Mathtrace – guide d’utilisation

VI. Applications : physique et ingénierie

Sommaire

VI. Applications : physique et ingénierie

42. Applications des équations différentielles

43. Physique

44. Statique et résistance des matériaux

45. Astronomie et astrophysique

46. Applications de l'analyse complexe

42. Applications des équations différentielles

Les applications se trouvent dans la section « Applications » de l'écran d'accueil : les tuiles des domaines choisis dans les paramètres (l'engrenage, « Mes domaines ») et les applications isolées épinglées avec la punaise dans la liste ou dans le formulaire ; « Toutes les applications » les affiche par domaines (une application peut appartenir à plusieurs, un circuit RC à la physique et à l'électrotechnique par exemple). Les équations différentielles utilisent un formulaire de 23 modèles : carbone 14, désintégration et demi-vie, croissance exponentielle, chaîne de désintégration, refroidissement de Newton (aussi l'heure du décès à partir de deux mesures), cinétique chimique d'ordre 0 à 2, médicament dans le sang, alcoolémie, épargne et crédit, circuits RC, RL et RLC, ressort, chute avec frottement, vidange d'un réservoir, mélange, croissance logistique et de Gompertz, population exploitée, épidémie SIR, proie et prédateur, compétition de deux espèces et chémostat.

Vous choisissez le modèle, sa variante et ce que vous cherchez ; les constantes sont préremplies et modifiables. Chaque grandeur et le résultat ont une unité au choix : l'application convertit les valeurs (la conversion est une étape). Le « ? » à côté du modèle explique d'où vient son équation.

Les étapes posent le modèle, résolvent l'équation (séparation des variables, facteur intégrant, équation caractéristique), utilisent les conditions, expriment la grandeur cherchée et remplacent par les nombres. Les systèmes sont résolus numériquement par Runge–Kutta, leurs équilibres et leur stabilité exactement. Le graphique montre les grandeurs au cours du temps, pour les systèmes aussi le plan de phase.

Exemples

Âge d'une découverte contenant encore 35 % de ¹⁴C.

Énoncé: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Résultat

$$t \approx 8700\,\text{ans}$$

Étapes

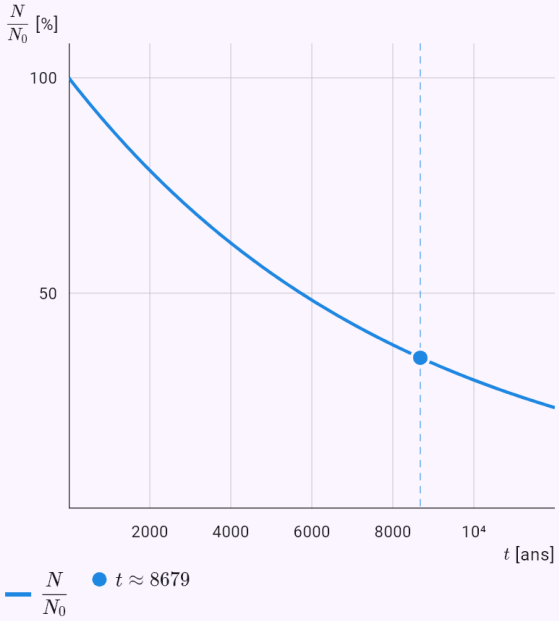
- On cherche t ; données : $T_{1/2} = 5730\,\text{ans}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- On convertit les unités : $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Les êtres vivants absorbent le carbone de l'air et contiennent donc la même proportion de l'isotope radioactif ¹⁴C que l'atmosphère. Après la mort, l'absorption cesse et le ¹⁴C se désintègre. Le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel au nombre de noyaux restants : dN/dt = −λN, λ étant la constante radioactive. La solution est N = N₀·e^(−λt) ; après la demi-vie T½ = 5730 ans il en reste la moitié, donc λ = ln 2 / T½. De la proportion de ¹⁴C restante (ou de l'activité mesurée comparée à celle d'un échantillon vivant) on tire l'âge. Équation du modèle : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Séparation des variables : $\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Intégration des deux membres : $\ln|N| = -\lambda t + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $N = Ce^{-\lambda t}$
- On substitue la condition initiale $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- En une demi-vie la quantité est divisée par deux – constante radioactive

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\text{an}^{-1}$$

- On exprime la grandeur cherchée : $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N_0}{N}$
- On remplace : $t = \frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\text{ans}$

- Les laboratoires donnent « l'âge radiocarbone » avec la demi-vie de Libby de 5568 ans et le convertissent avec une courbe d'étalonnage (le ¹⁴C atmosphérique n'a pas toujours été le même) ; l'âge réel peut donc différer un peu.

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Heure du décès : 30 °C à la découverte, 28 °C une heure plus tard, pièce à 20 °C.

Énoncé: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

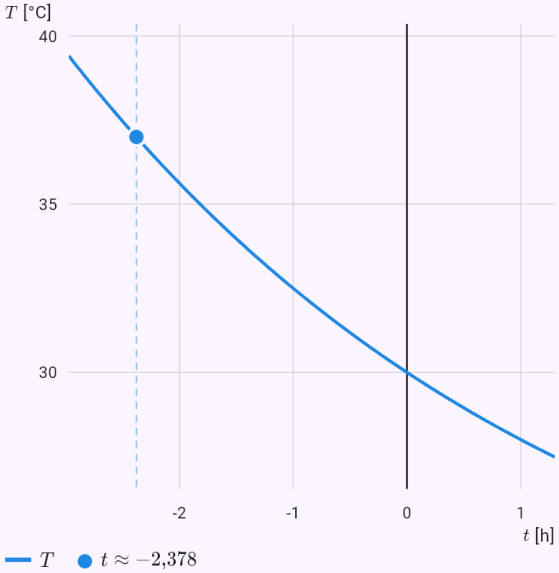
Résultat

$$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$$

Étapes

- On cherche t ; données
  $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad t_1 = 1\,\mathrm{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Un corps cède la chaleur d'autant plus vite que l'écart de température est grand : dT/dt = −k(T − T_a), T_a étant la température ambiante et k dépendant du corps. La solution est T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt). On détermine k à partir de deux mesures. C'est ainsi que la médecine légale estime l'heure du décès : on mesure la température du corps à sa découverte puis un peu plus tard et on calcule quand il était à 37 °C. Équation du modèle : $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Séparation des variables : $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Intégration des deux membres : $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $T = T_a + Ce^{-kt}$
- On substitue la condition initiale $T(0) = T_0$:
  $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) :
  $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k d'après la deuxième mesure
  $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- On exprime la grandeur cherchée
  $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- On remplace : $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Un temps négatif signifie avant la première mesure (pour l'heure du décès : autant d'heures avant la découverte).

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

500 mg toutes les 8 heures : le taux stationnaire.

Énoncé: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Résultat

$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$

$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$

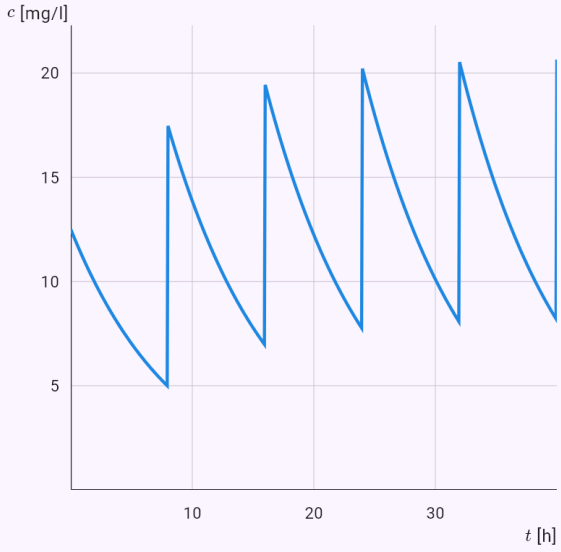
Étapes

- On cherche c_{max} ; données $D = 500\,\mathrm{mg}, \quad V = 40\,\mathrm{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}, \quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Un médicament se répartit dans le volume de distribution V ; les reins et le foie l'éliminent à une vitesse proportionnelle à la concentration : dc/dt = −kc avec k = ln 2 / T½. Après une dose D, c = (D/V)·e^(−kt). Avec des doses répétées toutes les τ, les restes s'additionnent (série géométrique) et le taux se stabilise entre c_min et c_max. Pour une perfusion de débit R, dc/dt = R/V − kc et la concentration tend vers R/(kV).
  Équation du modèle : $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Concentration initiale après la dose : $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Constante d'élimination d'après la demi-vie biologique : $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h}^{-1}$
- Séparation des variables : $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Intégration des deux membres : $\ln|c| = -kt + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $c = Ce^{-kt}$
- On substitue la condition initiale $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $c = c_0 e^{-kt}$
- Part du médicament restant à la dose suivante : $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155 \cdot 8} \approx 0{,}3969$
- On exprime la grandeur cherchée

$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$

- On remplace : $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- On remplace : $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Facteur d'accumulation (combien de fois le taux stationnaire dépasse celui d'une dose) : $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Graphique



Comment les grandeurs varient dans le temps.

Mensualité d'un crédit de 1 000 000 CZK sur 20 ans à 5 %.

Énoncé: model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];

```
kind=loan)
```

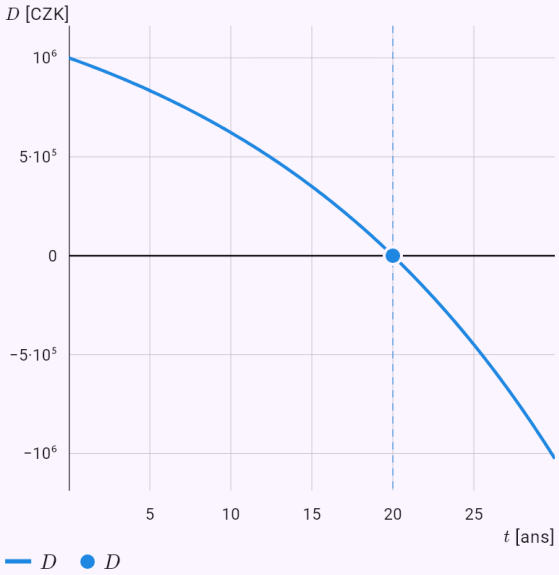
Résultat

$$a \approx 6\,592\ \mathrm{CZK/mois}$$

Étapes

- On cherche a ; données
  $D_0 = 1\,000\,000\ \mathrm{CZK}, \quad r = 5\ \%\ \text{par an}, \quad t = 20\ \text{ans},$
- On convertit les unités : $r = 5\ \%\ \text{par an} = 0{,}05\ \text{an}^{-1}$
- Avec des intérêts continus, l'intérêt s'ajoute à chaque instant proportionnellement au solde : dB/dt = rB, r étant le taux annuel. Des versements réguliers a augmentent le solde (dB/dt = rB + a), les remboursements d'un crédit diminuent la dette (dD/dt = rD − a). On sépare les variables ; la solution donne le solde, la durée ou la mensualité (annuité continue). Équation du modèle : $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Séparation des variables : $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Intégration des deux membres : $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- On substitue la condition initiale $D(0) = D_0$: $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Les intérêts continus sont un modèle : les banques capitalisent chaque mois ou chaque année ; l'écart est faible.
- On exprime la grandeur cherchée : $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- On remplace
  $a = \frac{0{,}05(1\,000\,000 e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79\,100\ \mathrm{CZK/an}$
- Total payé : $a\,t = 1\,582\,000\ \mathrm{CZK}$
- On convertit les unités :
  $a \approx 79\,100\ \mathrm{CZK/an} = 6\,592\ \mathrm{CZK/mois}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Temps de charge d’un condensateur jusqu’à la moitié de la tension.

Énoncé: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

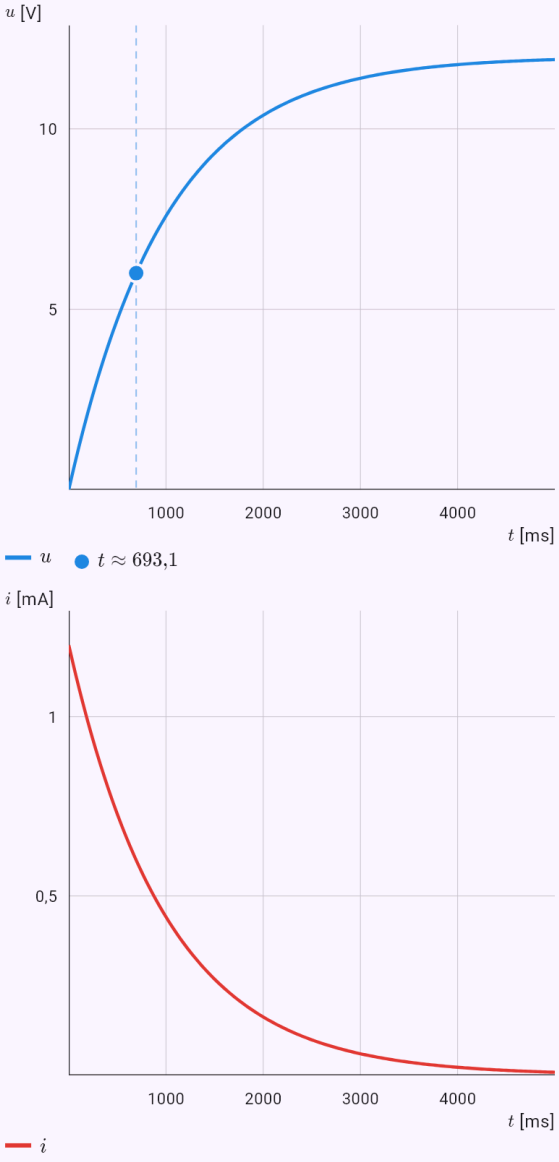
Résultat

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Étapes

- On cherche t ; données
  $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Lors de la charge d’un condensateur à travers une résistance, la loi des mailles donne U = Ri + u et le courant charge le condensateur : i = C·du/dt. D’où RC·du/dt + u = U. La tension tend vers celle de la source : u = U(1 − e^(−t/τ)), τ = RC étant la constante de temps ; le courant i = (U/R)·e^(−t/τ) diminue. À la décharge, u = U₀·e^(−t/τ). Équation du modèle : $RC\dfrac{du}{dt} + u = U$
- Constante de temps : $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Séparation des variables : $\dfrac{du}{u - U} = -\dfrac{dt}{\tau}$
- Intégration des deux membres : $\ln|u - U| = -\dfrac{t}{\tau} + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- On substitue la condition initiale $u(0) = 0$:
  $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) :
  $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- On exprime la grandeur cherchée : $t = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{u}{U}\right)$
- On remplace : $t = -1000 \ln\left(1 - \dfrac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Ressort amorti : élongation à 1 s.

Énoncé: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

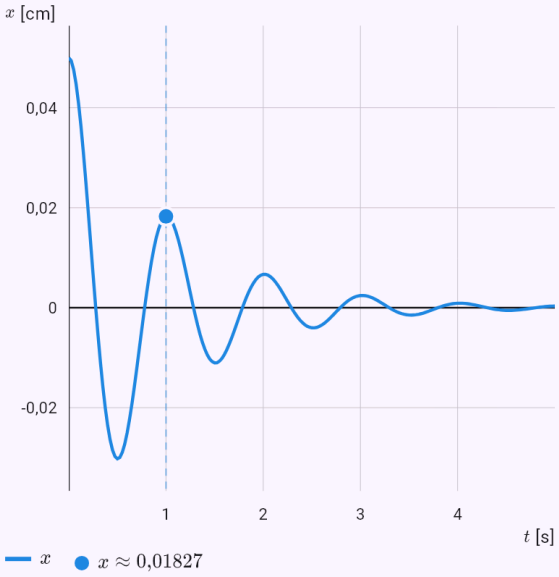
Résultat

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Étapes

- On cherche x ; données $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- On convertit les unités : $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Un corps fixé à un ressort subit la force de rappel −kx (Hooke), le frottement −b·v et éventuellement une force excitatrice $F_0 \cdot \cos \omega t$. Selon la 2e loi de Newton $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$, une équation linéaire du 2e ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique disent si le corps oscille ou revient seulement à l'équilibre. Une excitation proche de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ provoque la résonance. Équation du modèle : $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Pulsation propre (sans amortissement) : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Coefficient d'amortissement δ : $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- On cherche des solutions $x = e^{\lambda t}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique : $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$) : racines complexes, oscillations amorties.
- Solution de l'équation homogène : $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- On substitue les conditions dans la solution générale : $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, d'où $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- On remplace : $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- On convertit les unités : $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Épidémie avec R_0 = 2,5 : pic et nombre final d'infectés.

Énoncé: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Résultat

$$I_{max} \approx 2340\,\text{ind.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{j}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{ind.}$$

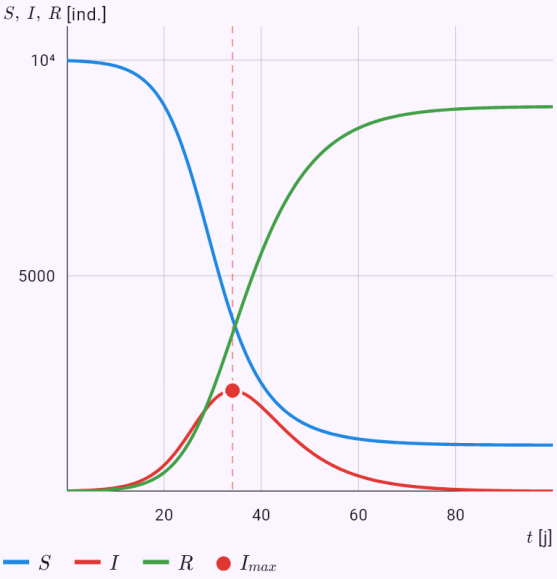
Étapes

- On cherche t_{max} ; données
  $N = 10\,000\,\text{ind.}, \quad I_0 = 10\,\text{ind.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{j}$
- La population N se divise en sensibles S, infectés I et rétablis R. Les contaminations sont proportionnelles aux rencontres : β·S·I/N ; les infectés guérissent au taux γ = 1/D (D, la durée de la maladie). Le système S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement. On obtient cependant exactement le nombre de reproduction de base R_0 = β/γ, le pic, le nombre final d'infectés et le seuil d'immunité collective 1 − 1/R_0. Équation du modèle
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Taux de guérison : $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{j}^{-1}$
- Taux de transmission : $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{j}^{-1}$
- La somme S + I + R = N est constante (les équations s'additionnent à zéro).
- Seuil d'immunité collective (part d'immunisés à partir de laquelle la maladie cesse de se propager) :
  $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- L'épidémie démarre car au départ
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Le pic a lieu pour S = N/R_0 ; d'après l'équation de dI/dS
  $$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$
- On résout l'équation numériquement (dichotomie)
  $$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{ind.}$$

- Au total, tombent malades :
  $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{ind.}\ (89{,}3\,\%)$
- Le système n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 avec un pas $0{,}05$ sur $[0\,;\,100]$
- › La méthode : méthode de Runge–Kutta d'ordre 4, 2000 pas
- D'après la solution numérique : $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{j}$

Graphique

Au cours du temps | Plan de phase



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Proie et prédateur : équilibre, stabilité et période.

Énoncé: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

`c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Résultat

$$[x^*\,;\,y^*] \approx [80\,;\,50]$$
$$T \approx 14{,}9\,\text{mois}$$

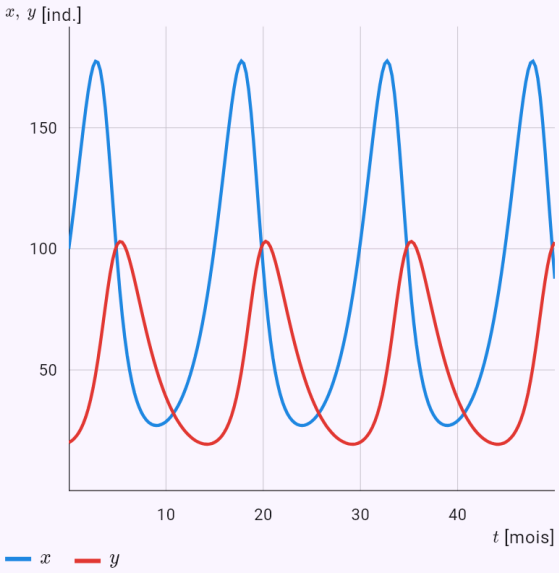
Étapes

- On cherche T ; données
  $a = 0{,}5\,\text{mois}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{ind.}\cdot\text{mois})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{m}$
- Les proies x se multiplient sans prédateurs (ax), les prédateurs y meurent sans proies (−cy). Les rencontres, proportionnelles à xy, retirent des proies (−bxy) et nourrissent les prédateurs (+dxy). Le système x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) a l'équilibre [c/d ; a/b], aux valeurs propres imaginaires pures : les populations oscillent périodiquement, les prédateurs avec un retard. Résolution numérique ; équilibres et intégrale première exacts. Équation du modèle
  $x' = ax - bxy$
  $y' = -cy + dxy$
- Équilibres – toutes les dérivées sont nulles
  $x(a-by)=0,\ y(dx-c)=0 \Rightarrow [0\,;\,0],\ \left[\frac{c}{d}\,;\,\frac{a}{b}\right] \approx [80$
- Stabilité par linéarisation – matrice jacobienne du système
  $J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & dx-c \end{pmatrix}$
- Au point $[0\,;\,0]$ valeurs propres $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – col (instable).
  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$
- Au point $[80\,;\,50]$ valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – centre (oscillations autour de l'équilibre).
  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$
- En divisant les équations et en séparant, on obtient une intégrale première, constante le long d'une trajectoire :
  $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$
- Comme V ne varie pas le long d'une trajectoire, les trajectoires sont des courbes fermées : les populations oscillent périodiquement.

- Période des petites oscillations autour de l'équilibre (d'après les valeurs propres) : $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{mois}$
- Le système n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 avec un pas $0{,}0125$ sur $[0\,;\,50]$
- › La méthode : méthode de Runge–Kutta d'ordre 4, 4000 pas
- D'après la solution numérique : $T \approx 14{,}95\,\text{mois}$

Graphique

Au cours du temps | Plan de phase



Comment les grandeurs varient dans le temps.

Récipient conique : durée de vidange.

Énoncé: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

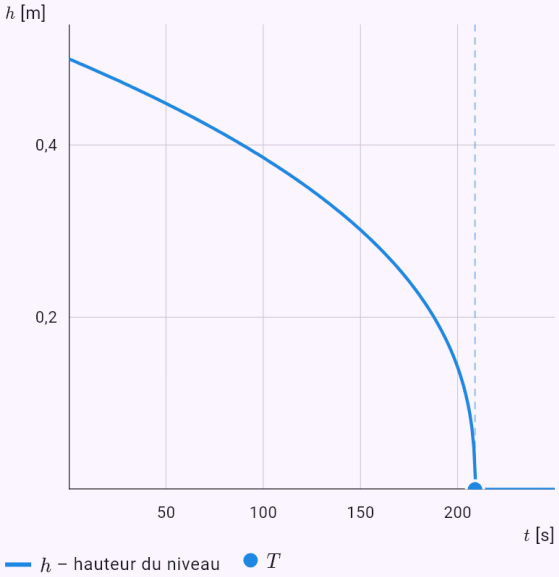
Résultat

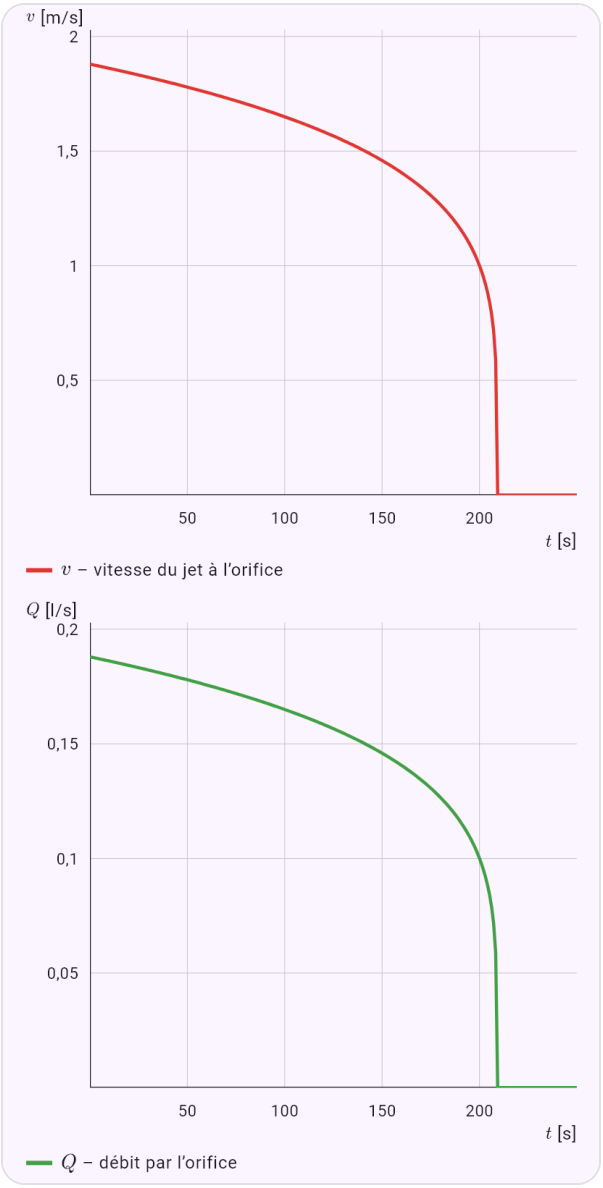
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

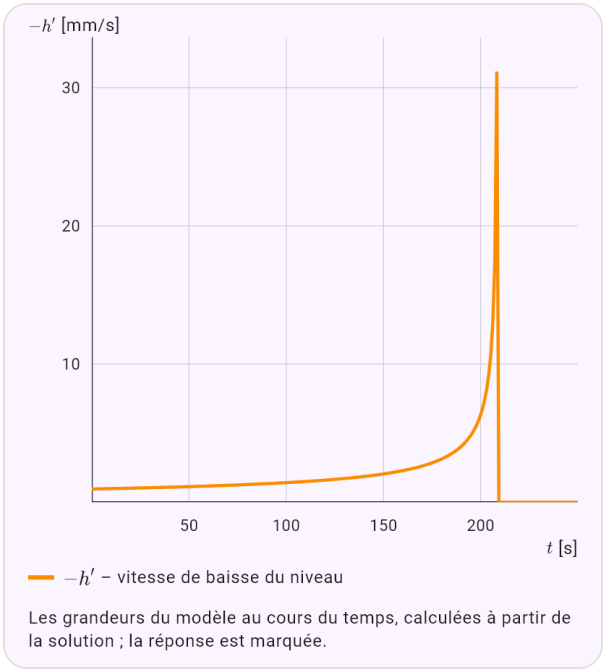
Étapes

- On cherche T ; données
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- On convertit les unités
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Un récipient de révolution de la forme choisie a un trou au fond. Le liquide sort à la vitesse donnée par le bilan d'énergie : celle de Torricelli v = μ√(2gh), corrigée pour un grand trou (terme s²/S²), pour un tube de sortie de longueur L (qui ajoute la hauteur L, mais aussi un frottement selon la viscosité, laminaire ou turbulent) et, pour un récipient fermé, pour la dépression de l'air au-dessus du niveau, qui ralentit l'écoulement jusqu'à l'arrêter. En dt sort s·v·dt et le niveau baisse de dh, donc dt = −S(h)/(s·v) dh et le temps s'obtient par intégration. Le graphique montre le niveau, la vitesse du jet et le débit. Pour r = R·(h/H)^p sans tube ni couvercle, la formule est aussi affichée. Avec r = k·h^(1/4), le niveau baisse régulièrement, c'est le principe des clepsydres.
  Équation du modèle
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Section du récipient à la hauteur h :
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Eau à 20 °C : $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Liquide à pression normale de 0 à 100 °C.
- Séparation des variables : $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La vitesse du jet dépend du niveau de façon compliquée, l'intégrale est donc calculée numériquement.
- Pour comparaison, Torricelli sans correction de grand trou : $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- On exprime la grandeur cherchée : $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- On remplace : $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- On convertit les unités : $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Graphique







Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Huile d'un récipient sphérique par un tube : niveau, vitesse du jet à l'orifice, débit et vitesse de baisse du niveau.

Énoncé: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

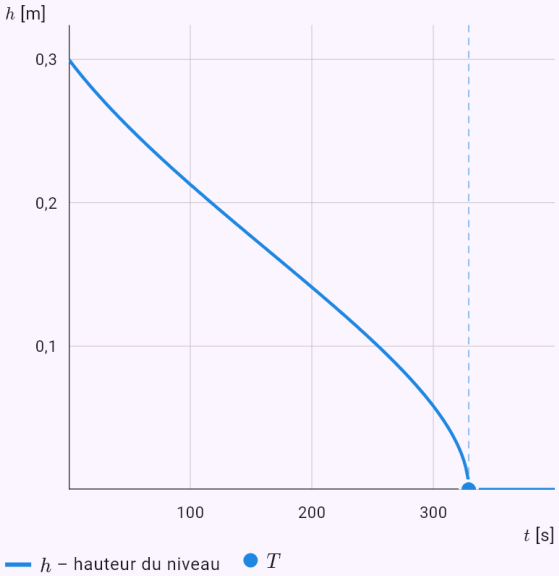
Résultat

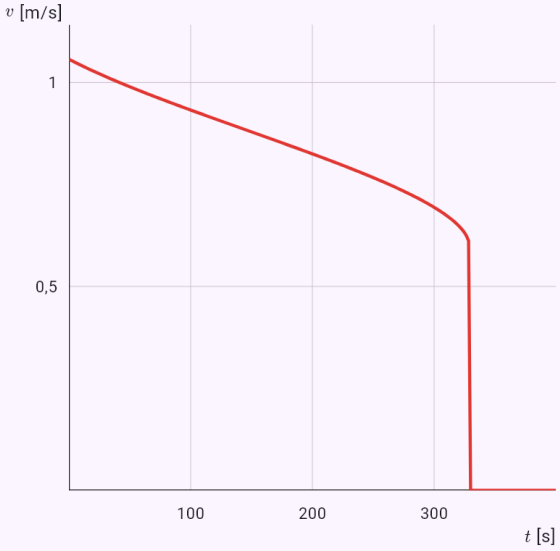
$$T \approx 5{,}48\,\text{min}$$

Étapes

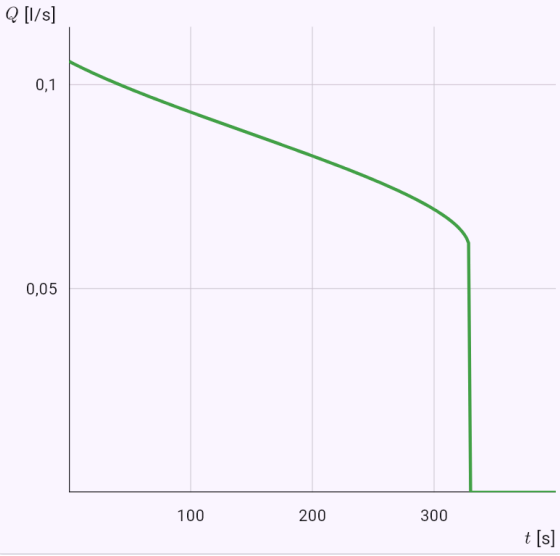
- On cherche T ; données
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- On convertit les unités
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Un récipient de révolution de la forme choisie a un trou au fond. Le liquide sort à la vitesse donnée par le bilan d'énergie : celle de Torricelli v = μ√(2gh), corrigée pour un grand trou (terme s²/S²), pour un tube de sortie de longueur L (qui ajoute la hauteur L, mais aussi un frottement selon la viscosité, laminaire ou turbulent) et, pour un récipient fermé, pour la dépression de l'air au-dessus du niveau, qui ralentit l'écoulement jusqu'à l'arrêter. En dt sort s·v·dt et le niveau baisse de dh, donc dt = −S(h)/(s·v) dh et le temps s'obtient par intégration. Le graphique montre le niveau, la vitesse du jet et le débit. Pour r = R·(h/H)^p sans tube ni couvercle, la formule est aussi affichée. Avec r = k·h^(1/4), le niveau baisse régulièrement, c'est le principe des clepsydres.
  Équation du modèle
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Section du récipient à la hauteur h :
  $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Huile de tournesol à 20 °C :
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Elle fige vers −17 °C et ne bout pas : au-delà de 200 °C elle se décompose ; la viscosité baisse fortement avec la température.
- Séparation des variables : $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La vitesse du jet dépend du niveau de façon compliquée, l'intégrale est donc calculée numériquement.
- On exprime la grandeur cherchée : $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- On remplace : $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- On convertit les unités : $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

Graphique

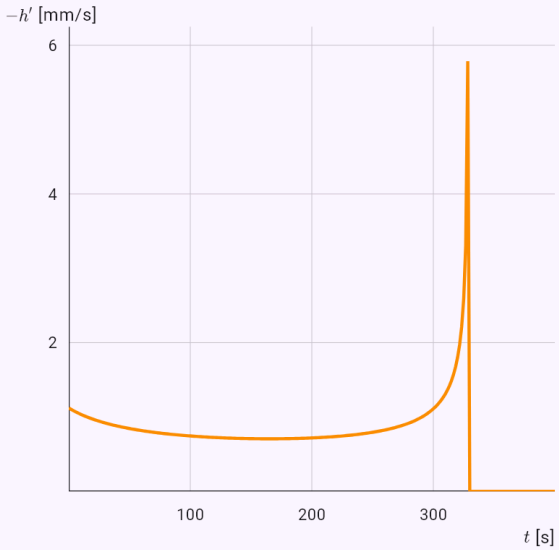




v – vitesse du jet à l'orifice



Q – débit par l'orifice



$-h'$ – vitesse de baisse du niveau

Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Forme du récipient où le niveau baisse régulièrement.

