Mathtrace – guide d’utilisation

VII. Applications : sciences, économie et optimisation

Sommaire

VII. Applications : sciences, économie et optimisation

47. Chimie

48. Électrotechnique

49. Biologie et médecine

50. Économie, finance et assurance

51. Programmation linéaire, transport, affectation et jeux matriciels

52. Graphes, réseaux et logistique

53. Psychométrie

47. Chimie

Les calculs de chimie se trouvent dans la section « Applications » de l'écran d'accueil, domaine Chimie : équilibrage d'une équation chimique, pH d'un acide, d'une base, d'un sel ou d'un polyacide, solution tampon, titrage avec sa courbe, loi d'Arrhenius et loi de Beer–Lambert. Dans le formulaire, choisissez le problème et la grandeur cherchée et remplissez les valeurs avec leurs unités ; l'icône « ? » explique d'où vient la formule. Les petites constantes s'écrivent 1.8e-5 ou 1,8·10^-5, les valeurs mesurées (un tableau de températures, un étalonnage) comme des nombres séparés par des espaces.

Une équation chimique se saisit simplement dans la saisie manuelle, par exemple Fe + O2 -> Fe2O3 (flèche -> ou =, équilibre <=>), aussi avec des ions MnO4^- et Fe^3+, des parenthèses Ca(OH)2, des hydrates CuSO4·5H2O et des états (aq). Les coefficients sont le noyau de la matrice de conservation des éléments (et de la charge) : la résolution écrit les équations de conservation, la matrice, sa forme réduite par la méthode de Gauss, le coefficient libre comme paramètre et les plus petits entiers, puis la vérification. Elle reconnaît aussi une équation impossible à équilibrer (un élément d'un seul côté, une espèce du mauvais côté) ou dont l'équilibrage n'est pas unique.

Le pH est calculé exactement (pour un acide faible par une équation du second degré), avec l'approximation scolaire et le taux de dissociation ; pour un polyacide, l'électroneutralité est résolue numériquement et le graphique montre les proportions des formes de l'acide en fonction du pH. Pour un tampon auquel on ajoute un acide ou une base forte, on calcule le nouvel équilibre et la variation du pH. Un titrage donne le pH selon la zone de la courbe (début, zone tampon, équivalence, excès de titrant) et le graphique montre toute la courbe de titrage. La loi d'Arrhenius à partir de deux mesures ou d'un tableau par régression de ln k en fonction de 1/T ; la loi de Beer–Lambert à partir de ε connu, d'un étalon ou d'une droite d'étalonnage.

Exemples

Équilibrage de l'oxydation de l'acide chlorhydrique par le permanganate.

Énoncé: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Résultat

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{MnC}$$

Étapes

- On désigne les coefficients inconnus par des lettres
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Les atomes ne sont ni créés ni détruits – chaque élément a autant d'atomes à gauche qu'à droite

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad a = c \\ \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = f \\ \mathrm{H}: &\quad b = 2f \\ \mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g \end{aligned}$$

- Le système homogène sous forme matricielle – une colonne par espèce, les produits avec un signe moins

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- La méthode de Gauss ramène la matrice à sa forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

- Un coefficient reste libre, $g = t$; les autres s'expriment en fonction de lui

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- On choisit $t = 5$ pour que tous les coefficients soient les plus petits entiers :
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Vérification – atomes à gauche et à droite

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\ \mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\ \mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16 \end{aligned}$$

Une équation redox ionique avec conservation de la charge.

Énoncé: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Résultat

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5$$

Étapes

- On désigne les coefficients inconnus par des lettres

$$a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$$

- Les atomes ne sont ni créés ni détruits et la charge se conserve (ligne q) – pour chaque élément et pour la charge

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$

- Le système homogène sous forme matricielle – une colonne par espèce, les produits avec un signe moins

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- La méthode de Gauss ramène la matrice à sa forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

- Un coefficient reste libre, $g = t$; les autres s'expriment en fonction de lui

$$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$

- On choisit $t = 4$ pour que tous les coefficients soient les plus petits entiers :

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$$

- Vérification – atomes et charge à gauche et à droite

$$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH de l’acide acétique 0,1 M (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Énoncé: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Résultat

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Étapes

- On cherche pH ; données : $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- Le pH est l’opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydrogène (oxonium) : pH = −log[H⁺]. Un acide fort (HCl) est entièrement dissocié, donc [H⁺] = c ; une base forte donne [OH⁻] = c et pH = 14 − pOH. Un acide faible HA ⇌ H⁺ + A⁻ ne se dissocie qu’en partie selon sa constante d’acidité Ka = [H⁺][A⁻]/[HA] ; on en tire l’équation du second degré x² + Ka·x − Ka·c = 0. Le sel d’un acide faible et d’une base forte (acétate de sodium) réagit avec l’eau comme une base avec Kb = Kw/Ka, le sel d’une base faible (NH_4Cl) comme un acide. Pour un polyacide (H_2SO_4, H_3PO_4), l’électroneutralité est résolue numériquement. À 25 °C, Kw = 10⁻¹⁴. Équation du modèle

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- On exprime la grandeur cherchée

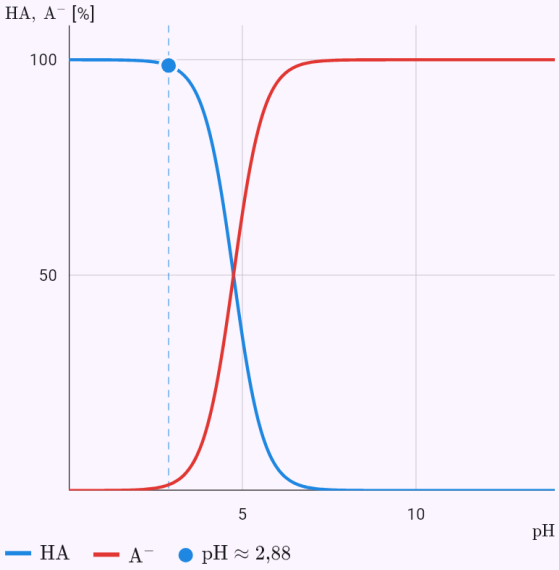
$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$

- On remplace

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Taux de dissociation : $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Le taux de dissociation est inférieur à 5 %, l’approximation c − x ≈ c suffirait donc aussi : $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$
- Le pH est l’opposé du logarithme de la concentration en $\mathrm{H^+}$: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

pH de l’acide phosphorique 0,1 M et proportions de ses formes.

Énoncé: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

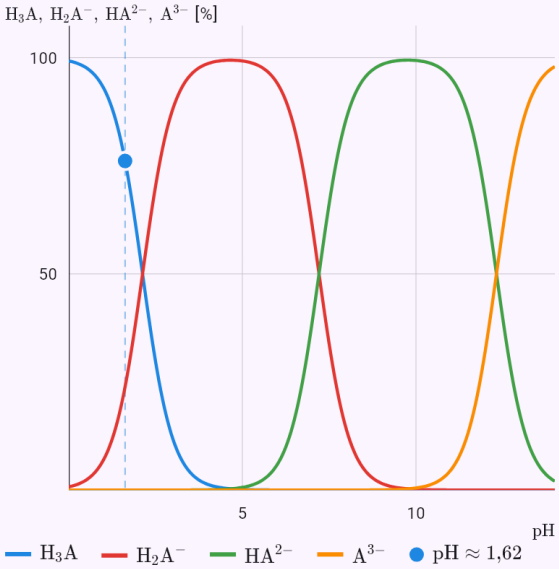
Résultat

$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$

Étapes

- On cherche pH ; données
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- Le pH est l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydrogène (oxonium) : pH = −log[H⁺]. Un acide fort (HCl) est entièrement dissocié, donc [H⁺] = c ; une base forte donne [OH⁻] = c et pH = 14 − pOH. Un acide faible HA ⇌ H⁺ + A⁻ ne se dissocie qu'en partie selon sa constante d'acidité Ka = [H⁺][A⁻]/[HA] ; on en tire l'équation du second degré x² + Ka·x − Ka·c = 0. Le sel d'un acide faible et d'une base forte (acétate de sodium) réagit avec l'eau comme une base avec Kb = Kw/Ka, le sel d'une base faible (NH_4Cl) comme un acide. Pour un polyacide (H_2SO_4, H_3PO_4), l'électroneutralité est résolue numériquement. À 25 °C, Kw = 10^{-14}. Équation du modèle
  $\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{H_2A^-} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{HA^{2-}} \rightleftharpoons 3\,\mathrm{H^+} + \mathrm{A^{3-}}$
- La solution est électriquement neutre – électroneutralité
  $[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$
- Concentrations des formes de l'acide à partir des constantes d'acidité
  $[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1} \cdots K_{ai}\, h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$
- On résout l'équation numériquement (dichotomie) :
  $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › La méthode : dichotomie, 14 itérations
- Le pH est l'opposé du logarithme de la concentration en H^+ : $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- La deuxième constante est bien plus petite que la première : le pH est fixé surtout par la première acidité, comme pour un monoacide faible
  $x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$
- Proportions des formes de l'acide à ce pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Un tampon acétate après ajout de 1 mmol d'acide fort.

Énoncé: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];`

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Résultat

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Étapes

- On cherche pH ; données
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- On convertit les unités
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Constante à partir du pK :
  $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Une solution tampon est un mélange d'un acide faible et de son sel (CH_3COOH + CH_3COONa) ou d'une base faible et de son sel (NH_3 + NH_4Cl). La constante d'acidité donne l'équation de Henderson–Hasselbalch pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Un acide fort ajouté transforme la forme basique en forme acide (A^- + H^+ → HA), une base fait l'inverse : le rapport des formes change peu, donc le pH change à peine. Un tampon fonctionne le mieux pour un rapport de 0,1 à 10, soit pH = pKa ± 1. Équation du modèle
  $$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Quantités de matière des formes du tampon
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- L'espèce ajoutée réagit avec une forme du tampon
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \to \mathrm{HA}$: $\quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,\mathrm{m}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \frac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$$
- On remplace : $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log \dfrac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH avant l'ajout et sa variation :
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Titrage de l'acide acétique par la soude – l'équivalence.

Énoncé: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

`5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)`

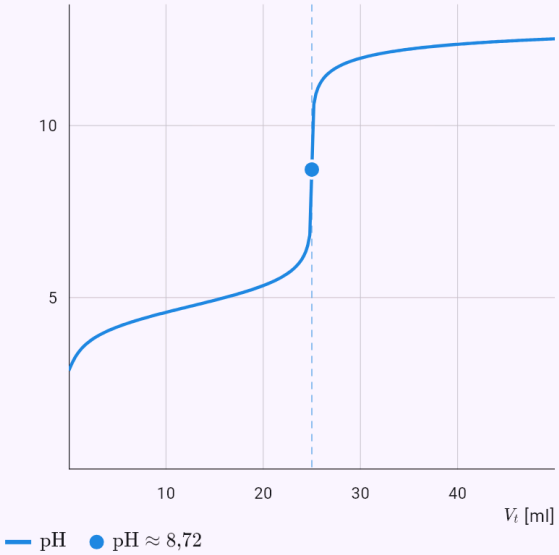
Résultat

$$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$$

Étapes

- On cherche pH ; données
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- Lors d'un titrage, on verse depuis la burette un réactif titrant de concentration connue jusqu'à ce que tout le réactif titré ait réagi. L'équivalence est atteinte quand la quantité de titrant $c_t \cdot V_t$ égale celle du titré : $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Avant, le pH dépend du titré restant (un acide faible forme un tampon), à l'équivalence de la réaction avec l'eau du sel formé, après, de l'excès de titrant. La courbe de titrage du graphique est calculée exactement à partir de l'électroneutralité. Équation du modèle :
  $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Équivalence – autant de titrant que de titré
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \dfrac{c_a V_a}{c_t} = \dfrac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Titrant versé et volume total :
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- L'équivalence – tout le titré a réagi.
- À l'équivalence, il ne reste que le sel formé – sa réaction avec l'eau
  $c_{\mathrm{A^-}} = \dfrac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \dfrac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10$
- pOH et pH (pH + pOH = 14)
  $\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Énergie d'activation à partir d'un tableau de constantes de vitesse.

Énoncé: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

Résultat

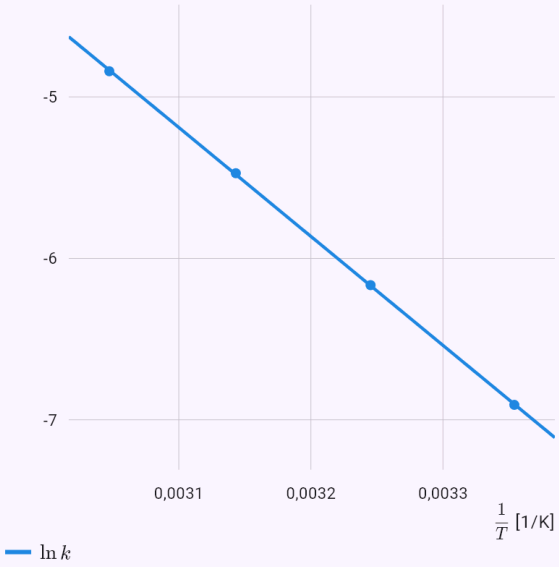
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Étapes

- On cherche E_a ; données
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- On convertit les unités :
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- La constante de vitesse d'une réaction croît avec la température selon la loi d'Arrhenius k = A·e^(−Ea/RT), où Ea est l'énergie d'activation – la barrière que doivent franchir les molécules qui se heurtent – et A le facteur préexponentiel. Deux mesures donnent $\ln(k_2/k_1) = (Ea/R)(1/T_1 - 1/T_2)$. Avec plus de mesures, Ea s'obtient par une droite de régression : ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) est une droite en 1/T (diagramme d'Arrhenius) de pente −Ea/R. Équation du modèle :
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- En passant au logarithme, on obtient une droite
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Valeurs pour la droite de régression
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Droite de régression des moindres carrés
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- On exprime la grandeur cherchée : $E_a = -bR$
- On remplace :
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Facteur préexponentiel : $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Concentration d'un échantillon à partir d'une droite d'étalonnage.

Énoncé: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299`

`0.452 0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

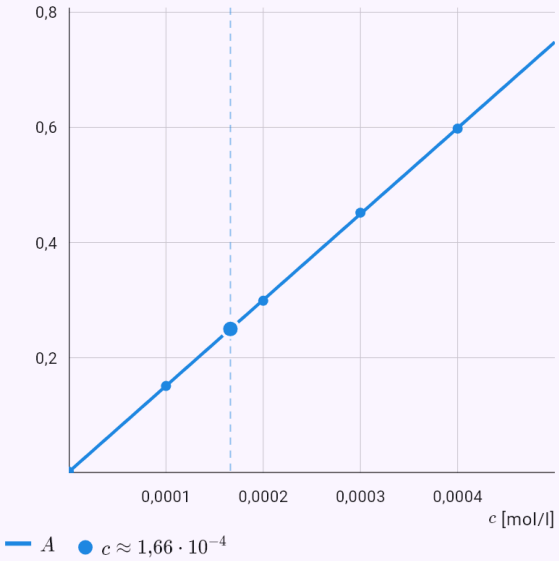
Résultat

$$c \approx 0{,}166\,\text{mmol/l}$$

Étapes

- On cherche c ; données
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\,\text{mmol/l},\quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- On convertit les unités
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot10^{-4};\ 3\cdot10^{-4};\ 4\cdot10^{-4}\right)\,\text{mol/l}$
- Une solution absorbe la lumière proportionnellement à la concentration de l'espèce absorbante et à l'épaisseur traversée : l'absorbance A = ε·l·c (loi de Beer–Lambert), où ε est le coefficient d'absorption molaire et l la longueur de la cuve. Un spectrophotomètre mesure la transmittance T – la part de lumière transmise – et A = −log T. Une concentration inconnue s'obtient à partir de ε connu, par comparaison avec un étalon de concentration connue ou à partir d'une droite d'étalonnage mesurée sur plusieurs étalons (moindres carrés). La loi vaut pour les solutions diluées. Équation du modèle : $A = \varepsilon\, l\, c$
- Droite d'étalonnage des moindres carrés
  $A = a + b\,c:\quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\text{l/m}$
- On exprime la grandeur cherchée : $c = \dfrac{A-a}{b}$
- On remplace : $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\text{mol/l}$
- On convertit les unités :
  $c \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\text{mol/l} = 0{,}1662\,\text{mmol/l}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Cémentation de l'acier – durée pour 0,8 % de carbone à 0,5 mm de profondeur.

Énoncé: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

`cx=0.8[pct]; x=0.5[mm]; process=carburizing)`

Résultat

$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

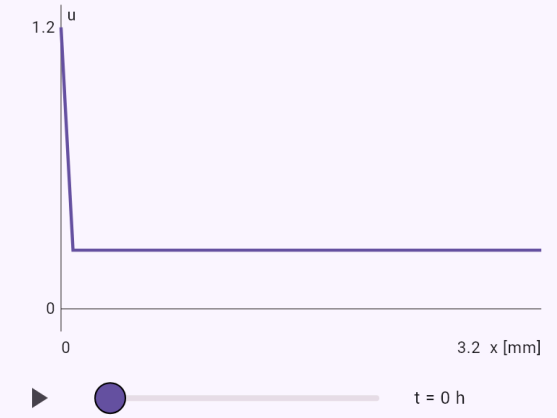
Étapes

- On cherche t ; données
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- On convertit les unités
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Une substance diffuse depuis une surface maintenue à la concentration c_s dans un corps de concentration initiale c_0 – par exemple du carbone dans l'acier lors de la cémentation. L'équation de diffusion c_t = D·c_xx s'applique ; pour un corps infiniment épais par rapport à la profondeur de pénétration, la transformée de Laplace en temps la résout : c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) avec la fonction d'erreur complémentaire. On en tire la concentration à une profondeur, la profondeur d'une concentration voulue ou la durée nécessaire. Équation du modèle
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Solution par la transformée de Laplace (corps semi-infini) : $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Fonction d'erreur complémentaire inverse
  $\operatorname{erfc} z = \frac{c - c_0}{c_s - c_0} = \frac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$
- On exprime la grandeur cherchée : $t = \frac{x^2}{4Dz^2}$
- On remplace
  $t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$

- La profondeur typique de pénétration est √(Dt) : $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Une profondeur double demande un temps quadruple.
- On convertit les unités : $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0 h

La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Concentration de carbone à 0,5 mm de profondeur après 7 heures.

Énoncé: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

```
x=0.5[mm]; t=7[h]; process=carburizing)
```

Résultat

$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

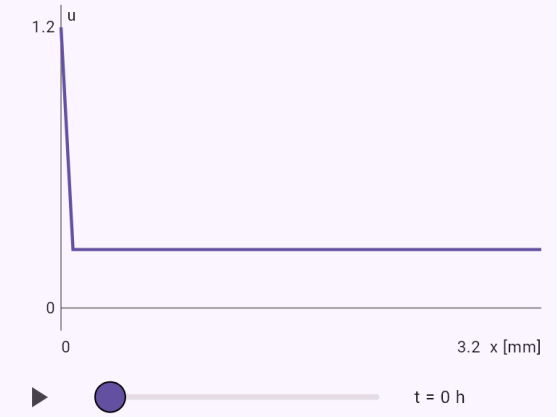
Étapes

- On cherche c ; données $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- On convertit les unités $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Une substance diffuse depuis une surface maintenue à la concentration c_s dans un corps de concentration initiale c_0 – par exemple du carbone dans l'acier lors de la cémentation. L'équation de diffusion c_t = D·c_xx s'applique ; pour un corps infiniment épais par rapport à la profondeur de pénétration, la transformée de Laplace en temps la résout : c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) avec la fonction d'erreur complémentaire. On en tire la concentration à une profondeur, la profondeur d'une concentration voulue ou la durée nécessaire. Équation du modèle $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Solution par la transformée de Laplace (corps semi-infini) : $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argument de la fonction d'erreur $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \operatorname{erfc}$
- On remplace : $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$

- La profondeur typique de pénétration est √(Dt) : $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Une profondeur double demande un temps quadruple.
- On convertit les unités : $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0 h

La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Limitations connues

- Le pH et les titrages supposent 25 °C (Kw = 10^{-14}) et des solutions diluées – les coefficients d'activité ne sont pas calculés.
- Titrages d'un monoacide ou d'une monobase par un titrant fort uniquement ; les polyacides pour l'instant seulement comme pH d'une solution.
- Une équation chimique n'est pas encore reconnue sur une photo – saisissez-la dans la saisie manuelle ou le formulaire.

48. Électrotechnique

Les calculs d'électrotechnique se trouvent sur l'écran d'accueil, dans la section « Applications », domaine Électrotechnique : circuit RLC série et parallèle en courant alternatif, filtres RC et RL, circuit résonant, diviseur de tension, pont de Wheatstone et compensation du facteur de puissance. Dans le formulaire, on choisit le montage et la grandeur cherchée, puis on saisit les valeurs avec leurs unités ; l'icône « ? » explique d'où viennent les formules. Tensions et courants sont des valeurs efficaces, les nombres complexes s'écrivent avec j comme en électrotechnique.

Pour chaque circuit, l'app dessine son schéma avec les valeurs des composants et, en alternatif, la réponse en fréquence sur un axe logarithmique – l'impédance et la phase, pour les filtres le gain en décibels (diagramme de Bode). La démarche montre les réactances, l'impédance sous forme algébrique et polaire (50∠53,13° Ω), le déphasage, les courants, les tensions des composants et la puissance ; elle explique aussi pourquoi les tensions des composants s'ajoutent comme des phaseurs.

Un circuit série-parallèle peut s'écrire comme une expression, p. ex. R1 + (L1 || (R2 + C1)) avec les valeurs R1=100 L1=10m C1=1u (préfixes m, u, n, k, M). La démarche simplifie le circuit groupe par groupe, puis calcule la tension et le courant de chaque composant. Un circuit quelconque (avec ponts et plusieurs sources) se saisit comme une netlist, comme dans SPICE – un composant par ligne avec ses nœuds, le nœud 0 est la masse ; la démarche écrit la loi des nœuds de Kirchhoff, la matrice du système et le résout par l'élimination de Gauss. Sans fréquence, on calcule en continu.

Exemples

Circuit RLC série : puissances active et réactive, facteur de puissance.

