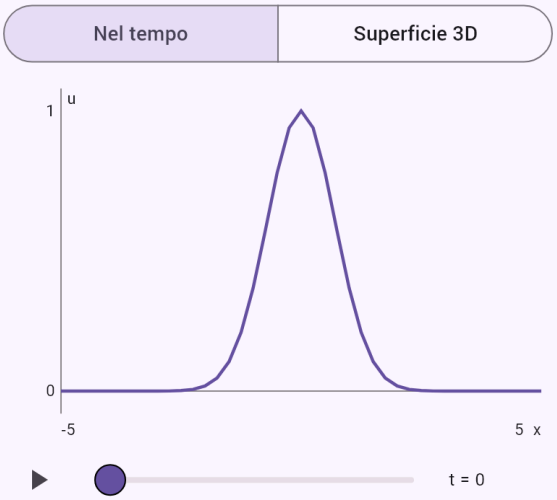
Risultato

$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_t + uu_x = 0$
- Condizioni: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- L’equazione di Burgers è non lineare – la velocità di propagazione è u stessa. Lungo le caratteristiche u è costante, quindi le caratteristiche sono rette $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- La soluzione è data in forma implicita da $u = f(x - ut)$ – per ogni punto cerchiamo l’x_0 la cui caratteristica vi conduce.
- Dove f decresce, la parte più veloce dell’onda raggiunge quella più lenta e le caratteristiche si incrociano. Il primo incrocio avviene all’istante $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ – si forma un’onda d’urto e la soluzione regolare cessa di esistere.
- La soluzione (in forma implicita, finché non si forma un urto): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Grafico



La soluzione u all’istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

L’equazione di Burgers con viscosità – la trasformazione di Cole-Hopf nell’equazione del calore.

Input: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Risultato

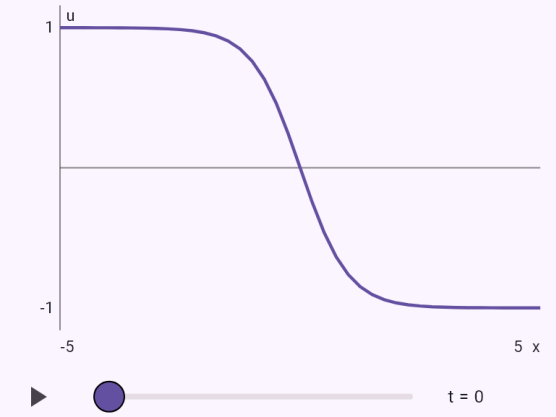
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Condizioni: $u(x,0) = -\tanh x$
- Con viscosità v > 0 la trasformazione di Cole-Hopf linearizza l’equazione: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – l’equazione di Burgers diventa l’equazione del calore.
- La condizione iniziale per φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- L’equazione del calore si risolve con la convoluzione con il nucleo del calore; dopo la sostituzione u è un rapporto di due integrali, calcolati numericamente per il grafico $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t} I}{\int K}$
- L’integrale non ha forma elementare – la soluzione resta una convoluzione, il grafico è calcolato numericamente: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all’istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Lo schema di Godunov – l'urto si muove a velocità 1/2.

Input: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Risultato

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Griglia: 61 nodi, 25 passi temporali; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Un'onda d'urto è gestita dallo schema conservativo di Godunov – il flusso F tra le celle dalla soluzione esatta del problema di Riemann (un salto)

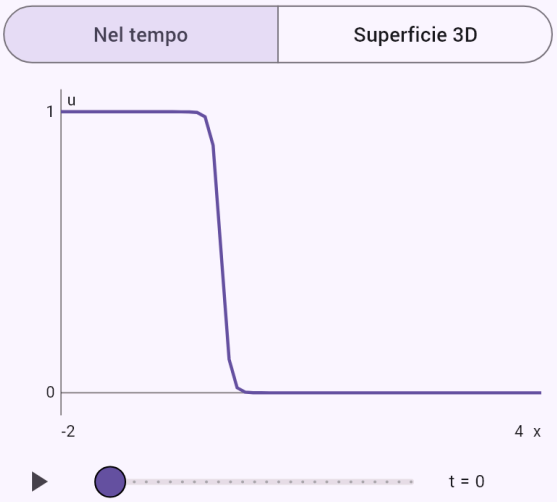
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min \\ u_i \le u \le u_{i+1} \\ \max \\ u_{i+1} \le u \le u_i \end{cases}$$

- La condizione CFL (il dominio di dipendenza numerico contiene la caratteristica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- Il salto da u_L a u_R < u_L viaggia come onda d'urto alla velocità della condizione di Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x = -2$	$x = -1{,}4$	$x = -0{,}8$	$x = -0{,}$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Il risultato nel nodo centrale: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Grafico



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Il calore in una piastra quadrata con ADI – stabile anche per un passo grande.

Input: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h = 0.1;`

k = 0.01; T = 0.1)

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Griglia: 121 nodi, 10 passi temporali (i rapporti tra il passo temporale e i quadrati dei passi spaziali).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- Il metodo implicito a direzioni alternate (ADI) di Peaceman e Rachford: mezzo passo è implicito in x ed esplicito in y, l'altra metà al contrario

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- L'analisi di von Neumann: le due metà del passo insieme hanno l'amplificazione per qualsiasi passo – ADI è incondizionatamente stabile.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- Nella prima metà del passo risolviamo 9 sistemi tridiagonali lungo le righe della griglia, nella seconda 9 lungo le sue colonne – ciascuno con l'algoritmo di Thomas. È molto più economico di un unico grande sistema per tutta la griglia.
- La soluzione a livelli temporali scelti

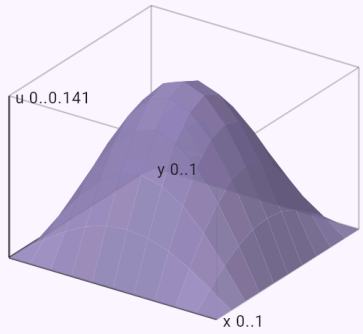
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	$1{,}000000$	$1{,}000000$
$0{,}01$	$0{,}822069$	$0{,}822069$
$0{,}02$	$0{,}675798$	$0{,}675798$
$0{,}03$	$0{,}555553$	$0{,}555553$
$0{,}04$	$0{,}456703$	$0{,}456703$
$0{,}05$	$0{,}375442$	$0{,}375442$
$0{,}06$	$0{,}308639$	$0{,}308639$
$0{,}07$	$0{,}253723$	$0{,}253723$
$0{,}08$	$0{,}208578$	$0{,}208578$
$0{,}09$	$0{,}171465$	$0{,}171465$
$0{,}1$	$0{,}140956$	$0{,}140956$

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello (esattamente $0{,}138911$ al centro).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

L'equazione di Laplace con il gradiente coniugato – confrontato con SOR e multigrid.

Input: cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =

0.125)

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Una griglia quadrata: $h = 0{,}125$, 81 nodi, di cui 49 incognite all'interno.
- Lo schema a cinque punti – u_xx + u_yy sostituito da differenze, un'equazione in ogni nodo: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Il metodo del gradiente coniugato – il sistema $-\Delta_h u = -f$ è simmetrico e definito positivo; ogni passo riduce l'errore lungo una nuova direzione p_k, coniugata alle precedenti $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_i$
- Le iterazioni da una stima nulla all'interno (nodi scelti e la variazione massima)

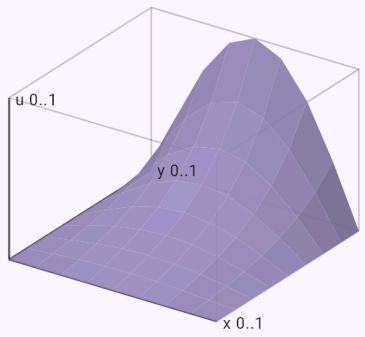
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- L'iterazione si è fermata dopo 8 passi, quando la variazione massima è scesa sotto 10^{-4}
- I metodi sulla stessa griglia con la stessa tolleranza: Jacobi 71 iterazioni, Gauss-Seidel 42, SOR con ω = $1{,}446$ solo 16
- Metodi più rapidi per lo stesso sistema (49 incognite): gradiente coniugato 8 iterazioni, multigrid 5 cicli V. Il numero di cicli V del multigrid quasi non dipende dalla finezza della griglia.
- I valori nei nodi della griglia

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00432$ (esattamente $0{,}199268$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

L’equazione di Poisson con il multigrid – pochi cicli V su una griglia fine.

Input: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Una griglia quadrata: $h = 0{,}0625$, 289 nodi, di cui 225 incognite all’interno.
- Lo schema a cinque punti – u_xx + u_yy sostituito da differenze, un’equazione in ogni nodo

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Il multigrid (un ciclo V): l’iterazione di Gauss-Seidel smorza rapidamente solo la parte dell’errore che varia velocemente (S^2 – due passate). Il resto liscio r va sulla griglia più grossolana 2h, lì viene corretto (di nuovo con il multigrid) e la correzione è interpolata indietro

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Le iterazioni da una stima nulla all’interno (nodi scelti e la variazione massima)

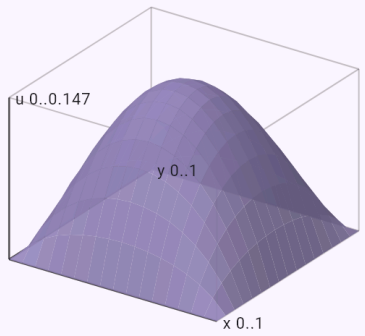
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- L’iterazione si è fermata dopo 4 passi, quando la variazione massima è scesa sotto 10^{-4}
- I metodi sulla stessa griglia con la stessa tolleranza: Jacobi 179 iterazioni, Gauss-Seidel 108, SOR con ω = $1{,}674$ solo 25
- Metodi più rapidi per lo stesso sistema (225 incognite): gradiente coniugato 15 iterazioni, multigrid 4 cicli V. Il numero di cicli V del multigrid quasi non dipende dalla finezza della griglia.
- I valori nei nodi della griglia

$y\backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- L’errore massimo rispetto alla soluzione esatta all’ultimo livello: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (esattamente $0{,}147342$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

Il metodo degli elementi finiti con triangoli – la matrice di rigidezza e lo stesso sistema dello schema a

cinque punti.

Input: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Risultato

$$u(0{,}5,\,0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Una griglia quadrata: $h = 0{,}25$, 25 nodi, di cui 9 incognite all'interno.
- Il metodo degli elementi finiti: l'equazione si moltiplica per una funzione test v e si integra per parti (la formulazione debole); la soluzione si cerca come combinazione di funzioni «cappello» φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- La mesh: ogni cella è divisa da una diagonale in due triangoli rettangoli – 32 triangoli, 25 nodi, di cui 9 incogniti.
- La matrice di rigidezza di un triangolo (i gradienti delle funzioni lineari sono costanti su di esso)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\,\nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0{,} \\ -0{,} \end{pmatrix}$$

- Sommando i contributi dei sei triangoli intorno a un nodo interno si ottiene la sua equazione – su una griglia regolare è lo schema a cinque punti moltiplicato per h_x·h_y

$$4{,}0000\,u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + u$$

- Il metodo del gradiente coniugato – il sistema $-\Delta_h u = -f$ è simmetrico e definito positivo; ogni passo riduce l'errore lungo una nuova direzione p_k, coniugata alle precedenti

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$$

- Le iterazioni da una stima nulla all'interno (nodi scelti e la variazione massima)

k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

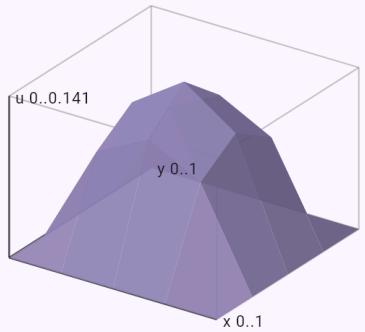
- L'iterazione si è fermata dopo 4 passi, quando la variazione massima è scesa sotto 10^{-4}

- I metodi sulla stessa griglia con la stessa tolleranza: Jacobi 19 iterazioni, Gauss-Seidel 11, SOR con ω = $1{,}172$ solo 8
- Metodi più rapidi per lo stesso sistema (9 incognite): gradiente coniugato 4 iterazioni, multigrid 3 cicli V. Il numero di cicli V del multigrid quasi non dipende dalla finezza della griglia.
- I valori nei nodi della griglia

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (esattamente $0{,}147342$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5,\,0{,}5) \approx 0{,}140625$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

L’equazione di Poisson su un quadrato – una serie di Fourier doppia, confronta con lo schema sor.