Énoncé: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

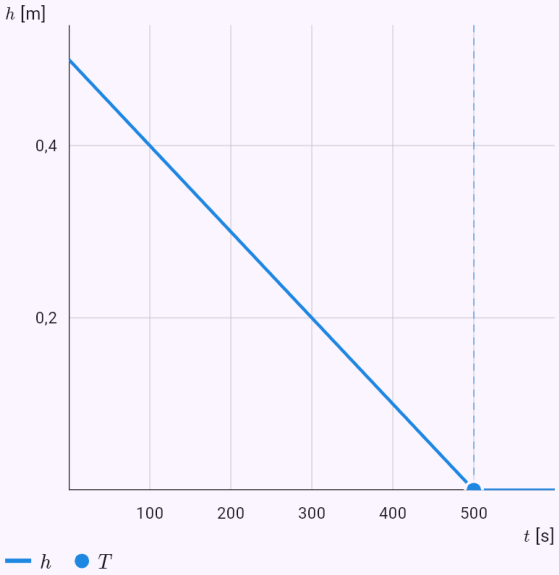
Résultat

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\text{cm}$$

Étapes

- On cherche $r(h_0)$; données
  $s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\text{cm}, \quad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$
- On convertit les unités
  $s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
- Un récipient de révolution de la forme choisie a un trou au fond. Le liquide sort à la vitesse donnée par le bilan d'énergie : celle de Torricelli v = μ√(2gh), corrigée pour un grand trou (terme s²/S²), pour un tube de sortie de longueur L (qui ajoute la hauteur L, mais aussi un frottement selon la viscosité, laminaire ou turbulent) et, pour un récipient fermé, pour la dépression de l'air au-dessus du niveau, qui ralentit l'écoulement jusqu'à l'arrêter. En dt sort s·v·dt et le niveau baisse de dh, donc dt = −S(h)/(s·v) dh et le temps s'obtient par intégration. Le graphique montre le niveau, la vitesse du jet et le débit. Pour r = R·(h/H)^p sans tube ni couvercle, la formule est aussi affichée. Avec r = k·h^(1/4), le niveau baisse régulièrement, c'est le principe des clepsydres. Équation du modèle : $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Le niveau baisse régulièrement si la section est proportionnelle à √h, soit r = k·h^(1/4). C'était la forme des clepsydres.
- On remplace : $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\text{m}$
- On convertit les unités : $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\text{m} = 24{,}46\,\text{cm}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

43. Physique

Les calculs de physique se trouvent dans la section « Applications », domaine Physique. Le moteur-fusée a cinq modes : poussée, impulsion spécifique, équation de Tsiolkovski, fusée à plusieurs étages et vitesse d'éjection d'après la thermodynamique d'une tuyère idéale.

La poussée se calcule à partir du débit massique et de la vitesse d'éjection, éventuellement avec le terme de pression ; le graphique montre alors comment elle croît avec l'altitude dans l'atmosphère standard. Dans l'équation de Tsiolkovski, on peut chercher la variation de vitesse, les ergols nécessaires, la masse initiale ou finale et la vitesse d'éjection. Les résultats sont idéaux, sans pertes dues à la gravité et à la traînée.

Les lois de Kepler ont leur propre formulaire à cinq modes : ellipse, aires, position dans le temps, période et vitesse selon la formule vis-viva. Le graphique trace l'orbite à échelle réelle et le corps s'y déplace avec le curseur ou le bouton de lecture. Pour la deuxième loi, il montre des secteurs colorés balayés en des temps égaux.

Le formulaire sur l'influence mutuelle calcule le barycentre, les points de Lagrange, les marées, les résonances orbitales et la précession du périhélie. Le graphique du barycentre montre les deux corps autour du [[barycenter|barycentre]] B à échelle réelle. Quand le cercle du plus grand corps est invisible dans l'ensemble (le Soleil autour du barycentre du Soleil et de Jupiter), le sélecteur « Détail au barycentre » l'agrandit et, avec le rayon R, dessine aussi le contour du corps : le barycentre se trouve juste au-dessus de la surface du Soleil. Une histoire célèbre : Uranus s'écartait de sa trajectoire prévue et, en 1846, Le Verrier calcula à partir de ces perturbations où devait se trouver une planète inconnue. Neptune fut trouvée presque exactement à cet endroit.

Le problème à trois corps est calculé numériquement en unités où G = 1 : la solution périodique en huit, le problème chaotique de Pythagore où deux calculs presque identiques finissent par s'écarter, et vos propres valeurs. La variation de l'énergie totale contrôle la précision.

La physique nucléaire est proposée uniquement pour un usage pacifique : laboratoire, médecine et énergie. Le formulaire Physique nucléaire calcule l'activité d'un échantillon, l'équilibre radioactif, les équations de Bateman d'une chaîne, l'énergie de liaison avec un graphique selon le nombre de masse, l'énergie de réaction et l'énergie du combustible comparée au charbon.

Le formulaire Réacteur nucléaire montre les générations de neutrons comme suite géométrique, la période du réacteur avec neutrons retardés et la taille du cœur dans le modèle de diffusion à un groupe, uniquement pour les réseaux modérés (graphite, eau légère).

La balistique calcule le tir oblique pour la physique scolaire, le sport et la chasse. Dans le vide, on dispose de formules exactes avec les étapes ; avec la résistance de l'air, d'une solution numérique de

Runge-Kutta incluant vent de face et vent latéral, densité de l'air selon l'altitude et force de Coriolis. Le graphique montre la vue de côté et la comparaison avec le vide, et, en cas de dérive latérale, la vue de dessus. Pour les projectiles supersoniques, le coefficient de traînée provient d'une courbe approchée selon le nombre de Mach. Seul le vol est calculé, pas l'effet sur la cible, et la dérive due à la rotation n'est pas incluse. Le problème inverse trouve pour une distance donnée les deux angles de tir, tendu et en cloche.

Avion calcule les performances pour l'aviation civile et l'enseignement : vol en palier avec polaire parabolique, roulement au décollage et à l'atterrissage numériquement avec vent et altitude, virage et vol plané. Un effet de sol optionnel réduit la traînée induite. Le modèle ignore la compressibilité de l'air : pour les avions de ligne en croisière, le résultat n'est qu'indicatif. Les vitesses et longueurs peuvent aussi être données en nœuds et en pieds.

Rentrée atmosphérique calcule numériquement, par la méthode de Runge-Kutta, la traversée de l'atmosphère par un vaisseau : la vitesse, l'angle de trajectoire et l'altitude au-dessus d'une Terre ronde avec l'atmosphère standard. Le résultat est un atterrissage, un rebond vers l'espace ou une limite dépassée, l'accélération maximale (vérifiée par la formule d'Allen et Eggers), le flux thermique au [[stagnationPoint|point d'arrêt]] et la température du bouclier par [[radiativeEquilibrium|équilibre radiatif]]. Le mode Corridor d'entrée trouve par dichotomie les limites rasante et raide de l'angle d'entrée : pour un retour de la Lune, le [[entryCorridor|corridor]] fait environ 2° de large, avec une note sur Apollo 13. Préréglages : Vostok, Apollo, Soyouz et la navette (avec une note factuelle sur la perte de Columbia). La seule commande est un [[bankAngle|angle de roulis]] constant ; la Terre ne tourne pas dans le modèle. Une démonstration interactive où l'on oriente la portance en vol se trouve sur mathtrace.app, dans « À vous de jouer ».

Corps dans l'eau est un formulaire pour l'enseignement et l'usage civil : poussée et flottaison, ballon compris, pression et profondeur, équation de Bernoulli, chute et remontée avec masse ajoutée, portée et chute d'un fusil-harpon de pêche sportive, véhicule immergé propulsé, ballast et navire. Le coefficient de traînée d'une sphère suit le nombre de Reynolds et une bulle a sa propre corrélation. La résistance d'un navire est le frottement selon la ligne ITTC-57 plus un coefficient résiduel donné : hors du régime à déplacement elle n'est qu'indicative. Pour un navire, on peut activer une comparaison avec l'ékranoplane KM : travail contre la résistance par tonne et kilomètre et graphique de la puissance selon la vitesse.

La fusion thermonucléaire a deux formulaires, tous deux réservés à un usage civil (centrales, laboratoires, le Soleil et les étoiles). Le formulaire Fusion thermonucléaire calcule l'énergie d'une réaction (D-T, D-D, D-³He et la chaîne p-p du Soleil) et son partage entre les produits, l'énergie du combustible comparée à la fission de l'uranium et au charbon, la hauteur de la [[coulombBarrier|barrière coulombienne]] et le [[gamowPeak|pic de Gamow]]. Un réacteur à fusion ne peut pas s'emballer comme un réacteur à fission : la fusion n'a pas de masse critique et, en cas de panne, le plasma refroidit et la réaction s'arrête d'elle-même.

Le formulaire Plasma de fusion calcule le [[lawsonCriterion|critère de Lawson]] avec un graphique du triple produit nécessaire selon la température, le gain Q, le taux de réaction ⟨σv⟩ comme intégrale sur la distribution de Maxwell par la méthode de Simpson (comparé à l'ajustement publié de Bosch et Hale), la densité de puissance de fusion, la perte par rayonnement de freinage et le rayon de Larmor d'une particule chargée dans un champ magnétique. L'app ne calcule pas la dynamique du plasma (magnétohydrodynamique).

Les accélérateurs de particules ont deux formulaires. Cinématique relativiste calcule le [[lorentzFactor|facteur de Lorentz]], la vitesse, l'énergie et la quantité de mouvement à partir de la vitesse ou de l'énergie cinétique, ainsi que la dilatation du temps avec la portée de particules instables (muon, pion, kaon). Le formulaire Accélérateurs de particules compare l'énergie de collision √s de faisceaux croisés et d'une cible fixe, calcule le rayon de l'orbite et le champ nécessaire, et la perte par rayonnement synchrotron. Le menu remplit les valeurs du LHC, du LEP ou du Tevatron.

Exemples

Poussée du moteur au niveau de la mer, comparée au vide.

Énoncé: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa];`

```
pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)
```

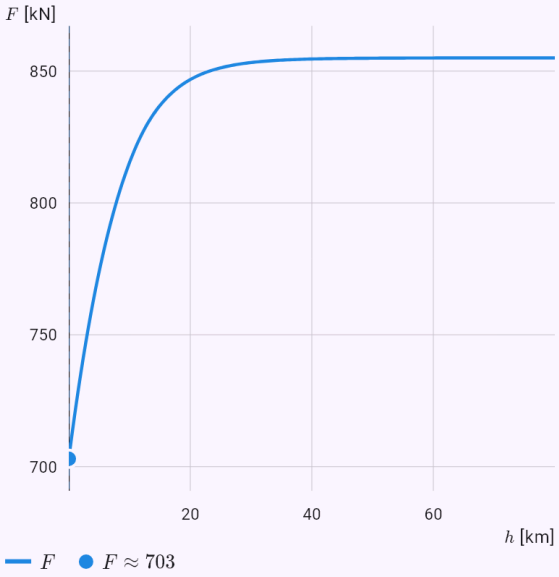
Résultat

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Étapes

- On cherche F ; données
  $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- On convertit les unités
  $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Une fusée avance en éjectant de la masse : chaque seconde, une masse Δm/Δt sort à la vitesse v_e et la conservation de la quantité de mouvement donne la poussée $F = (\Delta m/\Delta t)\cdot v_e$. Si la pression du gaz en sortie de tuyère p_e diffère de la pression ambiante p_a, on ajoute le terme $(p_e - p_a)\cdot A_e$; c'est pourquoi la poussée augmente avec l'altitude. Équation du modèle :
  $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Terme de pression de la poussée
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300)\cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Le gaz est surdétendu dans la tuyère (p_e < p_a) : la pression ambiante réduit la poussée. C'est typique au décollage d'un moteur conçu pour la haute altitude.
- Terme de quantité de mouvement de la poussée :
  $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- On remplace : $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Impulsion spécifique
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$$
- Poussée dans le vide : $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- On convertit les unités : $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Vitesse d’éjection d’après l’impulsion spécifique du RP-1/LOX.

Énoncé: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Résultat

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche v_e ; données : $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- L'impulsion spécifique I_sp = v_e/g_0 indique pendant combien de secondes 1 kg d'ergols peut fournir une poussée égale au poids de 1 kg, ce qui permet de comparer les ergols. Équation du modèle : $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Pesanteur normale : $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- On exprime la grandeur cherchée : $v_e = I_{sp} g_0$
- On remplace : $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Plus l'impulsion spécifique est grande, moins le moteur consomme d'ergols pour la même poussée. Valeurs typiques dans le vide : solide ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Variation de vitesse selon l’équation de Tsiolkovski.

Énoncé: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

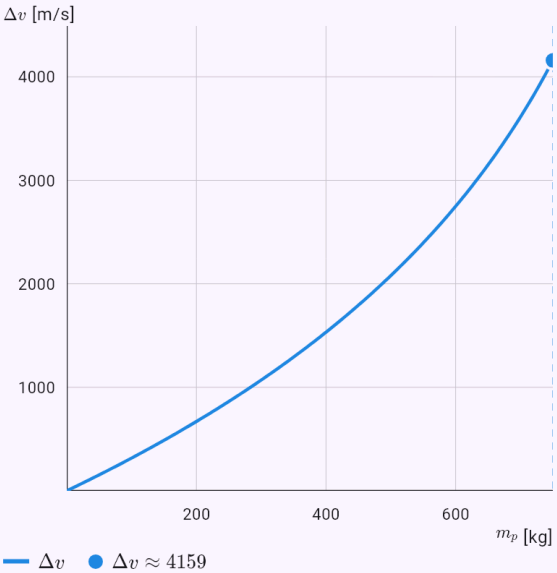
Résultat

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche Δv ; données : $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- La quantité de mouvement des ergols éjectés accélère la fusée : en intégrant m·dv = −v_e·dm, on obtient l'équation de Tsiolkovski Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Équation du modèle : $m\,dv = -v_e\,dm$
- Séparation des variables : $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Intégration des deux membres : $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- On remplace : $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Rapport de masse : $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Part des ergols dans la masse initiale : $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Résultat idéal, sans pertes dues à la gravité et à la traînée. Atteindre l'orbite basse demande en réalité environ 9,4 km/s.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Quelle quantité d'ergols il faut à 1 t de fusée pour l'orbite basse.

Énoncé: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

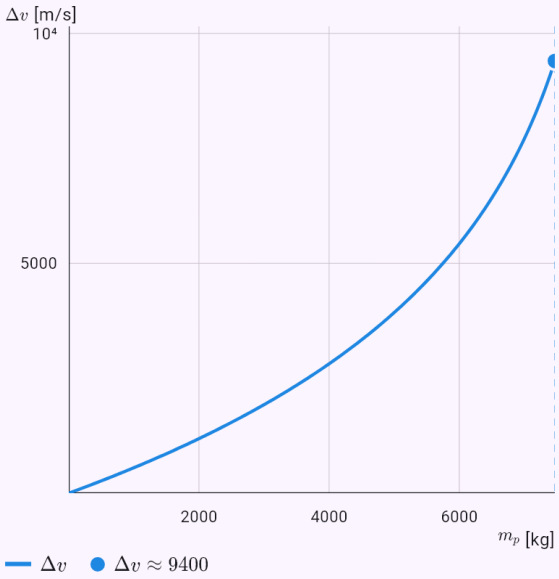
Résultat

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Étapes

- On cherche m_p ; données : $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- La quantité de mouvement des ergols éjectés accélère la fusée : en intégrant m·dv = −v$_e$·dm, on obtient l'équation de Tsiolkovski Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Équation du modèle : $m\,dv = -v_e\,dm$
- Séparation des variables : $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Intégration des deux membres : $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- On exprime la grandeur cherchée : $m_p = m_0 - m_f = m_f \left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1\right)$
- On remplace : $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1\right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Rapport de masse : $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Part des ergols dans la masse initiale : $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Résultat idéal, sans pertes dues à la gravité et à la traînée. Atteindre l'orbite basse demande en réalité environ 9,4 km/s.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Fusée à trois étages de la classe Saturn V et le gain des étages.

Énoncé: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

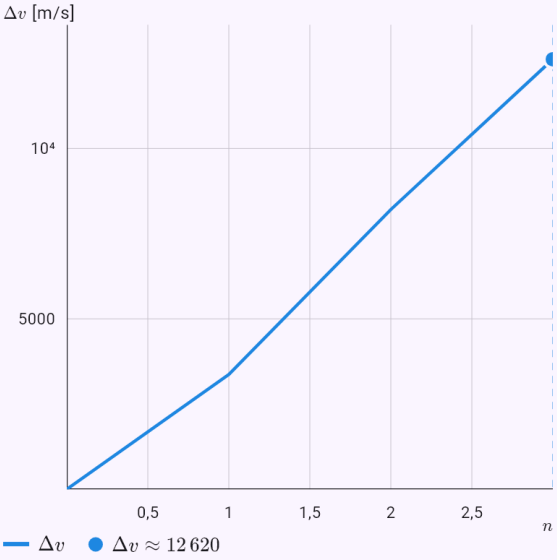
Résultat

$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche Δv ; données
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sl}$
- On convertit les unités
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Chaque étage ajoute de la vitesse selon l'équation de Tsiolkovski et ses réservoirs vides sont largués : l'étage suivant ne porte plus de masse inutile. Les gains de vitesse s'additionnent. Équation du modèle :
  $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Pesanteur normale : $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Variation de vitesse de l'étage
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Variation de vitesse de l'étage
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Variation de vitesse de l'étage
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Pour comparer, un étage de même masse et mêmes ergols
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- En larguant les étages vides, la fusée gagne $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ de plus qu'un seul étage avec les mêmes ergols.
- Résultat idéal, sans pertes dues à la gravité et à la traînée. Atteindre l'orbite basse demande en réalité environ 9,4 km/s.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Vitesse d'éjection d'un moteur à hydrogène d'après la thermodynamique de la tuyère.

Énoncé: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];`

```
mode=nozzle; propellant=hydrogen)
```

Résultat

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche v_e ; données

  $$T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$$

- On convertit les unités : $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- La vitesse d'éjection vient de la thermodynamique d'une tuyère idéale : elle croît avec la température de la chambre de combustion et diminue avec la masse molaire des gaz. Équation du modèle

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Constante molaire des gaz : $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Terme d'expansion

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- On remplace

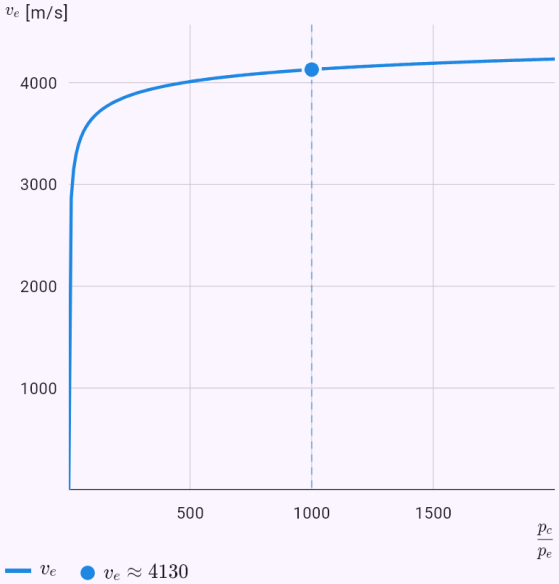
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Impulsion spécifique : $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Vitesse limite pour une expansion dans le vide :

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- La vitesse d'éjection croît avec √(T/M) ; c'est pourquoi l'hydrogène (gaz légers) a la plus grande impulsion spécifique.
- Écoulement isentropique idéal ; une tuyère réelle atteint environ 92–98 % de cette valeur.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le périhélie de la comète de Halley à partir du demi-grand axe et de l'excentricité.

Énoncé: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

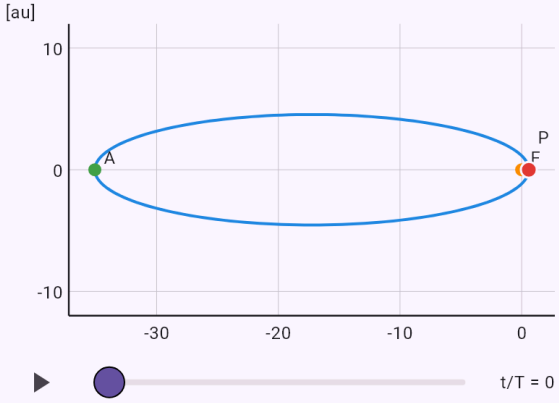
Résultat

$$r_p \approx 0{,}586\,\text{au}$$

Étapes

- On cherche r_p ; données : $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671$
- Première loi de Kepler : une planète décrit une ellipse dont le corps central occupe un foyer. La distance r dépend de l'angle θ depuis le périhélie ; elle est minimale au périhélie r_p = a(1 − e) et maximale à l'aphélie r_a = a(1 + e). L'excentricité e indique l'allongement de l'ellipse.
  Équation du modèle : $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
- On exprime la grandeur cherchée : $r_p = a(1-e)$
- On remplace : $r_p = 17{,}83(1-0{,}9671) \approx 0{,}586\,\text{au}$
- Distance à l'aphélie : $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\text{au}$

Graphique



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

La vitesse de la Terre à l'aphélie selon la deuxième loi de Kepler ; secteurs de même durée.

Énoncé: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

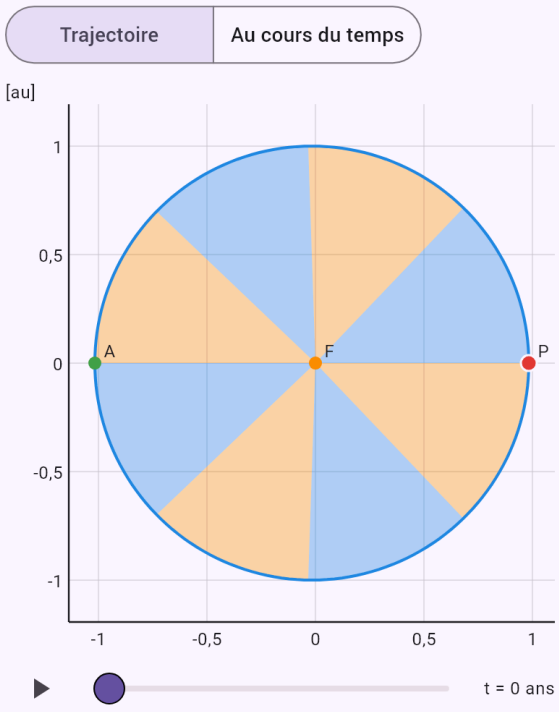
Résultat

$$v_a \approx 29{,}29\,\text{km/s}$$

Étapes

- On cherche v_a ; données
  $r_p = 0{,}9833\,\text{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\text{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\text{km/s}$
- Deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur issu du foyer balaie des aires égales en des temps égaux, car le moment cinétique se conserve. La vitesse aréolaire est constante, donc un corps est le plus rapide au périhélie : v_p·r_p = v_a·r_a. Les secteurs colorés du graphique ont été parcourus en un même temps et ont la même aire.
  Équation du modèle :
  $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- On exprime la grandeur cherchée : $v_a = v_p \dfrac{r_p}{r_a}$
- On remplace : $v_a = 30{,}29 \cdot \dfrac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\text{km/s}$
- Rapport des vitesses : $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Un corps est le plus rapide au périhélie et le plus lent à l'aphélie ; c'est pourquoi la Terre va le plus vite en janvier.

Graphique



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

Où se trouve la comète de Halley 10 ans après le périhélie (méthode de Newton).

Énoncé: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr]; mode=position; body=halley)`

Résultat

$$\theta \approx 168\,^\circ$$

Étapes

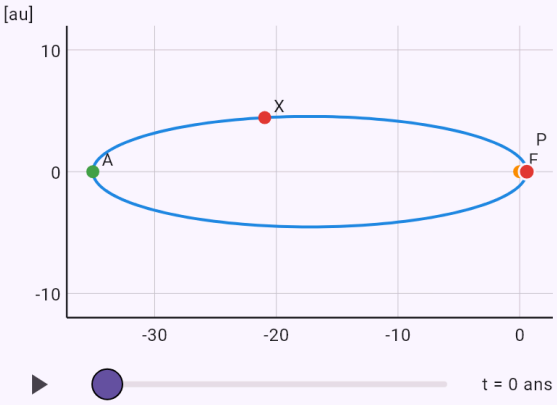
- On cherche θ ; données
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{ans}, \quad t = 10$
- La position d'un corps à l'instant t découle de l'équation de Kepler M = E − e·sin E. L'anomalie moyenne M croît uniformément avec le temps ; l'anomalie excentrique E ne s'en déduit par aucune formule et se trouve par la méthode de Newton. Équation du modèle :
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Anomalie moyenne : $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- L'équation de Kepler n'a pas de solution sous forme de formule ; E se calcule numériquement.
- Itération de Newton : $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Étape : $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Étape : $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Étape : $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Étape : $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Étape : $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Étape : $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Étape : $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Anomalie excentrique : $E \approx 1{,}78021$
- Anomalie vraie

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Distance au foyer : $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

L'altitude de l'orbite géostationnaire selon la troisième loi de Kepler.

Énoncé: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

central=earth)

Résultat

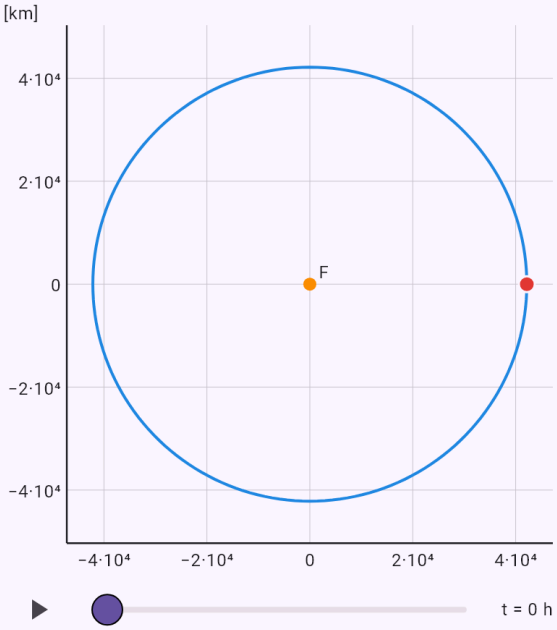
$h \approx 35\,790\,\text{km}$

Étapes

- On cherche h ; données
  $T = 86\,160\,\text{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R = 6378\,\text{km}$
- On convertit les unités : $R = 6378\,\text{km} = 6\,378\,000\,\text{m}$
- Troisième loi de Kepler : le rapport T²/a³ ne dépend que de la masse du corps central. L'orbite d'une lune donne ainsi la masse de la planète, et une période voulue donne l'altitude de l'orbite, comme l'orbite géostationnaire.
  Équation du modèle : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- On exprime la grandeur cherchée : $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- On remplace
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- On exprime la grandeur cherchée : $h = a - R$
- On remplace :
  $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Valable pour une masse en orbite négligeable devant M ; sinon il faut M + m.
- On convertit les unités : $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m} = 35\,790\,\text{km}$

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

La vitesse de la comète de Halley au périhélie selon la formule vis-viva.

Énoncé: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg]; mode=visviva;`

`central=sun)`

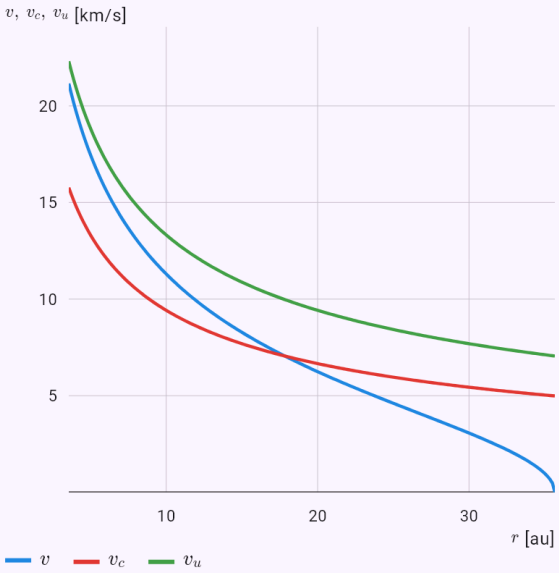
Résultat

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Étapes

- On cherche v ; données
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- On convertit les unités
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- La formule vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) découle de la conservation de l'énergie et donne la vitesse en tout point de l'orbite. La vitesse circulaire maintient un corps sur un cercle ; la vitesse de libération est √2 fois plus grande et le corps ne revient plus. Équation du modèle :
  $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- On remplace
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Vitesse circulaire à cette distance :
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Vitesse de libération à cette distance :
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- On convertit les unités : $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le barycentre du Soleil et de Jupiter se trouve juste au-dessus de la surface du Soleil ; « Détail au barycentre » montre le Soleil tournant autour.

Énoncé: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

Résultat

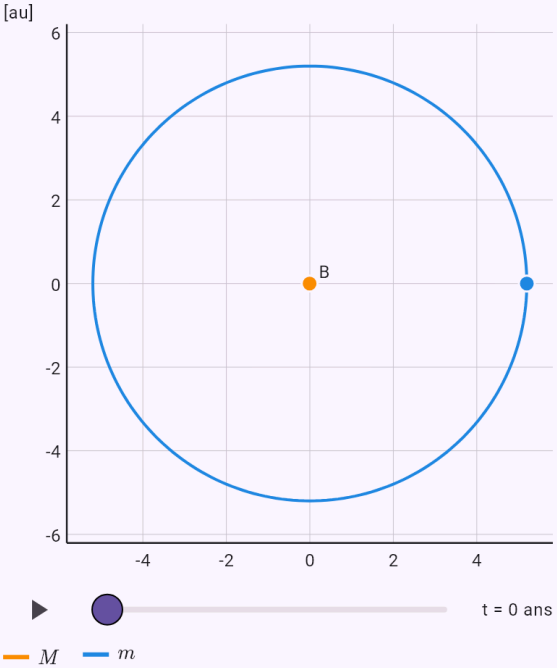
$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$

Étapes

- On cherche r_b ; données
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- On convertit les unités
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- En réalité, les deux corps orbitent autour de leur centre de masse commun (barycentre). Le problème à deux corps se ramène au mouvement d'un corps de masse réduite, et la troisième loi de Kepler contient la somme M + m. Le balancement d'une étoile autour du barycentre révèle les exoplanètes. Équation du modèle
  $r_b = \dfrac{am}{M+m}, \quad \mu = \dfrac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$
- On remplace
  $r_b = \dfrac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
- Distance de l'autre corps au barycentre :
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Le barycentre est hors du corps : $\dfrac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Le grand corps décrit lui-même un cercle visible.
- On convertit les unités :
  $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Graphique

Trajectoire | Détail au barycentre



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

La distance de L2, où travaille le télescope James Webb.

Énoncé: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

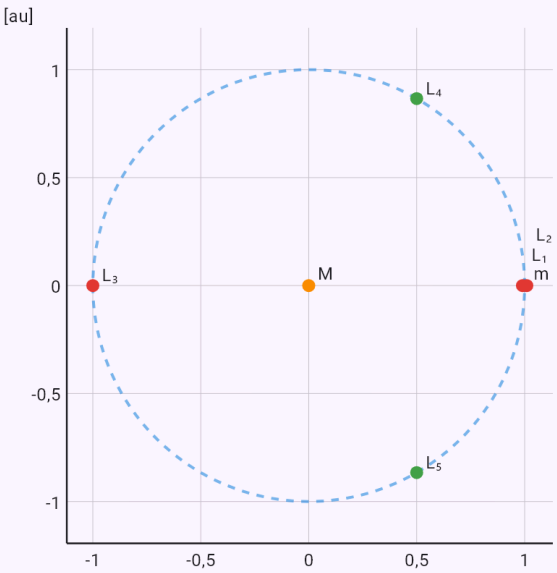
Résultat

$$r_{L_2} \approx 1{,}508 \text{ millions de km}$$

Étapes

- On cherche r_{L_2} ; données
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- Dans un repère tournant avec le corps m, il existe cinq endroits où la gravité des deux corps et la force centrifuge s'équilibrent. L1, L2 et L3 sont sur la droite joignant les corps et se calculent numériquement ; L4 et L5 forment des triangles équilatéraux avec les deux corps. Équation du modèle
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Rapport des masses : $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Approximativement pour m petit :
  $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}} \approx 1{,}503 \text{ millions de km}$
- Le point de Lagrange est une racine de l'équation sur la droite joignant les corps, trouvée par dichotomie.
- Exactement d'après l'équation :
  $r_{L_2} \approx 1{,}508 \text{ millions de km}$
- L1, L2 et L3 sont instables : un corps doit garder sa place par des corrections, comme le télescope James Webb en L2.
- L4 et L5 sont stables car M/m > 25 ; les troyens de Jupiter s'y maintiennent.

Graphique



Les corps et les points remarquables à échelle réelle.

L'accélération de marée due à la Lune.

Énoncé: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide;`

`tideSource=moon)`

Résultat

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

Étapes

- On cherche a_s ; données
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- On convertit les unités
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- La face proche d'un corps est plus attirée que la face éloignée. L'accélération de marée 2GMR/d³ décroît avec le cube de la distance ; c'est pourquoi la Lune agit plus que le Soleil, pourtant bien plus massif. Équation du modèle : $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- On remplace
  $a_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$
- Exactement, écart de gravité entre la face proche et le centre
  $\dfrac{GM}{(d-R)^2} - \dfrac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- Le corps attirant crée deux bourrelets de marée, sur la face proche et à l'opposé, d'où deux marées hautes par rotation.
- Le frottement de marée freine la rotation : la Lune montre toujours la même face à la Terre et s'éloigne d'environ 3,8 cm par an.

