Mathtrace – guide d’utilisation

II. Algèbre linéaire et géométrie

Sommaire

II. Algèbre linéaire et géométrie

20. Calculs en géométrie

21. Matrices

22. Vecteurs

23. Droites et plans

24. Problèmes de construction

20. Calculs en géométrie

Périmètres et aires des figures, volumes et surfaces des solides se calculent avec un formulaire comme les autres applications (Applications → Géométrie) : on choisit la figure et ce que l'on cherche, puis on saisit les dimensions avec leurs unités. Figures : carré, rectangle, triangle (côté et hauteur, ou trois côtés – formule de Héron), parallélogramme, losange, trapèze, polygone régulier, disque, couronne, arc et secteur, théorème de Pythagore et triangles semblables ; solides : cube, pavé droit, prisme, cylindre, pyramide à base carrée, cône et boule.

La démarche écrit la formule, substitue et calcule ; si une valeur intermédiaire est nécessaire (génératrice du cône, apothème de la pyramide), elle vient d'abord. On peut aussi faire l'inverse – le rayon à partir de l'aire, l'arête à partir du volume, un côté à partir de l'hypoténuse. Le résultat est exact avec π et racines, et approché (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Les unités sont converties (cm en dm, dm³ en litres).

Exemples

Aire du disque – exacte avec π et approchée.

Énoncé: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Résultat

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Étapes

- Le cercle est l'ensemble des points à la distance r du centre, le disque le cercle avec son intérieur. Périmètre o = 2πr = πd, aire S = πr². Le nombre π ≈ 3,14159 est le périmètre divisé par le diamètre – résultat exact (avec π) et approché. Formules
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- On cherche S ; données : $r = 5\,\mathrm{cm}$
- On remplace : $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

À l’inverse : le rayon à partir de l’aire.

Énoncé: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Résultat

$$r \approx 3{,}989\,\text{cm}$$

Étapes

- Le cercle est l’ensemble des points à la distance r du centre, le disque le cercle avec son intérieur. Périmètre o = 2πr = πd, aire S = πr². Le nombre π ≈ 3,14159 est le périmètre divisé par le diamètre – résultat exact (avec π) et approché. Formules
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- On cherche r ; données : $S = 50\,\text{cm}^2$
- On exprime la grandeur cherchée : $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- On remplace : $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\text{cm}$

Triangle de trois côtés – formule de Héron.

Énoncé: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Résultat

$$S = 6\,\text{cm}^2$$

Étapes

- L’aire d’un triangle est la moitié d’un côté fois sa hauteur : S = a·v_a/2. À partir des trois côtés, par la formule de Héron S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), où s = (a + b + c)/2 est le demi-périmètre. Les côtés doivent vérifier l’inégalité triangulaire. Formules
  $o = a + b + c$
  $S = \frac{a v_a}{2}$
  $s = \frac{a + b + c}{2}$
  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- On cherche S ; données : $a = 3\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 5\,\text{cm}$
- On remplace : $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\text{cm}$
- On remplace : $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\text{cm}^2$

Un côté à partir de l’hypoténuse.

Énoncé: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Résultat

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Étapes

- Dans un triangle rectangle, le carré de l’hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l’angle droit : c² = a² + b². L’hypoténuse c est opposée à l’angle droit et la plus longue ; un côté est b = √(c² − a²). Formules
  $c^2 = a^2 + b^2$
- On cherche b ; données : $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- On exprime la grandeur cherchée : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- On remplace : $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Surface du cône – d’abord la génératrice.

Énoncé: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Résultat

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Étapes

- Le cône a une base circulaire de rayon r et la hauteur v. Son volume est le tiers du cylindre : V = πr²v/3. La génératrice s est l’hypoténuse de côtés r et v ; la surface latérale est un secteur S_{pl} = πrs, surface S = πr² + πrs. Formules
  $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$
  $s^2 = r^2 + v^2$
  $S_{pl} = \pi r s$
  $S = \pi r^2 + S_{pl}$
- On cherche S ; données : $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- On exprime la grandeur cherchée : $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- On remplace : $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- On remplace : $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- On remplace : $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Volume du cube en litres.

Énoncé: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Résultat

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Étapes

- Le cube a six faces carrées égales d'arête a. Volume V = a³, surface S = 6a², diagonale u = a√3. L'arête à partir du volume est sa racine cubique : a = ∛V. Formules
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- On cherche V ; données : $a = 10\,\mathrm{cm}$
- On convertit les unités : $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- On remplace : $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- On convertit les unités : $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Limitations connues

- Il manque encore un croquis de la figure avec ses dimensions.

21. Matrices

Écrivez une matrice entre crochets comme dans Matlab : coefficients séparés par des espaces, lignes par un point-virgule ou un retour à la ligne. Un coefficient peut être une fraction, une racine ou une lettre. La touche avec une grille sur l'onglet f(x) ouvre un tableau à remplir case par case – ou à coller depuis le presse-papiers (cellules copiées d'Excel ou de Google Sheets) ou à charger depuis un fichier CSV.

Pour une seule matrice, une puce indique quoi calculer : le déterminant (2×2 par la formule, 3×3 par la règle de Sarrus, sinon par développement selon une ligne ou une colonne ou par triangulation – la méthode est aussi une puce), l'inverse (2×2 par la formule, sinon par la méthode de Gauss–Jordan avec l'identité à côté), le rang (forme échelonnée) ou la transposée.

Nommez plusieurs matrices par des majuscules, une par ligne, et écrivez sur la dernière ligne quoi calculer : somme, différence, multiple, produit (ligne par colonne, tailles vérifiées), puissance, transposée A^T, inverse A^-1, det(A), rank(A) – ou une équation matricielle AX = B ou XA = B, que l'appli résout avec l'inverse. Un système d'équations donné par une matrice (matrice augmentée, Ax = b) est traité dans le chapitre Systèmes d'équations.

Si une matrice contient un paramètre (une lettre), l'application discute son rang selon ses valeurs comme pour un système – réduction échelonnée, valeurs critiques substituées. Pour l'inverse, elle calcule d'abord le déterminant et la condition sur le paramètre pour qu'il soit non nul (l'inverse existe). L'inverse d'une matrice 3×3 ou plus se calcule par Gauss–Jordan ou – selon la puce – par la matrice adjointe (cofacteurs, $A^{-1} = \text{adj } A / \det A$).

Pour une matrice carrée, vous calculez aussi les valeurs et vecteurs propres : le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda E)$ est développé comme un déterminant, factorisé, et ses racines sont les valeurs propres (un facteur du second degré par le discriminant, complexes aussi ; un facteur cubique sans racine rationnelle de façon approchée). Les vecteurs propres sont les solutions de $(A - \lambda E)v = o$ par opérations sur les lignes jusqu'à la forme échelonnée réduite ; pour chaque valeur propre, l'application donne sa multiplicité algébrique et géométrique. La puce Diagonalisation construit en plus P et D ($A = PDP^{-1}$) ou explique pourquoi la matrice n'est pas diagonalisable. La décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$ (SVD) et la pseudo-inverse A^+ s'appliquent à une matrice de toute taille : la SVD par les valeurs propres de A^TA (AA^T pour une matrice large), les vecteurs propres normés et l'autre côté calculé à partir d'eux ; la pseudo-inverse d'une matrice de rang plein par la formule $(A^TA)^{-1}A^T$, sinon par la décomposition $A^+ = V\Sigma^+U^T$ – et si les valeurs singulières étaient des radicaux imbriqués, exactement par la factorisation de rang $A = BC$ avec $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

L'application étudie aussi les valeurs propres et la diagonalisation d'une matrice à un paramètre (jusqu'à 3×3) : elle factorise le polynôme caractéristique avec le paramètre, écrit les valeurs propres comme ses fonctions et trouve les valeurs particulières du paramètre – là où deux valeurs propres coïncident (deux

facteurs ont une racine commune, un facteur du second degré un discriminant nul) ou là où le calcul général des vecteurs propres diviserait par zéro ; elle indique aussi pour quelles valeurs les valeurs propres sont complexes. Le cas général est résolu avec le paramètre, les valeurs particulières sont remplacées et traitées à part. La puce Diagonalisation répond ensuite pour quelles valeurs du paramètre la matrice est diagonalisable.

La forme de Jordan d'une matrice carrée (la puce Forme de Jordan, écrit jordan(A)) vient des rangs des puissances $(A - \lambda E)^k$: ils donnent le nombre et les tailles des blocs de Jordan, les chaînes de vecteurs propres généralisés sont construites du vecteur du haut jusqu'à un vecteur propre et P, J sont vérifiées ($A = PJP^{-1}$). Par la forme de Jordan, l'application calcule aussi la puissance A^n pour un n quelconque (la puce Puissance A^n, écrit A^n ; la puissance d'un bloc par la formule du binôme, le résultat comme $2^{n-1}(n + 2)$) ou un grand nombre (A^10), et l'exponentielle e^{At} et e^A (la puce Exponentielle de matrice, écrit e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – utile pour les systèmes d'équations différentielles $x' = Ax$; les valeurs propres complexes sont réécrites en cosinus et sinus. Le polynôme minimal (la puce Polynôme minimal, écrit minpoly(A)) est trouvé en essayant les candidats – les diviseurs du polynôme caractéristique – à partir du plus petit degré ; l'application rappelle le théorème de Cayley–Hamilton $p(A) = O$ et, pour une matrice inversible, tire l'inverse de $m(A) = O$.

Comment le saisir

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Coefficients séparés par des espaces, lignes par un point-virgule (ou à la ligne entre les crochets).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Matrices nommées, une par ligne, le calcul sur la dernière.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Déterminant, inverse et transposée, rang.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Valeurs propres, diagonalisation, décomposition en valeurs singulières, pseudo-inverse.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Forme de Jordan, puissance quelconque, exponentielle de matrice, polynôme minimal.

Exemples

Un déterminant 3×3 par la règle de Sarrus.

Énoncé: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Déterminant

Résultat

$$\det A = -3$$

Étapes

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 10\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8\\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10\\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80\\ &= -3\end{aligned}$$

Développement selon la colonne la plus riche en zéros.

Énoncé: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Développement

Résultat

$$\det A = 25$$

Étapes

- Développement selon la colonne 2, chaque coefficient fois son cofacteur avec le signe de sa place

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 0 & 1\\4 & 5 & 6\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot(-5)\\ &= 25\end{aligned}$$

L’inverse par la méthode de Gauss–Jordan.

Énoncé: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Matrice inverse

Résultat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étapes

- On écrit la matrice identité à côté de la matrice. Les opérations sur les lignes transforment la partie gauche en identité

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Opérations sur les lignes $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Opérations sur les lignes $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Opérations sur les lignes $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Opérations sur les lignes $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Opérations sur les lignes $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- À gauche l'identité, à droite l'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang par opérations sur les lignes.

Énoncé: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Rang

Résultat

$$h(A) = 2$$

Étapes

- Opérations sur les lignes

  $R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Opérations sur les lignes $R_3 \to R_3 - R_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice sous forme échelonnée

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le rang est le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée : $h(A) = 2$

Le rang d'une matrice avec paramètre.

Énoncé: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Rang

Résultat

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Étapes

- La matrice contient le paramètre a, un réel quelconque. Le rang peut dépendre de sa valeur, on étudie donc les différents cas.
- Opérations sur les lignes $R_1 \leftrightarrow R_2$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$
- Opérations sur les lignes $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$
- On continue avec le coefficient $1 - a$, qui peut être nul : on suppose donc $a \neq 1$; le cas $a = 1$ est traité à part.
- Opérations sur les lignes $R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$
- Opérations sur les lignes $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$
- On continue avec le coefficient $a + 2$, qui peut être nul : on suppose donc $a \neq -2$; le cas $a = -2$ est traité à part.
- La matrice sous forme échelonnée
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$
- Pour $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Pour $a = 1$: $h(A) = 1$ – la matrice après substitution
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Pour $a = -2$: $h(A) = 2$ – la matrice après substitution
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inverse avec paramètre par la matrice adjointe.

Énoncé: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Matrice adjointe

Résultat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Conditions : $a \neq 1$

Étapes

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$: l'inverse existe exactement lorsque le déterminant est non nul, c'est-à-dire pour $a \neq 1$
- Les cofacteurs des coefficients (avec le signe (−1)^(i+j))

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \\ A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

- La matrice adjointe (comatrice transposée) se divise par le déterminant

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Produit, transposée, multiple et différence de matrices.

Énoncé: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Résultat

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- On transpose, les lignes deviennent des colonnes
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- On multiplie chaque coefficient par le nombre
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- On additionne (soustrait) les coefficients aux mêmes places
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Une équation matricielle AX = B par l’inverse.

Énoncé: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Résultat

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Étapes

- On multiplie l'équation par l'inverse du côté de l'inconnue : $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, l'inverse existe.
- Pour une matrice 2×2, on échange les coefficients de la diagonale principale, on change le signe des deux autres et on divise par le déterminant

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Valeurs et vecteurs propres d’une matrice symétrique.

Énoncé: `[2 1; 1 2]` Valeurs propres

Résultat

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l’équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$

- Le polynôme caractéristique factorisé

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 − le nombre d’inconnues libres)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 3$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 3$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 − le nombre d’inconnues libres)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$

Valeurs propres irrationnelles par le discriminant.

Énoncé: `[1 2; 3 4]` Valeurs propres

Résultat

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$

- Le polynôme caractéristique factorisé :
  $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Les racines du facteur du second degré par le discriminant

  $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (multiplicité algébrique 1, géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t \neq 0$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (multiplicité algébrique 1, géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t \neq 0$

La diagonalisation A = PDP⁻¹.

Énoncé: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalisation

Résultat

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 − le nombre d'inconnues libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 − le nombre d'inconnues libres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 11$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 11$ (multiplicité algébrique 1, géométrique 1 − le nombre d'inconnues libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- La matrice a autant de vecteurs propres linéairement indépendants que de lignes, elle est donc diagonalisable : P a les vecteurs propres en colonnes, D les valeurs propres sur la diagonale dans le même ordre, et $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice est symétrique : ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres de valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Normés, ils donnent une matrice P orthogonale, $P^{-1} = P^T$

Une matrice qui n’est pas diagonalisable.

Énoncé: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalisation

Résultat

La matrice n’est pas diagonalisable : elle n’a pas assez de vecteurs propres linéairement indépendants.

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l’équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 2 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 2$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 2$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Pour $\lambda = 1$, la multiplicité géométrique 1 est inférieure à la multiplicité algébrique 2 : la matrice n’a pas assez de vecteurs propres linéairement indépendants, elle n’est donc pas diagonalisable.

Valeurs propres d’une matrice à paramètre – les valeurs particulières et leurs cas.

Énoncé: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Valeurs propres

Résultat

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l’équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Valeurs particulières du paramètre : deux valeurs propres y coïncident, ou le calcul des vecteurs propres diviserait par zéro : $a = 1,\ a = 2$. Nous les traitons à part ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Le cas général $a \neq 1,\ a \neq 2$: les valeurs propres sont distinctes, la matrice a donc autant de vecteurs propres linéairement indépendants que de lignes et elle est diagonalisable.
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = a$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = a$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Le cas $a = 1$, remplacé dans la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 2 , géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 2$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_3 = 2$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

  $$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Pour $\lambda = 1$, la multiplicité géométrique 1 est inférieure à la multiplicité algébrique 2 : la matrice n'a pas assez de vecteurs propres linéairement indépendants, elle n'est donc pas diagonalisable.
- Le cas $a = 2$, remplacé dans la matrice

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

  $$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 2$ (multiplicité algébrique 2 , géométrique 2 – le nombre d'inconnues libres)

  $$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Pour quelles valeurs du paramètre la matrice est diagonalisable.

Énoncé: `[0 1; a 0]` Diagonalisation

Résultat

La matrice est diagonalisable pour : $a \neq 0$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Le polynôme caractéristique factorisé : $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Les racines du facteur du second degré par le discriminant

$$\lambda^2 - a = 0 : \ D = 4a, \ \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \ \sqrt{a}$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \ \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Valeurs particulières du paramètre : deux valeurs propres y coïncident, ou le calcul des vecteurs propres diviserait par zéro : $a = 0$. Nous les traitons à part ($a = 0 : \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Pour $a \in \ ]-\infty ; \ 0[$, le discriminant est négatif et les valeurs propres sont complexes conjuguées (diagonalisable seulement sur les nombres complexes).
- Le cas général $a \neq 0$: les valeurs propres sont distinctes, la matrice a donc autant de vecteurs propres linéairement indépendants que de lignes et elle est diagonalisable.
- Le cas $a = 0$, remplacé dans la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé : $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 0$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 0$ (multiplicité algébrique 2 , géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

- Pour $\lambda = 0$, la multiplicité géométrique 1 est inférieure à la multiplicité algébrique 2 : la matrice n'a pas assez de vecteurs propres linéairement indépendants, elle n'est donc pas diagonalisable.

La décomposition en valeurs singulières d’une matrice 2×3.

Énoncé: `[3 2 2; 2 3 -2]` Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Résultat

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Étapes

- La décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$: la matrice a plus de colonnes que de lignes, on commence donc par la plus petite AA^T – ses valeurs propres sont les carrés des valeurs singulières, ses vecteurs propres forment U. On calcule AA^T
- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)
$$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$$
- Les valeurs propres sont les racines de l’équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale
$$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$
- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$
- Le polynôme caractéristique factorisé
$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$
- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 25$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite
$$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 25$ (multiplicité algébrique 1, géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)
$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 9$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite
$$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 9$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d’inconnues libres)
$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres, par ordre décroissant : $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ a la taille de A
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres normés (divisés par leur norme) ; ceux d’une valeur propre multiple d’abord orthogonalisés par le procédé de Gram-Schmidt. Ce sont les colonnes de
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
- Les colonnes de V pour les valeurs singulières non nulles, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$
- Les colonnes manquantes de V complètent une base orthonormée – solutions normées de $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, orthogonales aux colonnes précédentes
$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
- La décomposition en valeurs singulières
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

La pseudo-inverse d’une matrice à colonnes indépendantes.

Énoncé: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudo-inverse

Résultat

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Étapes

- Les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes (rang 2 = nombre de colonnes), $A^T A$ est donc inversible et la pseudo-inverse est donnée par la formule :
- $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$
- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale
  $\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$
- $\det A^T A = 3 \neq 0$, l'inverse existe.
- Pour une matrice 2×2, on échange les coefficients de la diagonale principale, on change le signe des deux autres et on divise par le déterminant
  $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)
  $A^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$

La pseudo-inverse d’une matrice singulière par sa décomposition en valeurs singulières.

