Mathtrace – guide d’utilisation

V. Statistiques

Sommaire

V. Statistiques

41. Statistique

41. Statistique

Les données s'écrivent data(…) : valeurs séparées par des points-virgules, des espaces ou des retours à la ligne ; la virgule décimale vaut comme ailleurs (data(1,5 2,5 3)). Un tableau – une ligne par observation, une colonne par variable – s'écrit ligne par ligne séparées par des points-virgules ; la première ligne peut porter les noms des variables. Plus pratique : la touche grille de l'onglet f(x) ouvre un tableau à remplir, à coller depuis le presse-papiers (cellules d'Excel ou de Google Sheets) ou à charger depuis un fichier CSV, et le bouton « Comme données » l'insère pour la statistique – même un tableau plus grand que la grille.

Pour une variable, une puce choisit le calcul. Statistique descriptive : moyenne arithmétique, médiane, mode, quartiles (médianes des moitiés inférieure et supérieure), étendue et écart interquartile, variance et écart type d'échantillon (n − 1) et de population (n), coefficient de variation et valeurs aberrantes (hors de $Q_1 - 1{,}5 \cdot \mathrm{IQR}$ et $Q_3 + 1{,}5 \cdot \mathrm{IQR}$), avec une boîte à moustaches. Effectifs et histogramme : le tableau des effectifs, fréquences et cumuls – par valeurs pour des entiers peu nombreux, sinon par classes (leur nombre par la règle de Sturges). Notes z : chaque valeur centrée-réduite par la moyenne et l'écart type des données, avec sa note T.

Deux variables (deux colonnes) donnent corrélation et régression : sommes, covariance, coefficient de corrélation de Pearson r avec la force de la liaison en mots, droite de régression par les moindres carrés et coefficient de détermination r^2, avec un nuage de points. Trois variables ou plus reçoivent leur statistique descriptive côte à côte avec des boîtes à moustaches.

Inférence statistique à partir de données : l'intervalle de confiance de la moyenne (puce « Intervalle de confiance de la moyenne », 90, 95 ou 99 %) par la loi de Student ; le test t (puce « Test t ») – une variable face à la valeur testée μ_0, deux variables comme échantillons indépendants (test de Welch, ou à variances égales) ou valeurs appariées (différences des paires) ; le test du χ^2 (puce « Test du χ^2 ») – une colonne d'effectifs comme test d'adéquation à la loi uniforme, un tableau comme test d'indépendance avec le V de Cramér. Sous les puces, on saisit le seuil α, l'alternative (bilatérale, unilatérale à gauche ou à droite) et μ_0. La démarche : hypothèses, statistique de test, valeur et région critiques, valeur p et décision ; le graphique montre la loi avec la région critique en grisé. Deux échantillons indépendants de tailles différentes s'écrivent en colonnes nommées – data(A = 23 25 28; B = 20 22 21 25).

Comparer des groupes : la puce « Test des rangs (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis) » compare deux groupes par le test de Mann-Whitney (avec « Appariés », des valeurs appariées par le test de Wilcoxon) et trois groupes ou plus par le test de Kruskal-Wallis – d'après les rangs, sans supposer de loi normale ; pour de petits échantillons sans ex aequo, la valeur p est exacte. La puce « ANOVA (analyse de variance) » compare les moyennes des groupes par l'analyse de variance à un facteur – tableau d'ANOVA, test F et taille d'effet η^2. Écrivez les groupes en colonnes, de longueurs quelconques (colonnes nommées) ; le graphique montre les boîtes à moustaches et la loi de la statistique de test. Pour le test

du χ^2 d'une colonne d'effectifs, le champ « Proportions attendues » accepte vos propres proportions attendues – 1:2:1, 0,25 0,5 0,25 ou en pourcentage.

La régression de deux variables propose sous sa puce le choix du modèle : linéaire (avec le test de significativité de la corrélation), quadratique (équations normales des moindres carrés), exponentielle y = a·e^(bx), puissance y = a·x^b et logarithmique y = a + b·ln x (par linéarisation via les logarithmes) – avec le coefficient de détermination R^2 et le graphique de la courbe ajustée. Le formulaire « Statistique et psychométrie » propose en outre l'intervalle de confiance et les tests t à partir de valeurs résumées (effectif, moyenne, écart type) – y compris le test z avec σ connu et le test t de deux échantillons.

La loi normale se trouve dans le formulaire « Statistique et psychométrie » (section « Applications » de l'écran d'accueil, domaine Statistique) : les probabilités P(X < x), P(X > x), P(a < X < b) et le quantile – la valeur en dessous de laquelle se trouve une proportion donnée. La résolution centre et réduit, z = (x − μ)/σ, et utilise la fonction de répartition Φ, un z négatif comme 1 − Φ(|z|) comme dans les tables ; le graphique montre la densité avec l'aire colorée.

Comment le saisir

`data(3; 5; 7; 7; 9)`	Une variable – les valeurs séparées par points-virgules, espaces ou l'une sous l'autre.
`data(x y; 1 52; 2 58; 3 61)`	Un tableau ligne par ligne, la première ligne avec les noms des variables (facultative).
`data(x = 1 2 3 4; y = 2 4 5 4)`	Colonnes nommées, chacune avec ses valeurs.

Exemples

Statistique descriptive de huit valeurs.

Énoncé: `data(2; 4; 4; 4; 5; 5; 7; 9)`

Résultat

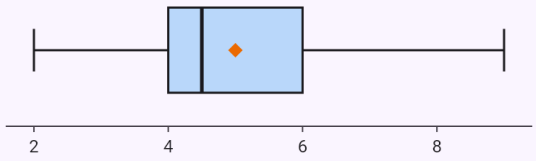
$$\bar{x} = 5$$
$$\tilde{x} = 4{,}5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 8$, données triées :
  $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Moyenne arithmétique : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40}{8} = 5$
- La médiane est la valeur centrale des données triées :
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- Mode (la valeur la plus fréquente, 3×) : $\hat{x} = 4$
- Les quartiles sont les médianes des moitiés inférieure et supérieure : $Q_1 = 4, \quad Q_2 = \tilde{x} = 4{,}5, \quad Q_3 = 6$
- Étendue et écart interquartile
  $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 2 = 7$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$
- Somme des carrés des écarts à la moyenne :
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 32$
- Variance – d'échantillon s² et de population σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{7} \approx 4{,}571$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{8} = 4$
- Écart type
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}571} \approx 2{,}138$
  $\sigma = \sqrt{4} = 2$
- Coefficient de variation :
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}138}{5} \approx 0{,}4276 = 42{,}8\,\%$
- Barrières des valeurs aberrantes
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 1, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 9$ – aucune valeur n'est en dehors.
- La variance d'échantillon s² divise par n − 1 et estime la variance de la population – le choix habituel. La variance de population σ² divise par n, pour des données qui sont toute la population.
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Graphique

Boîte à moustaches (médiane, quartiles, valeurs aberrantes ; ◆ moyenne)



La valeur aberrante 31 dans la boîte à moustaches.