Énoncé: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF]; f=50[Hz];`

```
parts=rlc)
```

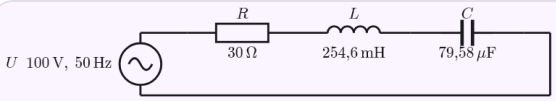
Résultat

$$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$$
$$Q \approx 160\,\mathrm{var}$$
$$S \approx 200\,\mathrm{VA}$$
$$\cos\varphi \approx 0{,}6$$

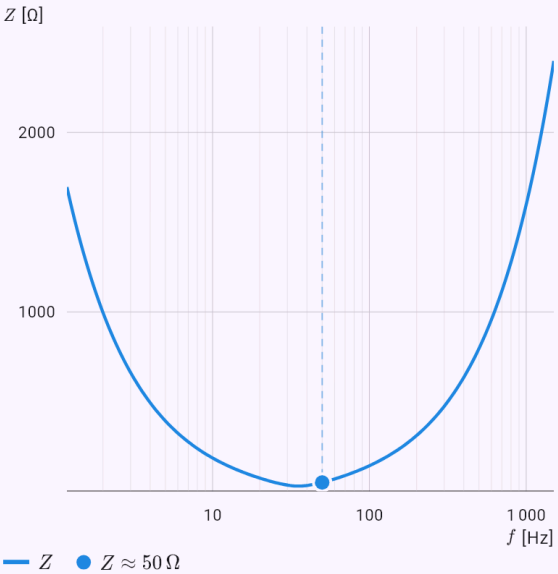
Étapes

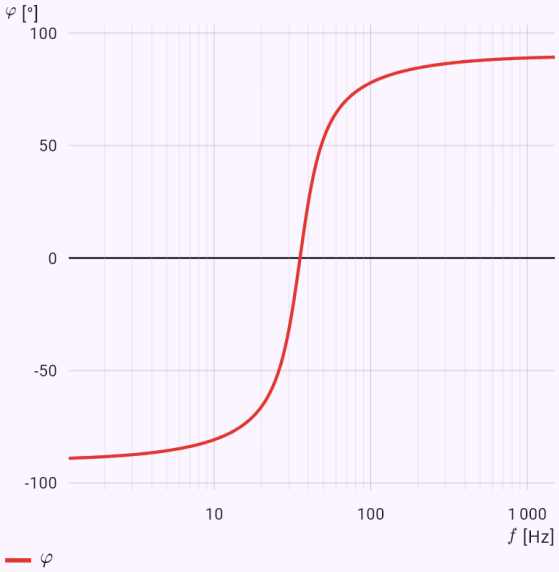
- On cherche P ; données
  $U = 100\,\mathrm{V},\quad R = 30\,\Omega,\quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH},\quad C = 79{,}5$
- On convertit les unités
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H},\quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- En courant alternatif, la bobine et le condensateur s'opposent au courant par une résistance qui dépend de la fréquence, la réactance : inductive X_L = ωL, qui croît avec la fréquence, capacitive X_C = 1/(ωC), qui décroît (ω = 2πf). La tension de la bobine est en avance de 90° sur le courant, celle du condensateur en retard de 90° ; elles ne s'ajoutent donc pas arithmétiquement mais comme des phaseurs, des nombres complexes avec l'unité imaginaire j : l'impédance Z = R + j(X_L − X_C), son module Z = √(R² + (X_L − X_C)²) et le déphasage φ = arctan((X_L − X_C)/R). Le courant I = U/Z, la puissance active P = UI·cos φ. Tensions et courants sont des valeurs efficaces. Équation du modèle :
  $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Pulsation : $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Réactance inductive de la bobine :
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- Réactance capacitive du condensateur
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Module de l'impédance – la réactance et la résistance sont des phaseurs perpendiculaires
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- L'impédance comme nombre complexe (forme algébrique et polaire)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Déphasage du courant par rapport à la tension :
  $\varphi = \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Le circuit est inductif – le courant est en retard sur la tension.
- Fréquence de résonance : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- Le courant par la loi d'Ohm : $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Puissances active, réactive et apparente
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Facteur de puissance : $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Schéma du circuit



Réponse en fréquence





L'axe horizontal est logarithmique – chaque graduation vaut dix fois la fréquence. Les points sont la fréquence donnée et les points remarquables.

Circuit RLC parallèle : courants des branches et courant total.

Énoncé: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

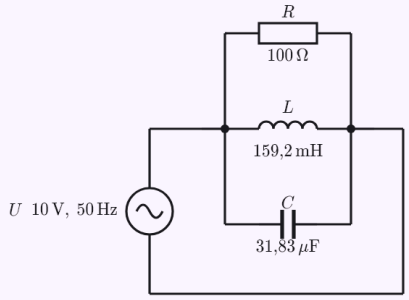
Résultat

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

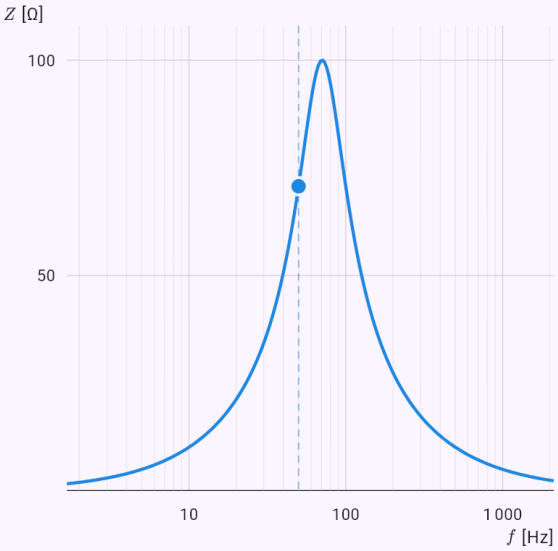
Étapes

- On cherche I ; données
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- On convertit les unités
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- Dans un circuit parallèle, toutes les branches ont la même tension et les courants des branches s'ajoutent comme des phaseurs. Ce sont donc les inverses des impédances qui s'ajoutent, les admittances : Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). Le courant de la résistance est en phase avec la tension, celui de la bobine en retard de 90°, celui du condensateur en avance de 90°. Le courant total I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) peut être plus petit que les courants des branches : à la résonance, les courants de la bobine et du condensateur s'annulent. Équation du modèle
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Pulsation : $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Réactance inductive de la bobine :
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Réactance capacitive du condensateur
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admittance – les inverses des impédances des branches s'ajoutent comme des phaseurs
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impédance du circuit : $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- L'impédance comme nombre complexe (forme algébrique et polaire)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Déphasage du courant par rapport à la tension
  $$\varphi = \arctan\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Le circuit est inductif – le courant est en retard sur la tension.
- Fréquence de résonance : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Courants des branches – toutes ont la même tension
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- Courant total – la somme des phaseurs des courants des branches : $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$
- Les courants des branches s'ajoutent comme des phaseurs, pas arithmétiquement – ceux de la bobine et du condensateur sont en opposition de phase.

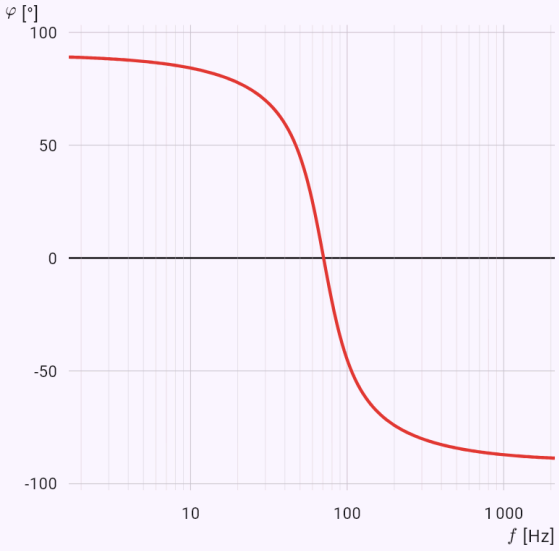
Schéma du circuit



Réponse en fréquence



Z $Z \approx 70{,}7\,\Omega$



φ

L'axe horizontal est logarithmique – chaque graduation vaut dix fois la fréquence. Les points sont la fréquence donnée et les points remarquables.

Passe-bas RC : gain en décibels et diagramme de Bode.

Énoncé: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

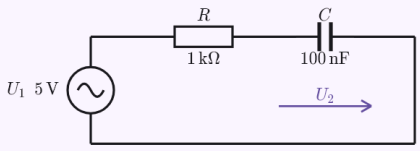
Résultat

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

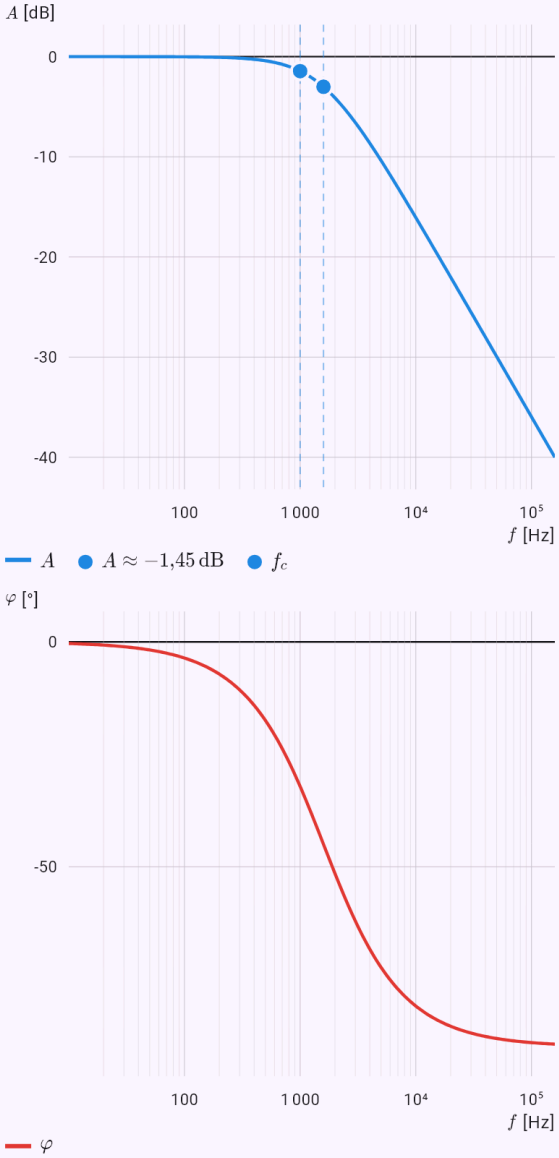
Étapes

- Données
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad f = 1\,\mathrm{kHz}, \quad U_1 = 5\,\mathrm{V}$
- On convertit les unités
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad f = 1$
- Un filtre du premier ordre est un diviseur de tension formé d'une résistance et d'un condensateur (ou d'une bobine). Le passe-bas (RC avec la sortie aux bornes du condensateur) laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes ; le passe-haut fait l'inverse. La fréquence de coupure f_c = 1/(2πRC), pour RL f_c = R/(2πL) : la tension de sortie y tombe à 1/√2 ≈ 70,7 % (−3 dB) et le déphasage vaut 45°. La fonction de transfert H = U_2/U_1 est un nombre complexe ; son module en décibels A = 20·log|H| et sa phase forment le diagramme de Bode – au-dessus de la coupure, un passe-bas chute de 20 dB par décade. Équation du modèle
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Passe-bas : les basses fréquences passent, les hautes sont atténuées.
- Fréquence de coupure :
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$
- À la fréquence de coupure, le gain vaut 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) et le déphasage 45°.
- La fréquence rapportée à la coupure :
  $$\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$$
- Module du gain :
  $$|\hat{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$$
- Gain en décibels : $A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$
- Déphasage de la sortie par rapport à l'entrée :
  $$\varphi = -\arctan \frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Tension de sortie : $U_2 = |\hat{H}|\,U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$

Schéma du circuit



Réponse en fréquence



L'axe horizontal est logarithmique – chaque graduation vaut dix fois la fréquence. Les points sont la fréquence donnée et les points remarquables.

Circuit résonant série : facteur de qualité et bande passante.

Énoncé: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

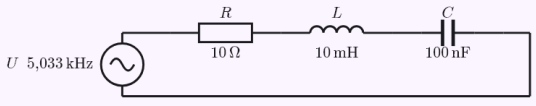
Résultat

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\text{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\text{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\text{Hz}$$

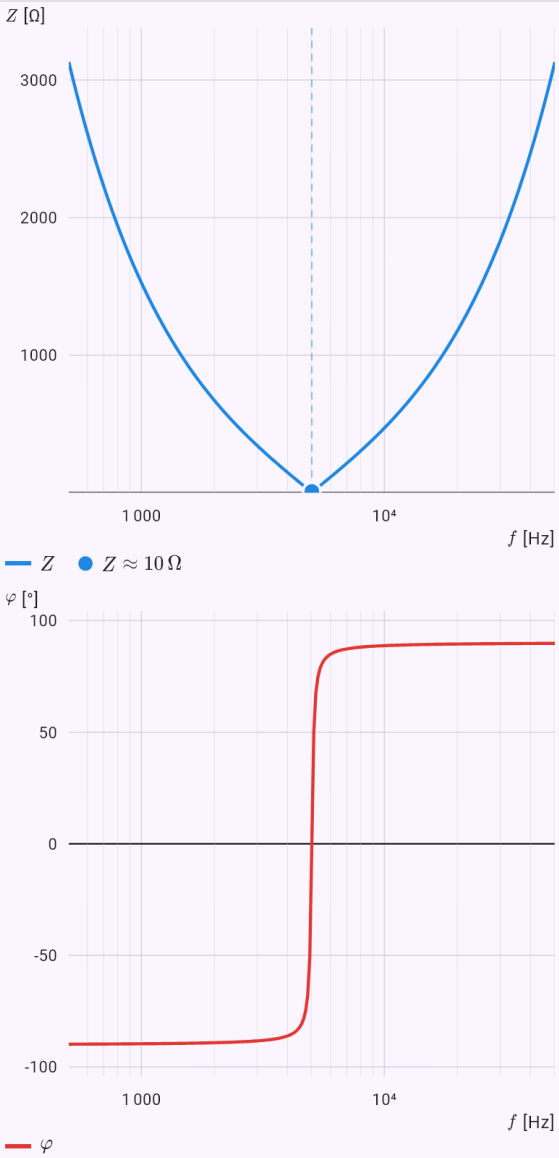
Étapes

- Données : $L = 10\,\text{mH}, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- On convertit les unités :
  $L = 10\,\text{mH} = 0{,}01\,\text{H}, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}$
- À la fréquence de résonance $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, les réactances de la bobine et du condensateur sont égales et s'annulent. Un circuit série a alors l'impédance la plus faible (R seule) et le courant le plus fort, un circuit parallèle l'impédance la plus forte. L'acuité de la résonance est donnée par le facteur de qualité Q – en série $Q = (1/R)\sqrt{(L/C)}$ – et par la bande passante $B = f_0/Q$ entre les fréquences où le courant tombe à $1/\sqrt{2}$ du maximum. Accord : la capacité pour une fréquence donnée $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Équation du modèle :
  $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
- On remplace : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\text{Hz}$
- À la résonance, les réactances de la bobine et du condensateur s'annulent – le circuit série a l'impédance la plus faible et le courant le plus fort.
- Facteur de qualité
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Bande passante : $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\text{Hz}$
- Limites de la bande (chute à $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\text{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Schéma du circuit



Réponse en fréquence



L'axe horizontal est logarithmique – chaque graduation vaut dix fois la fréquence. Les points sont la fréquence donnée et les points remarquables.

Diviseur de tension en charge.

Énoncé: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

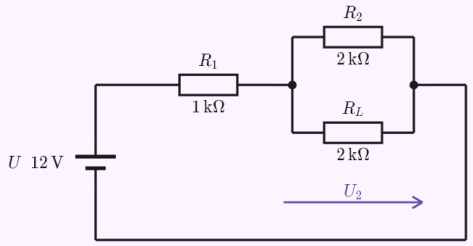
Résultat

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

Étapes

- On cherche U_2 ; données
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- On convertit les unités
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Deux résistances en série divisent la tension dans le rapport de leurs résistances : le même courant I = U/(R₁ + R₂) les traverse, donc U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Une charge R_L se trouve en parallèle avec R₂ et réduit la résistance du bas à R₂R_L/(R₂ + R_L) – la tension de sortie d'un diviseur chargé est donc plus faible qu'à vide. Équation du modèle : $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- La charge est en parallèle avec R₂
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- On remplace : $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- À vide on aurait $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – la charge abaisse la tension de sortie.

Schéma du circuit



Équilibrage d'un pont de Wheatstone.

Énoncé: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

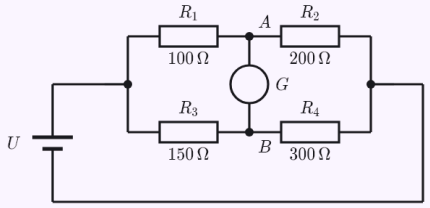
Résultat

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

Étapes

- On cherche R_4 ; données :
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Le pont de Wheatstone est formé de deux diviseurs de tension en parallèle, avec un appareil de mesure entre leurs points milieux (A et B). Le pont est équilibré – aucun courant dans l'appareil – lorsque les deux diviseurs divisent la tension dans le même rapport : R₁/R₂ = R₃/R₄. On mesure ainsi précisément une résistance inconnue. Un pont déséquilibré donne la tension U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – c'est le principe des jauges de contrainte, par exemple. Équation du modèle : $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Le pont est équilibré – A et B ont la même tension et aucun courant ne traverse l'appareil de mesure.
- On exprime la grandeur cherchée : $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- On remplace : $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Schéma du circuit



Le condensateur pour relever le facteur de puissance de 0,7 à 0,95.

Énoncé: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

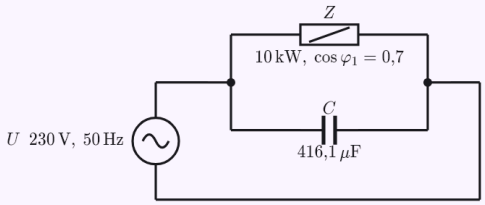
Résultat

$$C \approx 416{,}1\,\mu\text{F}$$

Étapes

- On cherche C ; données
  $P = 10\,\text{kW}, \quad U = 230\,\text{V}, \quad f = 50\,\text{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- On convertit les unités : $P = 10\,\text{kW} = 10\,000\,\text{W}$
- Les récepteurs à bobines (moteurs, transformateurs) absorbent, outre la puissance active P, une puissance réactive Q = P·tan φ qui charge inutilement la ligne d'un courant plus fort. Un condensateur en parallèle fournit une puissance réactive de signe opposé Q_C = Q₁ − Q₂ et relève le facteur de puissance de cos φ₁ à cos φ₂. La capacité nécessaire C = Q_C/(ωU²), avec ω = 2πf. La puissance active ne change pas, le courant pris au réseau diminue. Équation du modèle :
  $Q_C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2), \quad C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Déphasages avant et après la compensation
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Puissances réactives – le condensateur fournit la différence
  $Q_1 = P\tan\varphi_1 \approx 10\,200\,\text{var}$
  $Q_2 = P\tan\varphi_2 \approx 3287\,\text{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\text{var}$
- Pulsation : $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\text{rad/s}$
- On exprime la grandeur cherchée : $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- On remplace : $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$
- Courant pris au réseau avant et après la compensation
  $I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\text{A}, \quad I_2 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\text{A}$
- On convertit les unités : $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\text{F} = 416{,}1\,\mu\text{F}$

Schéma du circuit



Circuit écrit comme expression – simplification, courant de chaque composant.

Énoncé: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Résultat

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\,\text{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\,\text{W}$$

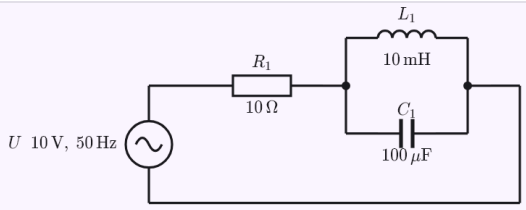
Étapes

- Le montage (+ en série, ∥ en parallèle) : $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; les valeurs données
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\text{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 10\,\text{V}$
- Pulsation : $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\text{rad/s}$
- Les impédances des bobines et des condensateurs comme nombres complexes (j est l'unité imaginaire)
  $\hat{Z}_{L_1} = \text{j}\omega L_1 = \text{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \text{j}\,3{,}142\,\Omega$
  $\hat{Z}_{C_1} = \dfrac{1}{\text{j}\omega C_1} = -\text{j}\dfrac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\text{j}\,31{,}83\,\Omega$
- Un groupe parallèle – les inverses des impédances s'ajoutent
  $\hat{Z}_a = \dfrac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \text{j}\,3{,}486\,\Omega$
- Un groupe série – les impédances s'ajoutent :
  $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Impédance totale du circuit :
  $\hat{Z} = 10 + \text{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$
- Le courant de la source par la loi d'Ohm (la tension de la source a la phase 0°)
  $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \dfrac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\,\text{A}$
- Le même courant traverse toutes les parties du groupe $\hat{Z}$ – leurs tensions
  $\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\,\text{V}$
  $\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\,\text{V}$
- Toutes les branches du groupe $\hat{Z}_a$ ont la même tension – les courants des branches
  $\hat{I}_{L_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\,\text{A}$
  $\hat{I}_{C_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\,\text{A}$
- Les composants – impédance, tension et courant (module ∠ phase)

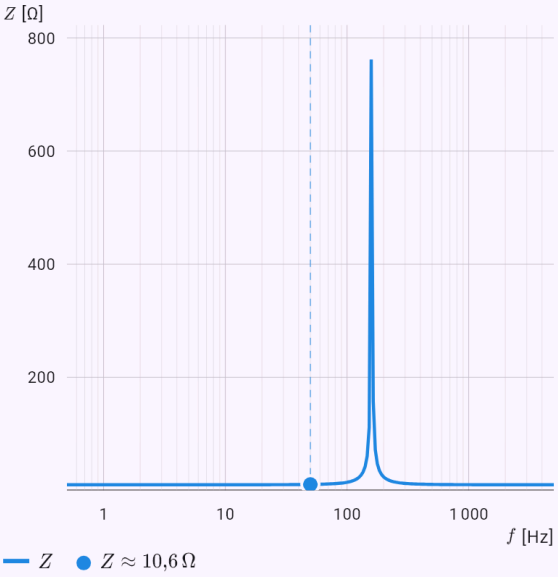
	$\hat{Z}\,[\Omega]$	$\hat{U}\,[\text{V}]$	$\hat{I}\,[\text{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\text{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\text{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

- La puissance fournie par la source
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \text{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\text{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

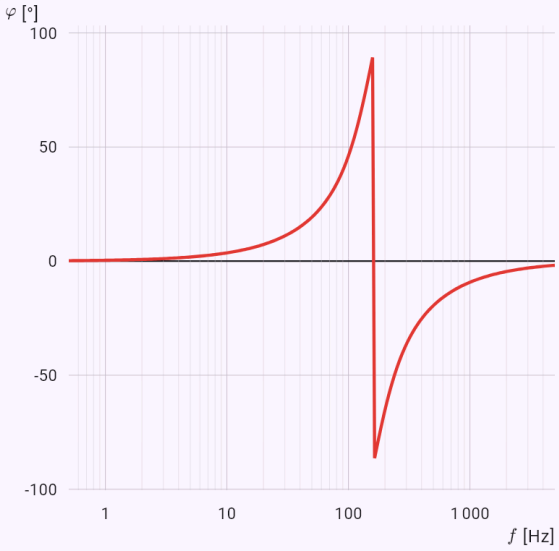
Schéma du circuit



Réponse en fréquence



Z $Z \approx 10{,}6\,\Omega$



φ

L'axe horizontal est logarithmique – chaque graduation vaut dix fois la fréquence. Les points sont la fréquence donnée et les points remarquables.