Énoncé: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Résultat

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Étapes

- La matrice n'est pas de rang plein (rang 1), la pseudo-inverse vient donc de la décomposition en valeurs singulières : $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- La décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$: les valeurs propres de A^TA sont les carrés des valeurs singulières, ses vecteurs propres forment V. On calcule A^TA
- On multiplie ligne par colonne (tailles $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)
$$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$
- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale
$$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$
- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale
$$\det\left(A^TA - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$
- Le polynôme caractéristique factorisé
$$\det\left(A^TA - \lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0$$
- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 25$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite
$$\left(A^TA - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_1 = 25$ (multiplicité algébrique 1, géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)
$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 0$ sont les solutions non nulles du système homogène ; la matrice sous forme échelonnée réduite
$$\left(A^TA - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o} : \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres de $\lambda_2 = 0$ (multiplicité algébrique 1 , géométrique 1 – le nombre d'inconnues libres)
$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres, par ordre décroissant : $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ a la taille de A
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Les vecteurs propres normés (divisés par leur norme) ; ceux d'une valeur propre multiple d'abord orthogonalisés par le procédé de Gram-Schmidt. Ce sont les colonnes de
$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Les colonnes de U pour les valeurs singulières non nulles, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$
$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Les colonnes manquantes de U complètent une base orthonormée – solutions normées de $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, orthogonales aux colonnes précédentes
$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- La décomposition en valeurs singulières
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Σ^+ est Σ transposée, avec les inverses des valeurs singulières non nulles
$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- La pseudo-inverse
$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{} \end{pmatrix}$$

La pseudo-inverse par la factorisation de rang A = BC.

Énoncé: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudo-inverse

Résultat

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Étapes

- La matrice n'est pas de rang plein (rang 2) et ses valeurs singulières seraient des radicaux imbriqués ; la pseudo-inverse est donc calculée exactement par la factorisation de rang A = BC – B les colonnes linéairement indépendantes de A, C les lignes non nulles de sa forme échelonnée réduite.
- On réduit la matrice à la forme échelonnée réduite ; les pivots sont dans les colonnes $1, 2$, B est formée de ces colonnes de A et C des lignes non nulles de la matrice réduite

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (- \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, l'inverse existe.
- Pour une matrice 2×2, on échange les coefficients de la diagonale principale, on change le signe des deux autres et on divise par le déterminant

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- On multiplie ligne par colonne (tailles $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 7\cdot 7 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 + 7\cdot 8 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 + 8\cdot 7 & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66\cdot 93 - 78\cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, l'inverse existe.
- Pour une matrice 2×2, on échange les coefficients de la diagonale principale, on change le signe des deux autres et on divise par le déterminant

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- La pseudo-inverse

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Une forme de Jordan avec deux blocs pour une même valeur propre.

Énoncé: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Forme de Jordan

Résultat

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Pour $\lambda = 2$ (multiplicité algébrique 3), on calcule les puissances de $A - \lambda E$ et leurs rangs h jusqu'à ce que le rang ait baissé de la multiplicité algébrique

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Il y a autant de blocs de Jordan pour $\lambda = 2$ que de vecteurs propres indépendants : $n - h(A - \lambda E) = 2$. Le nombre de blocs de taille au moins k est $h_{k-1} - h_k$, les tailles des blocs sont donc $2, 1 : J_2(2),\ J_1(2)$
- Une chaîne de longueur 2 pour $\lambda = 2$: on choisit son vecteur du haut dans le noyau de $(A - \lambda E)^k$, hors du noyau de la puissance inférieure et de l'espace engendré par les chaînes précédentes, puis on le multiplie par $A - \lambda E$ jusqu'à un vecteur propre

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Un bloc de taille 1 pour $\lambda = 2$ donne un vecteur propre

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La forme de Jordan : les colonnes de P sont les vecteurs des chaînes (chacune depuis son vecteur propre vers le haut), J a les valeurs propres sur la diagonale et des uns juste au-dessus à l'intérieur des blocs ; $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La puissance A^n par la forme de Jordan.

Énoncé: `[3 1; -1 1]` Puissance A^n

Résultat

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$

- Le polynôme caractéristique factorisé :
  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

- Pour $\lambda = 2$ (multiplicité algébrique 2), on calcule les puissances de $A - \lambda E$ et leurs rangs h jusqu'à ce que le rang ait baissé de la multiplicité algébrique

  $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$

  $(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = 0$

- Il y a autant de blocs de Jordan pour $\lambda = 2$ que de vecteurs propres indépendants : $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Le nombre de blocs de taille au moins k est $h_{k-1} - h_k$, les tailles des blocs sont donc 2 : $J_2(2)$

- Une chaîne de longueur 2 pour $\lambda = 2$: on choisit son vecteur du haut dans le noyau de $(A - \lambda E)^k$, hors du noyau de la puissance inférieure et de l'espace engendré par les chaînes précédentes, puis on le multiplie par $A - \lambda E$ jusqu'à un vecteur propre

  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- La forme de Jordan : les colonnes de P sont les vecteurs des chaînes (chacune depuis son vecteur propre vers le haut), J a les valeurs propres sur la diagonale et des uns juste au-dessus à l'intérieur des blocs ; $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- On calcule la puissance par la forme de Jordan : $A^n = PJ^nP^{-1}$. La puissance d'un bloc vient de la formule du binôme : l'élément situé d places au-dessus de la diagonale vaut $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

  $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

- On multiplie les matrices

  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$

L'exponentielle e^{At} – la solution du système x' = Ax.

Énoncé: `A = [0 1; -2 -3]`

`e^(At)`

Résultat

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$

- Un déterminant 2×2 est le produit de la diagonale principale moins celui de l'autre diagonale

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$

- Le polynôme caractéristique factorisé

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Un bloc de taille 1 pour $\lambda = -2$ donne un vecteur propre

  $(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Un bloc de taille 1 pour $\lambda = -1$ donne un vecteur propre

  $(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Tous les blocs de Jordan sont de taille 1, J est donc diagonale et la matrice est diagonalisable. Les colonnes de P sont les vecteurs propres et $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- On calcule l'exponentielle par la forme de Jordan : $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Dans un bloc, l'élément situé d places au-dessus de la diagonale vaut $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

- On multiplie les matrices

  $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$

- Pour t = 1

  $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$

Le polynôme minimal, le théorème de Cayley–Hamilton et l'inverse qui en découle.

Énoncé: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Polynôme minimal

Résultat

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Étapes

- Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique det(A − λE) = 0 (E la matrice identité). On soustrait λ sur la diagonale

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Le polynôme caractéristique factorisé

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Les valeurs propres (une racine multiple a plusieurs noms) : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et en a toutes les racines. Les candidats à partir du plus petit degré

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- On substitue la matrice – ce n'est pas la matrice nulle, ce candidat n'est donc pas le polynôme minimal.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- On substitue la matrice – c'est la matrice nulle ; le plus petit tel candidat est le polynôme minimal.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- Le théorème de Cayley–Hamilton : toute matrice carrée est racine de son polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$$

- La matrice est inversible (le terme constant du polynôme minimal n'est pas nul), m(A) = O donne donc l'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Limitations connues

- Matrices jusqu'à 6×6.
- Valeurs propres, diagonalisation, décomposition en valeurs singulières, forme de Jordan, puissance A^n, exponentielle et polynôme minimal pour les matrices jusqu'à 4×4 et sans paramètre ; valeurs propres et diagonalisation à un paramètre jusqu'à 3×3 (sans facteur cubique avec le paramètre), les vecteurs propres du cas général seulement pour des valeurs propres sans racine du paramètre.
- La forme de Jordan avec ses étapes seulement pour des valeurs propres rationnelles, sinon seulement le résultat ; une puissance quelconque A^n et e^{At} demandent des valeurs propres exactes (un facteur cubique sans racine rationnelle : seulement e^A approchée).

22. Vecteurs

Écrivez un vecteur avec des points-virgules, chacun sur sa ligne : u = (1; 2; 3) ; son nom peut avoir un indice (F_1 = (3; 4)). Écrivez un point avec des crochets : A[1; 2; 3]. Les vecteurs du plan ont deux coordonnées, ceux de l'espace trois.

Un point seul dans le plan est placé dans son quadrant (ou sur un axe) selon les signes de ses coordonnées et dessiné. Avec deux points, à côté de la distance |AB|, la puce « Milieu » – ses coordonnées sont les moyennes de celles des extrémités. Les mots marchent aussi : « milieu AB, A[1; 2], B[5; 6] », « distance de A[1; 2] et B[4; 6] », « quadrant A[3; −2] ».

Sans autre ligne, la puce choisit le calcul : la norme, la somme (la résultante de forces avec sa norme et sa direction), le produit scalaire (nul pour des vecteurs orthogonaux), l'angle (par son cosinus, exact pour les valeurs remarquables, sinon en degrés et minutes), le produit vectoriel (par le déterminant avec i, j, k), l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle, le volume d'un parallélépipède et d'un tétraèdre par le produit mixte, ou la dépendance linéaire. Avec des points, l'application construit d'abord les vecteurs AB, AC, AD depuis le premier : deux points donnent la distance, trois un triangle, quatre un tétraèdre.

Sur la dernière ligne, vous pouvez écrire une expression : u + 2v, u·v (ou u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| et le vecteur AB de deux points. Le graphique montre les vecteurs comme des flèches – dans le plan avec une grille, dans l'espace avec des axes que l'on fait tourner du doigt ; une aire est colorée et un angle marqué par un arc.

Comment le saisir

`u = (1; 2; 3)`	Un vecteur avec des points-virgules, chacun sur sa ligne.
`A[1; 2; 3]`	Un point avec des crochets.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Une expression avec des vecteurs sur la dernière ligne.

Exemples

Le quadrant d’un point.

Énoncé: `A[3; -2]`

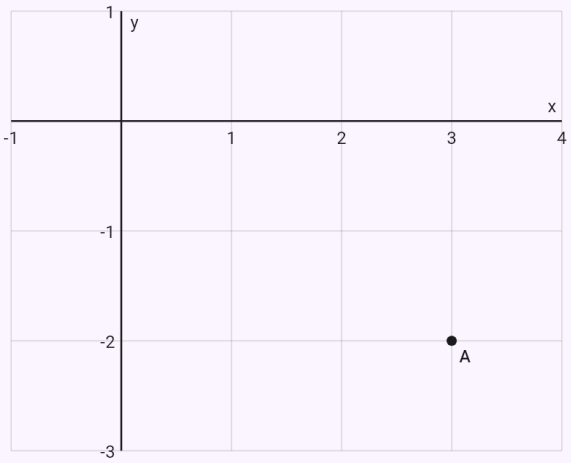
Résultat

$A \in \text{IV}$

Étapes

- Le point $A[3;\ -2]$ a x positif et y négatif – il est dans le 4e quadrant (en bas à droite).

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Le milieu d’un segment.

Énoncé: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Résultat

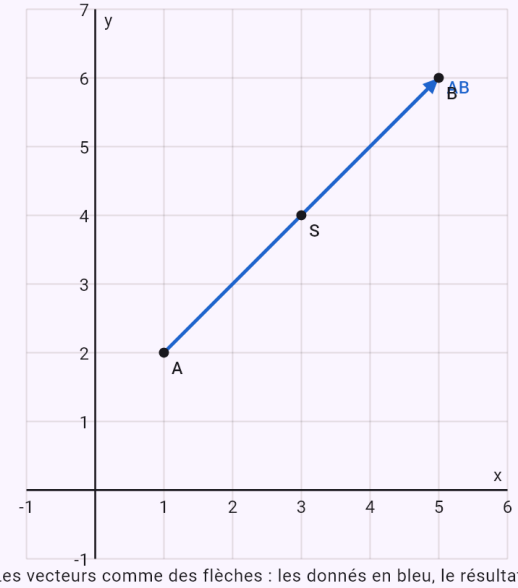
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Étapes

- Les coordonnées du milieu sont les moyennes de celles des extrémités

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

La norme d’un vecteur.

Énoncé: `u = (1; 2; 3)`

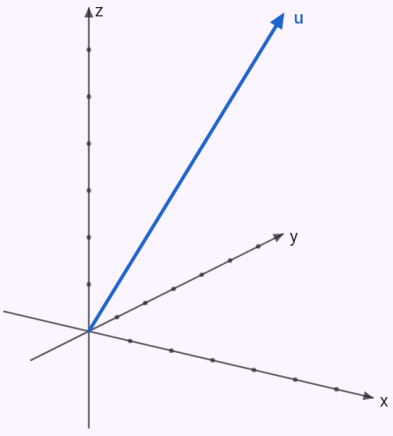
Résultat

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Étapes

- La norme du vecteur :
  $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l’espace : fais tourner le graphique du doigt.

L'angle de deux vecteurs.

Énoncé: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

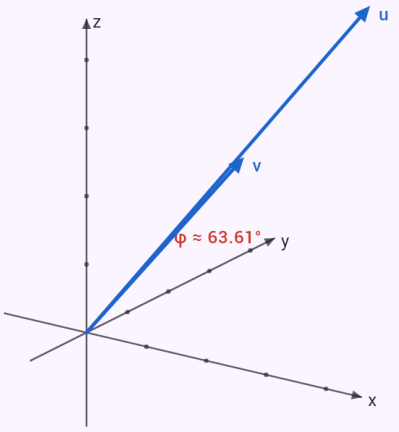
Résultat

$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Étapes

- Le produit scalaire est la somme des produits des coordonnées correspondantes :
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- La norme du vecteur : $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- La norme du vecteur :
  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- L'angle des vecteurs à partir du produit scalaire donc
  $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$
  $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Somme et multiple de vecteurs.

Énoncé: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

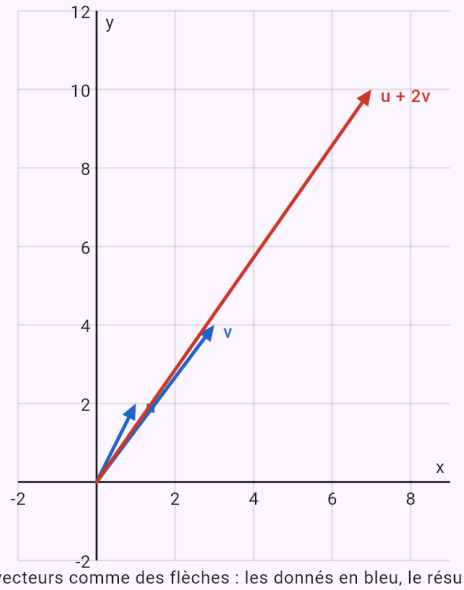
Résultat

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Étapes

- Un multiple d'un vecteur – chaque coordonnée multipliée par le nombre : $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Les vecteurs s'additionnent (se soustraient) coordonnée par coordonnée : $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Le produit vectoriel.

Énoncé: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Produit vectoriel

Résultat

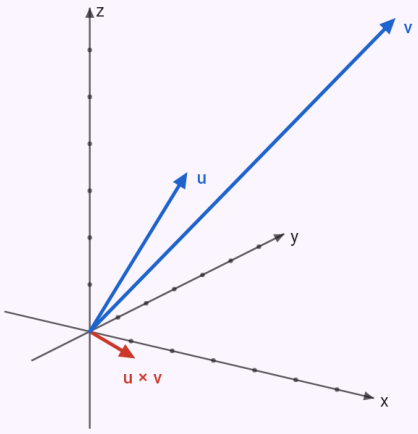
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Étapes

- Le produit vectoriel en développant le déterminant selon la première ligne

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

L'aire d'un triangle à partir de trois points.

Énoncé: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Résultat

$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Étapes

- Un vecteur à partir de deux points – coordonnées de l'extrémité moins celles de l'origine

  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$

- Un vecteur à partir de deux points – coordonnées de l'extrémité moins celles de l'origine

  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$

- Le produit vectoriel en développant le déterminant selon la première ligne

  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$

- La norme du vecteur

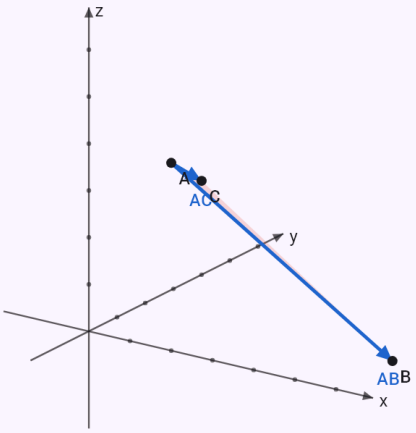
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- L'aire du parallélogramme est la norme du produit vectoriel (dans le plan, la valeur absolue du déterminant) : $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Le triangle est la moitié du parallélogramme :

  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Le volume d'un parallélépipède et d'un tétraèdre par le produit mixte.

Énoncé: `u = (1; 0; 2)`

`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Résultat

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Étapes

- Le produit mixte comme déterminant des coordonnées des vecteurs

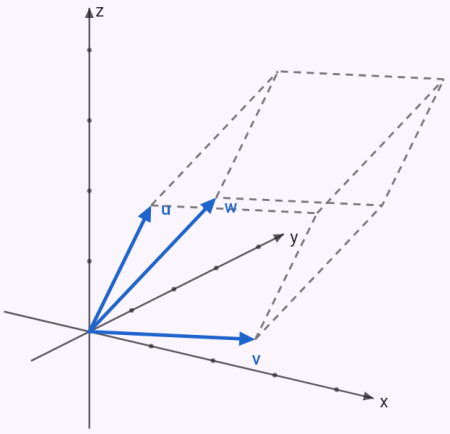
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0 = 13$$

- Le volume du parallélépipède est la valeur absolue du produit mixte : $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Le tétraèdre a un sixième du volume du parallélépipède : $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

La résultante de deux forces.

Énoncé: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Somme (résultante)

Résultat

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Étapes

- Les vecteurs s'additionnent (se soustraient) coordonnée par coordonnée

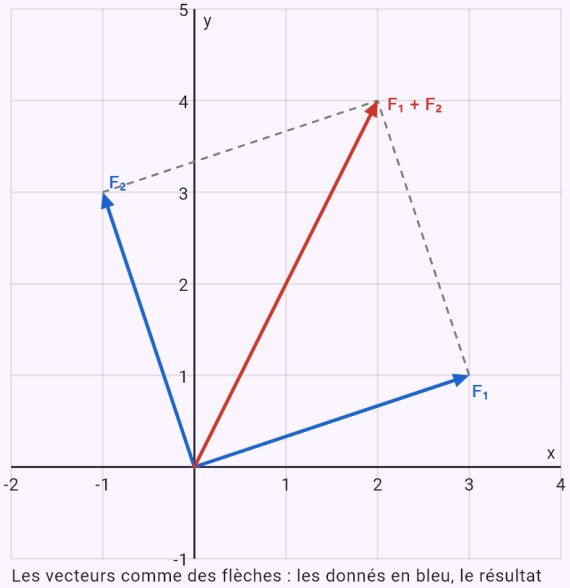
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

- La norme du vecteur

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- La direction de la résultante – son angle avec le demi-axe des x positifs : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2},\ \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

La dépendance linéaire de trois vecteurs.

Énoncé: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Dépendance linéaire

Résultat

Les vecteurs sont linéairement dépendants.

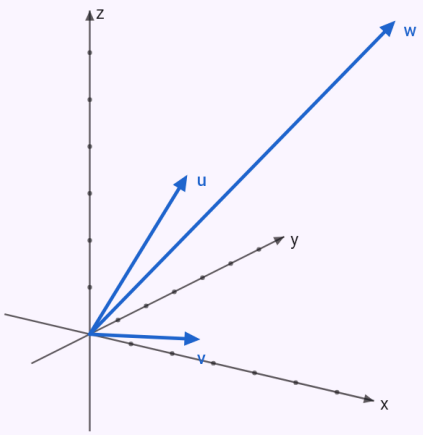
Étapes

- Règle de Sarrus, les produits dans le sens de la diagonale principale moins ceux dans l'autre sens

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$
$$= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24$$
$$= 0$$

- Le déterminant des coordonnées des vecteurs : $D = 0$. Non nul, les vecteurs sont linéairement indépendants ; nul, dépendants.