Énoncé: `data(12 15 14 13 16 15 14 31)`

Résultat

$$\bar{x} = 16{,}25$$
$$\tilde{x} = 14{,}5$$
$$s \approx 6{,}089$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 8$, données triées :
  $12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16,\ 31$
- Moyenne arithmétique : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{8} = 16{,}25$
- La médiane est la valeur centrale des données triées :
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$
- Mode (la valeur la plus fréquente, 2×) : $\hat{x} = 14,\ 15$
- Les quartiles sont les médianes des moitiés inférieure et supérieure : $Q_1 = 13{,}5, \quad Q_2 = \tilde{x} = 14{,}5, \quad Q_3 = 15{,}5$
- Étendue et écart interquartile
  $R = x_{max} - x_{min} = 31 - 12 = 19$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 15{,}5 - 13{,}5 = 2$
- Somme des carrés des écarts à la moyenne :
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 259{,}5$
- Variance – d'échantillon s² et de population σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{7} \approx 37{,}07$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{8} \approx 32{,}44$
- Écart type
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{37{,}07} \approx 6{,}089$
  $\sigma = \sqrt{32{,}44} \approx 5{,}695$
- Coefficient de variation :
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6{,}089}{16{,}25} \approx 0{,}3747 = 37{,}5\,\%$
- Les valeurs aberrantes sont hors des barrières
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 10{,}5, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 18{,}5 : 31$
- La variance d'échantillon s² divise par n − 1 et estime la variance de la population – le choix habituel. La variance de population σ² divise par n, pour des données qui sont toute la population.
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Graphique

Boîte à moustaches (médiane, quartiles, valeurs aberrantes ; ◆ moyenne)

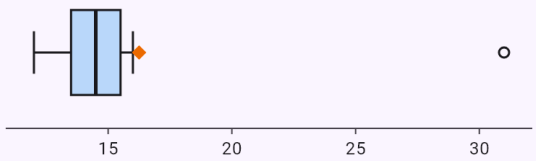


Tableau des effectifs de notes et histogramme.

Énoncé: `data(1 2 2 3 3 3 3 4 4 5 1 3 2 4 3)` Effectifs et histogramme

Résultat

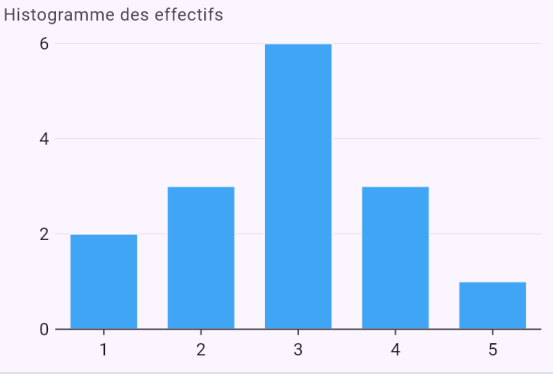
$$n = 15$$
$$\hat{x} = 3$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 15$, données triées :
  $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5$
- Tableau des effectifs – n, fréquences f, cumulés N et F

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,133	2	0,133
2	3	0,200	5	0,333
3	6	0,400	11	0,733
4	3	0,200	14	0,933
5	1	0,067	15	1,000
$\sum$	15	1		

Graphique



Données continues regroupées en classes.

Énoncé: `data(12.5 14.1 15.8 17.2 18.9 21.3 22.0 23.7 25.1 26.4 28.8 31.2)` Effectifs et histogramme

Résultat

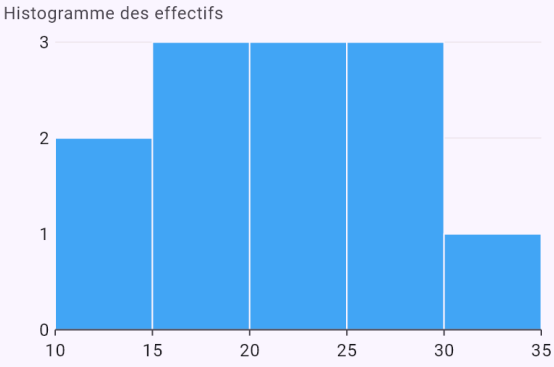
$$n = 12$$
$$k = 5, \quad h = 5$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 12$, données triées
  $12{,}5,\ 14{,}1,\ 15{,}8,\ 17{,}2,\ 18{,}9,\ 21{,}3,\ 22,\ 23{,}7,\ 25{,}1,\ 26,$
- Les valeurs sont nombreuses – on les regroupe en 5 classes (règle de Sturges)
  $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + \log_2 12 \approx 4{,}585 \Rightarrow k = 5$
  $h \approx \dfrac{R}{k} = \dfrac{18{,}7}{5} \approx 3{,}74 \Rightarrow h = 5$
- Tableau des effectifs des classes (x le centre de classe)

I_j	x_j	n_j	f_j	N_j	F_j
$[10\,;\,15[$	12,5	2	0,167	2	0,167
$[15\,;\,20[$	17,5	3	0,250	5	0,417
$[20\,;\,25[$	22,5	3	0,250	8	0,667
$[25\,;\,30[$	27,5	3	0,250	11	0,917
$[30\,;\,35]$	32,5	1	0,083	12	1,000
$\sum$		12	1		

Graphique



Notes z et notes T des valeurs.

Énoncé: `data(2 4 4 4 5 5 7 9)` Notes z

Résultat

$$\bar{x} = 5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 8$, données triées : $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Moyenne arithmétique : $\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$
- Écart type
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{32}{7}} \approx 2{,}138$$
- On centre et réduit chaque valeur
$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 5}{2{,}138}$$
$$T_i = 50 + 10 z_i$$
- Notes z et notes T des valeurs

x_i	z_i	T_i
2	$-1{,}40$	$36{,}0$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
7	$0{,}94$	$59{,}4$
9	$1{,}87$	$68{,}7$

- Les notes z utilisent la moyenne et l'écart type de ces données. Pour comparer à une population, on prend la moyenne et l'ET de l'étalonnage (modèle « Conversion de notes standard »).

Corrélation et droite de régression – heures de révision et points au test.

