Mathtrace – guide d’utilisation

I. Équations, inéquations et expressions

Sommaire

I. Équations, inéquations et expressions

1. Équations et inéquations du premier degré
2. Équations du second degré
3. Équations de degré supérieur
4. Équations rationnelles
5. Équations irrationnelles
6. Équations et inéquations exponentielles et logarithmiques
7. Valeur absolue
8. Équations et inéquations trigonométriques
9. Inéquations et systèmes d’inéquations
10. Systèmes d’équations
11. Équations et inéquations avec paramètre
12. Exprimer une lettre d’une formule
13. Calcul algébrique
14. Divisibilité et nombres premiers
15. Angles en degrés, minutes et secondes
16. Pourcentages, rapports et règle de trois
17. Conversions d’unités
18. Logique et ensembles
19. Nombres complexes

1. Équations et inéquations du premier degré

L'application transforme une équation du premier degré comme en classe – elle développe les parenthèses, regroupe l'inconnue d'un côté et divise. Pour une inéquation, elle veille au changement de sens quand on multiplie par un nombre négatif et écrit le résultat sous forme d'intervalle ; le graphique montre les deux membres comme des droites et marque la solution sur l'axe des x.

Avec la puce « Détaillée » (ou durablement avec l'interrupteur « Démarche détaillée des équations » sur l'écran d'accueil), la démarche suit la façon dont les équations s'apprennent à l'école : la même opération des deux côtés (/ −4x, / :2), en dessous la ligne intermédiaire et le résultat. L'inconnue passe du côté où son coefficient devient positif.

Exemples

Une équation avec parenthèses.

Énoncé: `3(x - 2) = 2x + 5`

Résultat

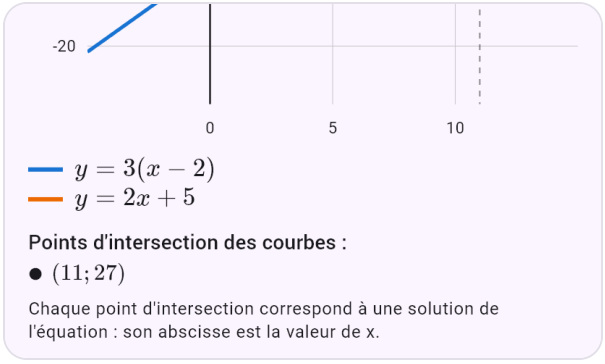
$x = 11$

Étapes

- On passe tout du même côté : $x - 11 = 0$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $x = 11$

Graphique





Points d'intersection des courbes :

- $(11; 27)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Une inéquation – diviser par un nombre négatif change le sens.

Énoncé: `2x - 3 < 5x + 6`

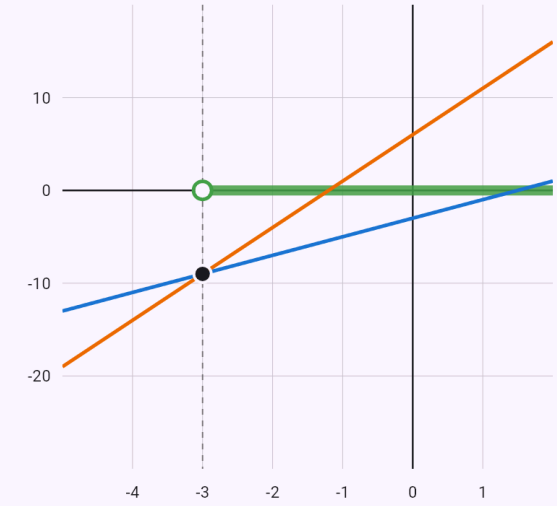
Résultat

$$x \in]-3\,;\,\infty[$$

Étapes

- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-3x < 9$
- On divise par le nombre négatif -3, le sens de l'inégalité change : $x > -3$

Graphique



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $(-3; -9)$

Démarche détaillée – la même opération des deux côtés, écrite comme à l'école.

Énoncé: `4x + 3 = 6x + 7` Détaillée

Résultat

$$x = -2$$

Étapes

- Soustrayons $4x$ des deux côtés

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

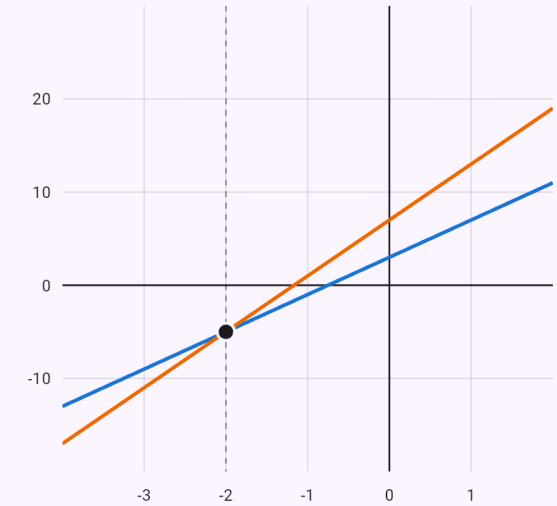
- Soustrayons 7 des deux côtés

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Divisons les deux côtés par 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Graphique



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Points d'intersection des courbes :

- $(-2; -5)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Fractions – les deux côtés multipliés par le dénominateur commun.

Énoncé: `x/2 + x/3 = 10` Détaillée

Résultat

$$x = 12$$

Étapes

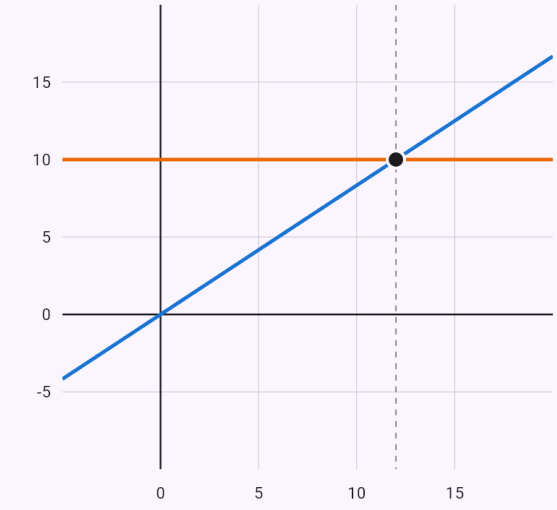
- Multiplions les deux côtés par 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Divisons les deux côtés par 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Graphique



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Points d'intersection des courbes :

- $(12; 10)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

2. Équations du second degré

L'application met une équation du second degré sous la forme ax² + bx + c = 0 et la résout avec le discriminant et la formule ; elle reconnaît aussi une racine double. Si l'équation n'a pas de solution réelle, elle le dit, et le bouton « Afficher la solution complexe » montre les racines complexes.

Exemples

Deux racines réelles.

Énoncé: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Résultat

$x_1 = 3$
$x_2 = 2$

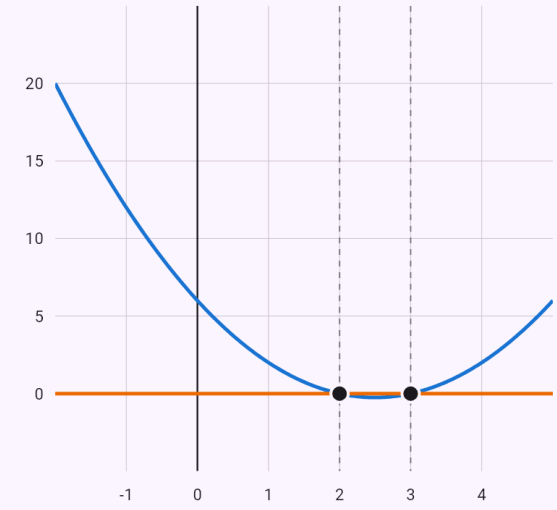
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- On applique la formule des racines :
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Graphique



$y = x^2 - 5x + 6$
$y = 0$

Points d'intersection des courbes :
● $(2; 0)$ ● $(3; 0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Discriminant négatif – racines complexes.

Énoncé: `x^2 + 2x + 5 = 0` Afficher la solution complexe

Résultat

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

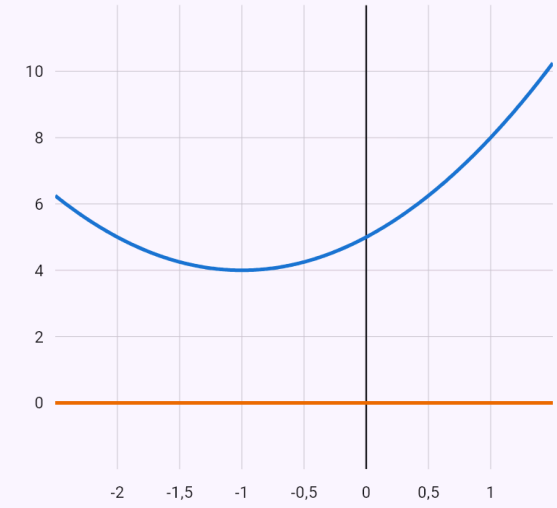
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) Σ Dichotomie Σ Sécante Σ Regula falsi Σ Point fixe

Étapes

- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Le discriminant est négatif – dans les nombres complexes : $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- On applique la formule des racines :
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Graphique



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Les courbes ne se coupent pas : l'équation n'a pas de solution réelle.

3. Équations de degré supérieur

L'application ramène une équation bicarrée à une équation du second degré par changement de variable. Une équation générale de degré supérieur est factorisée avec le schéma de Horner : les racines sont cherchées parmi les diviseurs du terme constant, et chaque racine trouvée est mise en facteur jusqu'à ce qu'il reste une équation du second degré.

Exemples

Une équation bicarrée avec le changement y = x².

Énoncé: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Résultat

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

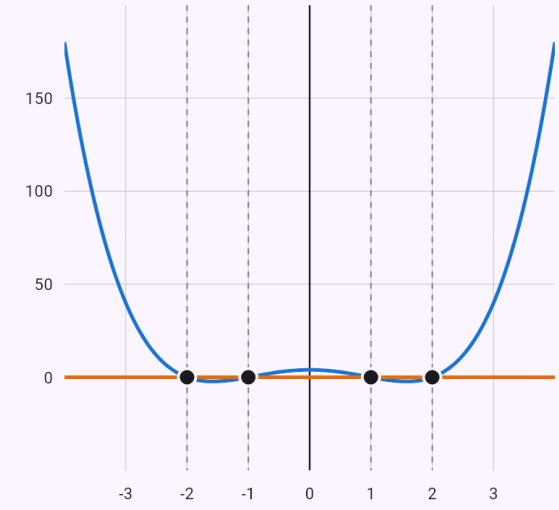
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Le changement de variable $u = x^2$ donne une équation du second degré : $u^2 - 5u + 4 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- On applique la formule des racines : $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- On revient à l'inconnue de départ : $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- On revient à l'inconnue de départ : $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graphique



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Points d'intersection des courbes :

● $(-2;0)$ ● $(-1;0)$ ● $(1;0)$ ● $(2;0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Le schéma de Horner – racines parmi les diviseurs du terme constant.

Énoncé: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Résultat

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

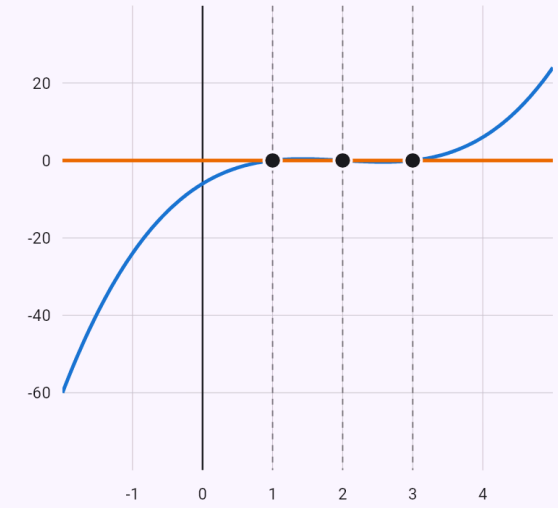
- Les racines rationnelles ne peuvent être que des diviseurs du terme constant -6 : $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 1$ et divise le polynôme :

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- On calcule le discriminant :
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graphique



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Points d'intersection des courbes :

● $(1;0)$ ● $(2;0)$ ● $(3;0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

4. Équations rationnelles

Pour une équation avec l'inconnue au dénominateur, l'application pose d'abord les conditions d'existence, puis multiplie par le dénominateur commun et résout. Elle compare les racines aux conditions et écarte celles qui ne les vérifient pas.

Exemples

Conditions, dénominateur commun, équation du second degré.

Énoncé: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Résultat

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Conditions : $x \neq 1$

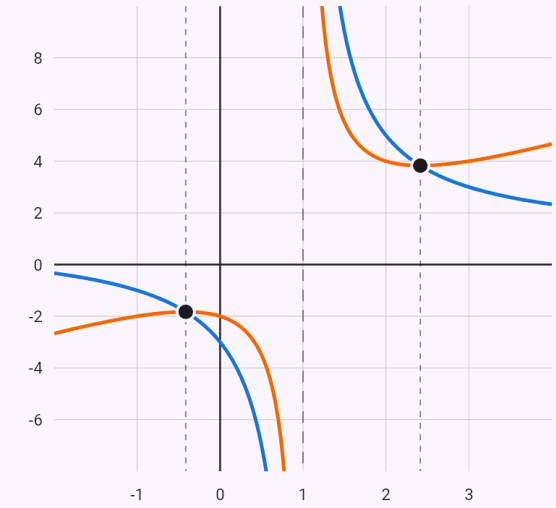
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 1$
- On multiplie les deux membres par le dénominateur $x - 1$: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 2x - 1 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- On applique la formule des racines : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- La racine $x = 1 - \sqrt{2}$ vérifie les conditions.
- La racine $x = 1 + \sqrt{2}$ vérifie les conditions.

Graphique



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

5. Équations irrationnelles

Une équation avec l'inconnue sous une racine est résolue en isolant la racine et en élevant au carré. Élever au carré peut ajouter des racines qui ne vérifient pas l'équation – une vérification suit donc toujours et les racines qui échouent sont écartées.

Exemples

Élévation au carré et vérification – l'une des racines ne vérifie pas l'équation.

Énoncé: `sqrt(x+5) = x - 1`

Résultat

$x = 4$

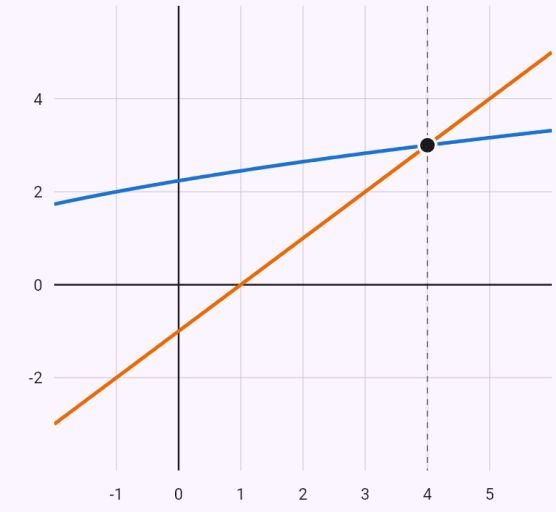
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On élève les deux membres au carré (ce n'est pas une équivalence, on vérifie donc les racines) : $x + 5 = (x - 1)^2$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 3x - 4 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- On applique la formule des racines : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Vérification pour $x = -1$: membre gauche = 2, membre droit = -2, ils sont différents – la racine ne convient pas.
- Vérification pour $x = 4$: membre gauche = 3, membre droit = 3, ils sont égaux – la racine convient.

Graphique



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Points d'intersection des courbes :

- $(4; 3)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Limitations connues

- Les inéquations irrationnelles ne sont pas encore résolues.

6. Équations et inéquations exponentielles et logarithmiques

L'application résout une équation exponentielle en se ramenant à la même base, en passant au logarithme ou par changement de variable ; une équation logarithmique en regroupant les logarithmes selon leurs propriétés puis en passant à l'exponentielle, toujours avec les conditions. Les inéquations sont résolues par la monotonie – pour une base inférieure à 1, le sens change. Le logarithme d'un quotient dont le numérateur ou le dénominateur ne peut pas être négatif (une racine) est écrit comme une différence de logarithmes, comme à l'école.

Équations à bases différentes : $a^x + b^x = c^x$ avec des bases issues de deux nombres premiers ($25^x + 10^x = 4^x$) sont divisées par une puissance puis rendues quadratiques par $t = (5/2)^x$; les logarithmes de bases différentes sont ramenés à une seule ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Les logarithmes dont les bases sont des puissances d'un même nombre ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) sont ramenés à une seule base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), l'équation est multipliée et les logarithmes regroupés. Un logarithme avec l'inconnue dans la base ($\log_x 8 = 3$) est éliminé par la définition ($x^3 = 8$) avec les conditions $x > 0$, $x \neq 1$. Une équation avec l'inconnue dans la base et dans l'exposant (x^(log x) = 100) est résolue en prenant le logarithme et par la substitution t = log x. Les inéquations avec la substitution t = log(x + 1) et les systèmes d'inéquations logarithmiques et exponentielles sont résolus comme des inéquations isolées – par la monotonie.

Les équations et inéquations avec des fonctions hyperboliques sont réécrites par la définition ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) en équations exponentielles et résolues par la substitution $t = e^x$; arsinh x = c par la fonction réciproque ($x = \sinh c$).

Exemples

Le changement de variable t = 2ˣ.

Énoncé: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Résultat

$$x = 2$$

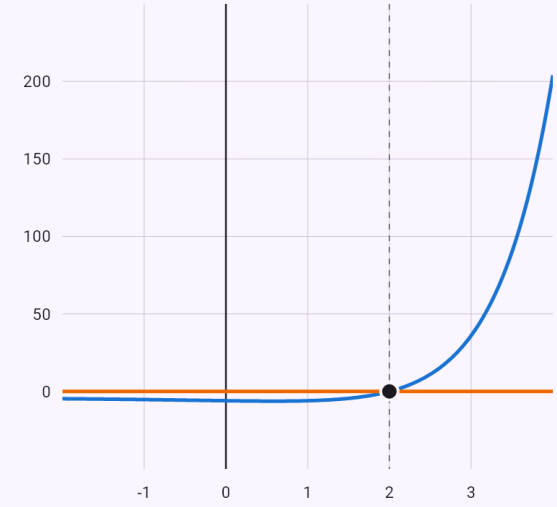
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On pose $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- On applique la formule des racines :
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- L'équation $2^x = -1$ n'a pas de solution réelle.
- On revient à l'inconnue de départ : $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graphique



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Points d'intersection des courbes :

- $(2; 0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Regrouper les logarithmes, conditions.