Graphique



Les vecteurs comme des flèches : les donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Limitations connues

- Les coordonnées sont des nombres (sans paramètre), six au plus ; le graphique seulement dans le plan et l'espace.

23. Droites et plans

Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. Un point s'écrit comme pour les vecteurs : A[1; 2]. Nommez une droite ou un plan et écrivez son équation après deux-points, chacune sur sa ligne : cartésienne (p: 2x + 3y − 5 = 0), réduite (p: y = 2x + 1), paramétrique (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) ou vectorielle (p: X = A + t·u). Dans l'espace, une équation en x, y, z est un plan (ρ: x + y + z = 1), de même une représentation paramétrique à deux paramètres ; une droite de l'espace s'écrit en paramétrique ou comme intersection de deux plans (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Les touches p:, q: et ρ: sont sur le clavier des fonctions.

Un chip indique quoi calculer – l'offre suit ce que vous saisissez : une droite ou un plan reçoit toutes les formes de son équation, deux leur position relative avec l'intersection, l'angle et la distance, un point et une droite (un plan) la distance, la perpendiculaire et la parallèle par le point, le projeté orthogonal et le point symétrique. Deux ou trois points seuls ajoutent aux chips des vecteurs la droite AB, la médiatrice et le centre de gravité avec les hauteurs du triangle (dans l'espace le plan ABC).

L'application calcule une distance par la formule ou – avec le chip « Par le projeté orthogonal » – comme en TD : la perpendiculaire par le point, son pied et la longueur du segment. Pour des droites non coplanaires elle trouve aussi leur perpendiculaire commune. Les angles sont exacts pour les valeurs remarquables, sinon en degrés et minutes. La tâche peut aussi s'écrire sur la dernière ligne : angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). Le graphique montre les droites et les plans ; dans l'espace on le tourne du doigt.

Transformations du plan : translation de vecteur donné, rotation de centre et d'angle donnés (en degrés, positif dans le sens trigonométrique), homothétie de centre et de rapport donnés, symétries centrale et axiale. On peut transformer un point, un polygone (des points à la suite : translation(A, B, C, u) est un triangle), une droite et un cercle (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Écrivez la tâche sur la dernière ligne ou choisissez la puce « Translation », « Rotation », « Homothétie » ou « Symétrie » – l'angle et le rapport vont alors sur une ligne à part (φ = 90, κ = 2), le centre est le point S. Les étapes donnent la transformation en coordonnées et l'image de chaque point, de deux points pour une droite, du centre et du rayon pour un cercle ; le graphique montre la figure et son image.

Coniques en position parallèle aux axes (sans terme xy) : en complétant les carrés, l'équation réduite ou au sommet ; pour le cercle le centre et le rayon, pour l'ellipse et l'hyperbole le centre, les demi-axes, l'excentricité et les foyers (pour l'hyperbole aussi les asymptotes), pour la parabole le sommet, le paramètre, le foyer et la directrice ; le graphique montre la courbe avec ses points.

La tangente en un point d'une conique s'écrit en mots – « tangente au cercle x^2 + y^2 = 25 au point [3; 4] » – et l'app la trouve par dédoublement de l'équation. La position d'une conique et d'une droite («

position relative de x^2/9 + y^2/4 = 1 et y = x + 1 ») vient de la substitution et du discriminant : sécante, tangente ou extérieure, avec les points d'intersection. Une sphère (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) est mise sous forme canonique : centre et rayon. Parmi les formes d'une droite figure aussi l'équation segmentaire x/p + y/q = 1. Les tangentes issues d'un point extérieur (« tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1] », en anglais « … from the point … ») sont cherchées parmi les droites passant par le point de pente k – la tangente est celle dont le discriminant est nul ; la droite verticale est vérifiée à part. Les tangentes parallèles ou perpendiculaires à une droite ont le même vecteur normal et une constante c inconnue. Écrivez une sphère avec un nom et, à la ligne suivante, un plan, une droite ou un point : avec un plan, la distance du centre est comparée au rayon (le cercle de section avec son centre et son rayon, un point de contact ou rien), pour une droite, ses équations paramétriques sont substituées et le discriminant décide, en un point de la sphère on obtient le plan tangent.

Comment le saisir

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Une droite par une équation cartésienne, réduite ou paramétrique, chacune sur sa ligne.
`p: X = A + t·u`	Une droite par une équation vectorielle avec un point et un vecteur.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Un plan par une équation cartésienne (dans l'espace).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Une droite de l'espace comme intersection de deux plans.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	La tâche sur la dernière ligne.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Une transformation : les figures, puis le vecteur, le centre et l'angle ou le rapport, ou le centre ou l'axe de symétrie.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Une conique – une équation du second degré en x et y.

Exemples

Toutes les formes de l'équation d'une droite à partir de sa représentation paramétrique.

Énoncé: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

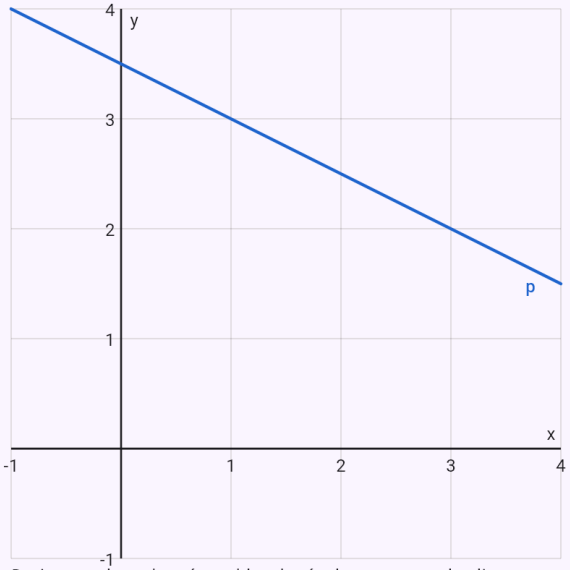
Résultat

$$p : x + 2y - 7 = 0$$
$$p : x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Étapes

- La représentation paramétrique donne un point (les constantes) et le vecteur directeur (les coefficients du paramètre) : $P_p[1;\ 3],\ \vec{u}_p = (2;\ -1)$
- Le vecteur normal est orthogonal au vecteur directeur – on échange les coordonnées et change un signe : $\vec{u}_p = (2;\ -1)\ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\ 2)$
- L'équation cartésienne : les coefficients sont les coordonnées du vecteur normal, la constante vient du point
  $p : x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\ 3] :\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0\ \Rightarrow\ c =$
- L'équation réduite – l'équation cartésienne résolue en y : $p : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Équation segmentaire : aux dénominateurs, l'abscisse et l'ordonnée à l'origine : $p : \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Le point d'intersection de deux droites.

Énoncé: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Résultat

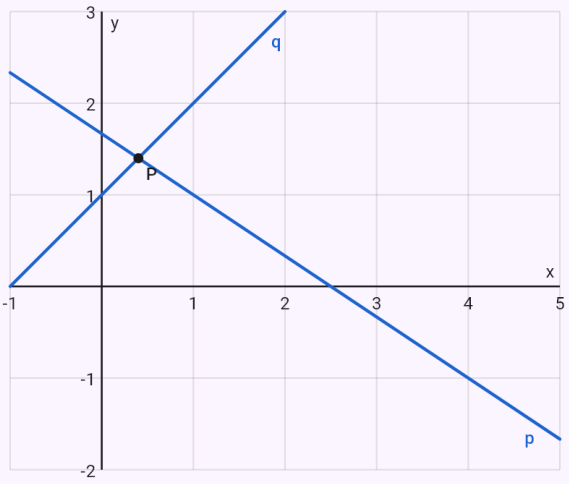
Les droites sont sécantes en :

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Aucun vecteur n'est multiple de l'autre – ils ne sont pas parallèles
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- Le point d'intersection résout le système des deux droites (règle de Cramer)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$:

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

La distance d'un point à une droite par la formule.

Énoncé: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

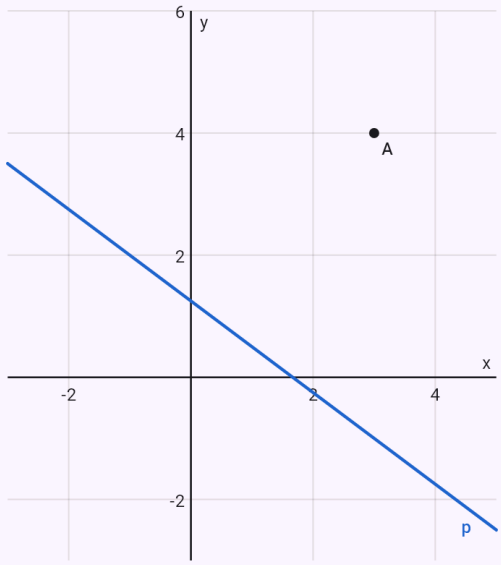
Résultat

$$v(A, p) = 4$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- La distance du point à la droite
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

La même distance par le projeté orthogonal.

Énoncé: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Par le projeté orthogonal

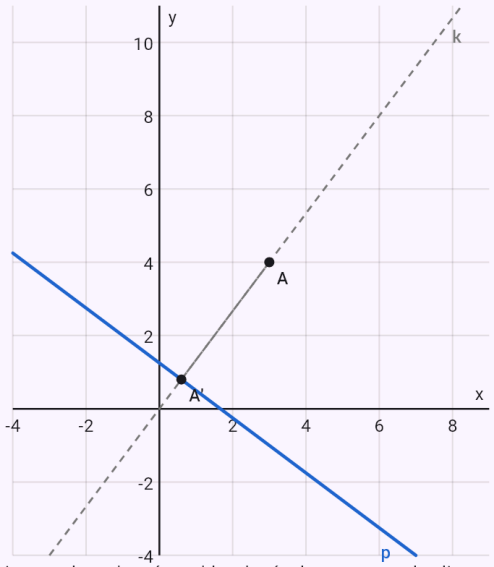
Résultat

$$v(A, p) = 4$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $p : 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\, 4)$
- La perpendiculaire par A à la droite p – le directeur de l'une est le normal de l'autre
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\, 4),\; k : x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Le projeté A' est le point où la perpendiculaire coupe p – on remplace et calcule t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- La distance du point à la droite
  $$v(A, p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Centre de gravité, hauteurs et orthocentre d'un triangle.

Énoncé: `A[1; 2]`

`B[5; 2]`

C[3; 6] Centre de gravité et hauteurs

Résultat

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Étapes

- Le centre de gravité – la moyenne des coordonnées des sommets

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- La hauteur issue de A est perpendiculaire au côté opposé – le vecteur du côté est son normal, sa longueur la distance du sommet au côté

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0.$$

- La hauteur issue de B est perpendiculaire au côté opposé – le vecteur du côté est son normal, sa longueur la distance du sommet au côté

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

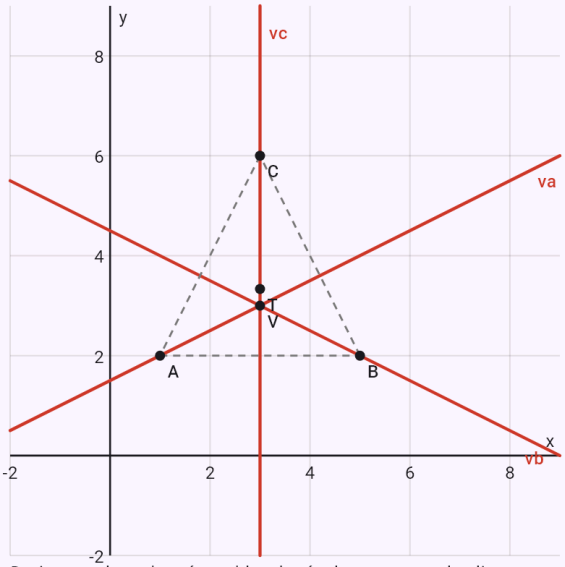
- La hauteur issue de C est perpendiculaire au côté opposé – le vecteur du côté est son normal, sa longueur la distance du sommet au côté

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- L'orthocentre – l'intersection de deux hauteurs

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Le symétrique d'un point par rapport à une droite.

Énoncé: A[1; 2]

`p: x - y = 0` Symétrie

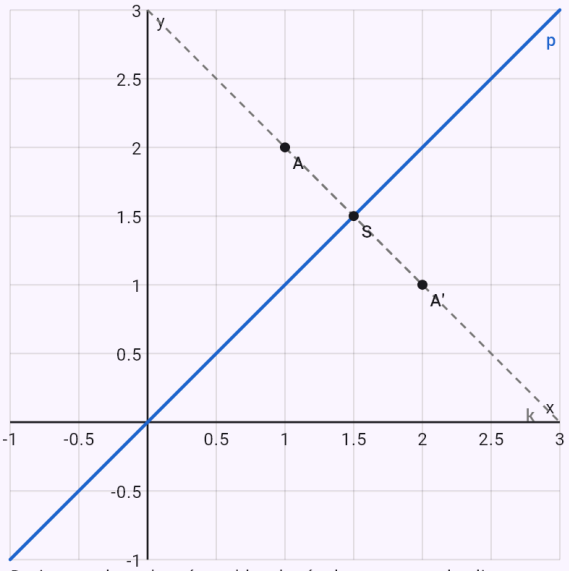
Résultat

$$A'[2;\ 1]$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) : $p : x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1; -1)$
- La perpendiculaire par A à la droite p – le directeur de l'une est le normal de l'autre
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1; -1),\ k : x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Le projeté S est le point où la perpendiculaire coupe p – on remplace et calcule t
  $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$
- Le point symétrique : le centre (le projeté) est le milieu entre le point et son image
  $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1; 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Un triangle translaté.

Énoncé: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`translation(A, B, C, u)`

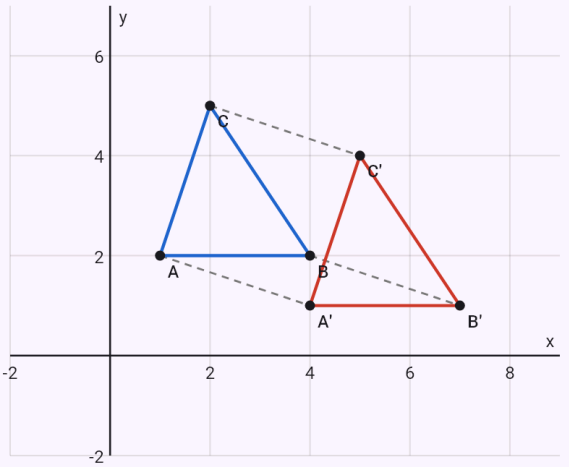
Résultat

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Étapes

- Translation de vecteur u : chaque point X se déplace du même vecteur, X' = X + u : $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3; -1)$
- L'image d'un point : $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- L'image d'un point : $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- L'image d'un point : $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Un triangle tourné de 90° autour de S.

Énoncé: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

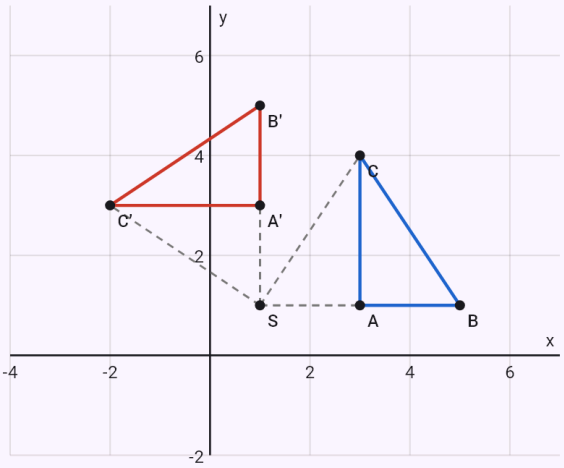
Résultat

$$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$$
$$C'[-2;\ 3]$$

Étapes

- Rotation de centre S et d'angle φ (positif dans le sens trigonométrique) : le vecteur X − S tourne de φ et s'ajoute au centre
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- L'image d'un point
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- L'image d'un point
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- L'image d'un point
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Une droite et un cercle par une homothétie de rapport 2.