La résonance des lunes Io, Europe et Ganymède.

Énoncé: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Résultat

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Étapes

- Données : $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{j}$
- Une résonance orbitale apparaît quand les périodes sont dans un rapport de petits entiers ; les corps se rencontrent alors régulièrement et s'influencent. Exemples : Io, Europe et Ganymède 1 : 2 : 4, Neptune et Pluton 2 : 3. Les lacunes de Kirkwood de la ceinture d'astéroïdes sont aux résonances avec Jupiter. Équation du modèle : $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Plus grand écart à un rapport entier : $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Les périodes sont dans un rapport de petits entiers : une résonance orbitale.

La précession du périhélie de Mercure selon la relativité générale.

Énoncé: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km]; e=0.2056[one];`

`mode=precession)`

Résultat

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{ans}$$

Étapes

- On cherche $\Delta\varphi$; données
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- On convertit les unités :
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Selon la relativité générale, le périhélie d'une orbite tourne lentement de 6πGM/(c²a(1 − e²)) par révolution. Pour Mercure, cela fait 43" par siècle, l'écart que la mécanique newtonienne ne pouvait expliquer. Équation du modèle : $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Rotation par révolution
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Révolutions en 100 ans : $N = \dfrac{100\,\text{ans}}{T} \approx 415{,}3$
- On remplace : $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{ans}$
- La mécanique newtonienne prédit moins de rotation pour Mercure ; les 43" par siècle restantes ont été expliquées par la relativité générale.

La solution périodique en huit de trois corps égaux.

Énoncé: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Résultat

$$E \approx -1{,}28714$$

Étapes

- On cherche E ; données : $t_k = 6{,}326$
- En général, trois corps n'ont pas de solution sous forme de formules. Il existe toutefois des orbites périodiques exceptionnelles : dans la solution en huit (Chenciner et Montgomery, 2000), trois corps égaux parcourent une seule courbe en forme de 8. Équation du modèle

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- En général, trois corps n'ont pas de solution sous forme de formules ; le mouvement est calculé numériquement, en unités où G = 1.
- Nombre de pas de calcul : $N = 2748$
- Énergie totale :

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

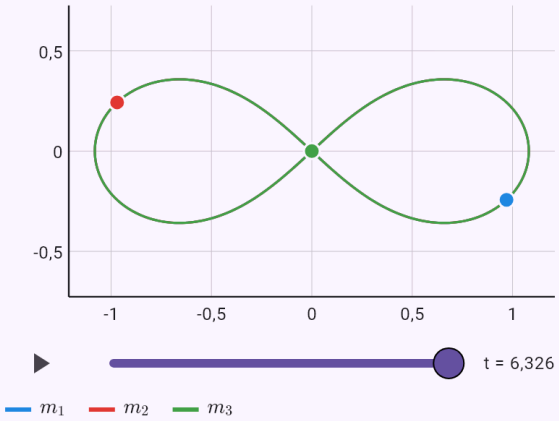
- Variation relative de l'énergie (contrôle de précision) :

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$$

- Trois corps égaux parcourent une courbe en forme de 8 et reviennent à leur place après une période.
- Plus grande distance au départ après une période :

$$\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$$

Graphique



Les corps à échelle réelle. Suivez le mouvement avec le curseur ou le bouton de lecture.

Chaos : quand deux calculs presque identiques s'écartent.

Énoncé: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Résultat

$t_s \approx 42{,}9$

Étapes

- On cherche t_s ; données : $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Le problème à trois corps est chaotique : un changement infime au départ s'amplifie jusqu'à ce que les trajectoires n'aient plus rien de commun. Le problème de Pythagore aux masses 3, 4 et 5 est calculé deux fois, la seconde avec un petit écart δ. Équation du modèle

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- En général, trois corps n'ont pas de solution sous forme de formules ; le mouvement est calculé numériquement, en unités où G = 1.
- Nombre de pas de calcul : $N = 52\,307$
- Énergie totale :

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

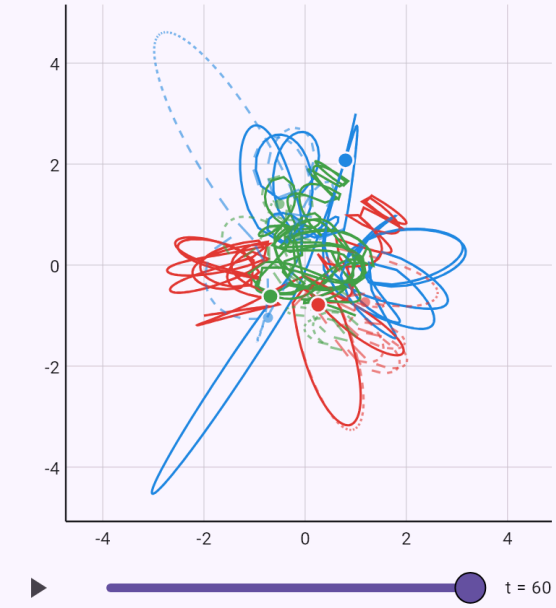
- Variation relative de l'énergie (contrôle de précision) :

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

- Un second calcul décalé de $\delta = 0{,}001$ est aussi effectué. Les lignes pointillées sont ce calcul ; leur écart montre le chaos. Une droite du logarithme dans le temps indique une croissance exponentielle.
- À l'instant t_s, la position d'un corps diffère de plus de 1 entre les deux calculs.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



m_1 m_2 m_3

Les lignes pleines et pointillées sont deux calculs au départ très légèrement différent.

L'activité de 1 g de radium, environ un curie.

Énoncé: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

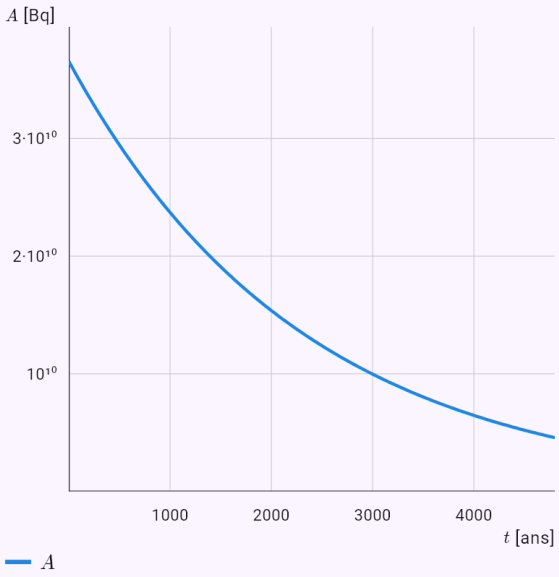
Résultat

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Étapes

- On cherche A ; données :
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{ans}$
- On convertit les unités :
  $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{ans} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- L'activité A = λN indique combien de noyaux se désintègrent par seconde. Le nombre de noyaux N découle de la masse, de la masse molaire et de la constante d'Avogadro, la constante de désintégration λ de la demi-vie. Équation du modèle :
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- En une demi-vie la quantité est divisée par deux – constante radioactive : $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Nombre de noyaux :
  $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- On remplace
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Un becquerel est une désintégration par seconde. L'unité historique, le curie, correspond à peu près à l'activité de 1 g de radium, 3,7·10¹⁰ Bq.

Graphique



Comment les grandeurs varient dans le temps.

Le rapport d'activités dans un générateur Mo-99 / Tc-99m utilisé à l'hôpital.

Énoncé: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

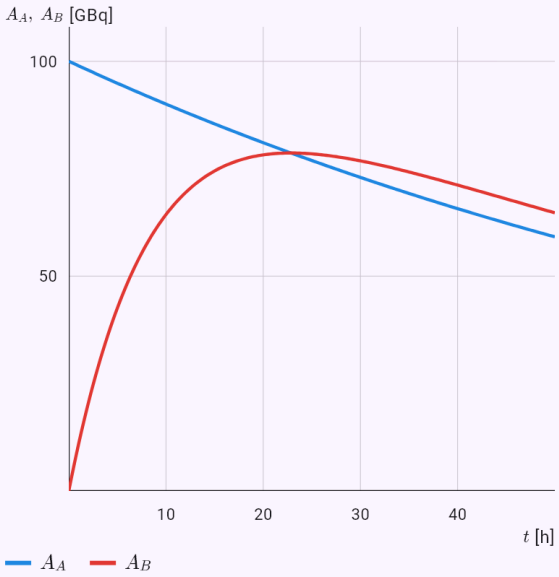
Résultat

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Étapes

- On cherche $\frac{A_B}{A_A}$; données :
  $A_{A,0} = 100\,\text{GBq}, \quad T_A = 66\,\text{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\text{h}$
- Quand un nucléide fils à vie courte naît d'un père à vie longue, son activité rattrape celle du père puis la suit dans un rapport fixe. Les générateurs de radionucléides des hôpitaux reposent sur ce principe. Équation du modèle
  $A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$
- En une demi-vie la quantité est divisée par deux – constante radioactive : $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$
- On remplace : $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Équilibre transitoire : après plusieurs demi-vies du fils, le rapport des activités est constant.

Graphique



Comment les grandeurs varient dans le temps.

Une chaîne de désintégration à trois membres selon les équations de Bateman.

Énoncé: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

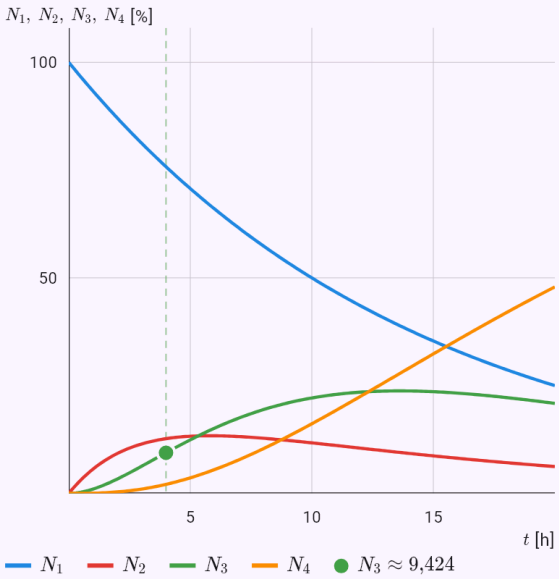
Résultat

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Étapes

- On cherche N_n ; données :
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\text{h}, \quad t = 4\,\text{h}$
- Les équations de Bateman décrivent une chaîne de désintégration : chaque membre naît du précédent et se désintègre en le suivant. C'est un système d'équations différentielles linéaires à solution explicite. Équation du modèle : $N_k' = \lambda_{k-1}N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- En une demi-vie la quantité est divisée par deux – constante radioactive
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- On exprime la grandeur cherchée
  $N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j}(\lambda_l - \lambda_j)}$
- On remplace : $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- Le graphique montre aussi le produit final stable ; la somme de tous les membres est constante.

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

L'énergie de liaison par nucléon du fer-56.

Énoncé: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

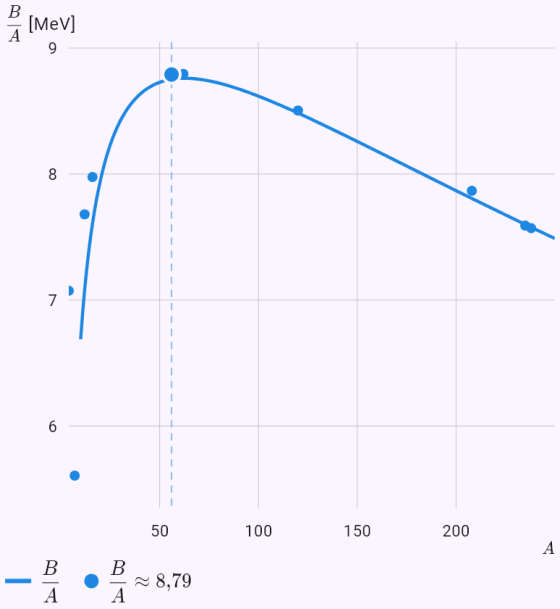
Résultat

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Étapes

- On cherche $\frac{B}{A}$; données :
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Un noyau pèse moins que ses protons et neutrons libres. Selon E = mc², la différence Δm correspond à l'énergie de liaison. Sa courbe par nucléon culmine près du fer ; c'est pourquoi la fission des noyaux lourds comme la fusion des légers libèrent de l'énergie. Équation du modèle :
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Défaut de masse
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Équivalent énergétique : $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- On remplace : $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Énergie de liaison par nucléon : $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

L'énergie de la fission de l'uranium-235.

Énoncé: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Résultat

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Étapes

- L'énergie de réaction Q est la différence des masses avant et après, convertie par E = mc². Un Q positif signifie que de l'énergie est libérée. Équation du modèle :
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right) c^2$
- Réaction : $^{235}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Somme des masses :
  $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- On remplace : $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Cette énergie est libérée immédiatement ; avec les désintégrations des produits de fission, cela fait environ 200 MeV par fission.

Quelle quantité de charbon remplace 1 g d'uranium-235.

Énoncé: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg]; mode=fuel)`

Résultat

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Étapes

- On cherche m_c ; données
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- La masse du combustible donne le nombre de noyaux et l'énergie d'une fission donne l'énergie totale, que l'on peut comparer à la combustion du charbon. Équation du modèle : $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Nombre de noyaux :
  $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- On remplace
  $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- On remplace
  $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Calcul idéal : un réacteur réel n'utilise que quelques pour cent de son combustible et convertit environ un tiers de la chaleur en électricité.

Le nombre de neutrons après 10 générations avec k = 1,05.

Énoncé: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

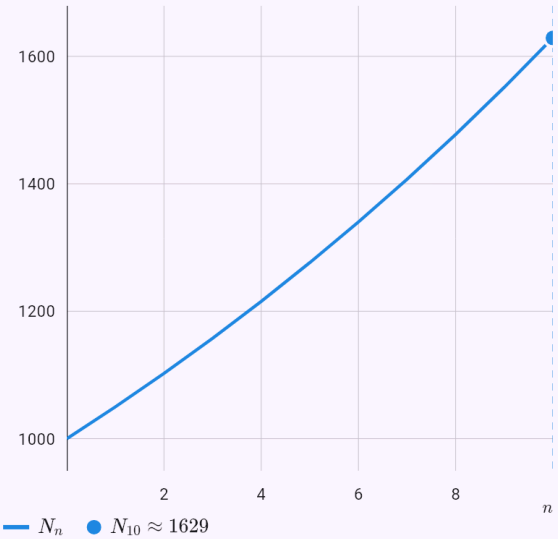
Résultat

$$N_n \approx 1629$$

Étapes

- On cherche N_n ; données :
  $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Le facteur de multiplication k indique combien de neutrons de la génération suivante provoque un neutron. Le nombre de neutrons est la suite géométrique $N_0 k^n$: pour k < 1 la réaction s'éteint, pour k = 1 elle est stable et pour k > 1 elle croît. Équation du modèle : $N_n = N_0 k^n$
- État surcritique : k > 1, la puissance croît. Un réacteur n'entre dans cet état que brièvement et très légèrement, quand on veut augmenter la puissance.
- On remplace : $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La somme de toutes les générations à l'état sous-critique.

Énoncé: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

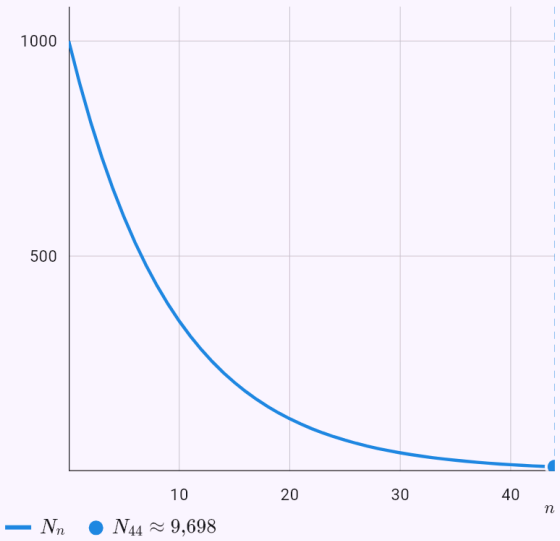
Résultat

$$S \approx 10\,000$$

Étapes

- On cherche S ; données : $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Le facteur de multiplication k indique combien de neutrons de la génération suivante provoque un neutron. Le nombre de neutrons est la suite géométrique N_0k^n : pour k < 1 la réaction s'éteint, pour k = 1 elle est stable et pour k > 1 elle croît. Équation du modèle : $N_n = N_0 k^n$
- État sous-critique : k < 1, la réaction s'éteint.
- On exprime la grandeur cherchée :
  $$S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$$
- On remplace : $S = \dfrac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La période du réacteur avec neutrons retardés.

Énoncé: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s]; mode=kinetics)`

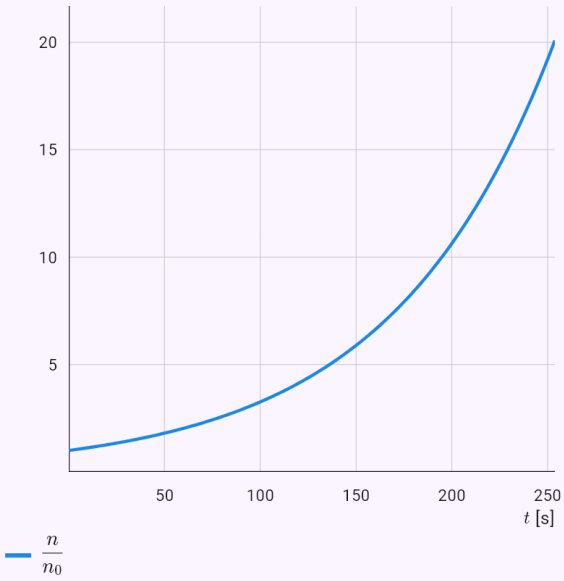
Résultat

$$T \approx 84{,}6\,\text{s}$$

Étapes

- On cherche T ; données
  $$k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\text{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\text{s}$$
- La puissance d'un réacteur varie exponentiellement avec la période T = ℓ/(k − 1). Les neutrons retardés allongent environ mille fois le temps moyen de génération, ce qui rend un réacteur pilotable. Équation du modèle :
  $$n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \frac{\ell}{k-1}$$
- Réactivité : $\rho = \dfrac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- On remplace : $T_p = \dfrac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\text{s}$
- Temps moyen de génération avec neutrons retardés : $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\text{s}$
- On remplace : $T = \dfrac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\text{s}$
- Sans neutrons retardés, la période serait une fraction de seconde. Grâce à eux, les barres de commande ont le temps de réagir.
- La puissance croît avec cette période.

Graphique



Comment les grandeurs varient dans le temps.

Le rayon d'un cœur sphérique en graphite.

Énoncé: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core; lattice=graphite; shape=sphere)`

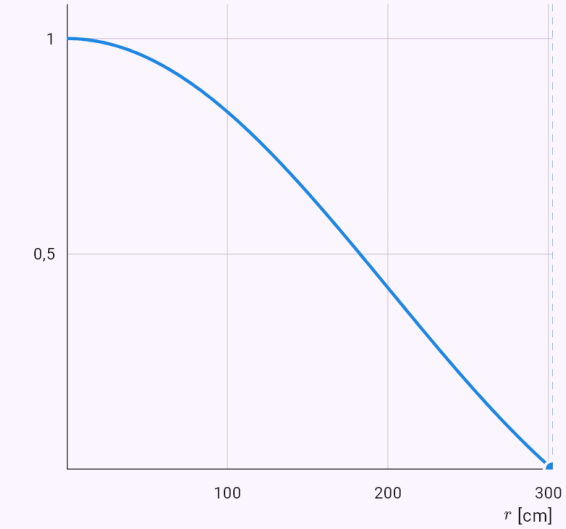
Résultat

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Étapes

- On cherche R ; données : $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- Dans le modèle de diffusion à un groupe, la forme du flux neutronique doit vérifier ∇²φ + B²φ = 0. La taille du cœur du réacteur découle de l'annulation du flux au bord. C'est un problème aux valeurs propres, destiné aux réseaux modérés des réacteurs de puissance. Équation du modèle : $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Laplacien géométrique : $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Équation à symétrie sphérique : $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Substitution : $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Condition aux limites : $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- On remplace : $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Modèle de diffusion à un groupe sans réflecteur : les réacteurs réels ont un réflecteur et sont donc plus petits. Une forme générale mène à une équation aux dérivées partielles.
- On convertit les unités : $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Arête d'un cœur cubique en graphite.

Énoncé: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

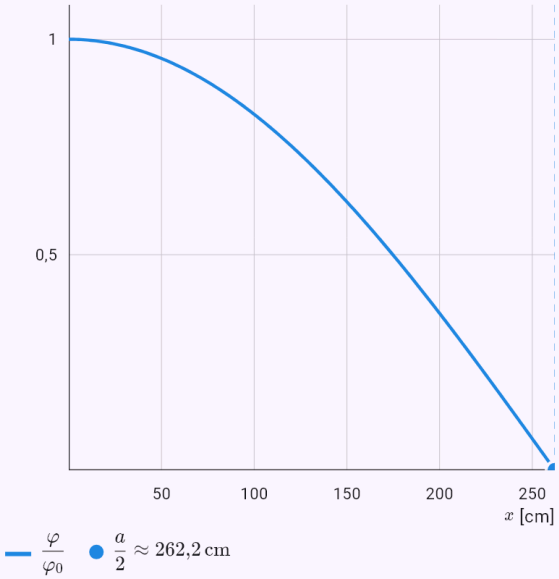
Résultat

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

Étapes

- On cherche a ; données : $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- Dans le modèle de diffusion à un groupe, la forme du flux neutronique doit vérifier ∇²φ + B²φ = 0. La taille du cœur du réacteur découle de l'annulation du flux au bord. C'est un problème aux valeurs propres, destiné aux réseaux modérés des réacteurs de puissance. Équation du modèle : $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Laplacien géométrique :
  $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Séparation des variables en x, y, z
  $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- On remplace
  $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$
- Modèle de diffusion à un groupe sans réflecteur : les réacteurs réels ont un réflecteur et sont donc plus petits. Une forme générale mène à une équation aux dérivées partielles.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Barre de cuivre à 100 °C, extrémités à 20 °C – le milieu après 10 minutes.

Énoncé: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC]; Te=20[degC];`

`x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Résultat

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

Étapes

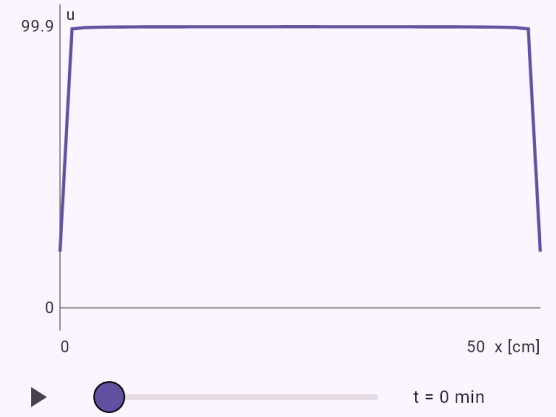
- On cherche T ; données
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e =$
- On convertit les unités
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- La température dans une barre obéit à l'équation de la chaleur T_t = α·T_xx ; la diffusivité thermique α = λ/(ρc) dit à quelle vitesse la température s'égalise. Au départ, la barre est partout à T_0 ; à partir de t = 0, ses extrémités sont maintenues à T_e (ou une extrémité est isolée). La solution par séparation des variables est une série de Fourier ; chaque terme décroît exponentiellement, le premier le plus lentement, avec la constante de temps τ. Les deux extrémités sont maintenues à T_e ; le milieu de la barre garde sa température le plus longtemps.
  Équation du modèle
  $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Solution par séparation des variables (série de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\, e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Constante de temps du terme le plus lent
  $\tau = \dfrac{L^2}{\alpha \pi^2} = \dfrac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- On exprime la grandeur cherchée

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\, e^{-(2k-}$$

- Somme de la série au point : $S \approx 0{,}07967$
- On remplace :
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Barre d'acier avec une extrémité isolée – au bout de combien de temps il reste 5 % de l'écart de température.

Énoncé: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

Résultat

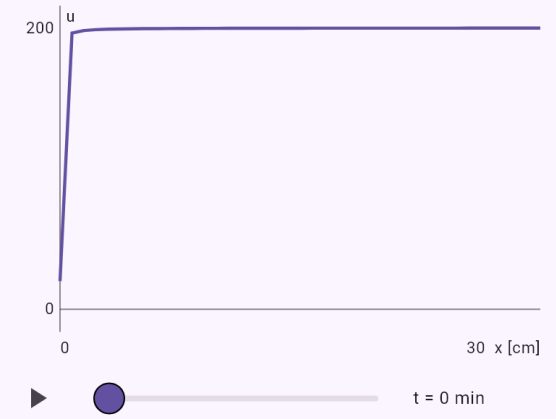
$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

Étapes

- On cherche t ; données
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- On convertit les unités
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- La température dans une barre obéit à l'équation de la chaleur T_t = α·T_xx ; la diffusivité thermique α = λ/(ρc) dit à quelle vitesse la température s'égalise. Au départ, la barre est partout à T_0 ; à partir de t = 0, ses extrémités sont maintenues à T_e (ou une extrémité est isolée). La solution par séparation des variables est une série de Fourier ; chaque terme décroît exponentiellement, le premier le plus lentement, avec la constante de temps τ. L'extrémité x = 0 est maintenue à T_e et l'extrémité x = L est isolée (aucune chaleur ne la traverse) – la barre se comporte comme la moitié d'une barre deux fois plus longue ; l'extrémité isolée garde sa température le plus longtemps. Équation du modèle
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Solution par séparation des variables (série de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -}{2}$
- Constante de temps du terme le plus lent
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- On exprime la grandeur cherchée
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- On remplace : $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- L'extrémité isolée est le point le plus chaud. Au bout d'un moment, le premier terme de la série domine, donc sa décroissance suffit ; le temps exact vient de toute la série.
- On convertit les unités : $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Plaque de cuivre de 30 × 20 cm à 100 °C, bords à 20 °C – la température au centre après 2 minutes.

Énoncé: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Résultat

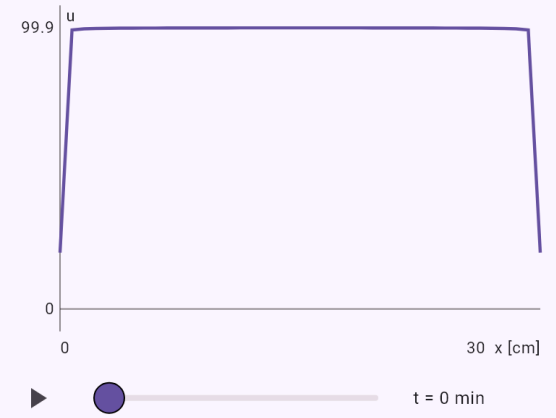
$$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

Étapes

- On cherche T ; données
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- On convertit les unités
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- La température dans une plaque rectangulaire a × b suit l'équation de la chaleur T_t = α(T_xx + T_yy). La plaque est partout à T_0 au départ et, dès t = 0, ses bords sont maintenus à T_e. Le problème se sépare en deux barres : la part restante de l'écart de température est le produit des séries d'une barre de longueur a et d'une barre de longueur b – c'est pourquoi une plaque refroidit plus vite que chacune des deux barres. Le centre garde sa température le plus longtemps. Équation du modèle
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Séparation en deux barres – produit de deux séries de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Constante de temps du terme le plus lent
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Sommes des deux séries au point :
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- On remplace
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$
- Le graphe montre la température le long de la droite :
  $y = 10\,\mathrm{cm}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0 min

La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Dalle de béton avec un bord isolé – au bout de combien d'heures il reste 5 % de l'écart de température.

Énoncé: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Résultat

$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

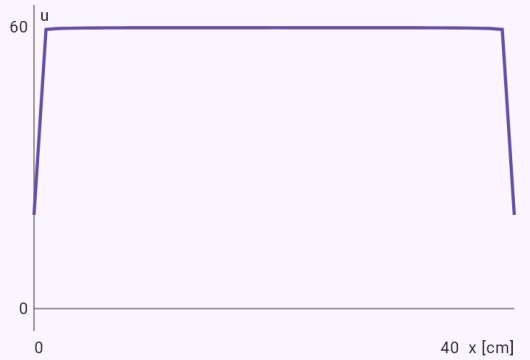
Étapes

- On cherche t ; données
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- On convertit les unités
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- La température dans une plaque rectangulaire a × b suit l'équation de la chaleur T_t = α(T_xx + T_yy). La plaque est partout à T_0 au départ et, dès t = 0, trois bords sont maintenus à T_e tandis que le bord y = b est isolé (aucune chaleur ne le traverse). Le problème se sépare en deux barres ; le bord isolé joue le rôle d'axe de symétrie d'une plaque deux fois plus haute. Le milieu du bord isolé garde sa température le plus longtemps.
  Équation du modèle
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Séparation en deux barres – produit de deux séries de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Constante de temps du terme le plus lent
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)}$ s
- On exprime la grandeur cherchée
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- On remplace : $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$

- Le milieu du bord isolé est le plus chaud. Au bout d'un moment, le produit des premiers termes des deux séries (16/π²)·e^(−t/τ) domine, sa décroissance suffit donc ; le temps exact vient des séries complètes.
- Le graphe montre la température le long de la droite : $y = 20\,\mathrm{cm}$
- On convertit les unités : $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0 h

La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Corde de mi aigu d'une guitare – fréquence fondamentale.

Énoncé: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

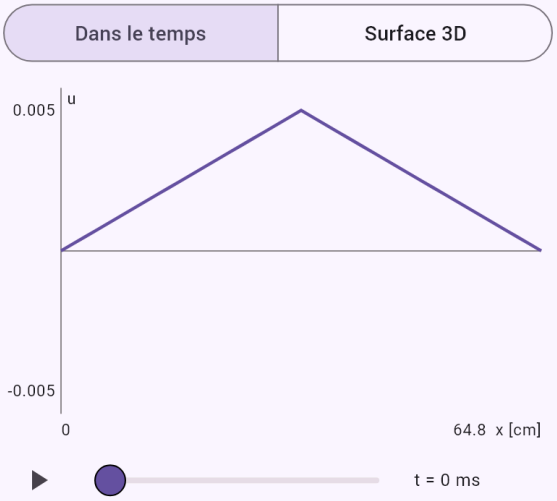
Résultat

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Étapes

- On cherche f_1 ; données :
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- On convertit les unités
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Une corde tendue aux extrémités fixes obéit à l'équation des ondes u_tt = c²·u_xx ; la vitesse de l'onde c = √(F/μ) vient de la tension F et de la masse linéique μ. La séparation des variables donne des ondes stationnaires sin(nπx/L) de fréquences f_n = n·c/(2L). Une corde pincée a la forme d'un triangle – on la développe en série de Fourier et chaque harmonique vibre à sa propre fréquence. Équation du modèle
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Vitesse de l'onde : $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Modes propres de la corde (ondes stationnaires)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- On remplace : $f_1 = \dfrac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Les fréquences supérieures sont des multiples entiers de la fondamentale (harmoniques) – c'est pourquoi une corde a une hauteur nette.

Graphique



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Corde pincée – déplacement au milieu après 1 ms.

Énoncé: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

`x=32.4[cm]; t=1[ms])`

Résultat

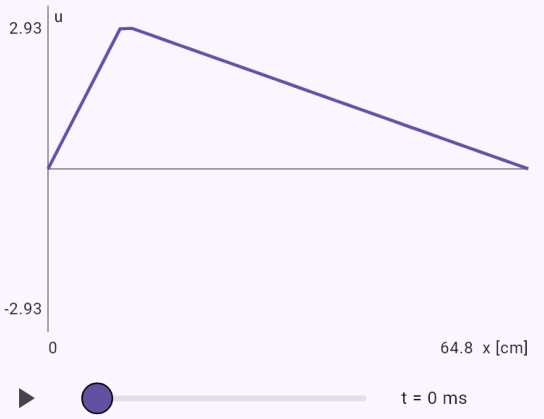
$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

Étapes

- On cherche u ; données
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- On convertit les unités
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
- Une corde tendue aux extrémités fixes obéit à l'équation des ondes u_tt = c²·u_xx ; la vitesse de l'onde c = √(F/μ) vient de la tension F et de la masse linéique μ. La séparation des variables donne des ondes stationnaires sin(nπx/L) de fréquences f_n = n·c/(2L). Une corde pincée a la forme d'un triangle – on la développe en série de Fourier et chaque harmonique vibre à sa propre fréquence. Équation du modèle
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Vitesse de l'onde : $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$
- Modes propres de la corde (ondes stationnaires)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Corde pincée – série de Fourier
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- On remplace : $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$
- Après une période, la forme de la corde revient :
  $T = \dfrac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$
- On convertit les unités :
  $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Tambour – fréquence du mode (1, 1) avec un diamètre nodal.

Énoncé: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

n=1[one])

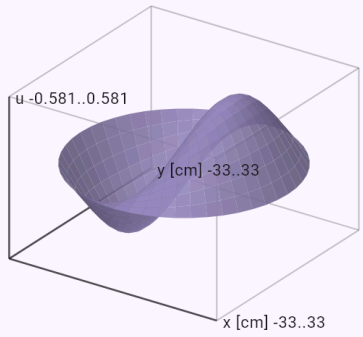
Résultat

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Étapes

- On cherche f_{mn} ; données
  $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- On convertit les unités : $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Une membrane circulaire fixée sur son bord (une peau de tambour) obéit à l'équation des ondes u_tt = c²·Δu de vitesse c = √(T/σ). En coordonnées polaires, les variables se séparent : la partie angulaire est cos(mφ), la partie radiale une fonction de Bessel J_m(kr). La condition au bord J_m(ka) = 0 donne k = j_mn/a, où j_mn est la n-ième racine de J_m, et les fréquences f_mn = j_mn·c/(2πa). Le mode (m, n) a m diamètres nodaux et n − 1 cercles nodaux. Équation du modèle
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a, \varphi, t) = 0$$
- Vitesse de l'onde dans la membrane :
  $$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$
- Séparation en coordonnées polaires – équation de Bessel
  $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t)$: $\quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- Le bord de la membrane est fixé :
  $$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$
- On remplace : $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Les modes supérieurs ne sont pas des multiples entiers du fondamental. C'est pourquoi un tambour n'a pas de hauteur aussi nette qu'une corde.
  $$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Portée d'un tir dans le vide.