Énoncé: `data(x y; 1 52; 2 58; 3 61; 4 70; 5 74; 6 79)`

Résultat

$$r \approx 0{,}9937$$

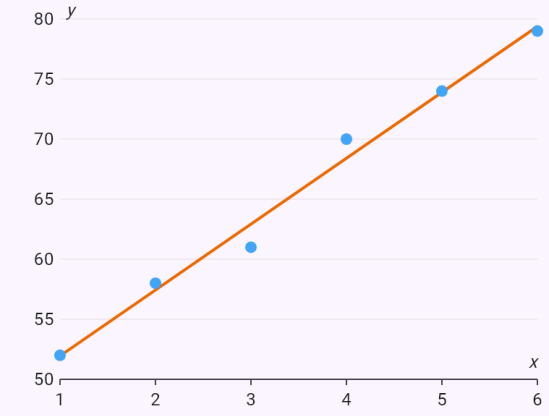
$$\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 6$, données triées
  $[1\,;\,52],\ [2\,;\,58],\ [3\,;\,61],\ [4\,;\,70],\ [5\,;\,74],\ [6\,;\,79]$
- Sommes et moyennes
  $\sum x_i = 21$
  $\sum y_i = 394$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum y_i^2 = 26\,410$
  $\sum x_i y_i = 1475$
  $\bar{x} = 3{,}5$
  $\bar{y} = 65{,}67$
- Écart type
  $$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \approx 1{,}871$$
  $$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}} \approx 10{,}33$$
- Covariance
  $$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{1475 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot 65{,}67}{5} = 19{,}2$$
- Coefficient de corrélation de Pearson :
  $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{19{,}2}{1{,}871 \cdot 10{,}33} \approx 0{,}9937$ – la liaison est très forte, positive (y croît avec x).
- Coefficients de la droite de régression par les moindres carrés
  $b = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} = \dfrac{19{,}2}{3{,}5} \approx 5{,}486$
  $a = \bar{y} - b\bar{x} = 65{,}67 - 5{,}486 \cdot 3{,}5 \approx 46{,}47$
- Droite de régression : $\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$
- Coefficient de détermination $r^2 = 0{,}9937^2 \approx 0{,}9874$ – la droite explique $98{,}7\,\%$ de la variance de y.
- Test de l'hypothèse nulle ρ = 0 (loi de Student à 4 degrés de liberté) – la corrélation est statistiquement significative.
  $$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}9937\sqrt{4}}{\sqrt{1-0{,}9937^2}} \approx 17{,}73$$
  $p < 0{,}0001 \le \alpha = 0{,}05$
- La corrélation ne décrit qu'une relation linéaire : elle ne dit rien des causes et peut manquer une relation non linéaire. N'utiliser la droite de régression que dans l'étendue des x mesurés.

Graphique

Nuage de points avec la droite de régression



Trois variables côte à côte.

Énoncé: `data(A B C; 12 15 9; 14 18 11; 11 16 10; 15 19 12; 13 17 10)`

Résultat

$$\bar{x}_{\mathrm{A}} = 13$$
$$\bar{x}_{\mathrm{B}} = 17$$
$$\bar{x}_{\mathrm{C}} = 10{,}4$$

Étapes

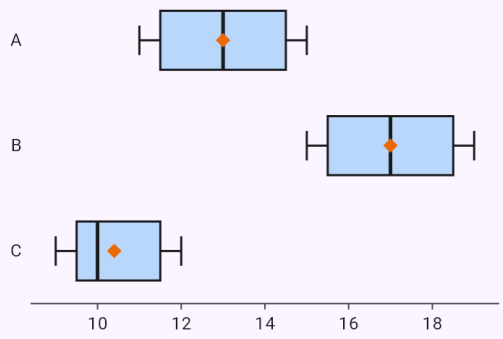
- Statistique descriptive des variables

	A	B	C
n	5	5	5
$\bar{x}$	13	17	10,4
$\tilde{x}$	13	17	10
Q_1	11,5	15,5	9,5
Q_3	14,5	18,5	11,5
s	1,581	1,581	1,14
σ	1,414	1,414	1,02
x_{min}	11	15	9
x_{max}	15	19	12

- La variance d'échantillon s² divise par n − 1 et estime la variance de la population – le choix habituel. La variance de population σ² divise par n, pour des données qui sont toute la population.

Graphique

Boîte à moustaches (médiane, quartiles, valeurs aberrantes ; ◆ moyenne)



Intervalle de confiance à 95 % de la moyenne de dix mesures.

Énoncé: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Intervalle de confiance de la moyenne

Résultat

$$95\,\%\ :\ [99{,}71\,;\,106{,}3]$$

Étapes

- Effectif, moyenne et écart type de l'échantillon :
  $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- L'erreur type : $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Le quantile pour la confiance choisie : $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$
- L'intervalle de confiance
  $\bar{x} \pm t \cdot SE = 103 \pm 2{,}262 \cdot 1{,}453 = 103 \pm 3{,}287 \Rightarrow [99,$
- Une confiance de 95 % signifie : si l'on répétait l'échantillonnage de nombreuses fois, environ 95 % des intervalles ainsi calculés contiendraient la vraie moyenne μ. Cela ne signifie pas que μ se trouve dans cet intervalle précis avec une probabilité de 95 %.
- Pour un petit échantillon (n < 30), la loi de Student suppose des données issues d'une loi à peu près normale. Avec des données très asymétriques ou des valeurs aberrantes, un test non paramétrique convient mieux.

La moyenne diffère-t-elle de 100 ? Test t à un échantillon.

Énoncé: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Test t

Résultat

$$t \approx 2{,}065$$

$$p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$$

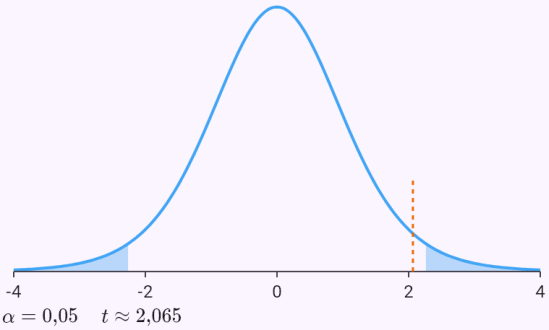
Étapes

- Effectif, moyenne et écart type de l'échantillon : $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative : $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu \neq 100$
- L'erreur type : $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi de Student à 9 degrés de liberté : $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \frac{103 - 100}{1{,}453} \approx 2{,}065$
- La valeur critique au seuil α : $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$, la région critique $|t| \geq 2{,}262$
- La valeur p : $p = 2\,P(T \geq 2{,}065) \approx 0{,}06895$
- Comme $p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle – les données n'apportent pas assez d'éléments contre elle.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.

- Pour un petit échantillon (n < 30), la loi de Student suppose des données issues d'une loi à peu près normale. Avec des données très asymétriques ou des valeurs aberrantes, un test non paramétrique convient mieux.

Graphique

Loi de Student – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}065$

Deux échantillons indépendants de tailles différentes – test t de Welch.