Énoncé: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
homothety(p, k, S, 2)
```

Résultat

$$p' : x + y - 6 = 0$$

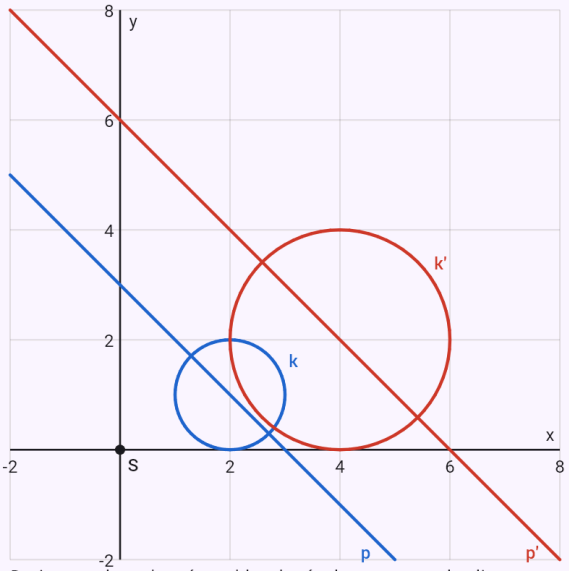
$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- Le cercle k – centre et rayon de la forme réduite (complétion des carrés)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Homothétie de centre S et de rapport κ : le vecteur X − S est multiplié par κ (un κ négatif place l'image de l'autre côté du centre) : $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- L'image de la droite p : on transforme deux de ses points, l'image est la droite passant par leurs images – parallèle à l'originale
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- Le vecteur normal est orthogonal au vecteur directeur – on échange les coordonnées et change un signe :
  $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- L'équation cartésienne : les coefficients sont les coordonnées du vecteur normal, la constante vient du point
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- L'image du cercle k : on transforme le centre, le rayon est multiplié par |κ|

$$S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

Un cercle symétrique par rapport à une droite – l'axe choisi par la puce.

Énoncé: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Symétrie

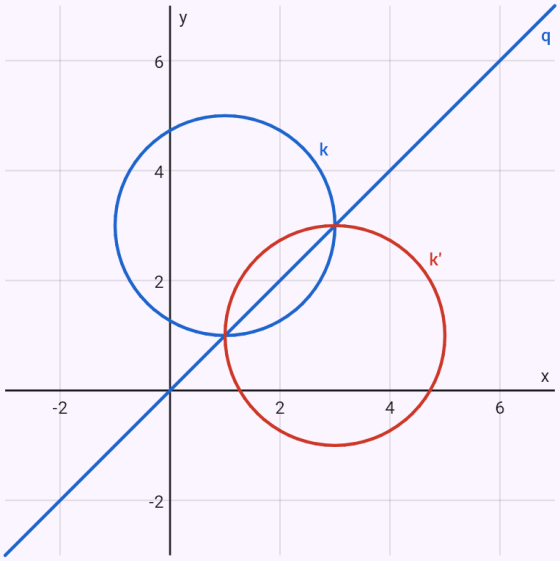
Résultat

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Étapes

- Le cercle k – centre et rayon de la forme réduite (complétion des carrés)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- L'équation réduite écrite sous forme cartésienne donne le vecteur normal : $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Symétrie axiale : l'image est sur la perpendiculaire à l'axe, qui coupe XX' en son milieu – le point se déplace de deux fois sa distance à l'axe selon le vecteur normal
  (a ; b) : $X' = X - 2\,\dfrac{ax+by+c}{a^2+b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- L'image du cercle k : on transforme le centre, le rayon reste (la transformation est une isométrie) :
  $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S'_k[3;\,1],\; r' = r = 2$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés.

La droite d'intersection de deux plans.

Énoncé: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Résultat

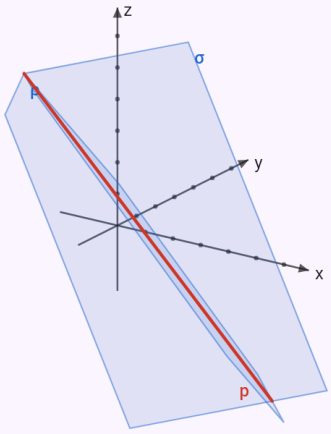
Les plans sont sécants selon la droite :

$$p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t$$

Étapes

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $\sigma : 2x - y + z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1)$
- Aucun vecteur n'est multiple de l'autre – ils ne sont pas parallèles
  $\vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1),\; \vec{n}_\sigma = (2;\,-1;\,1),\; \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- Le vecteur directeur de la droite d'intersection est orthogonal aux deux normales – leur produit vectoriel
  $\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\,1;\,-3)$
- Un point de p : on choisit des coordonnées et calcule la dernière avec l'équation
  $z = 0 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3},\; y = -\frac{1}{3},\; P_p\left[\frac{4}{3};\right.$
- La droite d'intersection – son point et son vecteur directeur :
  $p : x = \frac{4}{3} + 2t,\; y = -\frac{1}{3} + t,\; z = -3t,\; t \in \mathbb{R}$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

L’angle d’une droite et d’un plan.

Énoncé: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`

`ρ: x + y + z = 1` Angle

Résultat

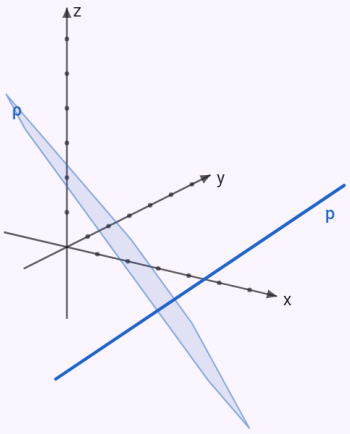
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Étapes

- La représentation paramétrique donne un point (les constantes) et le vecteur directeur (les coefficients du paramètre) : $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p = (1;\,2;\,1)$
- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :
  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\,1;\,1)$
- L'angle d'une droite et d'un plan : l'angle du directeur et du normal le complète à 90°, d'où le sinus donc
  $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l’espace : fais tourner le graphique du doigt.

La distance et la perpendiculaire commune de deux droites non coplanaires.

Énoncé: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`

`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Distance

Résultat

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Étapes

- La représentation paramétrique donne un point (les constantes) et le vecteur directeur (les coefficients du paramètre) : $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- La représentation paramétrique donne un point (les constantes) et le vecteur directeur (les coefficients du paramètre) : $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- La distance des droites non coplanaires

  $\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$

  $v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$
- La perpendiculaire commune : X sur la première droite et Y sur la seconde, XY orthogonal aux deux directeurs – un système en t et s

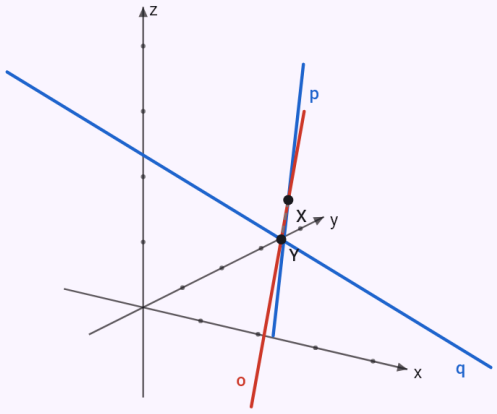
  $X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$

  $\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$

  $X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$
- La représentation paramétrique – un point plus le paramètre fois le vecteur directeur :

  $o : x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Un cercle – carrés complétés, centre et rayon.

Énoncé: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Résultat

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

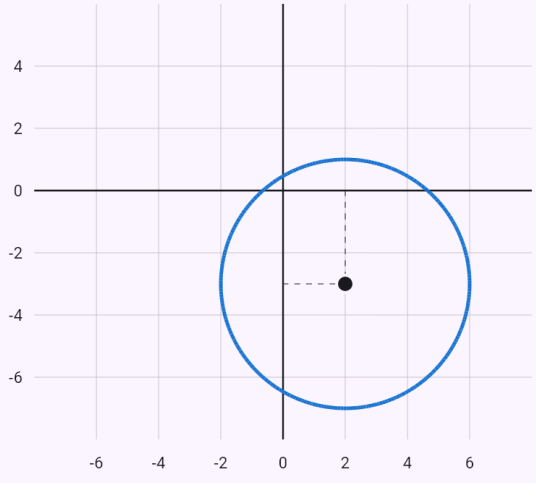
Étapes

- Nous complétons les carrés

  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

  $\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- L'équation réduite du cercle : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Centre $S = [2;\ -3]$, rayon $r = 4$

Graphique



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

La courbe donnée par l'équation dans le plan x, y.

Une ellipse – demi-axes, excentricité et foyers.

Énoncé: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

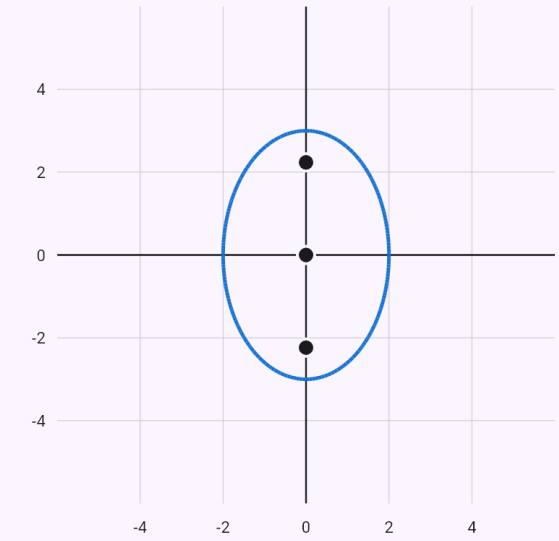
Résultat

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Étapes

- L'équation réduite de l'ellipse : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Centre $S = [0;\ 0]$, demi-axes $a = 3,\ b = 2$ (grand axe parallèle à l'axe des y), distance focale $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, excentricité $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, foyers $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Graphique



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La courbe donnée par l'équation dans le plan x, y.

Une hyperbole – foyers et asymptotes.

Énoncé: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

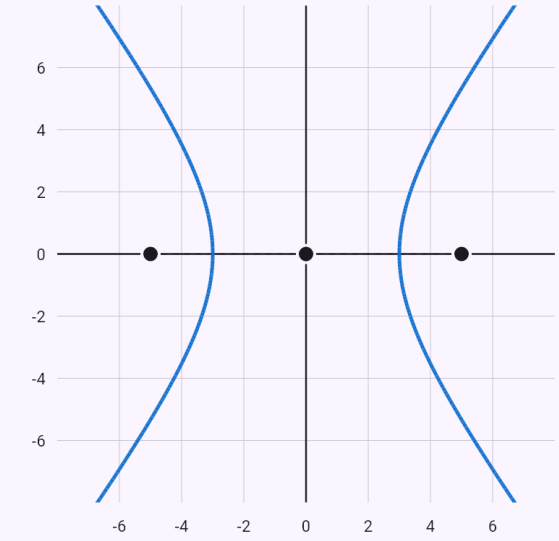
Résultat

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Étapes

- L'équation réduite de l'hyperbole : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Centre $S = [0;\ 0]$, demi-axes $a = 3,\ b = 4$ (axe focal parallèle à l'axe des x), distance focale $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, excentricité $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, foyers $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}x$

Graphique



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

La courbe donnée par l'équation dans le plan x, y.

Une parabole – sommet, foyer et directrice.

Énoncé: `y^2 = 8x`

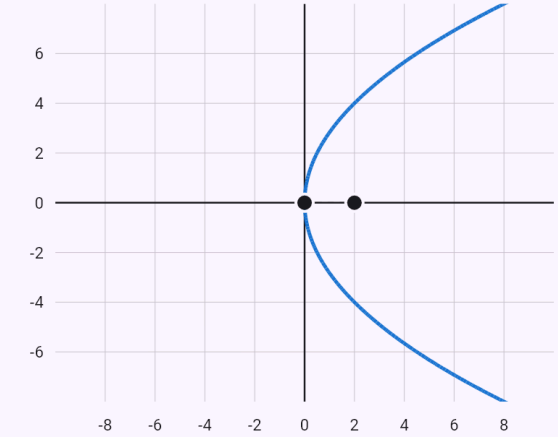
Résultat

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Étapes

- L'équation de la parabole au sommet : $y^2 = 8x$
- Sommet $V = [0;\ 0]$, paramètre $p = 4$, axe parallèle à l'axe des x, foyer $F = [2;\ 0]$, directrice $x = -2$

Graphique



La courbe donnée par l'équation dans le plan x, y.

La tangente à un cercle en l'un de ses points.

Énoncé: `tangente au cercle x^2 + y^2 = 25 au point [3; 4]`

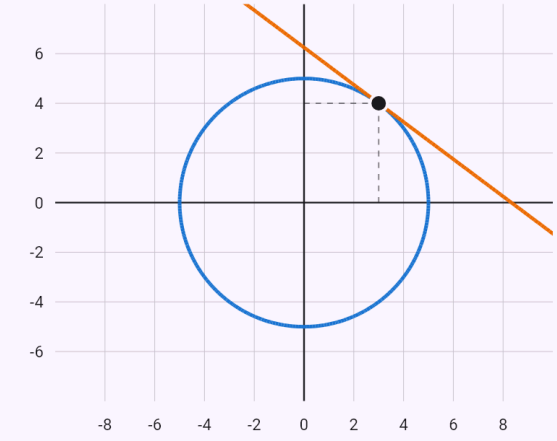
Résultat

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Étapes

- Le point $T = [3;\ 4]$ appartient à la conique ; en substituant : $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- La tangente au point $[x_0; y_0]$ de la conique par dédoublement : $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \dfrac{x + x_0}{2}$, $y \to \dfrac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- La tangente : $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Graphique



La conique et les droites ; les points marqués sont les points de contact, les intersections et le point donné.

Tangentes issues d'un point extérieur – discriminant nul pour la pente k.

Énoncé: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

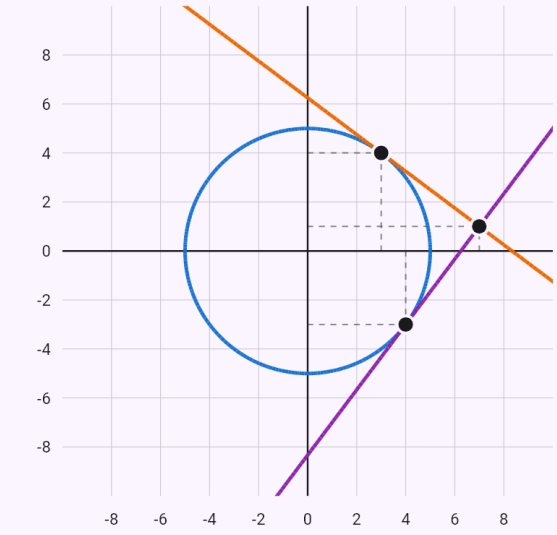
Résultat

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Étapes

- Le point $M = [7;\ 1]$ n'appartient pas à la conique ; en substituant : $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, pas 0.
- On cherche les tangentes parmi les droites passant par M de pente k : $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- On remplace y dans l'équation de la conique : $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- La droite est tangente exactement quand l'équation a une seule racine (double) – le discriminant est nul : $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Les tangentes : $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; les points de contact : $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Graphique



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

La conique et les droites ; les points marqués sont les points de contact, les intersections et le point donné.

Tangentes parallèles à une droite.

Énoncé: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

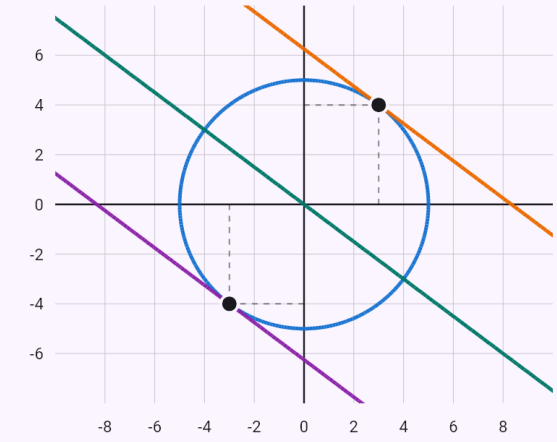
Résultat

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Étapes

- Les tangentes parallèles à la droite ont son vecteur normal et ne diffèrent que par la constante c : $t : 3x + 4y + c = 0$
- On remplace y dans l'équation de la conique : $y = \frac{-3x - c}{4} \ \Rightarrow \ 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- La droite est tangente exactement quand l'équation a une seule racine (double) – le discriminant est nul : $D = c^2 - 625 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Les tangentes : $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; les points de contact : $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Graphique



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

La conique et les droites ; les points marqués sont les points de contact, les intersections et le point donné.

La position d’une ellipse et d’une droite.

Énoncé: `position relative de x^2/9 + y^2/4 = 1 et y = x + 1`

Résultat

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

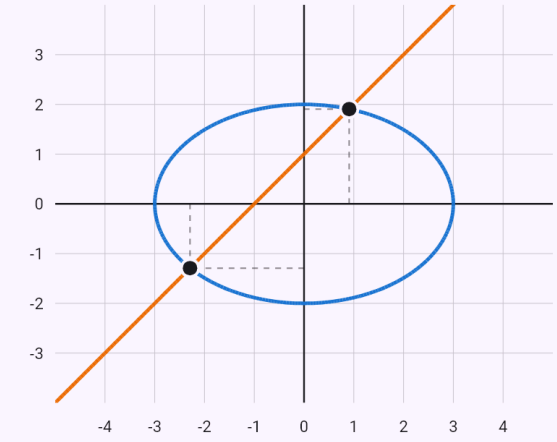
$$P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1+3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

Étapes

- De l’équation de la droite on exprime y et on le substitue dans la conique : $y = x + 1 \ \Rightarrow\ 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Le discriminant $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ est positif : la droite est sécante, avec deux points communs.
- Les points d’intersection

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3+4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1-3\sqrt{3}\right)}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3\left(-3+4\right.}{13}\right.$$

Graphique



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y = x + 1$

La conique et les droites ; les points marqués sont les points de contact, les intersections et le point donné.

Une sphère – centre et rayon.

Énoncé: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Résultat

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Étapes

- Nous complétons les carrés

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- L’équation de la sphère avec son centre : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Centre $S = [1;\ -2;\ 3]$, rayon $r = 4$

Une sphère et un plan – le cercle de section.

Énoncé: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

`ρ: x + y + z = 1`

Résultat

Le plan coupe la sphère selon un cercle de centre et de rayon :

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Étapes

- En complétant les carrés, l'équation de la sphère k prend la forme centrée – le centre et le rayon

  $k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16 \ \Rightarrow\ S[1;\ -2;\ 3$

- L'équation cartésienne donne le vecteur normal – les coefficients de x, y (z) :

  $\rho : x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$

- La distance du point au plan

  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

- La distance du centre au plan ρ est inférieure au rayon – le plan coupe la sphère selon un cercle :

  $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$

- La perpendiculaire par S au plan ρ suit son vecteur normal : $k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$

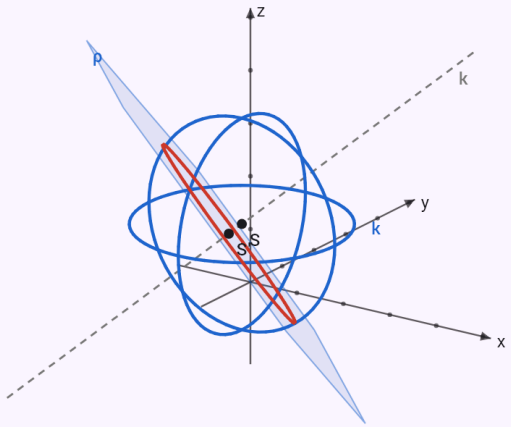
- Le projeté S' est le point où la perpendiculaire coupe ρ – on remplace et calcule t

  $(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0 \ \Rightarrow\ t = -\frac{1}{3},\ S'[$

- Le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire issue du centre, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; le rayon par Pythagore

  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Une sphère et une droite – les points d'intersection.

Énoncé: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