Input: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Risultato

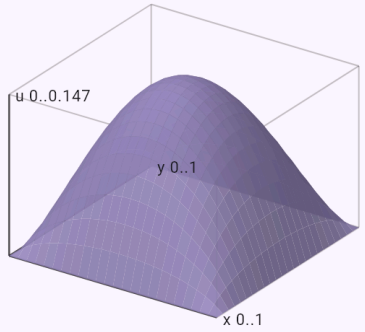
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -}{mn\pi^4\left(m^2 +\right.}$$

Passaggi

- Risolviamo l’equazione alle derivate parziali $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Condizioni: $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, l’equazione è ellittica (come l’equazione di Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- La parte con la sorgente è una serie doppia delle autofunzioni di entrambe le direzioni – ogni prodotto X_m·Y_n soddisfa le condizioni sui lati e il laplaciano lo moltiplica soltanto per un numero: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, dove $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Sviluppiamo la sorgente nella stessa serie doppia. Sostituendo in Δv = f e confrontando i coefficienti si ottiene $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, quindi $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$ $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- La soluzione

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

Derivate su tutti e quattro i lati – la condizione di risolubilità e una soluzione a meno di una costante.

Input: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

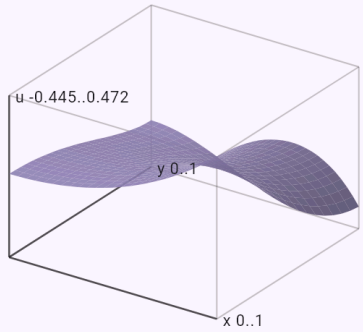
Risultato

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condizioni $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, l'equazione è ellittica (come l'equazione di Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Su tutti e quattro i lati è data la derivata (un flusso). Per il teorema di Gauss il flusso totale attraverso il bordo deve corrispondere alla sorgente interna ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – la condizione di risolubilità. È soddisfatta; una soluzione esiste, ma solo a meno di una costante additiva. Il flusso attraverso il bordo $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Un polinomio quadratico P assume i flussi medi dei lati; il resto v ha su ogni lato un flusso a media nulla, quindi si somma lato per lato come prima: $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; i flussi medi $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Il lato con valori non nulli (gli altri hanno u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Separazione delle variabili: cerchiamo un prodotto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Il problema agli autovalori $X'' + \lambda X = 0$ con X' = 0 a entrambi gli estremi (estremi isolati) ha le soluzioni $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Sul lato dato è prescritta una derivata e il lato opposto è isolato: cosh, normalizzato in modo che la sua derivata sul lato dato sia 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- La funzione iniziale (al contorno) è già una somma di autofunzioni, quindi solo pochi coefficienti $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ non sono nulli: $c_1 = 1$, gli altri sono nulli.
- La soluzione (C è una costante arbitraria – con le derivate su tutti i lati u è determinata solo a meno di una traslazione) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

Coefficienti variabili – un problema di Sturm–Liouville con il peso 1/x, autofunzioni sin(n ln x).

Input: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Risultato

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

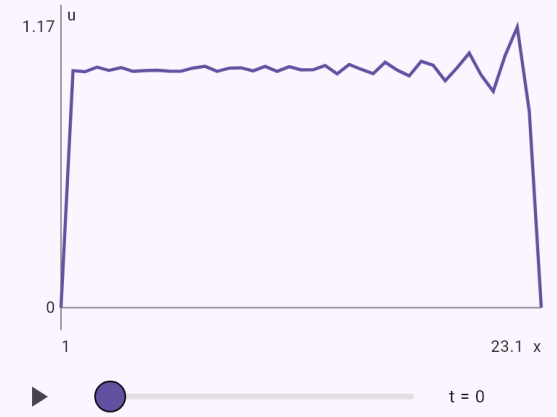
Passaggi

- Risolviamo l'equazione alle derivate parziali $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Condizioni: $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Separazione delle variabili per un'equazione a coefficienti variabili – entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Moltiplicando l'equazione di X per una funzione opportuna si ottiene un problema di Sturm–Liouville $(xX')' + \lambda \frac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ con p = x e il peso w = $\frac{1}{x}$. Le sue autofunzioni sono ortogonali con il peso w.
- L'equazione di X è di Eulero, proviamo X = x^r: $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0$. Una soluzione non nulla con X = 0 a entrambi gli estremi esiste solo per radici complesse: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Le condizioni agli estremi danno $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- L'ortogonalità delle autofunzioni con il peso w: $\int_1^{e^\pi} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; la loro norma $\int_1^{e^\pi} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- La parte temporale per ogni n – un decadimento esponenziale, le frequenze più alte smorzate più rapidamente: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$

- I coefficienti della funzione iniziale f sono le sue proiezioni con il peso w: $c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Dopo una sostituzione diventano i coefficienti di una normale serie di seni di $\xi = \ln x$: 1
- I coefficienti dalla funzione iniziale (al contorno) tramite l'ortogonalità delle autofunzioni (integrazione per parti) $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- La soluzione $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



La soluzione u all'istante t scelto con il cursore; il pulsante la riproduce.

Lo schema MUSCL con un limitatore – confronta il suo errore con gli schemi di Lax–Wendroff e Lax–Friedrichs.

Input: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to =`

0.4)

Risultato

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- La griglia su $0 \le x \le 1$: 51 nodi, 25 passi temporali fino a t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ è il numero di Courant.
- La soluzione esatta è trasportata lungo le caratteristiche $x - t = C$ alla velocità a = 1
- Lo schema MUSCL – un profilo lineare in ogni cella con la pendenza σ_i limitata da un limitatore; il flusso viene dalla cella a monte spostata di mezzo passo. Secondo ordine dove la soluzione è regolare, nessuna oscillazione ai salti

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\nu}{2}$$

- La pendenza in una cella è limitata da minmod – zero in un estremo, altrimenti la minore delle due differenze unilaterali

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- La condizione CFL (il dominio di dipendenza numerico contiene la caratteristica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Uno schema con limitatore è non lineare; invece dell'analisi di von Neumann: non aumenta la variazione totale (TVD – nessuna nuova oscillazione): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, purché $|\nu| \le 1$
- Il primo livello temporale

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

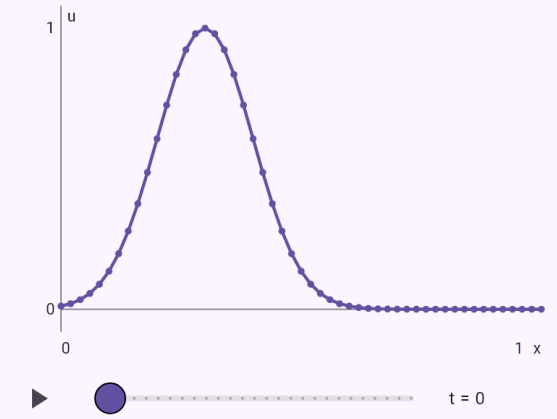
- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- L'errore massimo rispetto alla soluzione esatta all'ultimo livello: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0326$ (esattamente $0{,}135335$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



Punti: la soluzione numerica nei nodi della griglia; tratteggio: la soluzione esatta. Il cursore sceglie il livello temporale.

L’equazione di Burgers con viscosità con lo schema MUSCL – confrontata con la trasformazione di Cole–Hopf.

Input: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Risultato

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx},\ u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Griglia: 41 nodi, 10 passi temporali; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Lo schema MUSCL per l’equazione di Burgers: le pendenze limitate σ_i (limitatore) danno i valori ai bordi delle celle, il flusso tra di essi viene dalla soluzione di Godunov del salto e il metodo di Heun avanza nel tempo (due stadi)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- La pendenza in una cella è limitata da minmod – zero in un estremo, altrimenti la minore delle due differenze unilaterali

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\ u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

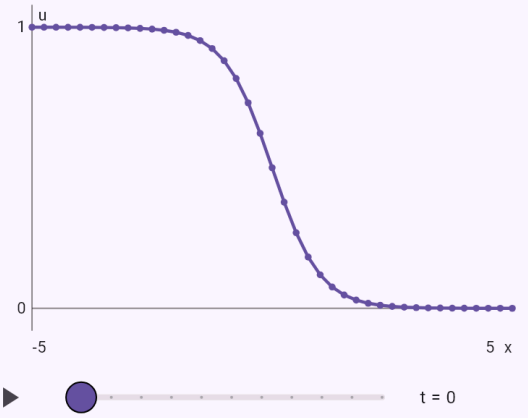
- La condizione CFL (il dominio di dipendenza numerico contiene la caratteristica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Il termine viscoso ν·u_xx si aggiunge con una differenza centrale: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. Il passo esplicito è stabile perché $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- Il salto da u_L a u_R < u_L viaggia come onda d’urto alla velocità della condizione di Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- La soluzione a livelli temporali scelti

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- L’errore massimo rispetto alla soluzione esatta all’ultimo livello: $\max_i \left|u(x_i,1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}0136$ (esattamente $0{,}811680$ al centro).
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Grafico

Nel tempo | Superficie 3D



Punti: la soluzione numerica nei nodi della griglia; tratteggio: la soluzione esatta. Il cursore sceglie il livello temporale.

Elementi finiti su un dominio a forma di L – triangolazione con il taglio delle orecchie, la superficie 3D

solo sopra il dominio.

Input: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Risultato

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Passaggi

- Risolto numericamente su una griglia: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \ \ (\partial\Omega)$
- Il dominio è un poligono con i vertici $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, la sua area $|\Omega| = 3{,}0000$
- Il metodo degli elementi finiti: l'equazione si moltiplica per una funzione test v e si integra per parti (la formulazione debole); la soluzione si cerca come combinazione di funzioni «cappello» φ_j

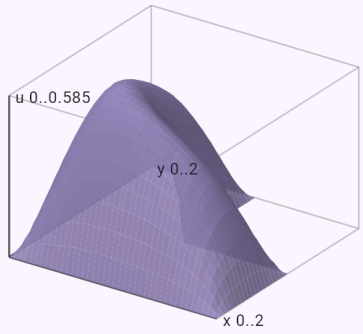
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangolazione: tagliando le «orecchie» (un vertice convesso il cui triangolo non contiene altri vertici) si ottengono 4 triangoli; $4\times$ ognuno è diviso dai punti medi dei lati in quattro − 1024 triangoli, 561 nodi, di cui 465 interni (incogniti), il lato più lungo $h = 0{,}1398$
- La matrice di rigidezza di un triangolo (i gradienti delle funzioni lineari sono costanti su di esso)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- I valori nei nodi di bordo sono dati, i loro contributi passano al secondo membro: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Il sistema sparso K·U = F per 465 incognite si risolve con il metodo del gradiente coniugato in 128 iterazioni. Il valore massimo: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- Il risultato nel nodo centrale: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Grafico



La soluzione u come superficie sopra il dominio. Ruotalo trascinando un dito.