Énoncé: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)` Test t

Résultat

$$t \approx 3{,}503$$
$$p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Effectif, moyenne et écart type de l'échantillon
  $n_1 = 6,\ \bar{x}_1 = 26{,}5,\ s_1 \approx 2{,}429$
  $n_2 = 7,\ \bar{x}_2 = 22,\ s_2 \approx 2{,}16$
- L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative :
  $H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- L'erreur type
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2{,}429^2}{6} + \frac{2{,}16^2}{7}} \approx 1{,}285$$
- Les degrés de liberté de Welch-Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 10{,}18$$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi de Student à $10{,}18$ degrés de liberté :
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{26{,}5 - 22}{1{,}285} \approx 3{,}503$$
- La valeur critique au seuil α : $t_{0{,}975}(10{,}18) \approx 2{,}223$, la région critique $|t| \geq 2{,}223$
- La valeur p : $p = 2\,P(T \geq 3{,}503) \approx 0{,}005546$
- Comme $p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le test de Welch ne suppose pas l'égalité des variances des groupes ; ses degrés de liberté ν ne sont pas forcément entiers.

Graphique

Loi de Student – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}503$

Test t apparié – mesures avant et après.

Énoncé: `data(x1 x2; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71)` Test t · Appariés

Résultat

$$t \approx 3{,}081$$

$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Les différences des paires d (colonne 1 − colonne 2) : $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3$; $n = 6, \quad \bar{d} \approx 2{,}167, \quad s_d \approx 1{,}722$
- L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative : $H_0 : \mu_d = 0, \quad H_1 : \mu_d \neq 0$
- L'erreur type : $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}722}{\sqrt{6}} \approx 0{,}7032$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi de Student à 5 degrés de liberté : $t = \dfrac{\bar{d} - \mu_0}{SE} = \dfrac{2{,}167 - 0}{0{,}7032} \approx 3{,}081$
- La valeur critique au seuil α : $t_{0{,}975}(5) \approx 2{,}571$, la région critique $|t| \geq 2{,}571$
- La valeur p : $p = 2\,P(T \geq 3{,}081) \approx 0{,}02743$
- Comme $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Pour un petit échantillon (n < 30), la loi de Student suppose des données issues d'une loi à peu près normale. Avec des données très asymétriques ou des valeurs aberrantes, un test non paramétrique convient mieux.
- Le test t apparié est un test t à un échantillon sur les différences (colonne 1 − colonne 2) – chaque paire appartient au même sujet (p. ex. avant et après).

Graphique

Loi de Student – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



Le dé est-il équilibré ? Test d'adéquation du χ².

Énoncé: `data(8 12 9 11 6 14)` Test du χ²

Résultat

$$\chi^2 = 4{,}2$$
$$p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Hypothèse nulle : les 6 catégories sont équiprobables ($H_0 : p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$) ; alternative : au moins une diffère.
- Les effectifs théoriques sous H_0 $E_i = \frac{N}{k} = \frac{60}{6} = 10$ et les contributions des catégories

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	0,4
2	12	10	0,4
3	9	10	0,1
4	11	10	0,1
5	6	10	1,6
6	14	10	1,6
$\sum$	60	60	4,2

- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi du χ² à 5 degrés de liberté

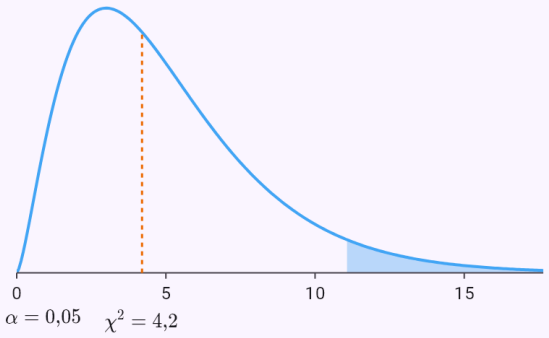
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}6 + 1$$

- La valeur critique au seuil α : $\chi^2_{0{,}95}(5) \approx 11{,}07$, la région critique $\chi^2 \geq 11{,}07$
- La valeur p : $p = P(\chi^2 \geq 4{,}2) \approx 0{,}521$
- Comme $p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle – les données n'apportent pas assez d'éléments contre elle.

- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le test du χ² travaille avec des effectifs (nombres de cas), pas avec des pourcentages ni des moyennes.

Graphique

Loi du χ² – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



Test d’indépendance dans un tableau 2×2.

Énoncé: `data(20 30; 25 15)` Test du χ²

Résultat

$$\chi^2 = 4{,}5$$
$$p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$V \approx 0{,}2236$$

Étapes

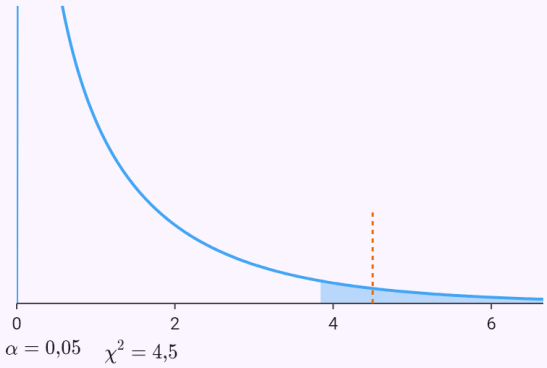
- Hypothèse nulle : la variable des lignes et celle des colonnes sont indépendantes ; alternative : elles sont dépendantes.
- Les effectifs théoriques sous l'indépendance $E_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{N}$, entre parenthèses les observés

	1	2	$\sum$
1	25 (20)	25 (30)	50
2	20 (25)	20 (15)	40
$\sum$	45	45	90

- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi du χ² à 1 degrés de liberté :
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 1 + 1 + 1{,}25 + 1{,}25 = 4{,}5$$
- La valeur critique au seuil α : $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}841$, la région critique $\chi^2 \geq 3{,}841$
- La valeur p : $p = P(\chi^2 \geq 4{,}5) \approx 0{,}03389$
- Comme $p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- La force de la liaison – V de Cramér (0 aucune, 1 totale)
$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(r,c) - 1)}} = \sqrt{\frac{4{,}5}{90 \cdot 1}} \approx 0{,}2236$$
- Le test du χ² travaille avec des effectifs (nombres de cas), pas avec des pourcentages ni des moyennes.

Graphique

Loi du χ² – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



Deux groupes par le test de Mann-Whitney – petits échantillons, valeur p exacte.

Énoncé: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)`

Test des rangs (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis)

Résultat

$$U = 3$$
$$z \approx -2{,}579$$
$$p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Hypothèse nulle : les deux groupes proviennent de la même loi, alternative : les valeurs de l'un tendent à être plus élevées

  $H_0 : F_A = F_B$
  $H_1 : F_A \neq F_B$

- On trie ensemble les valeurs des deux groupes et on les numérote par leur rang R (des valeurs égales reçoivent la moyenne de leurs rangs)

x	R	
19	1	B
20	2	B
21	3	B
22	4	B
23	5,5	A
23	5,5	B
24	7	B
25	8,5	A
25	8,5	B
26	10	A
27	11	A
28	12	A
30	13	A

- Les effectifs des groupes et les sommes de leurs rangs : $n_1 = 6, \quad n_2 = 7, \quad R_1 = 60, \quad R_2 = 31$

- La statistique U de Mann-Whitney – le nombre de paires où la valeur d'un groupe a un rang plus élevé que celle de l'autre ; on teste la plus petite

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 60 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 39$$
$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 6 \cdot 7 - 39 = 3$$
$$U = \min(U_1, U_2) = 3$$

- La statistique de test – sous H_0 elle suit la loi normale centrée réduite : $z = \dfrac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_U} = \dfrac{3 - 21}{6{,}981} \approx -2{,}579$

- La valeur critique au seuil α : $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la région critique $|z| \geq 1{,}96$

- La valeur p : $p = 2\,P(Z \geq 2{,}579) \approx 0{,}009922$

- Comme $p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.