Énoncé: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Résultat

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

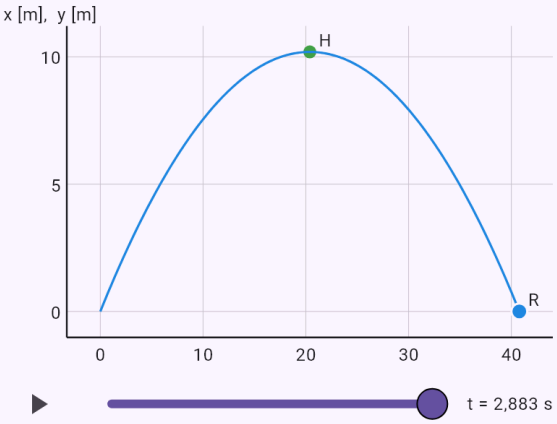
Étapes

- On cherche R ; données : $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Sans résistance de l'air, le mouvement se décompose en deux mouvements indépendants : uniforme à l'horizontale et uniformément accéléré à la verticale. La trajectoire est une parabole et chaque valeur a une formule exacte. Équation du modèle :
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Durée du vol
  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- On exprime la grandeur cherchée : $R = v_{0x} T$
- On remplace : $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- À hauteurs de départ et d'arrivée égales, les formules scolaires s'appliquent
  $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$
  $H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$
  $T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

- La portée maximale est atteinte à 45° ; les angles α et 90° − α donnent la même portée.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Vitesse d'arrivée d'un tir depuis une hauteur.

Énoncé: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

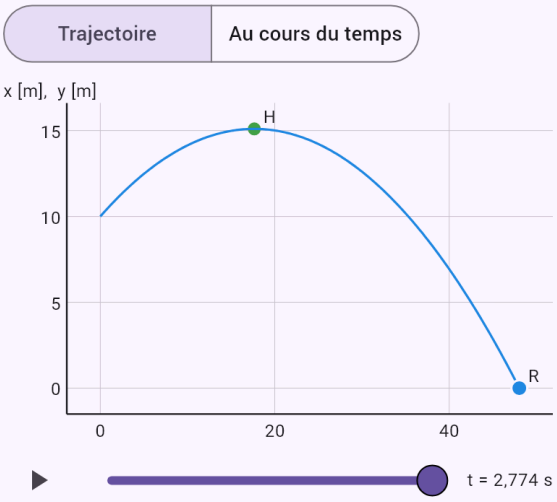
Résultat

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche v_k ; données :
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Sans résistance de l'air, le mouvement se décompose en deux mouvements indépendants : uniforme à l'horizontale et uniformément accéléré à la verticale. La trajectoire est une parabole et chaque valeur a une formule exacte. Équation du modèle :
  $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 20\cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- On remplace
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Cela découle de la conservation de l'énergie mécanique et ne dépend pas de l'angle.

Graphique



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Deux angles de tir pour une distance de 200 m.

Énoncé: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Résultat

$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

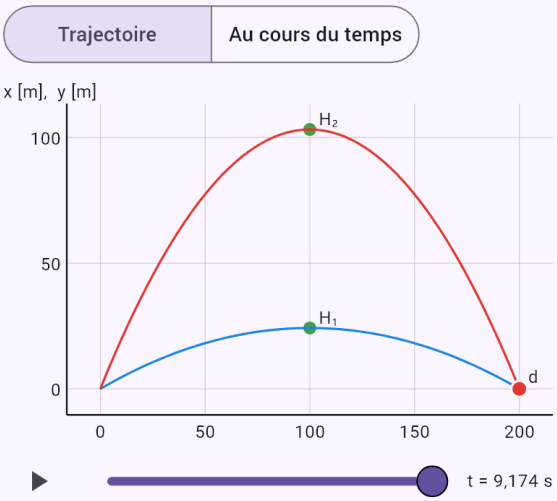
$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

Étapes

- On cherche α ; données : $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- La distance et la hauteur de la cible sont reportées dans l'équation de la trajectoire. Avec u = tan α, on obtient une équation du second degré, en général à deux racines : une trajectoire tendue et une trajectoire en cloche.
  Équation du modèle :
  $h_k = h_0 + d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$
- Équation du second degré en tan α
  $u = \tan\alpha : \quad au^2 - du + c = 0$
  $a = \frac{gd^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81\cdot(200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$
  $c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$
- Discriminant :
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4\cdot 78{,}48\cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Racines : $u_{1,2} = \frac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Solution
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Solution
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$

- Sur un terrain plat, les deux angles totalisent 90°.

Graphique



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Portée d'un ballon avec résistance de l'air et comparaison avec le vide.

Énoncé: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Résultat

$$R \approx 38{,}65\,\text{m}$$

Étapes

- On cherche R ; données
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$ ς
- On convertit les unités
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Le corps subit son poids et la résistance de l'air, opposée à sa vitesse par rapport à l'air : le vent intervient donc dans les équations. Les composantes de la vitesse sont couplées et il n'y a pas de solution exacte, le système est donc résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Le système de six équations pour x, y, z et les composantes de la vitesse a été résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ; nombre de pas : $N = 1807$
- Déroulement du vol

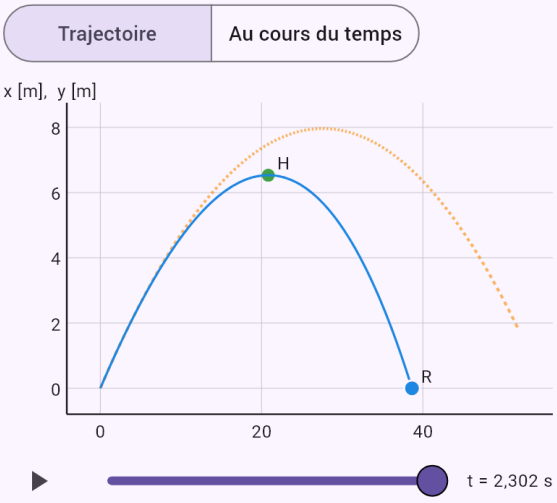
t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Valeurs clés

$H \approx 6{,}534\,\text{m}$
$T \approx 2{,}302\,\text{s}$
$R \approx 38{,}65\,\text{m}$
$v_k \approx 16{,}88\,\text{m/s}$
$\varphi \approx 38{,}44^\circ$

- Le même tir dans le vide
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Part de la portée dans l'air par rapport au vide :
  $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Graphique



Le trait plein est la trajectoire dans l'air, le pointillé celle dans le vide. Les axes n'ont pas la même échelle.

Déviation latérale d'un ballon dans le vent, en vue de côté et de dessus.

Énoncé: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Résultat

$z \approx 2{,}621\ \text{m}$

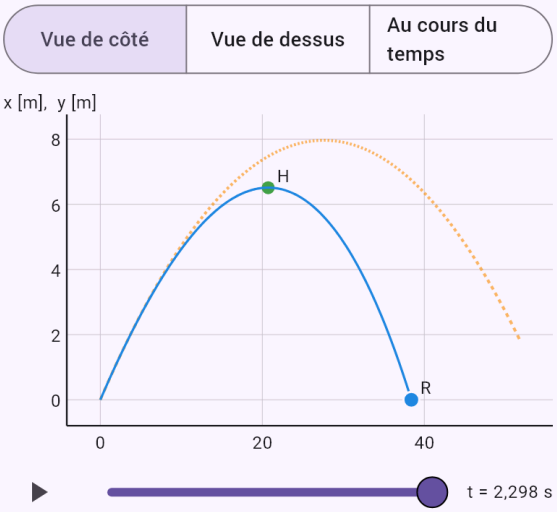
Étapes

- On cherche z ; données
  $v_0 = 25\ \text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\ \text{m}, \quad m = 430\ \text{g}, \quad$ ſ
- On convertit les unités
  $m = 430\ \text{g} = 0{,}43\ \text{kg}, \quad S = 38\,000\ \text{mm}^2 = 0{,}038\ \text{m}^2$
- Le corps subit son poids et la résistance de l'air, opposée à sa vitesse par rapport à l'air : le vent intervient donc dans les équations. Les composantes de la vitesse sont couplées et il n'y a pas de solution exacte, le système est donc résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\ \text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\ \text{m/s}$
- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\ \text{kg/m}$
- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\ \text{m/s}$
- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- Le système de six équations pour x, y, z et les composantes de la vitesse a été résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ; nombre de pas : $N = 1804$
- Déroulement du vol

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Valeurs clés
  $H \approx 6{,}51\ \text{m}$
  $T \approx 2{,}298\ \text{s}$
  $R \approx 38{,}4\ \text{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\ \text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\ \text{m}$
- Le même tir dans le vide
  $R_v \approx 55{,}17\ \text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\ \text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\ \text{s}$
- Part de la portée dans l'air par rapport au vide :
  $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\ \%$
- Effet du vent : $\Delta R \approx -0{,}2474\ \text{m}, \quad z \approx 2{,}621\ \text{m}$

Graphique



Le trait plein est la trajectoire dans l'air, le pointillé celle dans le vide. Les axes n'ont pas la même échelle.

Carabine de sport petit calibre : vitesse en fin de vol, courbe G1.

Énoncé: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Résultat

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

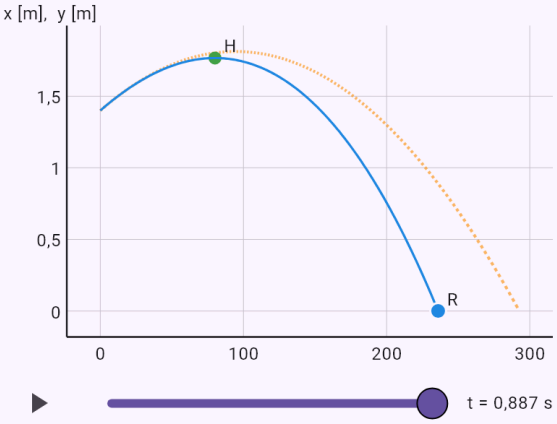
- On cherche v_k ; données
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- On convertit les unités
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Le corps subit son poids et la résistance de l'air, opposée à sa vitesse par rapport à l'air : le vent intervient donc dans les équations. Les composantes de la vitesse sont couplées et il n'y a pas de solution exacte, le système est donc résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $m\vec{v} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Nombre de Mach et coefficient de traînée au départ :
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Le système de six équations pour x, y, z et les composantes de la vitesse a été résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ; nombre de pas : $N = 73$
- Déroulement du vol

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Valeurs clés
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- Le même tir dans le vide
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Part de la portée dans l'air par rapport au vide :
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Le coefficient de traînée provient d'une courbe approchée selon le nombre de Mach ; pour un projectile, la courbe G1 multipliée par le facteur de forme. Les tables du fabricant priment. La dérive due à la rotation n'est pas prise en compte.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Le trait plein est la trajectoire dans l'air, le pointillé celle dans le vide. Les axes n'ont pas la même échelle.

Carabine de chasse : portée avec la densité de l'air selon l'altitude.

Énoncé: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

`cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)`

Résultat

$$R \approx 2365\,\text{m}$$

Étapes

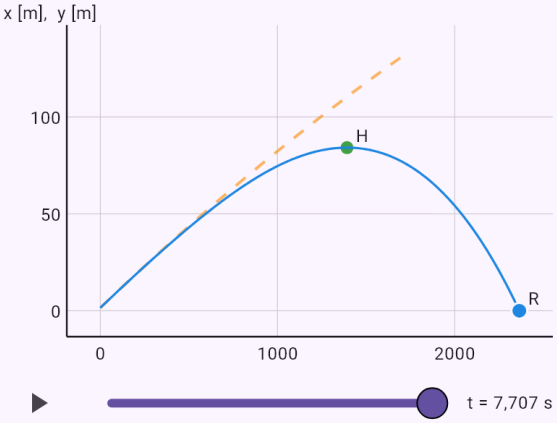
- On cherche R ; données
  $v_0 = 860\,\text{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\text{m}, \quad m = 9{,}72\,\text{g},$
- On convertit les unités
  $m = 9{,}72\,\text{g} = 0{,}00972\,\text{kg}, \quad S = 48{,}1\,\text{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Le corps subit son poids et la résistance de l'air, opposée à sa vitesse par rapport à l'air : le vent intervient donc dans les équations. Les composantes de la vitesse sont couplées et il n'y a pas de solution exacte, le système est donc résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Composantes de la vitesse initiale
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\text{m/s}$
- Densité de l'air selon l'atmosphère standard :
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\text{kg/m}^3$
- Nombre de Mach et coefficient de traînée au départ :
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :
  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\text{kg/m}$
- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\text{m/s}$
- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :
  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Le système de six équations pour x, y, z et les composantes de la vitesse a été résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ; nombre de pas : $N = 335$
- Déroulement du vol

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Valeurs clés
  $H \approx 84{,}15\,\text{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\text{s}$
  $R \approx 2365\,\text{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Le même tir dans le vide
  $R_v \approx 13\,110\,\text{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\text{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\text{s}$
- Part de la portée dans l'air par rapport au vide :
  $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Le coefficient de traînée provient d'une courbe approchée selon le nombre de Mach ; pour un projectile, la courbe G1 multipliée par le facteur de forme. Les tables du fabricant priment. La dérive due à la rotation n'est pas prise en compte.
- Pendant le vol, la vitesse est passée sous celle du son ; c'est là que le coefficient de traînée varie le plus.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Le trait plein est la trajectoire dans l'air, le pointillé celle dans le vide. Les axes n'ont pas la même échelle.

Un boulet de canon de physique scolaire : déviation due à la force de Coriolis.

Énoncé: `model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;`

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Résultat

$$z \approx 2{,}119\,\text{m}$$

Étapes

- On cherche z ; données

  $v_0 = 439\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\text{m}, \quad m = 5580\,\text{g},$

- On convertit les unités

  $m = 5580\,\text{g} = 5{,}58\,\text{kg}, \quad S = 10\,200\,\text{mm}^2 = 0{,}0102\,\text{m}^2$

- Le corps subit son poids et la résistance de l'air, opposée à sa vitesse par rapport à l'air : le vent intervient donc dans les équations. Les composantes de la vitesse sont couplées et il n'y a pas de solution exacte, le système est donc résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle

  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$

- Composantes de la vitesse initiale

  $v_{0x} = 439 \cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 439 \sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\text{m/s}$

- Nombre de Mach et coefficient de traînée au départ :

  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$

- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :

  $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\text{kg/m}$

- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\text{m/s}$

- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :

  $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$

- Vitesse angulaire de la Terre (force de Coriolis) :

  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$

- Le système de six équations pour x, y, z et les composantes de la vitesse a été résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ; nombre de pas : $N = 1023$

- Déroulement du vol

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Valeurs clés

  $H \approx 650{,}1\,\text{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\text{s}$
  $R \approx 2706\,\text{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\text{m}$

- Le même tir dans le vide

  $R_v \approx 17\,020\,\text{m}, \quad H_v \approx 2457\,\text{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\text{s}$

- Part de la portée dans l'air par rapport au vide :

  $\dfrac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$

- Effet de la force de Coriolis

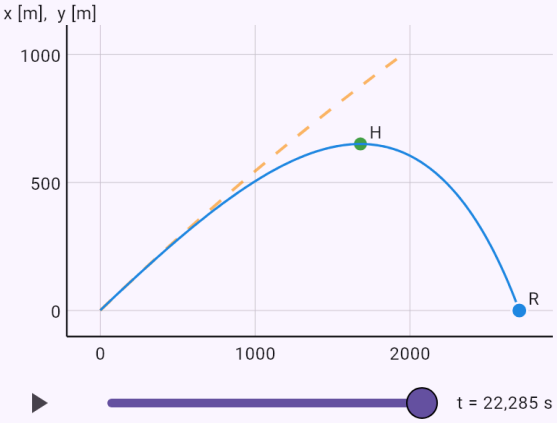
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\text{m}$

- Le coefficient de traînée provient d'une courbe approchée selon le nombre de Mach ; pour un projectile, la courbe G1 multipliée par le facteur de forme. Les tables du fabricant priment. La dérive due à la rotation n'est pas prise en compte.

- Pendant le vol, la vitesse est passée sous celle du son ; c'est là que le coefficient de traînée varie le plus.

Graphique

Vue de côté | Vue de dessus | Au cours du temps



Le trait plein est la trajectoire dans l'air, le pointillé celle dans le vide. Les axes n'ont pas la même échelle.

Angle tendu et angle en cloche pour un ballon avec résistance de l'air.

Énoncé: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic; projectile=ball;`

`cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Résultat

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

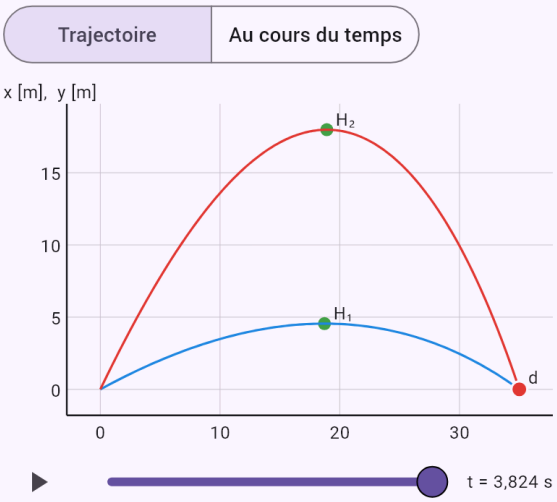
$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

Étapes

- On cherche α ; données
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- On convertit les unités
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Avec la résistance de l'air, il n'y a pas de formule. Le calcul essaie différents angles et regarde à quelle hauteur vole le corps à la distance de la cible. Les angles pour lesquels il passe exactement par la cible sont trouvés par dichotomie. Équation du modèle :
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Constante de résistance de l'air (coefficient de traînée) :
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Vitesse limite en chute libre : $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Résistance de l'air par rapport au poids au départ :
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Les angles ont été trouvés par la méthode de tir : dichotomie sur la hauteur à la distance d, c'est-à-dire en cherchant une racine de $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Solution
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$

- Solution
  $\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Graphique



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Vitesse de décrochage d'un avion léger.

Énoncé: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)

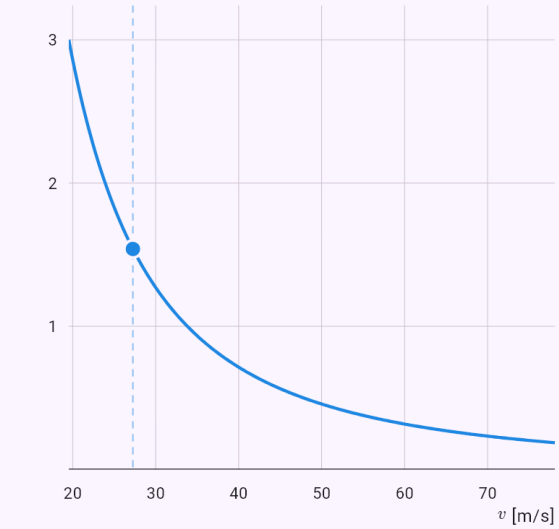
Résultat

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Étapes

- On cherche v_s ; données
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- En palier, la portance équilibre le poids et la poussée la traînée. La traînée a deux parties : la traînée parasite croît avec le carré de la vitesse et la traînée induite diminue avec elle, il existe donc une vitesse de traînée minimale. Équation du modèle :
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Poids de l'avion : $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- On remplace
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- On convertit les unités : $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Traînée en palier et courbes de traînée parasite et induite.

Énoncé: model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;

`air=constant; ground=off)`

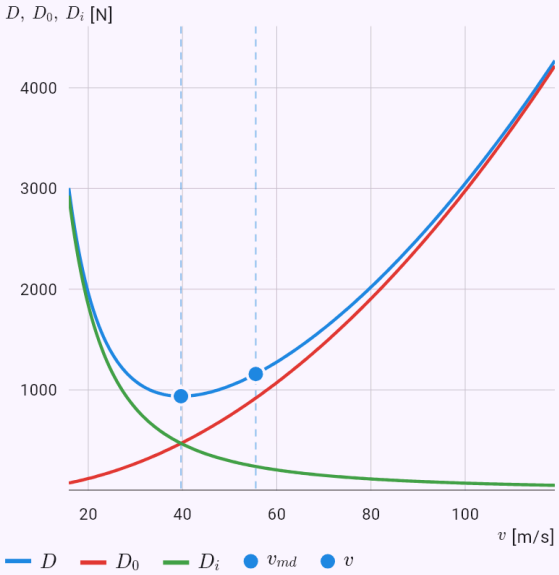
Résultat

$$D \approx 1{,}158\,\text{kN}$$

Étapes

- On cherche D ; données
  $v = 200\,\text{km/h}, \quad m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad b = 1$
- On convertit les unités : $v = 200\,\text{km/h} = 55{,}56\,\text{m/s}$
- En palier, la portance équilibre le poids et la poussée la traînée. La traînée a deux parties : la traînée parasite croît avec le carré de la vitesse et la traînée induite diminue avec elle, il existe donc une vitesse de traînée minimale. Équation du modèle :
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Poids de l'avion : $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Allongement : $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Facteur de traînée induite (coefficient d'Oswald e, polaire) : $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Pression dynamique
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\text{Pa}$
- Coefficient de portance nécessaire :
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Traînée parasite et induite :
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\text{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\text{N}$
- Finesse à cette vitesse : $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- On exprime la grandeur cherchée : $D = D_0 + D_i$
- On remplace : $D \approx 1158\,\text{N}$
- On convertit les unités : $D \approx 1158\,\text{N} = 1{,}158\,\text{kN}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Ekranoplane KM : la traînée économisée par l'effet de sol.

Énoncé: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

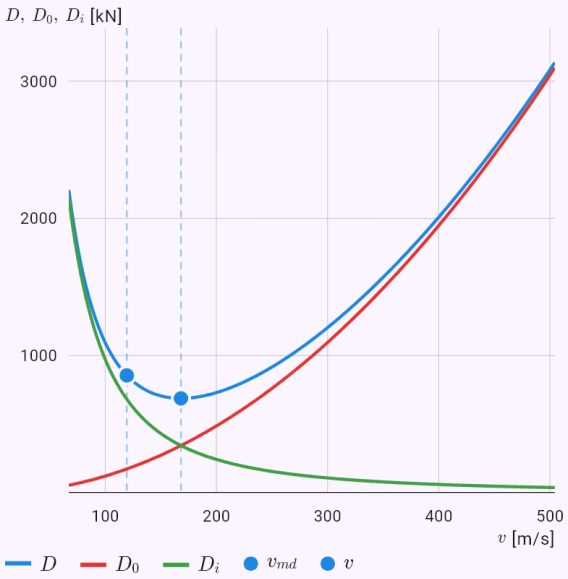
Résultat

$$D \approx 855{,}6\,\text{kN}$$

Étapes

- On cherche D ; données
  $v = 430\,\text{km/h}, \quad m = 544\,000\,\text{kg}, \quad S = 662{,}5\,\text{m}^2, \quad b$
- On convertit les unités : $v = 430\,\text{km/h} = 119{,}4\,\text{m/s}$
- En palier, la portance équilibre le poids et la poussée la traînée. La traînée a deux parties : la traînée parasite croît avec le carré de la vitesse et la traînée induite diminue avec elle, il existe donc une vitesse de traînée minimale. Équation du modèle :
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Poids de l'avion : $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\text{kN}$
- Allongement : $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Facteur de traînée induite (coefficient d'Oswald e, polaire) : $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- L'effet de sol réduit la traînée induite
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Gain de portance au même angle d'attaque (estimation par la ligne portante)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Formule empirique de McCormick pour les ailes courantes. Pour une aile de faible allongement à plaques d'extrémité, comme celle d'un ekranoplane, l'effet réel est plus fort.
- Pression dynamique
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\text{Pa}$
- Coefficient de portance nécessaire :
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Traînée parasite et induite
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\text{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\text{kN}$
- Finesse à cette vitesse : $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Traînée économisée par l'effet de sol :
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\text{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- On exprime la grandeur cherchée : $D = D_0 + D_i$
- On remplace : $D \approx 855{,}6\,\text{kN}$
- On convertit les unités : $D \approx 855\,600\,\text{N} = 855{,}6\,\text{kN}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Roulement au décollage d'un avion léger avec courbes de vitesse et de distance.

Énoncé: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Résultat

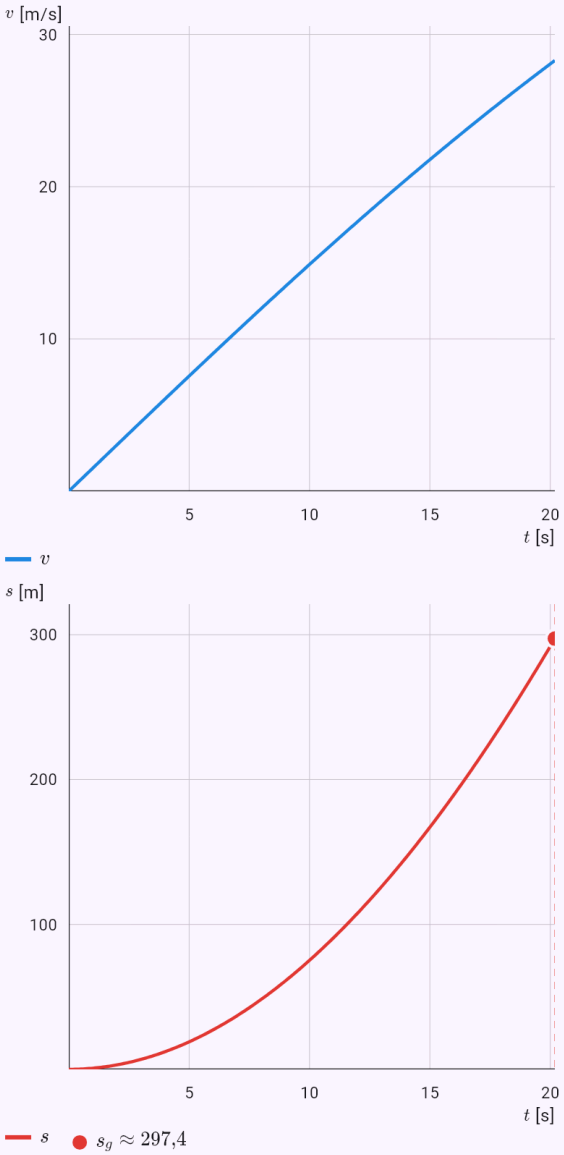
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Étapes

- On cherche s_g ; données
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- On convertit les unités : $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- L'avion accélère depuis l'arrêt jusqu'à la vitesse de décollage sous l'effet de la poussée, de la traînée et du frottement de roulement, qui diminue quand la portance augmente. L'équation est résolue numériquement par Runge-Kutta d'ordre 4 ; la poussée est une moyenne constante. Équation du modèle
  $$m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = v$$
- Poids de l'avion : $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Vitesse de décrochage
  $$v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$$
- Vitesse de décollage par rapport à l'air :
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Allongement : $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Facteur de traînée induite (coefficient d'Oswald e, polaire) : $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Coefficient de traînée sur la piste :
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Accélération au début et à la fin
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s}^2, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s}^2$
- L'équation a été résolue par Runge-Kutta d'ordre 4, pas : $N = 2172$
- Déroulement sur la piste

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Rayon de virage à 30° d'inclinaison.

Énoncé: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

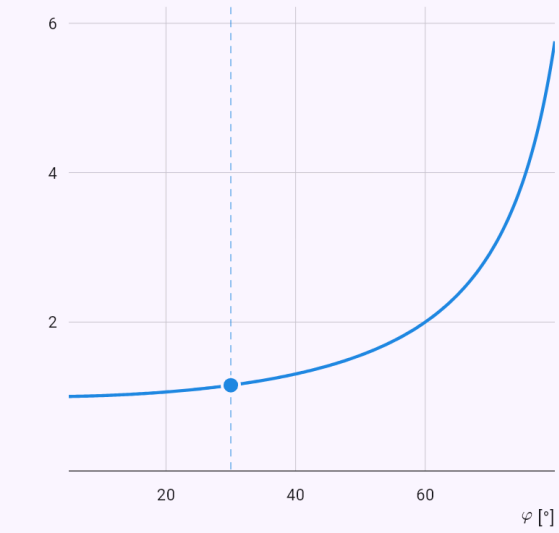
Résultat

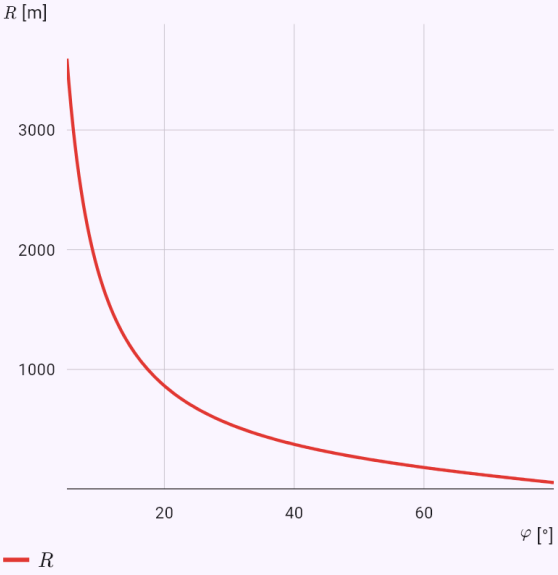
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Étapes

- On cherche R ; données : $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- On convertit les unités : $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- Dans un virage coordonné, la composante verticale de la portance équilibre le poids et la composante horizontale courbe la trajectoire. Le facteur de charge ne dépend que de l'inclinaison, le rayon aussi de la vitesse. Équation du modèle : $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- On exprime la grandeur cherchée : $R = \dfrac{v^2}{g\tan\varphi}$
- On remplace : $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81\cdot\tan 30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

Graphique





Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Distance franchissable d'un planeur depuis 1000 m.

Énoncé: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Résultat

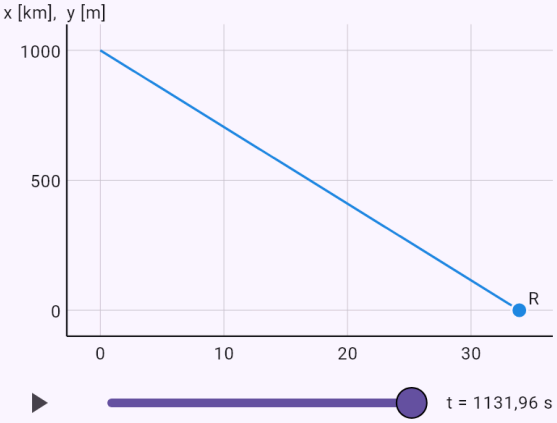
$$R \approx 33{,}91\,\mathrm{km}$$

Étapes

- On cherche R ; données $h = 1000\,\mathrm{m}, \quad m = 600\,\mathrm{kg}, \quad S = 17{,}95\,\mathrm{m}^2, \quad b = 17\,\mathrm{m}$
- Sans poussée, l'avion descend en ligne droite selon une pente fixée par le rapport de la portance à la traînée. La distance depuis une hauteur est la hauteur fois la finesse, maximale à la vitesse de meilleure finesse. Équation du modèle : $\tan\gamma = \dfrac{D}{L} = \dfrac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \dfrac{v}{E}$
- Poids de l'avion : $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\mathrm{N}$
- Allongement : $\Lambda = \dfrac{b^2}{S} = \dfrac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Facteur de traînée induite (coefficient d'Oswald e, polaire) : $k = \dfrac{1}{\pi e \Lambda} = \dfrac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Coefficient de portance à la meilleure finesse : $C_L^* = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Vitesse de meilleure finesse $v = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Finesse maximale et traînée minimale $E_{max} = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Angle de plané : $\gamma = \arctan\dfrac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- On suppose un petit angle de plané, où la portance égale pratiquement le poids, et une masse volumique de l'air constante.
- On exprime la grandeur cherchée : $R = hE$
- On remplace : $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\mathrm{m}$
- On convertit les unités : $R \approx 33\,910\,\mathrm{m} = 33{,}91\,\mathrm{km}$

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Apollo 13 : l'accélération d'une entrée à −6,20°.