Pont déséquilibré en netlist – analyse nodale.

Énoncé: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Résultat

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

Étapes

- Les composants, les nœuds qu'ils relient et leurs valeurs

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Les inconnues sont les tensions des nœuds par rapport à la masse et les courants des sources de tension : $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- Loi des nœuds de Kirchhoff – la somme des courants sortant de chaque nœud est nulle

$$1\text{: } I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{: } \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{: } \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Les sources de tension imposent la tension entre leurs nœuds : $U_1 = 12$
- Le système d'équations linéaires sous forme matricielle pour les inconnues $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- L'élimination de Gauss donne les tensions des nœuds

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

- Tension et courant de chaque composant (du nœud + au nœud −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Limitations connues

- Les circuits sont linéaires et en régime permanent – les régimes transitoires RC, RL et RLC sont dans les applications de physique ; diodes, transistors et amplificateurs opérationnels ne sont pas encore là.
- Le schéma est dessiné pour les formulaires et pour un circuit écrit comme expression ; une netlist reçoit un tableau des composants et des nœuds. Un circuit n'est pas reconnu sur la photo de son schéma.
- Une netlist est résolue soit en continu, soit à une seule fréquence – des sources de fréquences différentes et la superposition ne sont pas encore là.

49. Biologie et médecine

Les calculs de biologie, de laboratoire et de médecine se trouvent sur l'écran d'accueil, dans la section « Applications », domaines Biologie et Médecine : cinétique enzymatique de Michaelis et Menten (aussi avec un inhibiteur), équilibre de Hardy–Weinberg, dilutions et numération des colonies, potentiel de membrane de Nernst et de Goldman et posologie des médicaments. Le formulaire se remplit comme pour les autres applications ; l'icône « ? » explique d'où viennent les formules.

À partir des vitesses mesurées d'une réaction enzymatique, l'app détermine K_m et V_max deux fois : par la méthode scolaire de la droite de Lineweaver–Burk et plus précisément par régression non linéaire ; le graphique montre les points et les deux courbes. Pour l'équilibre de Hardy–Weinberg, elle calcule à partir des effectifs des génotypes les fréquences alléliques, les effectifs attendus et un test du χ^2 ; pour une maladie récessive, la proportion de porteurs à partir de sa fréquence.

Dilutions : le volume de solution mère selon $c_1V_1 = c_2V_2$, la dilution en série et les UFC/ml à partir d'une numération. Posologie : dose selon le poids ou la surface corporelle (Mosteller, Du Bois), débit de perfusion en ml/h et en gouttes par minute et clairance de la créatinine de Cockcroft et Gault. Les calculs de doses sont indicatifs et ne remplacent pas le jugement médical.

Exemples

K_m et V_max à partir des vitesses mesurées – Lineweaver–Burk et régression non linéaire.

Énoncé: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

81[umol_l_min]; input=table)

Résultat

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

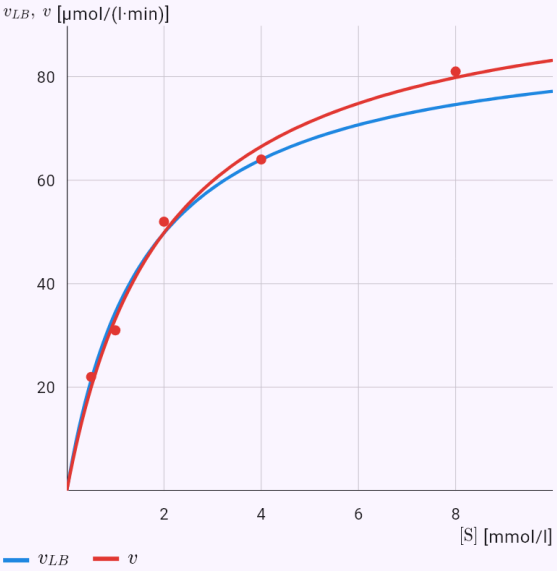
Étapes

- Données
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Une enzyme E fixe son substrat S et le transforme en produit. La vitesse v croît avec la concentration du substrat mais sature – elle atteint au plus la vitesse maximale V_max, quand toutes les molécules d'enzyme sont occupées. La constante de Michaelis K_m est la concentration de substrat pour laquelle la vitesse est la moitié : v = V_max[S]/(K_m + [S]). À partir de vitesses mesurées, les constantes s'obtiennent par la droite de Lineweaver–Burk (1/v en fonction de 1/[S], ordonnée à l'origine 1/V_max, pente K_m/V_max) ou plus précisément par régression non linéaire. Un inhibiteur compétitif augmente le K_m apparent, un non compétitif diminue V_max, un incompétitif diminue les deux – toujours par le facteur α = 1 + [I]/K_i. Équation du modèle : $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Inverses pour le graphique de Lineweaver–Burk
  $\dfrac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \dfrac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Droite de régression de 1/v en fonction de 1/[S]
  $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_{max}} + \dfrac{K_m}{V_{max}} \cdot \dfrac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Constantes tirées de la droite (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \dfrac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \dfrac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Régression non linéaire – moindres carrés sur la courbe elle-même

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i} \right)^2 : \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$$

- Le graphique de Lineweaver–Burk amplifie les erreurs aux faibles concentrations (1/v grand) – le résultat est donc celui de la régression non linéaire ; la droite sert de méthode scolaire et d'estimation de départ.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Vitesse de réaction avec un inhibiteur compétitif.

Énoncé: model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

Résultat

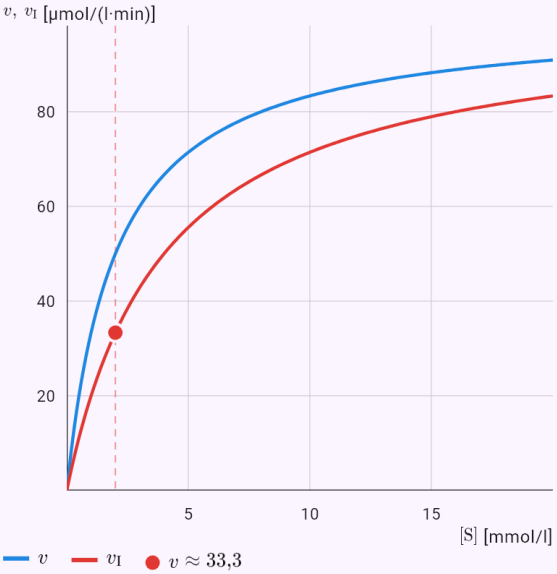
$$v \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$

Étapes

- On cherche v ; données $V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = 2\,\text{mmol/l}, \quad [\text{S}] =$
- Une enzyme E fixe son substrat S et le transforme en produit. La vitesse v croît avec la concentration du substrat mais sature – elle atteint au plus la vitesse maximale V_max, quand toutes les molécules d'enzyme sont occupées. La constante de Michaelis K_m est la concentration de substrat pour laquelle la vitesse est la moitié : v = V_max[S]/(K_m + [S]). À partir de vitesses mesurées, les constantes s'obtiennent par la droite de Lineweaver–Burk (1/v en fonction de 1/[S], ordonnée à l'origine 1/V_max, pente K_m/V_max) ou plus précisément par régression non linéaire. Un inhibiteur compétitif augmente le K_m apparent, un non compétitif diminue V_max, un incompétitif diminue les deux – toujours par le facteur α = 1 + [I]/K_i. Équation du modèle : $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Facteur d'inhibition : $\alpha = 1 + \dfrac{[\text{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Constantes apparentes avec l'inhibiteur $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\text{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\text{mol}_{/}$
- Un inhibiteur compétitif entre en compétition avec le substrat pour le site actif – il augmente le K_m apparent, V_max ne change pas (beaucoup de substrat le déplace).
- On remplace $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$

- Saturation de l'enzyme : $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Groupes sanguins MN – fréquences alléliques et test du χ² de l'équilibre.

Énoncé: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one];`

`aa=1303[one]; input=counts)`

Résultat

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Étapes

- Données : $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- Dans une population à croisements aléatoires, sans sélection, mutation ni migration, les fréquences alléliques restent constantes et les génotypes sont dans le rapport p² : 2pq : q², où p et q (p + q = 1) sont les fréquences des allèles A et a. À partir des effectifs des génotypes, on calcule p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) et les effectifs attendus ; un test du χ² (1 degré de liberté) indique si la population s'écarte de l'équilibre. Pour un caractère récessif, on ne connaît que la proportion d'homozygotes q², d'où q = √q² et la proportion de porteurs 2pq. Équation du modèle :
$p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$

- Fréquences alléliques – chaque individu en porte deux
$p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$
- Effectifs attendus à l'équilibre
$E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n$
- Test d'ajustement du χ²
$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05 – l'écart à l'équilibre de Hardy–Weinberg n'est pas significatif.

Proportion de porteurs d'une maladie récessive de fréquence 1 : 2500.

Énoncé: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Résultat

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

Étapes

- Données : $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- On convertit les unités : $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- Dans une population à croisements aléatoires, sans sélection, mutation ni migration, les fréquences alléliques restent constantes et les génotypes sont dans le rapport p² : 2pq : q², où p et q (p + q = 1) sont les fréquences des allèles A et a. À partir des effectifs des génotypes, on calcule p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) et les effectifs attendus ; un test du χ² (1 degré de liberté) indique si la population s'écarte de l'équilibre. Pour un caractère récessif, on ne connaît que la proportion d'homozygotes q², d'où q = √q² et la proportion de porteurs 2pq. Équation du modèle :
$p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Fréquence de l'allèle récessif à partir de la proportion d'homozygotes
$q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Fréquences génotypiques :
$p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Les porteurs (hétérozygotes) représentent
$2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Combien de solution mère pour 50 ml dilués dix fois.

Énoncé: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Résultat

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Étapes

- On cherche V_1 ; données :
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Une dilution ne change pas la quantité (masse) de soluté : $c_1V_1 = c_2V_2$. D'où le volume de solution mère $V_1 = c_2V_2/c_1$, complété par le solvant jusqu'à V_2. Dans une dilution en série, chaque étape dilue du même facteur d (par exemple 1 : 10) ; après n étapes, la concentration vaut c_0/d^n. En microbiologie, à partir du nombre N de colonies sur une boîte ensemencée avec V_p ml de la dilution D, le nombre de cellules viables de l'échantillon initial est UFC/ml = N·D/V_p (fiable pour 30 à 300 colonies).
  Équation du modèle : $c_1V_1 = c_2V_2$
- On exprime la grandeur cherchée : $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- On remplace : $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Volume de solvant et dilution :
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Cellules d'un échantillon à partir des colonies d'une boîte.

Énoncé: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Résultat

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Étapes

- On cherche CFU ; données :
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Une dilution ne change pas la quantité (masse) de soluté : $c_1V_1 = c_2V_2$. D'où le volume de solution mère $V_1 = c_2V_2/c_1$, complété par le solvant jusqu'à V_2. Dans une dilution en série, chaque étape dilue du même facteur d (par exemple 1 : 10) ; après n étapes, la concentration vaut c_0/d^n. En microbiologie, à partir du nombre N de colonies sur une boîte ensemencée avec V_p ml de la dilution D, le nombre de cellules viables de l'échantillon initial est UFC/ml = N·D/V_p (fiable pour 30 à 300 colonies).
  Équation du modèle : $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- On remplace
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Potentiel de repos d’un neurone (Goldman).

Énoncé: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Résultat

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Étapes

- On cherche V_m ; données
  $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- On convertit les unités : $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Un ion auquel la membrane est perméable se répartit de sorte que la force électrique équilibre la diffusion selon son gradient. La tension d’équilibre est donnée par l’équation de Nernst E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), avec les concentrations extérieure et intérieure c_o et c_i, la charge z, la constante des gaz R et celle de Faraday F (à 37 °C, RT/F ≈ 26,7 mV). Le potentiel de repos, dû à plusieurs ions, est décrit par l’équation de Goldman – les concentrations pondérées par les perméabilités relatives P_K, P_Na, P_Cl (pour l’anion Cl⁻, intérieur et extérieur sont inversés). Équation du modèle
  $$V_m = \frac{RT}{F}\ln\frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$$
- La constante RT/F à cette température :
  $\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Concentrations pondérées à l’extérieur (o) et à l’intérieur (i)
  $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- On remplace : $V_m = 26{,}73 \cdot \ln\frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Le potentiel de repos est proche du potentiel d’équilibre de l’ion le plus perméable – au repos, celui du potassium.

Dose d’un cytostatique selon la surface corporelle.

Énoncé: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Résultat

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Étapes

- On cherche D ; données :
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Calcul indicatif – il ne remplace ni le jugement médical, ni la notice, ni les protocoles du service.
- Dose selon le poids D = d·m (mg/kg × kg) ; la concentration d’une solution donne le volume V = D/c. Pour les cytostatiques et chez l’enfant, la dose se calcule par surface corporelle : formule de Mosteller S = √(taille·poids/3600) (cm, kg, m²), celle de Du Bois pour comparaison. Le débit d’une perfusion en ml/h est le volume divisé par la durée ; en gouttes par minute, multiplié en plus par le facteur de goutte du perfuseur (souvent 20 gouttes/ml). La clairance de la créatinine de Cockcroft et Gault estime la fonction rénale : Cl = (140 − âge)·poids/(72·S_cr) avec la créatinine en mg/dl (µmol/l divisé par 88,4), chez la femme multipliée par 0,85. Les résultats sont indicatifs – ils ne remplacent ni le jugement médical ni la notice. Équation du modèle :
  $$S = \sqrt{\frac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$$
- Surface corporelle (Mosteller) : $S = \sqrt{\frac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Du Bois pour comparaison :
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- On remplace : $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Clairance de la créatinine d'une femme (Cockcroft–Gault).

Énoncé: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Résultat

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Étapes

- On cherche Cl_{cr} ; données
  $a = 60\,\mathrm{ans}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Calcul indicatif – il ne remplace ni le jugement médical, ni la notice, ni les protocoles du service.
- Dose selon le poids D = d·m (mg/kg × kg) ; la concentration d'une solution donne le volume V = D/c. Pour les cytostatiques et chez l'enfant, la dose se calcule par surface corporelle : formule de Mosteller S = √(taille·poids/3600) (cm, kg, m²), celle de Du Bois pour comparaison. Le débit d'une perfusion en ml/h est le volume divisé par la durée ; en gouttes par minute, multiplié en plus par le facteur de goutte du perfuseur (souvent 20 gouttes/ml). La clairance de la créatinine de Cockcroft et Gault estime la fonction rénale : Cl = (140 − âge)·poids/(72·S_cr) avec la créatinine en mg/dl (µmol/l divisé par 88,4), chez la femme multipliée par 0,85. Les résultats sont indicatifs – ils ne remplacent ni le jugement médical ni la notice. Équation du modèle :
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Créatinine en mg/dl (µmol/l divisé par 88,4) :
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- On remplace
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Limitations connues

- La cinétique enzymatique seulement pour un substrat à l'état stationnaire (Michaelis–Menten) ; les enzymes allostériques (équation de Hill) ne sont pas encore là.
- Hardy–Weinberg pour un gène à deux allèles ; plusieurs allèles et les gènes liés à l'X ne sont pas encore là.
- La posologie est indicative – elle ne tient compte ni des interactions, ni des tranches d'âge, ni des adaptations à la fonction des organes hors clairance de la créatinine.

50. Économie, finance et assurance

Les calculs financiers et économiques se trouvent sur l'écran d'accueil, dans la section « Applications », domaine Économie : des intérêts pour des jours (30E/360, ACT/360, ACT/365), un effet de commerce et son escompte, une rente tirée de l'épargne (temporaire, différée, perpétuelle), des intérêts mixtes, une épargne avec dépôt initial et intérêts annuels, un prêt à amortissement constant, intérêts d'un dépôt (simples, composés, continus, avec impôt et inflation), épargne régulière, prêt avec tableau d'amortissement et TAEG, obligation, investissement (VAN, TRI, délai de récupération), conversion de devises, seuil de rentabilité, maximisation du profit, équilibre de marché, modèle de Leontief et chaînes de Markov, ainsi que les mathématiques actuarielles – tables de mortalité, assurance vie, rentes, provisions et assurance non-vie avec bonus-malus.

L'investissement dans des prêts P2P calcule la valeur du portefeuille (trésorerie du compte et capital restant dû) mois par mois : les versements sont investis par montants entiers par prêt, les prêts sont remboursés par annuités, la plateforme prend des frais de mise en place et une part des intérêts, les pertes sont un taux de défaut annuel ; pour comparaison, une formule fermée avec réinvestissement continu. Inversement, il trouve le versement mensuel ou la durée pour un montant cible.

Les montants peuvent être dans n'importe quelle devise – choisie dans le formulaire (par défaut celle du pays du téléphone) ; le calcul n'en dépend pas. La conversion utilise les cours quotidiens de la Banque nationale tchèque (en tchèque ou sur un téléphone réglé sur la Tchéquie) ou les cours de référence de la Banque centrale européenne (dans les autres langues) et convertit toute paire via une monnaie commune, avec la source et la date des cours.

Les montants dans une devise sont écrits selon l'usage de la langue de l'application et de la région des réglages du téléphone (2 431,50 EUR ; au Canada aussi 2 431,50 ; en anglais 2,431.50), de même que la date de la cote.

La démarche montre les formules, la substitution et les résultats intermédiaires : taux effectif et réel, tableau d'amortissement, valeur actuelle des flux, recette et coût marginaux comme dérivées, surplus comme intégrales, inverse de Leontief et loi stationnaire par résolution d'un système. Les mathématiques actuarielles utilisent les nombres de commutation ; la provision est montrée en prospectif et en rétrospectif.

Exemples

Dépôt à capitalisation mensuelle, avec impôt et inflation.

Énoncé: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Résultat

$$K_n \approx 152\,844{,}24\,\text{CZK}$$

Étapes

- Données :
  $K_0 = 100\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- On convertit les unités :
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- En intérêts simples, l'intérêt se calcule toujours sur le capital initial : K_n = K₀(1 + pn). En intérêts composés, il est capitalisé et produit à son tour des intérêts : K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), m étant le nombre de capitalisations par an (annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle). La capitalisation continue est la limite m → ∞ : K_n = K₀e^(pn). Un impôt d sur les intérêts ramène le taux à p(1 − d). Le taux annuel effectif compare les fréquences. L'actualisation est le calcul inverse – combien placer aujourd'hui. Avec une inflation π, la valeur réelle est K_n/(1 + π)^n. Les intérêts mixtes (comme les banques créditent les intérêts une fois par an) composent les années entières et appliquent des intérêts simples au reste de la dernière : K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Équation du modèle : $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Capitalisations par an : $m = 12$
- Taux après impôt :
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Taux annuel effectif : $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- On remplace
  $K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152\,844{,}24\,\text{CZK}$
- Intérêts au total : $K_n - K_0 \approx 52\,844{,}24\,\text{CZK}$
- Valeur réelle (aux prix d'aujourd'hui) :
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113\,730{,}47\,\text{CZK}$
- Taux d'intérêt réel : $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Le taux dépasse l'inflation – la valeur réelle de l'argent augmente.

Épargne mensuelle sur 15 ans.

Énoncé: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Résultat

$$S \approx 438\,907{,}24\,\text{CZK}$$

Étapes

- Données : $a = 2\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- On convertit les unités :
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Dans l'épargne régulière, on verse un montant a à chaque période (mois, année). Chaque versement rapporte des intérêts pendant une durée différente, le capital constitué est donc la somme d'une suite géométrique : S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pour des versements en début de période, sans le premier q pour des versements en fin de période ; q = 1 + p/m et N = mn est le nombre de versements. L'équation donne aussi le versement nécessaire ou la durée. Un dépôt initial facultatif K₀ rapporte des intérêts tout le temps – on ajoute K₀·q^N. Avec des intérêts crédités une fois par an, les versements mensuels rapportent des intérêts simples dans l'année – une année donne A = a(12 + p·13/2) pour des versements en début de mois, a(12 + p·11/2) en fin de mois – et seuls ces montants annuels se capitalisent. Équation du modèle :
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Taux après impôt :
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Facteur de capitalisation par période :
  $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- On remplace
  $S = 2\,000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438\,907{,}24\,\text{C}$
- Total versé et intérêts
  $N \cdot a = 180 \cdot 2\,000 = 360\,000\,\text{CZK}, \quad S - Na \approx 78\,90$

Prêt immobilier de 3 millions sur 25 ans – échéance, tableau et TAEG.

Énoncé: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Résultat

$$a \approx 17\,537{,}70\ \mathrm{CZK}$$
$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Étapes

- Données :
  $D = 3\,000\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15\,000$
- On convertit les unités : $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un prêt à annuités constantes se rembourse par des échéances égales a. Chaque échéance paie d'abord les intérêts sur le capital restant dû, le reste amortit la dette, si bien que la part d'intérêts diminue avec le temps. La valeur actuelle de toutes les échéances égale le montant prêté, d'où a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Le tableau d'amortissement donne pour chaque échéance l'intérêt, l'amortissement et le capital restant. Le TAEG inclut aussi les frais – c'est le taux pour lequel la valeur actuelle des échéances égale la somme réellement versée. Avec un amortissement constant, la dette baisse chaque période du même montant M = D/N et l'échéance a_k = M + U_k baisse avec les intérêts – on paie moins d'intérêts qu'avec des annuités constantes, mais les premières échéances sont plus élevées. Le tableau montre la première année et la dernière échéance, ou tout. Équation du modèle :
  $$a = D\,\frac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \frac{p}{m}, \quad N = mn$$
- Intérêt par période :
  $$i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$$
- On remplace
  $$a = 3\,000\,000 \cdot \frac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17\,537{,}70$$

- Tableau d'amortissement (U intérêt, M amortissement, D capital restant)

k	a	U_k	M_k	D_k
1	17 537,70	12 500	5 037,70	2 994 962,30
2	17 537,70	12 479,01	5 058,69	2 989 903,61
3	17 537,70	12 457,93	5 079,77	2 984 823,84
4	17 537,70	12 436,77	5 100,94	2 979 722,90
5	17 537,70	12 415,51	5 122,19	2 974 600,71
6	17 537,70	12 394,17	5 143,53	2 969 457,18
7	17 537,70	12 372,74	5 164,96	2 964 292,22
8	17 537,70	12 351,22	5 186,48	2 959 105,73
9	17 537,70	12 329,61	5 208,09	2 953 897,64
10	17 537,70	12 307,91	5 229,79	2 948 667,85
11	17 537,70	12 286,12	5 251,59	2 943 416,26
12	17 537,70	12 264,23	5 273,47	2 938 142,79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	17 537,70	72,77	17 464,93	0

- Total payé et intérêts compris
  $$\sum a \approx 5\,261\,310{,}37\ \mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2\,261\,310{,}37\ \mathrm{CZ}$$
- TAEG – taux annuel effectif global avec les frais
  $$D - F = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+\mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$
- › La méthode : dichotomie, 14 itérations

Épargner 1 000 par mois avec un dépôt initial et des intérêts crédités chaque année.