```
p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
```

Résultat

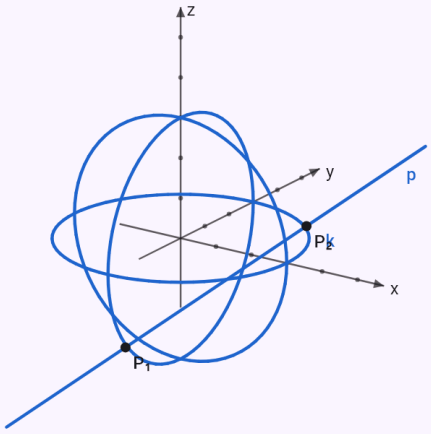
La droite coupe la sphère en deux points :

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Étapes

- En complétant les carrés, l'équation de la sphère k prend la forme centrée – le centre et le rayon :
  $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- La représentation paramétrique donne un point (les constantes) et le vecteur directeur (les coefficients du paramètre) : $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- On remplace les équations paramétriques de la droite p dans l'équation de la sphère
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- Le discriminant $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ est positif – la droite est sécante, avec deux points communs.
- Les points d'intersection
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Graphique



Droites et plans donnés en bleu, le résultat en rouge, les lignes auxiliaires en pointillés. Vecteurs dans l'espace : fais tourner le graphique du doigt.

Limitations connues

- Les coordonnées et les coefficients sont des nombres (sans paramètre) ; les coniques seulement en position axiale (sans terme xy).
- Transformations seulement dans le plan ; un cercle n'est pour l'instant que transformé (ni distance, ni position, ni tangentes).
- Les hauteurs d'un triangle dans l'espace seulement par leur longueur, sans équations ni orthocentre.
- Le nom d'une droite ou d'un plan est une lettre (aussi avec indice) – « a: 2x + 3 = 5 » est donc lu comme une droite, pas comme une équation.

24. Problèmes de construction

Les problèmes de construction se saisissent dans un formulaire – dans la section « Applications » de l'écran d'accueil, domaine Géométrie (formulaire « Problèmes de construction »). La tâche de base est un triangle ABC à partir de trois éléments : trois côtés (CCC), deux côtés et l'angle compris (CAC), un côté et deux angles (ACA – le troisième angle se déduit de la somme de 180°) ou deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux (CCA). Longueurs en centimètres, angles en degrés.

La solution suit la pratique scolaire : analyse (croquis du triangle achevé avec les éléments donnés mis en évidence), étapes de la construction en notation symbolique (1. AB ; |AB| = 6 cm, 2. k ; k(A ; 4 cm), 3. C ; C ∈ k ∩ l …) et discussion du nombre de solutions. Les flèches sous la figure parcourent la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en couleur. Le résultat donne aussi les côtés et angles calculés, pour vérifier votre tracé.

La discussion explique pourquoi un problème n'a pas de solution (inégalité triangulaire, somme des angles, cercle qui n'atteint pas la demi-droite) ou pourquoi il en a deux (CCA avec l'angle opposé au plus petit côté).

Un triangle peut aussi être donné par une hauteur, une médiane, le rayon du cercle circonscrit ou inscrit. On trace d'abord un côté ; le troisième sommet est à l'intersection de deux lieux : une parallèle à la distance de la hauteur, un cercle centré au milieu du côté de rayon la médiane, un cercle centré en une extrémité, le côté d'un angle, l'arc capable sur le côté ou les cercles circonscrits. Avec deux côtés et la hauteur issue de leur sommet commun, on commence par la hauteur ; avec le rayon inscrit, un côté et un angle adjacent, on construit le cercle inscrit et sa tangente.

Quadrilatères : carré, rectangle, losange, parallélogramme et trapèze (AB ∥ CD) à partir des côtés a, b, c, d, des diagonales e, f, des angles α, β et de la hauteur v – les éléments se choisissent en lignes comme pour le triangle. Le plus souvent, on construit d'abord le triangle ABC ou ABD et on complète le quatrième sommet ; sinon, on s'aide des diagonales qui se coupent en leur milieu (perpendiculaires dans le losange), de la parallèle à la distance de la hauteur ou, pour le trapèze, d'un triangle auxiliaire obtenu en translatant le côté AD ou la diagonale BD du vecteur DC.

Les lieux géométriques sont dans le même formulaire : la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, le cercle de Thalès et l'arc capable, d'où un segment est vu sous un angle donné (deux arcs symétriques par rapport au segment). Chacun se construit au compas et à la règle étape par étape ; l'analyse explique pourquoi les points sont exactement là.

Cercles et tangentes : les tangentes d'un point à un cercle (les points de contact sur un cercle de Thalès), les tangentes communes à deux cercles (par des cercles auxiliaires de rayon la différence et la somme des rayons), le cercle de rayon donné tangent aux côtés d'un angle, les cercles passant par un point et

tangents à une droite et les cercles passant par deux points. La discussion compte les solutions selon la position – deux cercles ont par exemple quatre, trois, deux, une ou aucune tangente commune.

Problèmes avec relations : une figure donnée (un segment AB, un cercle k et un point A, une droite p et un point A, un cercle k et une droite p, deux droites sécantes p, q) et deux relations que doit vérifier le point cherché – sur un segment le sommet C du triangle ABC, sinon un point X. Les relations se choisissent par lignes : le segment est vu du point sous un angle (90° = cercle de Thalès), aussi loin de deux points ou de deux droites, distance à un point ou à une droite, rapport des distances à A et B (cercle d'Apollonius), est sur une droite ou un cercle, la droite AX est tangente à k, centre d'un cercle de rayon ϱ tangent à k, et A est le milieu de XY avec Y sur k ou p (symétrie centrale). Chaque relation devient un lieu géométrique, le point cherché est à leur intersection ; la discussion compte les solutions (sur un segment dans un demi-plan, l'autre donne des images symétriques isométriques). Sous le résultat figurent les distances du point aux points et droites donnés, comme vérification.

Relations générales entre plusieurs points (avec un cercle k ou sans) : les points A à H se donnent par des lignes de relations – point sur k, milieu, tangente à k, longueur, rapport de longueurs, perpendiculaires, parallèles, point sur une droite, angle et triangle (seulement quoi dessiner). Les relations deviennent des équations en coordonnées (le centre S à l'origine, le premier point sur l'axe x), résolues exactement, avec des racines. Le résultat donne les longueurs entre les points (avec un cercle aussi en multiples de r), la vérification et le nombre de solutions à isométrie près. Quand c'est possible suit une construction scolaire : chaque point sur deux lieux – le cercle donné, une distance, une droite, une tangente, un milieu, une symétrie centrale – et les longueurs calculées construites comme hypoténuse ou côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ou par la relation de la hauteur ; la solution montre aussi la puissance d'un point et l'angle tangentiel quand ils s'appliquent. Sinon, honnêtement, seulement le calcul et la figure.

Sections de solides : un cube, un pavé, un prisme et une pyramide réguliers à base de 3 à 6 côtés (sommets ABC… et A'B'C'…, le sommet de la pyramide V) et le tétraèdre régulier ABCD. Le plan de coupe est donné par les points X, Y, Z, un par ligne : AE=2 est le point du segment AE à 2 cm de A – le segment peut être une arête, une diagonale d'une face ou du solide ou l'axe SS' (S, S' les centres des bases), et une distance plus grande que sa longueur donne un point sur le prolongement ; X: AB = 1:2 est le point X qui partage AB dans le rapport 1 : 2. Les points auxiliaires peuvent servir sur d'autres lignes. Le solide est en perspective cavalière, arêtes cachées en pointillés ; un triangle, pentagone ou hexagone régulier à la base est d'abord dessiné à côté en vraie grandeur puis reporté dans la perspective. La section se construit côté par côté selon les règles scolaires : les points d'une même face sont reliés, les faces parallèles sont coupées selon des parallèles, la droite d'un côté coupe la droite d'une arête en un point auxiliaire T qui est aussi dans la face voisine, et la droite d'un point intérieur est reportée dans la base par un plan vertical auxiliaire. Sous la figure, la section terminée dans l'espace peut être tournée du doigt.

Exemples

Triangle à partir de trois côtés (CCC).

Énoncé: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

Résultat

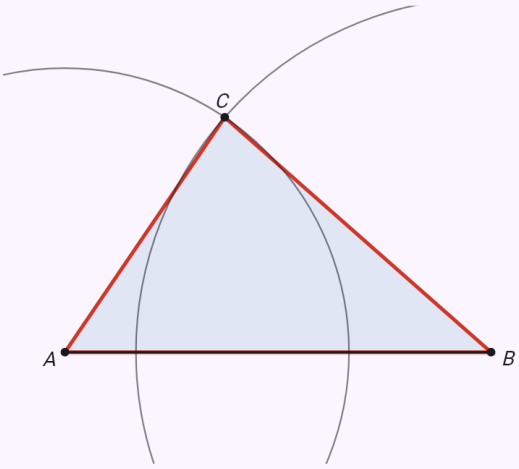
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – le cercle l de centre B et de rayon a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – le troisième sommet est le point d'intersection.
- 5. $\triangle ABC$ – on relie les sommets.
- Discussion : l'inégalité triangulaire $a + b > c$ est vérifiée, les cercles se coupent. Dans un demi-plan délimité par le premier côté, le problème a une solution (dans l'autre se trouve son image symétrique, isométrique).

Graphique



Étape 5 sur 5
5. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Deux côtés et l'angle compris (CAC).

Énoncé: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

Résultat

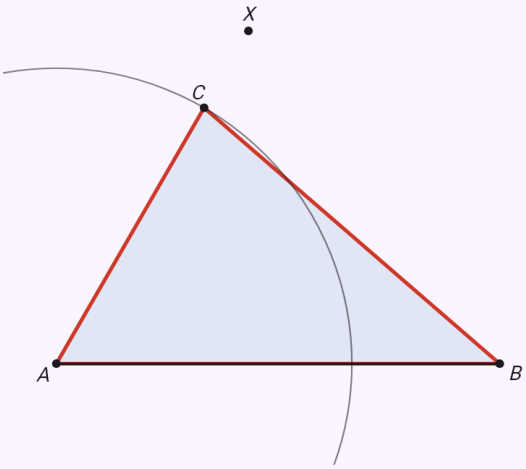
$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – on construit l'angle α ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – le troisième sommet est le point d'intersection.
- 5. $\triangle ABC$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans un demi-plan délimité par le premier côté, le problème a une solution (dans l'autre demi-plan se trouve son image symétrique, isométrique).

Graphique



Étape 5 sur 5
5. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un côté et deux angles, dont l'un n'est pas adjacent au côté – le troisième angle est calculé (ACA).

Énoncé: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

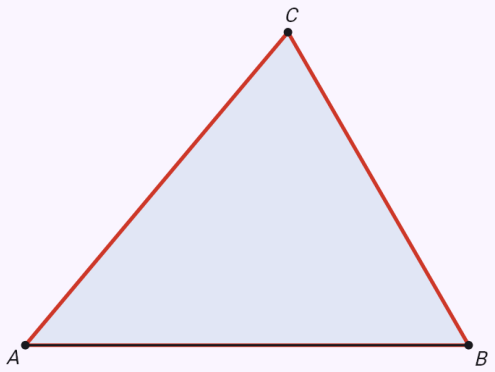
Résultat

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Le troisième angle se déduit de la somme des angles d'un triangle : $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 50^\circ$ – on construit l'angle α ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 60^\circ$ – on construit l'angle β ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{BY}$
- 4. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – le troisième sommet est le point d'intersection.
- 5. $\triangle ABC$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans un demi-plan délimité par le premier côté, le problème a une solution (dans l'autre demi-plan se trouve son image symétrique, isométrique).

Graphique



Étape 5 sur 5
5. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

L’angle opposé au plus petit de deux côtés – deux solutions (CCA).

Énoncé: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Résultat

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

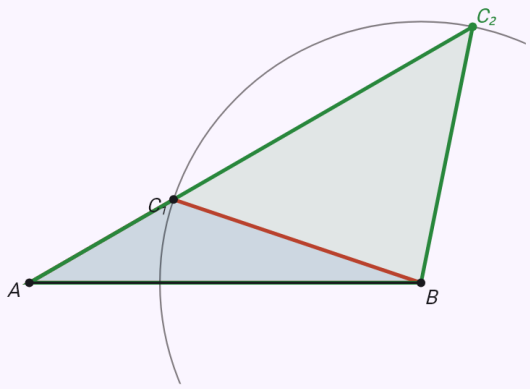
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – on construit l’angle α ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre B et de rayon a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – il y a deux points d’intersection, chacun est le troisième sommet d’un triangle.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : le cercle coupe la demi-droite en deux points – dans un demi-plan délimité par le premier côté, le problème a deux solutions, deux triangles différents.

Graphique



Étape 5 sur 5
5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Des côtés qui ne vérifient pas l'inégalité triangulaire.

Énoncé: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

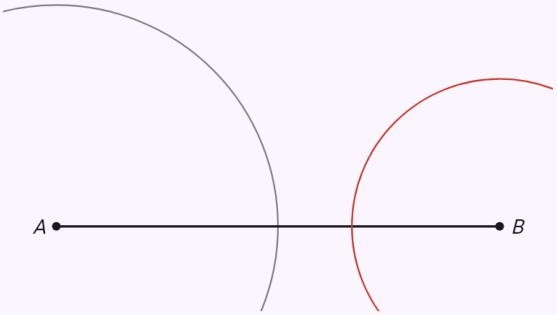
Résultat

Aucune figure ne peut être construite avec les éléments donnés.

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – le cercle l de centre B et de rayon a
- Discussion : l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – les cercles ne se coupent pas et le triangle n'existe pas.

Graphique



Étape 3 sur 3

3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Le côté c, la hauteur et la médiane relatives – deux solutions.

Énoncé: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Résultat

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

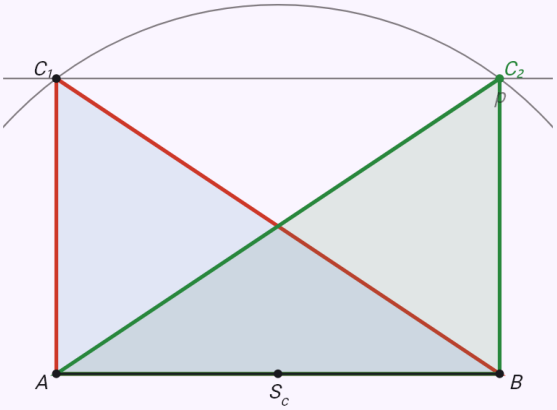
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – la parallèle p à AB à la distance v_c
- 3. $S_c;\ S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – le milieu S_c du segment AB (là où sa médiatrice le coupe).
- 4. $k;\ k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – le cercle k de centre S_c et de rayon t_c
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in p \cap k$ – il y a deux points d'intersection, chacun est le troisième sommet d'un triangle.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans le demi-plan au-dessus du premier côté, les lieux ont 2 points communs – le problème a autant de solutions (dans l'autre demi-plan se trouvent leurs images symétriques).

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Le côté c, la hauteur relative et l'angle opposé – l'arc capable.

Énoncé: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Résultat

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

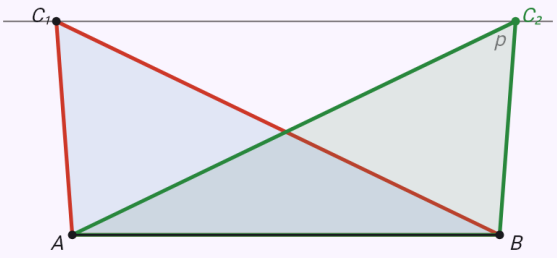
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la parallèle p à AB à la distance v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – l'arc k d'où le segment AB est vu sous l'angle γ (construit comme dans « Arc capable »).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – il y a deux points d'intersection, chacun est le troisième sommet d'un triangle.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans le demi-plan au-dessus du premier côté, les lieux ont 2 points communs – le problème a autant de solutions (dans l'autre demi-plan se trouvent leurs images symétriques).

Graphique



Étape 5 sur 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un côté, le rayon du cercle circonscrit et un autre côté – deux cercles circonscrits.

Énoncé: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Résultat

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

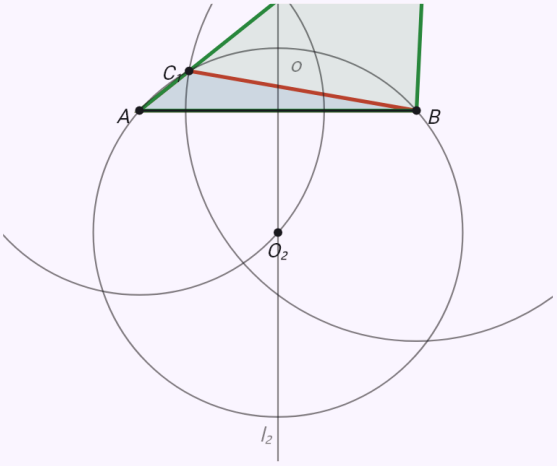
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la médiatrice o du segment AB, construite comme dans « Médiatrice ».
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – les points d'intersection O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – le cercle circonscrit l_1, l_2 de centre O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – le cercle m de centre B et de rayon a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – il y a deux points d'intersection, chacun est le troisième sommet d'un triangle.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans le demi-plan au-dessus du premier côté, les lieux ont 2 points communs – le problème a autant de solutions (dans l'autre demi-plan se trouvent leurs images symétriques).

Graphique



Étape 8 sur 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Deux côtés et la hauteur issue de leur sommet commun – la hauteur d’abord.

Énoncé: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Résultat

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

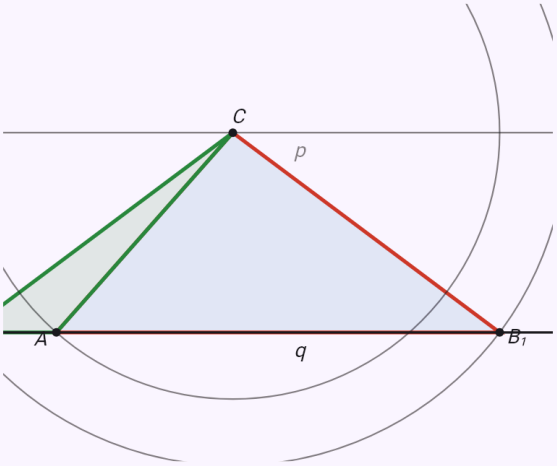
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – une droite quelconque q qui portera le côté AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la parallèle p à q à la distance v_c
- 3. C; $C \in p$ – un point quelconque C de la droite p
- 4. k; $k(C;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre C et de rayon b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – l’un des points d’intersection, A (l’autre donne un triangle isométrique).
- 6. l; $l(C;\ 5\,\text{cm})$ – le cercle l de centre C et de rayon a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – il y a deux points d’intersection, chacun est le troisième sommet d’un triangle.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – on relie les sommets.
- Discussion : le cercle l coupe la droite q en deux points – le problème a deux solutions, deux triangles différents (l’autre intersection du cercle k ne donne que des triangles isométriques).

Graphique



Étape 8 sur 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un côté, un angle adjacent et le rayon inscrit – la tangente par un cercle de Thalès.

Énoncé: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

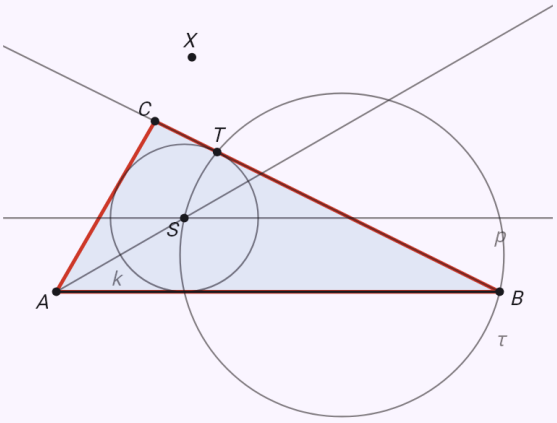
Résultat

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Étapes