Limiti noti

- Analiticamente solo equazioni lineari con una funzione incognita u di due variabili, e l'equazione di Burgers; altre equazioni non lineari e sistemi no.
- Per separazione delle variabili le equazioni del calore e delle onde su un intervallo; una sorgente solo come somma di prodotti p(x)·q(t), per l'equazione di Poisson al massimo tre prodotti p(x)·q(y). Coefficienti variabili solo di tipo Eulero αx²u_xx + βxu_x con valori nulli agli estremi.
- La trasformata di Fourier in forma chiusa per una gaussiana, un polinomio e funzioni con f″ = λf; altrimenti resta la convoluzione e il grafico è calcolato numericamente.
- Numericamente in 2D le equazioni del calore e di Laplace su un rettangolo con una griglia regolare; su un poligono solo il metodo degli elementi finiti con triangoli lineari e un valore al contorno (non una derivata), senza buchi e con al massimo 40 vertici.

39. Ricorrenze e funzioni generatrici

L’app risolve ricorrenze lineari a coefficienti costanti di qualsiasi ordine con l’equazione caratteristica – anche radici multiple e complesse (la forma complessa della soluzione e la sua conversione in quella reale con la formula di De Moivre) – e con un termine noto della forma $P(n)\cdot q^n$ (anche cos nφ, sin nφ, risonanza e una somma di termini noti). Le condizioni iniziali determinano le costanti; come verifica, l’app calcola altri termini dalla ricorrenza e li confronta con la formula.

Il chip «Metodo» offre anche la funzione generatrice ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, fratti semplici, serie geometrica), le potenze di matrice (diagonalizzazione) o, per il primo ordine, la sommatoria. Una ricorrenza del primo ordine con un coefficiente variabile ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) si risolve con un prodotto (fattoriali), le ricorrenze non lineari riconducibili con la sostituzione $b_n = 1/a_n$ o $b_n = \ln a_n$. Un sistema di due ricorrenze si risolve eliminando una successione o con la matrice, una ricorrenza divide et impera $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ con $n = b^k$ – con la stima del teorema dell’esperto.

Con l’operazione «Funzione generatrice» l’app trova la funzione generatrice di una successione data da una formula ($n^2 + 2^n$) o dai primi termini (1, 0, 1, 0, …), e al contrario la formula per a_n da una funzione $A(x)$. Il numero di soluzioni intere non negative di $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (anche con limiti o coefficienti – pagare con monete) è il coefficiente di una funzione generatrice.

Il grafico mostra i termini della successione come punti (entrambe le successioni di un sistema).

Una differenza $\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n)$ («Δ(n^3)») e l’equazione alle differenze Δy_n = n come ricorrenza y_{n+1} − y_n = n. Una progressione aritmetica o geometrica da due valori dati («a_3 = 7, a_7 = 19», «geometric sequence a_2 = 6, a_5 = 162») – a_1, d o q, il termine n-esimo e i termini e le somme richiesti (s_{10}, a_{20} = ?).

Una successione data dal suo termine n-esimo (a_n = (n+1)/n) viene studiata: i primi cinque termini, la monotonia dalla differenza di termini vicini, la limitatezza e il limite.

Come inserirlo

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Parentesi, le condizioni dopo una virgola.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Pedici (anche da una foto). Senza condizioni: la soluzione generale con costanti C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	L’indice può scendere (a_{n-1}, a_{n-2}); un valore si può dare a più termini.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Un sistema – le equazioni su righe, le condizioni nell'ultima.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Divide et impera – un termine in n/b.
`n^2 + 2^n`	La formula di una successione con l'operazione «Funzione generatrice» (anche a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	I primi termini separati da virgole.
`1/(1 - x - x^2)`	Una funzione generatrice in x (anche A(x) = …) – la formula per a_n.
`number of solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Il numero di soluzioni intere non negative con limiti.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Una differenza e un'equazione alle differenze.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Una successione da termini dati – aritmetica senza parola, geometrica con «geometric».

Esempi

Due radici reali distinte, la verifica con altri termini.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Risultato

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

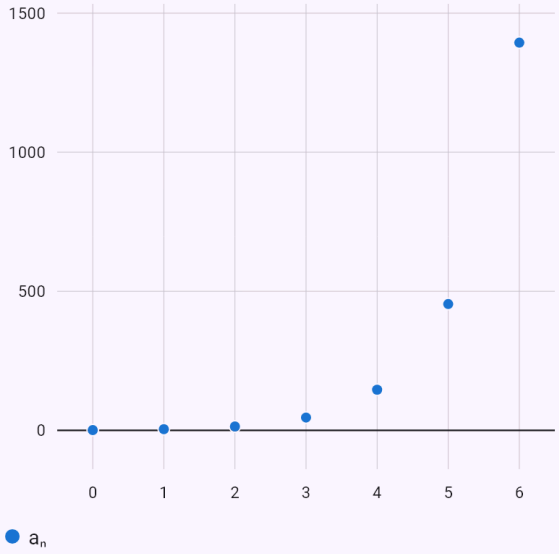
Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Cerchiamo soluzioni $a_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Il discriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; le radici: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- L'integrale generale: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$2C_1 + 3C_2 = 4$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

La successione di Fibonacci – la formula di Binet.

Input: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Risultato

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

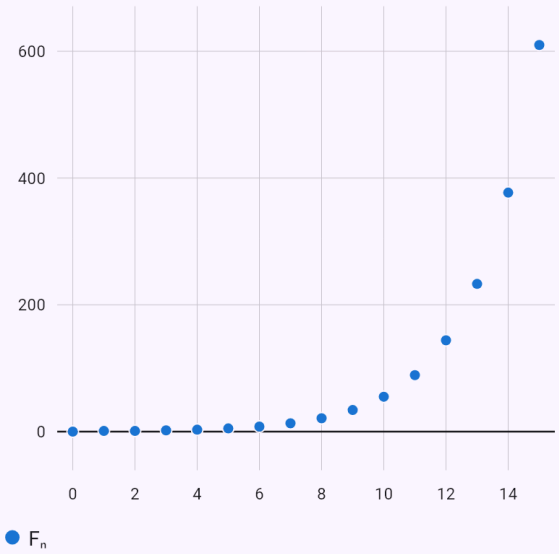
Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Cerchiamo soluzioni $F_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^{n-2}, danno l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Il discriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; le radici: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- L'integrale generale $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Verifica: la ricorrenza dà $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Radici complesse 1 ± i – la forma complessa e la formula di De Moivre.

Input: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

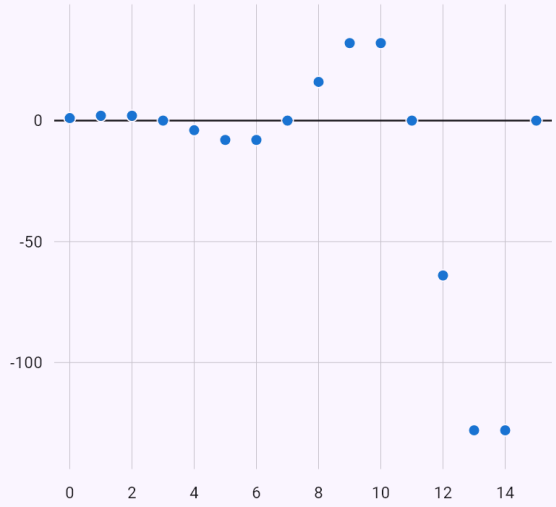
Risultato

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Cerchiamo soluzioni $a_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Il discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; le radici: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Scriviamo le radici complesse $1 \pm i$ in forma trigonometrica: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, quindi $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Per la formula di De Moivre $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- La soluzione generale in forma complessa (costanti complesse): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Sommando i termini coniugati, con nuove costanti reali otteniamo la forma reale
  $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui
  $C_1 = 1,\ C_2 = 1$
  $C_1 = 1$
  $C_1 + C_2 = 2$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date
  $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Il termine noto n, una radice doppia 2.

Input: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Risultato

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Prima risolviamo la ricorrenza omogenea (secondo membro 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Cerchiamo soluzioni $a_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Il discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; le radici: $\lambda_{1,2} = 2$
- La soluzione generale della ricorrenza omogenea: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Il secondo membro n ha una forma speciale; il numero 1 non è radice dell'equazione caratteristica, quindi cerchiamo una soluzione particolare $a_n^{(p)} = An + B$
- Sostituita nella ricorrenza, con i termini raccolti: $An + B - 2A = n$
- Confrontiamo i coefficienti dei termini simili nei due membri da cui $A = 1,\ B = 2$

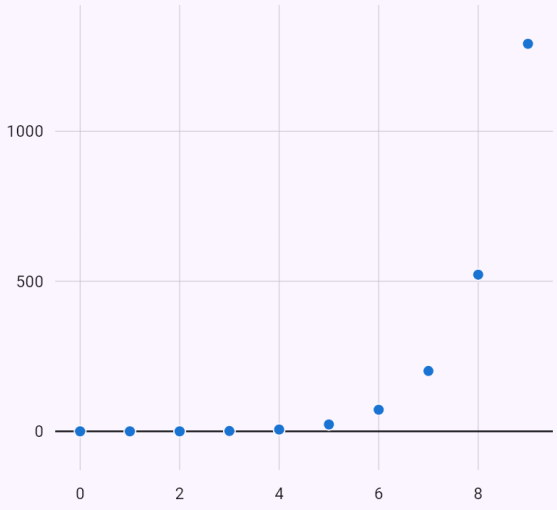
$$A = 1$$
$$B - 2A = 0$$

- Una soluzione particolare: $a_n^{(p)} = n + 2$
- L'integrale generale: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + 2 = 0$$
$$2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

La stessa ricorrenza con la funzione generatrice.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Funzione generatrice

Risultato

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Introduciamo la funzione generatrice $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- La ricorrenza moltiplicata per x^{n+2} e sommata su tutti gli n ≥ 0

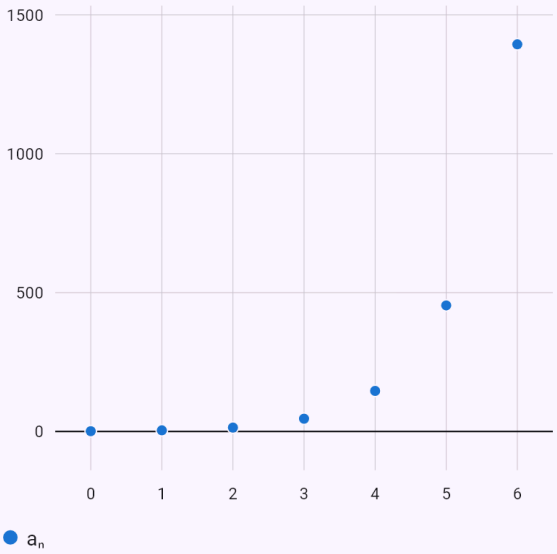
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Le somme espresse mediante la funzione generatrice e i valori iniziali: $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- La funzione generatrice ricavata, il suo denominatore scomposto: $A(x) = \dfrac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Fratti semplici: $A(x) = -\dfrac{1}{1 - 2x} + \dfrac{2}{1 - 3x}$
- Le frazioni come serie geometriche

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Il coefficiente di x^n è il termine: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

La stessa ricorrenza con le potenze di matrice.

Input: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Potenze di matrice

Risultato

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 2 a coefficienti costanti: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- La ricorrenza in forma matriciale cioè $v_{n+1} = M \cdot v_n$ con

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sostituendo più e più volte, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovalori della matrice: $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, quindi $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Gli autovettori – le soluzioni di $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice diagonalizzata, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

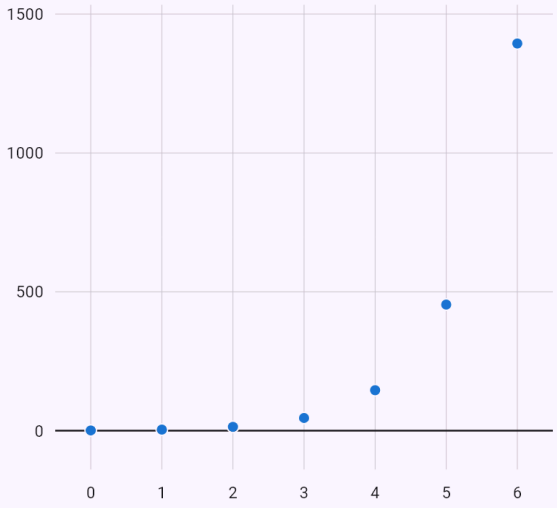
- La potenza della matrice i coefficienti quindi $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Una ricorrenza del primo ordine per sommatoria.