Énoncé: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Résultat

$$S \approx 85\,206{,}62\ \mathrm{CZK}$$

Étapes

- Données :
  $a = 1\,000, \quad K_0 = 20\,000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- On convertit les unités : $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Dans l'épargne régulière, on verse un montant a à chaque période (mois, année). Chaque versement rapporte des intérêts pendant une durée différente, le capital constitué est donc la somme d'une suite géométrique : S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) pour des versements en début de période, sans le premier q pour des versements en fin de période ; q = 1 + p/m et N = mn est le nombre de versements. L'équation donne aussi le versement nécessaire ou la durée. Un dépôt initial facultatif K_0 rapporte des intérêts tout le temps – on ajoute K_0·q^N. Avec des intérêts crédités une fois par an, les versements mensuels rapportent des intérêts simples dans l'année – une année donne A = a(12 + p·13/2) pour des versements en début de mois, a(12 + p·11/2) en fin de mois – et seuls ces montants annuels se capitalisent. Équation du modèle

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- Les versements d'une année avec les intérêts de l'année : $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Facteur de capitalisation par période :
  $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- On remplace
  $$S = 1\,000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20\,000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85\,206.$$
- Total versé et intérêts
  $K_0 + N \cdot a = 20\,000 + 60 \cdot 1\,000 = 80\,000\ \mathrm{CZK}, \quad S -$

Investir dans des prêts P2P : 2 000 CZK par mois pendant 10 ans, 200 CZK par prêt, avec frais et pertes.

Énoncé: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct];`

`L=200[one]; M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)`

Résultat

$$V \approx 318\,974{,}12\ \text{CZK}$$

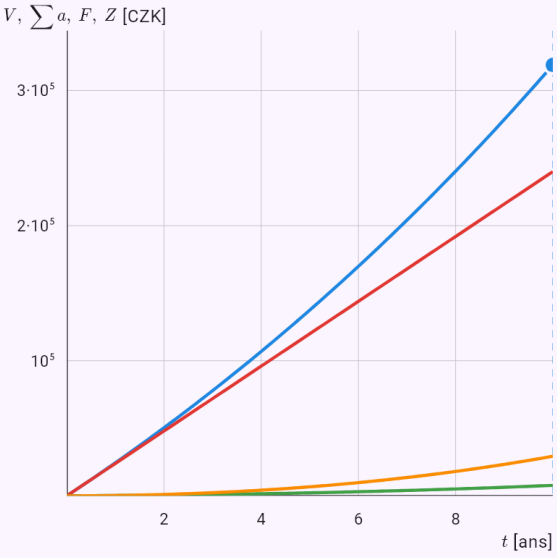
Étapes

- Données
  $a = 2\,000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$
- On convertit les unités :
  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$
- Sur une plateforme de prêts P2P, l'investisseur verse chaque mois le montant a sur son compte. Les liquidités sont investies par multiples entiers du montant L par prêt (p. ex. 200 CZK), le reste attend sur le compte. La plateforme retient sur chaque investissement les frais de mise en place f, le prêt reçoit L(1 − f). Les prêts sont remboursés par annuités, des mensualités égales s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) sur M mois, i = p/12 ; la plateforme garde la part g des intérêts. Le taux de défaut λ (annuel) passe chaque mois en perte une partie du capital, λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Les remboursements reviennent sur le compte et sont réinvestis. La valeur du portefeuille V = H + P est la trésorerie H plus le capital restant dû dans les prêts P. Le calcul simule mois par mois et donne, pour comparaison, une formule fermée avec réinvestissement continu : V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Le problème inverse trouve le versement mensuel ou la durée nécessaires pour une valeur cible. C'est une estimation à rendement fixe – le résultat réel dépend surtout des pertes. Le rendement annoncé par une plateforme est souvent déjà net des frais et des pertes ; ne les saisissez alors pas une seconde fois. Ce n'est pas un conseil en investissement.
  Équation du modèle
  $$V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1-\lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$$
- Intérêt mensuel, pertes mensuelles et mensualité
  $$i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1-\lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$$
- On remplace
  $$V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10\,735{,}19 + 308\,238{,}93 \approx 318\,97$$
- Simulation mois par mois – état à la fin des années (k en mois) : versé, capital dans les prêts P, trésorerie H, frais F, pertes Z, valeur V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24 000	23 784,39	726,58	266	26
24	48 000	49 198,83	1 248,72	606	1 03
36	72 000	75 757,04	2 129,17	1 032	2 33
48	96 000	103 744,84	3 148,57	1 568	4 21
60	120 000	133 102,33	4 439,70	2 240	6 69
72	144 000	164 382,06	5 541,37	3 054	9 80
84	168 000	197 551,52	6 600,52	4 002	13 58
96	192 000	232 369,52	7 962,71	5 094	18 07
108	216 000	269 327,69	9 238,91	6 346	23 30
120	240 000	308 238,93	10 735,19	7 764	29 33

- Versé, frais F, pertes Z, intérêts nets U et gain
  $$\sum a = 240\,000\,\text{CZK}, \quad F = 7\,764\,\text{CZK}, \quad Z = 29\,337$$
- Pour comparaison : formule fermée avec réinvestissement continu
  $$r = p(1-g)(1-f) - \lambda - f\,\frac{24}{M+1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$$
- C'est une estimation à rendement fixe et taux de défaut constant – la réalité dépend surtout des pertes. Le rendement annoncé par une plateforme est souvent déjà net des frais et des pertes. Ce n'est pas un conseil en investissement.

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Un prêt à amortissement constant – des échéances décroissantes comparées aux annuités constantes.

Énoncé: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Résultat

$$a_1 \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10\,041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

Étapes

- Données : $D = 1\,200\,000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- On convertit les unités : $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un prêt à annuités constantes se rembourse par des échéances égales a. Chaque échéance paie d'abord les intérêts sur le capital restant dû, le reste amortit la dette, si bien que la part d'intérêts diminue avec le temps. La valeur actuelle de toutes les échéances égale le montant prêté, d'où a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Le tableau d'amortissement donne pour chaque échéance l'intérêt, l'amortissement et le capital restant. Le TAEG inclut aussi les frais – c'est le taux pour lequel la valeur actuelle des échéances égale la somme réellement versée. Avec un amortissement constant, la dette baisse chaque période du même montant M = D/N et l'échéance a_k = M + U_k baisse avec les intérêts – on paie moins d'intérêts qu'avec des annuités constantes, mais les premières échéances sont plus élevées. Le tableau montre la première année et la dernière échéance, ou tout. Équation du modèle
  $$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\, i, \quad i = \frac{p}{m},$$
- Intérêt par période : $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- On remplace : $M = \dfrac{1\,200\,000}{120} \approx 10\,000\,\mathrm{CZK}$
- Première et dernière échéance
  $a_1 = M + D\, i \approx 15\,000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1 + i) \approx 10\,0$
- Tableau d'amortissement (U intérêt, M amortissement, D capital restant)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15 000	5 000	10 000	1 190 000
2	14 958,33	4 958,33	10 000	1 180 000
3	14 916,67	4 916,67	10 000	1 170 000
4	14 875	4 875	10 000	1 160 000
5	14 833,33	4 833,33	10 000	1 150 000
6	14 791,67	4 791,67	10 000	1 140 000
7	14 750	4 750	10 000	1 130 000
8	14 708,33	4 708,33	10 000	1 120 000
9	14 666,67	4 666,67	10 000	1 110 000
10	14 625	4 625	10 000	1 100 000
11	14 583,33	4 583,33	10 000	1 090 000
12	14 541,67	4 541,67	10 000	1 080 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10 041,67	41,67	10 000	0

- Total payé et intérêts compris :
  $\sum a_k \approx 1\,502\,500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302\,500\,\mathrm{CZK}$
- À comparer avec des annuités constantes – échéance et intérêts totaux :
  $a \approx 12\,727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327\,343{,}42\,\mathrm{CZK}$
- L'amortissement constant économise $24\,843{,}42\,\mathrm{CZK}$ d'intérêts, mais les premières échéances sont plus élevées.

Intérêts pour des jours selon 30E/360 avec un impôt de 15 %.

Énoncé: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-`

`09-20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Résultat

$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
$K_n \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Étapes

- Données : $K_0 = 50\,000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- On convertit les unités :
  $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Les dépôts à court terme rapportent des intérêts simples pour t jours : u = K₀·p·t/B. Les jours et la longueur de l'année B suivent la convention de décompte : 30E/360 (banques tchèques et allemandes) compte chaque mois pour 30 jours (le 31 comme le 30) et l'année pour 360, ACT/360 (année commerciale : France, Espagne, marché monétaire) les jours réels et une année de 360, ACT/365 (année civile, Royaume-Uni) les jours réels et une année de 365. Les jours se comptent entre les dates de dépôt et de retrait, ou se saisissent directement. L'impôt est retenu sur les intérêts. L'inverse – combien déposer aujourd'hui pour un montant – est l'actualisation.
  Équation du modèle : $u = K_0 \cdot p \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$
- Convention de décompte des jours et longueur de l'année : $30\mathrm{E}/360$: $\quad B = 360$
- Jours (30E/360 : mois de 30 jours, le 31 comme le 30)
  $15/03/2026 \to 20/09/2026$: $\quad t = 360 \cdot (2026 - 2026$
- On remplace : $u = 50\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \dfrac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- Impôt sur les intérêts et intérêts nets
  $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Intérêts au total : $K_n = K_0 + u' \approx 50\,436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Un effet escompté – ce que la banque verse 90 jours avant l'échéance.

Énoncé: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Résultat

$K \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$
$D \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$

Étapes

- Données : $N = 100\,000, \quad d = 6\,\%$
- On convertit les unités : $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Un effet de commerce promet de payer sa valeur nominale N à l'échéance. Une banque peut l'acheter avant (l'escompter) et verse le nominal moins l'escompte D = N·d·t/B, où d est le taux d'escompte et t les jours jusqu'à l'échéance : K = N(1 − d·t/B). L'escompte se calcule sur le montant final, pas sur le montant versé, donc le rendement réel de la banque i = d/(1 − d·t/B) dépasse le taux d'escompte. La convention habituelle est ACT/360. Équation du modèle :
  $D = N \cdot d \cdot \dfrac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\dfrac{t}{B}\right)$
- Convention de décompte des jours et longueur de l'année : $\mathrm{ACT}/360$: $\quad B = 360$
- Jours selon le calendrier :
  $10/01/2026 \to 10/04/2026$: $\quad t = 90$
- On remplace : $D = 100\,000 \cdot 0{,}06 \cdot \dfrac{90}{360} \approx 1\,500\ \mathrm{CZK}$
- Montant versé : $K = N - D \approx 98\,500\ \mathrm{CZK}$
- Rendement réel de la banque : $i = \dfrac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- L'escompte se calcule sur le montant final – la banque gagne donc en réalité plus que le taux d'escompte.

Une rente mensuelle de 2 millions sur 20 ans, différée de 5 ans.

Énoncé: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Résultat

$$a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$$

Étapes

- Données :
  $K = 2\,000\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- On convertit les unités : $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Une rente verse un montant régulier a tiré d'un capital K, qui continue de rapporter des intérêts. La valeur actuelle de N versements est K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m − la même formule que l'échéance d'un prêt. Des versements en début de période (rente à terme à échoir) la multiplient par q. Une rente différée commence après k années, le capital croissant entre-temps jusqu'à K·q^(mk). Une rente perpétuelle ne verse que les intérêts et le capital reste : K = a/(q − 1). On obtient le versement, le capital nécessaire ou la durée des versements.
  Équation du modèle :
  $$K = a\,\frac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Facteur de capitalisation par période :
  $q = 1 + \dfrac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Actualisé sur le différé : $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- On exprime la grandeur cherchée : $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- On remplace : $a \approx 12\,884{,}60\ \mathrm{CZK}$

- Capital au début des versements :
  $K\,q^{mk} \approx 2\,323\,233{,}56\ \mathrm{CZK}$
- Déroulement des versements (U intérêts, K solde)

k	a	U_k	K_k
1	12 884,60	5 808,08	2 316 157,05
2	12 884,60	5 790,39	2 309 062,84
3	12 884,60	5 772,66	2 301 950,90
4	12 884,60	5 754,88	2 294 821,18
5	12 884,60	5 737,05	2 287 673,64
6	12 884,60	5 719,18	2 280 508,23
7	12 884,60	5 701,27	2 273 324,90
8	12 884,60	5 683,31	2 266 123,61
9	12 884,60	5 665,31	2 258 904,33
10	12 884,60	5 647,26	2 251 666,99
11	12 884,60	5 629,17	2 244 411,56
12	12 884,60	5 611,03	2 237 137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12 884,60	32,13	0

- Versé au total et les intérêts inclus
  $\sum a \approx 3\,092\,303{,}41\ \mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1\,092\,303{,}41$

Prix et duration d'une obligation.

Énoncé: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct];`

`freq=annual; cur=EUR)`

Résultat

$$P \approx 1\,044{,}52\,\text{▮}$$

Étapes

- Données : $N = 1\,000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- On convertit les unités :
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Une obligation verse à chaque période un coupon C = c·N/m et à l'échéance sa valeur nominale N. Son prix est la valeur actuelle de ces paiements actualisés au rendement de marché y. Si le rendement de marché est inférieur au taux du coupon, l'obligation cote au-dessus du pair, sinon en dessous. Le rendement à l'échéance est le taux pour lequel la valeur actuelle des paiements égale le prix – calculé numériquement. La duration est la durée moyenne pondérée des paiements et mesure la sensibilité du prix aux taux d'intérêt. Équation du modèle
  $$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{k}} + \frac{N_{nom}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{N}}$$
- Coupon par période : $C = \dfrac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,\text{▮}, \quad N = 5$
- On remplace
  $$P = 50 \cdot \frac{1 - 0{,}961538^{5}}{0{,}04} + \frac{1\,000}{1{,}04^{5}} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$$
- Le rendement de marché est inférieur au coupon – l'obligation cote au-dessus du pair.
- Duration (de Macaulay et modifiée)
  $$D = \frac{1}{P}\sum_{k} t_k\, PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \approx 4{,}382$$

Taux de rendement interne d'un investissement.

Énoncé: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

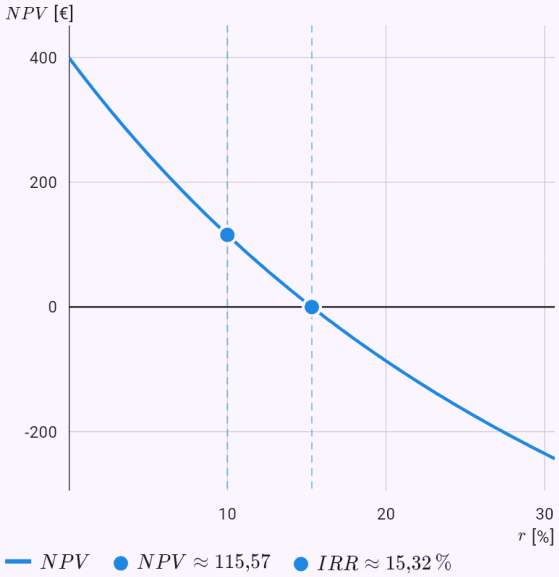
Résultat

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Étapes

- Données :
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- On convertit les unités : $r = 10\,\% = 0{,}1$
- La valeur actuelle nette VAN additionne les flux CF_0, CF_1, … d'un projet actualisés au taux de rentabilité exigé r : VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un projet de VAN > 0 rapporte plus que le rendement exigé. Le taux de rendement interne TRI est le taux pour lequel VAN = 0 – racine d'une équation polynomiale, cherchée numériquement. Le délai de récupération est le moment où la somme cumulée (simple ou actualisée) cesse d'être négative. Équation du modèle : $NPV = \sum_{t=0}^{n} \dfrac{CF_t}{(1+r)^{t}}$
- Valeur actuelle nette
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^{1}} + \frac{400}{1{,}1^{2}} + \frac{500}{1{,}1^{3}} + \frac{200}{1{,}1^{4}} \approx 115{,}5$$
- VAN ≥ 0 – le projet rapporte au moins le rendement exigé.
- On résout l'équation numériquement (dichotomie) :
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › La méthode : dichotomie, 14 itérations

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Euros en couronnes au cours du jour de la ČNB.

Énoncé: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Résultat

$$2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\,\mathrm{CZK}$$

Étapes

- Données : $A = 100$
- Un taux de change est le prix d'une unité de devise étrangère. La Banque nationale tchèque publie chaque jour ouvré les cours de la couronne, la Banque centrale européenne les cours de référence de l'euro. Un montant se convertit via une monnaie commune : $A_2 = A_1 \cdot k_1/k_2$, où k_1 et k_2 sont les valeurs des deux devises en couronnes (ČNB) ou en euros (BCE) – un cours croisé. Les banques et bureaux de change appliquent leurs propres cours avec une marge ; le résultat est indicatif. Équation du modèle : $A_2 = A_1 \cdot \dfrac{k_1}{k_2}$
- Table des cours : $\mathrm{ČNB},\ 27/11/2026$
- Cours : $1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$
- On remplace : $A_2 = 100 \cdot \dfrac{24{,}435}{1} \approx 2\,443{,}50\,\mathrm{CZK}$
- Les banques et bureaux de change appliquent leurs propres cours avec une marge – le résultat est indicatif.

Profit maximal par recette et coût marginaux.

Énoncé: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

`e=0.5[one]; cur=CZK)`

Résultat

$Q^* \approx 16$

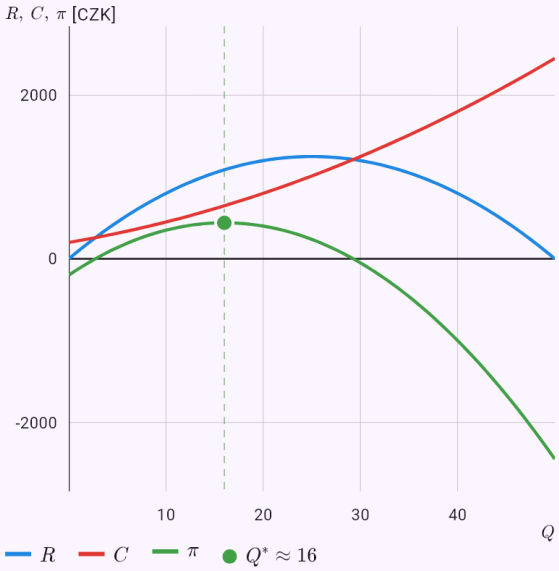
$p^* \approx 68\,\mathrm{CZK}$

$\pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$

Étapes

- Données :
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Une entreprise à demande linéaire p = a − bQ a la recette R = pQ et les coûts C(Q) = F + cQ + eQ². Le profit π = R − C est maximal là où sa dérivée s'annule, c'est-à-dire là où la recette marginale égale le coût marginal : Rm = R'(Q) = Cm = C'(Q). La dérivée seconde confirme le maximum. L'élasticité-prix de la demande ε = (dQ/dp)·(p/Q) indique de combien de pour cent varie la quantité demandée quand le prix varie de 1 % ; |ε| > 1 est une demande élastique. Équation du modèle :
  $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Recette et coûts :
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Recette marginale et coût marginal (dérivées) :
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- On remplace :
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- La dérivée seconde du profit est négative – un maximum : $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Prix et profit à l'optimum :
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\mathrm{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$
- Élasticité-prix de la demande : $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Équilibre de marché, surplus et taxe.

Énoncé: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

t=5[one]; cur=CZK)

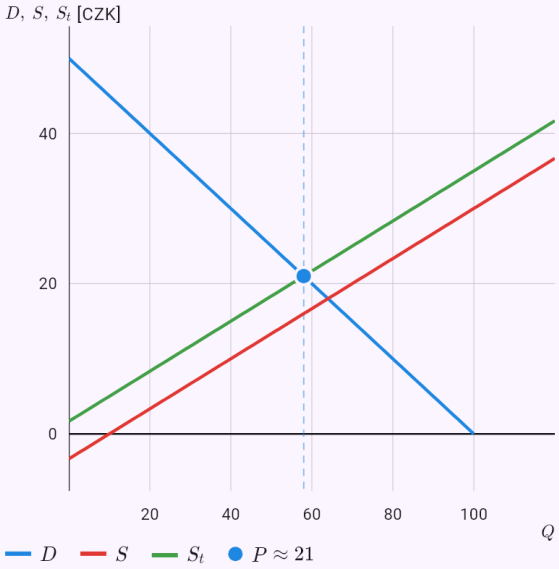
Résultat

$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Étapes

- Données : $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- La demande Q_D = a − bP baisse avec le prix, l'offre Q_S = c + dP augmente. Le marché est à l'équilibre là où elles se coupent : P* = (a − c)/(b + d). Le surplus du consommateur est l'aire entre la courbe de demande et le prix (ce que les acheteurs auraient payé en plus), le surplus du producteur l'aire entre le prix et la courbe d'offre – deux intégrales. Une taxe t par unité décale l'offre de t vers le haut : les acheteurs paient plus, les vendeurs reçoivent moins, on échange moins et une perte sèche apparaît. Équation du modèle : $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- On remplace : $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- Avec la taxe : prix pour les acheteurs et pour les vendeurs $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Recettes fiscales et perte sèche $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Surplus du consommateur : $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Surplus du producteur : $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$
- Élasticités de la demande et de l'offre à l'équilibre $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Modèle de Leontief à trois branches.

Énoncé: model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200

150[one])

Résultat

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Étapes

- Données
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Le modèle de Leontief décrit une économie de n branches qui se fournissent mutuellement. L'élément a_ij de la matrice des coefficients techniques A indique la quantité de production de la branche i consommée par la branche j par unité de sa propre production. La production totale x doit couvrir les consommations intermédiaires Ax et la demande finale y : x = Ax + y, d'où x = (I − A)⁻¹y. L'inverse de Leontief (I − A)⁻¹ montre ce que chaque branche doit produire par unité de demande finale. Équation du modèle :
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Coefficients techniques et demande finale
  $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$$
- La matrice I − A
  $$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
- Inverse de Leontief
  $$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$$
- On remplace : $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Flux entre branches
  $$x_{ij} = a_{ij}x_j : \quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$$

Parts de clientèle à long terme de trois marques.

Énoncé: model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])

Résultat

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Étapes

- Données :
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Une chaîne de Markov passe d'un état à l'autre avec des probabilités p_ij qui ne dépendent que de l'état présent (pas du passé). Les lignes de la matrice de transition P ont pour somme 1. La loi après un pas est $\pi_1 = \pi_0 P$, après n pas $\pi_n = \pi_0 P^n$. La loi stationnaire vérifie $\pi P = \pi$ et donne les parts à long terme des états – clients des marques, classes de bonus-malus, états d'une machine. Équation du modèle :
  $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Matrice de transition
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Le système de la loi stationnaire
  $$\pi_1 = 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3$$
  $$\pi_2 = 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3$$
  $$\pi_3 = 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- À long terme la loi se stabilise sur la loi stationnaire quel que soit le départ (pour une chaîne régulière).

Espérance de vie d’une femme de 65 ans.