Énoncé: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Résultat

$$x = 3$$

Conditions : $x > 1$

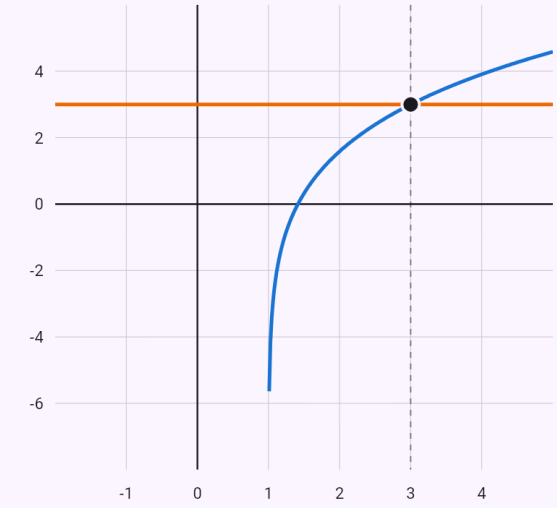
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Domaine de définition – conditions : $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- On regroupe les logarithmes grâce à leurs propriétés : $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- On supprime le logarithme : $(x-1)(x+1) = 2^3$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 9 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- On applique la formule des racines : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 6}{2}$
- La racine $x = -3$ ne vérifie pas la condition $x > 1$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Graphique



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Points d'intersection des courbes :

- $(3; 3)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Bases différentes : on divise par 4^d, puis $t = (5/2)^d$.

Énoncé: `25^d + 10^d = 4^d`

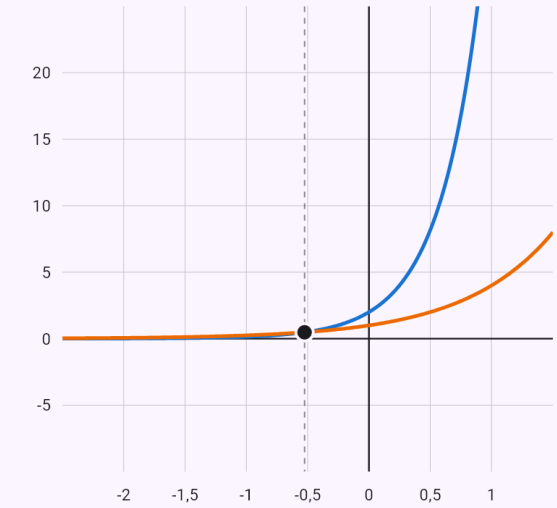
Résultat

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Étapes

- On divise l'équation par l'expression positive 4^d :
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- On pose $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- On applique la formule des racines :
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- L'équation $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution réelle.
- On revient à l'inconnue de départ
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Graphique



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de d.

Base inférieure à 1 – le sens de l'inégalité change.

Énoncé: `(1/2)^x > 8`

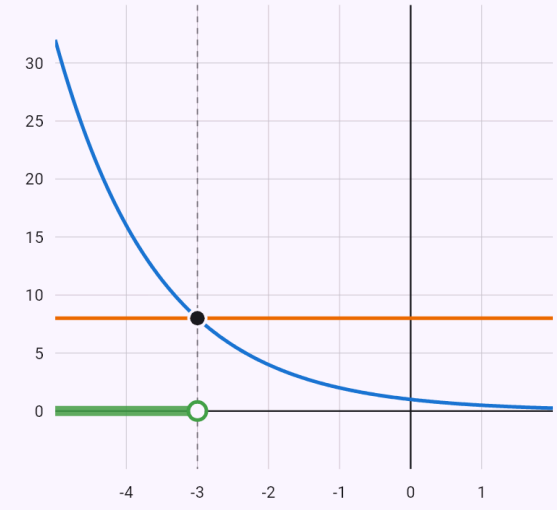
Résultat

$$x \in]-\infty\,;\,-3[$$

Étapes

- On écrit les deux membres comme des puissances de même base : $2^{-x} > 2^3$
- La fonction exponentielle de base 2 est croissante : les exposants vérifient l'inégalité de même sens : $-x > 3$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-x > 3$
- On divise par le nombre négatif -1, le sens de l'inégalité change : $x < -3$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-\infty\,;\,-3[$

Graphique



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $(-3; 8)$

Tangente hyperbolique par la définition – substitution t = e²ˣ.

Énoncé: `tanh x = 1/2`

Résultat

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On remplace par les définitions

$$\tanh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- On pose $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- On résout : $t = 3$
- On revient à l'inconnue de départ : $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

L’inconnue dans la base – par la définition ; la racine −1 ne vérifie pas les conditions.

Énoncé: `log_x (2x+3) = 2`

Résultat

$$x = 3$$

Conditions : $x > 0,\ x \neq 1$

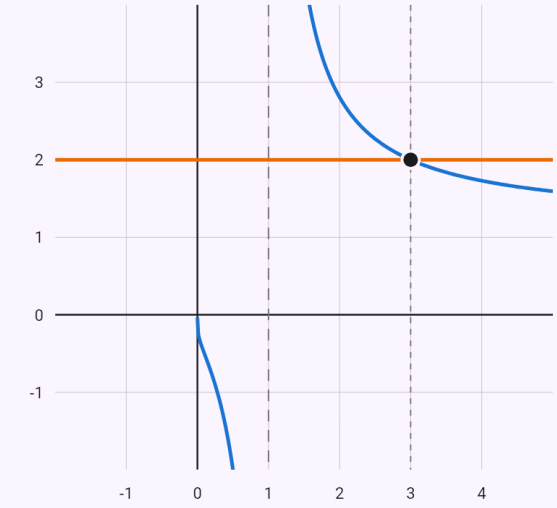
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Domaine de définition – conditions : $x > 0,\ x \neq 1$
- On supprime le logarithme : $x^2 = 2x + 3$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 2x - 3 = 0$
- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- On applique la formule des racines :
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- La racine $x = -1$ ne vérifie pas la condition $x > 0,\ x \neq 1$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Graphique



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Points d'intersection des courbes :

- $(3; 2)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

L’inconnue dans la base et l’exposant – on prend le logarithme, substitution t = log x.

Énoncé: `x^(log x) = 100`

Résultat

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Conditions : $x > 0$

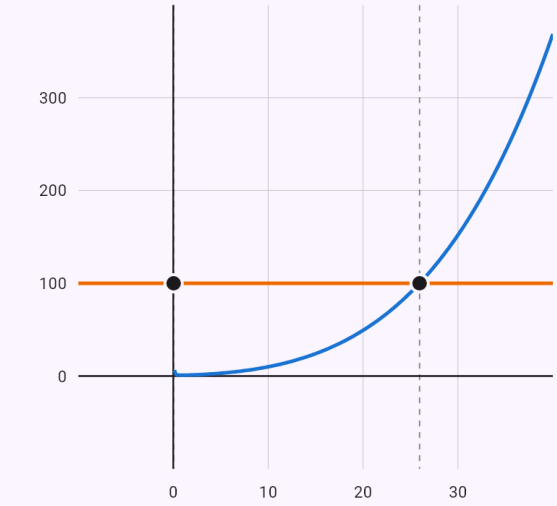
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On prend le logarithme des deux membres : $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Domaine de définition – conditions : $x > 0$
- On pose $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- On applique la formule des racines : $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- On revient à l'inconnue de départ : $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- On revient à l'inconnue de départ : $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- La racine $x = 10^{-\sqrt{2}}$ vérifie les conditions.
- La racine $x = 10^{\sqrt{2}}$ vérifie les conditions.

Graphique



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Logarithme d'un quotient avec une racine – en différence de logarithmes.

Énoncé: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Résultat

$$x \in \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\infty\right[$$

Conditions : $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

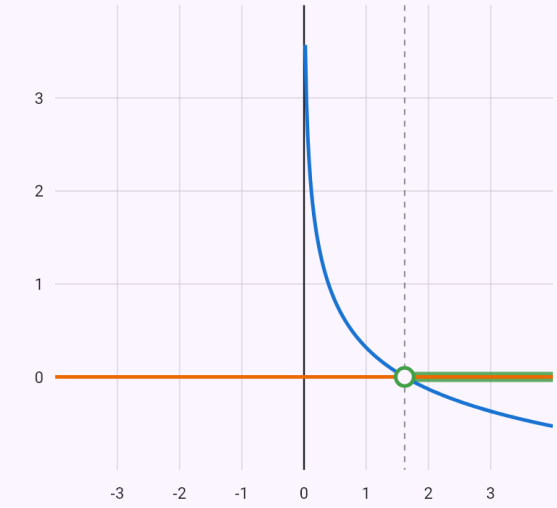
Étapes

- Une partie du quotient ne peut pas être négative, donc le quotient est positif exactement quand les deux le sont : écrivons le logarithme du quotient comme une différence de logarithmes et passons le terme soustrait de l'autre côté : $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Domaine de définition – conditions : $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Le logarithme de base 3 est croissant : on le supprime et le sens de l'inégalité est conservé : $\sqrt{x+1} < x$
- On passe tout du même côté : $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Domaine de définition – conditions : $x \geq -1$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}[$	$]\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\infty[$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- La solution de cette inéquation est $x \in \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\infty\right[$

Graphique



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,0\right)$

Limitations connues

- Les logarithmes de bases différentes qui ne sont pas des puissances d'un même nombre ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$) ne sont résolus que numériquement.
- Les équations hyperboliques qui mènent à une équation de degré 4 en e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$) ne sont résolues que numériquement ; les inéquations avec des fonctions hyperboliques réciproques ne sont pas encore prises en charge.

7. Valeur absolue

L'application résout les équations et inéquations avec valeurs absolues de deux façons, à choisir avec une puce : « Par définition » – un raccourci qui développe |a| = b ou |a| < b – et « Méthode des zéros » – en découpant la droite numérique en intervalles sur lesquels chaque valeur absolue a un signe fixe. Sans choix, elle prend elle-même la méthode la plus adaptée.

Les valeurs absolues imbriquées (||x| − 2| = 1) se résolvent de la même façon : par définition pas à pas de l'extérieur vers l'intérieur, par la méthode des zéros de l'intérieur vers l'extérieur – d'abord les zéros des valeurs absolues intérieures, puis sur chaque intervalle la valeur absolue restante.

Une inéquation |f| < |g| (une seule valeur absolue de chaque côté) peut aussi être résolue avec la puce « Par élévation au carré » : les deux côtés sont positifs ou nuls, on l'élève donc au carré et on la résout comme une inéquation du second degré. Une expression avec des valeurs absolues seule (|x − 1| + |x + 2|) est simplifiée par morceaux – zéros, tableau de signes et, sur chaque intervalle, l'expression sans valeurs absolues. Un intervalle peut suivre après une virgule (|x| − 2, x < 0) : l'expression n'est alors simplifiée que sur celui-ci.

Exemples

Une valeur absolue – développée par définition.

Énoncé: `|2x - 1| = 5`

Résultat

$x_1 = -2$
$x_2 = 3$

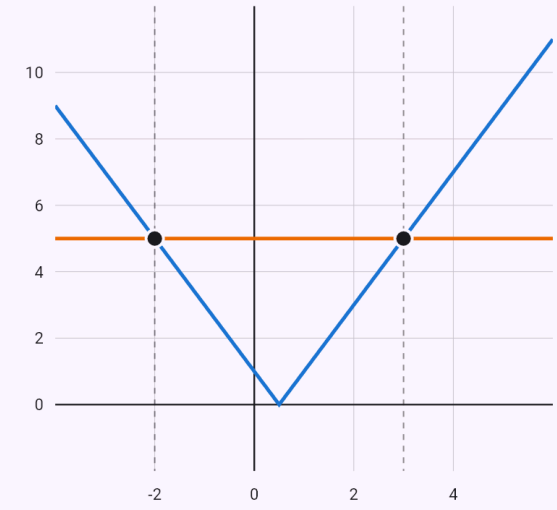
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Il n'y a qu'une seule valeur absolue et un nombre de l'autre côté : il suffit d'appliquer la définition.
- Par définition, $|2x - 1| = 5$ équivaut à $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5$
- On résout : $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- On résout : $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graphique



$y = |2x - 1|$
$y = 5$

Points d'intersection des courbes :

● $(-2; 5)$ ● $(3; 5)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Deux valeurs absolues – la méthode des zéros.

Énoncé: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Résultat

$$x \in]-3\,;\,2[$$

Étapes

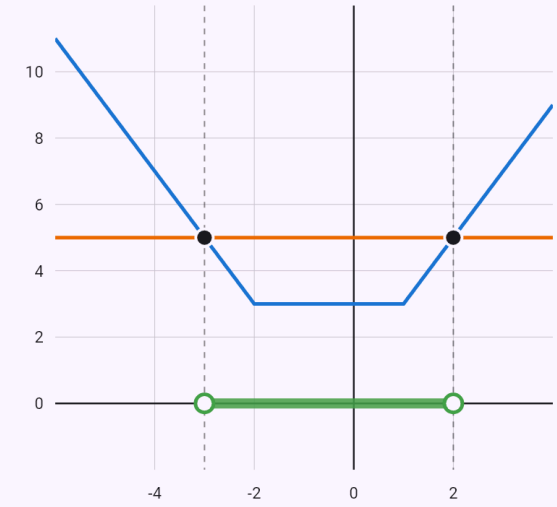
- On supprime les valeurs absolues par la méthode des zéros : ils découpent la droite numérique en intervalles, sur chacun les expressions à l'intérieur gardent leur signe.
- Zéros des expressions dans les valeurs absolues : $x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1, \quad x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;-2[$	$[-2\,;1[$	$[1\,;\infty[$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

- Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1-x)+(-x-2)<5$
- On résout : $-2x-1<5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-2x<6$
- On divise par le nombre négatif -2, le sens de l'inégalité change : $x>-3$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-3\,;\,\infty[$
- Intersection avec l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[: x \in]-3\,;\,-2[$
- Sur l'intervalle $[-2\,;\,1[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1-x)+(x+2)<5$
- L'inconnue a disparu et il reste l'affirmation vraie $3<5$: tout l'intervalle $[-2\,;\,1[$ est solution.
- Sur l'intervalle $[1\,;\,\infty[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(x-1)+(x+2)<5$
- On résout : $2x+1<5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $2x<4$
- On divise par le nombre positif 2, le sens de l'inégalité ne change pas : $x<2$

- La solution de cette inéquation est $x \in]-\infty\,;\,2[$
- Intersection avec l'intervalle $[1\,;\,\infty[: x \in [1\,;\,2[$
- La solution est la réunion des résultats : $x \in]-3\,;\,2[$

Graphique



$y=|x-1|+|x+2|$
$y=5$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

● $(-3;5)$ ● $(2;5)$

Valeur absolue imbriquée – par définition, de l'extérieur vers l'intérieur.

Énoncé: `||x| - 2| = 1`

Résultat

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

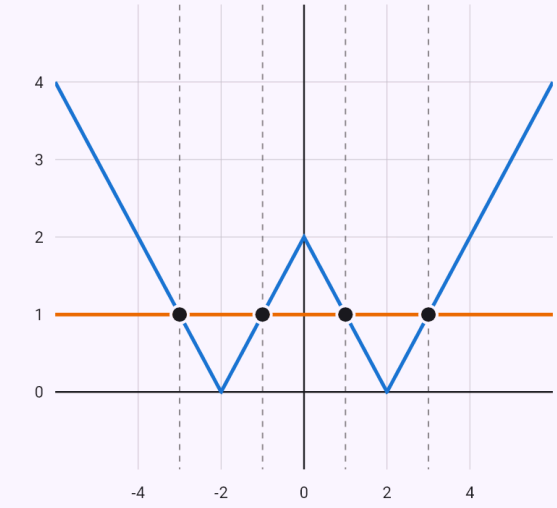
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- Il n'y a qu'une seule valeur absolue et un nombre de l'autre côté : il suffit d'appliquer la définition.
- Par définition, $||x| - 2| = 1$ équivaut à $|x| - 2 = 1$ ou $|x| - 2 = -1$
- On isole la valeur absolue : $|x| = 3$
- Par définition, $|x| = 3$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$
- On isole la valeur absolue : $|x| = 1$
- Par définition, $|x| = 1$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$

Graphique



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Points d'intersection des courbes :

● $(-3; 1)$ ● $(-1; 1)$ ● $(1; 1)$ ● $(3; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Valeurs absolues des deux côtés – élévation au carré.

Énoncé: `|x - 1| < |2x + 3|` Par élévation au carré

Résultat

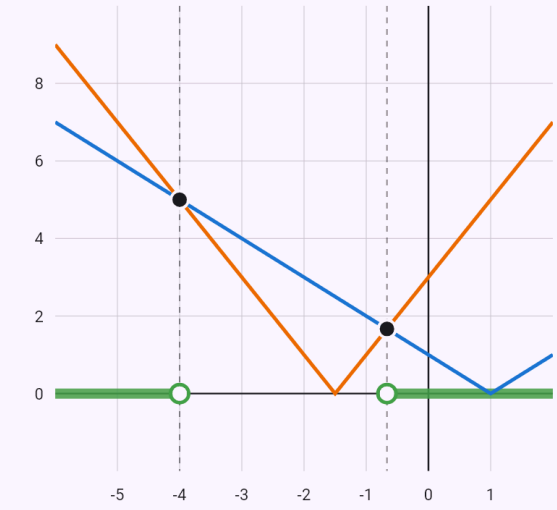
$$x \in \left]-\infty\,;\,-4\right[\cup \left]-\frac{2}{3}\,;\,\infty\right[$$

Étapes

- Des deux côtés il n'y a qu'une valeur absolue : les deux côtés sont positifs ou nuls, on peut donc élever l'inéquation au carré (transformation équivalente).
- On élève les deux côtés au carré : $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- On passe tout du même côté : $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- On factorise : $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;\,-4[$	$]-4\,;\,-\frac{2}{3}[$	$]-\frac{2}{3}\,;\,\infty[$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Graphique



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $(-4;5)$
- $\left(-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

Expression avec valeurs absolues – par morceaux sur les intervalles.

Énoncé: `|x - 1| + |x + 2|`

Résultat

$$\begin{cases} -2x-1, & x \in \left]-\infty\,;\,-2\right[\\ 3, & x \in \left[-2\,;\,1\right[\\ 2x+1, & x \in \left[1\,;\,\infty\right[\end{cases}$$

Étapes

- On supprime les valeurs absolues par la méthode des zéros : ils découpent la droite numérique en intervalles, sur chacun les expressions à l'intérieur gardent leur signe.
- Zéros des expressions dans les valeurs absolues : $x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1, \quad x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$
- Signes sur chaque intervalle :

	$\left]-\infty\,;\,-2\right[$	$\left[-2\,;\,1\right[$	$\left[1\,;\,\infty\right[$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-2\right[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1-x)+(-x-2)=-2x-1$
- Sur l'intervalle $\left[-2\,;\,1\right[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1-x)+(x+2)=3$
- Sur l'intervalle $\left[1\,;\,\infty\right[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(x-1)+(x+2)=2x+1$

Expression avec valeurs absolues sur un intervalle donné – par morceaux seulement là.