Input: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Sommatoria

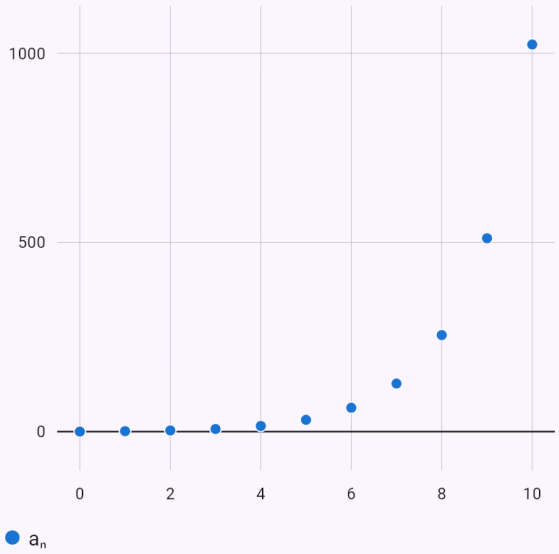
Risultato

$$a_n = 2^n - 1$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 1 a coefficienti costanti: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Sostituendo la ricorrenza in se stessa più e più volte: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \ldots$, in generale $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- La somma calcolata: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $a_n = 2^n - 1$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Un coefficiente variabile – il prodotto dà un fattoriale.

Input: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Risultato

$$a_n = n!$$

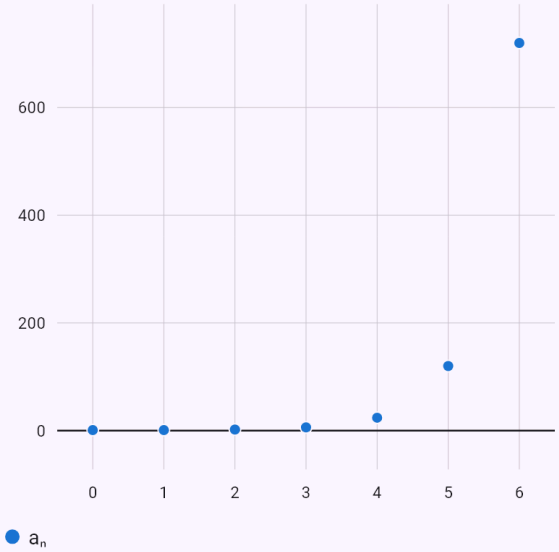
Passaggi

- Una ricorrenza lineare del primo ordine a coefficiente variabile: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Sostituendo la ricorrenza in se stessa più e più volte – il termine è un prodotto

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- Il prodotto semplificato (i fattoriali si semplificano): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $a_n = n!$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – gli stessi valori della formula.

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Una ricorrenza non lineare – la sostituzione $b_n = 1/a_n$.

Input: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

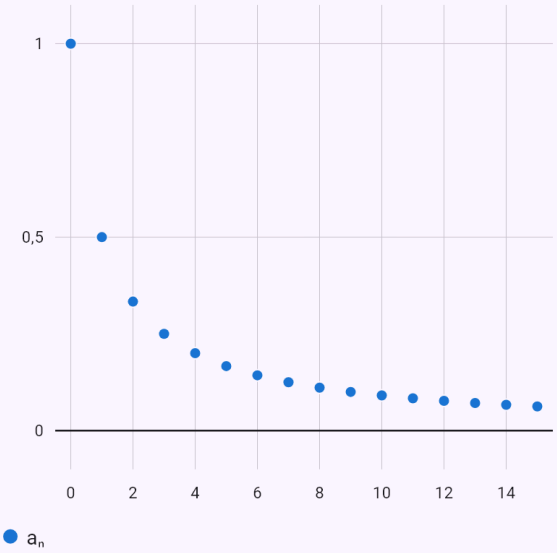
Risultato

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Passaggi

- Una ricorrenza non lineare – i reciproci dei termini la rendono lineare: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- I reciproci di entrambi i membri: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; la sostituzione $b_n = \frac{1}{a_n}$ rende quindi la ricorrenza lineare: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Le condizioni iniziali per la nuova successione: $b_0 = 1$
- Prima risolviamo la ricorrenza omogenea (secondo membro 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Cerchiamo soluzioni $b_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda - 1 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_1 = 1$
- La soluzione generale della ricorrenza omogenea: $b_n^{(h)} = C_1$
- Il secondo membro 1 ha una forma speciale; il numero 1 è radice dell'equazione caratteristica (molteplicità 1), quindi la forma si moltiplica per n: $b_n^{(p)} = An$
- Sostituita nella ricorrenza, con i termini raccolti: $A = 1$
- Una soluzione particolare: $b_n^{(p)} = n$
- L'integrale generale: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $b_n = 1 + n$
- Verifica: la ricorrenza dà $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – gli stessi valori della formula.
- Torniamo alla successione originale: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Un sistema di due ricorrenze eliminando la successione b_n.

Input: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Risultato

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

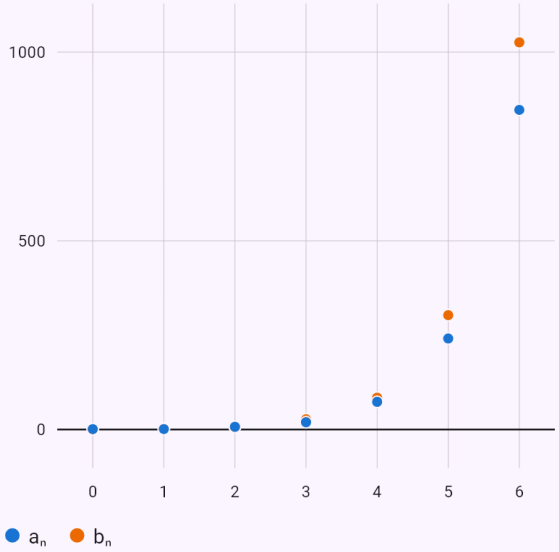
Passaggi

- Un sistema di due ricorrenze lineari
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$
- Dalla prima equazione $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, quindi $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; inserite nella seconda danno una ricorrenza per una sola successione:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$
- La seconda condizione iniziale dalla prima equazione:
  $a_1 = 1 + 0 = 1$
- Cerchiamo soluzioni $a_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$
- Il discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; le radici:
  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$
- L'integrale generale:
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$

- La soluzione che soddisfa le condizioni date:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$
- Verifica: la ricorrenza dà $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – gli stessi valori della formula.
- L'altra successione dall'espressione
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Divide et impera (merge sort) – n = 2ᵏ e il teorema dell'esperto.

Input: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Risultato

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Condizioni: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Passaggi

- Una ricorrenza "divide et impera": $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Per n potenza della base: la sostituzione $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ dà una ricorrenza lineare del primo ordine: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Le condizioni iniziali per la nuova successione: $S_0 = 1$
- Prima risolviamo la ricorrenza omogenea (secondo membro 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Cerchiamo soluzioni $S_k = \lambda^k$; sostituite e divise per λ^k, danno l'equazione caratteristica: $\lambda - 2 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_1 = 2$
- La soluzione generale della ricorrenza omogenea: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Il secondo membro 2^{k+1} ha una forma speciale; il numero 2 è radice dell'equazione caratteristica (molteplicità 1), quindi la forma si moltiplica per k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Sostituita nella ricorrenza, divisa per 2^k, con i termini raccolti: $2A = 2$
- Da cui $A = 1$
- Una soluzione particolare: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- L'integrale generale: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Sostituiamo le condizioni nell'integrale generale da cui
  $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- La soluzione che soddisfa le condizioni date: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Verifica: la ricorrenza dà $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – gli stessi valori della formula.
- Torniamo a n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- Il teorema dell'esperto (master theorem; a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, quindi T(n) = $\Theta(n \log n)$

La funzione generatrice della successione n² + 2ⁿ.

Input: `n^2 + 2^n` Funzione generatrice

Risultato

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Passaggi

- Introduciamo la funzione generatrice $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- La serie separata per linearità: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Una serie nota: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Una serie nota: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Moltiplicare i termini per n significa derivare e moltiplicare per x
  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Moltiplicare i termini per n significa derivare e moltiplicare per x
  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- La funzione generatrice: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Verifica – lo sviluppo inizia con i termini della successione: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

La formula per a_n da una funzione generatrice – fratti semplici con radici irrazionali.

Input: `1/(1 - x - x^2)` Funzione generatrice

Risultato

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Passaggi

- La funzione generatrice ricavata, il suo denominatore scomposto

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Fratti semplici

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Le frazioni come serie geometriche

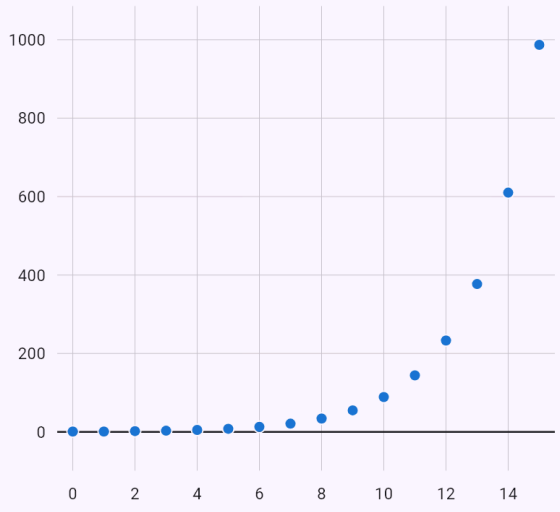
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- Il coefficiente di x^n è il termine

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Verifica – lo sviluppo inizia con i termini della successione: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Grafico



I punti sono i termini calcolati dalla formula – la ricorrenza stessa dà gli stessi valori.

Il numero di soluzioni di $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ con $x_1 \le 3$.

Input: `number of solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Risultato

$$38$$

Passaggi

- L'incognita x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ contribuisce con la serie $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- L'incognita x_2 $(x_2 \ge 0)$ contribuisce con la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- L'incognita x_3 $(x_3 \ge 0)$ contribuisce con la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- La funzione generatrice è il loro prodotto – il coefficiente di x^N conta le soluzioni: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- Il numero di soluzioni è il coefficiente di x^{10}: 38

La differenza di una funzione.

Input: `Δ(n^3)`

Risultato

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Passaggi

- La differenza – l'incremento della funzione quando n cresce di 1

  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Un'equazione alle differenze come ricorrenza.

Input: `\Delta y_n = n`

Risultato

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Passaggi

- Una ricorrenza lineare di ordine 1 a coefficienti costanti: $y_{n+1} - y_n = n$
- Prima risolviamo la ricorrenza omogenea (secondo membro 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Cerchiamo soluzioni $y_n = \lambda^n$; sostituite e divise per λ^n, danno l'equazione caratteristica: $\lambda - 1 = 0$
- Le radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_1 = 1$
- La soluzione generale della ricorrenza omogenea: $y_n^{(h)} = C_1$
- Il secondo membro n ha una forma speciale; il numero 1 è radice dell'equazione caratteristica (molteplicità 1), quindi la forma si moltiplica per n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Sostituita nella ricorrenza, con i termini raccolti:

  $2An + A + B = n$
- Confrontiamo i coefficienti dei termini simili nei due membri da cui $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $2A = 1$

  $A + B = 0$
- Una soluzione particolare: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- L'integrale generale: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Una progressione aritmetica da due termini e la somma di dieci termini.