Énoncé: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Résultat

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

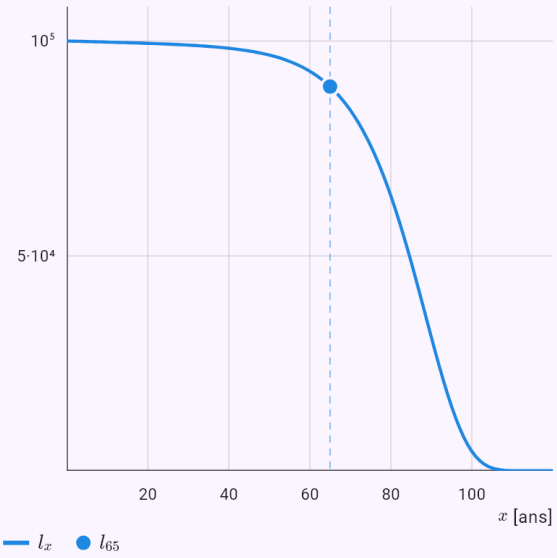
Étapes

- Données : $x = 65$
- Table modèle (Gompertz–Makeham) proche de la population tchèque – pour des résultats précis, saisissez des q_x officiels.
- Une table de mortalité indique combien des 100 000 nouveau-nés (l_x) atteignent l’âge x. La probabilité qu’une personne d’âge x vive encore n ans est ${}_np_x$ = l_{x+n}/l_x, celle de décéder ${}_nq_x$ = 1 − ${}_np_x$. L’espérance de vie e_x est le nombre moyen d’années qu’il reste à vivre à l’âge x. La table modèle selon la loi de Gompertz–Makeham μ(x) = A + B·c^x est réglée à peu près sur la population tchèque ; les calculs précis utilisent des tables officielles – saisissez vos propres q_x. Équation du modèle

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Survivants selon la table : $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- On remplace : $e_{65} \approx 20{,}57$
- En moyenne, l’âge atteint est $85{,}57$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Prime annuelle d’une assurance mixte.

Énoncé: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct];`

`S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Résultat

$$P \approx 40\,227{,}05\ \mathrm{CZK}$$

Étapes

- Données :
  $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1\,000\,000$
- On convertit les unités : $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Table modèle (Gompertz–Makeham) proche de la population tchèque – pour des résultats précis, saisissez des q_x officiels.
- La prime pure découle du principe d'équivalence : la valeur actuelle des primes égale celle des prestations futures. Avec les nombres de commutation D_x = v^xl_x, N_x, C_x et M_x (v = 1/(1 + i), i le taux technique), la prime unique d'une assurance temporaire décès de n ans est (M_x − M_{x+n})/D_x, d'un capital différé D_{x+n}/D_x, d'une mixte leur somme ; une rente ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. La prime annuelle s'obtient en divisant par ä. La provision à l'année t est la valeur actuelle des prestations futures moins celle des primes futures (prospective) – et donne la même chose que les primes reçues moins les prestations versées (rétrospective).

  Équation du modèle
  $$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k \geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k \geq}$$
- Nombres de commutation
  $D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$
- Prime unique pure
  $A_{x:\overline{20}|} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20}|} \approx 622\,543{,}08\ \mathrm{CZK}$
- Prime annuelle
  $$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} \approx 15{,}4757, \quad P = \frac{S \cdot A_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \approx 40\,227{,}05\ \mathrm{CZK}$$

Système de bonus-malus et niveau moyen de prime.

Énoncé: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Résultat

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Étapes

- Données : $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- On convertit les unités : $q = 10\,\% = 0{,}1$
- En assurance non-vie (automobile, habitation), la charge annuelle attendue d'un assuré est E[S] = λ·m, λ étant le nombre moyen de sinistres par an et m le coût moyen. La prime de risque reçoit un chargement θ pour les frais et la sécurité. Un système de bonus-malus modifie la prime selon la sinistralité : une année sans sinistre fait passer dans une meilleure classe, un sinistre en arrière. Les classes forment une chaîne de Markov ; sa loi stationnaire donne les parts à long terme et le niveau moyen de prime. Équation du modèle :
  $$\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$$
- Une année sans sinistre fait descendre d'une classe (bonus), un sinistre ramène à la première classe.
- Matrice de transition
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$
- Le système de la loi stationnaire
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$
- Parts des classes à long terme :
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- On remplace : $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Limitations connues

- Les tables de mortalité sont des modèles (Gompertz–Makeham, proches de la population tchèque) ; pour des résultats précis, saisissez vos propres q_x issus de tables officielles.
- Les cours sont des cours de référence – banques et bureaux de change appliquent leurs propres cours et frais.
- Microéconomie avec demande linéaire et coûts quadratiques ; les fonctions générales données par une formule ne sont pas encore là.
- Les conventions ne décalent pas les dates pour les jours fériés – les intérêts portent sur les jours entre les dates données ; le prêt n’admet ni remboursement anticipé ni changement de taux.
- L'investissement dans des prêts P2P est une estimation à rendement fixe et taux de défaut constant ; il ignore le recouvrement, le remboursement anticipé, le marché secondaire et les impôts. Ce n'est pas un conseil en investissement.

51. Programmation linéaire, transport, affectation et jeux matriciels

Les problèmes d'optimisation se trouvent sur l'écran d'accueil dans la section « Applications », domaine Logistique et réseaux (la programmation linéaire aussi en Économie) : programmation linéaire et en nombres entiers, problème de transport et problème d'affectation. Un programme linéaire peut aussi être saisi ou photographié, p. ex. max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – les contraintes sur des lignes séparées ou après un point-virgule, min au lieu de max, et le mot integer en fait un programme en nombres entiers.

La démarche montre la forme standard avec variables d'écart et artificielles et les tableaux du simplexe en fractions exactes avec le pivot marqué. Les contraintes ≥ et = sont traitées par défaut par la méthode en deux phases ; une puce choisit la méthode du grand M. L'optimum est accompagné du problème dual, des prix fictifs et d'une analyse de sensibilité (intervalles des coefficients de l'objectif et des seconds membres). Avec deux variables, l'application dessine le domaine admissible, les sommets avec les valeurs de l'objectif et la droite de niveau passant par l'optimum. Un programme en nombres entiers se résout par séparation et évaluation ; l'arbre se parcourt avec les flèches comme un graphe.

Le problème de transport se donne par la matrice des coûts unitaires, les offres des fournisseurs et les demandes des clients ; un problème déséquilibré reçoit un fournisseur ou un client fictif. La solution de départ vient du coin nord-ouest, du coût minimal ou de la méthode de Vogel, l'optimum de la méthode MODI avec potentiels et cycles fermés ; le plan de transport est aussi montré comme graphe. Le problème d'affectation est résolu par la méthode hongroise – réduction des lignes et colonnes, couverture des zéros par des lignes et choix de zéros indépendants ; elle gère aussi la maximisation et les matrices rectangulaires.

Jeux matriciels à deux joueurs (domaine Logistique et réseaux, ou la notation game(3 -1 2; -2 4 1) – les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B) : un jeu à somme nulle cherche d'abord un point selle (maximin = minimax), puis raye les stratégies dominées et calcule les stratégies mixtes par une formule pour un jeu 2 × 2, graphiquement pour 2 × n et m × 2 (enveloppes inférieure et supérieure des droites) et par la programmation linéaire avec les tableaux du simplexe pour un jeu plus grand – le problème dual donne la stratégie de l'autre joueur. Le résultat : les stratégies optimales des deux joueurs et la valeur du jeu en fractions exactes. Un jeu bimatriciel (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), gains de A | gains de B) montre les meilleures réponses et les équilibres de Nash en stratégies pures, pour un jeu 2 × 2 aussi l'équilibre mixte.

Exemples

Un plan de production par le simplexe avec prix fictifs et sensibilité.

Énoncé: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Résultat

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Étapes

- Le programme linéaire
  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \leq 4$
  $2x_2 \leq 12$
  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
  $x_1, x_2 \geq 0$

- Aucune condition de positivité n'est donnée – on suppose $x_1, x_2 \geq 0$

- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a
  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- Tableau du simplexe 1 : x_2 entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_2 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	-3	-5	0	0	0	0	

- Tableau du simplexe 2 : x_1 entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_3 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	$\boxed{3}$	0	0	-1	1	6	2
z	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- Tableau 3 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles) :
  $x_1 = 2,\ x_2 = 6, \quad z_{max} = 36$

- Le problème dual – une variable duale par contrainte, une contrainte par variable
  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \geq 3$
  $2y_2 + 2y_3 \geq 5$
  $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- Les prix fictifs (les variables duales optimales) du dernier tableau : de combien l'optimum change quand le second membre d'une contrainte augmente de 1. Une contrainte non saturée (écart $b_i - a_i x > 0$) a un prix fictif nul.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- L'optimum du dual est égal à celui du primal :
  $w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$

- Analyse de sensibilité – les intervalles des coefficients de l'objectif dans lesquels la même solution reste optimale

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2}\rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

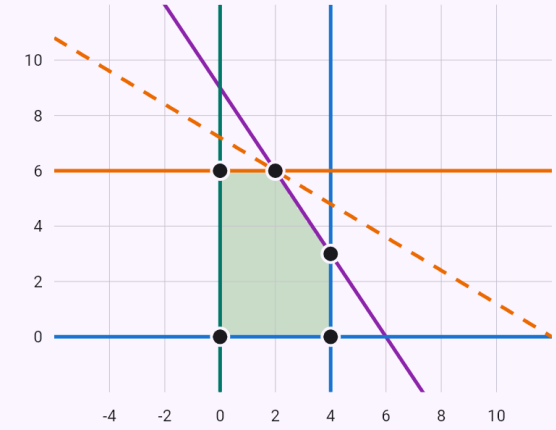
- Les intervalles des seconds membres dans lesquels la même base reste optimale (les prix fictifs ne valent que là)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18\rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24\rangle$

- La résolution graphique : le domaine admissible est un polygone et l'optimum est en un sommet. Les valeurs de l'objectif aux sommets (★ l'optimum)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Graphique



$x \le 4 \ \Leftrightarrow\ x \in \left]-\infty\,;\,4\right]$

$2y \le 12 \ \Leftrightarrow\ y \in \left]-\infty\,;\,6\right]$

$3x + 2y \le 18 \ \Leftrightarrow\ y \le 9 - \dfrac{3x}{2}$

$x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \in [0\,;\,\infty[$

$y \ge 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0\,;\,\infty[$

$z = 36 \ \Leftrightarrow\ 3x + 5y = 36$

Les solutions sont les intersections des courbes dans la région colorée (point plein) ; un point vide ne vérifie pas les inéquations.

Points d'intersection des courbes :

● $(0;0)$ ● $(0;6)$ ● $(2;6)$ ● $(4;0)$ ● $(4;3)$

Un programme saisi – la résolution graphique pour deux variables.

Énoncé: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Résultat

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Étapes

- Le programme linéaire

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \leq 4$
  $x + 3y \leq 6$
  $x, y \geq 0$

- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- Tableau du simplexe 1 : x entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_1 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- Tableau 2 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles) :
  $x = 4,\ y = 0, \quad z_{max} = 12$

- Le problème dual – une variable duale par contrainte, une contrainte par variable

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \geq 3$
  $u_1 + 3u_2 \geq 2$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Les prix fictifs (les variables duales optimales) du dernier tableau : de combien l'optimum change quand le second membre d'une contrainte augmente de 1. Une contrainte non saturée (écart $b_i - a_i x > 0$) a un prix fictif nul.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- L'optimum du dual est égal à celui du primal :
  $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Analyse de sensibilité – les intervalles des coefficients de l'objectif dans lesquels la même solution reste optimale

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

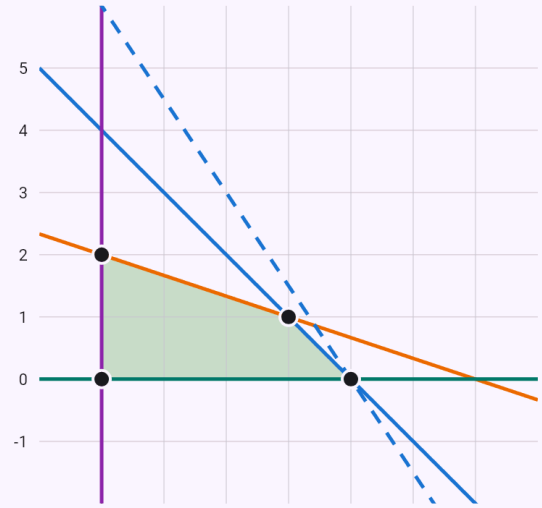
- Les intervalles des seconds membres dans lesquels la même base reste optimale (les prix fictifs ne valent que là)

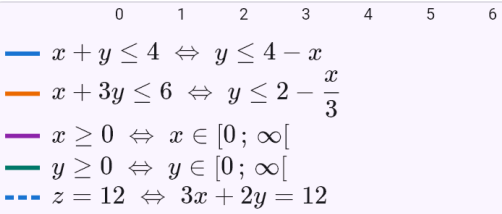
	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- La résolution graphique : le domaine admissible est un polygone et l'optimum est en un sommet. Les valeurs de l'objectif aux sommets (★ l'optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Graphique





$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$

$x + 3y \leq 6 \ \Leftrightarrow \ y \leq 2 - \dfrac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0\,;\,\infty[$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0\,;\,\infty[$

$z = 12 \ \Leftrightarrow \ 3x + 2y = 12$

Les solutions sont les intersections des courbes dans la région colorée (point plein) ; un point vide ne vérifie pas les inéquations.

Points d'intersection des courbes :

● $(0;0)$ ● $(0;2)$ ● $(3;1)$ ● $(4;0)$

Un minimum avec des contraintes ≥ par la méthode en deux phases.

Énoncé: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Résultat

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Étapes

- Le programme linéaire
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Aucune condition de positivité n'est donnée – on suppose $x, y \geq 0$

- Un minimum se cherche comme le maximum de la fonction opposée :
  $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Phase un : les variables artificielles ne sont pas une vraie solution, on les annule donc d'abord – on minimise leur somme $\min w = a_1 + a_2$

- Tableau du simplexe 1 : y entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), a_2 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- Tableau du simplexe 2 : x entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), a_1 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- La phase un se termine avec w = 0 – les variables artificielles sont nulles et on les retire. La phase deux continue avec le vrai objectif.

- Tableau 3 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles) :
  $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Le problème dual – une variable duale par contrainte, une contrainte par variable
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Les prix fictifs (les variables duales optimales) du dernier tableau : de combien l'optimum change quand le second membre d'une contrainte augmente de 1. Une contrainte non saturée (écart $b_i - a_i x > 0$) a un prix fictif nul.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- L'optimum du dual est égal à celui du primal :
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analyse de sensibilité – les intervalles des coefficients de l'objectif dans lesquels la même solution reste optimale

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3\rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6\rangle$

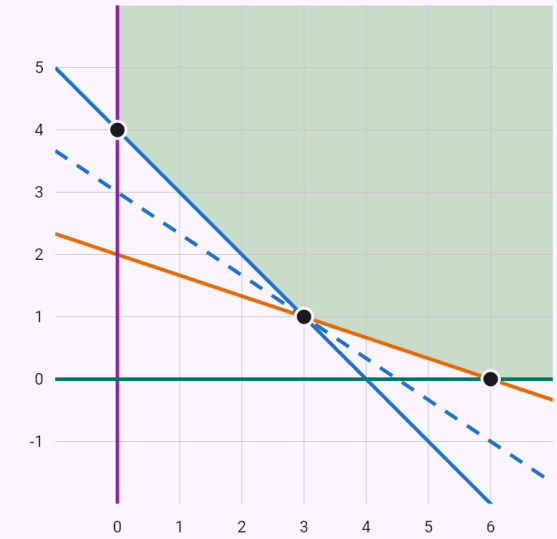
- Les intervalles des seconds membres dans lesquels la même base reste optimale (les prix fictifs ne valent que là)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- La résolution graphique : le domaine admissible est un polygone et l'optimum est en un sommet. Les valeurs de l'objectif aux sommets (★ l'optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graphique



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0\,;\,\infty[$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0\,;\,\infty[$
$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Les solutions sont les intersections des courbes dans la région colorée (point plein) ; un point vide ne vérifie pas les inéquations.

Points d'intersection des courbes :

● $(0;4)$ ● $(3;1)$ ● $(6;0)$

Le même programme par la méthode du grand M.

Énoncé: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Résultat

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Étapes

- Le programme linéaire
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Aucune condition de positivité n'est donnée – on suppose $x, y \geq 0$

- Un minimum se cherche comme le maximum de la fonction opposée :
  $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- La méthode du grand M : les variables artificielles entrent dans l'objectif avec une forte pénalité −M pour que le simplexe les chasse de la base :
  $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$

- Tableau du simplexe 1 : y entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), a_2 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- Tableau du simplexe 2 : x entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), a_1 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- Tableau 3 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles) :
  $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Le problème dual – une variable duale par contrainte, une contrainte par variable
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Les prix fictifs (les variables duales optimales) du dernier tableau : de combien l'optimum change quand le second membre d'une contrainte augmente de 1. Une contrainte non saturée (écart $b_i - a_i x > 0$) a un prix fictif nul.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- L'optimum du dual est égal à celui du primal :
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Analyse de sensibilité – les intervalles des coefficients de l'objectif dans lesquels la même solution reste optimale

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1 \rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2 \rangle$

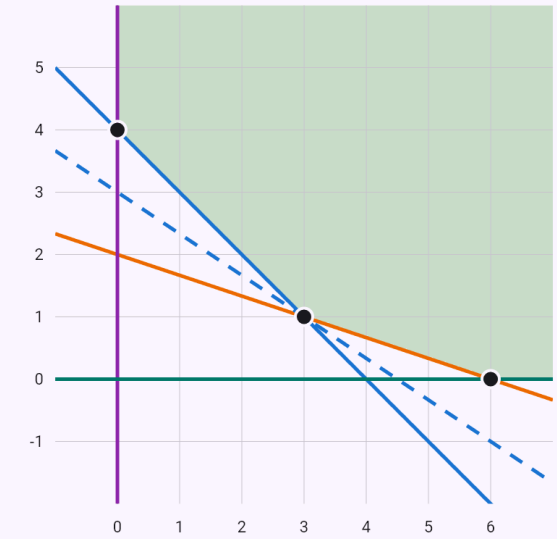
- Les intervalles des seconds membres dans lesquels la même base reste optimale (les prix fictifs ne valent que là)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6 \rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12 \rangle$

- La résolution graphique : le domaine admissible est un polygone et l'optimum est en un sommet. Les valeurs de l'objectif aux sommets (★ l'optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graphique



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0\,;\,\infty[$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0\,;\,\infty[$
$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Les solutions sont les intersections des courbes dans la région colorée (point plein) ; un point vide ne vérifie pas les inéquations.

Points d'intersection des courbes :

● $(0;4)$ ● $(3;1)$ ● $(6;0)$

Une solution entière par séparation et évaluation.

Énoncé: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Résultat

$x = 4$
$y = 0$
$z_{max} = 20$

Étapes

- Le programme linéaire
  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \leq 24$
  $x + 2y \leq 6$
  $x, y \geq 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$
- Aucune condition de positivité n'est donnée – on suppose $x, y \geq 0$
- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a
  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$
- Tableau du simplexe 1 : x entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_1 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	-5	-4	0	0	0	

- Tableau du simplexe 2 : y entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_2 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- Tableau 3 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles) :
  $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$
- Le programme est en nombres entiers – on utilise la séparation et évaluation. La solution sans la condition d'intégrité ci-dessus est la racine P_0 de l'arbre.
- Les nœuds de l'arbre (en profondeur, la branche ≤ d'abord) : une variable non entière se divise en deux branches ; × – pas de solution admissible, z ≤ z* – la branche ne peut pas battre la meilleure solution trouvée (élaguée), ✓ – une solution entière.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \leq 1,\ y \geq 2$
P_1	$y \leq 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \leq 3,\ x \geq 4$
P_2	$x \leq 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \geq 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \geq 2$	$2,\ 2$	18	$z \leq z^*$

- La meilleure solution entière :
  $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Graphique



État initial

$P_0 :\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Un problème de transport – méthode de Vogel et MODI.

Énoncé: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Résultat

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Étapes

- Les coûts unitaires, les offres a_i des fournisseurs et les demandes b_j des clients

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- L'offre est égale à la demande – le problème est équilibré : $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- La méthode de Vogel : à chaque étape, on calcule les pénalités – la différence des deux plus petits coûts de chaque ligne et colonne – et dans la ligne ou colonne de plus forte pénalité (encadrée), on alloue à la case la moins chère.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	[22]	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	[21]		10	10	$(1,1)$
3	40	20	[50]			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	[50]	$(1,4)$
5		20				40	[60]	$(2,4)$
6		[40]				40		$(2,3)$

- La solution de départ (le petit nombre est le coût, le gras la quantité) – le coût
$z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- Itération MODI 1 : les potentiels de $u_i + v_j = c_{ij}$ dans les cases occupées ($u_1 = 0$), dans les vides $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (entre parenthèses). Le d le plus négatif, -18, est dans la case $(2,2)$ – on l'occupe. Le cycle fermé $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, on déplace θ = 2 (la plus petite quantité dans les cases marquées −).

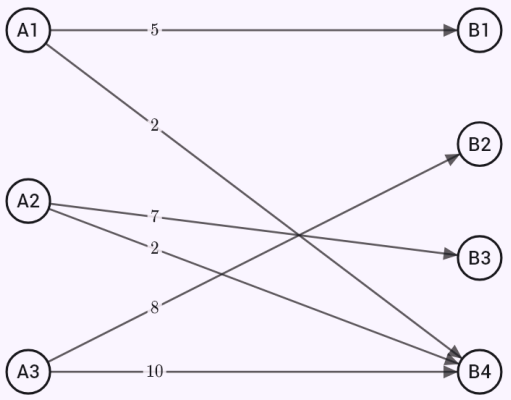
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}[-18]$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	−2	−10	10		

- Aucun d_{ij} n'est négatif – le plan de transport est optimal.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	−2	8	10		

- Le coût total :
$z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Graphique



État initial
$\sum$=779

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Un problème de transport déséquilibré avec un client fictif.

Énoncé: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Résultat

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Étapes

- Les coûts unitaires, les offres a_i des fournisseurs et les demandes b_j des clients

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- L'offre dépasse la demande ($\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – on ajoute un client fictif B_4^* de demande 20 à coût nul (marchandises restant chez les fournisseurs).