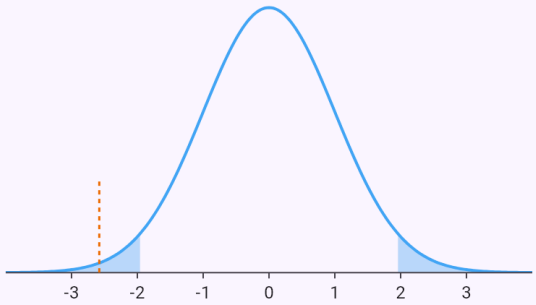
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.

- La taille d'effet r (repères : 0,1 petite, 0,3 moyenne, 0,5 grande) : $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{N}} = \dfrac{2{,}579}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7152$

- Le test de Mann-Whitney est un test des rangs : il ne suppose pas de loi normale et convient aussi aux données ordinales et aux valeurs aberrantes. Il compare les lois entières – pour des formes semblables, c'est un test de différence des médianes.

Graphique

Loi normale centrée réduite – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}579$

Valeurs appariées avant et après par le test de Wilcoxon.

Énoncé: `data(pred po; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71; 79 72)`

Test des rangs (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis) · Appariés

Résultat

$$T = 1$$
$$z \approx -2{,}205$$
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Hypothèse nulle : la médiane des différences est nulle (pas de changement), alternative : elle ne l'est pas : $H_0 : \tilde{d} = 0, \quad H_1 : \tilde{d} \neq 0$
- Les différences des paires d (1re colonne − 2e colonne) : $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 7$; les différences nulles sont écartées : $n = 7$
- On trie les différences non nulles selon leur taille (sans signe) et on les numérote par leur rang R ; le signe reste avec le rang

d_i	R	
-1	1	$-$
2	$2{,}5$	$+$
2	$2{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
4	6	$+$
7	7	$+$

- Les sommes des rangs des différences positives et négatives
  $T^+ = 27$
  $T^- = 1$
  $T = \min\left(T^+, T^-\right) = 1$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit la loi normale centrée réduite : $z = \dfrac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sigma_T} = \dfrac{1 - 14}{5{,}895} \approx -2{,}205$
- La valeur critique au seuil α : $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la région critique $|z| \geq 1{,}96$
- La valeur p : $p = 2\,P(Z \geq 2{,}205) \approx 0{,}02743$
- Comme $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- La taille d'effet r (repères : 0,1 petite, 0,3 moyenne, 0,5 grande) : $r = \dfrac{|z|}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}205}{\sqrt{7}} \approx 0{,}8335$
- Le test de Wilcoxon est l'équivalent par rangs du test t apparié : il ne suppose pas des différences normales et tient compte de leur signe et de leur taille par les rangs.

Graphique

Loi normale centrée réduite – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}205$

Trois groupes par le test de Kruskal-Wallis.

Énoncé: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

Test des rangs (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis)

Résultat

$$H \approx 8{,}263$$
$$p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- Hypothèse nulle : tous les groupes proviennent de la même loi, alternative : au moins un diffère

  $H_0 : F_1 = \cdots = F_3$

  $H_1 : \exists\, i, j : F_i \neq F_j$

- On trie ensemble les valeurs de tous les groupes et on les numérote par leur rang R (des valeurs égales reçoivent la moyenne de leurs rangs)

x	R	
11	1	A
12	2,5	A
12	2,5	C
13	4,5	A
13	4,5	C
14	6,5	A
14	6,5	C
15	9	A
15	9	B
15	9	C
16	11,5	B
16	11,5	C
17	13	B
18	14	B
19	15	B

- La somme des rangs de chaque groupe

  $R_{\mathrm{A}} = 23{,}5 \ (n = 5)$

  $R_{\mathrm{B}} = 62{,}5 \ (n = 5)$

  $R_{\mathrm{C}} = 34 \ (n = 5)$

- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{15 \cdot 16} \left(\frac{23{,}5^2}{5} \right.$$

$$C = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N} = 1 - \frac{48}{3360} \approx 0{,}9857$$

$$H_c = \frac{H}{C} = \frac{8{,}145}{0{,}9857} \approx 8{,}263$$

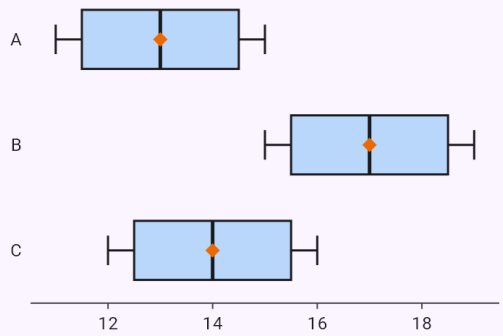
- La valeur critique au seuil α : $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la région critique $\chi^2 \geq 5{,}991$
- La valeur p : $p = P(\chi^2 \geq 8{,}263) \approx 0{,}01606$
- Comme $p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- La taille d'effet ε² – la part de la variance des rangs expliquée par les groupes :

  $\varepsilon^2 = \frac{H}{N-1} = \frac{8{,}263}{14} \approx 0{,}5902$

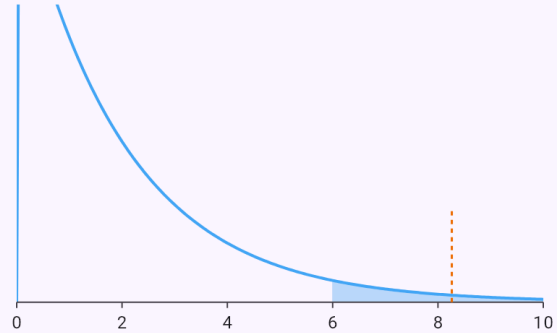
- Le test de Kruskal-Wallis est l'équivalent par rangs de l'ANOVA à un facteur. Il dit seulement que certains groupes diffèrent – lesquels, une comparaison par paires le montre (Mann-Whitney avec correction de Bonferroni).

Graphique

Boîte à moustaches (médiane, quartiles, valeurs aberrantes ; ◆ moyenne)



Loi du χ² – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 \approx 8{,}263$

Les moyennes de trois groupes par l'ANOVA à un facteur.