Input: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Risultato

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Passaggi

- Una progressione aritmetica: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. I valori dati formano un sistema
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- La soluzione del sistema: $a_1 = 1,\ d = 3$
- Il termine n-esimo: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- I valori richiesti: $s_{10} = 145$

Una progressione geometrica da due termini.

Input: `geometric sequence a_2 = 6, a_5 = 162`

Risultato

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Passaggi

- Una progressione geometrica: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. I valori dati formano un sistema
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- La soluzione del sistema: $a_1 = 2,\ q = 3$
- Il termine n-esimo: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Le proprietà di una successione data da una formula.

Input: `a_n = (n+1)/n`

Risultato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Passaggi

- I primi cinque termini
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- La differenza di termini consecutivi
  $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ è negativa per ogni $n \geq 1$ – la successione è decrescente.
- Il limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – la successione converge.
- La successione è limitata: $1 < a_n \leq 2$

Limiti noti

- Non ancora: ricorrenze lineari di ordine superiore a coefficienti variabili, sistemi di tre o più ricorrenze, divide et impera con più termini (T(n/2) e T(n/3)) e ricorrenze non lineari che queste sostituzioni non rendono lineari.
- Una successione da termini dati richiede esattamente due valori (termini, somme, d o q).

40. Metodi numerici

I metodi numerici sono nella schermata iniziale nella sezione «Applicazioni», l'ambito Metodi numerici: radici di equazioni (bisezione, metodo di Newton, delle secanti, regula falsi, iterazione di punto fisso), integrali numerici (i metodi dei trapezi, di Simpson e di Romberg), derivate numeriche con rapporti incrementali, equazioni differenziali (i metodi di Eulero, di Heun e di Runge–Kutta), sistemi lineari (i metodi di Jacobi e di Gauss–Seidel, la decomposizione LU), interpolazione (il polinomio di Lagrange e di Newton, una spline cubica) e minimi quadrati. Un integrale e una derivata si possono calcolare anche da una tabella di valori misurati.

Equazioni differenziali anche con metodi multistep – Adams–Bashforth e il predittore-correttore di Adams–Bashforth–Moulton (avviati con Runge–Kutta) –, il metodo adattivo RK45 (Dormand–Prince, una tabella dei passi accettati e rifiutati secondo la stima dell'errore, la notazione tol=…) e metodi impliciti per equazioni stiff: il metodo di Eulero implicito e la regola dei trapezi (Crank–Nicolson) con il metodo di Newton a ogni passo. Per un'equazione con $\partial f/\partial y < 0$ i passaggi mostrano la stabilità del metodo: $h\lambda$ e l'amplificazione $|R(h\lambda)|$; se supera 1, un metodo esplicito diverge e il calcolo lo dice.

Problemi ai limiti $y'' = f(x, y, y')$ con le condizioni $y(a)$, $y(b)$: con il metodo di shooting (la pendenza iniziale trovata con il metodo delle secanti, ogni tiro risolto con Runge–Kutta) e con le differenze finite (un'equazione lineare come sistema tridiagonale risolto con l'algoritmo di Thomas con tabelle della passata in avanti e della sostituzione all'indietro); dove il risolutore di equazioni differenziali trova la soluzione esatta, viene confrontata nei nodi. L'equazione del moto $x'' = a(x)$ si risolve con il metodo simplettico di Verlet accanto a RK4, mostrando come evolve l'errore sull'energia totale per ciascuno.

I passaggi mostrano la formula del metodo, la tabella delle iterazioni o dei valori nei nodi, la condizione di arresto (la tolleranza predefinita $\varepsilon = 10^{-4}$, al massimo 50 iterazioni) e la stima dell'errore; dove il valore esatto è noto, il risultato viene confrontato con esso. Si verificano le condizioni di convergenza: un cambio di segno sull'intervallo, la condizione di Fourier per l'avvio di Newton, $|g'(x)| < 1$ per l'iterazione di punto fisso, la dominanza diagonale e il raggio spettrale per i sistemi. Il grafico mostra le tangenti o le secanti, i trapezi o le parabole, la soluzione numerica di un'equazione differenziale contro quella esatta, e il polinomio adattato con i punti.

Su un problema ordinario – un'equazione in un'incognita, un integrale definito, un'equazione differenziale con una condizione iniziale – l'app offre sotto il risultato i chip «Risolvi con un metodo numerico»; il modulo è precompilato con il problema. Dove non c'è una via esatta o è inutilmente complicata ($x = \cos x$, le formule di Cardano), l'offerta è evidenziata, e un'equazione che non si può risolvere algebricamente viene risolta subito con il metodo di Newton. Le applicazioni che calcolano un numero in silenzio (il tasso interno di rendimento, il TAEG, il rendimento di un'obbligazione, il pH di un acido poliprotico, Runge–Kutta nei modelli) hanno sotto il risultato una riga chiusa «Il metodo» con una breve tabella delle iterazioni.

Come inserirlo

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	Il metodo – il suo nome inglese – e dopo i punti e virgola l'equazione, la stima iniziale x0, la tolleranza tol, facoltativamente max (iterazioni) e stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Una funzione f(x) (si risolve f(x) = 0) e l'intervallo a, b. Senza un intervallo o una stima le radici vengono isolate automaticamente.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	L'integrale di una funzione tra a e b con n sottointervalli; anche trapezoid e romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	L'integrale di valori misurati – x e y separati da uno spazio.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	La derivata nel punto at con il passo h; da una tabella x=…; y=… (at facoltativo).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Un'equazione differenziale del primo ordine con la sua condizione iniziale, il passo h e l'estremo dell'intervallo to; anche euler e heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Un sistema – le equazioni dopo i punti e virgola o su righe; anche jacobi e lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	I punti x, y e il punto at; anche newtonpoly e spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Un polinomio dei minimi quadrati del grado degree.

Esempi

Un'equazione che non si può risolvere algebricamente – l'app la risolve con il metodo di Newton e offre

gli altri.

Input: `x = cos x`

Risultato

$$x \approx 0{,}7391$$

Risolvi con un metodo numerico:

Σ Bisezione | Σ Secanti | Σ Regula falsi | Σ Punto fisso

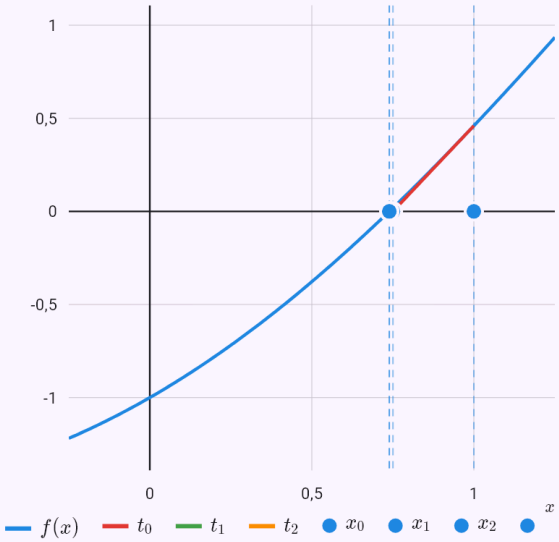
Passaggi

- Cerchiamo una radice dell'equazione $x = \cos x$, cioè uno zero della funzione $f(x) = x - \cos x$
- Le radici isolate da una tabella di valori: la funzione cambia segno negli intervalli $[0;\ 1]$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Una funzione continua ha una radice in ciascuno di tali intervalli.
- Il metodo di Newton richiede la derivata: $f'(x) = \sin x + 1$
- La stima iniziale $x_0 = 1$ scelta secondo la condizione di Fourier – nell'estremo in cui $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); da qui le tangenti convergono alla radice in modo monotono.
- Metodo di Newton: dal punto x_n lungo la tangente fino a dove interseca l'asse x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- La condizione di arresto $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 3 iterazioni.
- La stima dell'errore con il teorema del valor medio, $m_1 = \min \lvert f'(x) \rvert \approx 1$ sull'intervallo $[0;\ 1]$: $\lvert \xi - x_n \rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Il risultato del metodo: $x \approx 0{,}7391$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il metodo di Newton con la radice isolata automaticamente e l'avvio secondo la condizione di Fourier.

Input: `newton(x^3 - x - 2)`

Risultato

$$x \approx 1{,}5214$$

Passaggi

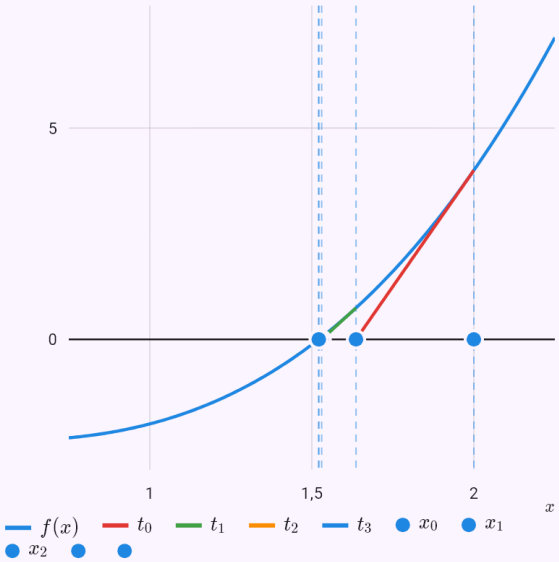
- Cerchiamo una radice dell'equazione $x^3 - x - 2 = 0$, cioè uno zero della funzione $f(x) = x^3 - x - 2$
- Le radici isolate da una tabella di valori: la funzione cambia segno negli intervalli $[1;\ 2]$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Una funzione continua ha una radice in ciascuno di tali intervalli.
- Il metodo di Newton richiede la derivata: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- La stima iniziale $x_0 = 2$ scelta secondo la condizione di Fourier – nell'estremo in cui $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); da qui le tangenti convergono alla radice in modo monotono.
- Metodo di Newton: dal punto x_n lungo la tangente fino a dove interseca l'asse x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-} $
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- La condizione di arresto $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 4 iterazioni.
- La stima dell'errore con il teorema del valor medio, $m_1 = \min \lvert f'(x) \rvert \approx 2$ sull'intervallo $[1;\ 2]$: $\lvert \xi - x_n \rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Il risultato del metodo: $x \approx 1{,}5214$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La bisezione su un intervallo dato con la stima dell’errore.

Input: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Risultato

$$x \approx 1{,}5214$$

Passaggi

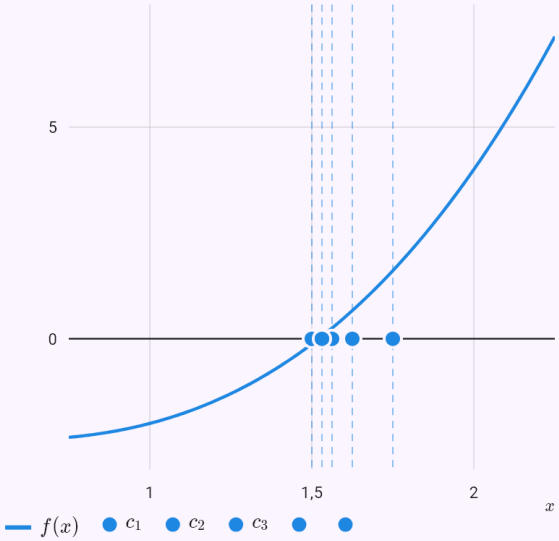
- Cerchiamo una radice dell’equazione $x^3 - x - 2 = 0$, cioè uno zero della funzione $f(x) = x^3 - x - 2$
- Sull’intervallo $[1;\ 2]$
  $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – segni opposti, la funzione continua vi ha una radice.
- Bisezione: il punto medio dell’intervallo $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, teniamo la metà in cui f cambia segno.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- La condizione di arresto $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 14 iterazioni.
- La stima dell’errore: la radice ξ sta nell’ultimo intervallo, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Il risultato del metodo: $x \approx 1{,}5214$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il metodo delle secanti da due stime.