Énoncé: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Résultat

$$\begin{cases} 3, & x \in \left]-1\,;\,1\right[\\ 2x+1, & x \in \left[1\,;\,\infty\right[\end{cases}$$

Étapes

- Simplifions l'expression uniquement pour les valeurs de l'intervalle $\left]-1\,;\,\infty\right[$: les valeurs absolues s'enlèvent selon le signe des expressions qu'elles contiennent.
- Zéros des expressions dans les valeurs absolues : $x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1, \quad x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$
- Signes sur chaque intervalle :

	$\left]-1\,;\,1\right[$	$\left[1\,;\,\infty\right[$
$x-1$	$-$	$+$
$x+2$	$+$	$+$

- Sur l'intervalle $\left]-1\,;\,1\right[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1-x)+(x+2)=3$
- Sur l'intervalle $\left[1\,;\,\infty\right[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(x-1)+(x+2)=2x+1$

Limitations connues

- L’élévation au carré n’est proposée que pour une inéquation avec une seule valeur absolue de chaque côté.

8. Équations et inéquations trigonométriques

L'application ramène l'équation à des équations de base comme sin x = a et les résout sur le cercle trigonométrique : elle trouve les angles d'un tour et leur ajoute des multiples de la période ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Le cercle est dessiné directement dans la résolution.

Elle privilégie les formules connues – angle double et moitié, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, somme en produit –, puis la factorisation, le changement $t = \sin x$, la division d'une équation homogène par $\cos^n x$ et l'angle auxiliaire pour $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Le résultat est aussi vérifié numériquement sur toute une période.

Une inconnue écrite avec une lettre latine (x, t) est en radians, avec une lettre grecque (alpha, β, …) en degrés – tout comme une saisie avec le signe ° (sin(x + 30°)). Pour obtenir les racines dans un intervalle, ajoutez-le après une virgule ou sur la ligne suivante.

Une inéquation est résolue par un arc du cercle trigonométrique, une plus complexe par les zéros sur une période ; le résultat est formé d'intervalles avec la période.

Exemples

Deux familles de solutions, les angles sur le cercle trigonométrique.

Énoncé: `sin x = 1/2`

Résultat

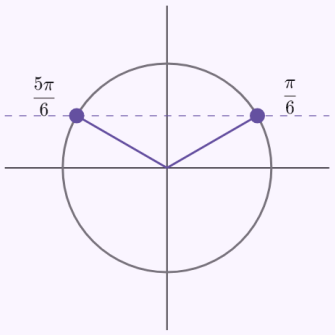
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

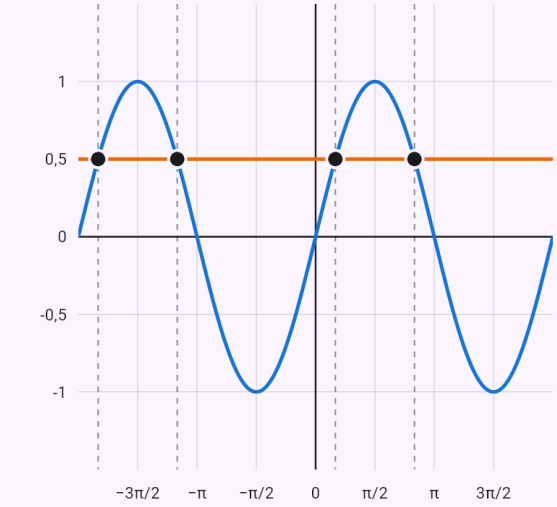
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graphique



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Le changement t = sin x et une équation du second degré.

Énoncé: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

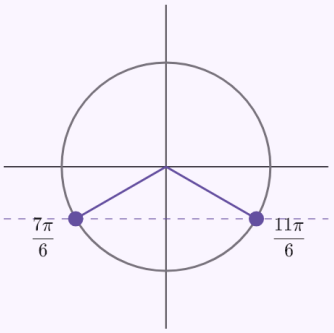
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pas de solution exacte – d'où vient le « ≈ », une méthode numérique le montre :

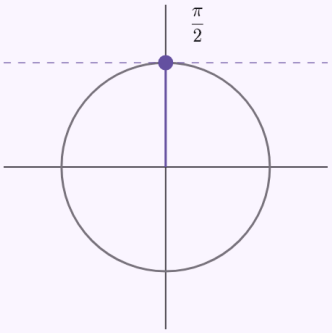
Σ Newton (tangentes) Σ Dichotomie Σ Sécante Σ Regula falsi Σ Point fixe

Étapes

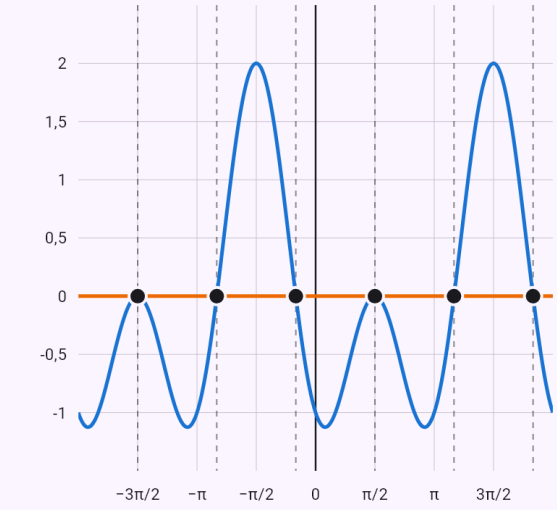
- On pose $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- On applique la formule des racines : $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Équation de base $\sin x = -\frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Équation de base $\sin x = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graphique



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

La formule de sin 2x et la factorisation.

Énoncé: `sin 2x = cos x`

Résultat

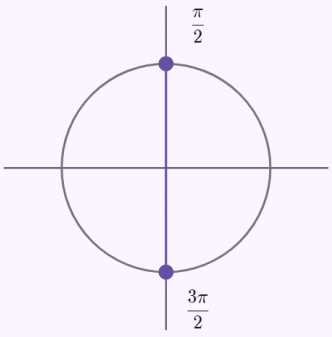
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pas de solution exacte – d'où vient le « ≈ », une méthode numérique le montre :

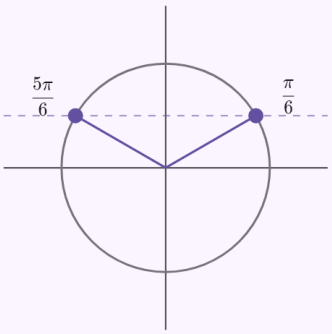
Σ Newton (tangentes) · Σ Dichotomie · Σ Sécante · Σ Regula falsi · Σ Point fixe

Étapes

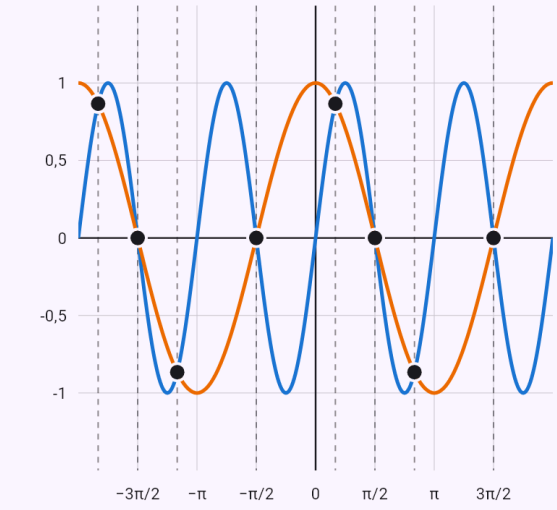
- On passe tout du même côté : $\sin(2x) - \cos x = 0$
- On applique la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- On factorise : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- On résout l'équation $\cos x = 0$
- Équation de base $\cos x = 0$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- On résout l'équation $2\sin x - 1 = 0$
- On isole la fonction trigonométrique : $\sin x = \frac{1}{2}$
- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graphique



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

L'angle auxiliaire : sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

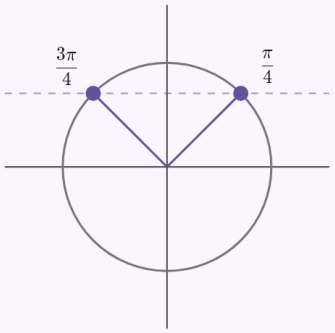
Énoncé: `sin x + cos x = 1`

Résultat

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

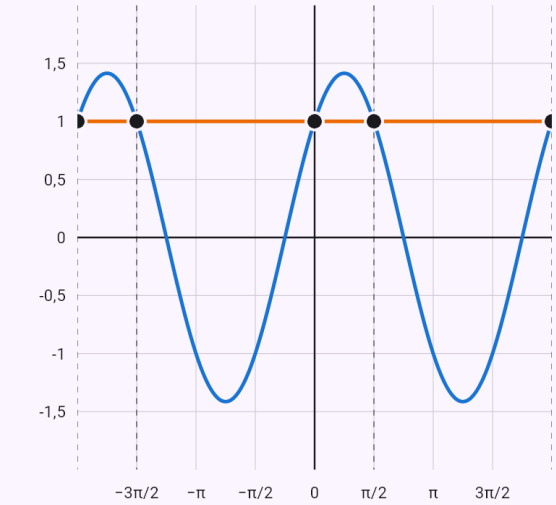
- On passe tout du même côté : $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- On introduit un angle auxiliaire φ :
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, où
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- On isole la fonction trigonométrique :
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Équation de base $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- On exprime l'inconnue

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = 2k\pi \ \vee\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graphique



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Points d'intersection des courbes :

- $(-2\pi; 1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$
- $(0; 1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Une lettre grecque – le résultat en degrés.

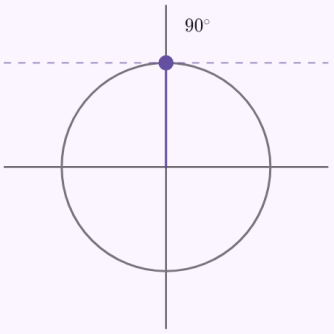
Énoncé: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Résultat

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

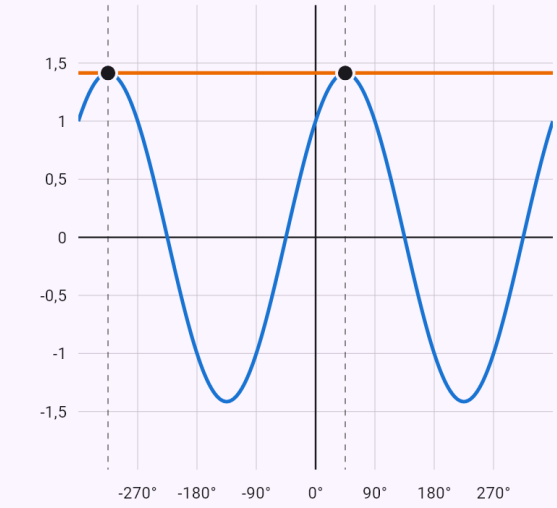
Étapes

- On passe tout du même côté : $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- On introduit un angle auxiliaire φ :
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, où
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- On isole la fonction trigonométrique : $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Équation de base $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont 90° ; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- On exprime l'inconnue
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Graphique



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Points d'intersection des courbes :

- $(-315^\circ; \sqrt{2})$
- $(45^\circ; \sqrt{2})$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Seulement les racines dans l'intervalle donné.

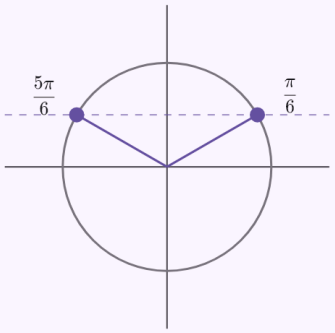
Énoncé: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

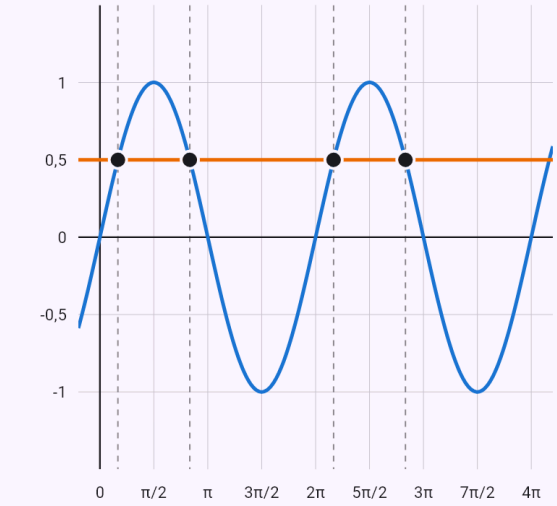
Étapes

- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :
  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Les solutions dans l'intervalle $x \in [0\,;\,4\pi[$
  $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Graphique



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Un arc du cercle trigonométrique, un intervalle autour de zéro.

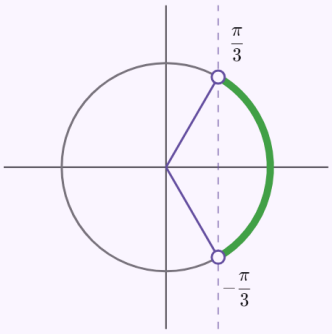
Énoncé: `cos x > 1/2`

Résultat

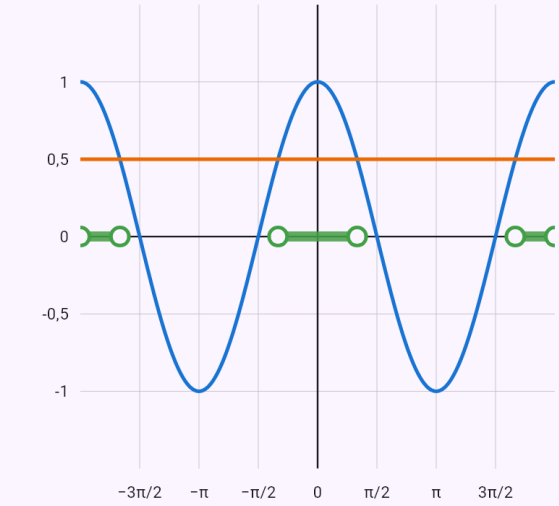
$$x \in \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- Inéquation de base $\cos x > \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, elle est vérifiée sur l'arc mis en évidence ; avec la période : $x \in \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$



Graphique



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Les zéros sur une période et le signe entre eux.

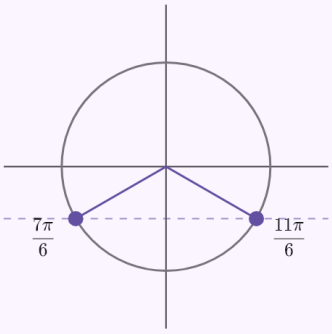
Énoncé: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

Résultat

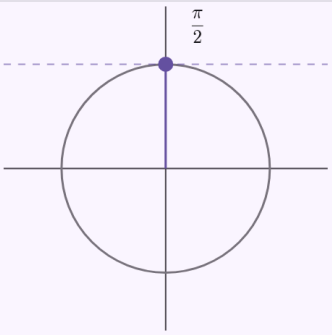
$$x \in \left]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- On résout d'abord l'équation $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- On pose $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- On applique la formule des racines : $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Équation de base $\sin x = -\frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

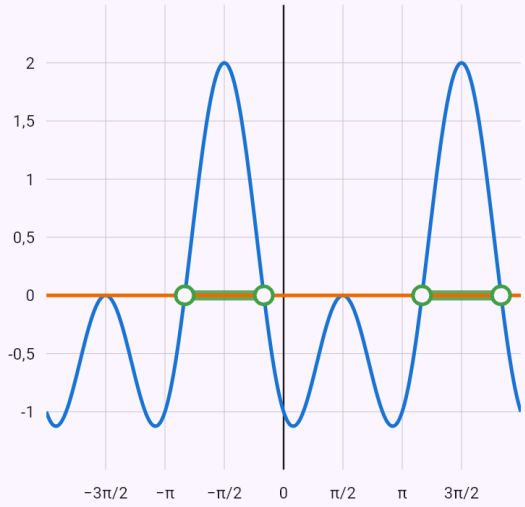


- Équation de base $\sin x = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- La fonction a pour période 2π. Ses zéros (et les points où elle n'est pas définie) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ découpent une période en intervalles ; selon le signe, l'inéquation est vérifiée pour : $x \in \left]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[$

Graphique



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Limitations connues

- Les équations où l'inconnue apparaît aussi hors de la fonction trigonométrique (x = cos x) ne se résolvent que numériquement – par la méthode de Newton avec le tableau des itérations (voir Méthodes numériques), sans la période.
- Les doubles inéquations trigonométriques (−1/2 < sin x < 1/2) et les fonctions trigonométriques dans une valeur absolue ne sont pas encore prises en charge.

9. Inéquations et systèmes d'inéquations

L'application résout les inéquations du second degré et rationnelles avec les valeurs qui annulent et un tableau de signes. Une double inéquation et un système d'inéquations sont résolus comme l'intersection des solutions de chaque inéquation, montrée sur la droite numérique. Un système d'inéquations à deux inconnues est résolu comme une région du plan, coloriée sur le graphique.

Dans un système d'inéquations à deux inconnues, l'application indique aussi les sommets de la région – les intersections des frontières avec leurs coordonnées exactes. Un système d'une équation et d'inéquations à une inconnue est résolu en résolvant l'équation puis en remplaçant ses racines dans les inéquations ; à deux inconnues, la solution est la partie de la courbe de l'équation située dans la région des inéquations – surlignée dans le graphique, ses extrémités calculées exactement. Un système peut aussi s'écrire sur une ligne, séparé par des points-virgules ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Un système de deux équations ou plus avec des inéquations est résolu comme un système d'équations, puis ses solutions sont remplacées dans les inéquations ; avec deux inconnues, le graphique montre les courbes dans la région des inéquations et les intersections qui ne conviennent pas par des cercles vides.

Exemples

Une inéquation du second degré – valeurs qui annulent et signes.

Énoncé: `x^2 - x - 6 > 0`

Résultat

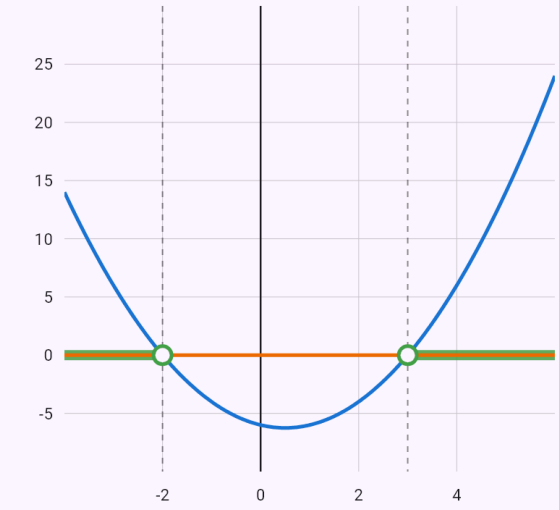
$$x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]3\,;\,\infty[$$

Étapes

- On factorise : $(x-3)(x+2) > 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;\,-2[$	$]-2\,;\,3[$	$]3\,;\,\infty[$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Graphique



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :
● $(-2;0)$ ● $(3;0)$

Une inéquation rationnelle – le dénominateur ne doit pas s'annuler.