Énoncé: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])

Résultat

$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$

Étapes

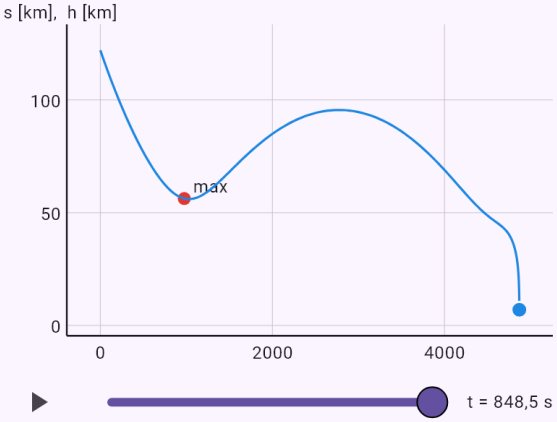
- On cherche a_{max} ; données
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Une traversée de l'atmosphère depuis l'altitude d'entrée h_0 (122 km par défaut) avec l'angle de trajectoire γ_0 donné et un roulis σ constant jusqu'à l'altitude h_k (ouverture des parachutes, vol plané pour la navette). L'accélération maximale est comparée à la formule d'Allen et Eggers pour une entrée balistique. Le flux thermique au point d'arrêt est donné par la formule de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, et la température de surface du bouclier par l'équilibre radiatif εσT⁴ = q. Équation du modèle
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Surface frontale et coefficient balistique
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Masse volumique de l'air selon l'atmosphère standard (isotherme au-dessus de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Composante verticale de la portance au roulis σ :
  $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Capture : le vaisseau est descendu jusqu'à l'altitude h_k :
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Accélération maximale (numériquement)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Une entrée balistique sans portance donnerait beaucoup plus selon Allen et Eggers : la portance réduit l'accélération
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e \cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Flux thermique maximal au point d'arrêt (Sutton–Graves) et chaleur totale par m²

$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$

- Température de surface du bouclier par équilibre radiatif (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max} : \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Simplifications : la Terre est ronde et ne tourne pas, C_D et L/D sont constants et le roulis σ reste le même pendant tout le vol (le guidage réel le fait varier). Le flux thermique est seulement convectif ; au retour de la Lune s'y ajoute le rayonnement de la couche de choc incandescente. Un bouclier ablatif évacue une partie de la chaleur en se vaporisant, la température d'équilibre radiatif est donc une estimation haute.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Le corridor d'entrée de la capsule Apollo au retour de la Lune.

Énoncé: model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];

`nlim=10[gn])`

Résultat

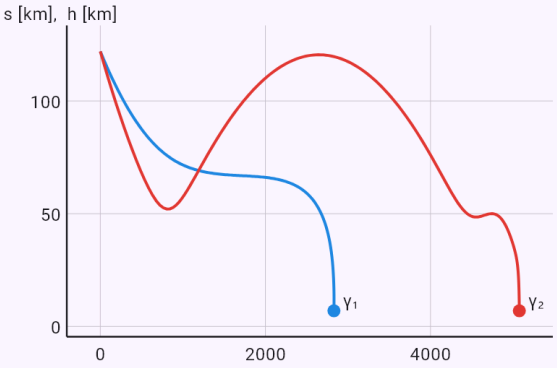
$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$
$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$
$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$

Étapes

- On cherche $\Delta\gamma$; données
  $m = 5500\,\text{kg}, \quad d = 3{,}91\,\text{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Les limites de l'angle d'entrée par dichotomie. La limite rasante est l'entrée la plus rasante qui, portance tournée vers le bas (σ = 180°), ne remonte pas au-dessus de l'altitude d'entrée ; la limite raide est l'entrée la plus raide qui, portance vers le haut (σ = 0°), ne dépasse pas l'accélération donnée (ni le flux thermique, s'il est donné). Pour un retour de la Lune, le corridor n'a qu'environ 2° de large. Apollo 13 (avril 1970) est revenu après l'explosion de son réservoir d'oxygène avec le module de commande éteint pour économiser l'énergie. L'équipage a corrigé la trajectoire par un allumage manuel du moteur du module lunaire, pointé sur la Terre dans le viseur du hublot, et la dernière correction visait le centre du corridor. L'angle d'entrée prévu était de −6,20° ; l'ordinateur du module de commande n'a été rallumé qu'avant la rentrée. Équation du modèle
  $\dot v = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot\gamma = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Surface frontale et coefficient balistique
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\text{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\text{kg/m}^2$
- Masse volumique de l'air selon l'atmosphère standard (isotherme au-dessus de 86 km)
  $\rho(122\,\text{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\text{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\text{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Limite rasante du corridor (portance vers le bas) :
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Limite raide du corridor (portance vers le haut) :
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Largeur du corridor d'entrée : $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Simplifications : la Terre est ronde et ne tourne pas, C_D et L/D sont constants et le roulis σ reste le même pendant tout le vol (le guidage réel le fait varier). Le flux thermique est seulement convectif ; au retour de la Lune s'y ajoute le rayonnement de la couche de choc incandescente. Un bouclier ablatif évacue une partie de la chaleur en se vaporisant, la température d'équilibre radiatif est donc une estimation haute.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle.

Vostok : descente balistique sans portance et 8–9 g.

Énoncé: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])

Résultat

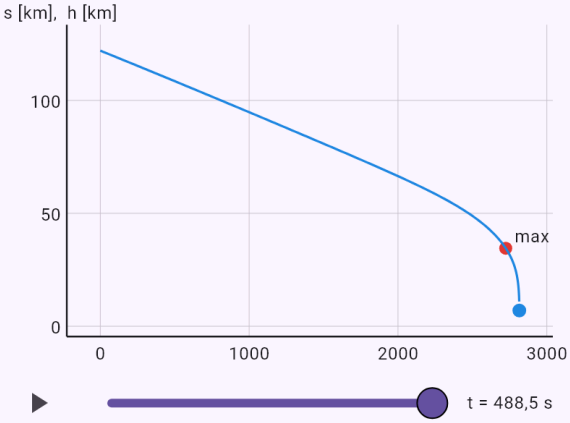
$$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$$

Étapes

- On cherche a_{max} ; données
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Une traversée de l'atmosphère depuis l'altitude d'entrée h_0 (122 km par défaut) avec l'angle de trajectoire γ_0 donné et un roulis σ constant jusqu'à l'altitude h_k (ouverture des parachutes, vol plané pour la navette). L'accélération maximale est comparée à la formule d'Allen et Eggers pour une entrée balistique. Le flux thermique au point d'arrêt est donné par la formule de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, et la température de surface du bouclier par l'équilibre radiatif εσT⁴ = q. Équation du modèle
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Surface frontale et coefficient balistique
  $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Masse volumique de l'air selon l'atmosphère standard (isotherme au-dessus de 86 km)
  $$\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$$
- Capture : le vaisseau est descendu jusqu'à l'altitude h_k :
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Accélération maximale (numériquement)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Vérification par la formule d'Allen et Eggers pour une entrée balistique (sans gravité, atmosphère exponentielle de hauteur d'échelle H)
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$$
- Flux thermique maximal au point d'arrêt (Sutton–Graves) et chaleur totale par m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Température de surface du bouclier par équilibre radiatif (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max} : \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$$
- Simplifications : la Terre est ronde et ne tourne pas, C_D et L/D sont constants et le roulis σ reste le même pendant tout le vol (le guidage réel le fait varier). Le flux thermique est seulement convectif ; au retour de la Lune s'y ajoute le rayonnement de la couche de choc incandescente. Un bouclier ablatif évacue une partie de la chaleur en se vaporisant, la température d'équilibre radiatif est donc une estimation haute.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Navette spatiale : la température du bouclier par équilibre radiatif.

Énoncé: model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Résultat

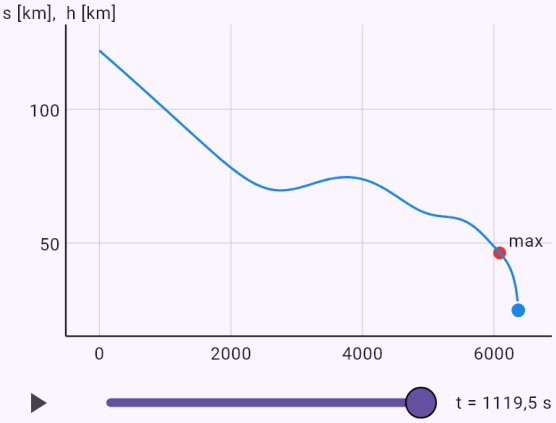
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Étapes

- On cherche T_{max} ; données
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Une traversée de l'atmosphère depuis l'altitude d'entrée h_0 (122 km par défaut) avec l'angle de trajectoire γ_0 donné et un roulis σ constant jusqu'à l'altitude h_k (ouverture des parachutes, vol plané pour la navette). L'accélération maximale est comparée à la formule d'Allen et Eggers pour une entrée balistique. Le flux thermique au point d'arrêt est donné par la formule de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, et la température de surface du bouclier par l'équilibre radiatif εσT⁴ = q. Équation du modèle
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- La navette spatiale entrait avec un angle d'attaque d'environ 40° et dissipait la portance excédentaire en roulant autour de son axe longitudinal (jusqu'à environ 70°) ; elle se posait en planeur sans moteur. Les valeurs du préréglage sont approximatives. La perte de Columbia (mission STS-107) a montré à quel point la protection thermique est sollicitée. Au lancement, le 16 janvier 2003, un morceau de mousse isolante du réservoir externe a percé un panneau en carbone-carbone renforcé (RCC) du bord d'attaque de l'aile gauche. Les bords d'attaque chauffent à la rentrée jusqu'à environ 1 650 °C (près de 3 000 °F). Le 1er février 2003, du plasma chaud est entré dans l'aile par la brèche, la structure a fondu et l'orbiteur s'est désintégré au-dessus du Texas ; les sept membres d'équipage ont péri.
- Surface frontale et coefficient balistique
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Masse volumique de l'air selon l'atmosphère standard (isotherme au-dessus de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Composante verticale de la portance au roulis σ :
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Capture : le vaisseau est descendu jusqu'à l'altitude h_k :
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Accélération maximale (numériquement)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Une entrée balistique sans portance donnerait beaucoup plus selon Allen et Eggers : la portance réduit l'accélération
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Flux thermique maximal au point d'arrêt (Sutton–Graves) et chaleur totale par m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Température de surface du bouclier par équilibre radiatif (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Simplifications : la Terre est ronde et ne tourne pas, C_D et L/D sont constants et le roulis σ reste le même pendant tout le vol (le guidage réel le fait varier). Le flux thermique est seulement convectif ; au retour de la Lune s'y ajoute le rayonnement de la couche de choc incandescente. Un bouclier ablatif évacue une partie de la chaleur en se vaporisant, la température d'équilibre radiatif est donc une estimation haute.

Graphique

Trajectoire | Au cours du temps



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

Quelle part d'un iceberg est sous la surface.

Énoncé: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

Résultat

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Étapes

- On cherche φ ; données :
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Un corps dans un fluide subit une poussée égale au poids du fluide déplacé. Un corps flottant s'enfonce selon le rapport des masses volumiques. La même loi porte un ballon dans l'air. Équation du modèle :
  $F_b = \rho_f V g$
- On exprime la grandeur cherchée : $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- On remplace : $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- On convertit les unités : $\varphi \approx 0{,}8946 \ = 89{,}46\,\%$

Ce que peut porter une montgolfière.

Énoncé: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Résultat

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Étapes

- On cherche m_p ; données
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Un corps dans un fluide subit une poussée égale au poids du fluide déplacé. Un corps flottant s'enfonce selon le rapport des masses volumiques. La même loi porte un ballon dans l'air. Équation du modèle :
  $F_b = \rho_f V g$
- Masse que le gaz peut porter
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- On exprime la grandeur cherchée : $m_p = m_v - m_0$
- On remplace : $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

La pression au fond de la fosse des Mariannes.

Énoncé: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

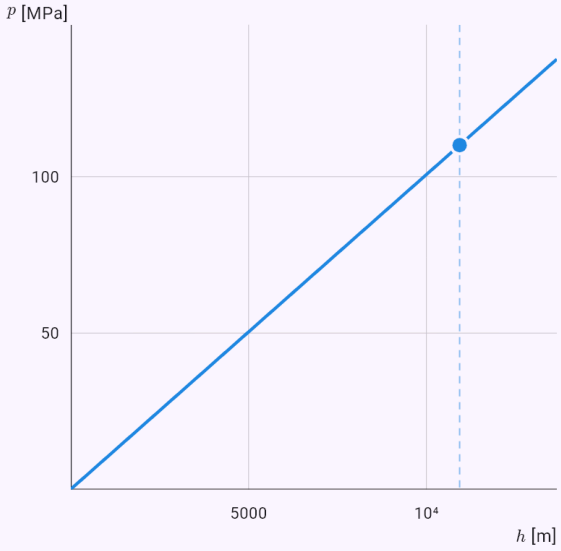
Résultat

$$p \approx 1101\ \text{bar}$$

Étapes

- On cherche p ; données :
  $h = 10\,940\,\text{m}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}^3$
- La pression croît linéairement avec la profondeur, de la masse volumique fois g fois la profondeur. La pression de l'air s'y ajoute en surface. L'eau est considérée comme incompressible. Équation du modèle :
  $p = p_0 + \rho_f g h$
- À grande profondeur l'eau se comprime légèrement et sa masse volumique varie aussi avec la température et la salinité ; le résultat peut différer d'environ 2 %.
- On exprime la grandeur cherchée : $p = p_0 + \rho_f g h$
- On remplace :
  $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\,\text{MPa}$
- Combien de fois la pression atmosphérique :
  $\frac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- On convertit les unités : $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\,\text{Pa} = 1101\,\text{bar}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La pression dans un rétrécissement de conduite.

Énoncé: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa]; rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Résultat

$$p_2 \approx 170{,}1\,\text{kPa}$$

Étapes

- On cherche p_2 ; données
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2, \quad v_1 = 2\,\text{m/s}, \quad p_1 = 200$
- On convertit les unités
  $A_1 = 20\,\text{cm}^2 = 0{,}002\,\text{m}^2, \quad A_2 = 5\,\text{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2,$
- Le long d'une ligne de courant d'un liquide parfait, la somme de la pression et des énergies cinétique et potentielle d'un volume se conserve. Dans un rétrécissement la vitesse augmente et la pression baisse ; si elle atteint la pression de vapeur, la cavitation apparaît. Équation du modèle :
  $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Équation de continuité :
  $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \frac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\,\text{m/s}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- On remplace
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - ($
- On convertit les unités : $p_2 \approx 170\,100\,\text{Pa} = 170{,}1\,\text{kPa}$

Vitesse limite d'une pierre dans l'eau et graphique du démarrage.

Énoncé: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3]; nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

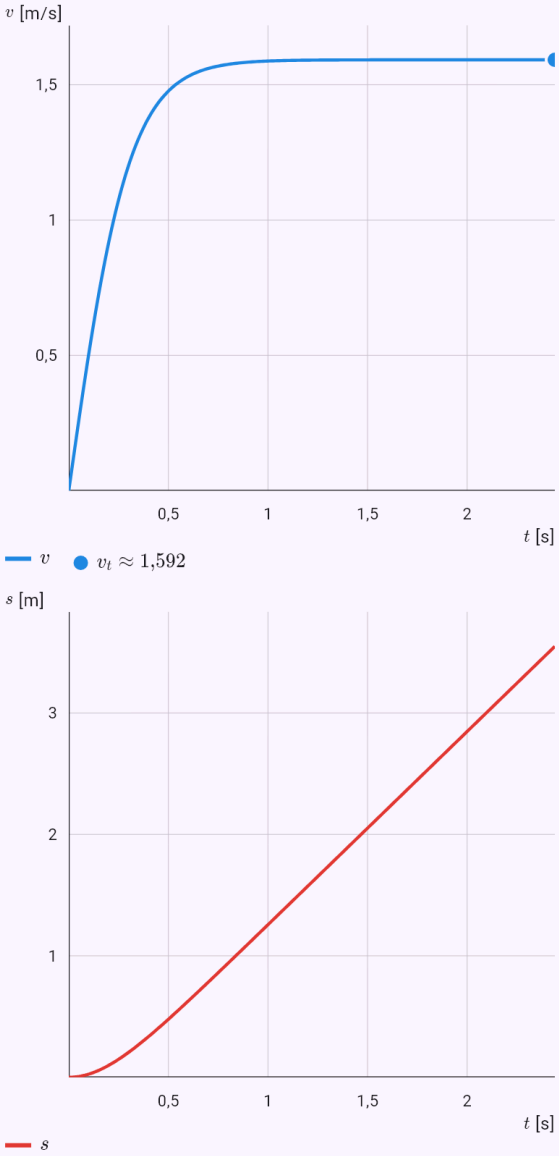
Résultat

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Étapes

- On cherche v_t ; données
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_l = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- On convertit les unités : $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un corps descend ou monte jusqu'à ce que la traînée équilibre la différence entre poids et poussée : il atteint sa vitesse limite. Au démarrage il doit aussi mettre en mouvement l'eau voisine, ce que décrit la masse ajoutée. L'équation est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, section et masse de la sphère
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- La force résultante est dirigée vers le bas, le corps descend : $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Masse avec la masse ajoutée :
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Nombre de Reynolds et coefficient de traînée à la vitesse limite : $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Vitesse limite : $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Constante de temps du démarrage avec et sans masse ajoutée
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- La masse ajoutée ne change que le démarrage. La vitesse limite n'en dépend pas, car rien n'accélère en régime établi.
- On remplace : $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Le temps de remontée d'une bulle depuis 10 m.

Énoncé: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)

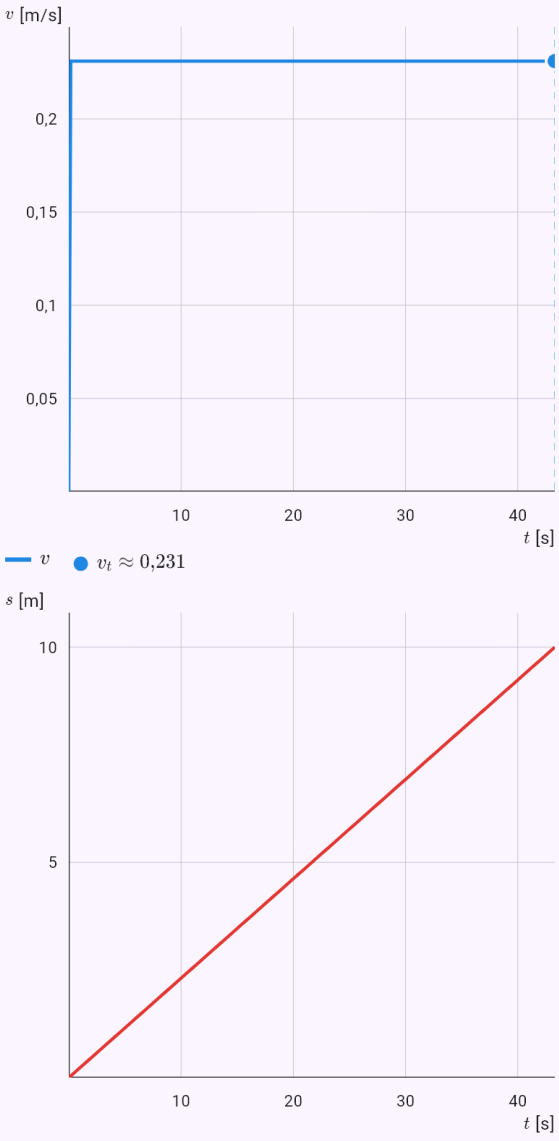
Résultat

$t \approx 43{,}3\,\text{s}$

Étapes

- On cherche t ; données
  $H = 10\,\text{m}, \quad d = 5\,\text{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \rho_f = 998$
- On convertit les unités : $d = 5\,\text{mm} = 0{,}005\,\text{m}$
- Un corps descend ou monte jusqu'à ce que la traînée équilibre la différence entre poids et poussée : il atteint sa vitesse limite. Au démarrage il doit aussi mettre en mouvement l'eau voisine, ce que décrit la masse ajoutée. L'équation est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Équation du modèle :
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volume, section et masse de la sphère
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^3, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- La force résultante est dirigée vers le haut, le corps monte : $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$
- Masse avec la masse ajoutée :
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\text{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Le nombre d'Eötvös indique la déformation de la bulle :
  $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Nombre de Reynolds et coefficient de traînée à la vitesse limite : $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Vitesse limite : $v_t \approx 0{,}231\,\text{m/s}$
- Constante de temps du démarrage avec et sans masse ajoutée
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\text{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$
- La masse ajoutée ne change que le démarrage. La vitesse limite n'en dépend pas, car rien n'accélère en régime établi.
- La corrélation de Tomiyama vaut pour une eau ordinaire légèrement contaminée. En eau pure les petites bulles montent plus vite, les grandes se fragmentent ou oscillent.
- L'équation a été résolue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, nombre de pas : $N = 3363$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

La chute d'une flèche de fusil-harpon à 5 m.

Énoncé: model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];

`rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)`

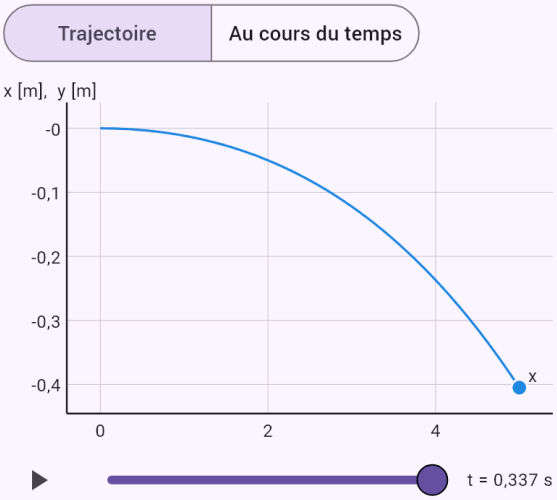
Résultat

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\text{cm}$$

Étapes

- On cherche Δy ; données
  $x = 5\,\text{m}, \quad v_0 = 20\,\text{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\text{kg}, \quad d = 7\,\text{mm},$
- On convertit les unités : $d = 7\,\text{mm} = 0{,}007\,\text{m}$
- Fusil-harpon de pêche sportive : la flèche élancée est freinée surtout par le frottement sur sa surface et perd donc sa vitesse en quelques mètres. La chute dépend du poids diminué de la poussée. Les équations sont résolues numériquement. Équation du modèle
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Coefficient de frottement selon la ligne ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Coefficient de traînée de la flèche : pointe et frottement sur la longueur : $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Trajet sur lequel la vitesse tombe à environ 37 %, et accélération vers le bas dans l'eau
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\text{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\text{m/}$
- L'équation a été résolue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, nombre de pas : $N = 1538$
- Le modèle ne compte pas la traînée de la ligne, qui réduit encore la portée réelle. La masse ajoutée de la flèche dans l'axe est négligeable.
- On convertit les unités : $\Delta y \approx 0{,}405\,\text{m} = 40{,}5\,\text{cm}$

Graphique



Les axes n'ont pas la même échelle. Le curseur ou le bouton de lecture permettent de suivre le vol dans le temps.

La distance d'un drone sous-marin sur batterie.

Énoncé: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

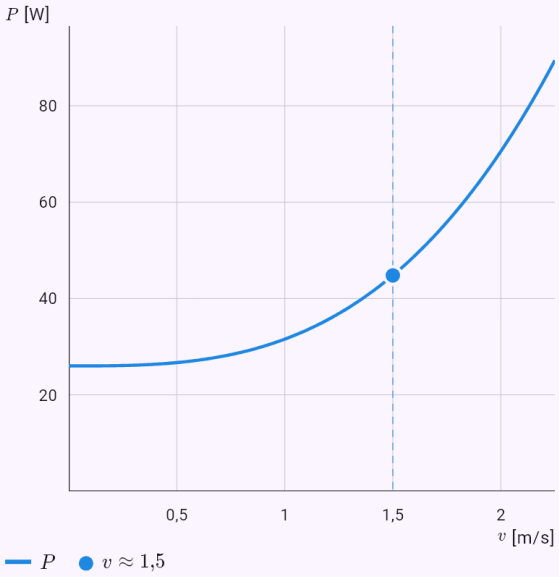
Résultat

$$R \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$$

Étapes

- On cherche R ; données $v = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\mathrm{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- On convertit les unités : $E = 1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$
- En régime établi la poussée égale la traînée. La traînée croît avec le carré de la vitesse et la puissance avec son cube. Sur batterie, la consommation constante des instruments compte aussi : il existe donc une vitesse de plus grande autonomie. Équation du modèle : $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Facteur K de la traînée D = Kv² $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\mathrm{kg/m}$
- Puissance nécessaire : $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\mathrm{W}$
- Vitesse de plus grande distance : $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\mathrm{m/s}$
- Autonomie de la batterie : $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\mathrm{h}$
- On exprime la grandeur cherchée : $R = v t_E$
- On remplace : $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$
- On convertit les unités : $R \approx 120\,500\,\mathrm{m} = 120{,}5\,\mathrm{km}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Un sous-marin historique : la puissance croît avec le cube de la vitesse.

Énoncé: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

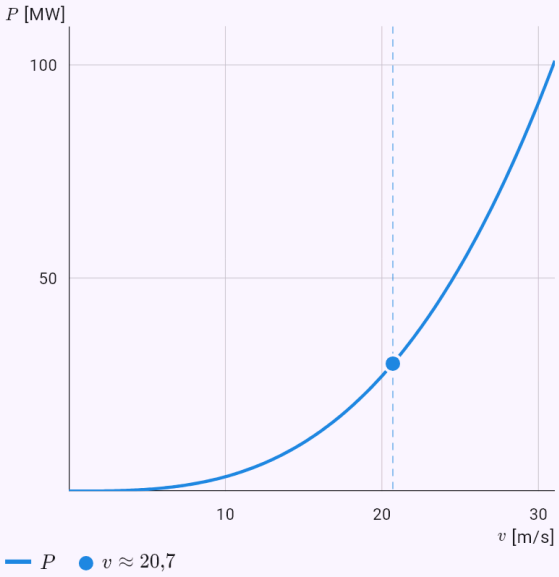
Résultat

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Étapes

- On cherche P ; données
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- En régime établi la poussée égale la traînée. La traînée croît avec le carré de la vitesse et la puissance avec son cube. Sur batterie, la consommation constante des instruments compte aussi : il existe donc une vitesse de plus grande autonomie. Équation du modèle :
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Facteur K de la traînée D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- On exprime la grandeur cherchée : $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h$
- On remplace : $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- La puissance croît avec le cube de la vitesse : une vitesse double demande huit fois plus de puissance :
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- On convertit les unités :
  $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La quantité d'eau qu'un sous-marin doit prendre pour se maintenir.

Énoncé: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Résultat

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Étapes

- On cherche m_b ; données
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Un engin immergé se maintient quand sa masse avec le ballast égale celle de l'eau déplacée. En rejetant ou en prenant de l'eau, il monte ou descend. Chasser un ballast en profondeur demande plus d'air, car il doit vaincre la pression extérieure. Équation du modèle :
  $\rho_f V = m_0 + m_b$
- On exprime la grandeur cherchée : $m_b = \rho_f V - m_0$
- On remplace :
  $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Volume d'eau de ballast : $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- On convertit les unités : $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

Puissance d'un porte-conteneurs avec la répartition de la résistance.

Énoncé: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

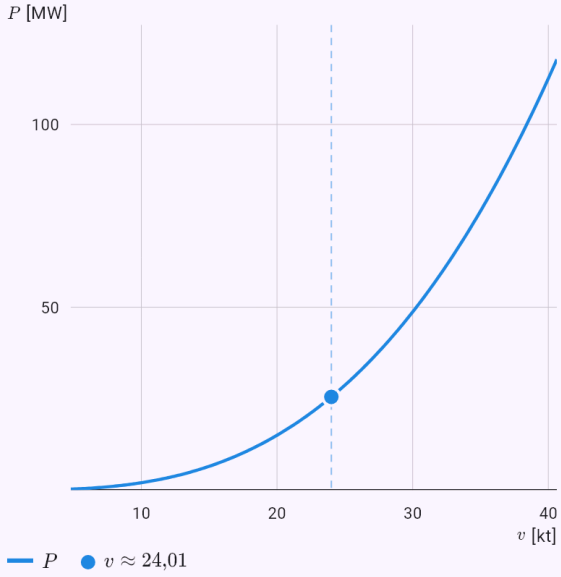
Résultat

$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Étapes

- On cherche P ; données
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- Le tirant d'eau découle du déplacement et la stabilité transversale du métacentre. La résistance a une part de frottement selon la ligne ITTC-57 et une part résiduelle donnée par un coefficient. Le nombre de Froude et la vitesse de coque montrent quand les vagues le long de la coque commencent à augmenter fortement la résistance. Équation du modèle
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Nombres de Froude et de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Coefficient de frottement selon la ligne ITTC-57 :
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Résistance de frottement et résiduelle
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Le coefficient résiduel est pris constant. En réalité il varie avec la vitesse et provient d'essais sur maquette.
- Résistance totale : $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- On exprime la grandeur cherchée : $P = \frac{Rv}{\eta}$
- On remplace : $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$
- On convertit les unités :
  $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Hauteur métacentrique : la stabilité d'un navire.

Énoncé: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Résultat

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

Étapes

- On cherche GM ; données
  $L = 230\,\mathrm{m},\quad B = 32{,}2\,\mathrm{m},\quad T = 10{,}8\,\mathrm{m},\quad C_B = 0{,}65$
- Le tirant d'eau découle du déplacement et la stabilité transversale du métacentre. La résistance a une part de frottement selon la ligne ITTC-57 et une part résiduelle donnée par un coefficient. Le nombre de Froude et la vitesse de coque montrent quand les vagues le long de la coque commencent à augmenter fortement la résistance. Équation du modèle
  $Fn = \dfrac{v}{\sqrt{gL}},\quad R = \dfrac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Volume déplacé et surface de flottaison (coefficient de bloc)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3,\quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Hauteur du centre de carène au-dessus de la quille (formule de Morrish)
  $KB = T - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Hauteur du métacentre au-dessus du centre de carène :
  $BM = \dfrac{I}{\nabla} = \dfrac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $GM = KB + BM - KG$
- On remplace : $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Le métacentre est au-dessus du centre de gravité : le navire est stable transversalement.
- Valable pour de petites gîtes. Le moment de la flottaison est estimé par son coefficient, exact pour un rectangle ; pour un vrai navire le résultat n'est qu'une première estimation.

Navigation d'un navire de 544 t et vol de l'ékranoplane KM au ras de l'eau.

Énoncé: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

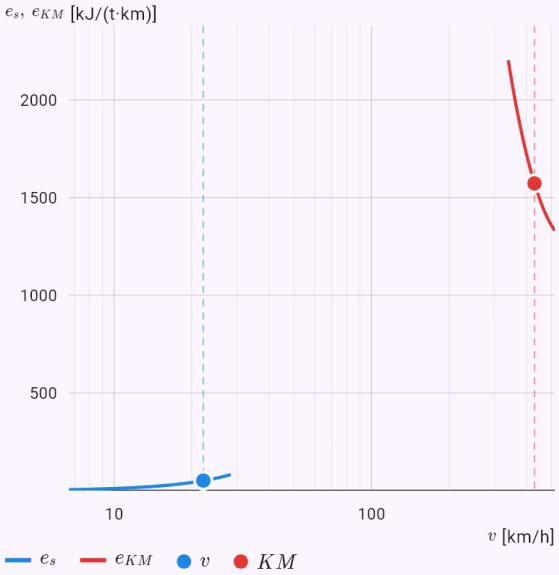
Résultat

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Étapes

- On cherche P ; données
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- Le tirant d'eau découle du déplacement et la stabilité transversale du métacentre. La résistance a une part de frottement selon la ligne ITTC-57 et une part résiduelle donnée par un coefficient. Le nombre de Froude et la vitesse de coque montrent quand les vagues le long de la coque commencent à augmenter fortement la résistance. Équation du modèle
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Nombres de Froude et de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Coefficient de frottement selon la ligne ITTC-57 :
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Résistance de frottement et résiduelle
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Le coefficient résiduel est pris constant. En réalité il varie avec la vitesse et provient d'essais sur maquette.
- Ékranoplane KM en croisière (même calcul que dans le formulaire Avion)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Travail contre la résistance par tonne et kilomètre : navire et KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Combien de fois plus d'énergie KM consomme et combien de fois il est plus rapide :
  $$\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$$
- KM est calculé en effet de sol avec le facteur de McCormick. La comparaison porte sur le travail contre la résistance ; elle ne compte ni le rendement des moteurs, ni les vagues, ni la météo.
- Résistance totale : $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- On exprime la grandeur cherchée : $P = \frac{Rv}{\eta}$
- On remplace : $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- On convertit les unités : $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Graphique



L'axe horizontal est logarithmique, car les vitesses diffèrent de plusieurs fois. Les points sont la vitesse donnée du navire et la croisière de l'ékranoplane.

L'énergie du neutron de la réaction D-T – partagée selon la conservation de la quantité de mouvement.

Énoncé: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Résultat

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Étapes

- L'énergie d'une réaction à partir des masses atomiques. Avec deux produits, l'énergie se partage selon la conservation de la quantité de mouvement : la particule la plus légère en emporte la plus grande part. Équation du modèle : $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Réaction : ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \to {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Masses avant et après : $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- On remplace : $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Les produits partent avec des quantités de mouvement opposées et égales ; leurs énergies cinétiques sont donc dans le rapport inverse de leurs masses.
- On exprime la grandeur cherchée : $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- On remplace : $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Énergie du noyau d'hélium : $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Combien de charbon remplace 1 g de combustible D-T.

Énoncé: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Résultat

$$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$$

Étapes

- On cherche m_c ; données : $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- On convertit les unités : $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Combien d'énergie libère une quantité de combustible, comparée à la fission de l'uranium 235 (environ 200 MeV par noyau) et au charbon. Équation du modèle : $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\,m$
- Réaction : ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \to {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Énergie d'une réaction : $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- On remplace $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- On remplace : $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- On remplace : $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- La fusion n'a pas de masse critique. En cas de panne, le plasma refroidit et la réaction s'arrête d'elle-même ; le réacteur ne peut pas s'emballer comme un réacteur à fission.
- On convertit les unités : $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Le pic de Gamow de la chaîne p-p au cœur du Soleil.