Input: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Risultato

$$x \approx 2{,}0946$$

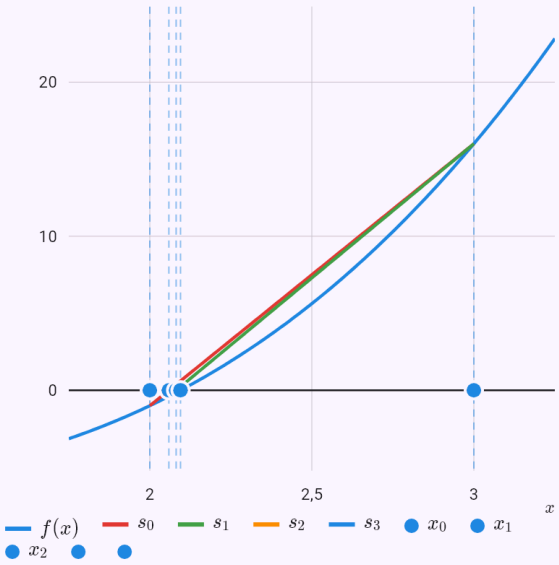
Passaggi

- Cerchiamo una radice dell'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, cioè uno zero della funzione $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Metodo delle secanti: la secante degli ultimi due punti sostituisce la tangente,
  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	−1,000000	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	−0,390800	0,941176
3	2,081264	−0,147204	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	−0,000023	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- La condizione di arresto $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 6 iterazioni.
- La stima dell'errore con il teorema del valor medio, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ sull'intervallo $[2;\ 3]$:
  $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Il risultato del metodo: $x \approx 2{,}0946$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L'iterazione di punto fisso con la condizione di convergenza |g'(x)| < 1 verificata.

Input: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Risultato

$$x \approx 0{,}7391$$

Passaggi

- L'equazione $x = \cos x$ scritta come x = g(x): $g(x) = \cos x$
- La condizione di convergenza: $g'(x) = -\sin x$, sull'intervallo $[0;\ 1]$ $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 – g è una contrazione e l'iterazione converge.
- L'iterazione di punto fisso: $x_{n+1} = g(x_n)$.

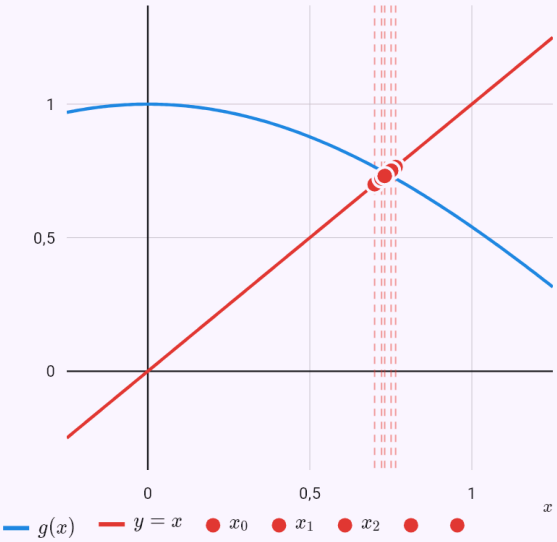
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- La condizione di arresto $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 18 iterazioni.
- La stima dell'errore dell'iterazione di punto fisso

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Il risultato del metodo: $x \approx 0{,}7391$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La regola di Simpson, la stima dell’errore di Runge e il valore esatto per confronto.

Input: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Risultato

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}746825$$

Passaggi

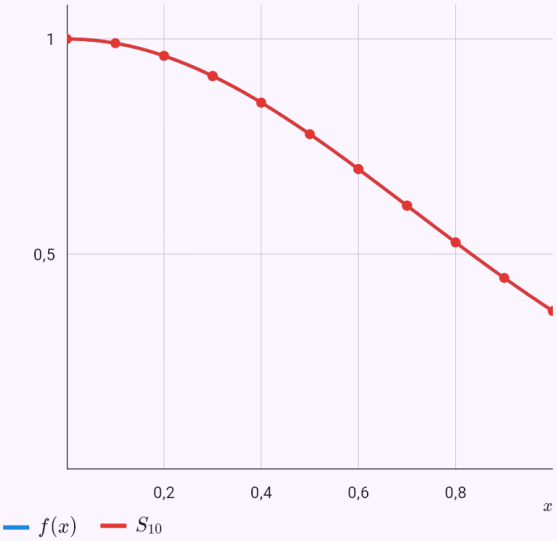
- L’integrale $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ calcolato numericamente.
- Il passo: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$
- I valori nei nodi e i loro coefficienti

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- La regola di Simpson
  $S_n = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \frac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Per confronto il valore esatto
  $I = \frac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, l’errore del metodo
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Il risultato del metodo: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}746825$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

La tabella di Romberg per un integrale senza primitiva elementare.

Input: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Risultato

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

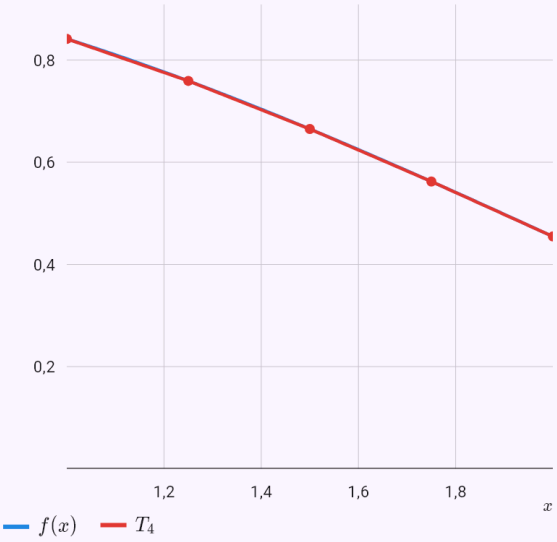
Passaggi

- L'integrale $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ calcolato numericamente.
- Il metodo di Romberg: la prima colonna sono i trapezi con passi h, h/2, h/4, ..., le colonne successive li raffinano con l'estrapolazione di Richardson,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- La condizione di arresto $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 2 iterazioni.
- Per confronto il valore esatto l'errore del metodo
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Il risultato del metodo: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Lo spazio da una velocità misurata con la regola dei trapezi.

Input: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Risultato

$$\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

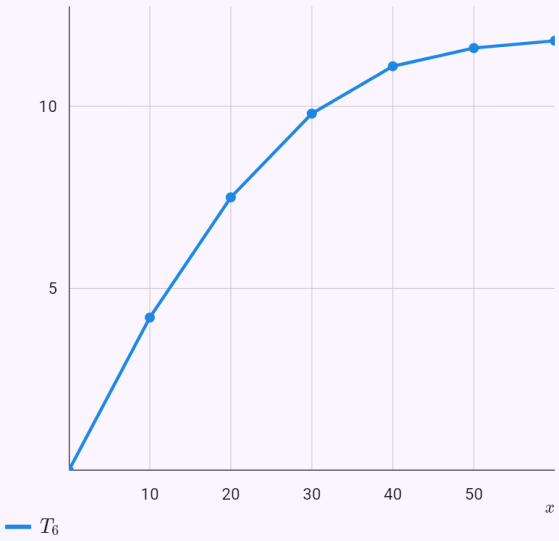
Passaggi

- Integriamo una tabella di 6 sottointervalli sull'intervallo $[0;\,60]$
- Il passo: $h = 10$
- I valori nei nodi e i loro coefficienti

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	$0{,}000000$
1	10	$4{,}2$	2	$8{,}400000$
2	20	$7{,}5$	2	$15{,}000000$
3	30	$9{,}8$	2	$19{,}600000$
4	40	$11{,}1$	2	$22{,}200000$
5	50	$11{,}6$	2	$23{,}200000$
6	60	$11{,}8$	1	$11{,}800000$
Σ				$100{,}200000$

- La regola dei trapezi $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- L'errore stimato con la regola di Runge (il calcolo con passo doppio):
  $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Il risultato del metodo: $\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Le differenze in avanti, all’indietro e centrale per tre passi.

Input: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Risultato

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

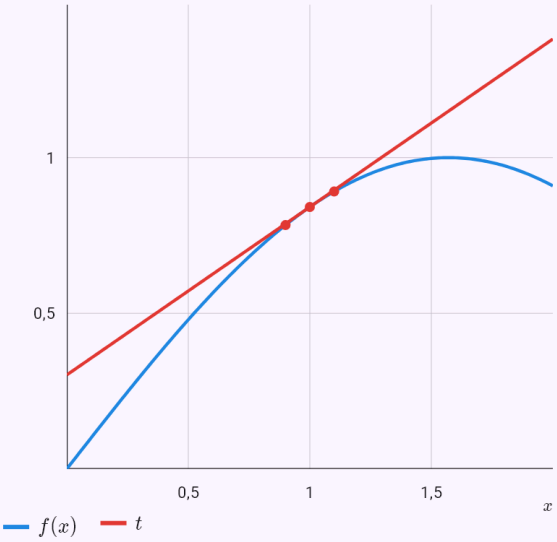
Passaggi

- La derivata della funzione $f(x) = \sin x$ in $x_0 = 1$ stimata con rapporti incrementali.
- La differenza in avanti $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ha un errore proporzionale a h, quella all’indietro $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ anche; quella centrale $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ solo a h². La derivata seconda: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
0,1	0,497364	0,581441	0,539402	−0,840770
0,05	0,519045	0,561110	0,540077	−0,841296
0,025	0,529728	0,550764	0,540246	−0,841427

- Esattamente: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. L’errore della differenza in avanti con il primo passo è $0{,}0429$, quello della centrale solo $9 \cdot 10^{-4}$
- Il risultato del metodo: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il metodo di Runge–Kutta del 4° ordine con la tabella delle pendenze e la soluzione esatta per

confronto.

Input: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Risultato

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sull'intervallo $[0;\ 1]$, il passo $h = 0{,}1$ (10 passi).
- Il metodo di Runge–Kutta del 4° ordine – una media pesata di quattro pendenze

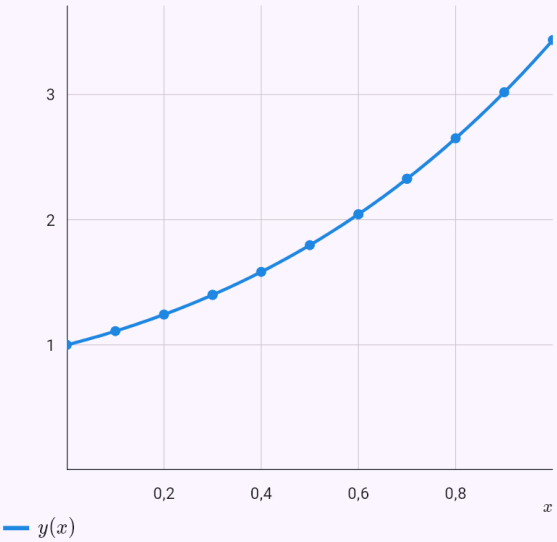
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Per confronto la soluzione esatta: $y = -x + 2e^x - 1$
- Passo per passo

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- All'estremo dell'intervallo esattamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Il risultato del metodo: $y(1) \approx 3{,}436559$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il metodo di Eulero per un'equazione senza soluzione elementare.