- La solution de départ par le coin nord-ouest : à partir de la case en haut à gauche, on alloue le plus possible et on avance à droite ou vers le bas (le petit nombre est le coût, le gras la quantité), le coût $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

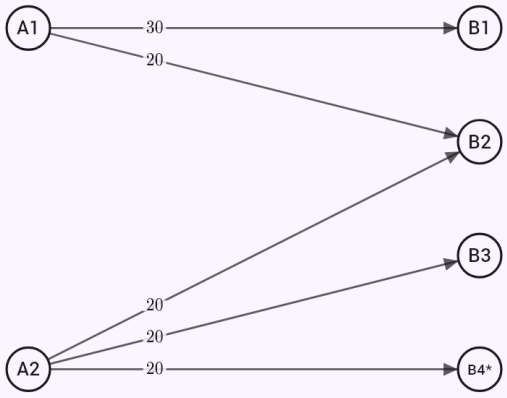
	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}.$	$^{0}.$	50
A_2	$^{5}.$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60
b_j	30	40	20	20	

- Aucun d_{ij} n'est négatif – le plan de transport est optimal.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	-1		

- Un d_{ij} est nul – il existe une autre solution optimale de même coût.
- Le coût total : $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Graphique



État initial
$\sum = 440$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Affectation d'ouvriers à des tâches au moindre coût.

Énoncé: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Résultat

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Étapes

- Les coûts – les lignes sont les ouvriers (machines), les colonnes les tâches

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- On soustrait le minimum de chaque ligne $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- On soustrait le minimum de chaque colonne $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

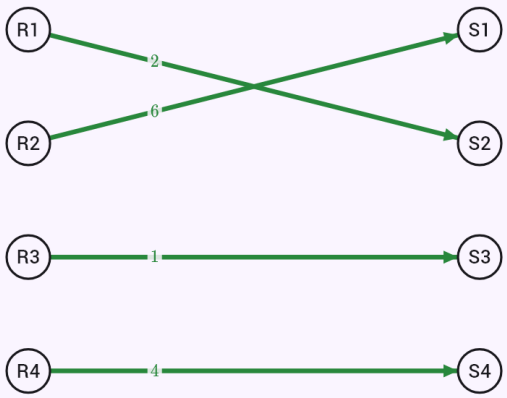
- Il faut 4 lignes pour couvrir les zéros – on choisit des zéros indépendants, un par ligne et par colonne (encadrés).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- L'affectation avec les coûts d'origine – total $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Graphique



Une affectation au plus grand profit.

Énoncé: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Résultat

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Étapes

- Les coûts – les lignes sont les ouvriers (machines), les colonnes les tâches

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- On cherche un maximum – on le transforme en minimum en soustrayant chaque élément du plus grand, 9.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- On soustrait le minimum de chaque ligne $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- On soustrait le minimum de chaque colonne $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

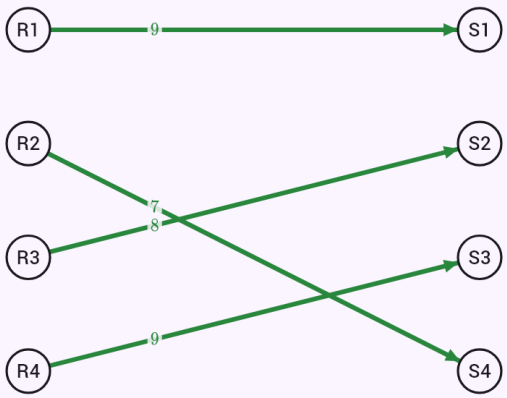
- Il faut 4 lignes pour couvrir les zéros – on choisit des zéros indépendants, un par ligne et par colonne (encadrés).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- L'affectation avec les coûts d'origine – total $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Graphique



Un jeu avec point selle – le maximin égale le minimax.

Énoncé: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Résultat

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Étapes

- La matrice des gains (3×3) : les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B, les nombres les gains de A (pertes de B). A veut gagner le plus possible, B perdre le moins possible.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- On cherche un point selle : le minimum de chaque ligne (ce que A se garantit), le maximum de chaque colonne (B ne perd pas plus).
$\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 2$ – le maximin égale le minimax, le jeu a un point selle.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
max	6	2	6	

- Les stratégies pures optimales (points selles) : (A_1, B_2) ; la valeur du jeu $v = 2$

Un jeu 2 × 2 sans point selle – stratégies mixtes par la formule.

Énoncé: `game(3 -1; -2 4)`

Résultat

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Étapes

- La matrice des gains (2 × 2) : les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B, les nombres les gains de A (pertes de B). A veut gagner le plus possible, B perdre le moins possible.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- On cherche un point selle : le minimum de chaque ligne (ce que A se garantit), le maximum de chaque colonne (B ne perd pas plus). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – il n'y a pas de point selle. Les joueurs utiliseront des stratégies mixtes – chaque stratégie pure avec une certaine probabilité.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Un jeu 2 × 2 sans point selle (stratégies A_1, A_2 et B_1, B_2) : A joue la première ligne avec la probabilité p de sorte que son gain espéré soit le même contre les deux colonnes, B la première colonne avec la probabilité q de même. Pour la matrice (a b ; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Les stratégies mixtes optimales : $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; la valeur du jeu $v = 1$

Stratégies dominées rayées l'une après l'autre.

Énoncé: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Résultat

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Étapes

- La matrice des gains (3×3) : les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B, les nombres les gains de A (pertes de B). A veut gagner le plus possible, B perdre le moins possible.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- On cherche un point selle : le minimum de chaque ligne (ce que A se garantit), le maximum de chaque colonne (B ne perd pas plus).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – il n'y a pas de point selle. Les joueurs utiliseront des stratégies mixtes – chaque stratégie pure avec une certaine probabilité.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- La stratégie A_3 est dominée par A_1, qui rapporte au joueur A au moins autant dans chaque colonne. A ne la choisira pas, on la raye

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- La stratégie B_3 est dominée par B_1 : avec celle-ci, le joueur B ne perd plus dans aucune ligne. B ne la choisira pas, on la raye

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Un jeu 2 × 2 sans point selle (stratégies A_1, A_2 et B_1, B_2) : A joue la première ligne avec la probabilité p de sorte que son gain espéré soit le même contre les deux colonnes, B la première colonne avec la probabilité q de même. Pour la matrice (a b ; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Les stratégies mixtes optimales : $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; la valeur du jeu $v = 1$

Un jeu 2 × 4 graphiquement – le maximum de l'enveloppe inférieure.

Énoncé: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Résultat

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Étapes

- La matrice des gains (2×4) : les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B, les nombres les gains de A (pertes de B). A veut gagner le plus possible, B perdre le moins possible.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- On cherche un point selle : le minimum de chaque ligne (ce que A se garantit), le maximum de chaque colonne (B ne perd pas plus). $\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ – il n'y a pas de point selle. Les joueurs utiliseront des stratégies mixtes – chaque stratégie pure avec une certaine probabilité.

	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

- La méthode graphique : A joue la première ligne avec la probabilité p, la seconde avec 1 − p. Son gain espéré contre chaque stratégie de B est une droite en p ; B choisit la plus basse, A cherche donc le point le plus haut de l'enveloppe inférieure – maximum $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Les droites

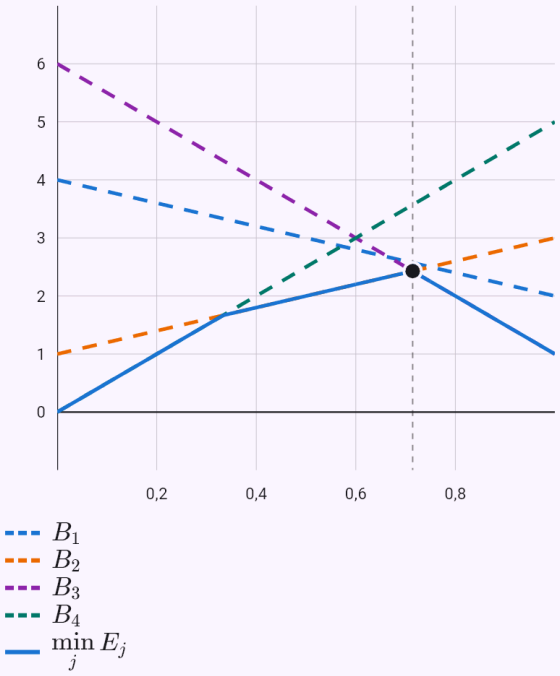
$$B_1: \; E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \; E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \; E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \; E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- L'optimum est à l'intersection des droites B_2, B_3. B les mélange avec les probabilités w et 1 − w de sorte que A soit indifférent à la ligne jouée :

$$2w + (-5)(1-w) = 0 \;\Rightarrow\; w = \frac{5}{7}$$

- Les stratégies mixtes optimales : $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; la valeur du jeu $v = \frac{17}{7}$

Graphique



Les droites sont les gains espérés de A contre les stratégies de B en fonction de p ; l'enveloppe inférieure en surbrillance est ce que A peut garantir, le point est son maximum.

Pierre-feuille-ciseaux par la programmation linéaire – chaque stratégie avec la probabilité 1/3.

Énoncé: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Résultat

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Étapes

- La matrice des gains (3 × 3) : les lignes sont les stratégies du joueur A, les colonnes celles du joueur B, les nombres les gains de A (pertes de B). A veut gagner le plus possible, B perdre le moins possible.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	−1	1
A_2	1	0	−1
A_3	−1	1	0

- On cherche un point selle : le minimum de chaque ligne (ce que A se garantit), le maximum de chaque colonne (B ne perd pas plus). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ – il n'y a pas de point selle. Les joueurs utiliseront des stratégies mixtes – chaque stratégie pure avec une certaine probabilité.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	−1	1	−1
A_2	1	0	−1	−1
A_3	−1	1	0	−1
max	1	1	1	

- On ajoute k = 2 à tous les éléments pour les rendre positifs – les stratégies optimales ne changent pas, la valeur augmente de k.
- Un jeu plus grand devient un programme linéaire. Joueur B : max Σ y⃞ sous Σ⃞ a'⃞⃞·y⃞ ≤ 1, y⃞ ≥ 0, où $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Son problème dual est celui du joueur A.
- Le programme linéaire

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- La forme standard : à une contrainte ≤ on ajoute une variable d'écart s, à une contrainte ≥ on la soustrait et on ajoute une variable artificielle a, à une égalité seulement une artificielle. La base de départ est formée des s et a

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$$

- Tableau du simplexe 1 : y_1 entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_2 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	−1	−1	−1	0	0	0	0	

- Tableau du simplexe 2 : y_3 entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_1 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- Tableau du simplexe 3 : y_2 entre (le $z_j - c_j$ le plus négatif), s_3 sort (le plus petit rapport b/a) ; le pivot est encadré.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	–
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- Tableau 4 : aucun $z_j - c_j$ n'est négatif – la solution est optimale.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- La solution optimale lue dans le dernier tableau (les variables hors base sont nulles)

$$y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$$

- Le problème dual – une variable duale par contrainte, une contrainte par variable

$$\min v = u_1 + u_2 + u_3$$
$$2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$$
$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$$
$$3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

- Les prix fictifs (les variables duales optimales) du dernier tableau : de combien l'optimum change quand le second membre d'une contrainte augmente de 1. Une contrainte non saturée (écart $b_i - a_i x > 0$) a un prix fictif nul.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- L'optimum du dual est égal à celui du primal :

$$v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$$

- Analyse de sensibilité – les intervalles des coefficients de l'objectif dans lesquels la même solution reste optimale

	c_j	
y_1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Les intervalles des seconds membres dans lesquels la même base reste optimale (les prix fictifs ne valent que là)

	b_i	
1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- De l'optimum : $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Les stratégies sont les y⃰ optimaux (pour le joueur A, les prix fictifs) multipliés par v'.
- Les stratégies mixtes optimales : $p^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; la valeur du jeu $v = 0$

Un jeu bimatriciel (la bataille des sexes) – deux équilibres de Nash purs et un mixte.

Énoncé: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Résultat

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Étapes

- Un jeu bimatriciel (2 × 2) : chaque case contient (gain de A, gain de B), et chaque joueur veut le sien le plus grand possible.

	B_1	B_2
A_1	(2, 1)	(0, 0)
A_2	(0, 0)	(1, 2)

- Meilleures réponses : dans chaque colonne on souligne le plus grand gain de A, dans chaque ligne on surligne le plus grand de B. Les cases qui ont les deux (encadrées) sont les équilibres de Nash en stratégies pures : $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- L'équilibre mixte : A choisit p de sorte que B soit indifférent à la colonne jouée, B choisit q de sorte que A soit indifférent à la ligne jouée (gains espérés $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow\ p = \frac{2}{3}$$
$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow\ q = \frac{1}{3}$$

Limitations connues

- Au plus 12 variables et 15 contraintes ; programmes en nombres entiers jusqu’à 6 variables. Toutes les variables doivent être positives ou nulles – les variables libres ne sont pas encore prises en charge.
- Problèmes de transport et d’affectation jusqu’à 8 × 8.
- Jeux matriciels jusqu'à 6 × 6 ; l'équilibre de Nash mixte d'un jeu bimatriciel seulement pour 2 × 2.

52. Graphes, réseaux et logistique

Les problèmes sur les graphes et les réseaux se trouvent sur l'écran d'accueil dans la section « Applications », domaine Logistique et réseaux : plus court chemin (algorithmes de Dijkstra, de Bellman-Ford et de Floyd-Warshall), arbre couvrant minimal (Kruskal, Prim), flot maximal et coupe minimale, arbitrage de devises comme recherche d'un cycle négatif et chemin critique d'un projet (CPM, PERT).

Vous saisissez le graphe dans un champ multiligne, une arête par ligne – A-B 4 est une arête non orientée de poids 4, A->B 4 une arête orientée, pour un flot A->B 3/7 un flot donné et la capacité ; sans nombre, une arête a le poids 1. Au lieu des arêtes, vous pouvez coller une matrice des poids ligne par ligne (-, ∞ ou 0 signifie pas d'arête), éventuellement avec une ligne des noms des sommets au-dessus. Les sommets peuvent porter une lettre ou un mot (PHA, Lyon). Les tâches d'un projet se saisissent par leur nom, leur durée et leurs prédécesseurs (D 5 B C), pour PERT avec trois estimations (B 3/4/11 A).

Pour l'arbitrage, vous pouvez choisir au lieu de vos propres cours la cote du jour de la ČNB ou de la BCE – il suffit d'énumérer les devises (CZK EUR USD GBP). Avec une seule cote, l'arbitrage n'apparaît jamais (la démarche montre pourquoi) ; avec les deux cotes à la fois, chaque paire de devises prend le meilleur cours et un cycle supérieur à 1 peut apparaître. Le bouton « Insérer les cours pour les modifier » place les cours d'une cote dans le champ Taux de change – modifiez-les par exemple selon les cours d'achat et de vente d'un bureau de change.

La démarche montre un tableau des itérations comme dans les cours – marques définitives et provisoires de Dijkstra, passages de Bellman-Ford, matrice de Floyd-Warshall après chaque sommet, arêtes triées de Kruskal, chemins améliorants d'un flot, passages avant et arrière de CPM. Sous le résultat se trouve le graphe, que les flèches parcourent étape par étape : en rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat.

Exemples

Le plus court chemin par l'algorithme de Dijkstra.

Énoncé: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2;`

`from=A; to=F; method=dijkstra)`

Résultat

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

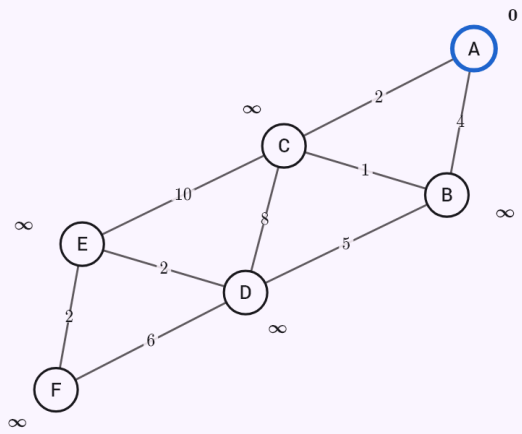
Étapes

- Un graphe non orienté à 6 sommets et 9 arêtes.
- Algorithme de Dijkstra : à chaque étape, le sommet de plus petite marque provisoire devient définitif (encadré) et les marques de ses voisins baissent si un chemin plus court passe par lui (en gras) ; l'indice est le prédécesseur.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- Le chemin lu à rebours par les prédécesseurs : $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, sa longueur $2+1+5+2+2 = 12$

Graphique



État initial
$d(\mathrm{A}) = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Un poids d'arête négatif – l'algorithme de Bellman-Ford.

Énoncé: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Résultat

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

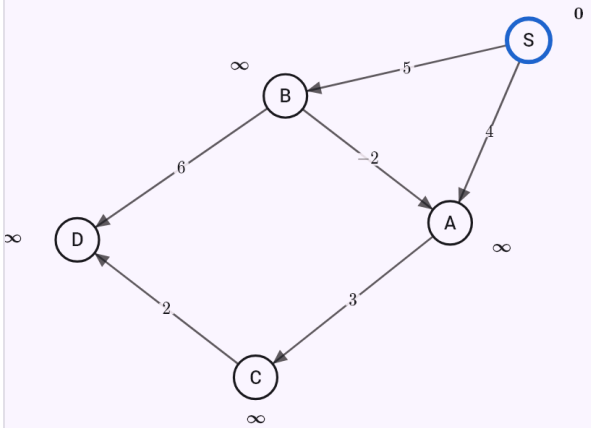
Étapes

- Un graphe orienté à 5 sommets et 6 arêtes.
- Algorithme de Bellman-Ford : à chaque passage, on essaie de raccourcir le chemin par chaque arête, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; les marques modifiées sont en gras, l'indice est le prédécesseur.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- Au passage 2, plus aucune marque n'a changé – les distances sont définitives.
- Le chemin lu à rebours par les prédécesseurs : $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, sa longueur $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Graphique



État initial
$d(\mathrm{S}) = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Les distances entre toutes les paires de sommets.

Énoncé: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Résultat

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Étapes

- Un graphe orienté à 4 sommets et 6 arêtes.
- L'algorithme de Floyd-Warshall part de la matrice des poids des arêtes (∞ – pas d'arête)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- On autorise le sommet A comme étape : $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; les distances raccourcies sont en gras.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- On autorise le sommet B comme étape : $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; les distances raccourcies sont en gras.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

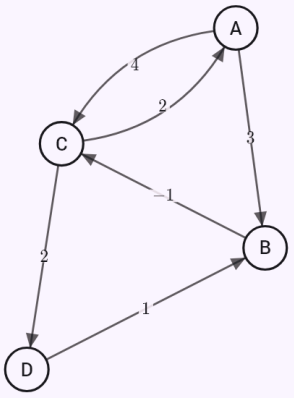
- On autorise le sommet C comme étape : $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; les distances raccourcies sont en gras.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- On autorise le sommet D comme étape : $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; les distances raccourcies sont en gras.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Graphique



État initial
$D^{(0)}$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

L'arbre couvrant minimal par l'algorithme de Kruskal.

Énoncé: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G 9;`

`F-G 11; method=kruskal)`

Résultat

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

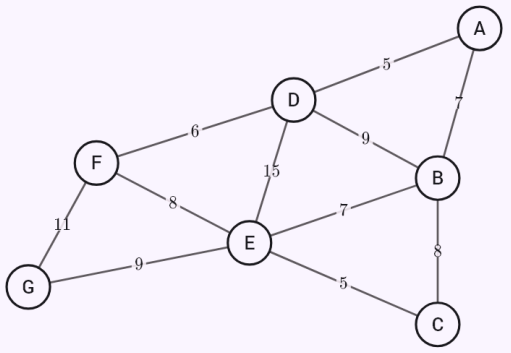
Étapes

- Un graphe non orienté à 7 sommets et 11 arêtes.
- Algorithme de Kruskal : les arêtes de la moins chère à la plus chère, chacune ajoutée (✓) sauf si elle ferme un cycle (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- Le poids total des arêtes de l'arbre :
  $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Graphique



État initial

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Le réseau le plus court reliant des chefs-lieux par l'algorithme de Prim.

Énoncé: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Résultat

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

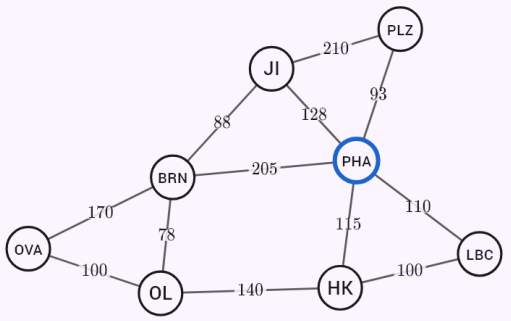
Étapes

- Un graphe non orienté à 8 sommets et 12 arêtes.
- Algorithme de Prim depuis le sommet PHA : à chaque étape, on ajoute l'arête la moins chère allant de l'arbre à un sommet hors de lui.

		w
1	PHA−PLZ	93
2	PHA−LBC	110
3	LBC−HK	100
4	PHA−JI	128
5	JI−BRN	88
6	BRN−OL	78
7	OL−OVA	100

- Le poids total des arêtes de l'arbre :
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Graphique



État initial
PHA

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Le flot maximal et la coupe minimale.

Énoncé: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Résultat

$f_{max} = 23$

$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$

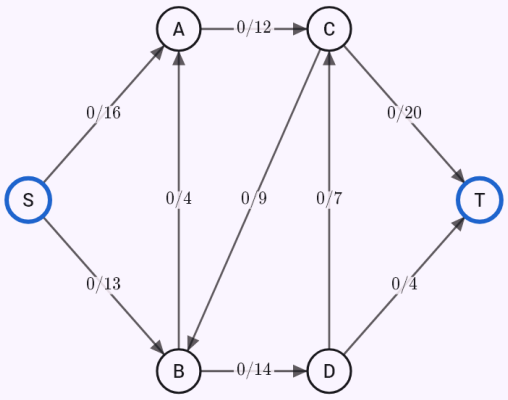
Étapes

- On cherche le flot maximal de la source S au puits T, en partant d'un flot de valeur 0
- 1e chemin améliorant (le plus court dans le réseau résiduel) : $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Le flot augmente de la plus petite capacité résiduelle $\min(16, 12, 20) = 12$; sa valeur est maintenant 12
- 2e chemin améliorant (le plus court dans le réseau résiduel) : $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Le flot augmente de la plus petite capacité résiduelle $\min(13, 14, 4) = 4$; sa valeur est maintenant 16
- 3e chemin améliorant (le plus court dans le réseau résiduel) : $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Le flot augmente de la plus petite capacité résiduelle $\min(9, 10, 7, 8) = 7$; sa valeur est maintenant 23
- Plus de chemin améliorant – dans le réseau résiduel, la source n'atteint que les sommets $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Le flot sur les arêtes (f) et leurs capacités (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Les arêtes sortant de l'ensemble S forment la coupe minimale : $\mathrm{A} \to \mathrm{C},\ \mathrm{D} \to \mathrm{C},\ \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Elles sont toutes saturées et leur capacité totale $12 + 7 + 4 = 23$ est égale au flot maximal.

Graphique



État initial
$f = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Un cycle de change rentable entre trois devises.