Énoncé: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Résultat

$$x \in [-1\,;\,3[$$

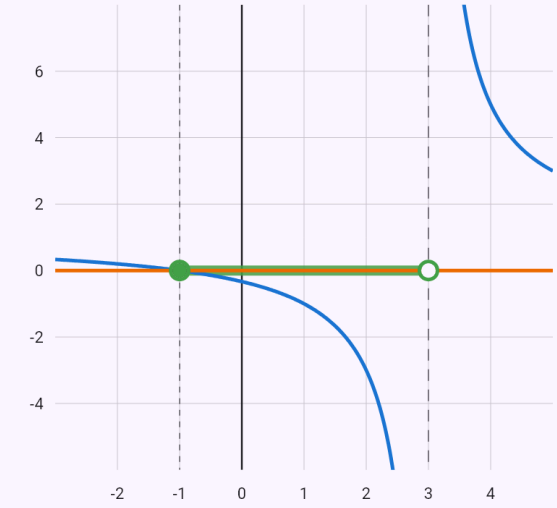
Conditions : $x \neq 3$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 3$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,3[$	$]3\,;\,\infty[$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Graphique



$y = \dfrac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $(-1; 0)$

Une double inéquation.

Énoncé: `-1 <= 2x + 1 < 5`

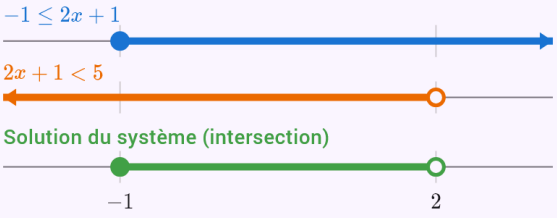
Résultat

$$x \in [-1\,;\,2[$$

Étapes

- Inéquation 1 : $-1 \leq 2x + 1$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-2x \leq 2$
- On divise par le nombre négatif -2, le sens de l'inégalité change : $x \geq -1$
- La solution de cette inéquation est $x \in [-1\,;\,\infty[$
- Inéquation 2 : $2x + 1 < 5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $2x < 4$
- On divise par le nombre positif 2, le sens de l'inégalité ne change pas : $x < 2$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-\infty\,;\,2[$
- La solution du système est l'intersection des solutions des inéquations : $x \in [-1\,;\,2[$

Graphique



Chaque inéquation a sa propre ligne sur la droite numérique, leur intersection est en vert. Un point plein appartient à la solution, un point vide non.

Système d’inéquations à deux inconnues – une région du plan et ses sommets.

Énoncé: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

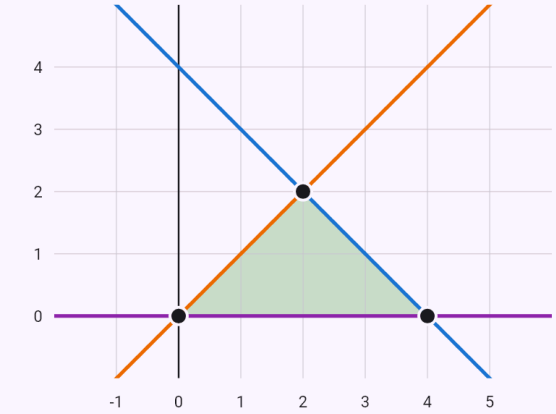
Résultat

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in [0\,;\,\infty[$$

Étapes

- Inéquation 1 : $x + y \leq 4$
- La frontière est la courbe $x + y = 4$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- Inéquation 2 : $x - y \geq 0$
- La frontière est la courbe $x - y = 0$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- Inéquation 3 : $y \geq 0$
- La frontière est la courbe $y = 0$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- La solution du système est la partie commune de ces régions – colorée sur le graphique.
- Sommets de la région (intersections des frontières) : $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Graphique



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow\ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0\,;\,\infty[$

La solution est la région colorée. Une frontière en trait plein en fait partie, une en pointillés non.

Sommets de la région :

● $(0;0)$ ● $(2;2)$ ● $(4;0)$

Une inéquation dans les entiers – les entiers de l'intervalle sont énumérés.

Énoncé: `x^2 < 10`

Résultat

$$x \in \{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$$

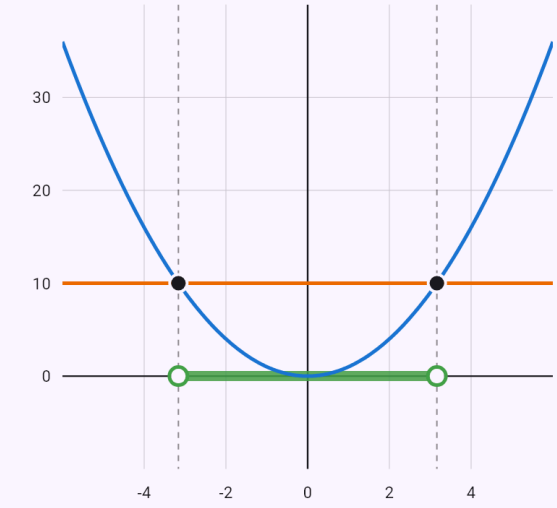
Étapes

- On passe tout du même côté : $x^2 - 10 < 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Signes sur chaque intervalle :

	$]-\infty\,;\,-\sqrt{10}[$	$]-\sqrt{10}\,;\,\sqrt{10}[$	$]\sqrt{10}\,;\,\infty[$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- Dans les réels $x \in \left]-\sqrt{10}\,;\,\sqrt{10}\right[$; dans $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$

Graphique



$y = x^2$
$y = 10$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

- $\left(-\sqrt{10}; 10\right)$
- $\left(\sqrt{10}; 10\right)$

Équation et inéquation – les racines de l'équation remplacées dans l'inéquation.

Énoncé: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Résultat

$$x = 3$$

Étapes

- Résolvons d'abord l'équation $x^2 - x - 6 = 0$, puis remplaçons ses racines dans les inéquations.
- On calcule le discriminant : $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- On applique la formule des racines : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- La racine $x = -2$ ne vérifie pas la condition $x > 0$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Cercle et demi-plan – la solution est un arc, ses extrémités n'en font pas partie.

Énoncé: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

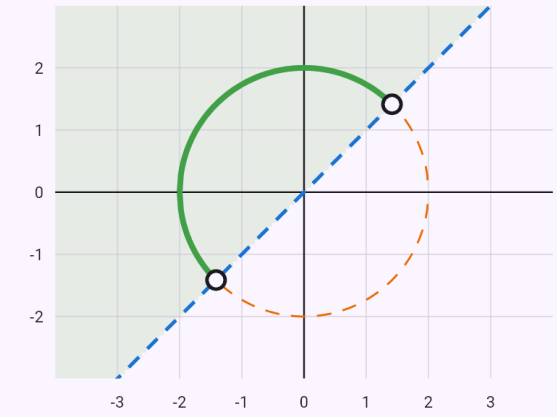
Résultat

$x^2 + y^2 = 4$
$y > x$

Étapes

- La solution est formée des points de la courbe $x^2 + y^2 = 4$ situés dans la région donnée par les inéquations. Cherchons d'abord cette région :
- La frontière est la courbe $y = x$ – tracée en pointillés, ses points ne font pas partie de la solution.
- On substitue le point $[1;\ 0]$: $0 > 1$ est faux – la solution est la partie du plan ne contenant pas le point.
- Extrémités de la partie de la courbe : $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – sur une frontière en pointillés, elles n'appartiennent pas à la solution.

Graphique



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

La solution est la partie de la courbe surlignée en vert – celle qui se trouve dans la région colorée. Une extrémité pleine appartient à la solution, une extrémité vide non.

Extrémités :
○ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

Cercle et droite avec une inéquation – l'intersection sous l'axe des x ne la vérifie pas.

Énoncé: `x^2 + y^2 = 25`
`x - y = 1`
`y > 0`

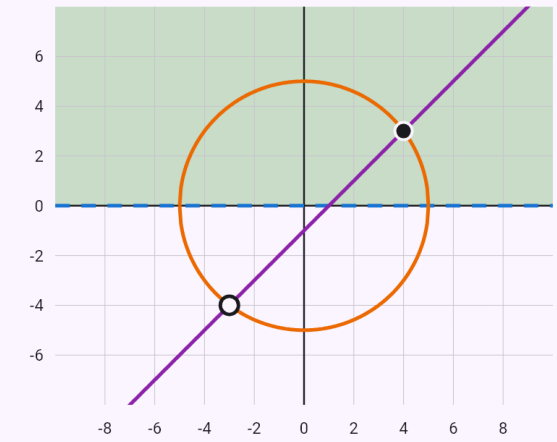
Résultat

$x = 4$
$y = 3$

Étapes

- Résolvons d'abord le système d'équations, puis remplaçons ses solutions dans les inéquations.
- La solution $x = -3,\ y = -4$ ne vérifie pas l'inéquation $y > 0$, ce n'est donc pas une solution du système.
- La solution $x = 4,\ y = 3$ vérifie les inéquations.

Graphique



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in\ ]0\,;\,\infty[$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Les solutions sont les intersections des courbes dans la région colorée (point plein) ; un point vide ne vérifie pas les inéquations.

Points d'intersection des courbes :
○ $(-3; -4)$ ● $(4; 3)$

10. Systèmes d’équations

L'application résout un système d'équations linéaires à deux inconnues par combinaison (addition) ou par substitution, et les systèmes plus grands par l'élimination de Gauss – sous forme d'équations ou sur la matrice (la matrice augmentée et les opérations sur les lignes). Un système carré peut aussi être résolu par la règle de Cramer (déterminants). La méthode se choisit avec une puce. Un système de deux équations à deux inconnues a aussi un graphique où les solutions sont les intersections des droites ou des courbes.

Le nombre d'équations et celui d'inconnues n'ont pas à être égaux. L'élimination de Gauss détecte quand un système n'a pas de solution (on obtient une équation comme 0 = 1) et quand il en a une infinité : les inconnues que les équations ne déterminent pas deviennent des paramètres t, s, … (choisis pour que la solution n'ait pas de fractions), et la solution est aussi écrite sous forme vectorielle. Sous forme matricielle, le théorème de Rouché–Fontené (Frobenius) décide du nombre de solutions : il compare le rang de la matrice, celui de la matrice augmentée et le nombre d'inconnues. Pour un système homogène (tous les seconds membres nuls), l'application donne une base de l'espace des solutions.

Les inconnues peuvent avoir un indice : x_1, x_1 ou x1. Un système peut aussi être donné par des matrices – la matrice augmentée avec les seconds membres après une barre verticale, ou une matrice A, un vecteur des seconds membres b et l'équation Ax = b ; les inconnues sont alors x_1, x_2, … et la méthode par défaut est l'élimination de Gauss sur la matrice.

Un système peut contenir un ou deux paramètres – des lettres qui ne sont pas des inconnues (les inconnues sont x, y, z, u, v, w, t et x_1, x_2, …). L'application discute alors la résolubilité selon les valeurs des paramètres : avec la puce « Gauss – matrice » (par défaut pour trois équations ou plus), elle réduit la matrice augmentée ; là où elle multiplierait par une expression du paramètre qui peut s'annuler, elle suppose qu'elle est non nulle et traite ses zéros à part en les substituant – dans chaque cas, le théorème de Rouché–Fontené (Frobenius) conclut. Avec la puce « Règle de Cramer », elle calcule les déterminants en fonction du paramètre : des formules pour D ≠ 0, les zéros de D substitués. Avec deux paramètres apparaissent des cas comme « b = 4, a ≠ 2 » ou « a = b ».

Un système non linéaire (un cercle et une droite, par exemple) est résolu et tracé, pour l'instant sans les étapes.

Comment le saisir

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Inconnues avec un indice – x_1, x_1 et x1.

`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	La matrice augmentée – les seconds membres après une barre verticale.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	La matrice du système, le vecteur des seconds membres et l'équation Ax = b.

Exemples

La méthode par combinaison.

Énoncé: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Combinaison

Résultat

$$x = 2$$
$$y = 1$$

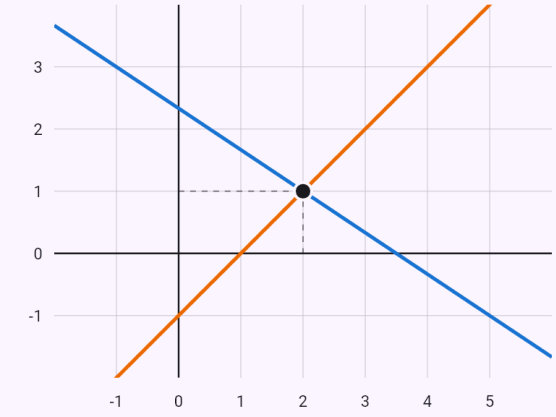
Étapes

- On multiplie la première équation par 1 et la seconde par -2 pour que x s'élimine en les additionnant

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- On additionne les équations, x s'élimine : $5y = 5$
- On résout : $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- On remplace dans l'équation 2 : $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Graphique



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Points d'intersection des courbes :

- $(2; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution du système : ses coordonnées sont les valeurs de x et y.

Trois équations – le pivot de Gauss.

Énoncé: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Pivot de Gauss

Résultat

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Étapes

- On élimine x des équations suivantes
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$
- On élimine y des équations suivantes
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$
- On résout : $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- On remplace dans l'équation 2 :
$-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- On remplace dans l'équation 1 : $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Règle de Cramer – les déterminants D, D_x, D_y.

Énoncé: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Règle de Cramer

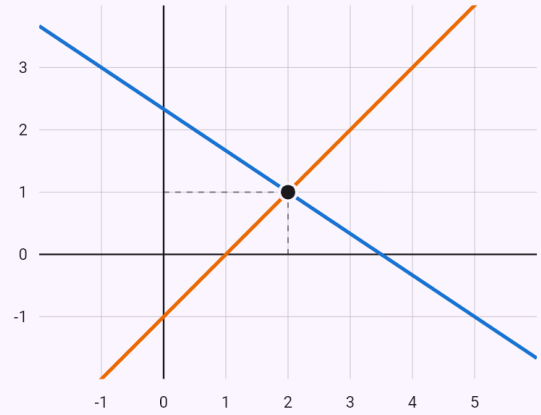
Résultat

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Étapes

- On calcule le déterminant
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$
- On calcule le déterminant
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$
- On calcule le déterminant
$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$
- D'après la règle de Cramer : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-10}{-5} = 2$
- D'après la règle de Cramer : $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

Graphique



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2x}{3}$
$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Points d'intersection des courbes :
- $(2; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution du système : ses coordonnées sont les valeurs de x et y.

Une infinité de solutions – le théorème de Frobenius, un paramètre et la forme vectorielle.

Énoncé: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`
`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matrice

Résultat

Il y a une infinité de solutions.
$x = 2 - 2t$
$y = t$
$z = 1$
$t \in \mathbb{R}$

Étapes

- La matrice augmentée du système
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes
$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes $R_3 \to R_3 - R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- L'équation 0 = 0 est toujours vraie, on la supprime
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Théorème de Rouché–Fontené (Frobenius) :
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – les rangs sont égaux mais inférieurs au nombre d'inconnues, le système a donc une infinité de solutions.
- On réécrit la matrice échelonnée (triangulaire) sous forme d'équations
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$
- Les inconnues que les équations ne déterminent pas sont choisies comme paramètres : $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- On résout : $z = 1$
- On remplace dans l'équation 1 :
$x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- La solution sous forme vectorielle
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un système sans solution – on obtient une équation qui n'est jamais vraie.

Énoncé: `x + y + z = 2`
`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Résultat

Il n'y a pas de solution.

Étapes

- On élimine x des équations suivantes
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y=-1 \\ -2y=-1 \end{cases}$$
- On élimine y des équations suivantes
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y=-1 \\ 0=1 \end{cases}$$
- On obtient l'équation $0=1$, qui n'a pas de solution : le système n'a donc pas de solution.

Un système homogène – une base de l'espace des solutions.

Énoncé: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauss – matrice

Résultat

Il y a une infinité de solutions.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Le système est homogène (tous les seconds membres valent 0) : il a toujours la solution triviale (que des zéros) ; il a une solution non triviale exactement lorsque le rang de sa matrice est inférieur au nombre d'inconnues.
- La matrice augmentée du système
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes
$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- On échange les équations 2 et 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- L'équation 0 = 0 est toujours vraie, on la supprime
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Théorème de Rouché–Fontené (Frobenius) :
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – les rangs sont égaux mais inférieurs au nombre d'inconnues, le système a donc une infinité de solutions.
- On réécrit la matrice échelonnée (triangulaire) sous forme d'équations
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Les inconnues que les équations ne déterminent pas sont choisies comme paramètres : $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- On remplace dans l'équation 2 :
$-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow \ y = 2t$
- On remplace dans l'équation 1 : $x + t = 0 \ \Rightarrow \ x = -t$
- La solution sous forme vectorielle
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Une base de l'espace des solutions (dimension 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Un système donné par sa matrice augmentée.

Énoncé: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Résultat

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Étapes

- La matrice augmentée du système
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes
$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

- Théorème de Rouché–Fontené (Frobenius) :
$h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – le rang de la matrice est égal à celui de la matrice augmentée et au nombre d'inconnues, le système a donc exactement une solution.
- On réécrit la matrice échelonnée (triangulaire) sous forme d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- On résout : $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- On remplace dans l'équation 2 :
$-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- On remplace dans l'équation 1 : $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Un système avec paramètre – matrice augmentée, cas a = 1 et a = −2.

Énoncé: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matrice

Résultat

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Étapes

- Les inconnues sont $x,\ y,\ z$, le paramètre a est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, on étudie donc les différents cas (discussion).
- La matrice augmentée du système
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- On échange les équations 1 et 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes
$R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- On continue avec le coefficient $1 - a$, qui peut être nul : on suppose donc $a \neq 1$; le cas $a = 1$ est traité à part.
- On échange les équations 2 et 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- On continue avec le coefficient $-a - 2$, qui peut être nul : on suppose donc $a \neq -2$; le cas $a = -2$ est traité à part.
- Pour $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: le système a une unique solution :
$x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Pour $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$: le système a une infinité de solutions :
$x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pour $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: le système n'a pas de solution. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Deux paramètres – discussion selon a et b.

Énoncé: `x + y + z = 1`

`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Résultat

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Étapes

- Les inconnues sont $x,\ y,\ z$, les paramètres $a,\ b$ sont des réels quelconques. La solution dépend de leurs valeurs, on étudie donc les différents cas (discussion).
- La matrice augmentée du système
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes
$R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Opérations sur les lignes $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- On continue avec le coefficient $(a-2)(a-1)$, qui peut être nul : on suppose donc $a \neq 1,\ a \neq 2$; le cas $a = 2,\ a = 1$ est traité à part.
- Pour $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: le système a une unique solution
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Pour $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: le système n'a pas de solution. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pour $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: le système a une infinité de solutions :
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Pour $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: le système n'a pas de solution. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Pour $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: le système a une infinité de solutions :
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matrice après substitution
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Un cercle et une droite.