Énoncé: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

ANOVA (analyse de variance)

Résultat

$$F \approx 8{,}667$$
$$p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$\eta^2 \approx 0{,}5909$$

Étapes

- Hypothèse nulle : les moyennes de tous les groupes sont égales, alternative : au moins deux diffèrent

  $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_3$
  $H_1 : \exists\, i, j : \mu_i \neq \mu_j$

- Les effectifs, moyennes et écarts types des groupes et la moyenne générale $\bar{x} \approx 14{,}67$

	n_j	$\bar{x}_j$	s_j
A	5	13	1,581
B	5	17	1,581
C	5	14	1,581
$\sum$	15	14,67	

- Analyse de variance – somme des carrés entre les groupes (B) et à l'intérieur (W), degrés de liberté et carrés moyens

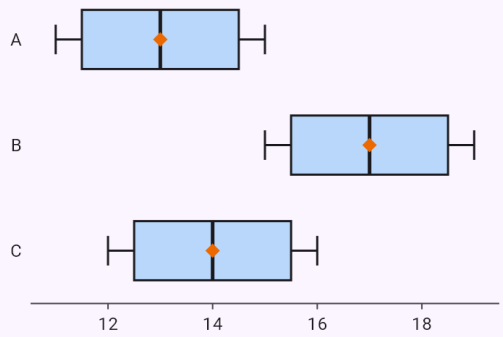
$$SS_B = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$
$$SS_W = \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

	SS	df	MS	F
B	43,33	2	21,67	8,667
W	30	12	2,5	
$\sum$	73,33	14		

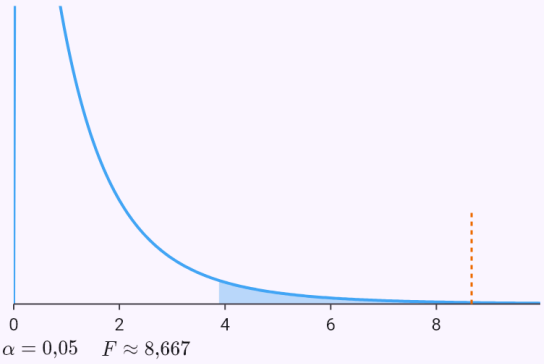
- La statistique de test – sous H_0, elle suit la loi F à 2 et 12 degrés de liberté : $F = \dfrac{MS_B}{MS_W} = \dfrac{21{,}67}{2{,}5} \approx 8{,}667$
- La valeur critique au seuil α : $F_{0{,}95}(2;\ 12) \approx 3{,}885$, la région critique $F \geq 3{,}885$
- La valeur p : $p = P(F \geq 8{,}667) \approx 0{,}004687$
- Comme $p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La taille d'effet η² – la part de la variance expliquée par les différences entre groupes (repères : 0,01 petite, 0,06 moyenne, 0,14 grande) : $\eta^2 = \dfrac{SS_B}{SS_T} = \dfrac{43{,}33}{73{,}33} \approx 0{,}5909$
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- L'ANOVA suppose des groupes indépendants, une loi à peu près normale dans chacun et des variances semblables. Sinon (petits groupes, valeurs aberrantes, données ordinales), utilisez le test de Kruskal-Wallis.
- Rejeter H_0 dit seulement qu'au moins deux moyennes diffèrent. Lesquelles, une comparaison par paires le montre (tests post hoc, p. ex. tests t avec correction de Bonferroni).

Graphique

Boîte à moustaches (médiane, quartiles, valeurs aberrantes ; ◆ moyenne)



Loi F – en couleur la région critique, en pointillés la statistique de test



$\alpha = 0{,}05$ $F \approx 8{,}667$

Test d'ajustement aux proportions attendues 1 : 2 : 1.

Énoncé: `data(30 50 20)` Test du χ² · Proportions attendues 1:2:1

Résultat

$$\chi^2 = 2$$
$$p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$$

Étapes

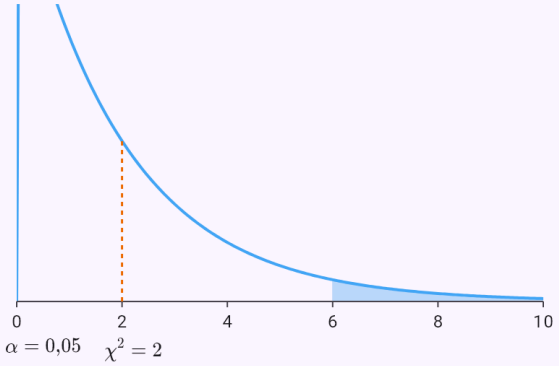
- Hypothèse nulle : les catégories ont les proportions données, alternative : au moins une proportion diffère : $H_0: p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}5,\ p_3 = 0{,}25$
- Les effectifs attendus selon les proportions données $E_i = N \cdot p_i, \quad N = 100$ et les contributions des catégories

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	30	25	1
2	50	50	0
3	20	25	1
$\sum$	100	100	2

- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi du χ² à 2 degrés de liberté : $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1 + 0 + 1 = 2$
- La valeur critique au seuil α : $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la région critique $\chi^2 \geq 5{,}991$
- La valeur p : $p = P(\chi^2 \geq 2) \approx 0{,}3679$
- Comme $p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle – les données n'apportent pas assez d'éléments contre elle.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le test du χ² travaille avec des effectifs (nombres de cas), pas avec des pourcentages ni des moyennes.

Graphique

Loi du χ² – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



Régression quadratique.

Énoncé: `data(x y; 1 2.1; 2 3.9; 3 9.2; 4 15.8; 5 25.1; 6 36.2)`

Corrélation et régression · Quadratique

Résultat

$$\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$$

$$R^2 \approx 0{,}9997$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 6$, données triées
  $[1\,;\,2{,}1],\ [2\,;\,3{,}9],\ [3\,;\,9{,}2],\ [4\,;\,15{,}8],\ [5\,;\,25{,}1],\ [6\,;\,36,$
- Sommes et moyennes
  $\sum x_i = 21$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum x_i^3 = 441$
  $\sum x_i^4 = 2275$
  $\sum y_i = 92{,}3$
  $\sum x_i y_i = 443{,}4$
  $\sum x_i^2 y_i = 2284$
- Les équations normales des moindres carrés pour ŷ = a + bx + cx²

$$\begin{aligned} 6a + 21b + 91c &= 92{,}3 \\ 21a + 91b + 441c &= 443{,}4 \\ 91a + 441b + 2275c &= 2284 \end{aligned}$$

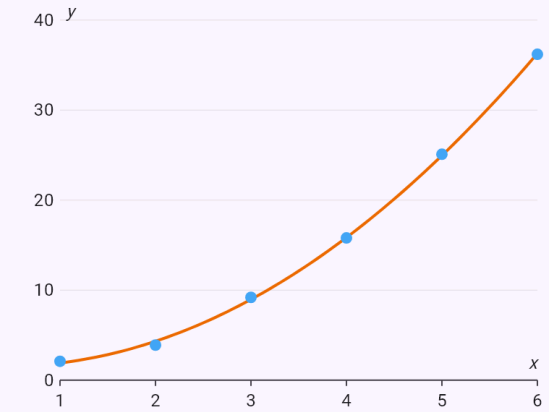
- La courbe de régression :
  $\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$
- Le coefficient de détermination – la courbe explique $99{,}97\,\%$ de la variance de y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}3012}{874{,}5} \approx 0{,}9997$$

- La courbe de régression n'est pertinente que dans l'étendue des x mesurés – en dehors (extrapolation), l'estimation peut être très imprécise.