Énoncé: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one]; T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Résultat

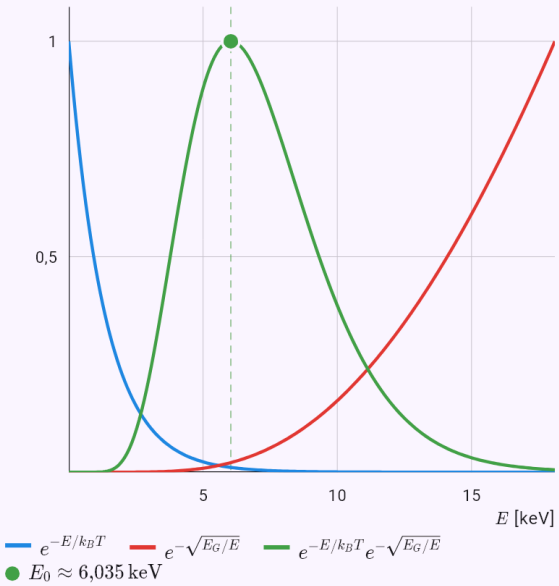
$$E_0 \approx 6{,}035\,\text{keV}$$

Étapes

- On cherche E_0 ; données :
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\text{keV}$
- En réalité, les noyaux traversent la barrière par effet tunnel. La probabilité tunnel e^(−√(E_G/E)) croît fortement avec l'énergie, tandis que les noyaux rapides de la distribution de Maxwell se raréfient fortement. Leur produit a un pic de Gamow étroit E_0, où les réactions ont vraiment lieu. Le facteur de Gamow est pris comme formule donnée ; sa démonstration relève de la mécanique quantique. Équation du modèle
  $P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2 (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($
- Masse réduite
  $\mu c^2 = \dfrac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\text{keV} \approx 465\,700\,\text{keV}$
- On remplace
  $E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\text{keV}$
- On remplace
  $E_0 = \left(\dfrac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4} \right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\text{keV}$
- Largeur du pic : $\Delta = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\text{keV}$
- Position du pic en multiples de k_BT : $\dfrac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- Les réactions ont lieu surtout dans une bande étroite

d'énergies autour de E_0, plusieurs fois l'énergie moyenne k_BT. Le graphique montre les deux fonctions et leur produit, chacune divisée par son maximum.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le triple produit avec les paramètres d'ITER, comparé à la condition d'ignition.

Énoncé: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

mode=lawson)

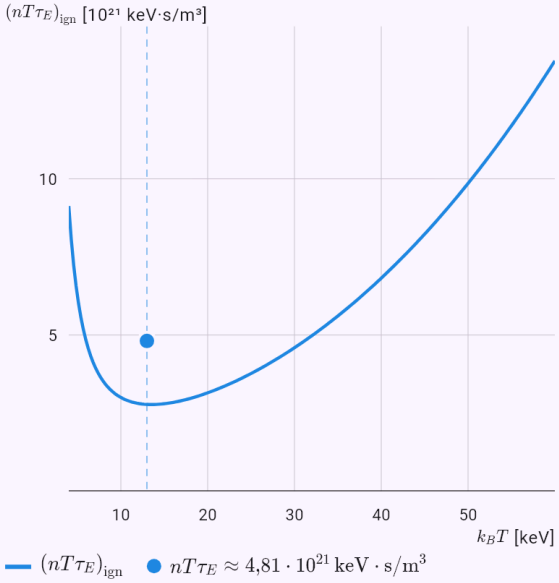
Résultat

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$$

Étapes

- On cherche $nT\tau_E$; données
  $n = 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\,\mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\,\mathrm{s}$
- Le critère de Lawson : le plasma reste chaud tout seul (ignition) quand le chauffage par les particules alpha des réactions D-T compense les pertes thermiques 3nk_BT/τ_E. Ce qui compte est le triple produit de la densité n, de la température T et du temps de confinement de l'énergie τ_E. Son minimum, environ 3·10²¹ keV·s/m³, se situe vers 14 keV. Équation du modèle
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Taux de réaction D-T (ajustement)
  $\langle\sigma v\rangle(13\,\mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$
- On remplace
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12\cdot(13)^2}{3520\cdot 2{,}073\cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s},$$
- On remplace
  $nT\tau_E = 10^{20}\cdot 13\cdot 3{,}7 \approx 4{,}81\cdot 10^{21}\,\mathrm{keV}\cdot\mathrm{s/m^3}$
- Le triple produit suffit à l'ignition : le chauffage alpha couvre les pertes – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Le plus petit triple produit nécessaire, environ 3·10²¹ keV·s/m³, est vers 14 keV. Les pertes par rayonnement de freinage sont négligées ici.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le taux de réaction D-T à 10 keV comme intégrale par la méthode de Simpson.

Énoncé: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Résultat

$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Étapes

- On cherche $\langle \sigma v \rangle$; données : $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- Le taux de réaction ⟨σv⟩ est la section efficace σ(E) moyennée sur la distribution de Maxwell des vitesses. Il est calculé comme une intégrale par la méthode de Simpson et comparé à un ajustement publié. Les sections efficaces sont celles de Bosch et Hale (Nuclear Fusion, 1992). Équation du modèle

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$

- Réaction : $^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Section efficace (Bosch-Hale) :

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$$

- Méthode de Simpson : $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Intégrale

$$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$

- Valeurs en SI

$$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2,$$

- On remplace

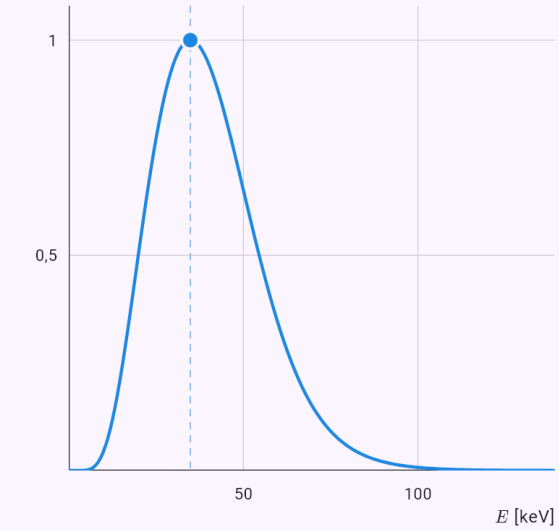
$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$

- Comparaison avec l'ajustement

$$\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$$

- L'intégrande compte surtout autour du pic de Gamow, il suffit donc d'intégrer jusqu'à 40 k_BT. L'écart avec l'ajustement est de l'ordre du pour cent.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le rayon de Larmor d'une particule alpha de fusion dans 5 T.

Énoncé: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

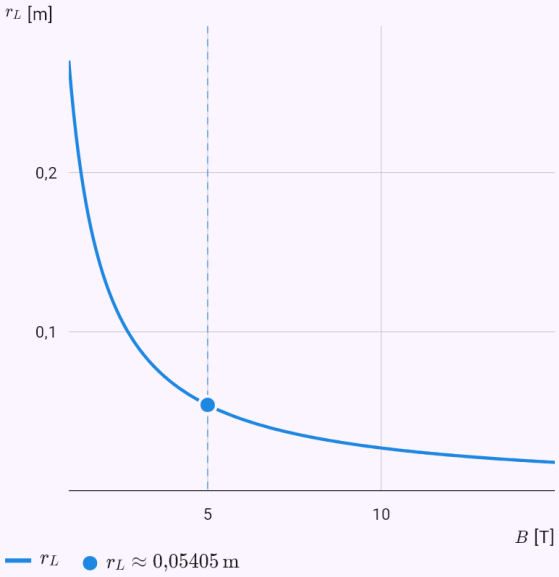
Résultat

$$r_L \approx 5{,}405\,\text{cm}$$

Étapes

- On cherche r_L ; données :
  $m = 4{,}002\,\text{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\text{keV}, \quad B = 5\,\text{T}$
- Une particule chargée dans un champ magnétique tourne autour d'une ligne de champ (rayon de Larmor) ; c'est pourquoi un champ magnétique tient le plasma chaud loin des parois. Le calcul est relativiste ; pour des ions lents γ ≈ 1. Équation du modèle :
  $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Masse : $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- Facteur de Lorentz et vitesse
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\text{m/s} \approx 0{,}04$
- Quantité de mouvement
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
- On remplace
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\text{m}$
- Les ions d'un tokamak tournent sur des rayons de quelques millimètres à quelques centimètres ; c'est pourquoi le champ magnétique les tient loin des parois.
- On convertit les unités : $r_L \approx 0{,}05405\,\text{m} = 5{,}405\,\text{cm}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le facteur de Lorentz d'un proton du LHC.

Énoncé: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Résultat

$\gamma \approx 7248{,}37$

Étapes

- On cherche γ ; données :
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- On convertit les unités :
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- À partir de la vitesse (en fraction de c) ou de l'énergie cinétique, le mode calcule γ, la vitesse, l'énergie totale et la quantité de mouvement. Un proton du LHC (6,8 TeV) n'est plus lent que la lumière que de quelques mètres par seconde. Équation du modèle
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Énergie au repos : $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- On remplace : $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Vitesse : $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- De combien plus lente que la lumière :
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Une particule ultrarelativiste : presque toute son énergie est cinétique et sa vitesse diffère à peine de c.

Combien de muons créés à 15 km atteignent le sol grâce à la dilatation du temps.

Énoncé: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

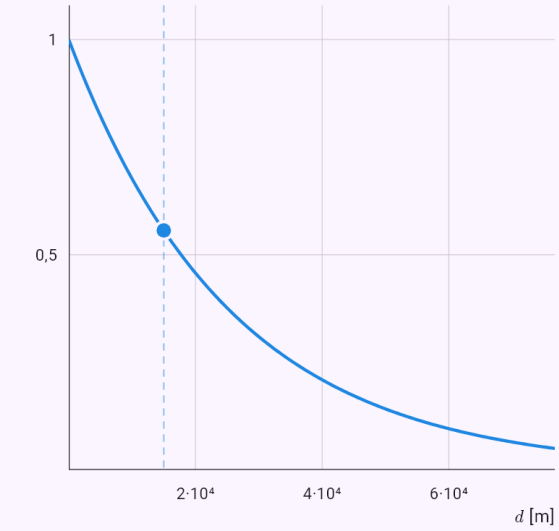
Résultat

$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Étapes

- On cherche $\frac{N}{N_0}$; données
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- On convertit les unités
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Une particule instable se désintègre avec sa durée de vie propre moyenne τ_0. Au laboratoire, son temps passe γ fois plus lentement, elle va donc γ fois plus loin. Sans la dilatation du temps, les muons créés à 15 km d'altitude n'atteindraient presque pas le sol. Équation du modèle :
  $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- On remplace : $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Vitesse : $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- On remplace
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{m}$
- On remplace : $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Sans dilatation du temps, la part qui arriverait :
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- Dans le référentiel propre de la particule, le temps ne ralentit pas, mais la distance se raccourcit (contraction des longueurs). Les deux points de vue donnent le même nombre de désintégrations.
- On convertit les unités : $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 \; = 55{,}64\,\%$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

L'énergie de collision d'un faisceau du LHC sur une cible fixe.

Énoncé: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

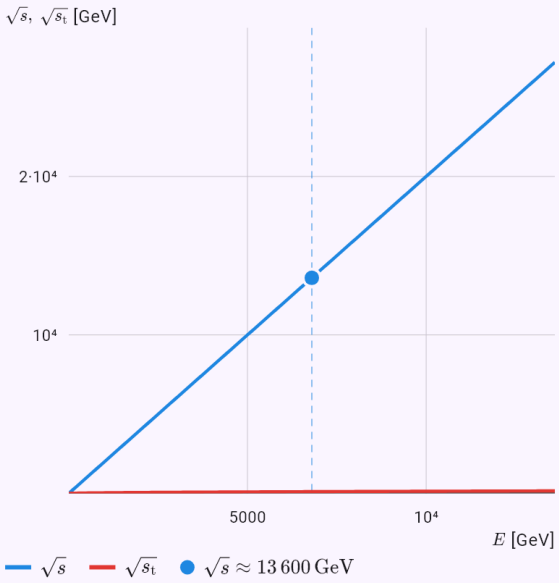
Résultat

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Étapes

- On cherche $\sqrt{s_t}$; données :
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Dans des faisceaux qui se croisent, toute l'énergie des deux particules passe dans la collision : √s = 2E. Un faisceau envoyé sur une cible fixe dépense l'essentiel de son énergie à mettre le centre de masse en mouvement, et √s ne croît que comme la racine de E. C'est pourquoi on construit des collisionneurs. Équation du modèle :
  $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s est la masse invariante du système : l'énergie disponible pour créer de nouvelles particules.
- On remplace
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Faisceaux qui se croisent : $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La perte d'énergie d'un électron par tour au LEP.

Énoncé: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

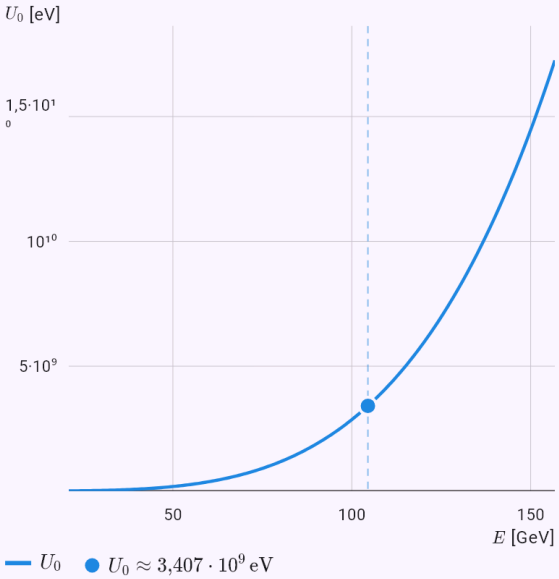
Résultat

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Étapes

- On cherche U_0 ; données
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- On convertit les unités : $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Une particule chargée sur une trajectoire courbe rayonne (rayonnement synchrotron). La perte par tour croît comme γ⁴, donc à énergie égale comme 1/m⁴. Un électron perd 10¹³ fois plus qu'un proton ; c'est pourquoi le LEP s'est arrêté à 104 GeV et le LHC accélère des protons. Équation du modèle :
  $U_0 = \dfrac{e^2 \beta^3 \gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Facteur de Lorentz : $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- On remplace
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- En électronvolts : $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^{9}\,\mathrm{eV}$
- Les électrons rayonnent 10¹³ fois plus que des protons de même énergie : $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- L'autre type de particule à même énergie et même orbite : $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- On convertit les unités :
  $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

44. Statique et résistance des matériaux

Le formulaire Statique (Applications, domaine Ingénierie) a trois modes. Une poutre est sur l'axe x de 0 à L, tenue par une articulation, un appui simple ou un encastrement ; vous pouvez la charger de forces verticales et inclinées, de moments et d'une charge répartie – uniforme, triangulaire ou trapézoïdale. Plusieurs forces vont dans un champ, séparées par des espaces, leurs positions et angles dans le même ordre. Des rotules intérieures en font une [[gerberBeam|poutre Gerber]].

La démarche commence par l'[[freeBody|isolement du solide]] : les réactions remplacent les appuis et le rang des équations d'équilibre montre l'[[staticDeterminacy|isostaticité]]. Si la poutre est hyperstatique ou mal tenue, l'appli le dit avec le degré d'hyperstaticité. Les équations sont résolues l'une après l'autre – toujours celle où il ne reste qu'une inconnue (un moment par rapport à un appui ; pour une poutre Gerber d'abord la partie au-delà de la rotule) – et une équation non utilisée sert de vérification.

L'appli donne les efforts N, T et M tronçon par tronçon entre les points remarquables et trouve le moment fléchissant maximal par le [[schwedlerTheorem|théorème de Schwedler]] : là où l'effort tranchant est nul ou là où il saute. Sous le croquis de la poutre avec charges et réactions figurent les diagrammes de N, T et M à la même échelle de longueur.

Le mode Solide plan calcule les réactions d'un solide donné par les points de ses appuis et les points d'application des forces – une échelle contre un mur, par exemple. Pour un appui simple, vous choisissez la direction de la réaction par l'angle β.

Les caractéristiques de section sont l'aire, le [[centroid|centre de gravité]], les moments quadratiques par le [[parallelAxisTheorem|théorème de Huygens]], les [[sectionModulus|modules de résistance]] et pour une section dissymétrique les [[principalAxes|axes principaux]] – pour rectangle, tube, profilés T, I, U, L et une section composée de rectangles et de cercles avec des trous. Le dessin montre la section à l'échelle avec son centre de gravité et ses axes. Les congés des profilés laminés sont négligés.

Le formulaire Citerne de liquide calcule une citerne partiellement remplie au freinage, au démarrage et en virage. La surface s'incline perpendiculairement à la résultante du poids et de la force d'inertie (tan θ = a/g), le centre de gravité du liquide se déplace et avec lui celui de l'ensemble. Les charges par essieu sont les réactions d'une poutre sur deux appuis ; en virage l'appli calcule le [[loadTransferRatio|transfert de charge]] sur les roues extérieures et la vitesse critique de renversement, comparés à une charge rigide, avec la fréquence propre du [[sloshing|ballottement]]. Une démo interactive est sur mathtrace.app, rubrique « Essayez ».

Le formulaire Dimensionnement d'une poutre compare trois variantes d'une poutre fléchie : le profilé normalisé le plus léger des tables (IPE, HEB, tubes ronds et rectangulaires), la section constante optimale d'une forme choisie (rectangle, cercle, tube d'élancement de paroi limité) et une [[uniformStrengthBeam|poutre d'égale résistance]]. Il vérifie la résistance, la flèche admissible L/n et le

cisaillement à l'extrémité libre ; la démarche montre quelle condition est [[activeConstraint|active]] et le graphique la section, le moment et la flèche le long de la poutre. L'inspiration : un mémoire d'optimisation où un bras dimensionné par optimisation était nettement plus léger que d'après les tables.

Exemples

Une poutre sur deux appuis avec une force et une charge répartie sur une partie : réactions, tronçons et moment maximal.

Énoncé: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

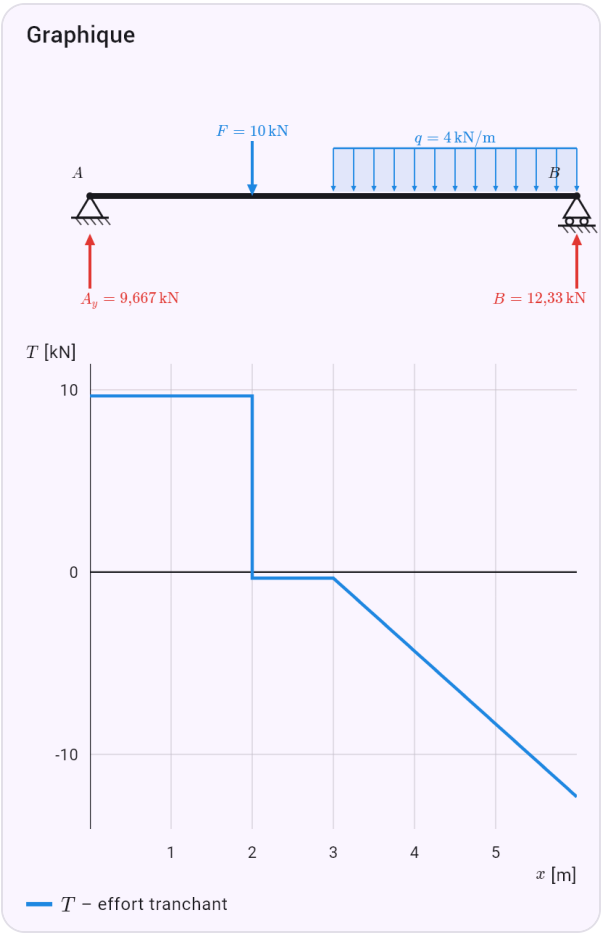
Résultat

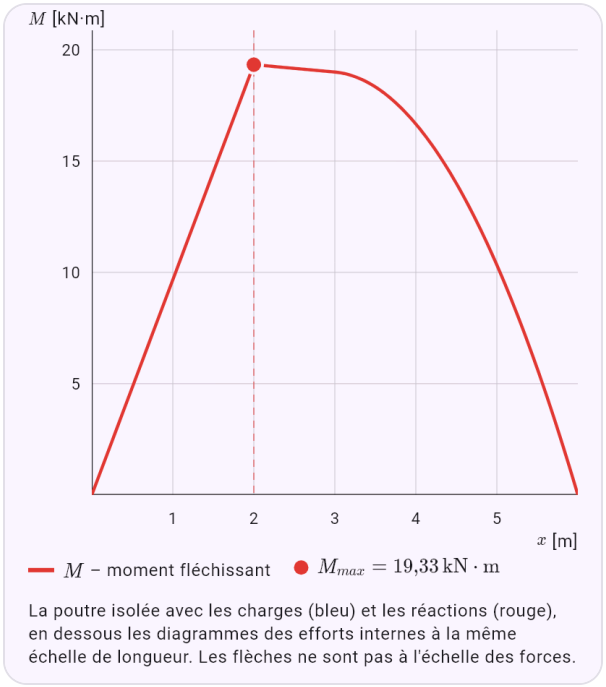
$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$

$x \approx 2\,\mathrm{m}$

Étapes

- On cherche M_{max} ; données
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- La poutre est sur l'axe x de 0 à L. Une articulation transmet une force horizontale et une verticale, un appui simple seulement la force perpendiculaire à sa base, un encastrement aussi un moment. Une force fait l'angle α avec la poutre (90° = verticale vers le bas), un moment est positif dans le sens trigonométrique, une charge répartie positive vers le bas. Des rotules intérieures en font une poutre Gerber : dans une rotule le moment fléchissant est nul, ce qui donne une équation de plus. Les diagrammes de N, T et M se construisent tronçon par tronçon avec le théorème de Schwedler. Équation du modèle : $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Résultante de la charge répartie (au centre de gravité de l'aire de charge) :
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Réactions inconnues : $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostatique : autant d'inconnues que d'équations indépendantes (n inconnues, e équations, h le rang) :
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Somme des forces horizontales :
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Vérification par une équation non utilisée :
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Théorème de Schwedler : la dérivée du moment fléchissant est l'effort tranchant et la dérivée de l'effort tranchant est l'opposé de la charge répartie. Là où T est nul, M a un extremum.
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [0\,;\,2]: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [2\,;\,3]: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [3\,;\,6]: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2x^2$
- Le moment fléchissant maximal est au saut de l'effort tranchant : $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Un moment fléchissant positif courbe la poutre vers le bas (fibres inférieures tendues), un négatif vers le haut, typiquement sur un appui ou à l'encastrement.





La poutre isolée avec les charges (bleu) et les réactions (rouge), en dessous les diagrammes des efforts internes à la même échelle de longueur. Les flèches ne sont pas à l'échelle des forces.

Une console avec une force inclinée au bout et une charge uniforme : réactions horizontale et verticale et moment d'encastrement.

Énoncé: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

Résultat

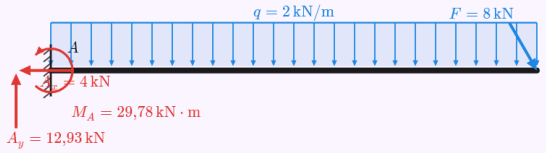
$$A_x = -4\,\text{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\text{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

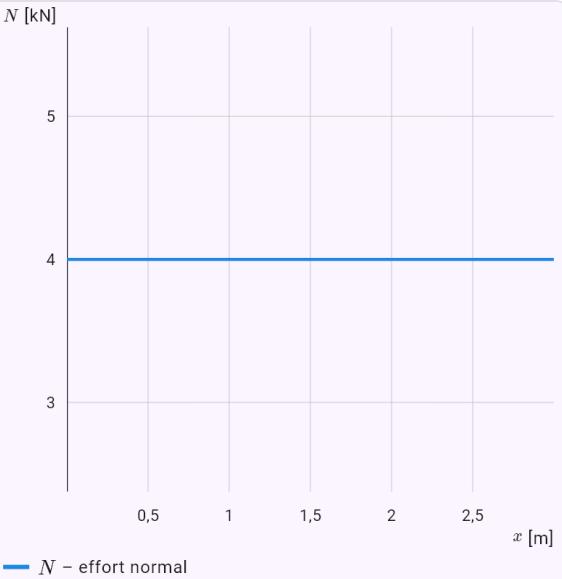
Étapes

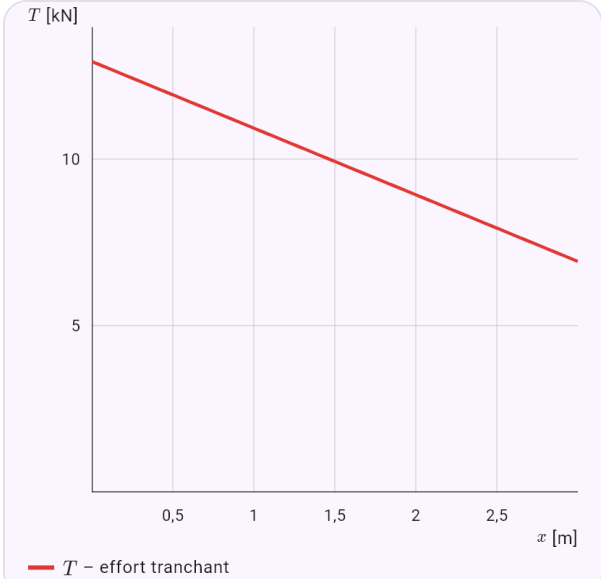
- On cherche R ; données
  $L = 3\,\text{m},\quad F = 8\,\text{kN},\quad x_F = 3\,\text{m},\quad \alpha = 60\,^\circ,\quad q_a =$
- La poutre est sur l'axe x de 0 à L. Une articulation transmet une force horizontale et une verticale, un appui simple seulement la force perpendiculaire à sa base, un encastrement aussi un moment. Une force fait l'angle α avec la poutre (90° = verticale vers le bas), un moment est positif dans le sens trigonométrique, une charge répartie positive vers le bas. Des rotules intérieures en font une poutre Gerber : dans une rotule le moment fléchissant est nul, ce qui donne une équation de plus. Les diagrammes de N, T et M se construisent tronçon par tronçon avec le théorème de Schwedler. Équation du modèle : $\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M = 0$
- Résultante de la charge répartie (au centre de gravité de l'aire de charge) :
  $Q = q\,l = 2\cdot 3 = 6\,\text{kN},\quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{m}$
- Composantes de la force inclinée :
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\text{kN},\quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\text{kN}$
- Réactions inconnues : $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Isostatique : autant d'inconnues que d'équations indépendantes (n inconnues, e équations, h le rang) :
  $n = 3,\quad e = 3,\quad h(\mathbf{A}) = 3$

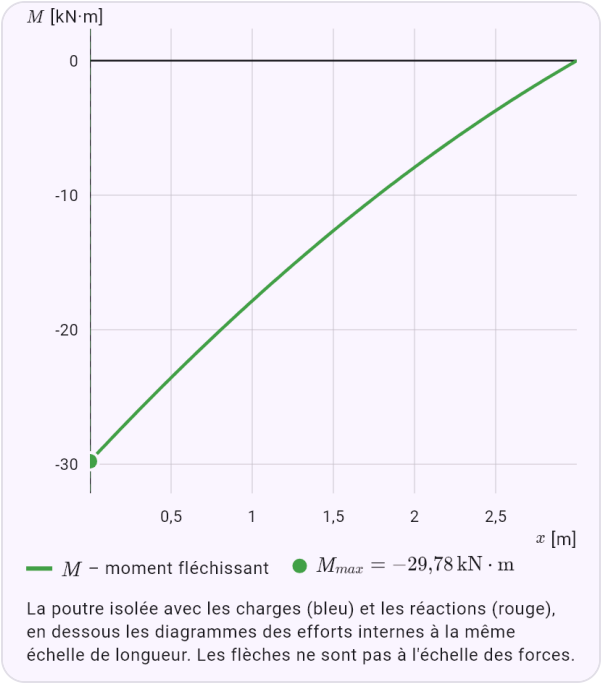
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_A = 0:\quad M_A - 6{,}928\cdot 3 - 6\cdot 1{,}5 = 0\quad\Rightarrow\quad M$
- Somme des forces horizontales :
  $\sum F_x = 0:\quad A_x + 4 = 0\quad\Rightarrow\quad A_x = -4\,\text{kN}$
- Somme des forces verticales
  $\sum F_y = 0:\quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0\quad\Rightarrow\quad A_y = 12{,}93$

Graphique









La poutre isolée avec les charges (bleu) et les réactions (rouge), en dessous les diagrammes des efforts internes à la même échelle de longueur. Les flèches ne sont pas à l'échelle des forces.

Une poutre Gerber sur trois appuis avec une rotule : le calcul commence par la partie au-delà de la rotule.

Énoncé: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

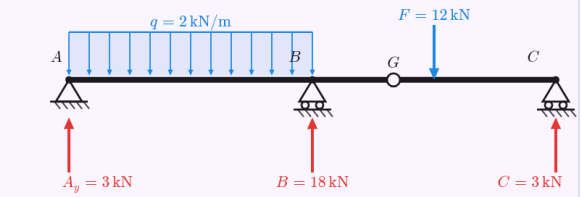
Résultat

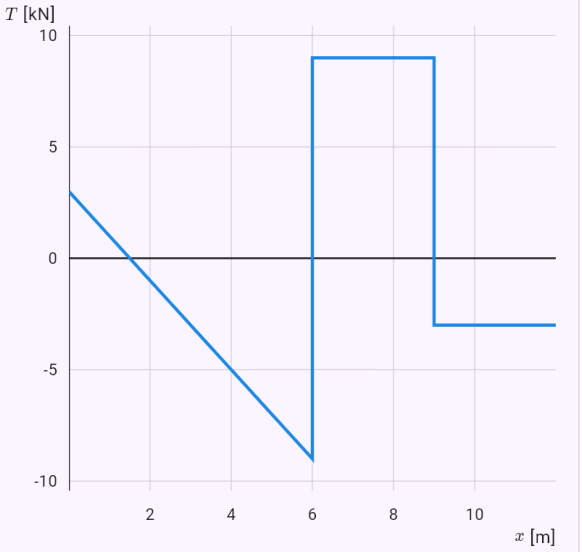
$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

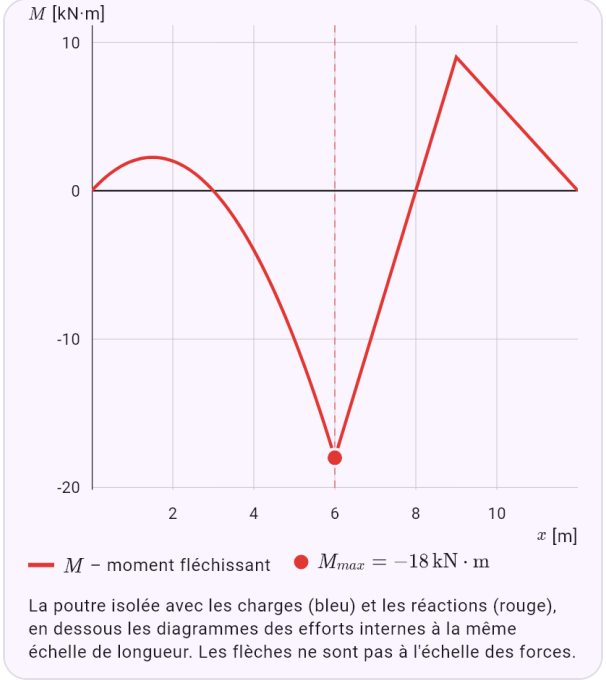
Étapes

- On cherche M_{max} ; données
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- La poutre est sur l'axe x de 0 à L. Une articulation transmet une force horizontale et une verticale, un appui simple seulement la force perpendiculaire à sa base, un encastrement aussi un moment. Une force fait l'angle α avec la poutre (90° = verticale vers le bas), un moment est positif dans le sens trigonométrique, une charge répartie positive vers le bas. Des rotules intérieures en font une poutre Gerber : dans une rotule le moment fléchissant est nul, ce qui donne une équation de plus. Les diagrammes de N, T et M se construisent tronçon par tronçon avec le théorème de Schwedler. Équation du modèle : $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Résultante de la charge répartie (au centre de gravité de l'aire de charge) :
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Réactions inconnues : $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Isostatique : autant d'inconnues que d'équations indépendantes (n inconnues, e équations, h le rang) :
  $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Le moment de la partie à droite de la rotule par rapport à celle-ci est nul :
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Le moment de la partie à gauche de la rotule par rapport à celle-ci est nul
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Somme des forces horizontales :
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Vérification par une équation non utilisée :
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Théorème de Schwedler : la dérivée du moment fléchissant est l'effort tranchant et la dérivée de l'effort tranchant est l'opposé de la charge répartie. Là où T est nul, M a un extremum.
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [0\,;\,6]: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [6\,;\,9]: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Efforts internes dans le tronçon (x en m, forces en kN, moments en kN·m) :
  $x \in [9\,;\,12]: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Le moment fléchissant maximal est au saut de l'effort tranchant : $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Un moment fléchissant positif courbe la poutre vers le bas (fibres inférieures tendues), un négatif vers le haut, typiquement sur un appui ou à l'encastrement.

Graphique







La poutre isolée avec les charges (bleu) et les réactions (rouge), en dessous les diagrammes des efforts internes à la même échelle de longueur. Les flèches ne sont pas à l'échelle des forces.

Une échelle contre un mur lisse avec le poids de l'échelle et d'une personne : réactions au sol et au mur.