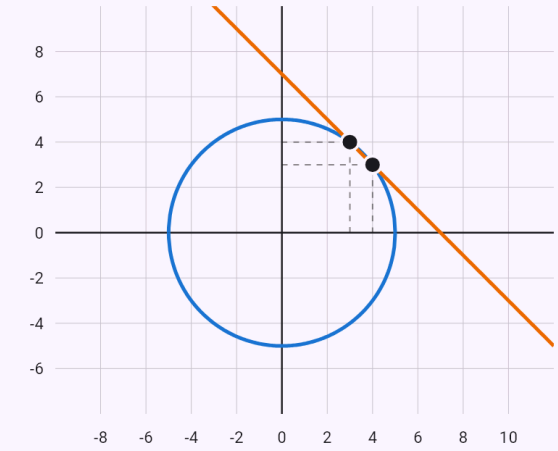
Énoncé: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Résultat

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Graphique



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Points d'intersection des courbes :

● $(3; 4)$ ● $(4; 3)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution du système : ses coordonnées sont les valeurs de x et y.

Limitations connues

- Les systèmes non linéaires sont pour l’instant sans démarche.

11. Équations et inéquations avec paramètre

Une lettre de l'équation autre que l'inconnue est un paramètre : un réel quelconque dont dépend la solution. L'application ramène l'équation à la forme A·x = B (une équation du second degré à A·x² + B·x + C = 0) et discute la solution selon les valeurs du paramètre : où le coefficient de l'inconnue est nul, où le discriminant est positif, nul ou négatif, où les conditions excluent une racine et pour quelles valeurs le problème n'a pas de sens. Le résultat résume les cas.

L'application choisit l'inconnue dans l'ordre x, y, z, u, v, w, t ; les autres lettres sont des paramètres. Choisis une autre inconnue avec la puce « Inconnue » ou écris-la après une virgule. Le graphique montre toutes les solutions comme une courbe (une région pour une inéquation) dans le plan paramètre–inconnue ; choisis la valeur du paramètre avec le curseur et lis les solutions sur la droite verticale.

Après une virgule, vous pouvez aussi poser une question sur les racines : « x^2 + px + 4 = 0, x > 0 » – pour quels p toutes les racines sont positives (la puce « La condition porte sur » passe à au moins une racine), « …, x = 3 » – pour quels p 3 est racine. Pour une équation linéaire, la racine est remplacée dans la condition ; pour une équation du second degré, on utilise les relations de Viète. Un système de deux équations linéaires avec paramètre est résolu par les déterminants (règle de Cramer), avec les cas d'une, d'aucune et d'une infinité de solutions. Une inéquation du second degré ou rationnelle est discutée selon l'ordre de ses zéros. Le curseur du graphique s'arrête exactement sur les valeurs critiques du paramètre, listées aussi sous le graphique. Un système avec paramètre de plus d'équations, avec deux paramètres ou par la méthode matricielle se trouve dans le chapitre Systèmes d'équations.

Dans une intégrale indéfinie, les autres lettres sont des constantes ; l'application indique lesquelles ne doivent pas être nulles (∫ dx/(a − bx)³ pour b ≠ 0). Dans une limite et une intégrale définie, les lettres sont aussi des paramètres – voir les chapitres Limites et Intégrale définie.

Comment le saisir

`2ax + a = 4x`	Toute autre lettre est un paramètre ; l'inconnue est x (ou y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, inconnue q`	Tu peux indiquer l'inconnue ou le paramètre après une virgule (« a est un paramètre », « inconnue q »).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Une question sur les racines après une virgule : pour quels p toutes les racines (ou au moins une) ont la propriété.

Exemples

Équation linéaire – pas de solution pour a = 2.

Énoncé: `2ax + a = 4x`

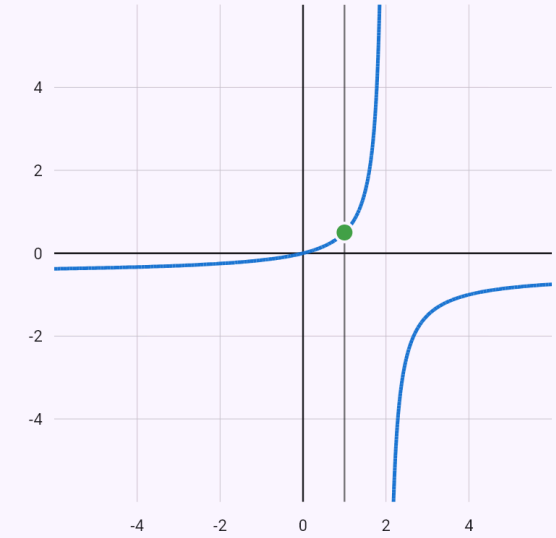
Résultat

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x, le paramètre a est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $2(a-2)x = -a$
- Pour $a \neq 2$, $2(a-2)$ est non nul, on peut diviser : $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Pour $a = 2$, le coefficient de l'inconnue est nul : $0 \cdot x = -2$, donc $x \in \emptyset$

Graphique



$2ax + a = 4x$

Chaque point [a ; x] de la courbe est une solution. Pour une valeur choisie de a, les solutions sont sur la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

a = 2

$a = 1 : \quad x \approx 0,5$

Équation du second degré – discussion selon le discriminant.

Énoncé: `x^2 + 6x + p = 0`

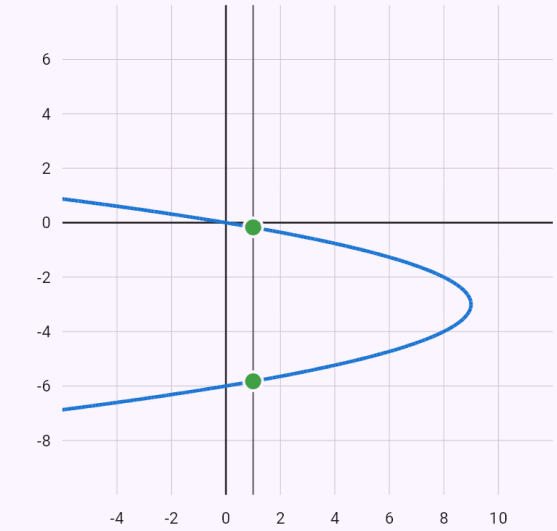
Résultat

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x, le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $x^2 + 6x + p = 0$
- Le discriminant en fonction du paramètre : $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Pour $p < 9$, D > 0 et l'équation a deux racines distinctes : $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Pour $p > 9$, D < 0 et l'équation n'a pas de solution réelle.
- Pour $p = 9$, D = 0 et l'équation a une racine double : $x = -3$

Graphique



$x^2 + 6x + p = 0$

Chaque point [p ; x] de la courbe est une solution. Pour une valeur choisie de p, les solutions sont sur la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

p = 9

$p = 1$: $x \approx -5,83;\ -0,17$

Inéquation – le signe du coefficient décide du sens.

Énoncé: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

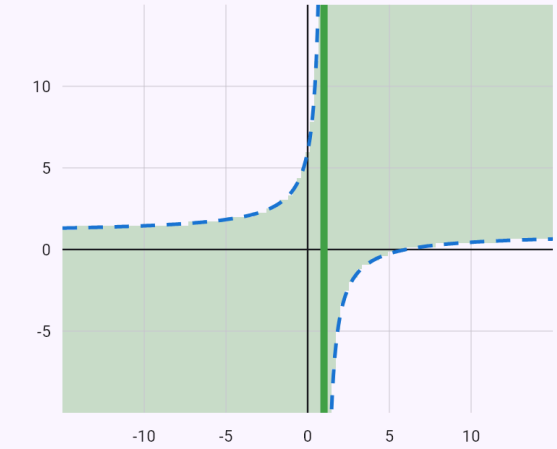
Résultat

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x, le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Pour $p < 1$, $2(1-p)$ est positif : en divisant, le sens de l'inégalité est conservé : $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pour $p > 1$, $2(1-p)$ est négatif : en divisant, le sens de l'inégalité change : $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Pour $p = 1$, le coefficient de l'inconnue est nul : $0 \cdot x < 10$, donc $x \in \mathbb{R}$

Graphique



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{p-6}{p-1}$

La région colorée contient toutes les solutions [p ; x]. Pour une valeur choisie de p, la solution est la partie mise en évidence de la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

p = 1

$p = 1$

Les deux racines supérieures à 1 – discriminant et relations de Viète.

Énoncé: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

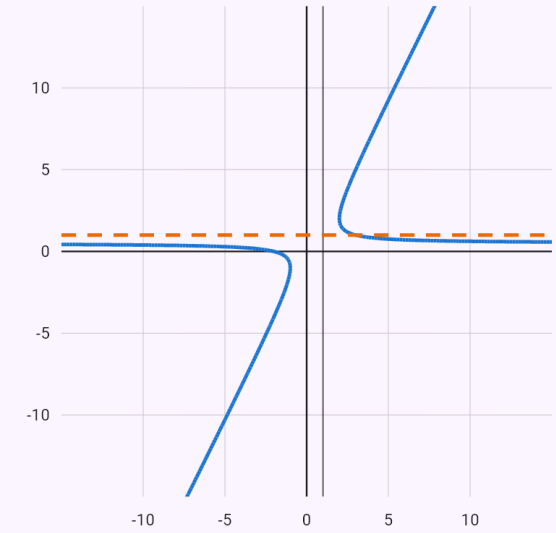
Résultat

$$2 \leq p < 3$$

Étapes

- L'inconnue est x, le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Le discriminant en fonction du paramètre $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p - 2$
- Pour $p \in]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,\infty[$, D > 0 et l'équation a deux racines distinctes : $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Pour $-1 < p < 2$, D < 0 et l'équation n'a pas de solution réelle.
- Pour $p = -1$, D = 0 et l'équation a une racine double : $x = -1$
- Pour $p = 2$, D = 0 et l'équation a une racine double : $x = 2$
- On cherche les valeurs du paramètre pour lesquelles toutes les racines de l'équation vérifient $x > 1$ (et il en existe une).
- D'après les relations de Viète : $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- L'équation doit avoir des racines réelles : $D \geq 0$, donc $p \in]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;\,\infty[$
- La condition sur la somme : $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, donc $p > 1$
- La condition sur le produit : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, donc $p < 3$
- La condition est vérifiée pour $2 \leq p < 3$

Graphique



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Chaque point [p ; x] de la courbe est une solution. Pour une valeur choisie de p, les solutions sont sur la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1$: $x \in \emptyset$

Un système avec paramètre – déterminants ; les droites sont sécantes, parallèles ou confondues.

Énoncé: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Résultat

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1,\ a \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Étapes

- Les inconnues sont $x,\ y$, le paramètre a est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, on étudie donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- On résout le système avec des déterminants (règle de Cramer)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Pour $a \neq -1,\ a \neq 1$, D ≠ 0 – le système a une seule solution (les droites sont sécantes) :

  $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$

- Pour $a = -1$, D = 0 et le système n'a pas de solution (les droites sont parallèles).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Pour $a = 1$, D = 0 et les deux équations de décrivent la même droite – une infinité de solutions :

  $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Une inéquation rationnelle – selon l'ordre du zéro p et du point 1.

Énoncé: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Résultat

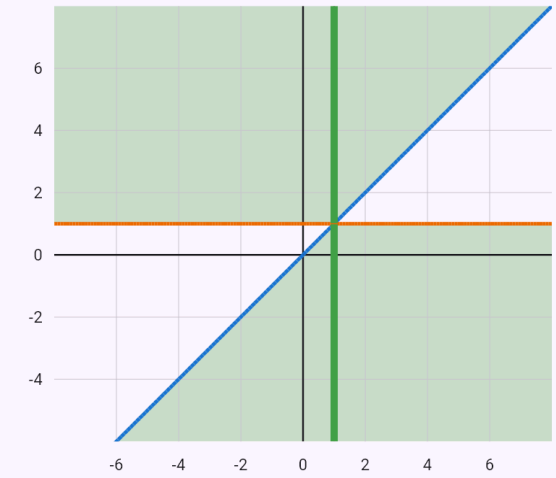
$$\begin{cases} x \in \left]-\infty\,;\,p\right[\cup\left]1\,;\,\infty\right[, & p<1 \\ x \in \left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left]1\,;\,\infty\right[, & p=1 \\ x \in \left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left]p\,;\,\infty\right[, & p>1 \end{cases}$$

Conditions : $x \neq 1$

Étapes

- L'inconnue est x, le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 1$
- On se ramène à la forme de base : $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Les zéros du numérateur : p ; le dénominateur s'annule pour 1
- Pour $p < 1$ – selon l'ordre des zéros et les signes sur les intervalles : $x \in \left]-\infty\,;\,p\right[\cup\left]1\,;\,\infty\right[$
- Pour $p > 1$ – selon l'ordre des zéros et les signes sur les intervalles : $x \in \left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left]p\,;\,\infty\right[$
- Pour $p = 1$, on résout $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$: $x \in \left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left]1\,;\,\infty\right[$

Graphique



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
$x - 1 = 0$

La région colorée contient toutes les solutions [p ; x]. Pour une valeur choisie de p, la solution est la partie mise en évidence de la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

p = 1

$p = 1$

Limitations connues

- La discussion complète par intervalles avec un seul paramètre, avec plusieurs les cas généraux.
- Questions sur les racines seulement pour les équations linéaires et du second degré ; systèmes avec paramètre seulement de deux équations linéaires ; un paramètre sous une racine ou dans un logarithme, pas encore.

12. Exprimer une lettre d’une formule

Une formule de mathématiques, de physique ou de chimie (m = ρV, S = πr², v = s/t) est transformée pour que la lettre choisie reste seule d’un côté. Les autres lettres sont des grandeurs données – l’application les traite comme des nombres connus. Les étapes sont des transformations équivalentes comme à l’école : passer des termes de l’autre côté, multiplier par un dénominateur, diviser, mettre en facteur, prendre la racine, les inverses.

La lettre à exprimer se choisit avec la puce « Exprimer » ; sans choix, l’application exprime la première lettre du côté de la formule. Le résultat est la formule avec ses conditions – ce par quoi on divise ne doit pas être nul (V = m/ρ pour ρ ≠ 0). Les grandeurs d’une formule sont positives, une racine n’a donc que sa valeur positive : r = √(S/π).

Une équation en x et y est exprimée en y (la droite 2x + y = x + 2y est y = x) ; les autres équations en x et y ont « Exprimer y » et « Exprimer x » parmi les puces de la dérivée, de l’intégrale et du graphique. Ici la racine donne les deux signes : x² + y² = 25 donne y = ±√(25 − x²).

Les équations avec paramètre (2ax + a = 4x, inconnue x) ne sont pas exprimées comme une formule, mais résolues avec la discussion – voir le chapitre précédent.

Comment le saisir

`m = ρV`	Une formule – une grandeur seule d’un côté, lettres majuscules et minuscules (E, I, V sont des grandeurs).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indices avec un tiret bas (R_1, v_0), lettres grecques (ρ, rho, \rho), π est la constante.
`2x + y = x + 2y`	Une équation en x et y – exprimée en y.

Exemples

Masse volumique – division par une grandeur avec la condition ρ ≠ 0.

Énoncé: `m = ρV`

Résultat

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Conditions : $\rho \neq 0$

Étapes

- Exprimons V. Les autres lettres ($m,\ \rho$) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l'équation par des transformations équivalentes jusqu'à ce que V soit seul d'un côté.
- Échangeons les membres de l'équation : $\rho V = m$
- Divisons les deux membres par ρ, qui ne doit pas être nul ($\rho \neq 0$) : $V = \frac{m}{\rho}$

Aire d'un trapèze – multiplier par deux, diviser par la hauteur, passer a de l'autre côté.

Énoncé: `S = (a + c)/2 · v`

Résultat

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Conditions : $v \neq 0$

Étapes

- Exprimons c. Les autres lettres ($S,\ a,\ v$) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l'équation par des transformations équivalentes jusqu'à ce que c soit seul d'un côté.
- Échangeons les membres de l'équation : $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Multiplions les deux côtés par 2 : $v(a+c) = 2S$
- Divisons les deux membres par v, qui ne doit pas être nul ($v \neq 0$) : $a + c = \frac{2S}{v}$
- Soustrayons a des deux côtés : $c = \frac{2S}{v} - a$
- On réduit au même dénominateur : $c = \frac{2S - av}{v}$

Aire d’un disque – prendre la racine, le rayon est positif.

Énoncé: `S = πr^2`

Résultat

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Étapes

- Exprimons r. Les autres lettres (S) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l’équation par des transformations équivalentes jusqu’à ce que r soit seul d’un côté.
- Échangeons les membres de l’équation : $\pi r^2 = S$
- Divisons les deux côtés par π : $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Prenons la racine des deux membres. r est une grandeur, et les grandeurs sont positives : seule la racine positive convient : $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Résistances en parallèle – dénominateur commun et inverses.

Énoncé: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Résultat

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Conditions : $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Étapes

- Exprimons R_1. Les autres lettres ($R,\ R_2$) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l’équation par des transformations équivalentes jusqu’à ce que R_1 soit seul d’un côté.
- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Échangeons les membres de l’équation : $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Soustrayons $\frac{1}{R_2}$ des deux côtés : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Si deux expressions sont égales, leurs inverses le sont aussi : $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Une droite – les termes en y à gauche, les autres à droite.

Énoncé: `2x + y = x + 2y`

Résultat

$$y = x$$

Étapes

- Exprimons y. Les autres lettres (x) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l'équation par des transformations équivalentes jusqu'à ce que y soit seul d'un côté.
- Les termes en y passent à gauche, les autres à droite (en changeant de signe), puis on les additionne

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Multiplions les deux côtés par (-1) : $y = x$

Un cercle exprimé en y – la racine avec ±.

Énoncé: `x^2 + y^2 = 25`

Résultat

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Étapes

- Exprimons y. Les autres lettres (x) se traitent comme des nombres connus, et on transforme l'équation par des transformations équivalentes jusqu'à ce que y soit seul d'un côté.
- Soustrayons x^2 des deux côtés : $y^2 = 25 - x^2$
- Prenons la racine carrée des deux membres ; un nombre et son opposé ont le même carré, d'où le ± : $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Limitations connues

- La lettre seulement dans des puissances, des fractions et des racines ; pas encore dans des fonctions (sin, log, un exposant) ni au carré avec elle-même ($s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ en t).

13. Calcul algébrique

L’application transforme une expression sans signe égal selon la puce choisie : elle la simplifie (une fraction rationnelle mise au même dénominateur et simplifiée, avec conditions), la développe, la factorise (par mise en facteur, identités remarquables et schéma de Horner) ou la décompose en éléments simples – comme sur papier, avec des équations pour les coefficients inconnus. La factorisation se fait dans les entiers ; si l’expression se factorise encore dans les réels (par des racines irrationnelles), l’étape suivante le montre. La racine d’un monôme est simplifiée en partie – pour une racine paire en valeur absolue là où la base peut être négative. Les nombres complexes marchent aussi – la division en multipliant par le conjugué.

Les expressions numériques avec fractions se calculent pas à pas comme à l’école : d’abord les parenthèses les plus intérieures (rondes, crochets et accolades), pour une fraction composée le numérateur et le dénominateur séparément, puis les puissances, les multiplications et divisions (par une fraction en multipliant par son inverse, aussi avec deux-points ou ÷) et enfin l’addition sur un dénominateur commun. Écrivez un nombre fractionnaire avec une espace – 2 1/3 (depuis une photo aussi 2⅓) – ; l’application le transforme d’abord en fraction ; un produit de deux nombres toujours avec un point. Un résultat supérieur à 1 est aussi donné en nombre fractionnaire.