- Analyse : croquis du triangle achevé, les éléments donnés sont mis en évidence – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – on construit l'angle α ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{AX}$
- 3. o; $o = \overrightarrow{AY}$, $|\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – la bissectrice o de l'angle α (construite comme dans « Bissectrice ») ; le centre du cercle inscrit est dessus.
- 4. p; $p \parallel AB$, $|p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – la parallèle p à AB à la distance ϱ
- 5. S; $S \in o \cap p$ – le point d'intersection S
- 6. k; $k(S;\ \varrho)$ – le cercle inscrit k de centre S
- 7. τ; $\tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – le cercle de Thalès τ sur le segment BS
- 8. T; $T \in \tau \cap k$ – le point de contact T de la tangente issue de B (l'autre intersection est le point de contact sur le premier côté).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – la tangente issue du point B au cercle inscrit.
- 10. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – le troisième sommet est le point d'intersection.
- 11. $\triangle ABC$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans un demi-plan délimité par le premier côté, le problème a une solution (dans l'autre demi-plan se trouve son image symétrique, isométrique).

Graphique



Étape 11 sur 11
11. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un rectangle à partir d'un côté et de la diagonale – l'angle droit en B.

Énoncé: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

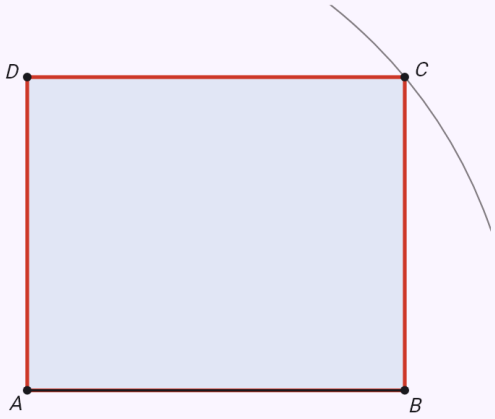
Résultat

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$) : le côté AB et les autres éléments donnés déterminent le triangle ABC ou ABD, construit comme un problème de triangle. Le quatrième sommet le complète – les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux et parallèles.
- 1. AB; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – on trace le côté a
- 2. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 90^\circ$ – on construit l'angle β ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{BY}$
- 3. k; $k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon e
- 4. C; $C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – le point d'intersection C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – le quatrième sommet D : les côtés opposés sont égaux, il est donc sur les cercles de centres C, A et de rayons $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – on relie les sommets.
- Discussion : le problème a une solution – tout autre quadrilatère de ce type lui est superposable.

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $ABCD$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un losange à partir de ses diagonales – les sommets sur la médiatrice de AC.

Énoncé: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

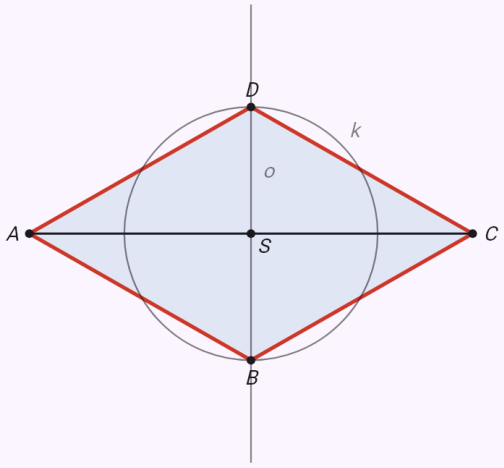
Résultat

$$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$$
$$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$$
$$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$) : les diagonales du carré et du losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Les sommets B et D sont donc sur la médiatrice de AC, à une demi-diagonale de son milieu S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – on trace la diagonale AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – la médiatrice o du segment AC, construite comme dans « Médiatrice ».
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – le cercle k de centre S et de rayon $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – les points d'intersection B, D
- 5. $ABCD$ – on relie les sommets.
- Discussion : le problème a une solution – tout autre quadrilatère de ce type lui est superposable.

Graphique



Étape 5 sur 5
5. $ABCD$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un parallélogramme à partir de deux côtés et d'une diagonale – d'abord le triangle ABC.

Énoncé: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

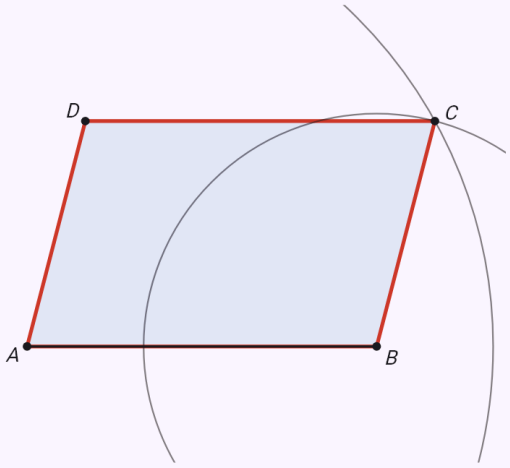
Résultat

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$) : le côté AB et les autres éléments donnés déterminent le triangle ABC ou ABD, construit comme un problème de triangle. Le quatrième sommet le complète – les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux et parallèles.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le côté a
- 2. k; $k(A;\ 8\,\text{cm})$ – le cercle k de centre A et de rayon e
- 3. l; $l(B;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle l de centre B et de rayon b
- 4. C; $C \in k \cap l$ – le point d'intersection C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – le quatrième sommet D : les côtés opposés sont égaux, il est donc sur les cercles de centres C, A et de rayons $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – on relie les sommets.
- Discussion : le problème a une solution – tout autre quadrilatère de ce type lui est superposable.

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $ABCD$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un trapèze à partir de quatre côtés – le triangle auxiliaire EBC.

Énoncé: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

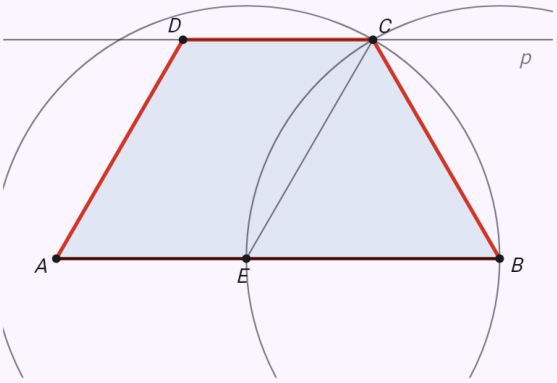
Résultat

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$) : en translatant le côté AD du vecteur DC, on obtient le triangle EBC avec E sur AB et |AE| = c. Ses côtés sont |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d et ses angles en E et B sont α et β. On le construit d'abord, puis on complète D sur la parallèle à AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – on trace le côté a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – le point E à la distance $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle k de centre E et de rayon d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – le cercle l de centre B et de rayon b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – le point d'intersection C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – le sommet D sur la parallèle à AB passant par C, à la distance $3\,\text{cm}$ de celui-ci.
- 7. $ABCD$ – on relie les sommets.
- Discussion : le problème a une solution – tout autre quadrilatère de ce type lui est superposable.

Graphique



Étape 7 sur 7
7. $ABCD$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un trapèze à partir de trois côtés et d’un angle – deux solutions.

Énoncé: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Résultat

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

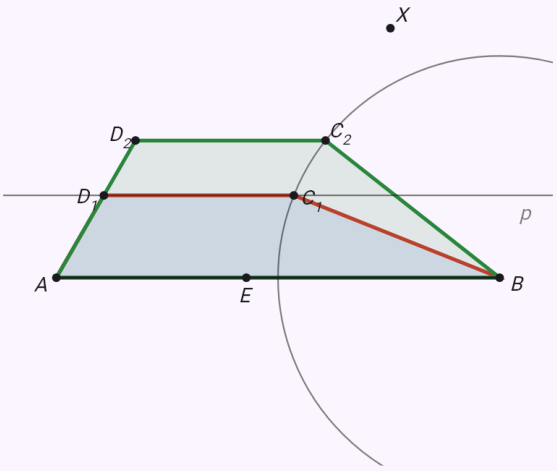
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Étapes

- Analyse ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$) : en translatant le côté AD du vecteur DC, on obtient le triangle EBC avec E sur AB et |AE| = c. Ses côtés sont |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d et ses angles en E et B sont α et β. On le construit d’abord, puis on complète D sur la parallèle à AB.
- 1. AB; $|AB| = 7\,\text{cm}$ – on trace le côté a
- 2. E; $E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – le point E à la distance $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $\angle BEX$; $|\angle BEX| = 60^\circ$ – on construit l’angle α ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{EX}$
- 4. k; $k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – le cercle k de centre B et de rayon b
- 5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – les points d’intersection C_1, C_2
- 6. D_1; $D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – le sommet D_1 sur la parallèle à AB passant par C_1, à la distance $3\,\text{cm}$ de celui-ci.
- 7. D_2; $D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – le sommet D_2 sur la parallèle à AB passant par C_2, à la distance $3\,\text{cm}$ de celui-ci.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : il y a deux intersections – le problème a deux solutions, deux quadrilatères différents.

Graphique



Étape 8 sur 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La médiatrice d’un segment AB de 6 cm.

Énoncé: `construction(segment_bisector; d=6)`

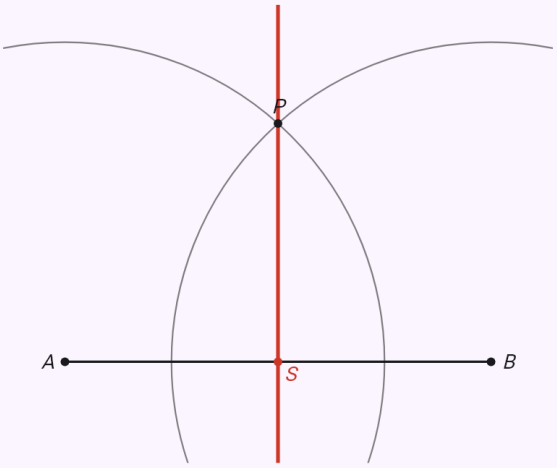
Résultat

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$) : un point X équidistant de A et B est le sommet d’un triangle isocèle ABX – il est sur la perpendiculaire à AB passant par son milieu, la médiatrice.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le segment AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – le cercle k de centre A et de rayon $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – le cercle l de centre B et de même rayon.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – les points d’intersection P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – la droite o est la médiatrice : l’ensemble de tous les points équidistants de A et B.

Graphique



Étape 5 sur 5

5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La bissectrice d’un angle de 70°.

Énoncé: `construction(angle_bisector; phi=70)`

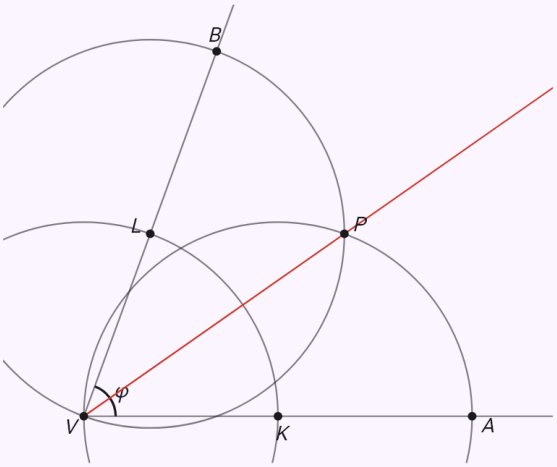
Résultat

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Étapes

- Analyse ($|\angle AVB| = 70^\circ$) : un point intérieur à l’angle équidistant des deux côtés est sur la demi-droite qui partage l’angle en deux – la bissectrice.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – on trace l’angle $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – le cercle k de centre V et de rayon quelconque.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – les points d’intersection K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – le cercle m de centre K et de rayon $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – le cercle n de centre L et de même rayon.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – le point d’intersection P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – la demi-droite o est la bissectrice : elle partage l’angle en deux et ses points sont équidistants des deux côtés.

Graphique



Étape 7 sur 7

7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Le cercle de Thalès sur un segment de 5 cm.

Énoncé: `construction(thales; d=5)`

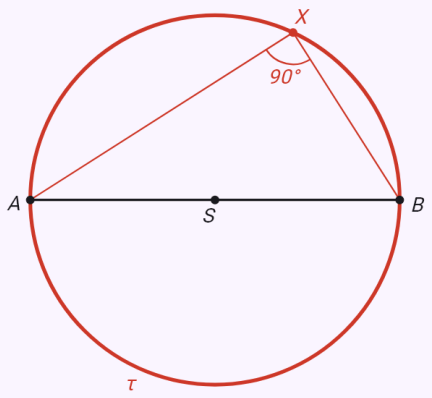
Résultat

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$) : d'après le théorème de Thalès, l'angle AXB est droit exactement quand X est sur le cercle de diamètre AB (sauf A et B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – on trace le segment AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – le milieu S du segment AB (là où sa médiatrice le coupe).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – le cercle de Thalès τ de centre S et de rayon $\dfrac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; sans A et B, c'est l'ensemble cherché.

Graphique



Étape 3 sur 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Les points d'où un segment de 6 cm est vu sous 60°.

Énoncé: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

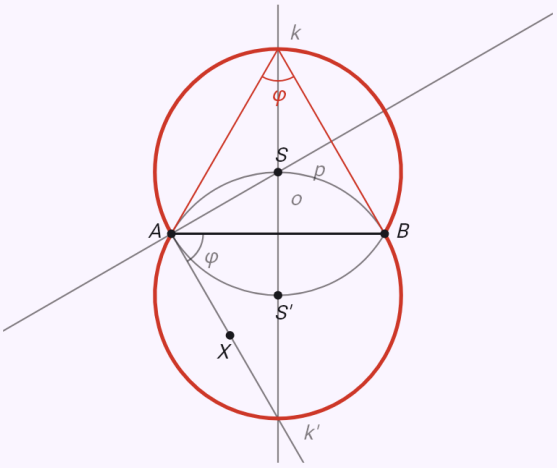
Résultat

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$) : les points X d'où AB est vu sous l'angle φ sont sur deux arcs symétriques par rapport à AB. L'angle inscrit sur la corde AB est égal à l'angle entre AB et la tangente en A – le centre de l'arc est sur la médiatrice de AB et sur la perpendiculaire à la tangente en A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le segment AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la médiatrice o du segment AB, construite comme dans « Médiatrice ».
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – on construit l'angle φ ; son côté est la demi-droite $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – la perpendiculaire p à la demi-droite $\overrightarrow{AX}$ au point A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – le point d'intersection S
- 6. k; $k(S;\ |SA|)$ – le cercle k de centre S et de rayon $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – le cercle k', symétrique de k par rapport à la droite AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – les arcs au-dessus du segment AB (sans A et B) sont l'ensemble cherché : de chacun de leurs points, AB est vu sous l'angle φ

Graphique



Étape 8 sur 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Les tangentes d’un point situé à 5 cm à un cercle de rayon 3 cm.

Énoncé: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Résultat

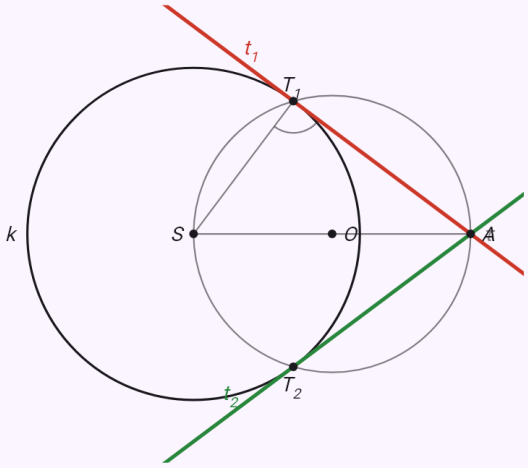
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\text{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Étapes

- Analyse ($r = 3\,\text{cm},\ |SA| = 5\,\text{cm}$) : une tangente est perpendiculaire au rayon au point de contact T, l’angle STA est donc droit. Les points de contact sont donc sur le cercle de Thalès de diamètre SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\text{cm})$ – le cercle k de centre S et de rayon $3\,\text{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – le point A à la distance $5\,\text{cm}$ de S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – le milieu O du segment SA (là où sa médiatrice le coupe).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – le cercle de Thalès τ sur le segment SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – les points de contact T_1, T_2 sont les intersections des cercles k et τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – les tangentes t_1, t_2 issues du point A
- Discussion : le point A est à l’extérieur du cercle – deux tangentes en sont issues, symétriques par rapport à la droite SA.

Graphique



Étape 6 sur 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Quatre tangentes communes à deux cercles extérieurs l'un à l'autre.

Énoncé: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

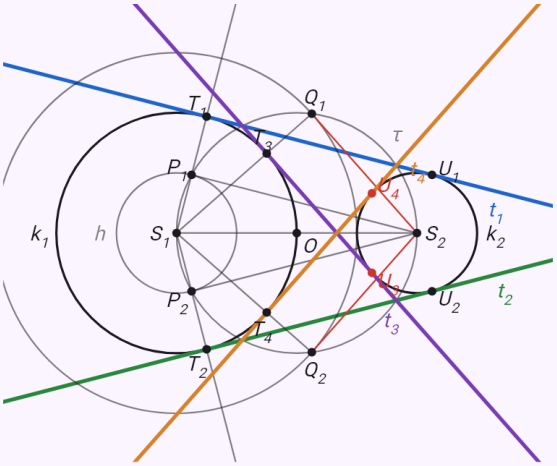
Résultat

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$) : en translatant une tangente extérieure vers les centres du plus petit rayon, elle touche un cercle auxiliaire centré au centre du grand cercle, de rayon $|r_1 - r_2|$, et passe par le centre du petit. Pour une tangente intérieure, le rayon auxiliaire est $r_1 + r_2$. Les tangentes du centre au cercle auxiliaire s'obtiennent avec le cercle de Thalès sur la ligne des centres.
- 1. k_1; $k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – le cercle k_1 de centre S_1 et de rayon $3\,\text{cm}$
- 2. k_2; $k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – le cercle k_2 de centre S_2 et de rayon $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. O; $O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – le milieu O du segment S_1S_2 (là où sa médiatrice le coupe).
- 4. τ; $\tau(O;\ |OS_1|)$ – le cercle de Thalès τ sur le segment S_1S_2
- 5. h; $h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – le cercle auxiliaire h de centre S_1 et de rayon égal à la différence des rayons, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. P_1, P_2; $P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – les points d'intersection P_1, P_2
- 7. T_1, T_2; $T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – les points de contact T_1, T_2 sont les intersections de $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ avec le cercle k_1
- 8. t_1, t_2; $T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – les tangentes communes extérieures t_1, t_2 passant par les points T_1, T_2, parallèles à S_2P_1, S_2P_2 ; elles touchent aussi l'autre cercle.
- 9. h'; $h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – le cercle auxiliaire h' de centre S_1 et de rayon égal à la somme des rayons, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. Q_1, Q_2; $Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – les points d'intersection Q_1, Q_2
- 11. T_3, T_4; $T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – les points de contact T_3, T_4 sont les intersections de S_1Q_1, S_1Q_2 avec le cercle k_1
- 12. t_3, t_4; $T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – les tangentes communes intérieures t_3, t_4 passant par les points T_3, T_4, parallèles à S_2Q_1, S_2Q_2
- Discussion : les cercles sont extérieurs l'un à l'autre ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – ils ont deux tangentes communes extérieures et deux intérieures.

Graphique



Étape 12 sur 12