Input: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Risultato

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

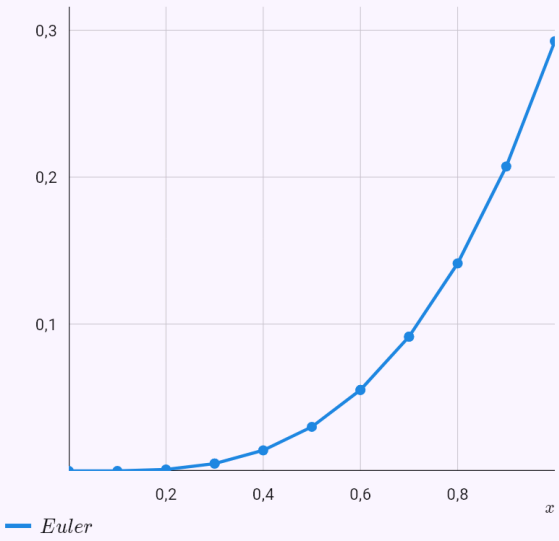
Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ sull'intervallo $[0;\ 1]$, il passo $h = 0{,}1$ (10 passi).
- Il metodo di Eulero – un passo lungo la tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Passo per passo

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Il risultato del metodo: $y(1) \approx 0{,}292542$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il predittore-correttore ABM – più accurato del solo Adams–Bashforth.

Input: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Risultato

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sull'intervallo $[0;\ 1]$, il passo $h = 0{,}1$ (10 passi).
- Un predittore-correttore: il metodo di Adams–Bashforth stima il nuovo punto, quello di Adams–Moulton lo corregge con la pendenza nella stima. Avviato con il metodo di Runge–Kutta

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

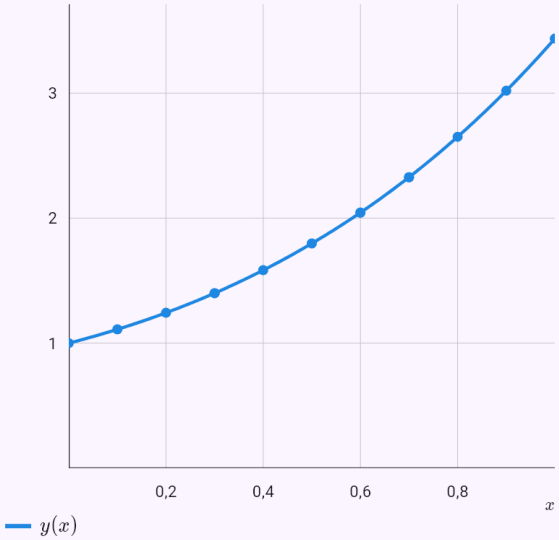
- Per confronto la soluzione esatta: $y = -x + 2e^x - 1$
- Passo per passo

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + A$
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + A$
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + A$
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + A$
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + A$
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + A$
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + A$
10	1	3,436567	4,436567		

- All'estremo dell'intervallo esattamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Il risultato del metodo: $y(1) \approx 3{,}436567$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

L’RK45 adattivo – il primo passo è rifiutato e accorciato, poi il metodo controlla il passo da solo.

Input: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Risultato

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sull’intervallo $[0;\ 2]$, il passo $h = 0{,}5$ (4 passi).
- Un passo adattivo: a ogni passo due metodi (del 5° e del 4° ordine) dalle stesse pendenze – la loro differenza stima l’errore. Un passo è accettato se l’errore è sotto la tolleranza, e il successivo cresce o si riduce in base a esso

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Per confronto la soluzione esatta: $y = -x + 2e^x - 1$
- I passi con la tolleranza $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ un passo accettato, × uno rifiutato (il passo si è ridotto ed è stato ripetuto). Accettati 12, rifiutati 1.

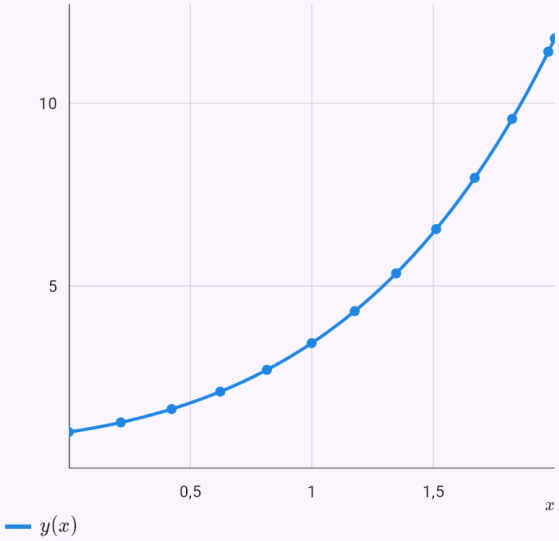
k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- All’estremo dell’intervallo esattamente

$$y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$$

- Il risultato del metodo: $y(2) \approx 11{,}778114$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un'equazione stiff – il metodo di Eulero esplicito con passo 0,05 è instabile (|1 + hλ| = 1,5) e diverge.

Input: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Risultato

La soluzione numerica diverge con questo passo (vedi i passaggi).

Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ sull'intervallo $[0;\ 1]$, il passo $h = 0{,}05$ (20 passi).
- Il metodo di Eulero – un passo lungo la tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Per confronto la soluzione esatta: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilità: l'equazione si comporta come y' = λy con $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Il metodo amplifica un errore a ogni passo: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – con questo passo è instabile, i valori oscilleranno e cresceranno. Aiuta un passo più piccolo o un metodo implicito.
- Passo per passo

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- I valori crescono oltre ogni limite (in $x \approx 0{,}6000$) – il metodo è instabile con questo passo. Prova un passo più piccolo o un metodo implicito.

La stessa equazione con il metodo di Eulero implicito – stabile anche con un passo grande.

Input: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Risultato

$$y(1) \approx 0{,}556616$$

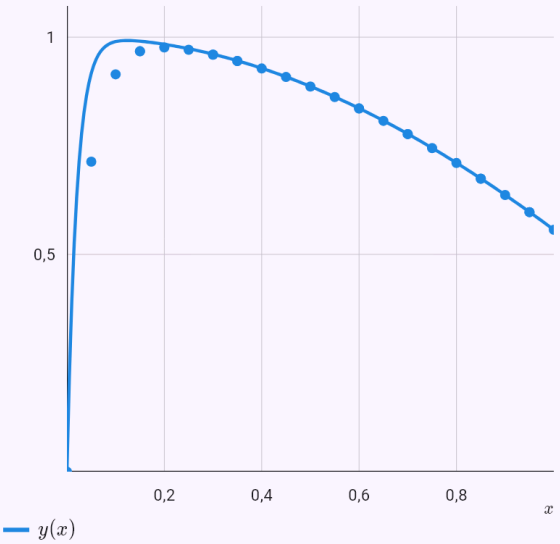
Passaggi

- Il problema ai valori iniziali $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ sull'intervallo $[0;\ 1]$, il passo $h = 0{,}05$ (20 passi).
- Il metodo di Eulero implicito – la pendenza alla fine del passo, quindi y_{n+1} sta in entrambi i membri di un'equazione. Si risolve a ogni passo con il metodo di Newton: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Per confronto la soluzione esatta: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilità: l'equazione si comporta come y' = λy con $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Il metodo riduce un errore a ogni passo: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – il calcolo è stabile.
- Passo per passo

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- All'estremo dell'intervallo esattamente $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Il risultato del metodo: $y(1) \approx 0{,}556616$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un problema ai limiti non lineare con lo shooting – cinque passi delle secanti correggono la pendenza.

Input: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Risultato

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Passaggi

- Il problema ai limiti $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1,$ il passo $h = 0{,}05$ (20 sottointervalli).
- Il metodo di shooting: scegliamo una pendenza iniziale s = y'(a), risolviamo il problema come problema ai valori iniziali (Runge–Kutta) e vediamo di quanto manca l'estremo destro. La pendenza si corregge con il metodo delle secanti

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_{k-1})}$$

- I tiri – ognuno è un problema ai valori iniziali; correggiamo finché F(s) è sotto la tolleranza.

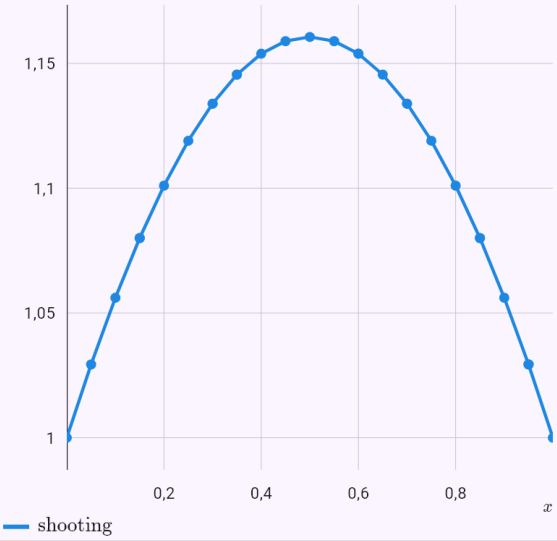
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- La pendenza iniziale con cui la soluzione soddisfa la condizione al contorno: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- La soluzione nei nodi

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Il risultato del metodo: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Differenze finite e l'algoritmo di Thomas – esatte nei nodi per y = x³.

Input: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Risultato

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Passaggi

- Il problema ai limiti $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, il passo $h = 0{,}25$ (4 sottointervalli).
- Differenze finite: nei nodi x_i, y'' e y' sono sostituite da differenze centrali

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Il sistema tridiagonale a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; i valori al contorno spostati a destra

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- L'algoritmo di Thomas – l'eliminazione di Gauss per una matrice tridiagonale: la passata in avanti, poi la sostituzione all'indietro dalla fine

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

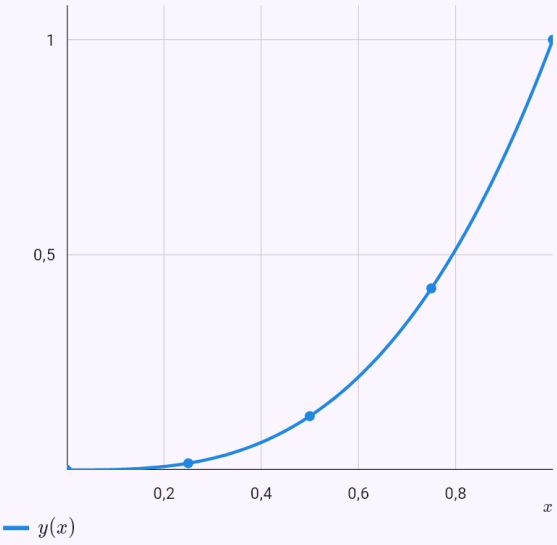
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Per confronto la soluzione esatta: $y = x^3$
- La soluzione nei nodi

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- L'errore massimo nei nodi rispetto alla soluzione esatta: $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Il risultato del metodo: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un problema ai limiti con gli elementi finiti – esatto nei nodi.

Input: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Risultato

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Passaggi

- Il problema ai limiti $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, il passo $h = 0{,}25$ (4 sottointervalli).
- Il metodo degli elementi finiti: l'equazione si moltiplica per un «cappello» φ_i (una funzione lineare a tratti, 1 nel nodo i e 0 negli altri) e si integra per parti. La soluzione si cerca come combinazione di cappelli, gli integrali sugli elementi con la regola di Gauss

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Il sistema assemblato – una riga per ogni nodo interno (la matrice di rigidezza K è tridiagonale, i valori al contorno spostati a destra)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- L'algoritmo di Thomas – l'eliminazione di Gauss per una matrice tridiagonale: la passata in avanti, poi la sostituzione all'indietro dalla fine

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+1}$$

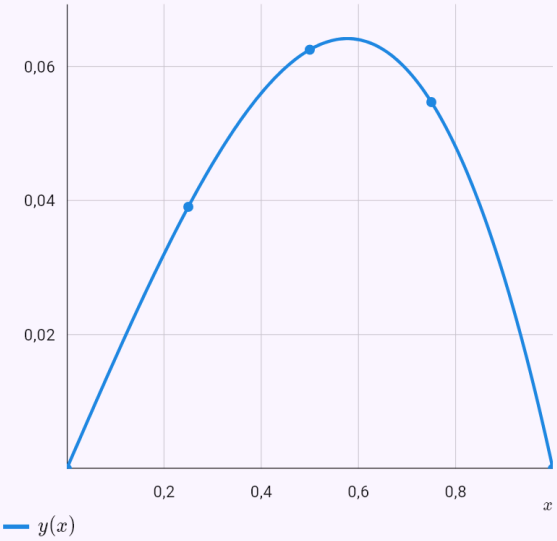
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Per confronto la soluzione esatta: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- La soluzione nei nodi

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- L'errore massimo nei nodi rispetto alla soluzione esatta: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Il risultato del metodo: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un pendolo con il metodo di Verlet – il suo errore sull'energia resta, quello di RK4 cresce di dieci volte.