Un polynôme divisé par un polynôme s’écrit avec deux-points : (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). L’application pose la division comme sur papier – elle divise les termes de plus haut degré, multiplie le diviseur par le résultat et soustrait – et affiche le quotient, le reste et la vérification ; pour un diviseur x − a, elle propose aussi le schéma de Horner. Une fraction p/q est simplifiée comme avant ; la division se choisit avec la puce « Division de polynômes ».

La formule du binôme : le terme de rang k d’un développement (« 5e terme (2x - 1/x)^8 ») et le terme sans x (« terme sans x de (x + 1/x)^10 ») à partir du terme général. Les permutations P(5) et avec répétition P′(2, 3, 1) sont calculées comme des factorielles.

La combinatoire peut aussi être posée en une courte phrase : « De combien de façons peut-on choisir 3 parmi 9 ? » (avec « l’ordre compte », « avec répétition »), « De combien de façons peut-on ranger 5 personnes ? » (aussi autour d’une table ronde), nombres pairs à trois chiffres avec des chiffres donnés et mots formés avec les lettres d’un mot. Et deux problèmes classiques de probabilité : le paradoxe des anniversaires (au moins deux de n personnes ont le même anniversaire) et le vestiaire qui perd les tickets (personne ne récupère son manteau – aussi des lettres dans des enveloppes).

Exemples

Une expression numérique avec des fractions – d'abord la multiplication, puis le dénominateur commun.

Énoncé: `2/3 - 1/6*2` Simplifier

Résultat

$$\frac{1}{3}$$

Étapes

- D'abord la multiplication et la division : $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Parenthèses imbriquées depuis la plus intérieure.

Énoncé: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Résultat

$$7$$

Étapes

- D'abord la parenthèse la plus intérieure : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- On remplace : $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- D'abord la parenthèse la plus intérieure : $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- On remplace : $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- D'abord la parenthèse la plus intérieure : $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- On remplace : $\frac{7}{6} \cdot 6$
- On multiplie – numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur – et on simplifie : $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Une fraction composée – numérateur et dénominateur séparément, puis fois l'inverse.

Énoncé: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Résultat

$$\frac{10}{21}$$

Étapes

- D'abord le numérateur et le dénominateur de la fraction composée séparément : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- D'abord le numérateur et le dénominateur de la fraction composée séparément : $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- On remplace : $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Une fraction composée : le numérateur fois l'inverse du dénominateur

  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Nombres fractionnaires – en fractions, et le résultat aussi en nombre fractionnaire.

Énoncé: `2 1/3 + 1 1/2`

Résultat

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Étapes

- Les nombres fractionnaires deviennent des fractions : la partie entière fois le dénominateur plus le numérateur

  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- On remplace : $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- On réduit au même dénominateur : $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Le résultat en nombre fractionnaire : $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Simplifier une fraction rationnelle.

Énoncé: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Simplifier

Résultat

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Conditions : $x \neq -1$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq -1$
- On factorise le numérateur et le dénominateur : $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- On simplifie par le facteur commun $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Développer.

Énoncé: `(x + 2)^3` Développer

Résultat

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Étapes

- On développe et on regroupe les termes semblables : $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Factoriser avec le schéma de Horner.

Énoncé: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Factoriser

Résultat

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Étapes

- Les racines rationnelles ne peuvent être que des diviseurs du terme constant -6 : $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 1$ et divise le polynôme :

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- En substituant, on voit que ces candidats ne sont pas des racines : $P(-1) = -24 \neq 0$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 2$ et divise le polynôme :

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Décomposition en éléments simples.

Énoncé: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Éléments simples

Résultat

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Conditions : $x \neq -2,\ x \neq 1$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq -2,\ x \neq 1$
- On factorise le dénominateur : $(x-1)(x+2)$
- On cherche une décomposition de la forme : $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- On multiplie les deux membres par le dénominateur $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- On substitue $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- On substitue $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Simplification partielle d’une racine, avec valeur absolue.

Énoncé: `sqrt(8a^5 b^2)` Simplifier

Résultat

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Étapes

- On sort de la racine ce qui peut l'être – les puissances passent devant (pour une racine paire en valeur absolue là où la base peut être négative) : $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Division de nombres complexes.

Énoncé: `(3+4i)/(1-2i)` Forme algébrique

Résultat

$$-1+2i$$

Étapes

- On multiplie la fraction par le conjugué du dénominateur, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Une équation avec des factorielles – conditions, simplification et vérification des racines.

Énoncé: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Résultat

$$x = 5$$

Étapes

- Conditions : factorielles et coefficients binomiaux n'existent que pour des entiers positifs ou nuls – chaque argument (pour un coefficient binomial n, k et n − k) doit être un entier ≥ 0 :
  $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Les factorielles exprimées par la plus petite, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), et simplifiées ; un coefficient binomial comme produit : $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2+x = 30$
- Il reste une équation sans factorielles, tout d'un côté : $x^2+x-30 = 0$
- Les racines de l'équation sont $x = -6,\ x = 5$; les conditions sont remplies par $x = 5$

Division posée – quotient, reste et vérification.

Énoncé: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Résultat

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Étapes

- Étape 1 – on divise les termes de plus haut degré $2x^3 : x^2 = 2x$, on multiplie le diviseur par le résultat $2x \cdot \left(x^2+1\right) = 2x^3+2x$ et on soustrait, il reste $3x^2-3x+5$
- Étape 2 – on divise les termes de plus haut degré $3x^2 : x^2 = 3$, on multiplie le diviseur par le résultat $3 \cdot \left(x^2+1\right) = 3x^2+3$ et on soustrait, il reste $-3x+2$
- Division posée $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- Le quotient est $2x+3$, le reste $-3x+2$
- Vérification – le quotient fois le diviseur plus le reste redonne le dividende : $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

Division par x − 1 avec le schéma de Horner.

Énoncé: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Schéma de Horner

Résultat

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Étapes

- Schéma de Horner pour $x=1$ – en haut les coefficients du dividende, en bas leurs sommes successives ; le dernier nombre est le reste

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- Le quotient est x^2+x-1, le reste 0
- Vérification – le quotient fois le diviseur plus le reste redonne le dividende : $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Une équation avec un coefficient binomial C(n, 2) – aussi V(n, k), C', V' avec répétition.

Énoncé: `C(n, 2) = 45`

Résultat

$n = 10$

Étapes

- Conditions : factorielles et coefficients binomiaux n'existent que pour des entiers positifs ou nuls – chaque argument (pour un coefficient binomial n, k et n − k) doit être un entier ≥ 0 : $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Les factorielles exprimées par la plus petite, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), et simplifiées ; un coefficient binomial comme produit : $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Il reste une équation sans factorielles, tout d'un côté : $n^2 - n - 90 = 0$
- Les racines de l'équation sont $n = -9,\ n = 10$; les conditions sont remplies par $n = 10$

Choisir k parmi n en une phrase – combinaisons.

Énoncé: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Résultat

120

Étapes

- On choisit 3 parmi 10, l'ordre ne compte pas et sans répétition – le nombre de combinaisons :
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Nombres pairs à trois chiffres – deux cas selon le dernier chiffre.

Énoncé: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Résultat

52

Étapes

- Les nombres ont 3 chiffres pris parmi $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Le zéro ne peut pas être en tête. Les chiffres ne peuvent pas se répéter. Un nombre est pair exactement quand son dernier chiffre est pair.
- Le dernier chiffre est 0 – tous les autres chiffres restent pour les autres places : $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- Le dernier chiffre est un autre chiffre convenable que 0 – ni le zéro ni lui ne peuvent alors être en tête : $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- On additionne les deux cas : $20 + 32 = 52$

Mots avec les lettres d'un mot – permutations avec répétition.

Énoncé: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Résultat

151200

Étapes

- Le mot a 10 lettres ; on compte combien de fois apparaît chacune : $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Les mots sont des permutations avec répétition – échanger des lettres identiques donne le même mot : $P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$

Le paradoxe des anniversaires par l'événement contraire.

Énoncé: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Résultat

$P(A) \approx 0{,}5073$

Étapes

- L'événement contraire A' est plus simple : les 23 personnes ont leur anniversaire des jours différents (365 jours, tous équiprobables).
- La probabilité que tous les anniversaires soient différents $P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- La probabilité cherchée est le complément à un : $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Les tickets de vestiaire perdus – dérangements.

Énoncé: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Résultat

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Étapes

- Les répartitions où personne ne reçoit le sien sont les dérangements – leur nombre par inclusion-exclusion
  $D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$
- Il y a n! répartitions en tout, la probabilité est le quotient :
  $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Pour plus de personnes, la probabilité change à peine :
  $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

Le terme sans x d'un développement du binôme.

Énoncé: `terme sans x de (x + 1/x)^10`

Résultat

$$T_6 = 252$$

Étapes

- Le terme général de rang $k+1$ du développement du binôme : $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- Le terme sans x a l'exposant de x nul :
  $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- Le terme cherché, de rang 6 :
  $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Divisibilité et nombres premiers

Un nombre entier seul est décomposé en facteurs premiers – l'application le divise successivement par les plus petits nombres premiers et écrit 360 = 2³·3²·5 ; pour un nombre premier, elle montre qu'aucun nombre premier jusqu'à sa racine ne le divise. Le test peut aussi s'écrire isprime(97).

Le PGCD pgcd(60, 90) et le PPCM ppcm(18, 30) se calculent à partir des décompositions en facteurs premiers ou, avec la puce « Algorithme d'Euclide », par divisions avec reste. L'algorithme d'Euclide étendu et son tableau donnent l'identité de Bézout bezout(240, 46) : pgcd(240, 46) = 240·u + 46·v.

Les diviseurs d'un nombre diviseurs(36) se cherchent par paires 1·36, 2·18, … jusqu'à la racine, leur nombre vérifié par la décomposition. Les critères de divisibilité divisibilite(1236) forment un tableau pour 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 et 25 (le dernier chiffre, la somme des chiffres, la somme alternée…) ; un diviseur s'écrit divisibilite(1236, 7), en phrase « 1236 est divisible par 7 » ou 7 | 1236 – sans critère scolaire, on divise avec reste. Les nombres premiers jusqu'à 200 viennent du crible d'Ératosthène (« premiers jusqu'à 50 »). Une équation linéaire ax + by = c dans les entiers (« 3x + 5y = 1, x, y ∈ $\mathbb{Z}$ » ou la puce $\mathbb{Z}$) se résout par l'identité de Bézout – toutes les solutions $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Arithmétique modulaire : le reste 17 mod 5, l'inverse 3^(-1) mod 11 (par l'algorithme d'Euclide étendu, avec vérification) et la puissance 7^13 mod 13 par carrés successifs. RSA repose sur eux – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) calcule n, φ(n), la clé privée d, puis chiffre et déchiffre le message ; e et m peuvent être omis.

Comment le saisir

`360, factor(360), isprime(97)`	Décomposition en facteurs premiers, test de primalité.
`pgcd(60, 90), ppcm(18, 30)`	PGCD et PPCM.
`diviseurs(36), divisibilite(1236), divisibilite(1236, 7)`	Les diviseurs d'un nombre et les critères de divisibilité – tous, ou un diviseur (aussi la phrase « 1236 est divisible par 7 », 7 | 1236).
`premiers jusqu'à 50`	Les nombres premiers jusqu'à n (au plus 200) par le crible d'Ératosthène ; aussi premiers(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Une équation linéaire dans les entiers (diophantienne) ; aussi diophantienne(3, 5, 1).
`bezout(240, 46)`	Identité de Bézout.

`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Reste, inverse et puissance modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA avec de petits nombres.

Exemples

Décomposition en facteurs premiers par divisions successives.

Énoncé: `360`

Résultat

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Étapes

- On divise 360 successivement par les plus petits nombres premiers jusqu'à obtenir 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Décomposition en facteurs premiers : $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Un nombre premier – aucun diviseur jusqu'à la racine.

Énoncé: `97`

Résultat

Le nombre est premier.

Étapes

- Il suffit d'essayer les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – aucun ne divise 97, c'est donc un nombre premier.

Le PGCD à partir des décompositions.

Énoncé: `pgcd(60, 90)`

Résultat

$$\mathrm{PGCD}\,(60, 90) = 30$$

Étapes

- Décomposition en facteurs premiers : $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Décomposition en facteurs premiers : $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs avec les plus petits exposants :
  $\mathrm{PGCD}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Le PPCM via le PGCD par l'algorithme d'Euclide.

Énoncé: `ppcm(60, 90)` Algorithme d'Euclide

Résultat

$$\mathrm{PPCM}\,(60, 90) = 180$$

Étapes

- Algorithme d'Euclide – on divise le plus grand nombre par le plus petit avec reste, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul ; le dernier reste non nul est le PGCD

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{PGCD}\,(60, 90) = 30$$

- Le PPCM est le produit des nombres divisé par leur PGCD

$$\mathrm{PPCM}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{PGCD}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Les diviseurs par paires, leur nombre par la décomposition.

Énoncé: `dělitelé(36)`

Résultat

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Étapes

- Cherchons les diviseurs par paires d · 36/d – il suffit d'essayer d jusqu'à 6, l'autre diviseur de la paire s'en déduit

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Vérification du nombre de diviseurs par la décomposition – les exposants augmentés de 1 multipliés : $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

Le tableau des critères de divisibilité.

Énoncé: `dělitelnost(1236)`

Résultat

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Étapes

- Critères de divisibilité : 2, 5, 10 – le dernier chiffre ; 4, 25 – les deux derniers ; 8 – les trois derniers ; 3, 9 – la somme des chiffres ; 6 = 2 · 3 et 12 = 3 · 4 – les deux à la fois ; 7 – séparer le dernier chiffre et retrancher son double du reste ; 11 – la somme alternée des chiffres

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1 + 2 + 3 + 6 = 12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1 + 2 + 3 + 6 = 12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6 - 3 + 2 - 1 = 4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Divisibilité par sept – séparer le dernier chiffre.

Énoncé: `dělitelnost(1309, 7)`

Résultat

$$7 \mid 1309$$

Étapes

- Divisibilité par 7 : on sépare le dernier chiffre, on retranche son double du reste et on recommence jusqu'à au plus deux chiffres – ce nombre est divisible par 7 exactement quand l'original l'est (pour de grands nombres, diviser est souvent plus rapide) : $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Le crible d'Ératosthène.

Énoncé: `prvočísla do 50`

Résultat

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Étapes

- 2 est premier – barrons tous ses multiples ; les plus petits sont déjà barrés, on commence à $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 est premier – barrons tous ses multiples ; les plus petits sont déjà barrés, on commence à $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 est premier – barrons tous ses multiples ; les plus petits sont déjà barrés, on commence à $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 est premier – barrons tous ses multiples ; les plus petits sont déjà barrés, on commence à $7^2 = 49 : 49$
- Le crible d'Ératosthène : il suffit de barrer les multiples des nombres premiers jusqu'à la racine de 50. Les nombres restants sont premiers – il y en a 15

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

Identité de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Énoncé: `bezout(240, 46)`

Résultat

$$\mathrm{PGCD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 4$$

Étapes

- Algorithme d'Euclide étendu – chaque reste r s'écrit r = 240·u + 46·v ; une nouvelle ligne est l'avant-dernière moins q fois la dernière

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- La dernière ligne non nulle du tableau donne l'identité de Bézout : $\mathrm{PGCD}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Une équation diophantienne par l'identité de Bézout.

Énoncé: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Résultat

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- Résolvons $3x + 5y = 1$ dans les entiers. Il y a une solution exactement quand le plus grand commun diviseur de 3 et 5 divise le second membre.
- Algorithme d'Euclide étendu – chaque reste r s'écrit r = 5·u + 3·v ; une nouvelle ligne est l'avant-dernière moins q fois la dernière

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- La dernière ligne non nulle du tableau donne l'identité de Bézout : $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- L'identité de Bézout multipliée par 1 donne une solution : $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, donc $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Toutes les solutions : ajouter à x des multiples de 5 et en même temps à y des multiples de -3 (le premier membre ne change pas) ; décalé au plus petit positif $x_0 = 2,\ y_0 = -1 : x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Vérification : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Une puissance modulo n par carrés successifs.

Énoncé: `7^13 mod 13`

Résultat

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Étapes

- On écrit l'exposant comme somme de puissances de 2 :
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- On élève au carré de façon répétée en prenant les restes modulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- On multiplie les puissances nécessaires en prenant les restes modulo 13 au fur et à mesure
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – clés, chiffrement et déchiffrement.

Énoncé: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Résultat

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Étapes

- Le module : $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- L'indicatrice d'Euler : $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Algorithme d'Euclide – on divise le plus grand nombre par le plus petit avec reste, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul ; le dernier reste non nul est le PGCD

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow\ \mathrm{PGCD}\,(120, 7) = 1$$

- L'exposant public e doit être premier avec φ(n) : $\mathrm{PGCD}\,(7, 120) = 1$ – c'est le cas.
- Algorithme d'Euclide étendu – chaque reste r s'écrit r = 120·u + 7·v ; une nouvelle ligne est l'avant-dernière moins q fois la dernière

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- L'exposant privé d est l'inverse de e modulo φ(n) : $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Clé publique $(n, e) = (143, 7)$, clé privée $(n, d) = (143, 103)$
- Chiffrement du message m : $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- On écrit l'exposant comme somme de puissances de 2 : $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- On élève au carré de façon répétée en prenant les restes modulo 143

$9^1 \equiv 9$
$9^2 \equiv 9^2 = 81$
$9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$

- On multiplie les puissances nécessaires en prenant les restes modulo 143 au fur et à mesure

$9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
$\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
$126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
$53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$

- Déchiffrement – on retrouve le message d'origine : $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- On écrit l'exposant comme somme de puissances de 2 : $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- On élève au carré de façon répétée en prenant les restes modulo 143

$48^1 \equiv 48$
$48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
$48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
$48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
$48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
$48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
$48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$

- On multiplie les puissances nécessaires en prenant les restes modulo 143 au fur et à mesure

$48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
$\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
$113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
$92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
$100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
$27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Limitations connues

- La décomposition en facteurs premiers fonctionne jusqu'à 10^{18} ; un nombre premier plus grand est seulement confirmé par un test.
- RSA est un exemple scolaire avec de petits nombres (n = p·q jusqu'à environ mille milliards), pas un vrai chiffrement.

15. Angles en degrés, minutes et secondes

Un angle seul est converti dans toutes ses formes : degrés, minutes et secondes (5,5° = 5°30′), degrés décimaux, minutes, secondes et radians – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Une seule forme avec « = ?′ », « = ?° », « = ?″ » ou « = ? rad ». Des radians aux degrés : « π/6 rad ».

Les angles s'additionnent et se soustraient comme à l'école – degrés, minutes et secondes séparément ; 60′ deviennent 1°, et s'il n'y a pas assez de minutes, un degré est converti en 60′. On les multiplie et divise par un nombre : 100° : 3 se divise pas à pas, le reste des degrés passe en minutes et celui des minutes en secondes.