12. t_3, t_4; $T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Un cercle de rayon 2 cm tangent aux côtés d’un angle de 60°.

Énoncé: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Résultat

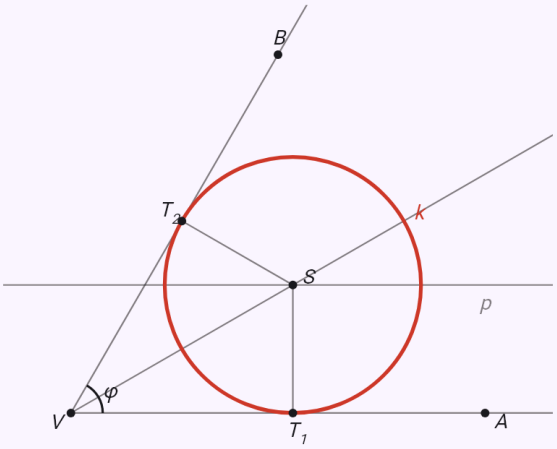
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\tan\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($\varphi = 60^\circ,\ r = 2\,\text{cm}$) : le centre est à la distance r des deux côtés – sur la bissectrice et sur la parallèle à un côté à la distance r. Les points de contact sont les pieds des perpendiculaires du centre aux côtés.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60^\circ$ – on trace l’angle $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – la bissectrice o de l’angle $\angle AVB$ (construite comme dans « Bissectrice ») ; ses points sont à égale distance des deux côtés.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – la parallèle p à VA à la distance r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – le point d’intersection S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – les points de contact T_1, T_2 sont les pieds des perpendiculaires du centre S à VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – le cercle cherché k de centre S et de rayon $2\,\text{cm}$
- Discussion : la bissectrice et la parallèle se coupent toujours en un seul point – le problème a une solution.

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Cercles passant par un point, tangents à une droite – deux solutions.

Énoncé: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Résultat

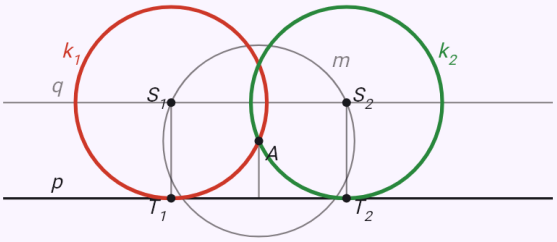
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$) : le centre est à la distance r de la droite p, donc sur la parallèle q à p à la distance r du côté de A. Il est aussi à la distance r de A, donc également sur le cercle m(A ; r).
- 1. p – une droite quelconque p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – le point A à la distance $1{,}5\,\text{cm}$ de p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – la parallèle q à p à la distance r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – le cercle m de centre A et de rayon $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – les points d'intersection S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – les points de contact T_1, T_2 sont les pieds des perpendiculaires du centre S_1, S_2 à p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – les cercles cherchés k_1, k_2 de centres S_1, S_2 et de rayon $2{,}5\,\text{cm}$
- Discussion : $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – le cercle m coupe la parallèle q en deux points, le problème a deux solutions.

Graphique



Étape 7 sur 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Cercles de rayon donné passant par deux points – deux solutions symétriques par rapport à AB.

Énoncé: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Résultat

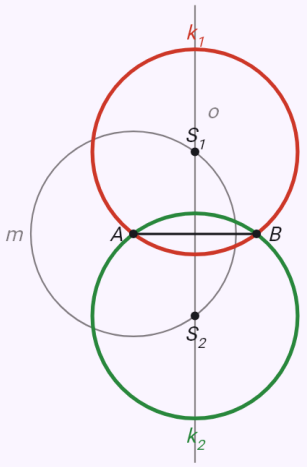
$$k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm},\ r = 5\,\text{cm}$) : le centre est à la distance r de A et de B – sur la médiatrice de AB et sur le cercle m(A ; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le segment AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la médiatrice o du segment AB, construite comme dans « Médiatrice ».
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\text{cm})$ – le cercle m de centre A et de rayon $5\,\text{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – les points d'intersection S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$ – les cercles cherchés k_1, k_2 de centres S_1, S_2 et de rayon $5\,\text{cm}$
- Discussion : $|AB| = 6\,\text{cm} < 2r = 10\,\text{cm}$ – le cercle m coupe la médiatrice en deux points, le problème a deux solutions symétriques par rapport à AB.

Graphique



Étape 5 sur 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Le sommet C d'où AB est vu sous 60°, à la hauteur 3 cm – arcs et parallèles.

Énoncé: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Résultat

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

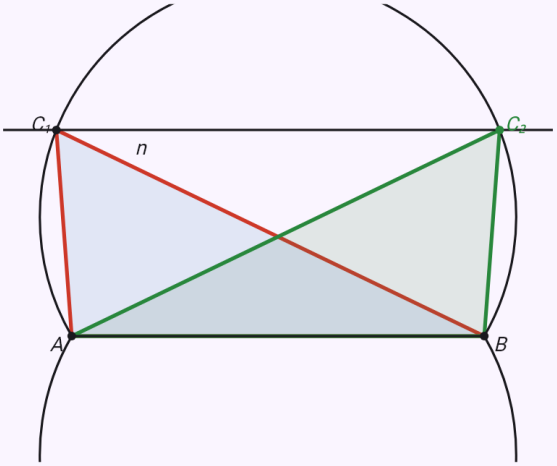
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$) : esquisse du triangle ABC terminé, les relations données mises en évidence. Chacune des deux relations donne un lieu géométrique sur lequel se trouve le sommet C – C est donc à leur intersection.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le segment AB donné.
- 2. m, m'; $m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – les points d'où le segment AB est vu sous l'angle 60° sont sur deux arcs m, m' symétriques par rapport à AB (construits comme dans « Arc capable »).
- 3. n, n'; $n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – les points à la distance $3\,\text{cm}$ de la droite AB sont sur deux parallèles n, n' à celle-ci, une de chaque côté.
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – les points cherchés sont les intersections des deux lieux.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans le demi-plan au-dessus de AB les lieux ont 2 points communs – le problème a 2 solutions (dans l'autre demi-plan leurs images symétriques, isométriques).

Graphique



Étape 5 sur 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Le rapport |AC| : |BC| = 2 et |BC| = 3 cm – le cercle d'Apollonius.

Énoncé: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

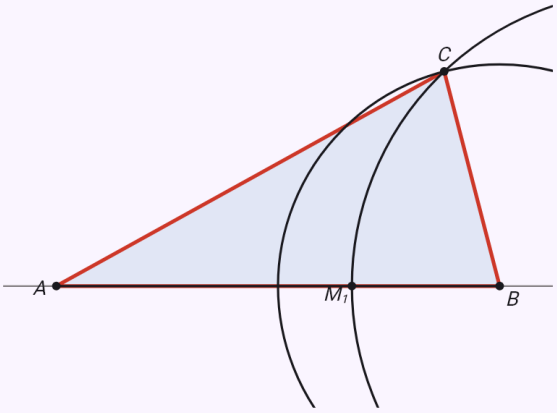
Résultat

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Étapes

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$) : esquisse du triangle ABC terminé, les relations données mises en évidence. Chacune des deux relations donne un lieu géométrique sur lequel se trouve le sommet C – C est donc à leur intersection.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – on trace le segment AB donné.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – les points dont les distances aux extrémités du segment AB sont dans le rapport 2 sont sur le cercle d'Apollonius. D'abord les points M_1 (dans le segment) et M_2 (sur son prolongement) qui divisent AB dans ce rapport.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – le cercle d'Apollonius m est le cercle de Thalès de diamètre M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – les points à la distance $3\,\text{cm}$ du point B sont sur le cercle n de centre B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – le point cherché est l'intersection des deux lieux.
- 6. $\triangle ABC$ – on relie les sommets.
- Discussion : dans le demi-plan au-dessus de AB les lieux ont un point commun – le problème a une solution (dans l'autre demi-plan son image symétrique, isométrique).

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Les points de contact des tangentes issues de A – AX tangente et X sur le cercle.

Énoncé: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

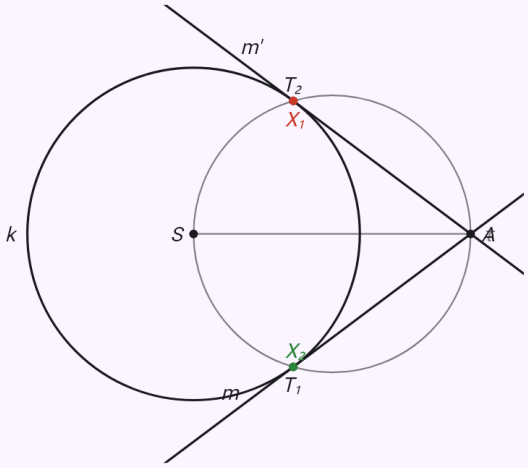
Résultat

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse $(k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm})$: esquisse avec le cercle k donné, le point A et le point X cherché, les relations données mises en évidence. Chacune des deux relations donne un lieu géométrique – X est à leur intersection.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – on trace le cercle k donné et le point A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – la droite AX doit être tangente à k : les points de contact sont sur le cercle de Thalès τ de diamètre SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ coupe k aux points de contact T_1, T_2, par lesquels passent les tangentes m, m'
- Le point X doit être sur le cercle k – le lieu est le cercle k lui-même, déjà tracé.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – les points cherchés sont les intersections des deux lieux.
- Discussion : les lieux ont 2 points communs – le problème a 2 solutions.

Graphique



Étape 4 sur 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Les centres des cercles de rayon 1 cm tangents au cercle k et à la droite p.

Énoncé: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

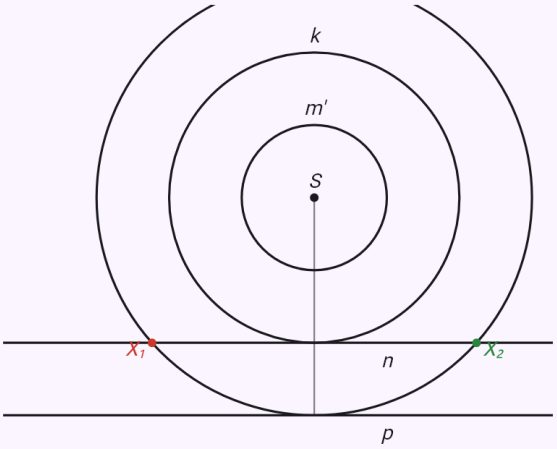
Résultat

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: esquisse avec le cercle k donné, la droite p et le point X cherché, les relations données mises en évidence. Chacune des deux relations donne un lieu géométrique – X est à leur intersection.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – on trace le cercle k donné et la droite p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – un cercle de rayon $1\,\text{cm}$ est tangent extérieurement à k quand son centre est à r + ϱ de S, et intérieurement à |r − ϱ| : les centres sont sur les cercles m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – les points à la distance $1\,\text{cm}$ de la droite p sont sur deux parallèles n, n' à celle-ci, une de chaque côté.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – les points cherchés sont les intersections des deux lieux.
- Discussion : les lieux ont 2 points communs – le problème a 2 solutions.

Graphique



Étape 4 sur 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Les centres des cercles de rayon 1,5 cm tangents à deux droites sécantes – quatre solutions.

Énoncé: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

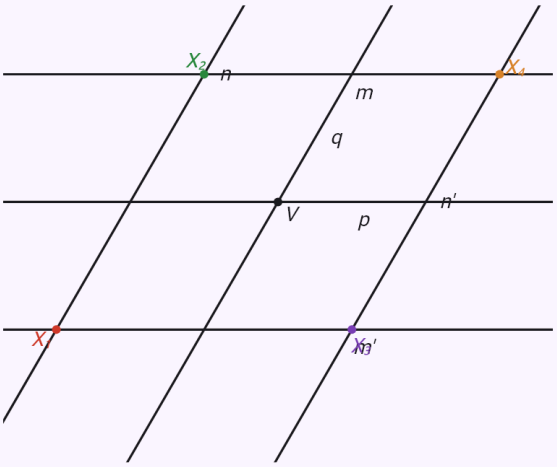
Résultat

$$X_1 : \ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3 : \ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4 : \ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($|\angle(p,q)| = 60^\circ$) : esquisse avec les droites p, q données et le point X cherché, les relations données mises en évidence. Chacune des deux relations donne un lieu géométrique – X est à leur intersection.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60^\circ$ – on trace les droites p, q données, sécantes en V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – les points à la distance $1{,}5\,\text{cm}$ de la droite p sont sur deux parallèles m, m' à celle-ci, une de chaque côté.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – les points à la distance $1{,}5\,\text{cm}$ de la droite q sont sur deux parallèles n, n' à celle-ci, une de chaque côté.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – les points cherchés sont les intersections des deux lieux.
- Discussion : les lieux ont 4 points communs – le problème a 4 solutions.

Graphique



Étape 4 sur 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Cercle k(S ; 2 cm), AC tangente, k circonscrit à ABD, D milieu de BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Énoncé: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)

Résultat

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

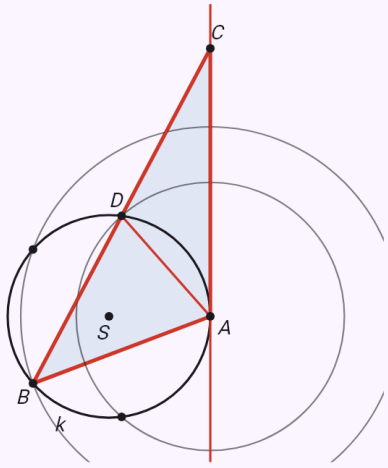
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Étapes

- Analyse ($k(S;\,2\,\text{cm})$) : on écrit les relations en coordonnées. Le centre S à l'origine et le point A sur le demi-axe x positif, A = [r ; 0] – toute solution peut être tournée dans cette position. Les inconnues sont les coordonnées des autres points.
- Le point est sur le cercle k ($A \in k$) : $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Le point est sur le cercle k ($B \in k$) : $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Le point est sur le cercle k ($D \in k$) : $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Le milieu ($D = S_{BC}$) : $x_D = \frac{x_B + x_C}{2},\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$
- La droite $\overleftrightarrow{AC}$ est tangente à k – sa distance au centre S vaut r : $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Le rapport de longueurs ($|AC| = 2\,|AD|$) : $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ est la figure cherchée – ses sommets ne doivent pas être alignés.
- On résout le système exactement (sans arrondi). Il a 2 positions différentes des points (aucun confondu), 1 à isométrie près.
- Vérification : avec la solution substituée, toutes les relations sont vérifiées.
- De la solution : la puissance du point C par rapport à k – le carré de la tangente égale le produit des segments de la sécante : $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- De la solution : l'angle tangentiel de la corde AD égale l'angle inscrit qui l'intercepte : $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41^\circ$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – on trace le cercle k donné.
- 2. A; $A \in k$ – un point quelconque A du cercle k.
- On construit la longueur $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ comme un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse donnée : $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – le point B est l'une des intersections des deux lieux (leur nombre : 2).
- On construit la longueur $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ comme un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse donnée : $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – le point D est l'une des intersections des deux lieux (leur nombre : 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – le point C symétrique de B par rapport au centre D (symétrie centrale).
- 6. $\triangle ABC$ – la figure terminée.
- Discussion : 2 positions des points vérifient les relations, toutes isométriques (symétriques) – à isométrie près le problème a une solution.

Graphique



Étape 6 sur 6
6. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

Triangle rectangle sans cercle : |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, angle droit en C.

Énoncé: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

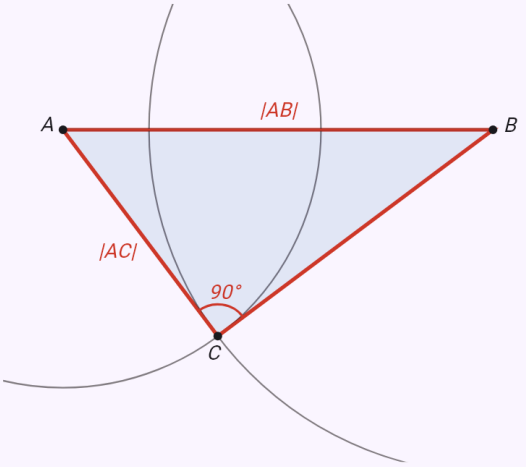
Résultat

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse : on écrit les relations en coordonnées. Le point A à l'origine et le point B sur le demi-axe x positif – toute solution peut être déplacée et tournée dans cette position. Les inconnues sont les coordonnées des autres points.
- La longueur ($|AB| = 5\,\text{cm}$) : $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- La longueur ($|AC| = 3\,\text{cm}$) : $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- L'angle ($|\angle ACB| = 90°$) : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90°$
- $\triangle ABC$ est la figure cherchée – ses sommets ne doivent pas être alignés.
- On résout le système exactement (sans arrondi). Il a 2 positions différentes des points (aucun confondu), 1 à isométrie près.
- Vérification : avec la solution substituée, toutes les relations sont vérifiées.
- 1. A – un point quelconque A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – le point B à la distance calculée de A
- 3. C; $C \in m(A;\, 3\,\text{cm}) \cap m(B;\, 4\,\text{cm})$ – le point C est l'une des intersections des deux lieux (leur nombre : 2).
- 4. $\triangle ABC$ – la figure terminée.
- Discussion : 2 positions des points vérifient les relations, toutes isométriques (symétriques) – à isométrie près le problème a une solution.

Graphique



Étape 4 sur 4
4. $\triangle ABC$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section d’un cube – les faces opposées selon des parallèles.

Énoncé: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Résultat

$$XYZK$$

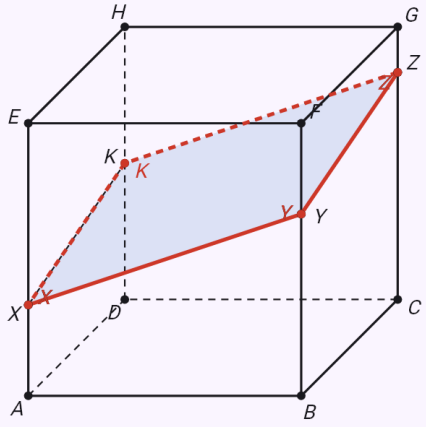
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté selon trois règles : deux points de la section dans une même face sont reliés ; des faces parallèles sont coupées selon des segments parallèles ; la droite d’un côté prolongée coupe la droite d’une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – on dessine le cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – le point X sur l’arête AE à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – le point Y sur l’arête BF à la distance $4\,\text{cm}$ du sommet B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – le point Z sur l’arête CG à la distance $5\,\text{cm}$ du sommet C
- 5. XY – les points X, Y sont dans la face $ABFE$, on les relie.
- 6. YZ – les points Y, Z sont dans la face $BCGF$, on les relie.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – la face $CDHG$ est parallèle à la face $ABFE$, la section la coupe donc selon la parallèle à YX passant par Z ; elle coupe l’arête DH en K
- 8. XK – les points X, K sont dans la face $ADHE$, on les relie.
- 9. $XYZK$ – la section est le quadrilatère $XYZK$