Énoncé: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

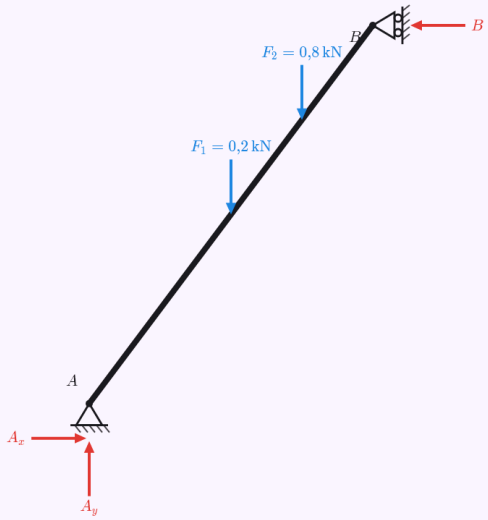
Résultat

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Étapes

- On cherche R ; données
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Un solide dans le plan donné par les points de ses appuis et les points d'application des forces (x vers la droite, y vers le haut). Pour un appui simple, l'angle β donne la direction de la réaction : 90° depuis le bas, 0° depuis un mur à gauche vers la droite, 180° depuis un mur à droite vers la gauche. Exemple : une échelle contre un mur lisse - le pied retenu au sol par frottement (articulation), le haut glissant le long du mur (appui simple). Équation du modèle :
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Réactions inconnues : $A_x,\ A_y,\ B$
- Isostatique : autant d'inconnues que d'équations indépendantes (n inconnues, e équations, h le rang) :
  $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_A = 0 : \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Somme des forces horizontales
  $\sum F_x = 0 : \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Somme des moments par rapport à un appui – une équation à une inconnue
  $\sum M_B = 0 : \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Vérification par une équation non utilisée :
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Graphique



Le solide isolé : charges en bleu, réactions d'appui en rouge. Les flèches ne sont pas à l'échelle des forces. Les valeurs des réactions sont dans le résultat.

Un encastrement avec un appui simple est hyperstatique d'ordre 1.

Énoncé: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

`xF=2[m])`

Résultat

$$s = n - h = 1$$

Étapes

- On cherche R ; données :
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- La poutre est sur l'axe x de 0 à L. Une articulation transmet une force horizontale et une verticale, un appui simple seulement la force perpendiculaire à sa base, un encastrement aussi un moment. Une force fait l'angle α avec la poutre (90° = verticale vers le bas), un moment est positif dans le sens trigonométrique, une charge répartie positive vers le bas. Des rotules intérieures en font une poutre Gerber : dans une rotule le moment fléchissant est nul, ce qui donne une équation de plus. Les diagrammes de N, T et M se construisent tronçon par tronçon avec le théorème de Schwedler. Équation du modèle : $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Réactions inconnues : $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Hyperstatique : plus d'inconnues que d'équations indépendantes :
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Il y a plus de réactions inconnues que les équations d'équilibre n'en donnent. Les équations manquantes viennent de la déformation (p. ex. flèche nulle sur un appui) – l'appli ne calcule pas encore les poutres hyperstatiques. Le degré s indique combien d'appuis sont surabondants.

Graphique



La poutre isolée avec les charges (bleu) et les réactions (rouge), en dessous les diagrammes des efforts internes à la même échelle de longueur. Les flèches ne sont pas à l'échelle des forces.

Section en T : centre de gravité, moment quadratique et module de résistance.

Énoncé: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

`tf=20[mm]; tw=20[mm])`

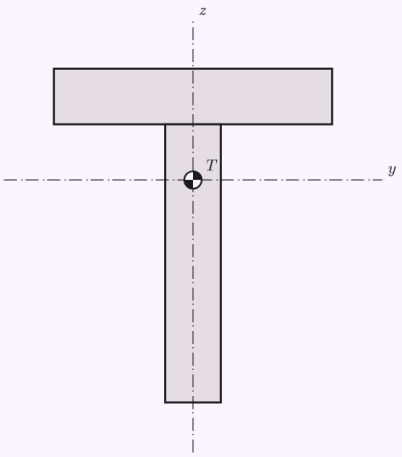
Résultat

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Étapes

- On cherche W_y ; données
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- On découpe la section en rectangles et en cercles et on retranche les trous. Le centre de gravité est la moyenne pondérée des centres des parties, les moments quadratiques par rapport aux axes qui y passent viennent du théorème de Huygens (Steiner). L'axe y est horizontal, z vertical : I_y décide de la flexion dans le plan vertical. Le moment et la distance des fibres extrêmes donnent le module de résistance W, pour une section dissymétrique (L) aussi les axes principaux. Les congés des profilés laminés sont négligés, d'où un léger écart avec les tables. Équation du modèle
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Partie de la section
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Partie de la section
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Aire de la section : $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Centre de gravité comme moyenne pondérée des centres des parties
  $y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$
- Moments quadratiques de toute la section
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Modules de résistance (e = distance des fibres extrêmes au centre de gravité)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$
- Rayons de giration
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$

Graphique



La section à l'échelle avec son centre de gravité T et les axes y, z qui y passent ; pour une section dissymétrique aussi les axes principaux 1, 2.

Cornière à ailes égales L : produit d'inertie et axes principaux à 45°.

Énoncé: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm];`

`t=10[mm])`

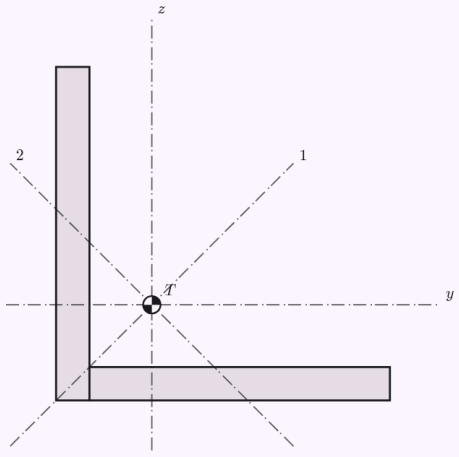
Résultat

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\text{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\text{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Étapes

- On cherche I_1 ; données :
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad t = 10\,\text{mm}$
- On découpe la section en rectangles et en cercles et on retranche les trous. Le centre de gravité est la moyenne pondérée des centres des parties, les moments quadratiques par rapport aux axes qui y passent viennent du théorème de Huygens (Steiner). L'axe y est horizontal, z vertical : I_y décide de la flexion dans le plan vertical. Le moment et la distance des fibres extrêmes donnent le module de résistance W, pour une section dissymétrique (L) aussi les axes principaux. Les congés des profilés laminés sont négligés, d'où un léger écart avec les tables. Équation du modèle
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Partie de la section
  $1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\text{mm}, \quad z_1 =$
- Partie de la section
  $2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\text{mm}, \quad z_2 =$
- Aire de la section : $A = A_1 + A_2 = 1900\,\text{mm}^2$
- Centre de gravité comme moyenne pondérée des centres des parties
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\text{mm}, \quad z_T =$$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\text{mm}^4,$$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\text{mm}^4,$$
- Moments quadratiques de toute la section
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Produit d'inertie
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\text{mm}^4$
- Moments quadratiques principaux
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Rotation de l'axe principal 1 par rapport à l'axe y :
  $$\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Modules de résistance (e = distance des fibres extrêmes au centre de gravité)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Rayons de giration
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}$$

Graphique



La section à l'échelle avec son centre de gravité T et les axes y, z qui y passent ; pour une section dissymétrique aussi les axes principaux 1, 2.

Une plaque avec un trou rond excentré : section composée et centre de gravité décalé.

Énoncé: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm]; rh=100[mm];`

ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])

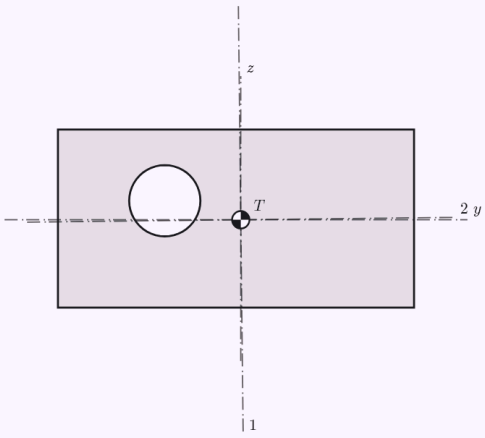
Résultat

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

Étapes

- On cherche I_y ; données
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- On découpe la section en rectangles et en cercles et on retranche les trous. Le centre de gravité est la moyenne pondérée des centres des parties, les moments quadratiques par rapport aux axes qui y passent viennent du théorème de Huygens (Steiner). L'axe y est horizontal, z vertical : I_y décide de la flexion dans le plan vertical. Le moment et la distance des fibres extrêmes donnent le module de résistance W, pour une section dissymétrique (L) aussi les axes principaux. Les congés des profilés laminés sont négligés, d'où un léger écart avec les tables. Équation du modèle
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \mathbf{Y}$$
- Partie de la section
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$
- Trou (retranché)
  $$2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$$
- Aire de la section : $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Centre de gravité comme moyenne pondérée des centres des parties
  $$y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $$I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$
- Théorème de Huygens : moment propre de la partie + aire × carré de la distance des axes
  $$I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$$
- Moments quadratiques de toute la section
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Produit d'inertie
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$$
- Moments quadratiques principaux
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$$
- Rotation de l'axe principal 1 par rapport à l'axe y
  $$\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$$
- Modules de résistance (e = distance des fibres extrêmes au centre de gravité)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Rayons de giration
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$$

Graphique



La section à l'échelle avec son centre de gravité T et les axes y, z qui y passent ; pour une section dissymétrique aussi les axes principaux 1, 2.

Une citerne à moitié pleine d'eau freine à 5 m/s² : l'essieu avant porte des dizaines de pour cent de plus.

Énoncé: model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

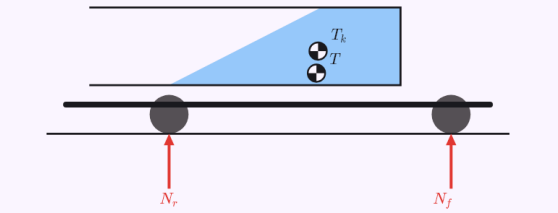
Résultat

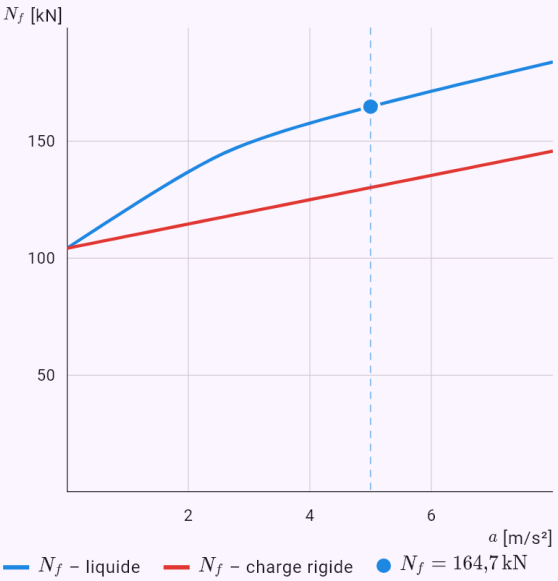
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Étapes

- On cherche N_f ; données
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Freinage avec la décélération a : le liquide se porte vers l'avant, la surface s'incline de θ et le centre de gravité avance et monte. Les charges par essieu sont les réactions d'une poutre sur deux appuis avec la force d'inertie m·a au centre de gravité. Équation du modèle :
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$
- Volume de la citerne et du liquide
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Inclinaison de la surface – perpendiculaire à la résultante du poids et de la force d'inertie
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Le centre de gravité du liquide avance et monte
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Centre de gravité de tout le véhicule
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Charges par essieu par les moments autour de l'essieu arrière (force d'inertie au centre de gravité)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Essieu avant au repos et en marche ; avec une charge rigide
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Fréquence propre de la première vague (ballottement)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- Le modèle quasi statique vaut pour un freinage établi. Après un freinage brusque le liquide oscille avec la période T et ses chocs contre la paroi peuvent augmenter la charge un instant encore plus ; d'où les cloisons brise-flots des citernes.

Graphique





Vue de côté avec la surface inclinée, le centre de gravité du liquide T_k, celui de l'ensemble T et les charges par essieu ; le graphique montre la charge de l'essieu avant selon la décélération pour le liquide et une charge rigide.

La même citerne dans un virage de R = 60 m : la vitesse critique avec le liquide et avec une charge rigide.

Énoncé: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];`

```
W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])
```

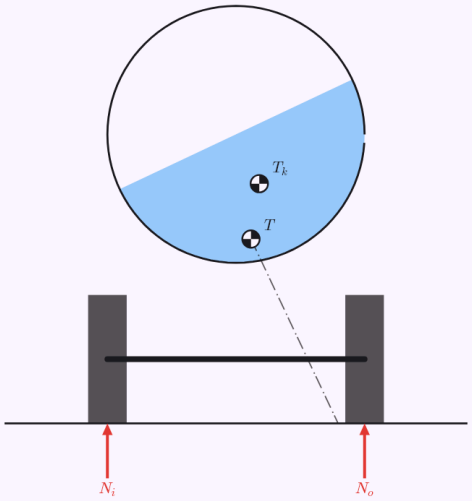
Résultat

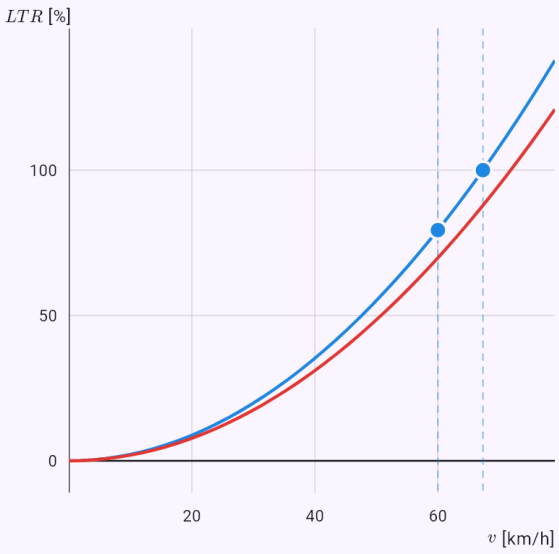
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Étapes

- On cherche v_{krit} ; données
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Un virage de rayon R à la vitesse v : l'accélération centripète a = v²/R, le liquide se déverse vers l'extérieur et le centre de gravité aussi. Le véhicule se renverse quand la résultante du poids et de la force centrifuge passe par les roues extérieures (LTR = 100 %). Le roulis de la caisse sur ses ressorts (k_r degrés par g) pousse le centre de gravité encore plus loin. Équation du modèle :
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Volume de la citerne et du liquide
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Accélération centripète dans le virage
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Inclinaison de la surface – perpendiculaire à la résultante du poids et de la force d'inertie :
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Centre du liquide dans la section (y vers l'extérieur du virage) : $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Le roulis de la caisse pousse le centre de gravité encore plus loin
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Transfert de charge sur les roues extérieures
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Limite de renversement : la résultante passe par les roues extérieures
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\,\mathrm{lim}} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Charge rigide pour comparer :
  $a_{y,\,\mathrm{lim}} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Fréquence propre de la première vague (ballottement)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Les vraies citernes se renversent déjà vers 0,35–0,45 g : en plus du roulis sur les ressorts, les pneus s'écrasent et le liquide oscille dans le virage. La limite quasi statique est une estimation haute.

Graphique





Vue de l'arrière dans le virage (extérieur à droite) avec la surface inclinée, le centre de gravité et la résultante ; le graphique montre le transfert de charge sur les roues extérieures selon la vitesse – à 100 % les roues intérieures se soulèvent.

Une console de 2 m avec 10 kN : IPE 200 des tables, le tube optimal et un tube d'égale résistance.

Énoncé: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

Résultat

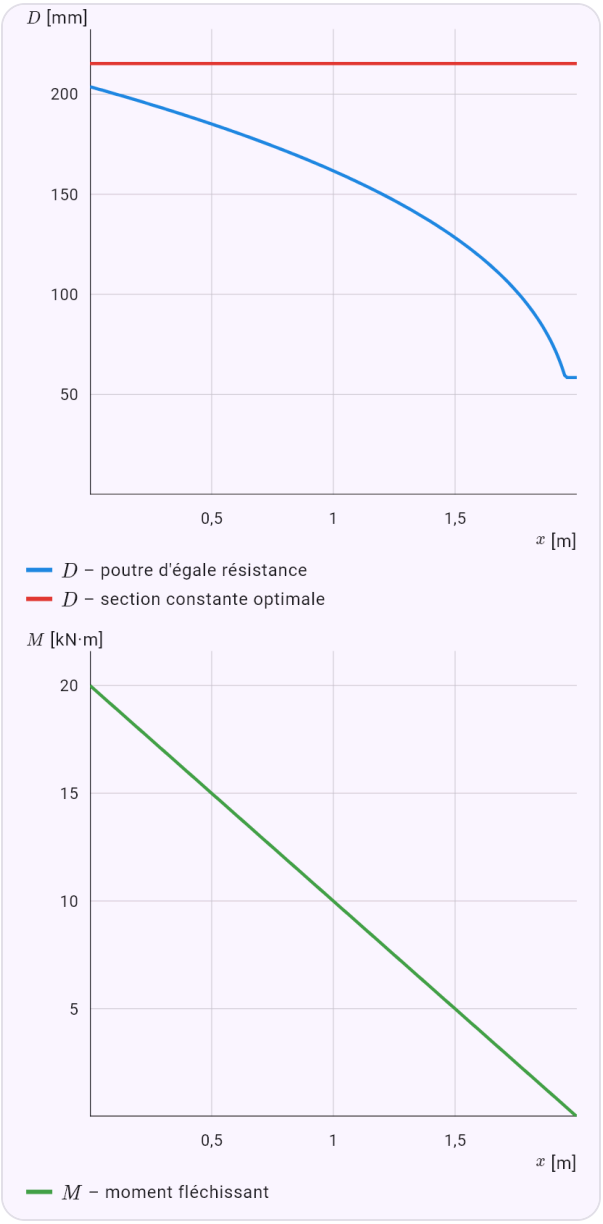
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

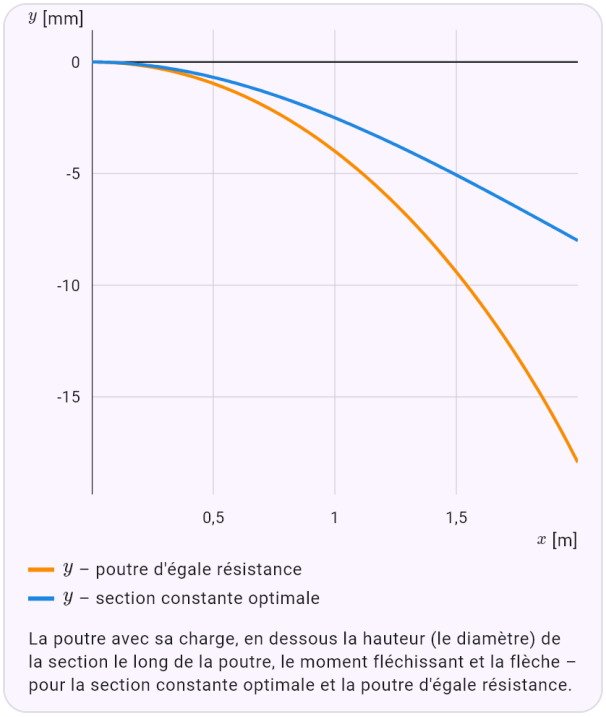
Étapes

- On cherche m ; données
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Une console de longueur L avec une force F à l'extrémité libre ou une charge répartie q sur toute la longueur. Le moment maximal est à l'encastrement. Équation du modèle
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Moment fléchissant maximal : $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condition de résistance – le module de résistance minimal
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condition de flèche (en intégrant E·I·y'' = −M) – le moment quadratique minimal
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$$
- Le profilé convenable le plus léger de chaque série
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3, \ I = 1943\,\text{cm}^4, \ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. D'après les tables – le plus léger de tous
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Une paroi plus mince donne une aire plus petite à W égal, l'optimum est donc à la limite d'élancement :
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 50$$
- 2. Section constante optimale – la plus petite taille qui respecte les deux conditions
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$$
- La condition de flèche est active (la contrainte reste sous l'admissible) : $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Aire et masse de la section optimale :
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Poutre d'égale résistance – σ(x) = σ_adm partout, à l'extrémité libre la section minimale due au cisaillement
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$$
- Masse et flèche de la poutre d'égale résistance
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$$
- La poutre d'égale résistance ne surveille que la contrainte, elle est donc plus souple et dépasse la flèche admissible. En pratique on agrandit sa section ou on l'emploie là où la résistance décide.
- Masse des variantes par rapport au profilé des tables :
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$$
- Le poids propre de la poutre est négligé ; pour les poutres longues et lourdes il s'ajoute à la charge répartie.

Graphique







La poutre avec sa charge, en dessous la hauteur (le diamètre) de la section le long de la poutre, le moment fléchissant et la flèche – pour la section constante optimale et la poutre d'égale résistance.

Un rectangle d'égale résistance de largeur constante : la hauteur en parabole, un tiers de matière en moins.

Énoncé: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Résultat

$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$

$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$

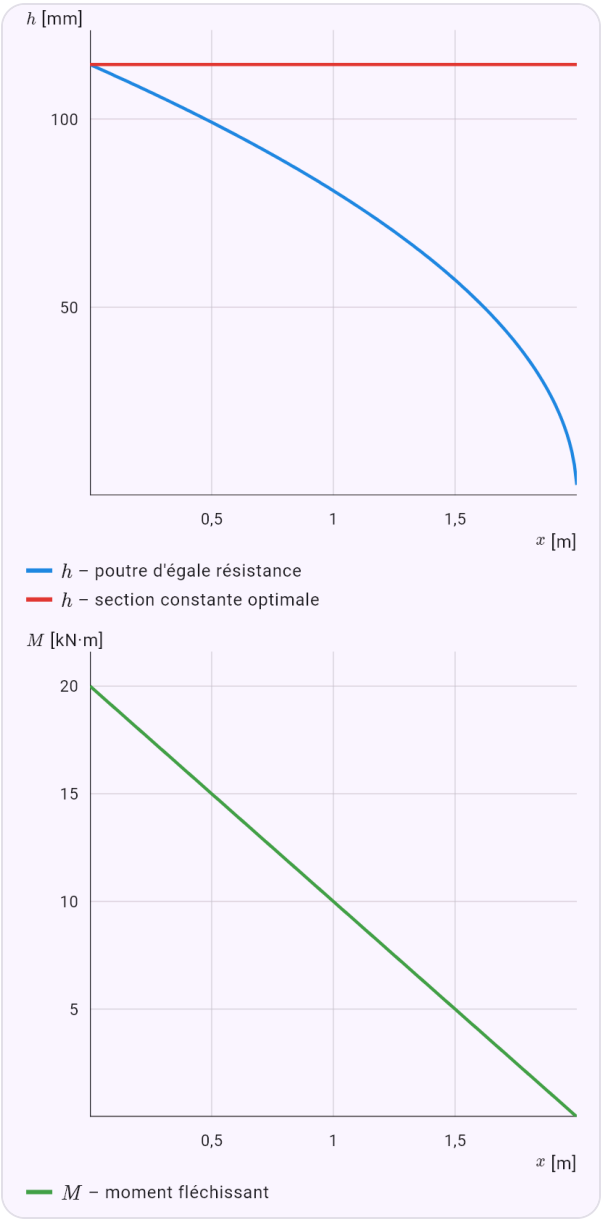
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

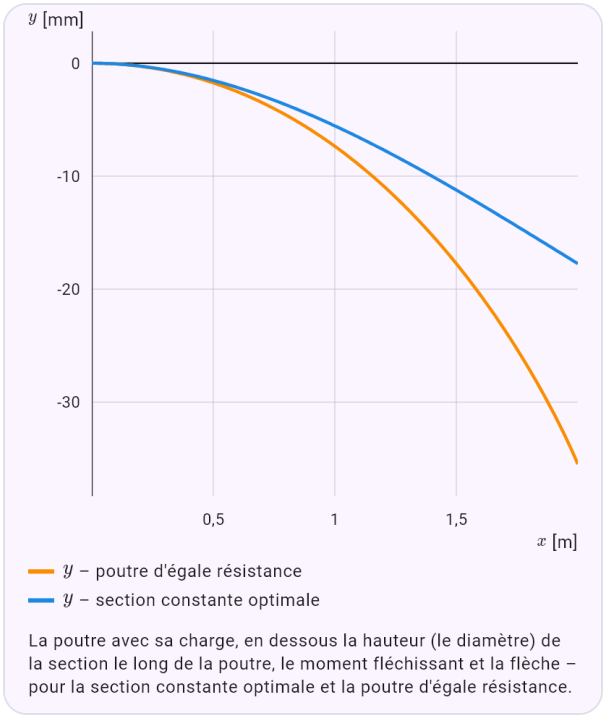
Étapes

- On cherche m ; données
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Une console de longueur L avec une force F à l'extrémité libre ou une charge répartie q sur toute la longueur. Le moment maximal est à l'encastrement. Équation du modèle
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Moment fléchissant maximal : $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condition de résistance – le module de résistance minimal
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condition de flèche (en intégrant E·I·y'' = −M) – le moment quadratique minimal
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- Le profilé convenable le plus léger de chaque série
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. D'après les tables – le plus léger de tous
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Section constante optimale – la plus petite taille qui respecte les deux conditions
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- La condition de résistance est active (la flèche reste sous l'admissible) : $\sigma = \sigma_{dov}$
- Aire et masse de la section optimale :
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Poutre d'égale résistance – σ(x) = σ_adm partout, à l'extrémité libre la section minimale due au cisaillement
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Masse et flèche de la poutre d'égale résistance
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Masse des variantes par rapport au profilé des tables :
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Le poids propre de la poutre est négligé ; pour les poutres longues et lourdes il s'ajoute à la charge répartie.

Graphique







La poutre avec sa charge, en dessous la hauteur (le diamètre) de la section le long de la poutre, le moment fléchissant et la flèche – pour la section constante optimale et la poutre d'égale résistance.

Une poutre sur deux appuis de 6 m sous charge répartie : la flèche décide.

Énoncé: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

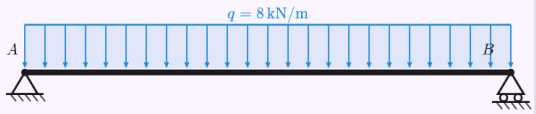
Résultat

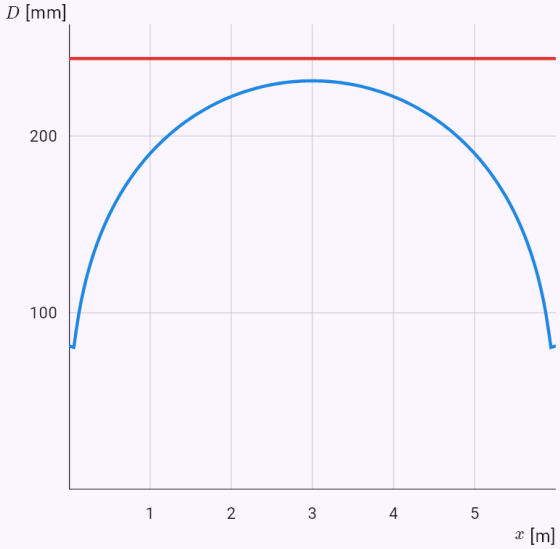
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Étapes

- On cherche m ; données
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Une poutre sur deux appuis de longueur L avec une force F au milieu ou une charge répartie q sur toute la longueur. Le moment maximal est au milieu. Équation du modèle
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Moment fléchissant maximal :
  $$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$$
- Condition de résistance – le module de résistance minimal
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Condition de flèche (en intégrant E·I·y'' = −M) – le moment quadratique minimal
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- Le profilé convenable le plus léger de chaque série
  $\text{IPE}\,240: \ W = 324\,\text{cm}^3, \ I = 3892\,\text{cm}^4, \ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. D'après les tables – le plus léger de tous
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Une paroi plus mince donne une aire plus petite à W égal, l'optimum est donc à la limite d'élancement :
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 40$$
- 2. Section constante optimale – la plus petite taille qui respecte les deux conditions
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- La condition de flèche est active (la contrainte reste sous l'admissible) : $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Aire et masse de la section optimale :
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Poutre d'égale résistance – σ(x) = σ_adm partout, à l'extrémité libre la section minimale due au cisaillement
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Masse et flèche de la poutre d'égale résistance
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- La poutre d'égale résistance ne surveille que la contrainte, elle est donc plus souple et dépasse la flèche admissible. En pratique on agrandit sa section ou on l'emploie là où la résistance décide.
- Masse des variantes par rapport au profilé des tables :
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$$
- Le poids propre de la poutre est négligé ; pour les poutres longues et lourdes il s'ajoute à la charge répartie.

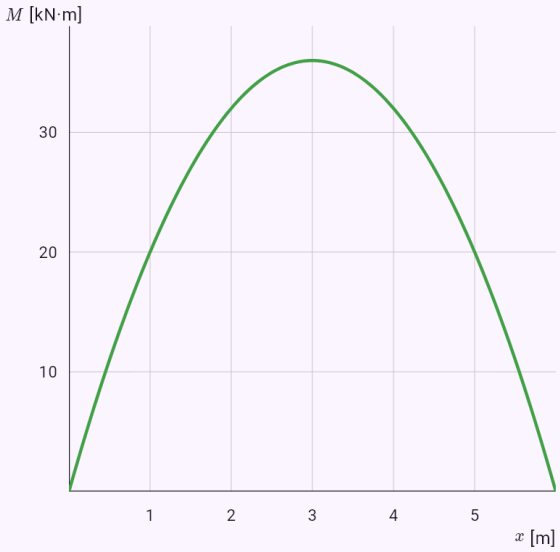
Graphique



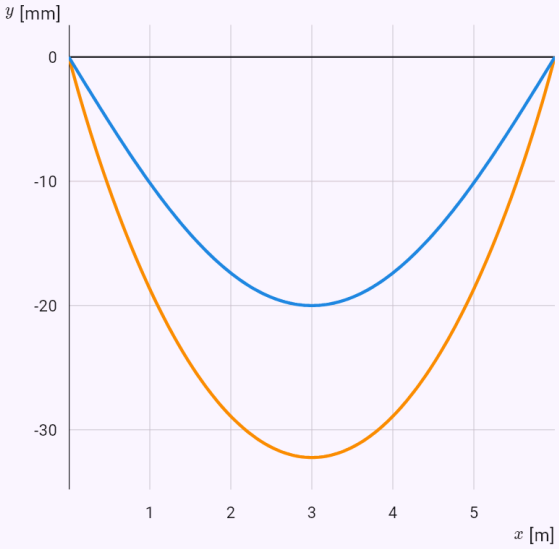


D – poutre d'égale résistance

D – section constante optimale



M – moment fléchissant



y – poutre d'égale résistance

y – section constante optimale

La poutre avec sa charge, en dessous la hauteur (le diamètre) de la section le long de la poutre, le moment fléchissant et la flèche – pour la section constante optimale et la poutre d'égale résistance.

45. Astronomie et astrophysique

Le domaine Astronomie et astrophysique se trouve dans la section « Applications ». Outre les lois de Kepler, l'influence mutuelle des corps et le problème à trois corps (décrits au chapitre Physique), il propose les formulaires Trous noirs, Étoiles à neutrons, Ondes gravitationnelles, Magnitudes et distances, Rayonnement des étoiles, Décalage vers le rouge et loi de Hubble, et Exoplanètes. Les formules sont données et les étapes montrent la substitution. L'app ne résout pas les équations de la relativité générale ; elle n'utilise que leurs résultats pour un trou noir sans rotation.

Le formulaire Trous noirs calcule le [[schwarzschildRadius|rayon de Schwarzschild]], la sphère de photons et l'orbite stable la plus interne, la « densité » d'un trou noir avec un graphique selon la masse en échelle logarithmique, la vitesse de libération, la dilatation gravitationnelle du temps et le décalage vers le rouge (aussi pour deux horloges, comme le GPS), la force de marée, la température de Hawking avec la durée d'évaporation et la masse de Sgr A* d'après l'orbite de l'étoile S2. Le menu des objets remplit le Soleil, la Terre, une étoile à neutrons, un trou noir stellaire, Sgr A* ou M87*.

Les étoiles à neutrons ont la densité, la gravité en surface, l'accélération de la rotation lors de l'effondrement par conservation du moment cinétique et la période de rotation la plus courte possible. Les ondes gravitationnelles donnent la fréquence d'après la séparation d'un couple en orbite (et inversement) et l'énergie rayonnée lors d'une fusion comme GW150914.

Les bases d'un cours d'initiation à l'astronomie : l'équation de Pogson, le module de distance avec la [[absoluteMagnitude|magnitude absolue]] et la parallaxe ; les lois de Wien et de Stefan-Boltzmann d'un [[blackBody|corps noir]], la constante solaire et la température d'équilibre d'une planète ; le [[redshift|décalage vers le rouge]] Doppler et la loi de Hubble avec le temps de Hubble ; pour les exoplanètes la profondeur du transit, la méthode des vitesses radiales et la [[habitableZone|zone habitable]].

Les lois de Kepler se sont enrichies du transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires (Δv et durée du vol), et l'influence mutuelle des corps de la [[rocheLimit|limite de Roche]] et de la sphère de Hill.

Exemples

En quelle bille il faudrait comprimer la Terre pour en faire un trou noir.

Énoncé: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Résultat

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

Étapes

- On cherche r_s ; données : $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- On convertit les unités :
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Le rayon de Schwarzschild r_s = 2GM/c² est le rayon de l'horizon des événements. La Terre devrait être comprimée en une bille d'environ 18 mm de diamètre, le Soleil en une boule de 3 km de rayon. La lumière peut orbiter sur la sphère de photons à 1,5 r_s, et l'orbite stable la plus interne de la matière (ISCO) est à 3 r_s.
  Équation du modèle
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- On remplace
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Pour un trou noir sans rotation. Autour d'un trou noir en rotation (Kerr), l'ISCO et la sphère de photons sont plus proches.
- On convertit les unités : $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

La « densité » du trou noir M87* – moindre que celle de l'air.