Énoncé: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24;`

USD->GBP 0.7)

Résultat

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Étapes

- Les taux et les poids des arêtes $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

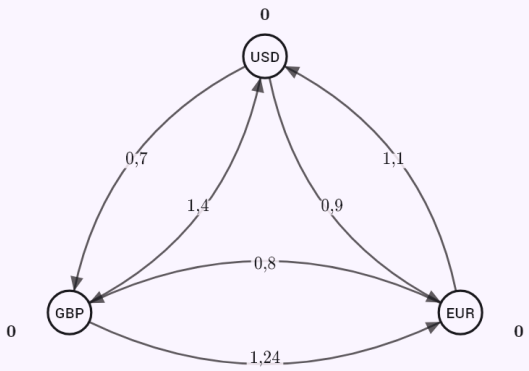
- Un cycle est rentable quand le produit de ses taux dépasse 1 – en logarithmes, un cycle négatif des poids $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- On lance l'algorithme de Bellman-Ford depuis toutes les devises à la fois (toutes les marques à 0) ; les marques modifiées sont en gras, l'indice est le prédécesseur.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{\mathrm{GBP}}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Les marques changent encore au n-ième passage – les prédécesseurs mènent au cycle négatif $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Produit des taux $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, gain de $0{,}8\,\%$: 1000 unités deviennent 1008 après un tour.

Graphique



État initial
$d = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Des taux cohérents donnés par une matrice – pas d'arbitrage.

Énoncé: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Résultat

Pas d'arbitrage – aucun cycle de change n'est rentable.

Étapes

- Les taux et les poids des arêtes $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	0,04	3,2189
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	0,0432	3,1419
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	25	−3,2189
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	1,08	−0,076961
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	23,1481	−3,1419
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	0,925926	0,076961

- Un cycle est rentable quand le produit de ses taux dépasse 1 – en logarithmes, un cycle négatif des poids $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- On lance l'algorithme de Bellman-Ford depuis toutes les devises à la fois (toutes les marques à 0) ; les marques modifiées sont en gras, l'indice est le prédécesseur.

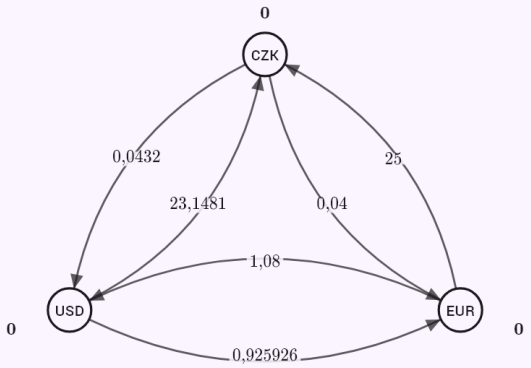
	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- Au passage 2, plus aucune marque n'a changé – les distances sont définitives.

- Même au n-ième passage, aucune marque n'a changé – il n'y a pas de cycle négatif, donc pas d'arbitrage. Les potentiels p = −d sont les logarithmes de « prix » cohérents des devises : chaque taux vérifie $\ln r \le p($ arrivée$) - p($départ$)$.

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Graphique



État initial
$d = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Les cours d’une seule cote (ČNB) – jamais d’arbitrage.

Énoncé: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Résultat

Pas d’arbitrage – aucun cycle de change n’est rentable.

Étapes

- Cours de la cote : $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026$
- La cote donne la valeur d’une unité de chaque devise dans la devise de base CZK (k) – et son logarithme p = ln k

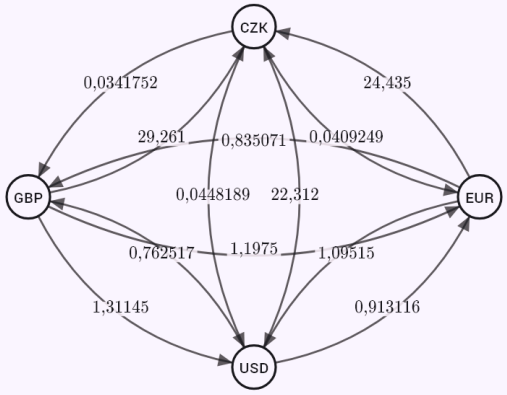
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$	$3{,}3763$

- Le cours entre deux devises est un cours croisé via la devise de base : $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Sur chaque cycle, les valeurs k se simplifient et le produit des cours vaut exactement 1. Les cours d’une seule cote $(\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB})$ sont cohérents, ils ne donnent jamais d’arbitrage – les logarithmes p = ln k sont les « prix » des devises qui le montrent.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- La ČNB et la BCE ne publient que des cours moyens (de référence), sans achat ni vente. Avec les cours d’un bureau de change (achat et vente), chaque cycle perd.

Graphique



Les cours de la ČNB et de la BCE ensemble – un « gain » minime entre cours de référence.

Énoncé: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Résultat

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$
$$\prod r \approx 1{,}0009332 \ (+0{,}09332\,\%)$$

Étapes

- Cours de la cote :
  $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026;\quad \mathrm{ECB},\ 27/11/2026$
- Pour chaque paire de devises, on prend le meilleur des deux cours – celui de la ČNB ou celui de la BCE (dernière colonne du tableau). L'autre n'améliorerait aucun cycle.
- Les taux et les poids des arêtes $w = -\ln r$

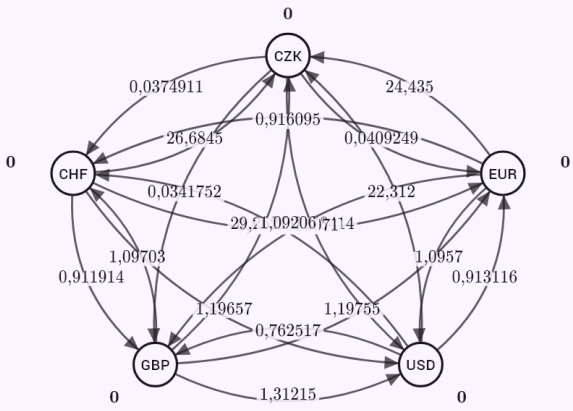
	r	$w = -\ln r$	
CZK → EUR	0,0409249	3,196	ČNB
CZK → USD	0,0448414	3,1046	ECB
CZK → GBP	0,0341752	3,3763	ČNB
CZK → CHF	0,0374911	3,2837	ČNB
EUR → CZK	24,435	−3,196	ČNB
EUR → USD	1,0957	−0,091393	ECB
EUR → GBP	0,835071	0,18024	ČNB
EUR → CHF	0,916095	0,087635	ČNB
USD → CZK	22,312	−3,1051	ČNB
USD → EUR	0,913116	0,090892	ČNB
USD → GBP	0,762517	0,27113	ČNB
USD → CHF	0,836501	0,17853	ČNB
GBP → CZK	29,2621	−3,3763	ECB
GBP → EUR	1,19755	−0,18028	ECB
GBP → USD	1,31215	−0,27167	ECB
GBP → CHF	1,09703	−0,092604	ČNB
CHF → CZK	26,6845	−3,2841	ECB
CHF → EUR	1,09206	−0,088066	ECB
CHF → USD	1,19657	−0,17946	ECB
CHF → GBP	0,911914	0,092209	ECB

- Un cycle est rentable quand le produit de ses taux dépasse 1 – en logarithmes, un cycle négatif des poids $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- On lance l'algorithme de Bellman-Ford depuis toutes les devises à la fois (toutes les marques à 0) ; les marques modifiées sont en gras, l'indice est le prédécesseur.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272064_{(}}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272996_{(}}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}273929_{(}}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}274862_{(}}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}275795_{(}}$

- Les marques changent encore au n-ième passage – les prédécesseurs mènent au cycle négatif $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Produit des taux $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, gain de $0{,}09332\,\%$: 1000 unités deviennent $1000{,}933$ après un tour.
- Le cycle n'apparaît qu'entre les cours de référence de deux banques, fixés à des moments différents et arrondis autrement. Personne ne traite à ces cours – le gain est pratiquement impossible à réaliser.

Graphique



État initial
$d = 0$

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Le chemin critique et les marges des tâches.

Énoncé: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Résultat

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Étapes

- Les tâches, leurs durées et leurs prédécesseurs

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Passage avant : une tâche commence au plus tôt quand tous ses prédécesseurs sont finis (ES = le plus grand EF des prédécesseurs) et finit à EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- La durée du projet est la plus tardive des fins au plus tôt : $T = 14$

- Passage arrière : une tâche doit finir au plus tard quand ses successeurs doivent commencer (LF = le plus petit LS des successeurs) et commencer au plus tard à LS = LF − t.

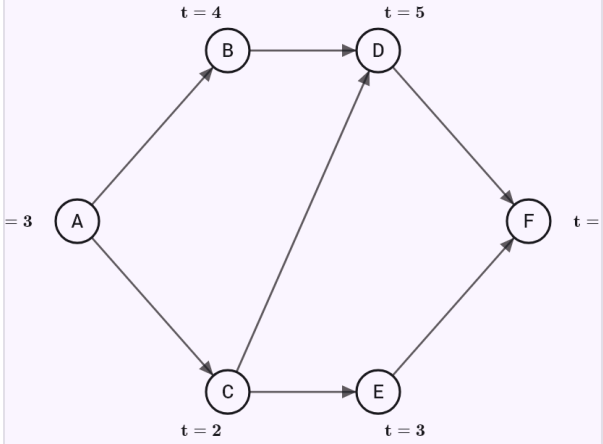
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- La marge de chaque tâche ; les tâches critiques (★) n'en ont pas

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- Le chemin critique – un retard de n'importe laquelle de ses tâches retarde tout le projet : $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Graphique



État initial

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

PERT – la probabilité de finir le projet à l'échéance.

Énoncé: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Résultat

$T = 13$

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$

$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$

Étapes

- Les tâches, leurs durées et leurs prédécesseurs

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT : durées attendues et variances à partir des trois estimations

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Passage avant : une tâche commence au plus tôt quand tous ses prédécesseurs sont finis (ES = le plus grand EF des prédécesseurs) et finit à EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- La durée du projet est la plus tardive des fins au plus tôt : $T = 13$
- Passage arrière : une tâche doit finir au plus tard quand ses successeurs doivent commencer (LF = le plus petit LS des successeurs) et commencer au plus tard à LS = LF − t.

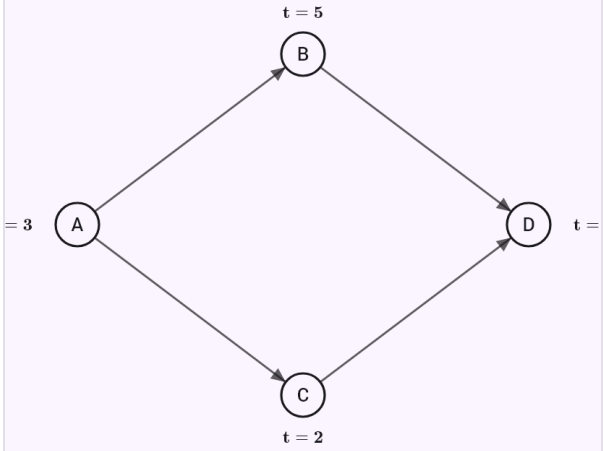
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- La marge de chaque tâche ; les tâches critiques (★) n'en ont pas

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- Le chemin critique – un retard de n'importe laquelle de ses tâches retarde tout le projet : $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- La variance de la durée du projet est la somme des variances sur le chemin critique : $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- La durée suit approximativement une loi normale – probabilité de finir à l'échéance : $P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15-13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$

Graphique



État initial

Les flèches parcourent l'algorithme étape par étape. En rouge le changement de l'étape, en bleu ce qui est déjà décidé, en vert le résultat. À côté des sommets, leurs marques (distance, dates au plus tôt et au plus tard).

Limitations connues

- Un graphe peut avoir au plus 30 sommets et 200 arêtes ; les matrices de Floyd-Warshall sommet par sommet sont affichées jusqu'à 6 sommets, pour les graphes plus grands seulement la matrice finale.
- La recherche d'arbitrage trouve un cycle rentable (pas forcément le plus rentable) ; les écarts inférieurs à 0,0001 % sont considérés comme des arrondis des taux.

- La ČNB et la BCE ne publient que des cours moyens (de référence), auxquels personne ne traite ; le « gain » avec les deux cotes à la fois est de l'ordre du centième de pour cent et pratiquement impossible à réaliser.
- Avec les deux cotes, seulement les devises publiées par les deux banques (aucune ne publie le rouble russe).
- Les tournées de véhicules, le problème du sac à dos, les stocks et les files d'attente sont en préparation ; la programmation linéaire, le transport et l'affectation ont leur propre chapitre.

53. Psychométrie

Les calculs psychométriques pour interpréter les résultats de tests (d'après le cours « Psychométrie clinique – du nombre à l'interprétation ») se trouvent dans le formulaire « Statistique et psychométrie » – section « Applications » de l'écran d'accueil, domaine Psychologie. Choisissez la tâche, l'échelle et la grandeur cherchée et saisissez les valeurs mesurées ; le choix de l'échelle remplit la moyenne et l'écart type de l'étalonnage (QI 100 ; 15, T 50 ; 10, note standard 10 ; 3, z 0 ; 1, sten 5,5 ; 2, stanine 5 ; 2), « Autre » permet de saisir l'étalonnage d'un autre test. L'icône « ? » explique d'où vient la formule.

L'aide dans l'application : l'icône « ? » de chaque tâche du formulaire explique ce qu'elle calcule et d'où vient la formule. Le résultat montre la démarche pas à pas, et ses termes techniques (kappa de Cohen, courbe ROC, intervalle de confiance, valeur p, percentile, note vraie, valeurs prédictives…) sont soulignés en pointillés – un toucher sur un terme affiche sa courte explication en mots simples, souvent avec un exemple. Les remarques à la fin de la démarche disent comment interpréter le résultat et à quoi faire attention.

Conversion de notes standard : $z = (X - M)/ET$ puis T, QI, note standard, sten et stanine (arrondis à un entier dans l'échelle) et le rang percentile. Note et rang percentile : $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ sous la loi normale et, à l'inverse, la note d'un percentile donné.

L'erreur type de mesure $ETM = ET \cdot \sqrt{(1 - r)}$ à partir de la fidélité r. L'intervalle de confiance autour de la note observée $X \pm z \cdot ETM$ à 80, 90, 95 ou 99 % (z = 1,28 ; 1,645 ; 1,96 ; 2,576). L'estimation de la note vraie $T' = M + r(X - M)$ – régression vers la moyenne – avec l'intervalle autour de T' et l'erreur type d'estimation $SEE = ET \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

La significativité de l'écart entre deux notes d'une même échelle (indices de la WAIS, par exemple) : erreur type de la différence $ET_diff = ET \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ et différence critique $z \cdot ET_diff$. Les valeurs prédictives d'un test par le théorème de Bayes : VPP et VPN à partir de la sensibilité, de la spécificité et de la prévalence – ou d'un tableau 2×2 (vrais et faux positifs et négatifs), éventuellement avec la prévalence de la population où le test est utilisé – avec les rapports de vraisemblance LR^+ et LR^-.

La formule de Spearman-Brown (dans le même formulaire) donne la fidélité d'un test allongé k fois, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, ou à l'inverse de combien allonger un test pour une fidélité visée – avec le nombre actuel d'items, aussi le nombre d'items nécessaire. La correction de Bonferroni donne le seuil plus strict $\alpha' = \alpha/m$ pour m comparaisons, avec la probabilité d'un résultat faussement significatif sans correction et la correction de Šidák.

La fidélité et l'accord à partir de données mesurées s'obtiennent avec les puces de data(…) ou de la grille « Comme données » (collée depuis Excel, fichier CSV) : alpha de Cronbach – items en colonnes, répondants en lignes – avec une analyse d'items (corrélation de l'item avec le reste du test, alpha sans l'item) ; l'ICC – juges en colonnes, sujets en lignes – les six formes de Shrout et Fleiss à partir d'un

tableau d'analyse de variance ; kappa de Cohen à partir de deux colonnes d'évaluations (catégories en nombres) ou d'un tableau d'accord carré ; courbe ROC et AUC à partir d'une colonne de scores et d'une colonne d'état 0/1 (1 = trouble) par la statistique U de Mann-Whitney, avec le seuil selon l'indice de Youden et le graphique de la courbe ROC. L'alpha, l'ICC, le kappa et l'AUC sont accompagnés d'un intervalle de confiance (90, 95 ou 99 % par une puce) : l'alpha selon Feldt, l'ICC à partir de la loi F, le kappa à partir de l'erreur type asymptotique, l'AUC selon Hanley et McNeil. Pour des catégories ordonnées, le kappa se calcule aussi avec des poids linéaires ou quadratiques. La courbe ROC peut aussi venir de deux colonnes de scores de deux groupes (la première positive, de longueurs quelconques), le test de Mann-Whitney s'ajoutant à l'AUC. Trois colonnes – les scores de deux tests et l'état – sont comparées par le test de DeLong, les deux courbes dans un même graphique.

La résolution se termine par une note d'interprétation : les percentiles sont ordinaux (ni additionnés ni moyennés), la conversion en percentile ne vaut que pour une note de distribution normale, un écart significatif n'est pas forcément rare (taux de base de la discordance), les valeurs prédictives dépendent de la prévalence. Le graphique montre la courbe normale avec la note, l'intervalle ou la région critique marqués.

Exemples

QI 85 dans toutes les échelles : z = −1, T = 40, note standard 7.

Énoncé: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Résultat

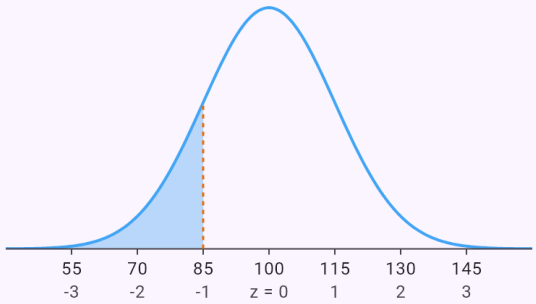
$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

Étapes

- Données : $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Les notes standard indiquent à combien d'écarts types de la moyenne de l'étalonnage se situe une performance. D'abord z = (X − M)/ET, puis l'autre échelle : T = 50 + 10z, QI = 100 + 15z, note standard = 10 + 3z, sten = 5,5 + 2z (1–10), stanine = 5 + 2z (1–9). Le rang percentile est le pourcentage de la population ayant une note inférieure – seulement pour une note de distribution normale.
  Équation du modèle :
  $z = \dfrac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- On exprime la grandeur cherchée : $z = \dfrac{X - M}{SD}$
- On remplace : $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$
- On remplace : $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- On remplace : $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- On remplace : $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- On remplace
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- On remplace :
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$
- Les stens et stanines sont entiers : la valeur est arrondie et ramenée dans l'étendue de l'échelle (1–10, 1–9).
- On remplace : $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- La conversion en rang percentile ne vaut que pour une note de distribution normale. Pour les tests asymétriques (les temps du TMT, par exemple), on lit le percentile dans la table d'étalonnage.
- Les percentiles sont une échelle ordinale : leurs pas ne sont pas égaux (au centre, les 50e et 60e percentiles sont proches en note, aux extrémités éloignés). On ne les additionne, ne les moyenne ni ne les soustrait donc pas.

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$PR \approx 16 \quad X = 85$

Un QI de 130 correspond au 98e percentile.

Énoncé: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Résultat

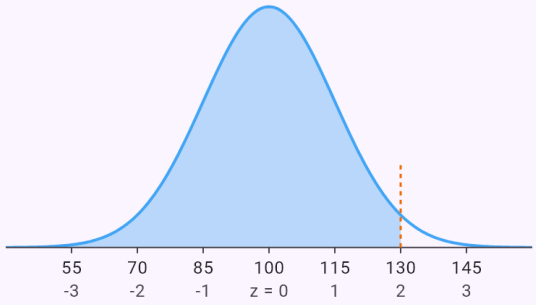
$$PR \approx 98$$

Étapes

- On cherche PR ; données :
  $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Le rang percentile indique quel pourcentage du groupe d'étalonnage a obtenu une note inférieure. Sous la loi normale, il découle de la note z : PR = 100·Φ(z) ; la note d'après un percentile, par le quantile z = Φ⁻¹(PR/100).
  Équation du modèle : $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- On exprime la grandeur cherchée : $z = \frac{X - M}{SD}$
- On remplace : $z = \frac{130 - 100}{15} = 2$
- On remplace : $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- La conversion en rang percentile ne vaut que pour une note de distribution normale. Pour les tests asymétriques (les temps du TMT, par exemple), on lit le percentile dans la table d'étalonnage.
- Les percentiles sont une échelle ordinale : leurs pas ne sont pas égaux (au centre, les 50e et 60e percentiles sont proches en note, aux extrémités éloignés). On ne les additionne, ne les moyenne ni ne les soustrait donc pas.

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$PR \approx 98 \quad X = 130$

La note T du 16e percentile.

Énoncé: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Résultat

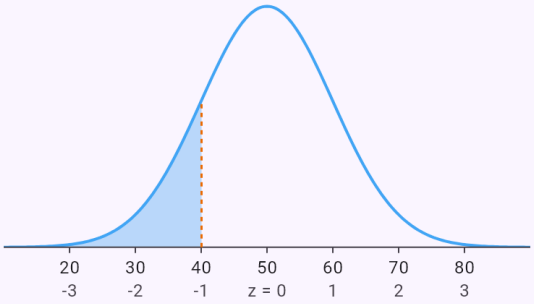
$$X \approx 40{,}1$$

Étapes

- On cherche X ; données : $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- On convertit les unités : $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Le rang percentile indique quel pourcentage du groupe d'étalonnage a obtenu une note inférieure. Sous la loi normale, il découle de la note z : PR = 100·Φ(z) ; la note d'après un percentile, par le quantile z = Φ⁻¹(PR/100).
  Équation du modèle : $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- On exprime la grandeur cherchée : $z = \Phi^{-1}\left(\frac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- On remplace $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- La conversion en rang percentile ne vaut que pour une note de distribution normale. Pour les tests asymétriques (les temps du TMT, par exemple), on lit le percentile dans la table d'étalonnage.
- Les percentiles sont une échelle ordinale : leurs pas ne sont pas égaux (au centre, les 50e et 60e percentiles sont proches en note, aux extrémités éloignés). On ne les additionne, ne les moyenne ni ne les soustrait donc pas.

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

L'erreur type de mesure d'un test de fidélité 0,97.

Énoncé: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Résultat

$$SEM \approx 2{,}6$$

Étapes

- On cherche SEM ; données : $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Aucune mesure n'est exacte : note observée X = note vraie T + erreur E. L'erreur type de mesure ETM = ET·√(1 − r) indique l'écart typique entre la note observée et la vraie ; r est la fidélité du test (test-retest, α de Cronbach). Plus la fidélité est élevée, plus l'erreur est petite.
  Équation du modèle : $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Erreur type de mesure : $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

L'intervalle de confiance à 95 % autour d'un QI de 95.