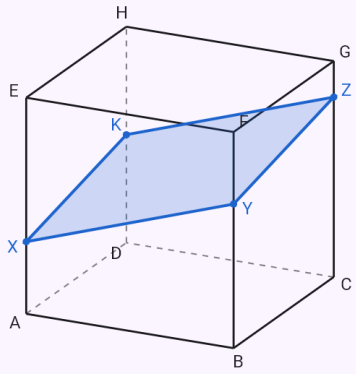
Graphique



Étape 9 sur 9
9. $XYZK$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l’espace – faites-la tourner du doigt



L’hexagone régulier par les milieux d’arêtes – le point auxiliaire T_1.

Énoncé: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Résultat

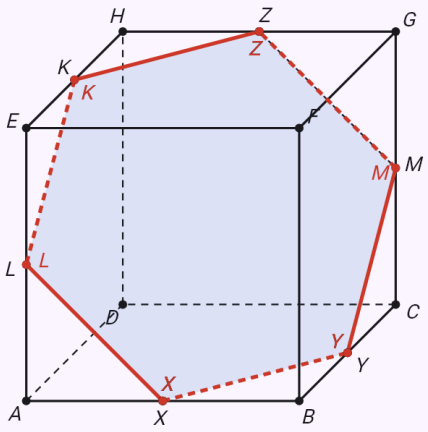
$$XYMZKL$$
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté selon trois règles : deux points de la section dans une même face sont reliés ; des faces parallèles sont coupées selon des segments parallèles ; la droite d’un côté prolongée coupe la droite d’une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – on dessine le cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – le point X sur l’arête AB à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – le point Y sur l’arête BC à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – le point Z sur l’arête GH à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet G
- 5. XY – les points X, Y sont dans la face $ABCD$, on les relie.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – la face $EFGH$ est parallèle à la face $ABCD$, la section la coupe donc selon la parallèle à XY passant par Z ; elle coupe l’arête EH en K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – on prolonge le côté ZK et l’arête EF ; leur point commun T_1 est dans le plan de la face $EFGH$ et de la face $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – la droite XT_1 est dans le plan de la face $ABFE$; elle coupe l’arête AE en L
- 9. KL – les points K, L sont dans la face $ADHE$, on les relie.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – la face $CDHG$ est parallèle à la face $ABFE$, la section la coupe donc selon la parallèle à XL passant par Z ; elle coupe l’arête CG en M
- 11. YM – les points Y, M sont dans la face $BCGF$, on les relie.

- 12. $XYMZKL$ – la section est l’hexagone $XYMZKL$

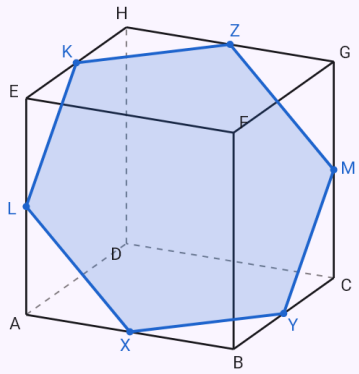
Graphique



Étape 12 sur 12
12. $XYMZKL$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l’espace – faites-la tourner du doigt



La section d'une pyramide par les milieux de deux arêtes latérales et d'une arête de la base.

Énoncé: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Résultat

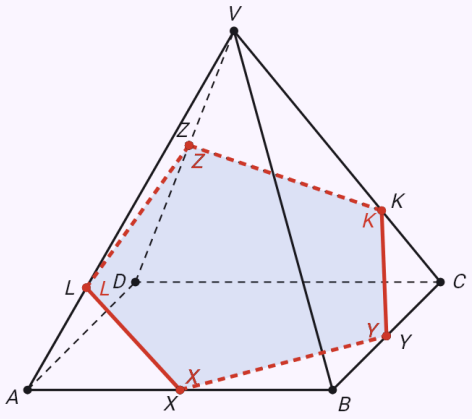
$$XYKZL$$
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$
$$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$$
$$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté : deux points de la section dans une même face sont reliés ; un côté parallèle à une arête d'une autre face signifie que le plan coupe cette face selon une parallèle à elle ; la droite d'un côté prolongée coupe la droite d'une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDV;\ a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – on dessine la pyramide régulière à base carrée $ABCDV$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – le point X sur l'arête AB à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – le point Y sur l'arête BC à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet B
- 4. $Z;\ Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – le point Z sur l'arête DV à la distance $4\,\text{cm}$ du sommet D
- 5. XY – les points X, Y sont dans la face $ABCD$, on les relie.
- 6. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – on prolonge le côté XY et l'arête CD ; leur point commun T_1 est dans le plan de la face $ABCD$ et de la face CDV
- 7. $ZK;\ K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – la droite ZT_1 est dans le plan de la face CDV ; elle coupe l'arête CV en K
- 8. YK – les points Y, K sont dans la face BCV, on les relie.
- 9. $T_2;\ T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – on prolonge le côté YK et l'arête BV ; leur point commun T_2 est dans le plan de la face BCV et de la face ABV
- 10. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – la droite XT_2 est dans le plan de la face ABV ; elle coupe l'arête AV en L
- 11. ZL – les points Z, L sont dans la face DAV, on les relie.

- 12. $XYKZL$ – la section est le pentagone $XYKZL$

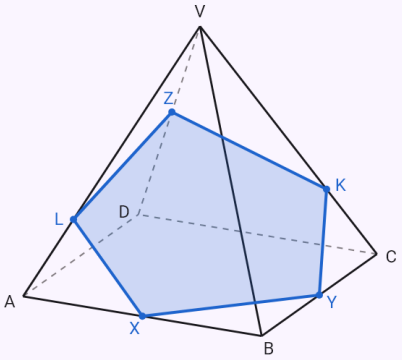
Graphique



Étape 12 sur 12
12. $XYKZL$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l'espace – faites-la tourner du doigt



Un point sur le prolongement d'une arête – Y à 2 cm au-delà du sommet B.

Énoncé: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Résultat

$XLKZM$

$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

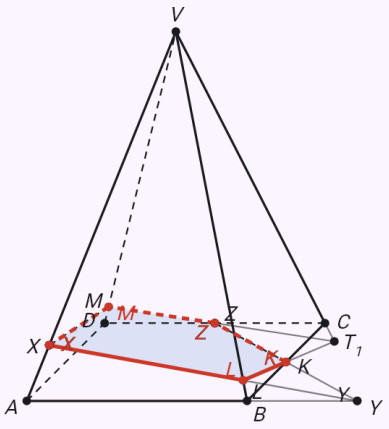
$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$

Étapes

- Analyse ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté : deux points de la section dans une même face sont reliés ; un côté parallèle à une arête d'une autre face signifie que le plan coupe cette face selon une parallèle à elle ; la droite d'un côté prolongée coupe la droite d'une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDV$; $a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – on dessine la pyramide régulière à base carrée $ABCDV$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. X; $X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – le point X sur l'arête AV à la distance $1\,\text{cm}$ du sommet A
- 3. Y; $Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – le point Y sur la demi-droite AB à la distance $6\,\text{cm}$ du sommet A, au-delà du sommet B – hors du solide.
- 4. Z; $Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – le point Z sur l'arête CD à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet C
- 5. ZK; $ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – les points YZ sont dans le plan de la face $ABCD$; leur droite coupe la face selon le segment ZK
- 6. XL; $XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – les points XY sont dans le plan de la face ABV ; leur droite coupe la face selon le segment XL
- 7. KL – les points K, L sont dans la face BCV, on les relie.
- 8. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – on prolonge le côté KL et l'arête CV ; leur point commun T_1 est dans le plan de la face BCV et de la face CDV
- 9. ZM; $M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – la droite ZT_1 est dans le plan de la face CDV ; elle coupe l'arête DV en M
- 10. XM – les points X, M sont dans la face DAV, on les relie.

- 11. $XLKZM$ – la section est le pentagone $XLKZM$

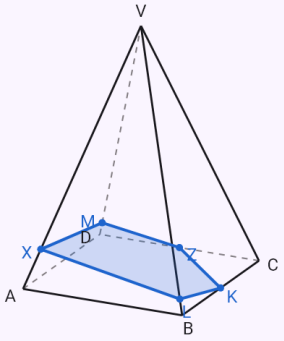
Graphique



Étape 11 sur 11
11. $XLKZM$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l'espace – faites-la tourner du doigt



Un point intérieur sur la diagonale du solide – un plan vertical auxiliaire.

Énoncé: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Résultat

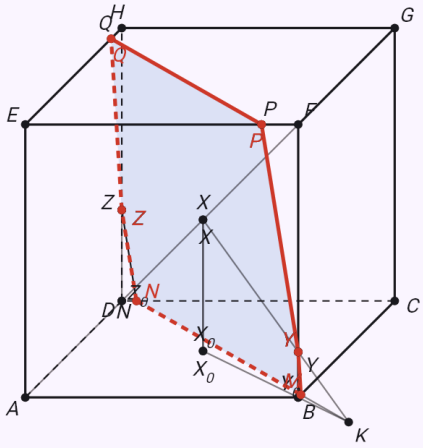
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté selon trois règles : deux points de la section dans une même face sont reliés ; des faces parallèles sont coupées selon des segments parallèles ; la droite d'un côté prolongée coupe la droite d'une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – on dessine le cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – le point X sur le segment AG à la distance $5\,\text{cm}$ du point A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – le point Y sur l'arête BF à la distance $1\,\text{cm}$ du sommet B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – le point Z sur l'arête DH à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – le point X est à l'intérieur du solide, on utilise donc le plan vertical auxiliaire de la droite XY : on projette les points dans la base (X_0Y_0) et les droites XY et X_0Y_0 se coupent en K, où la droite XY perce le plan de la base $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – le point X est à l'intérieur du solide, on utilise donc le plan vertical auxiliaire de la droite XZ : on projette les points dans la base (X_0Z_0) et les droites XZ et X_0Z_0 se coupent en L, où la droite XZ perce le plan de la base $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – les points KL sont dans le plan de la face $ABCD$; leur droite coupe la face selon le segment MN
- 8. ZN – les points Z, N sont dans la face $CDHG$, on les relie.
- 9. YM – les points Y, M sont dans la face $BCGF$, on les relie.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – la face $ABFE$ est parallèle à la face $CDHG$, la section la coupe donc selon la parallèle à NZ passant par Y ; elle coupe l'arête EF en P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – la face $EFGH$ est parallèle à la face $ABCD$, la section la coupe donc selon la parallèle à MN passant par P ; elle coupe l'arête EH en Q
- 12. ZQ – les points Z, Q sont dans la face $ADHE$, on les relie.
- 13. $QPYMNZ$ – la section est l'hexagone $QPYMNZ$

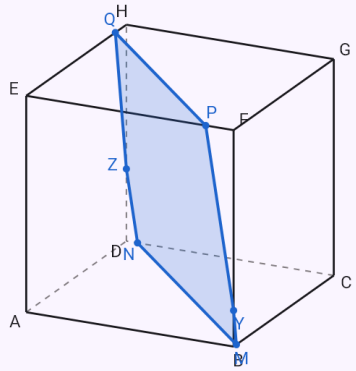
Graphique



Étape 13 sur 13
13. $QPYMNZ$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l'espace – faites-la tourner du doigt



Le point X partage l’arête AB dans le rapport 1 : 2.

Énoncé: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

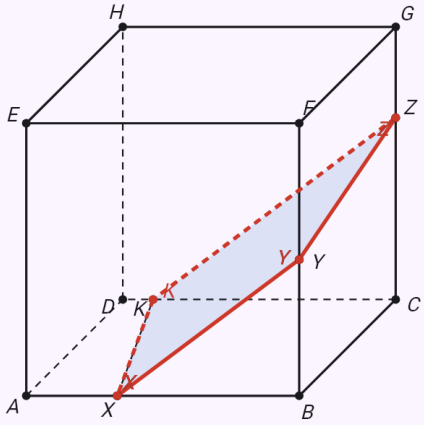
Résultat

$$XYZK$$
$$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$
$$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté selon trois règles : deux points de la section dans une même face sont reliés ; des faces parallèles sont coupées selon des segments parallèles ; la droite d’un côté prolongée coupe la droite d’une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – on dessine le cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – le point X partage le segment AB dans le rapport $1 : 2$; cela donne le point X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – le point Y sur l’arête BF à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – le point Z sur l’arête CG à la distance $4\,\text{cm}$ du sommet C
- 5. XY – les points X, Y sont dans la face $ABFE$, on les relie.
- 6. YZ – les points Y, Z sont dans la face $BCGF$, on les relie.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – la face $CDHG$ est parallèle à la face $ABFE$, la section la coupe donc selon la parallèle à XY passant par Z ; elle coupe l’arête CD en K
- 8. XK – les points X, K sont dans la face $ABCD$, on les relie.
- 9. $XYZK$ – la section est le quadrilatère $XYZK$

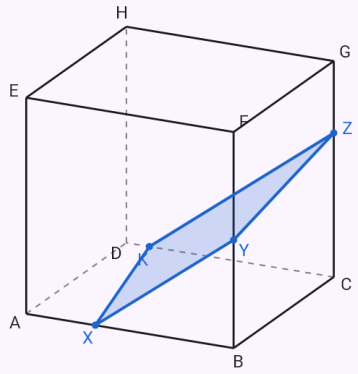
Graphique



Étape 9 sur 9
9. $XYZK$

L’analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l’espace – faites-la tourner du doigt



Section d'un prisme hexagonal régulier – la base d'abord en vraie grandeur.

Énoncé: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

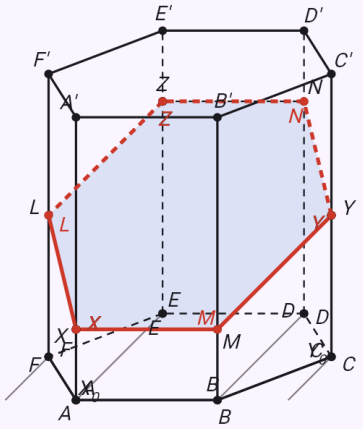
Résultat

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Étapes

- Analyse ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté selon trois règles : deux points de la section dans une même face sont reliés ; des faces parallèles sont coupées selon des segments parallèles ; la droite d'un côté prolongée coupe la droite d'une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – à côté, on dessine la base $ABCDEF$ en vraie grandeur : l'hexagone régulier de côté a, le côté AB sur l'axe x (points A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – des sommets C, D, E, F, on mène les perpendiculaires à la droite AB ; on reporte leurs pieds sur l'axe x sans changement et, à partir d'eux, la moitié de la longueur de la perpendiculaire (la profondeur) à 45° – la base $ABCDEF$ en perspective cavalière.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – on dessine le prisme régulier à base hexagonale $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – le point X sur l'arête AA' à la distance $1\,\text{cm}$ du sommet A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – le point Y sur l'arête CC' à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – le point Z sur l'arête EE' à la distance $3\,\text{cm}$ du sommet E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – les points XY ne sont pas dans la même face, on utilise donc le plan vertical auxiliaire de la droite XY : on projette les points dans la base (X_0Y_0) et les droites XY et X_0Y_0 se coupent en K , où la droite XY perce le plan de la base $ABCDEF$
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – les points ZK sont dans le plan de la face $EFF'E'$; leur droite coupe la face selon le segment ZL
- 9. XL – les points X, L sont dans la face $FAA'F'$, on les relie.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – la face $BCC'B'$ est parallèle à la face $EFF'E'$, la section la coupe donc selon la parallèle à LZ passant par Y ; elle coupe l'arête BB' en M
- 11. XM – les points X, M sont dans la face $ABB'A'$, on les relie.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – la face $CDD'C'$ est parallèle à la face $FAA'F'$, la section la coupe donc selon la parallèle à XL passant par Y ; elle coupe l'arête DD' en N
- 13. ZN – les points Z, N sont dans la face $DEE'D'$, on les relie.
- 14. $XMYNZL$ – la section est l'hexagone $XMYNZL$

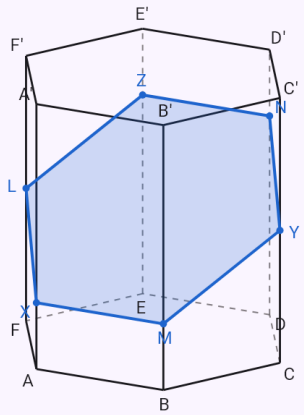
Graphique



Étape 14 sur 14
14. $XMYNZL$

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l'espace – faites-la tourner du doigt



Section du tétraèdre régulier par les milieux de trois arêtes.

Énoncé: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Résultat

XYZ

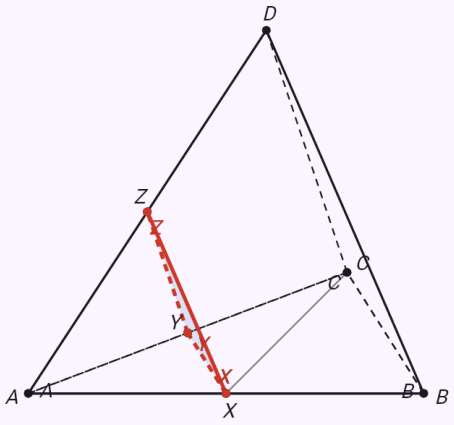
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Étapes

- Analyse ($a = 4\,\text{cm}$) : le plan de coupe est déterminé par les points X, Y, Z. On construit la section côté par côté : deux points de la section dans une même face sont reliés ; un côté parallèle à une arête d'une autre face signifie que le plan coupe cette face selon une parallèle à elle ; la droite d'un côté prolongée coupe la droite d'une arête en un point situé dans les plans des deux faces de cette arête.
- 1. ABC; $a = 4\,\text{cm}$ – à côté, on dessine la base ABC en vraie grandeur : le triangle équilatéral de côté a, le côté AB sur l'axe x (points A_0, B_0, …).
- 2. ABC; $y' = \frac{1}{2}\,y$ – des sommets C, on mène les perpendiculaires à la droite AB ; on reporte leurs pieds sur l'axe x sans changement et, à partir d'eux, la moitié de la longueur de la perpendiculaire (la profondeur) à 45° – la base ABC en perspective cavalière.
- 3. $ABCD$; $a = 4\,\text{cm}$ – on dessine le tétraèdre régulier $ABCD$ en perspective cavalière (profondeur à 45°, réduite de moitié), les arêtes cachées en pointillés.
- 4. X; $X \in AB$, $|AX| = 2\,\text{cm}$ – le point X sur l'arête AB à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet A
- 5. Y; $Y \in AC$, $|AY| = 2\,\text{cm}$ – le point Y sur l'arête AC à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet A
- 6. Z; $Z \in AD$, $|AZ| = 2\,\text{cm}$ – le point Z sur l'arête AD à la distance $2\,\text{cm}$ du sommet A
- 7. XY – les points X, Y sont dans la face ABC, on les relie.
- 8. XZ – les points X, Z sont dans la face ABD, on les relie.
- 9. YZ – les points Y, Z sont dans la face CAD, on les relie.
- 10. XYZ – la section est le triangle XYZ

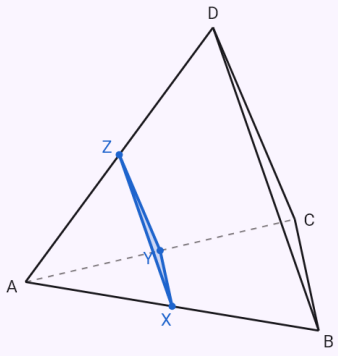
Graphique



Étape 10 sur 10
10. XYZ

L'analyse montre un croquis de la construction achevée avec les éléments donnés. Les flèches permettent ensuite de parcourir la construction étape par étape – les éléments ajoutés à chaque étape sont mis en évidence.

La section dans l'espace – faites-la tourner du doigt



Limitations connues

- Pour l'instant un triangle (côtés, angles, hauteur et médiane relatives au côté donné, les rayons r et ϱ dans les combinaisons ci-dessus), quatre lieux de base, cinq problèmes de cercles et tangentes, des quadrilatères dans les combinaisons de l'aide du formulaire et les sections d'un cube, d'un pavé, de

prismes et pyramides réguliers (base de 3 à 6 côtés) et du tétraèdre régulier ; le quadrilatère quelconque, les hauteurs et médianes relatives à d'autres côtés et d'autres solides suivront.

- Les problèmes avec relations prennent exactement deux relations à l'une des cinq figures données ; les relations entre plusieurs points se donnent comme relations générales.
- Relations générales : au plus 8 points et 10 relations, une construction seulement à partir du catalogue de procédés ; une analyse du type « triangles semblables » n'est pas automatisée.
- Saisie uniquement par le formulaire – pas en toutes lettres ni par photo.

Généré à partir de l'application Mathtrace