Les minutes et les secondes s'écrivent avec ′ et ″ (sur le clavier de l'application) ou avec une apostrophe et des guillemets : 25°30'15". Les degrés dans une fonction (sin 30°) relèvent du chapitre Équations trigonométriques.

Comment le saisir

`25°30′15″, 25°30'15", 5,5°`	Un angle – degrés, minutes, secondes, aussi degrés décimaux.
`25°30′ + 18°45′, 3 · 25°30′, 100° : 3`	Somme, différence, multiple et quotient par un nombre.
`5,5° = ?′, 30° = ? rad, π/6 rad`	Une seule forme de la conversion, radians en degrés.

Exemples

Degrés décimaux dans toutes les formes.

Énoncé: `5,5°`

Résultat

$$5^\circ 30' = 330' = 19800'' = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$$

Étapes

- La partie décimale du degré passe en minutes (1° = 60'), celle de la minute en secondes (1' = 60") : $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- En minutes : les degrés fois 60 (1° = 60') plus les minutes : $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- En secondes : les minutes fois 60 (1' = 60") : $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- En radians : 180° = π rad, donc les degrés fois π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$

Somme – 60' deviennent 1°.

Énoncé: `25°30’ + 18°45’`

Résultat

$$44^\circ 15'$$

Étapes

- Additionnons séparément les degrés, les minutes et les secondes : $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Chaque 60" fait 1' et chaque 60' fait 1° – on reporte : $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Différence – un degré converti en 60'.

Énoncé: `25°15’ - 18°45’`

Résultat

$$6^\circ 30'$$

Étapes

- Il y a moins de minutes (secondes) qu’on en retranche – un degré (une minute) est converti en 60' (60") : $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Soustrayons séparément les degrés, les minutes et les secondes : $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Division par un nombre, le reste en minutes.

Énoncé: `100° : 3`

Résultat

$$33^\circ 20'$$

Étapes

- Divisons pas à pas : les degrés, le reste en minutes ajouté ; les minutes, le reste en secondes ; les secondes

$$\begin{aligned} 100^\circ : 3 &= 33^\circ,\ 1^\circ = 60' \\ 60' : 3 &= 20' \\ \Rightarrow\ 100^\circ : 3 &= 33^\circ 20' \end{aligned}$$

Radians en degrés.

Énoncé: `π/6 rad`

Résultat

$$\begin{aligned} &30^\circ \\ &= 1800' \\ &= 108000'' \end{aligned}$$

Étapes

- Des radians aux degrés : π rad = 180°, donc fois 180°/π : $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- En minutes : les degrés fois 60 (1° = 60') plus les minutes : $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- En secondes : les minutes fois 60 (1' = 60") : $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Limitations connues

- Pas encore d’équations avec des angles en minutes (x + 25°30′ = 90°).

16. Pourcentages, rapports et règle de trois

Les pourcentages se saisissent brièvement, sans énoncé : une partie « 20 % de 480 », la base « 15 % = 45 », le taux « 96 de 480 = ? % », une hausse et une baisse « 480 + 15 % », « 480 − 20 % » et la valeur d'origine « x − 20 % = 384 ». L'application passe par 1 % comme à l'école aujourd'hui (1 % = 480 : 100 = 4,8) ; la puce « Formule » passe à partie = base · taux, le taux en nombre décimal (480 · 0,2).

Un rapport « 12 : 18 » se simplifie en 2 : 3, un tout se partage selon un rapport (« 300 dans le rapport 2 : 3 : 5 » – la somme des parts, une part, chaque part) et une proportion « 3 : 4 = x : 20 » se résout par le produit des extrêmes et des moyens. Un rapport de fractions (« 2/3 : 4/9 ») est d'abord multiplié par le plus petit multiple commun des dénominateurs ; dans une expression plus longue, les deux-points divisent.

La règle de trois s'écrit comme à l'école – deux lignes avec trois points (ou …, →) : « 10 kg … 250 €, 12 kg … x », les unités sont facultatives. Proportionnalité directe par défaut, inverse avec la puce « Inverse » (ou le mot « inverse » après une virgule). Intérêt simple : interet(capital, taux %, années, impôt %) – l'impôt est facultatif. Intérêts composés : intérêts composés(capital, taux %, années, impôt %, fréquence) – l'impôt et la fréquence (annuel, semestriel, trimestriel, mensuel, continu) sont facultatifs ; d'autres tâches (épargne, prêts, intérêts pour des jours) sont dans Applications, chapitre Économie.

Comment le saisir

`20 % de 480, 15 % = 45, 96 de 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Pourcentages – partie, base, taux, variation, valeur d'origine.
`12 : 18, 300 dans le rapport 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Simplifier un rapport, partager selon un rapport, une proportion.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	La règle de trois – proportionnalité directe et inverse.
`interet(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Intérêt simple avec impôt.
`intérêts composés(10000, 3 %, 5, 15 %, mensuel)`	Intérêts composés avec impôt et fréquence de crédit.

Exemples

Une partie par 1 %.

Énoncé: `20 % z 480`

Résultat

96

Étapes

- D'abord 1 % – la base (le tout, 100 %) divisée par 100 : $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Les pour cent cherchés valent autant de fois 1 % : $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Une baisse par la formule.

Énoncé: `480 - 20 %` Formule partie = base · taux

Résultat

384

Étapes

- Valeur diminuée = base · (1 − taux), $20\,\% = 0{,}2$: $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Le prix d'origine avant la remise.

Énoncé: `x - 20 % = 384`

Résultat

$x = 480$

Étapes

- La valeur d'origine vaut 100 % ; après la baisse il en reste moins – la valeur connue : $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % est la valeur connue divisée par son nombre de pour cent : $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- La base vaut 100 %, soit cent fois 1 % : $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Un partage selon un rapport.

Énoncé: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Résultat

$$60,\ 90,\ 150$$

Étapes

- Le tout est partagé en autant de parts que la somme des termes : $2 + 3 + 5 = 10$
- Une part vaut : $300 : 10 = 30$
- Chaque part a autant de parts que son terme : $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; vérification $60 + 90 + 150 = 300$

Un rapport de fractions.

Énoncé: `2/3 : 4/9`

Résultat

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Étapes

- On supprime les fractions : tous les termes du rapport fois le plus petit multiple commun des dénominateurs, 9
  $$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$$
- Simplifions le rapport – tous les termes divisés par leur plus grand commun diviseur 2 :
  $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Proportionnalité inverse.

Énoncé: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Inverse

Résultat

$$x = 8\,\text{dní}$$

Étapes

- La règle de trois. Proportionnalité inverse – autant de fois plus de l'une, autant de fois moins de l'autre, les flèches opposées
  $$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$
- D'après les flèches, une proportion – le second rapport inversé : $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Intérêt simple avec un impôt de 15 %.

Énoncé: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Résultat

$$10000 + 510 = 10510$$

Étapes

- Intérêt = capital · p/100 · durée en années :
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- L'impôt de $15\,\%$ est prélevé sur l'intérêt, il reste l'intérêt net : $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- À la fin, le capital avec l'intérêt : $10000 + 510 = 10510$

Intérêts composés avec un impôt de 15 %, crédités chaque mois.

Énoncé: `intérêts composés(10000, 3 %, 5, 15 %, mensuel)`

Résultat

$$K_n \approx 11\,358{,}31$$

Étapes

- Données :
  $K_0 = 10\,000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- On convertit les unités :
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- En intérêts simples, l'intérêt se calcule toujours sur le capital initial : K_n = K₀(1 + pn). En intérêts composés, il est capitalisé et produit à son tour des intérêts : K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), m étant le nombre de capitalisations par an (annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle). La capitalisation continue est la limite m → ∞ : K_n = K₀e^(pn). Un impôt d sur les intérêts ramène le taux à p(1 − d). Le taux annuel effectif compare les fréquences. L'actualisation est le calcul inverse – combien placer aujourd'hui. Avec une inflation π, la valeur réelle est K_n/(1 + π)^n. Les intérêts mixtes (comme les banques créditent les intérêts une fois par an) composent les années entières et appliquent des intérêts simples au reste de la dernière : K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f.
  Équation du modèle : $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Capitalisations par an : $m = 12$
- Taux après impôt :
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Taux annuel effectif : $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- On remplace :
  $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11\,358{,}31$
- Intérêts au total : $K_n - K_0 \approx 1\,358{,}31$

Limitations connues

- Pas encore de problèmes rédigés – l'énoncé doit être écrit brièvement ; les intérêts composés avec versements réguliers et d'autres tâches financières sont dans les formulaires des Applications.

17. Conversions d’unités

Une conversion s’écrit « 5 m² = ? cm² » (ou « 5 m2 en cm2 »). L’application écrit la relation de conversion puis multiplie (vers une unité plus petite) ou divise (vers une plus grande) ; pour les unités décimales, elle indique de combien de rangs la virgule se déplace. Pour les aires et les volumes, elle explique pourquoi le nombre est une puissance : 1 m = 100 cm, donc 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Longueur de mm à km, aire de mm² à km² et are et hectare, volume de mm³ à m³ et ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), masse de mg à t, temps s, min, h, d – aussi composé « 1 h 30 min » et le résultat en heures et minutes –, vitesse km/h et m/s (1 m/s = 3,6 km/h) et température °C, K, °F par leurs formules.

Comment le saisir

`5 m² = ? cm², 3,5 l en m³, 1 h 30 min = ? min`	Une valeur avec son unité, « = ? » (ou « en ») et l’unité voulue.

Exemples

Une aire – le nombre est un carré.

Énoncé: `5 m² = ? cm²`

Résultat

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Étapes

- Pour les aires et les volumes, les deux (trois) dimensions sont converties – le nombre des longueurs est élevé à la puissance
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Vers une unité plus petite – il en faut plus, on multiplie :
  $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Multiplier par un 1 suivi de zéros (ici 4) déplace la virgule vers la droite d’autant de rangs qu’il y a de zéros ; on complète par des zéros.

Litres en mètres cubes.

Énoncé: `3,5 l = ? m³`

Résultat

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Étapes

- La relation de conversion : $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- Vers une unité plus grande – il en faut moins, on divise : $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Diviser par un 1 suivi de zéros (ici 3) déplace la virgule vers la gauche d'autant de rangs qu'il y a de zéros ; on complète par des zéros.

Minutes en heures, aussi en heures et minutes.

Énoncé: `150 min = ? h`

Résultat

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Étapes

- La relation de conversion : $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- Vers une unité plus grande – il en faut moins, on divise : $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- En heures et minutes : $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Vitesse – divisée par 3,6.

Énoncé: `72 km/h = ? m/s`

Résultat

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- La relation de conversion : $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- Vers une unité plus grande – il en faut moins, on divise : $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Température par sa formule.

Énoncé: `20 °C = ? K`

Résultat

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Étapes

- Les températures ne se convertissent pas par un facteur mais par une formule (les échelles ont des zéros différents) : $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logique et ensembles

Une proposition avec les connecteurs ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ est évaluée par une table de vérité – une colonne pour chaque connecteur, des 1 pour vrai – et l'application dit s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou seulement d'une proposition satisfiable ; pour une satisfiable, elle ajoute les formes normales disjonctive et conjonctive et une forme simplifiée.

Avec la puce « Négation », l'application nie la proposition pas à pas par les lois de De Morgan et les négations de l'implication et de l'équivalence. Une proposition avec quantificateurs ($\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$) est niée directement – le quantificateur universel devient existentiel, une inégalité la contraire. Pour une implication, elle propose aussi la contraposée et la réciproque.

Les ensembles donnés par leurs éléments ({1, 2, 3}) ou comme intervalles ((1; 5), ⟨3; 7)) et leur réunion, intersection, différence, complémentaire dans l'univers U et différence symétrique sont calculés opération par opération. Les ensembles en extension ont un diagramme de Venn avec les éléments dans ses régions, les intervalles le résultat sur la droite numérique.

Sans éléments ($A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$), l'application vérifie une égalité d'expressions ensemblistes par une table d'appartenance et des diagrammes de Venn des deux membres ; une expression seule, $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, est hachurée dans un diagramme de Venn. Elle décide aussi si $3 \in A$ ou $A \subseteq B$.

Comment le saisir

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Les connecteurs du clavier de l'application (onglet ∧∪) ou d'une photo (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Une implication et une équivalence comme flèches d'un clavier ordinaire. &, | et ! ne sont pas lus comme connecteurs – ce sont la valeur absolue et la factorielle.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Des quantificateurs avec un domaine (∈ ℝ) ou une condition (> 0), la proposition après deux-points.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	La tâche en un mot – la négation, la contraposée et la réciproque (negation, contrapositive, converse).

`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Un ensemble par ses éléments (séparés par des virgules, par des points-virgules avec la virgule décimale), un intervalle, l'univers U ; chaque définition sur sa ligne ou après une virgule.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	La réunion, l'intersection, la différence (aussi \), le complémentaire A', la différence symétrique ; l'intersection passe avant.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Un élément d'un ensemble et une inclusion – vrai ou faux.

Exemples

Une tautologie – une implication est équivalente à sa contraposée.

Énoncé: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Résultat

La proposition est une tautologie – vraie pour toute valuation.

Étapes

- La table de vérité (1 – vrai, 0 – faux), une colonne pour chaque connecteur

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- La dernière colonne ne contient que des 1 – la proposition est vraie pour toute valuation, une tautologie.

Une proposition satisfiable avec ses formes normales.

Énoncé: `(p ∨ q) ⇒ r`

Résultat

La proposition est satisfiable – vraie pour certaines valuations seulement. Une forme équivalente simplifiée : $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Étapes

- La table de vérité (1 – vrai, 0 – faux), une colonne pour chaque connecteur

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- La dernière colonne contient des 1 et des 0 – la proposition est satisfiable, mais pas une tautologie.
- Une forme simplifiée : $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; la forme normale disjonctive complète – la disjonction des lignes où elle est vraie $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- La forme normale conjonctive – à partir des lignes où elle est fausse $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Une négation par les lois de De Morgan pas à pas.

Énoncé: `p ∧ (q ⇒ r)` Négation

Résultat

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Étapes

- La négation : $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Loi de De Morgan, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$: $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- La négation d'une implication, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$: $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

La négation d'une proposition quantifiée.

Énoncé: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Résultat

$\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Étapes

- La négation : $\neg\big(\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 > 0\big)$
- « Pour tout … on a » devient « il existe un élément pour lequel on n'a pas » : $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \neg\big(x^2 + 1 > 0\big)$
- La négation d'une égalité ou inégalité est la relation contraire ($<$ en $\geq$, $=$ en $\neq$) : $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

La contraposée.

Énoncé: `p ⇒ ¬q` Contraposée

Résultat

$$q \Rightarrow \neg p$$

Étapes

- La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$ – équivalente : $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, négations simplifiées $q \Rightarrow \neg p$

Le complémentaire d'une réunion avec un diagramme de Venn.

Énoncé: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

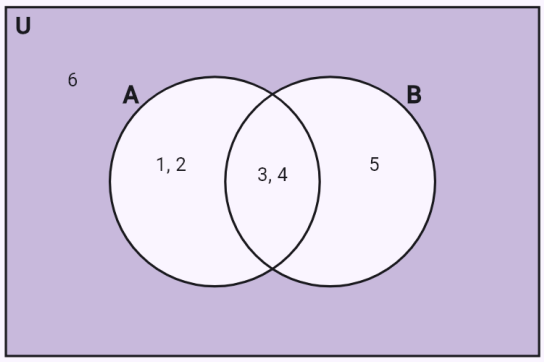
Résultat

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Étapes

- Donné : $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Donné : $B = \{3, 4, 5\}$
- Donné : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- La réunion – les éléments d'au moins un des ensembles : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Le complémentaire – les éléments de l'univers qui ne sont pas dans l'ensemble : $(A \cup B)' = \{6\}$

Graphique



L’intersection d’intervalles sur la droite numérique.

Énoncé: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

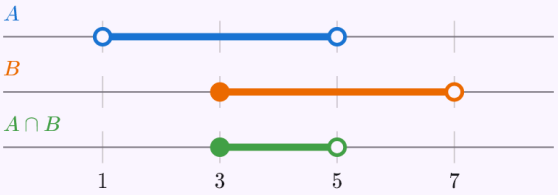
Résultat

$$A \cap B = [3\,;\,5[$$

Étapes

- Donné : $A =]1\,;\,5[$
- Donné : $B = [3\,;\,7[$
- L'intersection – les éléments des deux ensembles : $A \cap B = [3\,;\,5[$

Graphique



Chaque ensemble donné a sa propre ligne sur l'axe, le résultat est en vert. Un point plein appartient à l'ensemble, un point creux non.

La loi de distributivité par une table d’appartenance.

Énoncé: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Résultat

L'égalité est vraie – les deux membres sont le même ensemble.

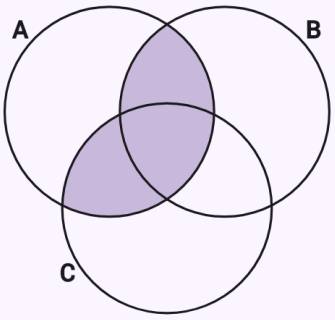
Étapes

- La table d'appartenance – pour chaque façon dont un élément peut appartenir aux ensembles (1 – il appartient), les deux membres comparés

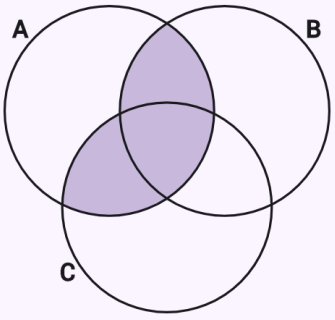
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Graphique

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



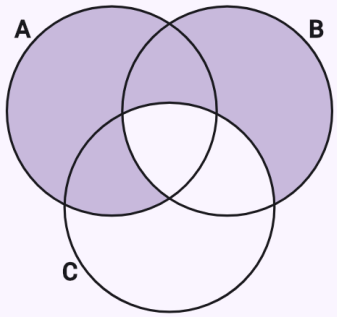
Une expression ensembliste dans un diagramme de Venn.

Énoncé: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Résultat

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

Graphique



Limitations connues

- Une table de vérité pour 5 variables au plus (32 lignes), un diagramme de Venn pour 4 ensembles au plus.
- Les ensembles définis par une propriété ({x ∈ ℝ : x² < 4}) ne sont pas encore lus – écrivez-les comme intervalles.

19. Nombres complexes

Écrivez un nombre complexe avec l'unité imaginaire i : 1 - i√3 (ou 1 - i*sqrt(3)), sous forme trigonométrique 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) ou cis(pi/3), sous forme exponentielle 3e^(i pi/4) ; les angles aussi en degrés (cos 60° + i sin 60°). Les nombres peuvent être nommés, chacun sur sa ligne (z_1 = 1 + i), avec une expression en leurs noms sur la dernière ligne (z_1/z_2, z^8).

Pour un nombre seul, l'application calcule le module $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et l'argument φ – à partir des valeurs de la table du cosinus et du sinus, sinon par l'angle aigu tiré de $\tan \alpha = |b/a|$ et le quadrant (exactement avec arctan et approximativement en radians et en degrés) – et écrit les formes trigonométrique et exponentielle. Un nombre sous forme trigonométrique est mis sous forme algébrique. L'argument est dans ⟨0 ; 2π) ; la puce « Argument principal » le fait passer dans (−π ; π⟩. Le graphique montre le nombre dans le plan complexe comme un vecteur avec l'arc de l'argument.