Énoncé: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Résultat

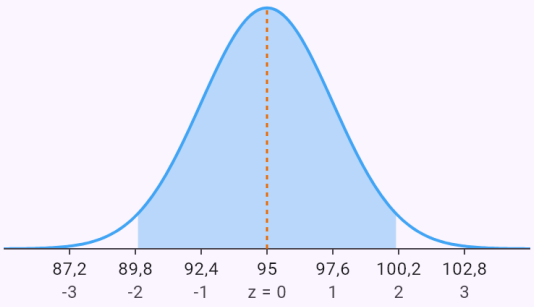
$95\,\%$: $[89{,}9\,;\,100{,}1]$

Étapes

- On cherche X ; données :
  $X = 95, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Autour de la note observée, on trace la zone où se trouve la note vraie avec une confiance donnée : X ± z·ETM, avec z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) ou 2,576 (99 %). Une note se lit comme un intervalle, non comme un nombre exact. Équation du modèle
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Erreur type de mesure : $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Valeur critique de la loi normale centrée réduite :
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- On remplace :
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow [89{,}91\,;\,100{,}1]$
- L'intervalle est construit autour de la note observée. Plus précis (surtout pour les notes extrêmes) est l'intervalle autour de la note vraie estimée – le modèle « Estimation de la note vraie ».

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$95\,\%$: $[89{,}9\,;\,100{,}1] \quad X = 95$

L'estimation de la note vraie d'un QI de 74 avec une fidélité de 0,92.

Énoncé: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Résultat

$$T' \approx 76{,}1$$

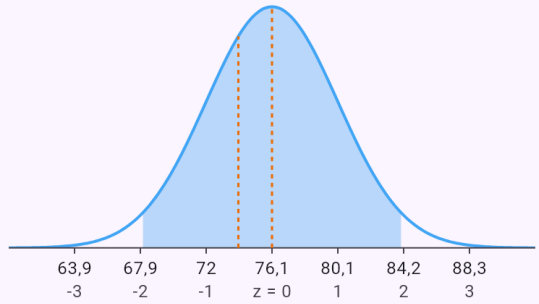
$$95\,\% : \ [68{,}1\,;\,84{,}1]$$

Étapes

- On cherche T' ; données :
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- Pour des notes extrêmes, la note vraie s'estime plus près de la moyenne (régression vers la moyenne) : T' = M + r(X − M). L'intervalle de confiance se construit alors autour de T' avec l'erreur type d'estimation SEE = ET·√(r(1 − r)) – plus précis qu'autour de la note observée, surtout si la fidélité est faible. Équation du modèle
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- On remplace : $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- L'estimation de la note vraie est plus proche de la moyenne que la note observée – mesuré à nouveau, un résultat extrême serait probablement moins extrême.
- Erreur type d'estimation de la note vraie :
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Valeur critique de la loi normale centrée réduite :
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- On remplace
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow [68{,}1\,;\,84{,}06]$

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



Deux indices, 112 et 97 : l'écart est-il significatif ?

Énoncé: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Résultat

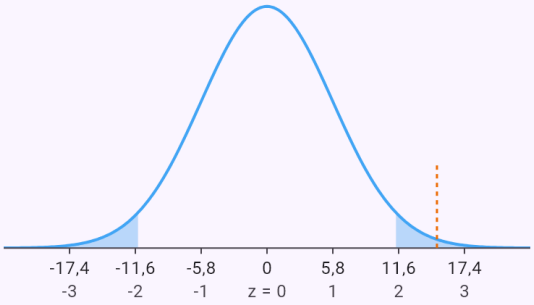
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

Étapes

- On cherche D ; données :
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Deux notes (des indices de la WAIS, par exemple) diffèrent-elles plus que ne l'expliquerait l'erreur de mesure ? Erreur type de la différence ET_diff = ET·√(2 − r_{11} − r_{22}), différence critique z·ET_diff. Un écart qui l'atteint est significatif – ce qui ne veut pas dire qu'il est rare. Équation du modèle
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Erreur type de la différence :
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Valeur critique de la loi normale centrée réduite :
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Différence critique : $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- On remplace :
  $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- L'écart atteint la valeur critique : il est significatif (l'erreur de mesure seule ne l'explique pas).
- Significatif ne veut pas dire rare : des écarts d'indices de cette taille se rencontrent souvent chez 20–30 % de l'échantillon d'étalonnage (taux de base de la discordance). Sa fréquence dans la norme compte aussi pour l'interprétation.

Graphique

Densité de la loi normale, l'aire colorée est la probabilité cherchée



$95\,\%$ $D = 15$

Un dépistage de sensibilité 92,5 % et de spécificité 74,6 % pour une prévalence de 2 %.

Énoncé: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

input=rates)

Résultat

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Étapes

- On cherche PPV ; données :
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- On convertit les unités :
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- La sensibilité (Se) est la part des malades que le test détecte, la spécificité (Sp) celle des sains qu'il écarte correctement. En pratique compte la probabilité du trouble en cas de résultat positif – la valeur prédictive positive VPP. Selon le théorème de Bayes, elle dépend de la prévalence p : VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), la négative VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Équation du modèle
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- On remplace
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- On remplace
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Rapports de vraisemblance :
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Les valeurs prédictives dépendent de la prévalence : quand elle est faible, la plupart des résultats positifs sont de faux positifs, même avec un bon test. Un dépistage positif doit être confirmé.

Les valeurs prédictives d'après un tableau 2×2.

Énoncé: model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)

Résultat

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Étapes

- On cherche PPV ; données :
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Sensibilité : $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Spécificité : $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Prévalence dans l'échantillon :
  $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- La sensibilité (Se) est la part des malades que le test détecte, la spécificité (Sp) celle des sains qu'il écarte correctement. En pratique compte la probabilité du trouble en cas de résultat positif – la valeur prédictive positive VPP. Selon le théorème de Bayes, elle dépend de la prévalence p : VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), la négative VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p).
  Équation du modèle
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- On remplace
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- On remplace
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Rapports de vraisemblance :
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Les valeurs prédictives dépendent de la prévalence : quand elle est faible, la plupart des résultats positifs sont de faux positifs, même avec un bon test. Un dépistage positif doit être confirmé.

Cohérence interne d'un questionnaire à quatre items.

Énoncé: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Alpha de Cronbach

Résultat

$\alpha \approx 0{,}9343$

$95\,\% : \ [0{,}765\,;\,0{,}990]$

Étapes

- Nombre d'items (colonnes) k = 4, nombre de répondants (lignes) 6
- Les variances d'échantillon des items et leur somme

$$s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$$

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Le score total de chaque répondant (somme de ses réponses) : $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. La variance des scores totaux : $s^2_X \approx 24{,}17$
- Alpha de Cronbach – la cohérence interne est excellente.

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Analyse d'items – moyenne, variance, corrélation de l'item avec le reste du test et alpha sans l'item

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- Intervalle de confiance à 95 % selon Feldt – le rapport (1 − α)/(1 − α) suit la loi F à n − 1 et (n − 1)(k − 1) degrés de liberté

$$F_{0{,}975}(5;\,15) = 3{,}576$$

$$F_{0{,}025}(5;\,15) = 0{,}1556$$

$$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

$$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Repères pour α : ≥ 0,9 excellente, ≥ 0,8 bonne, ≥ 0,7 acceptable cohérence interne. Pour la recherche, environ 0,7 suffit ; pour une décision concernant une personne (diagnostic), on recommande au moins 0,9.
- Un α élevé ne signifie pas que le test mesure un seul trait, et il augmente avec le seul nombre d'items. Si α augmente quand on retire un item (dernière colonne du tableau), l'item n'appartient probablement pas à l'échelle.

Accord de quatre juges sur six sujets (exemple de Shrout et Fleiss).

Énoncé: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (accord inter-juges)

Résultat

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \quad [-0{,}133\,;\,0{,}723]$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \quad [-0{,}884\,;\,0{,}912]$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \quad [0{,}019\,;\,0{,}761]$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \quad [0{,}071\,;\,0{,}927]$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \quad [0{,}342\,;\,0{,}946]$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \quad [0{,}676\,;\,0{,}986]$$

Étapes

- Nombre de sujets évalués (lignes) 6, nombre de juges (colonnes) k = 4, moyenne générale $\bar{x} = 5{,}292$
- Analyse de variance – sommes des carrés SS, degrés de liberté df et carrés moyens MS entre sujets (R), entre juges (C), résiduelle (E) et intra-sujets (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Modèle à un facteur – chaque sujet peut être évalué par des juges différents

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Modèle à deux facteurs avec juges aléatoires – accord absolu

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Modèle à deux facteurs avec juges fixes – cohérence

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Intervalles de confiance à 95 % issus de la loi F (Shrout et Fleiss) – les rapports des carrés moyens et leurs bornes

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\,18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\,5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\,15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\,5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Les six ICC avec leurs intervalles de confiance à 95 %

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$[-0{,}133\,;\,0{,}723]$
$ICC(1,4)$	0,443	$[-0{,}884\,;\,0{,}912]$
$ICC(2,1)$	0,290	$[0{,}019\,;\,0{,}761]$
$ICC(2,4)$	0,620	$[0{,}071\,;\,0{,}927]$
$ICC(3,1)$	0,715	$[0{,}342\,;\,0{,}946]$
$ICC(3,4)$	0,909	$[0{,}676\,;\,0{,}986]$

- Quel ICC choisir : ICC(1,·) – chaque sujet est évalué par des juges différents ; ICC(2,·) – les juges sont un échantillon aléatoire et l'accord absolu compte ; ICC(3,·) – juges fixes, la cohérence compte. ICC(·,1) vaut pour un seul juge, ICC(·,k) pour la moyenne de k juges. Repères (Koo et Li) : moins de 0,5 faible, 0,5–0,75 modérée, 0,75–0,9 bonne, plus de 0,9 excellente.
- ICC(3,k) est égal à l'alpha de Cronbach des mêmes données (les juges comme items).
- L'intervalle de confiance d'un ICC est souvent large avec peu de sujets – même un ICC élevé peut avoir une borne inférieure basse. Les intervalles des ICC(2,·) sont approchés (degrés de liberté de Satterthwaite).
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Accord de deux médecins dans trois catégories diagnostiques.

Énoncé: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa de Cohen

Résultat

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\% : \ [0{,}256\,;\,0{,}986]$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Étapes

- Les paires d'évaluations donnent le tableau d'accord (lignes juge A, colonnes juge B, accord sur la diagonale)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- L'accord observé – la part des cas sur la diagonale :
$$p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$
- L'accord attendu par hasard – à partir des totaux des lignes et des colonnes
$$p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$$
- Kappa de Cohen – l'accord est fort (Landis et Koch).

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$$

- Intervalle de confiance à 95 % à partir de l'erreur type asymptotique (Fleiss, Cohen et Everitt)
$SE \approx 0{,}1861$
$\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow [0{,}256\,;\,0{,}986]$
- κ retire de l'accord celui attendu par hasard : 0 signifie un accord dû au seul hasard, 1 un accord parfait. Quand une catégorie domine, κ reste faible même avec un fort pourcentage d'accord – c'est pourquoi p_o est aussi indiqué.
- Les catégories sont prises comme nominales – tout désaccord pèse autant. Pour des catégories ordonnées (p. ex. un degré de gravité), on utilise le κ pondéré, qui pénalise moins un petit désaccord.

Les mêmes diagnostics avec des poids quadratiques – les catégories voisines comptent comme accord partiel.

Énoncé: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa de Cohen, Poids quadratiques

Résultat

$$\kappa_w \approx 0{,}7955$$

$$95\,\% : \ [0{,}576\,;\ 1{,}000]$$

$$p_o = 0{,}9375$$

$$p_e \approx 0{,}6944$$

Étapes

- Les paires d'évaluations donnent le tableau d'accord (lignes juge A, colonnes juge B, accord sur la diagonale)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Poids d'accord quadratiques – un petit désaccord coûte peu, un grand beaucoup : $w_{ij} = 1 - \dfrac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- L'accord observé pondéré – les effectifs du tableau multipliés par les poids :
  $p_o = \dfrac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \dfrac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$
- L'accord pondéré attendu par hasard – à partir des totaux des lignes et des colonnes avec les poids :
  $p_e = \dfrac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \dfrac{100}{144} \approx 0{,}6944$
- Le kappa de Cohen pondéré – l'accord est fort (Landis et Koch).
  $\kappa_w = \dfrac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \dfrac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$
- Intervalle de confiance à 95 % à partir de l'erreur type asymptotique (Fleiss, Cohen et Everitt)
  $SE \approx 0{,}1119$
  $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow [0{,}576\,;\ 1{,}000]$

- κ retire de l'accord celui attendu par hasard : 0 signifie un accord dû au seul hasard, 1 un accord parfait. Quand une catégorie domine, κ reste faible même avec un fort pourcentage d'accord – c'est pourquoi p_o est aussi indiqué.
- Le kappa pondéré compte aussi l'accord partiel : des notes d'un degré d'écart ne sont pas un désaccord complet. Avec des poids quadratiques, il se rapproche de l'ICC ; il convient d'indiquer les poids utilisés.

Kappa de Cohen à partir d'un tableau d'accord 2×2.

Énoncé: `data(20 5; 10 15)` Kappa de Cohen

Résultat

$$\kappa = 0{,}4$$
$$95\,\%\ :\ [0{,}151\,;\,0{,}649]$$
$$p_o = 0{,}7$$
$$p_e = 0{,}5$$

Étapes

- Le tableau d'accord (lignes juge A, colonnes juge B, accord sur la diagonale) avec les totaux des lignes et des colonnes

$A\backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- L'accord observé – la part des cas sur la diagonale :
$$p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20+15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$$
- L'accord attendu par hasard – à partir des totaux des lignes et des colonnes
$$p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25\cdot 30 + 25\cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$$

- Kappa de Cohen : $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – l'accord est faible (Landis et Koch).
- Intervalle de confiance à 95 % à partir de l'erreur type asymptotique (Fleiss, Cohen et Everitt)
$$SE \approx 0{,}127$$
$$\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow [0{,}151\,;\,0{,}649]$$
- κ retire de l'accord celui attendu par hasard : 0 signifie un accord dû au seul hasard, 1 un accord parfait. Quand une catégorie domine, κ reste faible même avec un fort pourcentage d'accord – c'est pourquoi p_o est aussi indiqué.

Dans quelle mesure le score d'un test sépare les patients (état 1) des personnes saines (état 0).

Énoncé: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` Courbe ROC et AUC

Résultat

$$AUC \approx 0{,}9167$$
$$95\,\%: \ [0{,}706\,;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14: \ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Étapes

- Cas positifs (état 1) et négatifs (état 0) : $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- On trie tous les scores et on leur attribue leur rang. La somme des rangs des cas positifs : $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- La statistique U de Mann-Whitney – le nombre de paires (positif, négatif) où le cas positif a le score le plus élevé : $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- L'aire sous la courbe ROC : $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – le pouvoir discriminant du test est remarquable.
- Intervalle de confiance à 95 % selon Hanley et McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow [0{,}706\,;\ 1{,}0$$

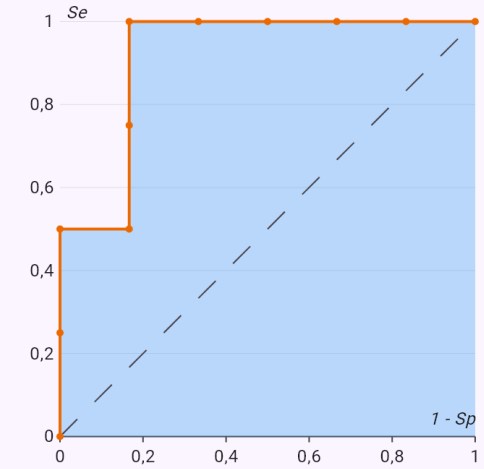
- Hypothèse nulle : le test ne discrimine pas (AUC = 0,5), alternative : il discrimine – test de Mann-Whitney : $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit la loi normale centrée réduite : $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- La valeur critique au seuil α : $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la région critique $|z| \ge 1{,}96$
- La valeur p : $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Comme $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le seuil au plus grand indice de Youden est 14 (un score ≥ 14 est positif)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8333$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$$

- L'AUC est la probabilité qu'un cas positif tiré au hasard ait un score plus élevé qu'un cas négatif tiré au hasard (0,5 – le test ne discrimine pas, 1 – il discrimine parfaitement). Le seuil selon l'indice de Youden n'est qu'une possibilité – en pratique, on tient aussi compte du coût des faux positifs et des faux négatifs.
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Graphique

Courbe ROC – l'aire ombrée est l'AUC, la diagonale en pointillés correspond à un test qui ne discrimine pas



Scores de patients et de personnes saines en deux groupes de tailles différentes, avec le test de Mann-

Whitney.

Énoncé: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` Courbe ROC et AUC

Résultat

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%: \ [0{,}787\,;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Étapes

- Le groupe positif $\mathrm{pacienti}$ et le groupe négatif zdravi : $n_1 = 5, \quad n_0 = 7$
- On trie tous les scores et on leur attribue leur rang. La somme des rangs des cas positifs : $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- La statistique U de Mann-Whitney – le nombre de paires (positif, négatif) où le cas positif a le score le plus élevé : $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- L'aire sous la courbe ROC : $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – le pouvoir discriminant du test est remarquable.
- Intervalle de confiance à 95 % selon Hanley et McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + (n_0 - 1)\left(Q_2 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow [0{,}787\,;\ 1,$$

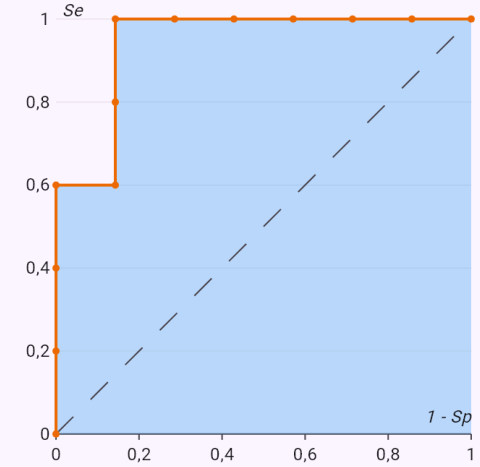
- Hypothèse nulle : le test ne discrimine pas (AUC = 0,5), alternative : il discrimine – test de Mann-Whitney : $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit la loi normale centrée réduite : $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- La valeur critique au seuil α : $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la région critique $|z| \ge 1{,}96$
- La valeur p : $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Comme $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, on rejette l'hypothèse nulle – le résultat est statistiquement significatif.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Le seuil au plus grand indice de Youden est 14 (un score ≥ 14 est positif)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8571$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$$

- L'AUC est la probabilité qu'un cas positif tiré au hasard ait un score plus élevé qu'un cas négatif tiré au hasard (0,5 – le test ne discrimine pas, 1 – il discrimine parfaitement). Le seuil selon l'indice de Youden n'est qu'une possibilité – en pratique, on tient aussi compte du coût des faux positifs et des faux négatifs.
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Graphique

Courbe ROC – l'aire ombrée est l'AUC, la diagonale en pointillés correspond à un test qui ne discrimine pas



Deux tests sur les mêmes personnes – discriminent-ils aussi bien ? (test de DeLong)

Énoncé: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16 1;`

16 8 0; 10 13 0)

Courbe ROC et AUC

Résultat

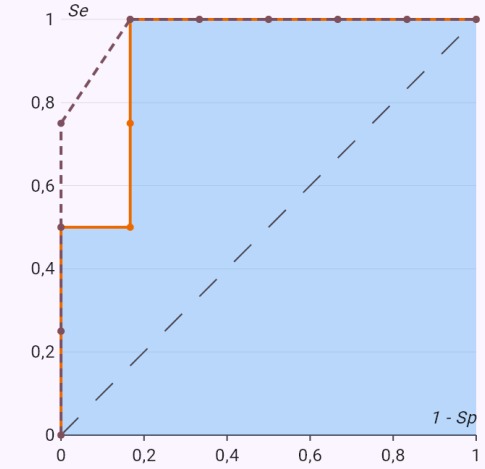
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ [-0{,}277\,;\,0{,}152]$$

Étapes

- Deux tests A et B sur les mêmes cas, état positif 1 : $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Les aires sous les courbes ROC des deux tests et leurs erreurs types (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- La variance de la différence selon DeLong – les tests portent sur les mêmes cas, on retranche donc leur covariance (corrélation des AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- Hypothèse nulle : les deux tests discriminent de la même façon, alternative : ils diffèrent
  $H_0\colon AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  $H_1\colon AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- La statistique de test – sous H_0 elle suit la loi normale centrée réduite
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- La valeur critique au seuil α : $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la région critique $|z| \geq 1{,}96$
- La valeur p : $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Comme $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle – les données n'apportent pas assez d'éléments contre elle.
- La valeur p est la probabilité d'un résultat au moins aussi extrême que celui observé si H_0 est vraie – pas la probabilité que H_0 soit vraie. Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie ; la significativité statistique ne dit rien de la taille ni de l'importance pratique d'une différence.
- Intervalle de confiance à 95 % de la différence des deux AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- Le test de DeLong compare les AUC de deux tests sur les mêmes cas – il tient compte de leur corrélation. Une différence non significative ne veut pas dire que les tests se valent, seulement que les données n'ont pas montré de différence.
- Attention : peu de données, les estimations (surtout de la variance et des quartiles) sont incertaines.

Graphique

Courbes ROC des deux tests – la première en trait plein avec l'aire ombrée, la seconde en pointillés



De combien allonger un test de 20 items de fidélité 0,7 pour atteindre 0,9.

Énoncé: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Résultat

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Étapes

- On cherche k ; données :
  $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Un test plus long mesure de façon plus fidèle : allongé k fois avec des items de même qualité (parallèles), sa fidélité augmente selon la formule de Spearman-Brown r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Inversement, elle indique de combien allonger un test pour atteindre une fidélité visée. La formule corrige aussi la fidélité moitié-moitié (k = 2). Équation du modèle : $k = \dfrac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$
- On remplace
  $k = \dfrac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$
- Nombre d'items nécessaire :
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- La formule suppose que les items ajoutés sont aussi bons que les originaux (parallèles). Le gain réel est souvent plus faible, et un test plus long fatigue davantage.

Le seuil corrigé pour 10 comparaisons.

Énoncé: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Résultat

$$\alpha' = 0{,}005$$

Étapes

- On cherche α' ; données : $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Avec m tests au seuil α, la probabilité qu'au moins un soit significatif par simple hasard augmente : 1 − (1 − α)^m. La correction de Bonferroni juge donc chaque test au seuil plus strict α' = α/m. La correction de Šidák 1 − (1 − α)^(1/m) est un peu moins stricte. Équation du modèle : $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- On remplace : $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Probabilité d'au moins un résultat faussement significatif sans correction : $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1-0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Correction de Šidák $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1-0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- La correction de Bonferroni est conservatrice : elle protège des résultats faussement significatifs, mais avec de nombreuses comparaisons elle manque facilement une vraie différence. Moins stricts sont p. ex. la méthode de Holm ou le contrôle du FDR (Benjamini-Hochberg).

Limitations connues

- Le rang percentile se calcule par la loi normale – pour les tests asymétriques (temps du TMT), seul le percentile de la table d'étalonnage est juste.
- Les intervalles de confiance sont asymptotiques ou approchés – pour de petits échantillons (jusqu'à 10–20 cas), ne les prenez qu'à titre indicatif.
- Une tâche en mots ou d'après une photo n'est pas encore prise en charge – les valeurs se saisissent dans le formulaire.