Graphique

Nuage de points avec la courbe de régression



Régression exponentielle par linéarisation.

Énoncé: `data(x y; 0 2.0; 1 2.7; 2 3.7; 3 5.0; 4 6.8; 5 9.1)`

Corrélation et régression · Exponentielle

Résultat

$$\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$$

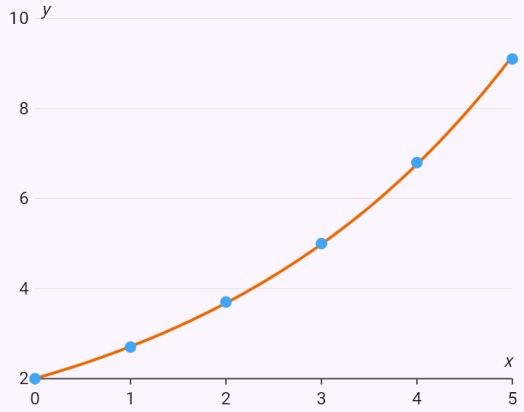
$$R^2 \approx 0{,}9998$$

Étapes

- Nombre de valeurs $n = 6$, données triées
  $[0\,;\,2],\ [1\,;\,2{,}7],\ [2\,;\,3{,}7],\ [3\,;\,5],\ [4\,;\,6{,}8],\ [5\,;\,9{,}1]$
- En passant aux logarithmes, le modèle devient une droite dans les variables (u, v) : $y = a\,e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$; les paires transformées
  $[0\,;\,0{,}6931],\ [1\,;\,0{,}9933],\ [2\,;\,1{,}308],\ [3\,;\,1{,}609],\ [4\,;\,1{,}9$
- Coefficients de la droite de régression par les moindres carrés
  $$b = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum (u_i - \bar{u})^2} = \frac{5{,}324}{17{,}5} \approx 0{,}3042$$
  $$\ln a = \overline{\ln y} - b\bar{x} = 1{,}455 - 0{,}3042 \cdot 2{,}5 \approx 0{,}6943$$
- Le coefficient a par la transformation inverse : $a = e^{0{,}6943} \approx 2{,}002$
- La courbe de régression : $\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$
- Le coefficient de détermination – la courbe explique $99{,}98\,\%$ de la variance de y.
  $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}006563}{35{,}95} \approx 0{,}9998$$
- Les coefficients sont ajustés par les moindres carrés sur les données transformées (logarithmes), pas sur les valeurs d'origine – le résultat peut différer légèrement d'une régression non linéaire des logiciels statistiques.
- La courbe de régression n'est pertinente que dans l'étendue des x mesurés – en dehors (extrapolation), l'estimation peut être très imprécise.

Graphique

Nuage de points avec la courbe de régression



Test t unilatéral à droite à partir de valeurs résumées : n = 25, x̄ = 104, s = 15, μ_0 = 100.

Énoncé: `model(ttest; find=test[one]; n=25[one]; mean=104[one]; sd=15[one]; mu0=100[one];`

```
alpha=0.05[one]; alternative=greater; sigma=sample)
```

Résultat

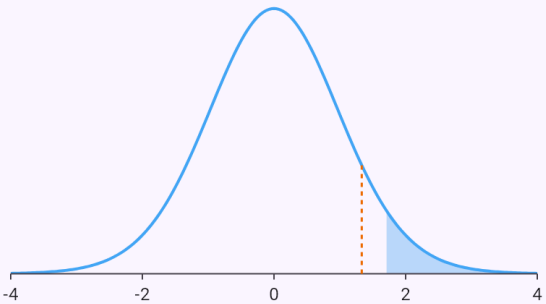
$$t \approx 1{,}333$$
$$p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- On cherche t ; données :
  $n = 25, \quad \bar{x} = 104, \quad s = 15, \quad \mu_0 = 100, \quad \alpha = 0{,}05$
- Le test t vérifie si la moyenne de la population diffère d'une valeur μ_0. La statistique $t = (\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n})$ suit sous l'hypothèse nulle une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté ; la valeur p indique la probabilité d'un résultat aussi ou plus extrême si H_0 était vraie. Avec σ connu, c'est un test z. Équation du modèle : $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative :
  $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu > 100$
- L'erreur type : $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{15}{\sqrt{25}} = 3$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi de Student à 24 degrés de liberté :
  $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{104 - 100}{3} \approx 1{,}333$
- La valeur critique au seuil α : $t_{0{,}95}(24) \approx 1{,}711$, la région critique $t \geq 1{,}711$
- La valeur p : $p = P(T \geq 1{,}333) \approx 0{,}09747$
- Comme $p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle – les données n'apportent pas assez d'éléments contre elle.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Pour un petit échantillon (n < 30), la loi de Student suppose des données issues d'une loi à peu près normale. Avec des données très asymétriques ou des valeurs aberrantes, un test non paramétrique convient mieux.

Graphique

Loi de Student – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 1{,}333$

Test t de Welch de deux groupes à partir de valeurs résumées.

Énoncé: `model(twosample; find=test[one]; n1=30[one]; mean1=52[one]; sd1=8[one]; n2=28[one];`

```
mean2=47[one]; sd2=10[one]; alpha=0.05[one]; variances=welch; alternative=two)
```

Résultat

$$t \approx 2{,}093$$

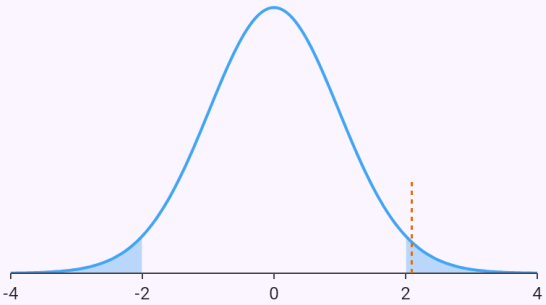
$$p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$$

Étapes

- On cherche t ; données
  $n_1 = 30, \quad \bar{x}_1 = 52, \quad s_1 = 8, \quad n_2 = 28, \quad \bar{x}_2 = 47,$
- Comparaison des moyennes de deux groupes indépendants. Le test de Welch ne suppose pas l'égalité des variances et est aujourd'hui recommandé ; le test t classique à variance commune suppose que les deux groupes ont la même variance. Il suffit des effectifs, moyennes et écarts types des deux groupes. Équation du modèle : $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative :
  $H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- L'erreur type
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{28}} \approx 2{,}388$$
- Les degrés de liberté de Welch-Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 51{,}71$$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit une loi de Student à $51{,}71$ degrés de liberté :
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{52 - 47}{2{,}388} \approx 2{,}093$$
- La valeur critique au seuil α : $t_{0{,}975}(51{,}71) \approx 2{,}007$, la région critique $|t| \geq 2{,}007$
- La valeur p : $p = 2\,P(T \geq 2{,}093) \approx 0{,}04124$
- Comme $p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le test de Welch ne suppose pas l'égalité des variances des groupes ; ses degrés de liberté v ne sont pas forcément entiers.