Une puissance comme (1 + i)^10 se calcule par la formule de Moivre, l'argument réduit de multiples de 2π ; produit et quotient par les modules et les arguments. Les puces choisissent « Forme trigonométrique » (pour une puissance « Formule de Moivre ») ou « Forme algébrique » ; la division de nombres algébriques par le conjugué est dans le chapitre Calcul algébrique. Une racine root(3, 8i) et une équation binôme $z^3 = 8i$ donnent les n solutions par $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; dans le graphique, ce sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés. Une équation d'inconnue z est résolue directement dans les complexes ; la puce « Résoudre dans : » la fait passer dans $\mathbb{R}$. Une équation du second degré à coefficients complexes ($z^2 + i = 2z$) est résolue en complétant le carré, $(z - 1)^2 = 1 - i$; la racine carrée complexe est cherchée sous la forme a + bi en comparant parties réelles et imaginaires.

Une équation avec le conjugué $\bar{z}$ (la touche $\bar{z}$ écrit conj(z), une photo donne \bar{z}), avec |z|, Re z et Im z se résout en posant z = x + yi : l'application écrit les deux membres sous la forme a + bi, identifie les parties réelles et les parties imaginaires et résout le système de deux équations en x et y obtenu – elle exprime une variable dans une équation et la remplace dans l'autre, et si l'équation se factorise (y(2x + 1) = 0), elle distingue des cas. Les solutions sont affichées comme points du plan complexe. Si les parties imaginaires coïncident d'elles-mêmes (|z − 1| = 2, Re z ≥ 1, |z − i| < |z + 1|), le résultat est un ensemble de points : l'application élève les modules au carré, fait apparaître des carrés et décrit le cercle (le disque, l'extérieur d'un cercle), la droite, le demi-plan ou la médiatrice. Plusieurs conditions, chacune sur sa ligne ou séparées par des virgules (|z| ≤ 2, Re z > 0), et une double inégalité (1 < |z − 1| ≤ 2) sont dessinées comme leur intersection – une région colorée ; une frontière en trait plein appartient à l'ensemble, une frontière en pointillés non.

Comment le saisir

`1 - i*sqrt(3)`	La forme algébrique avec l'unité imaginaire i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	La forme trigonométrique, en bref cis φ.
`3e^(i pi/4)`	La forme exponentielle.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Des nombres nommés, chacun sur sa ligne, et une expression avec eux.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Toutes les racines n-ièmes, une équation binôme.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Le conjugué, la partie réelle et la partie imaginaire.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Un ensemble de points du plan complexe, plusieurs conditions ligne par ligne.

Exemples

Module, argument à partir des valeurs de la table, formes trigonométrique et exponentielle.

Énoncé: `1 - i*sqrt(3)`

Résultat

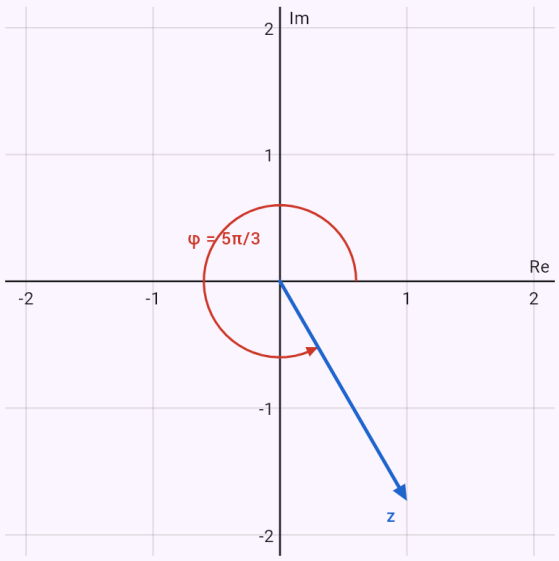
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Étapes

- Le module |z| = √(a² + b²) :
  $$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- L'argument φ à partir de cos φ = a/|z| et sin φ = b/|z| – valeurs de la table
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- La forme trigonométrique z = |z|(cos φ + i sin φ) :
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- La forme exponentielle $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

Un argument hors de la table – angle aigu et quadrant.

Énoncé: `-3 + 4i`

Résultat

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$$

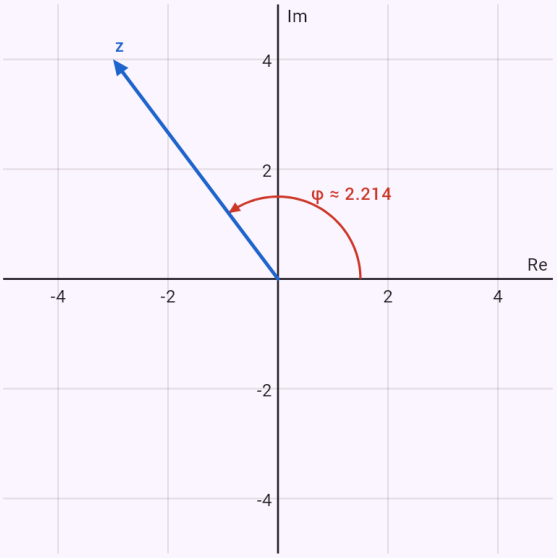
$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Étapes

- Le module |z| = √(a² + b²) :
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- L'angle aigu α à partir de tan α = |b/a|. Le nombre est dans le quadrant 2, donc l'argument est
  $\tan\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$
  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- La forme trigonométrique z = |z|(cos φ + i sin φ) :
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$
- La forme exponentielle $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

De la forme trigonométrique à la forme algébrique.

Énoncé: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Résultat

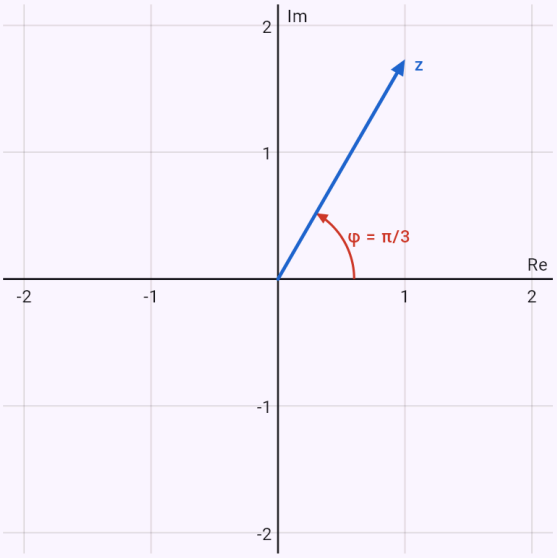
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Étapes

- Le nombre est donné sous forme trigonométrique (exponentielle) – module et argument lus directement
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$: $|z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- La forme algébrique – on remplace le cosinus et le sinus par leurs valeurs et on développe
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- La forme exponentielle $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

La formule de Moivre.

Énoncé: `(1 + i)^10` Formule de Moivre

Résultat

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

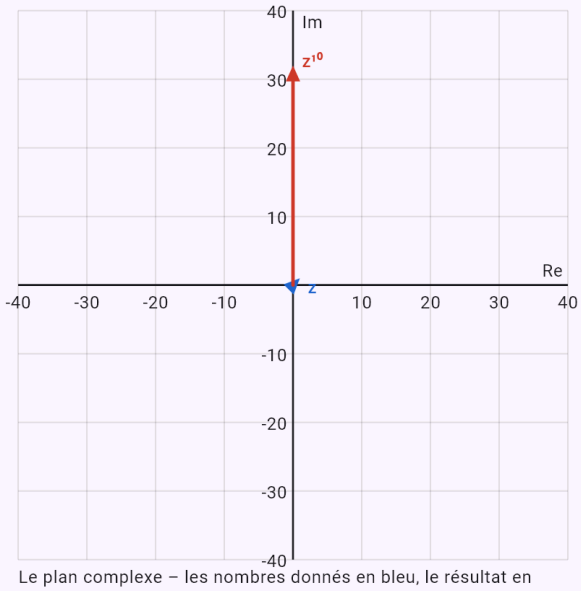
Étapes

- Le module |z| = √(a² + b²) : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- L'argument φ à partir de cos φ = a/|z| et sin φ = b/|z| – valeurs de la table

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- La formule de Moivre $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- L'argument ramené dans l'intervalle $\langle 0; 2\pi)$ par un multiple d'un tour complet : $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- La forme algébrique – on remplace le cosinus et le sinus par leurs valeurs et on développe :
  $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

Un quotient sous forme trigonométrique.

Énoncé: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Forme trigonométrique

Résultat

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

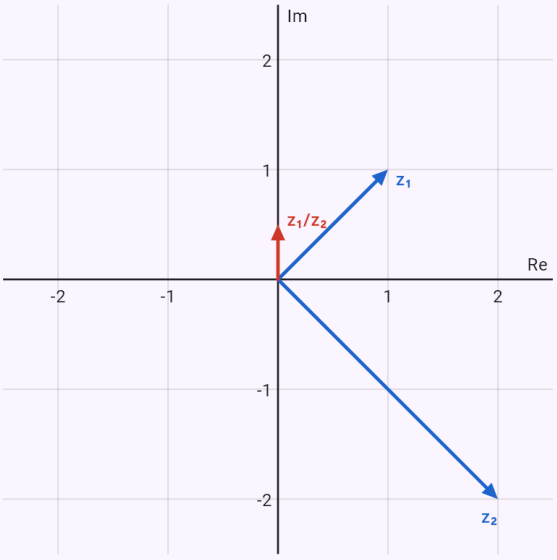
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Étapes

- Le module |z| = √(a² + b²) : $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- L'argument φ à partir de cos φ = a/|z| et sin φ = b/|z| – valeurs de la table
  $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- Le module |z| = √(a² + b²) :
  $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- L'argument φ à partir de cos φ = a/|z| et sin φ = b/|z| – valeurs de la table
  $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$
- Pour un quotient, les modules se divisent et les arguments se soustraient
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}($
- L'argument ramené dans l'intervalle $\langle 0; 2\pi)$ par un multiple d'un tour complet : $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- La forme algébrique – on remplace le cosinus et le sinus par leurs valeurs et on développe

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

Une équation binôme – trois solutions aux sommets d'un triangle.

Énoncé: `z^3 = 8i`

Résultat

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

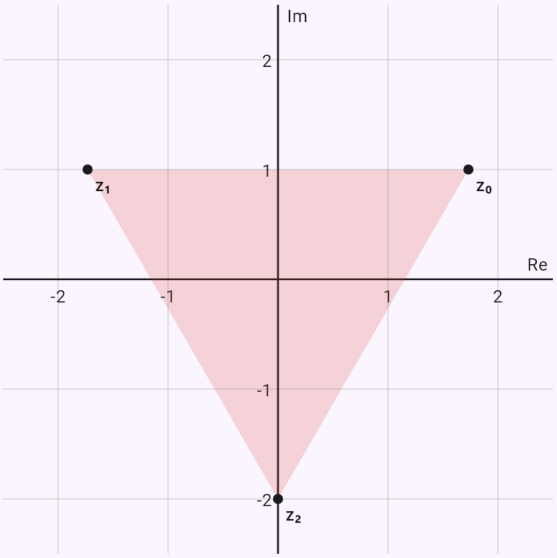
Étapes

- Une équation binôme $z^n = a$ – ses solutions sont toutes les racines n-ièmes de a : $z^3 = 8i$
- Le module |z| = √(a² + b²) : $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Le nombre est sur un axe – son argument directement : $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Les 3 solutions par la formule $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Pour k = 0 : $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Pour k = 1 : $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Pour k = 2 : $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- Dans le plan complexe, les solutions sont les sommets d'un polygone régulier à 3 côtés inscrit dans le cercle de centre 0 et de rayon 2

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

Équation avec le conjugué – identification des parties réelles et imaginaires.

Énoncé: `z + 2conj(z) = 3 - i`

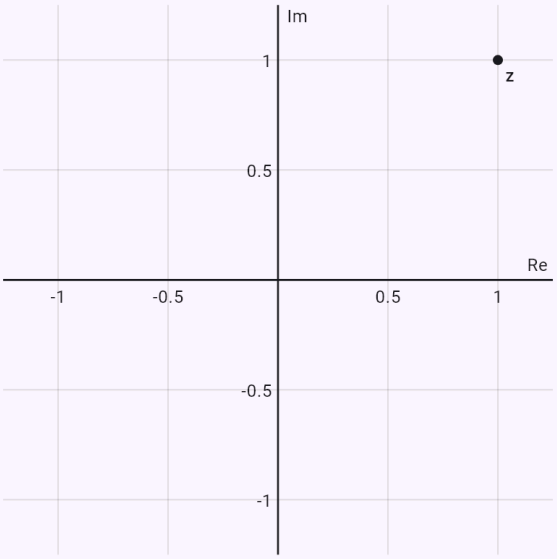
Résultat

$$z = 1 + i$$

Étapes

- On pose z = x + yi avec x et y réels : $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- On écrit les deux membres sous la forme a + bi : $3x - yi = 3 - i$
- Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales : $3x = 3$ et $-y = -1$
- On remplace $y = 1$ dans l'autre équation : $3x = 3$
- On passe tout du même côté : $3x - 3 = 0$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $3x = 3$
- On divise par le coefficient 3 : $x = 1$

Graphique



Plan complexe – les solutions comme points : sur l'axe horizontal la partie réelle, sur l'axe vertical la partie imaginaire.

L'équation z² = z̄ – factorisation et disjonction de cas, quatre points.

Énoncé: `z^2 = conj(z)`

Résultat

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

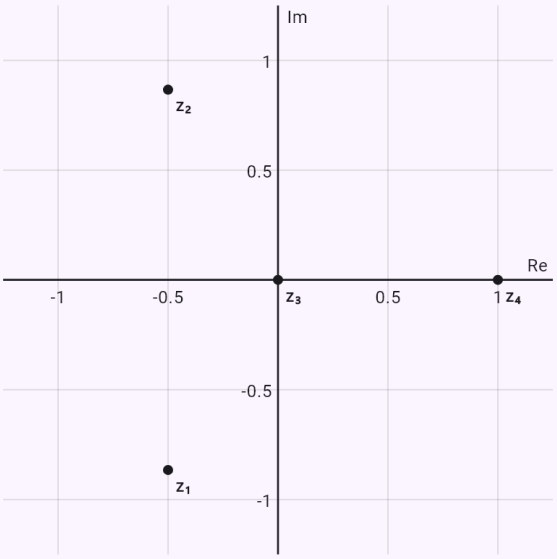
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Newton (tangentes) | Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

- On pose z = x + yi avec x et y réels :
  $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- On écrit les deux membres sous la forme a + bi :
  $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales :
  $x^2 - y^2 = x$ et $2xy = -y$
- On factorise l'équation – un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul
  $2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$
- On remplace $x = -\frac{1}{2}$ dans l'autre équation :
  $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- On passe tout du même côté : $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- On applique la formule des racines :
  $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- On remplace $y = 0$ dans l'autre équation : $x^2 = x$
- On passe tout du même côté : $x^2 - x = 0$
- On calcule le discriminant :
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- On applique la formule des racines :
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Graphique



Plan complexe – les solutions comme points : sur l'axe horizontal la partie réelle, sur l'axe vertical la partie imaginaire.

Intersection d'un disque et d'un demi-plan – région colorée, la frontière en pointillés est exclue.

Énoncé: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

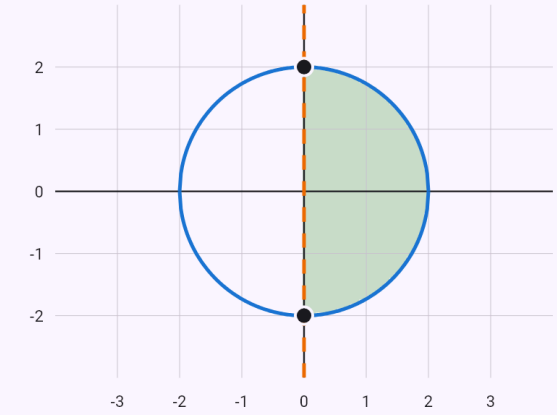
Résultat

$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Étapes

- On pose z = x + yi avec x et y réels : $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- Condition 1 sur x et y : $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Les deux membres sont positifs, on les élève au carré : $x^2 + y^2 \leq 4$
- C'est le disque de centre 0 et de rayon 2, cercle inclus.
- Condition 2 sur x et y : $x > 0$
- C'est le demi-plan à droite de la droite $x = 0$, droite frontière exclue.
- Inéquation 1 : $x^2 + y^2 \leq 4$
- La frontière est la courbe $x^2 + y^2 = 4$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- Inéquation 2 : $x > 0$
- La frontière est la courbe $x = 0$ – tracée en pointillés, ses points ne font pas partie de la solution.
- On substitue le point $[1;\ 0]$: $1 > 0$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- La solution du système est la partie commune de ces régions – colorée sur le graphique.
- Sommets de la région (intersections des frontières) : $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Graphique



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Plan complexe – sur l'axe horizontal x = Re z, sur l'axe vertical y = Im z. L'ensemble de points est la région colorée. Une frontière en trait plein en fait partie, une frontière en pointillés non.

Les points équidistants de i et de −1 – une médiatrice.

Énoncé: `|z - i| = |z + 1|`

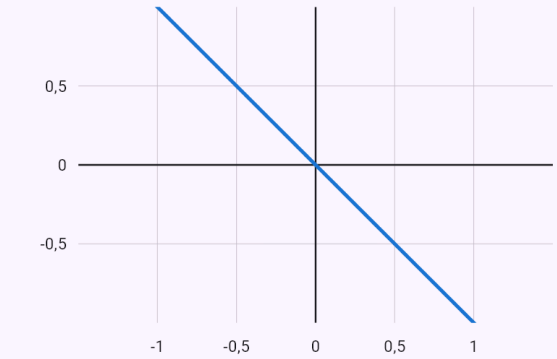
Résultat

$$y = -x$$

Étapes

- On pose z = x + yi avec x et y réels : $z = x + yi$
- La condition sur x et y : $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Les deux membres sont positifs, on les élève au carré : $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Ce sont les points équidistants de i et de -1 – la médiatrice du segment d'extrémités i et -1 : $y = -x$

Graphique



$|z - i| = |z + 1|$

Plan complexe – sur l'axe horizontal x = Re z, sur l'axe vertical y = Im z. L'ensemble de points est la ligne tracée.

Limitations connues

- Les solutions dont l'argument n'est pas une valeur de la table sont données sous forme trigonométrique et approximativement sous forme algébrique.
- Un ensemble de points est décrit lorsqu'il s'agit d'un cercle (disque), d'une droite (demi-plan) ou d'une médiatrice ; les autres coniques (Im $z^2 = 2$) sont seulement tracées et une somme de modules ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, une ellipse) n'est pas encore prise en charge.
- Un système en x et y qu'on ne peut pas résoudre en exprimant une inconnue est résolu sans étapes.

Généré à partir de l'application Mathtrace