Input: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Risultato

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx$$

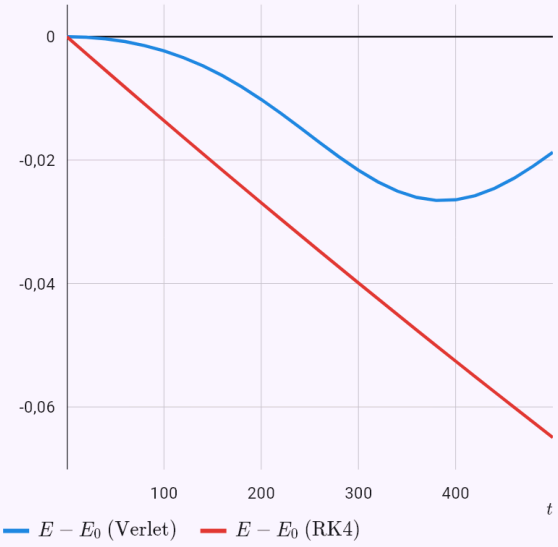
Passaggi

- L'equazione del moto
  $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, il passo $h = 0{,}5$ (1000 passi).
- Il metodo di Verlet nelle velocità – la nuova posizione dalla velocità e dall'accelerazione, la velocità dall'accelerazione media all'inizio e alla fine del passo.
  L'energia totale $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ è calcolata per entrambi i metodi
  $x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \frac{h^2}{2}a(x_n)$
  $v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$
- Verlet contro RK4 con lo stesso passo (righe scelte)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^F
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

- L'errore sull'energia di Verlet resta lo stesso, quello di RK4 cresce nel tempo – in un calcolo lungo Verlet è più fedele. L'errore massimo all'inizio e alla fine, Verlet sopra, RK4 sotto
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$
- Il risultato del metodo:
  $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Grafico



Lo scostamento dell'energia totale da quella iniziale: Verlet oscilla intorno a zero, RK4 si allontana lentamente.

Il metodo di Gauss–Seidel – le equazioni riordinate per la dominanza diagonale.

Input: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Risultato

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Passaggi

- Il sistema in forma matriciale
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Le equazioni riordinate perché la matrice sia a diagonale dominante ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- La matrice di iterazione il suo raggio spettrale $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – il metodo converge.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Il metodo di Gauss–Seidel – i valori nuovi usati appena calcolati

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Le iterazioni

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- La condizione di arresto $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ è soddisfatta dopo 6 iterazioni.
- Il risultato del metodo: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

La decomposizione LU in frazioni esatte, la sostituzione in avanti e all'indietro.

Input: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Risultato

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Passaggi

- Il sistema in forma matriciale
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Eliminazione di Gauss – i moltiplicatori delle righe formano la matrice L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- La decomposizione LU A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La sostituzione in avanti Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$
- La sostituzione all'indietro Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$
- Il risultato del metodo: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Il polinomio interpolante di Lagrange e il suo valore in un punto.

Input: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Risultato

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Passaggi

- I punti dati (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- I polinomi di base di Lagrange $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

- Il polinomio interpolante di Lagrange

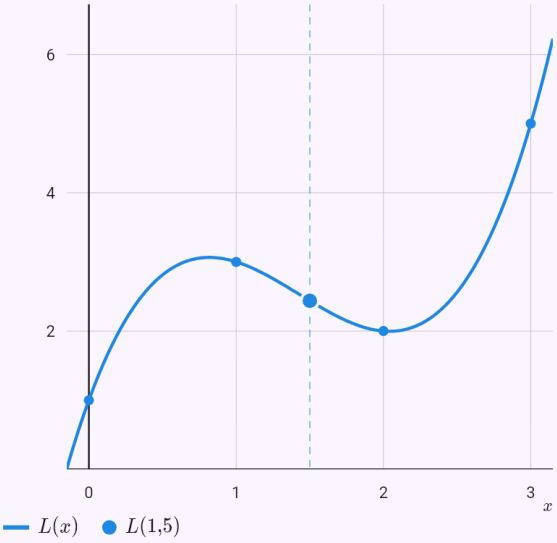
$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

- Il valore nel punto dato: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$

- Il risultato del metodo

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il polinomio di Newton dalla tabella delle differenze divise.

Input: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Risultato

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Passaggi

- I punti dati (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- La tabella delle differenze divise

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

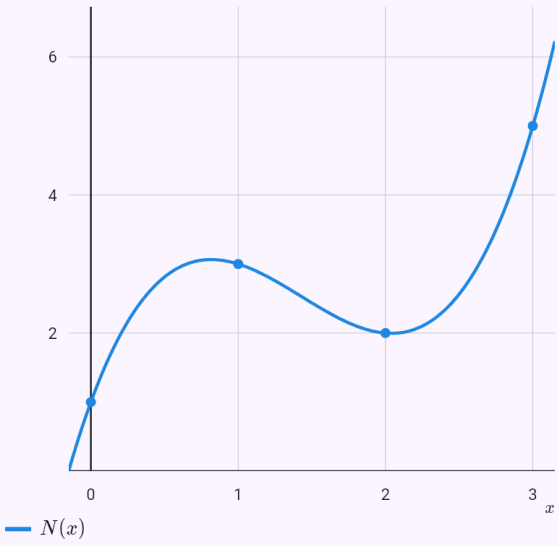
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- Il polinomio interpolante di Newton (i coefficienti dalla diagonale superiore della tabella)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Il risultato del metodo: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Una spline cubica naturale – il sistema per i momenti e i tratti.

Input: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Risultato

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Passaggi

- I punti dati (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- La spline cubica naturale: le derivate seconde M⃰ nei nodi soddisfano con $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

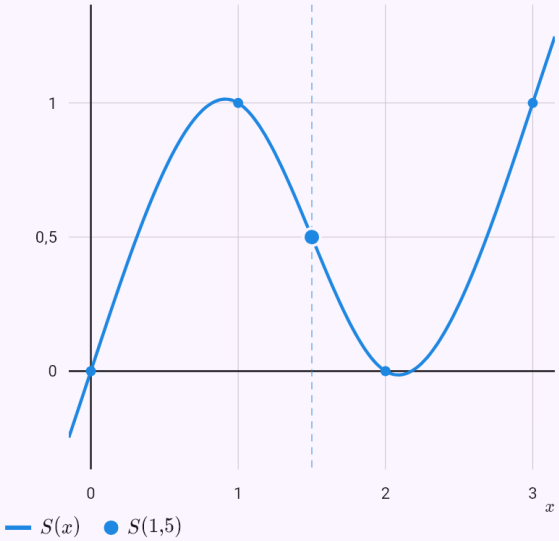
- La soluzione del sistema:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Su ogni sottointervallo

$$S_i(x) = y_i + b_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x-$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- Il valore nel punto dato: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Il risultato del metodo: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Un’approssimazione quadratica con i minimi quadrati.

Input: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Risultato

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Passaggi

- I punti dati (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Cerchiamo il polinomio con $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Le somme necessarie

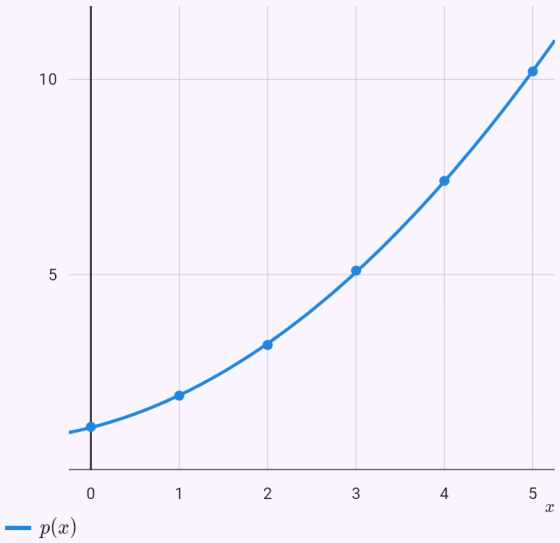
$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- Le equazioni normali per i coefficienti $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- La soluzione:
  $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- La somma dei quadrati degli scarti:
  $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Il risultato del metodo:
  $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Il tasso interno di rendimento – i passi della bisezione chiusi sotto il risultato.

Input: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

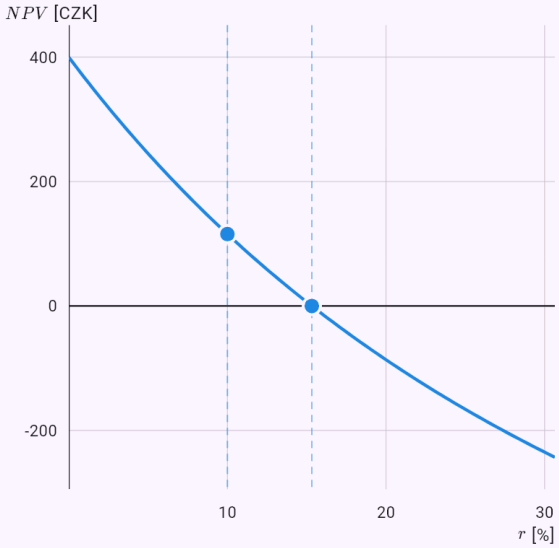
Risultato

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Passaggi

- Dati:
  $CF_t = (-1.000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Convertiamo le unità: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Il valore attuale netto VAN somma i flussi di cassa di un progetto CF_0, CF_1, … attualizzati al rendimento richiesto r: VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un progetto con VAN > 0 rende più del rendimento richiesto. Il tasso interno di rendimento TIR è il tasso al quale VAN = 0 – la radice di un'equazione polinomiale, trovata numericamente. Il periodo di recupero è quando la somma cumulata dei flussi (semplici o attualizzati) smette di essere negativa.
  Equazione del modello: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Valore attuale netto
  $$NPV = -1.000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- VAN ≥ 0 – il progetto rende almeno il rendimento richiesto.
- Risolviamo l'equazione numericamente (per bisezione):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Il metodo: bisezione, 14 iterazioni

Grafico



Il grafico calcolato dalla soluzione del modello; i punti sono i valori dati o la risposta.

Limiti noti

- Radici: un'equazione in un'incognita, radici reali; si isolano automaticamente al massimo tre radici in [−50; 50].
- Equazioni differenziali: solo una singola equazione del primo ordine y′ = f(x, y), al massimo 2.000 passi; sistemi e ordini superiori non ancora.
- Sistemi: da 2 a 6 equazioni; interpolazione al massimo 12 punti, un polinomio dei minimi quadrati al massimo di grado 5.
- I metodi di Simpson e di Romberg da una tabella richiedono passi uguali (Romberg 2, 4, 8, … sottointervalli).
- Problemi ai limiti solo del 2° ordine con i valori y(a), y(b) (non una derivata a un estremo); differenze finite solo per un'equazione lineare in y e y′. Il metodo di Verlet solo per il moto x″ = a(x) in una coordinata – l'orbita di un pianeta nel piano non ancora.