Graphique

Loi de Student – en grisé la région critique, en pointillés la valeur de la statistique



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}093$

Loi normale : P(X < 85) pour N(100 ; 15²).

Énoncé: `model(normal; find=below[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; x=85[one])`

Résultat

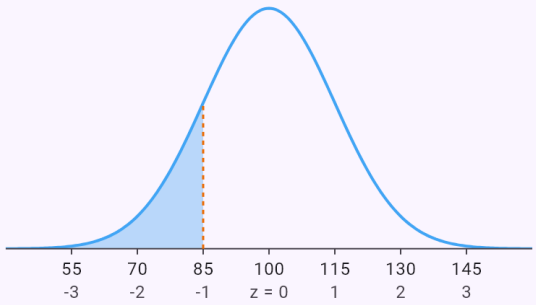
$$P(X < 85) \approx 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$$

Étapes

- On cherche P ; données : $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad x = 85$
- Beaucoup de grandeurs (taille, performance à un test, erreur de mesure) varient symétriquement autour de la moyenne μ, d'autant plus rarement qu'on s'en éloigne : c'est la loi normale (de Gauss) N(μ ; σ²) d'écart type σ. On calcule les probabilités en centrant-réduisant, z = (x − μ)/σ, avec la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite N(0 ; 1) : P(X < x) = Φ(z). Un quantile est la valeur en dessous de laquelle se trouve la proportion p. Équation du modèle
  $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0\,;\,1)$
- On exprime la grandeur cherchée : $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$
- On remplace : $z = \dfrac{85-100}{15} = -1$
- On remplace
  $P(X < 85) = \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) \approx (1 - 0{,}8413) \approx 0$

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$P \approx 0{,}1587 \quad x = 85$

La part des personnes mesurant entre 160 et 185 cm avec μ = 170, σ = 8.

Énoncé: `model(normal; find=between[one]; mu=170[one]; sigma=8[one]; a=160[one];`

```
b=185[one])
```

Résultat

$$P(160 < X < 185) \approx 0{,}864 = 86{,}4\,\%$$

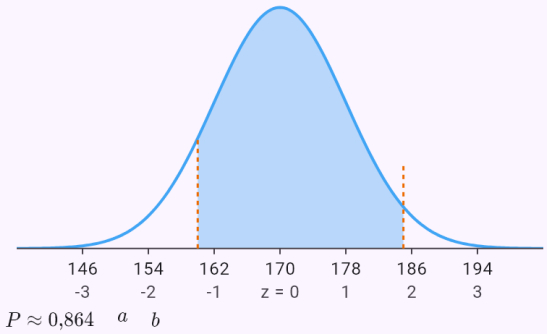
Étapes

- On cherche P ; données :
  $\mu = 170, \quad \sigma = 8, \quad a = 160, \quad b = 185$
- Beaucoup de grandeurs (taille, performance à un test, erreur de mesure) varient symétriquement autour de la moyenne μ, d'autant plus rarement qu'on s'en éloigne : c'est la loi normale (de Gauss) N(μ ; σ²) d'écart type σ. On calcule les probabilités en centrant-réduisant, z = (x − μ)/σ, avec la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite N(0 ; 1) : P(X < x) = Φ(z). Un quantile est la valeur en dessous de laquelle se trouve la proportion p. Équation du modèle
  $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0\,;\,1)$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $z_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
- On remplace :
  $z_a = \dfrac{160 - 170}{8} = -1{,}25, \quad z_b = \dfrac{185 - 170}{8} = 1{,}875$
- On remplace

$$P(160 < X < 185) = \Phi(1{,}875) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}9696$$

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



Un quantile : la note en dessous de laquelle se trouvent 95 % de la population.

Énoncé: `model(normal; find=quantile[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; p=95[pct])`

Résultat

$$x \approx 124{,}7$$

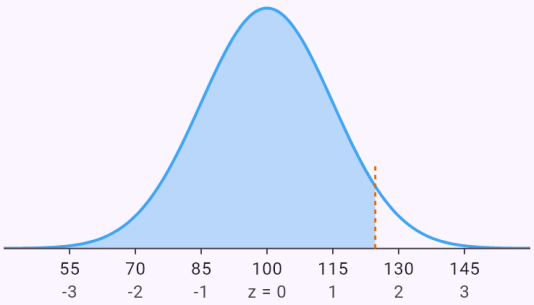
Étapes

- On cherche x ; données :
  $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad p = 95\,\%$
- On convertit les unités : $p = 95\,\% = 0{,}95$
- Beaucoup de grandeurs (taille, performance à un test, erreur de mesure) varient symétriquement autour de la moyenne μ, d'autant plus rarement qu'on s'en éloigne : c'est la loi normale (de Gauss) N(μ ; σ²) d'écart type σ. On calcule les probabilités en centrant-réduisant, z = (x − μ)/σ, avec la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite N(0 ; 1) : P(X < x) = Φ(z). Un quantile est la valeur en dessous de laquelle se trouve la proportion p. Équation du modèle
  $$X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$$
  $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0\,;\,1)$$
- On exprime la grandeur cherchée
  $$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow x = \mu + z_p\sigma, \quad z_p = $$
- On remplace

$$z_{0{,}95} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645, \quad x = 100 + 1{,}645 \cdot 15 \approx 1$$

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$p = 0{,}95 \quad x \approx 124{,}7$

Limitations connues

- Les quartiles sont les médianes des moitiés (la méthode scolaire) ; les logiciels statistiques (Excel, SPSS) utilisent d'autres formules et peuvent obtenir des valeurs un peu différentes sur peu de données.
- La comparaison des groupes deux à deux après l'ANOVA ou le test de Kruskal-Wallis (post hoc) et l'ANOVA à plusieurs facteurs ne sont pas encore disponibles – comparez les paires par un test t ou de Mann-Whitney avec correction de Bonferroni ; les régressions non linéaires se calculent par linéarisation.
- Les données se saisissent seulement à la main, par la grille ou un fichier CSV – l'appli ne reconnaît pas encore un tableau sur une photo.