Énoncé: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

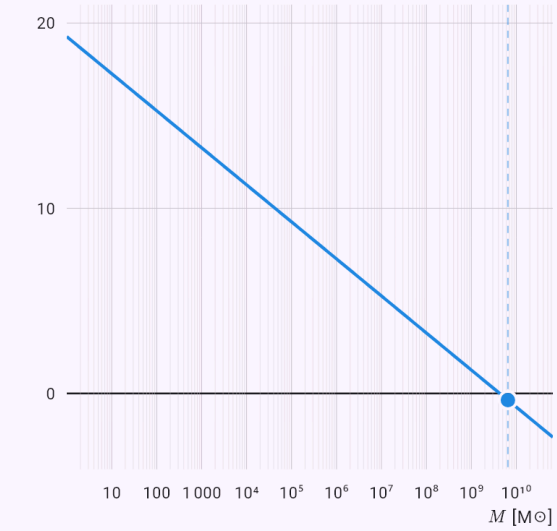
Résultat

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

Étapes

- On cherche ρ ; données : $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- On convertit les unités :
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- La « densité » moyenne à l'intérieur de l'horizon : la masse divisée par le volume d'une boule de rayon r_s. Elle décroît comme 1/M². Un trou noir stellaire est plus dense qu'un noyau atomique, un trou noir de 10^8 masses solaires a la densité de l'eau, et M87* est moins dense que l'air. Le graphique montre la masse en échelle logarithmique. Équation du modèle :
  $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- On remplace
  $\rho = \dfrac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$
- Pour comparer : un noyau atomique, l'eau et l'air (environ 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Moins dense que l'air – la « densité » n'est qu'une moyenne sur le volume de l'horizon.

Graphique



L'axe horizontal est logarithmique : chaque graduation vaut dix fois la précédente. Le point est la valeur donnée ou la réponse.

De combien les horloges des satellites GPS avancent chaque jour à cause de la gravité.

Énoncé: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

Résultat

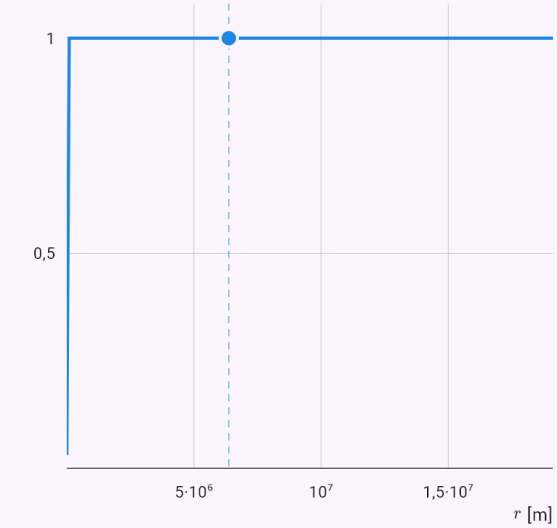
$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Étapes

- On cherche Δt ; données
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- On convertit les unités
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Les horloges proches d'un corps massif ralentissent : dτ/dt = √(1 − r_s/r). La lumière qui en vient arrive décalée vers le rouge. Avec une seconde distance r_2, le mode compare deux horloges. Les satellites GPS (r_2 = 26 571 km) avancent d'environ 45,7 µs par jour par rapport au sol. Équation du modèle
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- On remplace
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Retard par unité de temps : $1 - \dfrac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- On remplace
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Comparaison de deux horloges à des distances différentes ; un écart positif signifie que l'horloge la plus proche retarde.

- On convertit les unités : $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La force de marée sur une personne à l'horizon d'un trou noir stellaire.

Énoncé: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

astro=stellar)

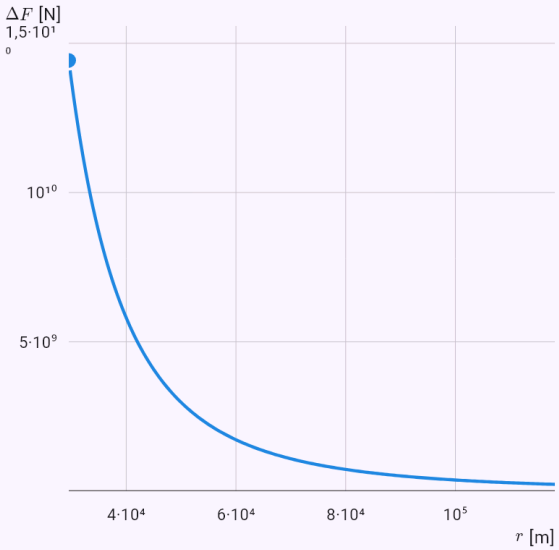
Résultat

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Étapes

- On cherche ΔF_s ; données :
  $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- On convertit les unités : $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- La force de marée est la différence de gravité entre la tête et les pieds. Un trou noir stellaire déchire une personne bien avant l'horizon (« spaghettification ») ; à l'horizon d'un grand trou noir (Sgr A*), elle est minuscule.
  Équation du modèle : $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- On remplace
  $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- On remplace
  $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- En multiples du poids du corps : $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- La force de marée dépasse de loin ce qu'un corps supporte – « spaghettification ».

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La masse de Sgr A* d'après l'orbite de l'étoile S2.

Énoncé: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Résultat

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Étapes

- On cherche M ; données :
  $a = 1019\,\text{au}, \quad T = 16{,}05\,\text{ans}$
- On convertit les unités
  $a = 1019\,\text{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\text{m}, \quad T = 16{,}05\,\text{ans} = 5{,}06$
- L'étoile S2 tourne autour du centre de la Galaxie sur une ellipse de demi-grand axe d'environ 1 019 ua en 16,05 ans. La troisième loi de Kepler donne la masse de Sgr A* : environ 4 millions de Soleils dans une région plus petite que le système solaire. Cette mesure a valu le prix Nobel de physique 2020. Équation du modèle :
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- On remplace
  $$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot (5{,}065 \cdot 10^8)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\text{kg}$$
- En masses solaires : $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizon de Sgr A*
  $r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\text{m}, \quad \frac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Prix Nobel de physique 2020 (Genzel, Ghez) pour la découverte d'un objet compact supermassif au centre de la Galaxie.
- On convertit les unités :
  $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\text{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

La période de rotation du cœur après l'effondrement en étoile à neutrons.

Énoncé: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Résultat

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\text{ms}$$

Étapes

- On cherche T_2 ; données :
  $T_1 = 25{,}4\,\text{j}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km}, \quad R_2 = 12\,\text{km}$
- On convertit les unités
  $T_1 = 25{,}4\,\text{j} = 2\,195\,000\,\text{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km} = 6{,}96 \cdot$
- Conservation du moment cinétique : quand le cœur rétrécit, il tourne plus vite et la période diminue comme le carré du rayon (comme une patineuse qui ramène ses bras). Ainsi naissent les pulsars, aux périodes de quelques millisecondes à quelques secondes. Équation du modèle
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- L'étoile est prise comme une boule homogène qui ne perd pas de masse.
- On remplace
  $$T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$$
- Combien de fois plus vite elle tourne :
  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Les vrais pulsars tournent plus lentement (millisecondes à secondes) : le cœur tourne plus lentement avant l'effondrement, et l'enveloppe éjectée emporte du moment cinétique.
- On convertit les unités :
  $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}6524\,\text{ms}$

L'énergie rayonnée en ondes gravitationnelles lors de la fusion GW150914.

Énoncé: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Résultat

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\ \mathrm{J}$$

Étapes

- On cherche E ; données :
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- On convertit les unités
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- La fusion forme un trou noir plus léger que les deux réunis. La différence de masse est emportée par les ondes gravitationnelles sous forme d'énergie E = Δm·c². Équation du modèle :
  $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\, c^2$
- On remplace
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Part de la masse rayonnée :
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- On remplace
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\ \mathrm{J}$
- Comparée à toute la vie du Soleil : $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\ \mathrm{ans}} \approx 4438$
- LIGO a capté les ondes de GW150914 venues de 1,3 milliard d'années-lumière ; elles ont déplacé ses miroirs d'un millième du diamètre d'un proton.

La distance de Sirius d'après le module de distance.

Énoncé: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod; star=sirius)`

Résultat

$$d \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$$

Étapes

- On cherche d ; données : $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- La magnitude absolue M est celle qu'aurait l'étoile vue à 10 pc. Le module de distance m − M donne la distance quand on connaît la luminosité réelle de l'étoile (céphéides, supernovae Ia). Équation du modèle :
  $m - M = 5 \log \frac{d}{10\ \mathrm{pc}}$
- On exprime la grandeur cherchée : $d = 10\ \mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- On remplace : $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\ \mathrm{pc}$
- En années-lumière : $d \approx 8{,}658\ \mathrm{al}$
- L'absorption de la lumière par la poussière interstellaire est négligée ; avec elle, l'étoile paraît plus lointaine.

La longueur d'onde du maximum de rayonnement du Soleil.

Énoncé: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

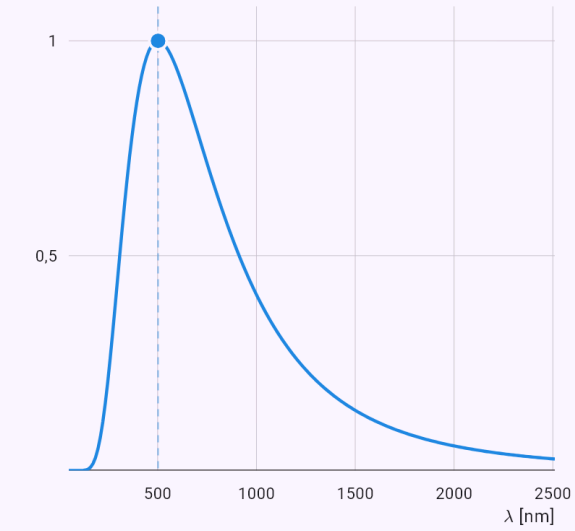
Résultat

$$\lambda_{\max} \approx 502\,\mathrm{nm}$$

Étapes

- On cherche $\lambda_{\max}$; données : $T = 5772\,\mathrm{K}$
- La loi de déplacement de Wien : la longueur d'onde à laquelle un corps rayonne le plus est inversement proportionnelle à sa température. Le Soleil culmine dans le vert (environ 500 nm), la froide Bételgeuse dans l'infrarouge, la chaude Véga dans le bleu. Équation du modèle : $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$
- Constante de Wien en nm·K : $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\,\mathrm{nm \cdot K}$
- On remplace : $\lambda_{\max} = \dfrac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\,\mathrm{nm}$
- Le maximum est dans la lumière visible.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La température d'équilibre de la Terre sans effet de serre.

Énoncé: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium; planet=earth)`

Résultat

$$T_{\mathrm{eq}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

Étapes

- On cherche T_{eq} ; données : $L = 1\,L_\odot, \quad a = 1\,\mathrm{au}, \quad A = 0{,}306$
- On convertit les unités $L = 1\,L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}, \quad a = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- La constante solaire S est la puissance reçue par 1 m² à la distance a de l'étoile. Une planète absorbe S(1 − A) sur sa section πR² et rayonne σT⁴ par toute sa surface 4πR². L'équilibre donne sa température sans effet de serre. Équation du modèle : $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eq}}^4$
- On remplace

$$S = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \approx 1361\,\mathrm{W/m^2}$$

- On exprime la grandeur cherchée : $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- On remplace

$$T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\frac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

- Sans effet de serre. La température moyenne réelle de la Terre est plus élevée : $T_\oplus \approx 288\,\mathrm{K}$

Le temps de Hubble comme estimation de l'âge de l'univers.

Énoncé: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Résultat

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$$

Étapes

- On cherche t_H ; données : $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$
- La loi de Hubble v = H_0·d. L'inverse de la constante de Hubble (temps de Hubble) estime l'âge de l'univers à environ 14 milliards d'années ; l'âge exact de 13,8 milliards d'années vient d'un modèle de l'expansion.
  Équation du modèle : $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Constante de Hubble en s^{-1}
  $$H_0 = \frac{70}{3{,}086\cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$$
- On remplace : $t_H = \dfrac{1}{2{,}269\cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- En milliards d'années : $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$
- Le temps de Hubble n'est qu'une estimation de l'âge ; l'expansion a ralenti et accélère maintenant.
- On convertit les unités : $t_H \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{Ga}$

La profondeur du transit de la Terre devant le Soleil.

Énoncé: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

Résultat

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

Étapes

- On cherche $\frac{\Delta F}{F}$; données : $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- On convertit les unités :
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Quand une planète passe devant son étoile, elle en cache une partie du disque et l'éclat baisse du rapport des surfaces (R_p/R_*)². Jupiter atténuerait le Soleil de 1 %, la Terre de seulement 84 millionièmes (ppm).
  Équation du modèle : $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- On remplace : $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- En millionièmes (ppm) : $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- On ne voit un transit que si l'on regarde l'orbite de la planète presque par la tranche.
- On convertit les unités :
  $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

La durée d'un transfert de Hohmann de la Terre vers Mars.

Énoncé: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

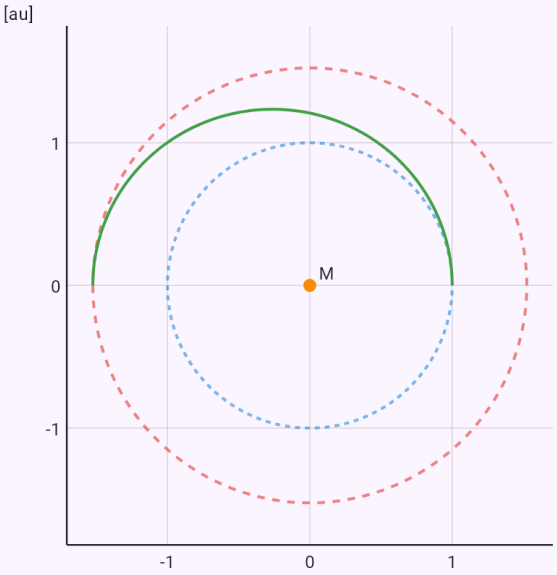
Résultat

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{j}$$

Étapes

- On cherche t ; données
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- On convertit les unités
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- L'orbite de transfert de Hohmann est une demi-ellipse tangente à l'orbite circulaire de départ et à celle d'arrivée. Deux poussées (Δv) font passer de l'une à l'autre avec le moins de carburant. Un vol de la Terre vers Mars dure ainsi environ 259 jours. Équation du modèle
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- On remplace
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- On remplace
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- En jours : $t \approx 258{,}9\,\mathrm{j}$
- Vers l'extérieur : accélérer dans le sens du vol, puis accélérer à nouveau sur l'orbite d'arrivée.
- On convertit les unités : $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{j}$

Graphique



Les corps et les points remarquables à échelle réelle.

La limite de Roche de Saturne pour une lune glacée – pourquoi les anneaux sont là.

Énoncé: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Résultat

$$d_R \approx 129\,000\,\text{km}$$

Étapes

- On cherche d_R ; données
  $R = 58\,230\,\text{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3, \quad \rho_m = 0{,}917\,\text{g/}$
- On convertit les unités
  $R = 58\,230\,\text{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\text{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3 =$
- La limite de Roche : plus près de la planète, les forces de marée disloquent une lune qui ne tient que par sa propre gravité. C'est pourquoi les anneaux de Saturne sont à l'intérieur de sa limite de Roche. Une lune rigide résiste plus près qu'une lune fluide. Équation du modèle :
  $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\dfrac{\rho_M}{\rho_m}}$
- On remplace
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m}$
- En rayons de la planète : $\dfrac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- À l'intérieur de la limite de Roche, aucune grande lune ne se forme ; on y trouve des anneaux (Saturne).
- On convertit les unités :
  $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m} = 129\,000\,\text{km}$

46. Applications de l'analyse complexe

Les formulaires des Applications (domaines Physique, Électrotechnique, Ingénierie, Géométrie et Analyse) utilisent les fonctions d'une variable complexe du chapitre précédent. Chacun a des étapes avec un potentiel complexe, une transformation ou des pôles et un graphique dans le plan de Gauss.

Écoulement idéal et profil d'aile : le [[complexPotential|potentiel complexe]] w(z), les [[streamline|lignes de courant]] comme lignes de niveau de Im w et la pression par l'équation de Bernoulli. Écoulement autour d'un cylindre, aussi avec circulation (points d'arrêt, effet Magnus, portance $L' = \rho U \Gamma$), corps de Rankine, écoulement dans un coin et tourbillon. Le profil de Joukowski naît de la transformation conforme $z = \zeta + b^2/\zeta$, la [[kuttaCondition|condition de Kutta]] fixe la circulation et le théorème de Kutta–Joukowski la portance ; le graphique montre les lignes de courant autour du profil et C_L selon l'incidence.

Champs par transformation conforme : câble coaxial ($w = \ln z$ le change en condensateur plan - capacité, inductance et impédance caractéristique), ligne bifilaire par une transformation de Möbius, potentiel dans un coin entre plaques et température stationnaire dans un demi-plan ; lignes de champ et équipotentielles dans le graphique. La contrainte autour d'un trou circulaire selon Kirsch, avec les potentiels de Kolossov et Mouskhelichvili, donne une [[stressConcentration|concentration de contraintes]] de 3 en traction, 2 en traction égale dans deux directions et 4 en cisaillement. La carte de Mercator est le logarithme complexe de la projection stéréographique : échelle $1/\cos \varphi$, cercles de Tissot et [[loxodrome|loxodromie]] droite face à l'orthodromie.

Régulation et signaux : stabilité d'une boucle $K \cdot e^{-s\tau}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ par le [[nyquistCriterion|critère de Nyquist]] (principe de l'argument, marges de gain et de phase, diagramme de Bode) et par le [[rootLocus|lieu des racines]] (asymptotes, point de séparation, gain critique). Conception d'un filtre de [[butterworthFilter|Butterworth]] et de Tchebychev à partir de pôles sur un cercle et une ellipse, filtre numérique du second ordre avec pôles et zéros dans le plan z, réponse impulsionnelle par les résidus et réponse en fréquence sur le cercle unité. Courbe de résonance d'un oscillateur mécanique ou d'un circuit RLC par les distances de $i\omega$ aux pôles, [[qualityFactor|facteur de qualité]] et bande passante. Les circuits en courant alternatif avec phaseurs sont au chapitre Électrotechnique.

Réponse et lignes : l'oscillateur de Lorentz donne l'indice de réfraction et l'absorption d'un milieu ; des pôles dans le demi-plan inférieur signifient la causalité et les [[kramersKronig|relations de Kramers–Kronig]], que l'application vérifie par une intégrale numérique en valeur principale. La largeur naturelle d'une raie découle de la transformée de Fourier d'une onde amortie. L'[[smithChart|abaque de Smith]] : coefficient de réflexion comme transformation de Möbius, ROS, impédance d'entrée d'une ligne, transformateur quart d'onde et adaptation par stub.

Jeux sur mathtrace.app dans « Essayez vous-même » : ensembles de Mandelbrot et de Julia et bassins de Newton - une itération dans le plan complexe que l'on déplace et agrandit.

Exemples

Cylindre en rotation : la circulation abaisse les points d'arrêt sous l'axe horizontal.

Énoncé: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Résultat

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

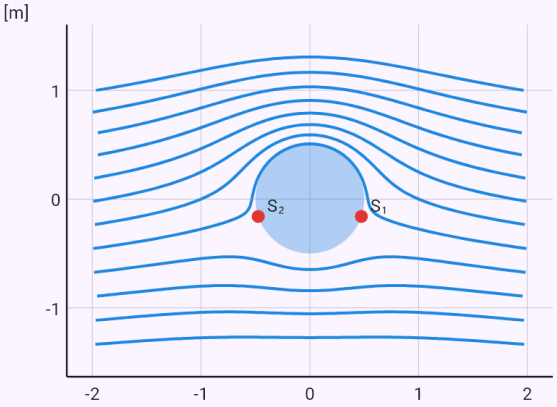
Étapes

- On cherche θ_s ; données
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Écoulement autour d'un cylindre : le courant U(z + R²/z), éventuellement avec un tourbillon de circulation Γ (cylindre en rotation). En surface la vitesse vaut 2U·sin θ, le double sur les côtés. La circulation abaisse les points d'arrêt et crée une portance selon le théorème de Kutta–Joukowski, L' = ρUΓ par mètre de longueur. Équation du modèle : $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- La vitesse conjuguée est la dérivée du potentiel
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- À la surface du cylindre la vitesse est tangentielle
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Vitesse maximale en surface :
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Points d'arrêt (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Coefficient de pression par l'équation de Bernoulli
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Portance par mètre de longueur (théorème de Kutta–Joukowski) : $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Un cylindre ou une balle en rotation avec circulation subit une portance perpendiculaire au courant - l'effet Magnus qui courbe une balle coupée. Les navires Flettner l'utilisent pour avancer.

Graphique

Lignes de courant | Graphique



Les traits pleins sont les lignes de courant, les tirets les équipotentielles (seulement sans circulation). Là où les lignes de courant se resserrent, le fluide va plus vite.

Profil de Joukowski de 12 % avec 2 % de cambrure à 4° d'incidence.

Énoncé: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

`tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])`

Résultat

$$C_L \approx 0{,}7243$$

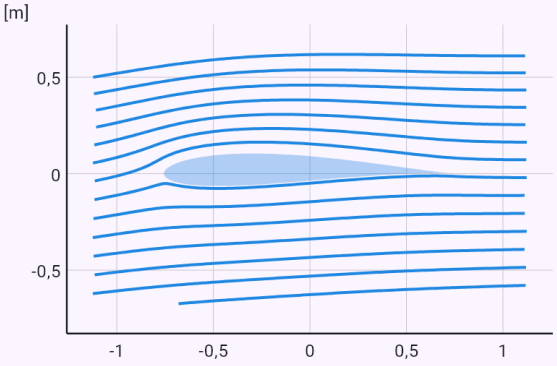
Étapes

- On cherche C_L ; données
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Le profil de Joukowski naît de la transformation conforme z = ζ + b²/ζ d'un cercle passant par ζ = b. Déplacer le centre vers la gauche donne l'épaisseur, vers le haut la cambrure. L'écoulement autour du cercle se transporte sur le profil, la circulation est fixée par la condition de Kutta (le fluide quitte le bord de fuite aigu sans le contourner) et la portance par le théorème de Kutta–Joukowski. On retrouve C_L ≈ 2π(α + β), comme pour un profil mince. Les performances d'un avion sont dans le formulaire Avion. Équation du modèle
  $$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}$$
- Le cercle du plan ζ dont naît le profil
  $$b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$$
- Circulation donnée par la condition de Kutta au bord de fuite
  $$|w'(b)| < \infty : \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$$
- Portance par mètre de longueur (théorème de Kutta–Joukowski) : $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Coefficient de portance, entre parenthèses la théorie du profil mince
  $$C_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \frac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$$

- Fluide idéal : valable aux faibles incidences sans décollement (jusqu'à 10–15° environ pour les profils courants). Une vraie aile d'envergure finie porte moins à cause de la traînée induite (formulaire Avion).

Graphique

Lignes de courant | Graphique



Lignes de courant autour du profil à l'échelle réelle. Le bord de fuite est à droite - le fluide le quitte sans le contourner (condition de Kutta) ; au-dessus du profil les lignes se resserrent et la pression baisse.

Corps de Rankine - la largeur loin en aval vaut Q/U.

Énoncé: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

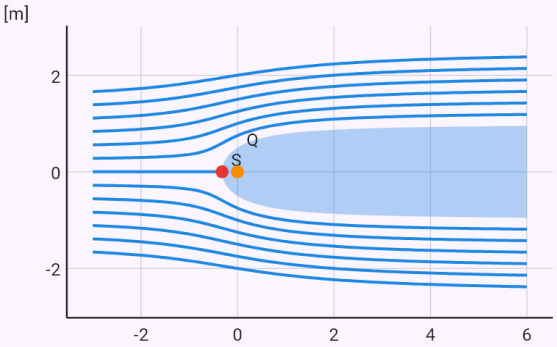
Résultat

$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Étapes

- On cherche d ; données : $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Une source de débit Q (m²/s par mètre de profondeur) dans un courant de vitesse U. La ligne de courant séparatrice ψ = Q/2 entoure le demi-corps de Rankine, semblable à l'avant d'une pile de pont ou d'une étrave. Un point d'arrêt se trouve devant ; loin en aval le corps a une largeur Q/U. Équation du modèle : $w(z) = Uz + \dfrac{Q}{2\pi}\ln z$
- La vitesse conjuguée est la dérivée du potentiel : $w'(z) = U + \dfrac{Q}{2\pi z}$
- Point d'arrêt devant la source : $w'(z) = 0: \quad z_s = -\dfrac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Ligne de courant séparatrice - le contour du corps : $\psi = Uy + \dfrac{Q}{2\pi}\theta = \dfrac{Q}{2}$
- Largeur du corps loin en aval : $y \to \pm\dfrac{Q}{2U}: \quad d = \dfrac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Vitesse maximale à la surface du corps (numériquement) $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$
- Le corps de Rankine est une première estimation de l'écoulement autour d'un avant arrondi (pile, coque, bord d'attaque). Dans un fluide idéal il n'y a pas de sillage derrière le corps.

Graphique



Les traits pleins sont les lignes de courant, les tirets les équipotentielles (seulement sans circulation). Là où les lignes de courant se resserrent, le fluide va plus vite.

Câble coaxial RG-58 : impédance caractéristique d'environ 50 Ω.

Énoncé: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

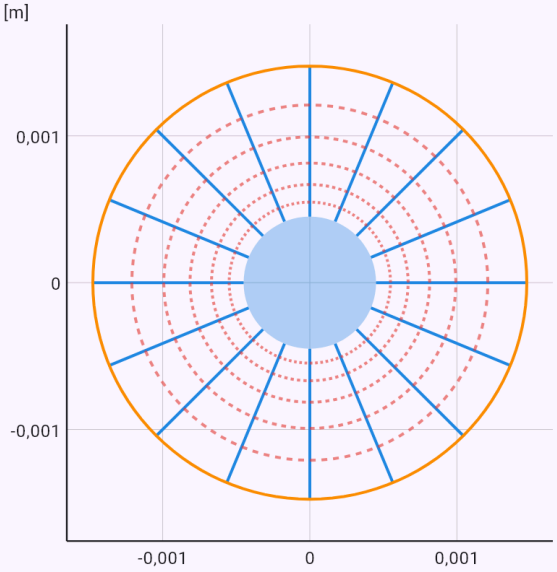
Résultat

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Étapes

- On cherche Z_0 ; données :
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- On convertit les unités
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm} = 0{,}0014$
- Câble coaxial : le logarithme w = ln z déroule la couronne a < |z| < b en un rectangle de largeur 2π et de hauteur ln(b/a). Le câble devient un condensateur plan ; capacité, inductance et impédance caractéristique s'en déduisent aussitôt. Équation du modèle :
  $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Image de la couronne dans le plan w = ln z - un rectangle
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Le potentiel est linéaire en Re w
- Capacité comme pour un condensateur plan :
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Inductance et impédance caractéristique de la ligne
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Le câble RG-58 (âme 0,9 mm, polyéthylène 2,95 mm) a environ 50 Ω et 100 pF/m. L'impédance caractéristique ne dépend que du rapport b/a : câbles fins et épais ont les mêmes 50 ou 75 Ω.

Graphique



Les traits pleins sont les lignes de champ, les tirets les équipotentielles ; elles se coupent à angle droit. Les conducteurs sont pleins ou épais.

Capacité d'une ligne bifilaire par la transformation de Möbius.

Énoncé: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

Résultat

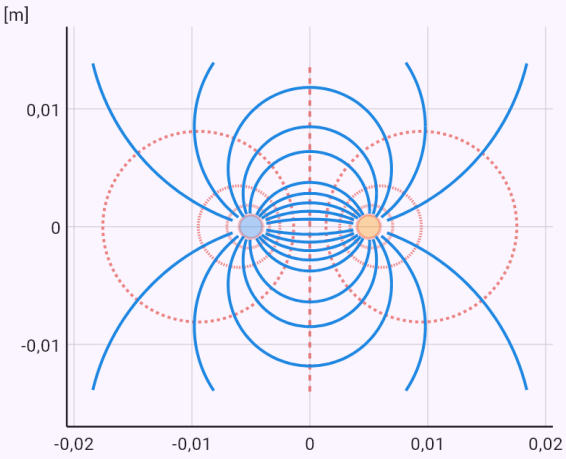
$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Étapes

- On cherche C' ; données : $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- On convertit les unités :
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Ligne bifilaire (deux fils parallèles) : la transformation de Möbius w = (z − h)/(z + h) change les cercles des fils en cercles concentriques - un câble coaxial. Les équipotentielles sont des cercles d'Apollonius, les lignes de champ des cercles passant par ±h. Équation du modèle
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Les images des fils sont des cercles concentriques
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Capacité de la ligne bifilaire
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Inductance et impédance caractéristique de la ligne
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$
- Le ruban bifilaire d'antenne avait 300 Ω, une paire torsadée de câble de données environ 100 Ω. La formule

vaut pour des fils éloignés d'autres conducteurs.

Graphique



Les traits pleins sont les lignes de champ, les tirets les équipotentielles ; elles se coupent à angle droit. Les conducteurs sont pleins ou épais.

Température stationnaire dans un demi-plan au bord moitié chaud, moitié froid.

Énoncé: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC]; x=0.5[m];`

```
y=1[m])
```

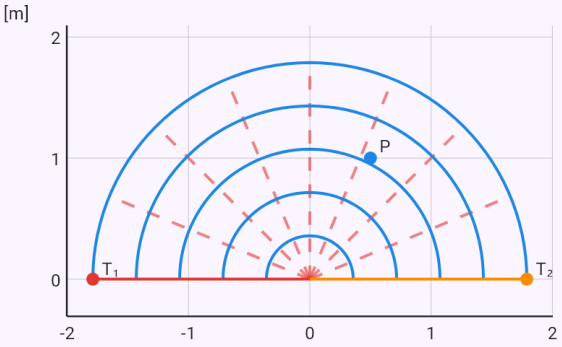
Résultat

$$T \approx 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Étapes

- On cherche T ; données
  $T_1 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Conduction stationnaire de la chaleur dans le demi-plan y > 0 dont le bord est à T_1 à gauche et à T_2 à droite. La température est harmonique, comme le potentiel dans un coin de 180° : $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Les isothermes sont des rayons issus de l'origine, la chaleur s'écoule sur des demi-cercles. Équation du modèle
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Fonction harmonique aux valeurs données sur le bord
- Angle du point : $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^{\circ}$
- Température au point : $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^{\circ}\mathrm{C}$
- Par exemple le sol sous la limite de deux surfaces à températures différentes. À l'origine la température du bord saute de T_1 à T_2, le flux y croît donc sans limite.

Graphique



Les rayons en tirets sont les isothermes, les demi-cercles pleins les lignes de flux thermique.

Trou circulaire dans une plaque tendue : coefficient de concentration 3.

Énoncé: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

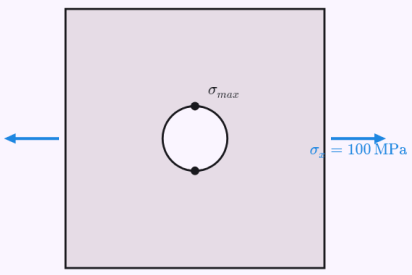
Résultat

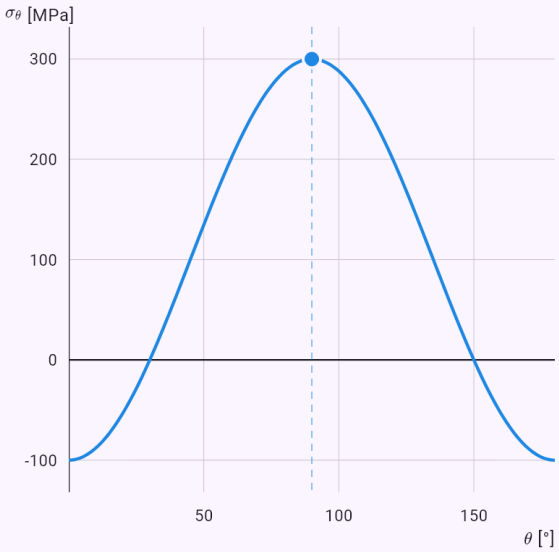
$$K_t \approx 3$$

Étapes

- On cherche K_t ; données :
  $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Traction σ_x dans une direction : au bord du trou 3σ_x en travers de la charge, −σ_x (compression) dans son sens. Équation du modèle
  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$
- Potentiels complexes de Kolossov–Mouskhelichvili pour la traction σ
  $\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$
- Au bord du trou la contrainte radiale est nulle, la contrainte orthoradiale
  $r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$
- Contrainte orthoradiale autour du trou (Kirsch)
  $\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$
- Contrainte maximale et coefficient de concentration
  $\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$
- À deux rayons du centre la contrainte ne dépasse celle de la plaque que de 22 % - la concentration est locale.
- Valable pour un matériau élastique et un trou petit devant la plaque (largeur au moins cinq fois le diamètre). Dans une bande étroite K_t est plus petit mais la contrainte dans la section affaiblie plus grande.

Graphique





σ_θ – contrainte orthoradiale au bord du trou
$\sigma_{max} = 300\,\mathrm{MPa}$

La plaque trouée et la contrainte qui la charge (flèches hors échelle). Le graphique montre la contrainte orthoradiale au bord du trou selon l'angle θ depuis l'axe x ; les points sur le trou marquent la contrainte maximale.

À 60° de latitude les longueurs sur la carte sont doublées.

Énoncé: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

Résultat

$$k \approx 2$$

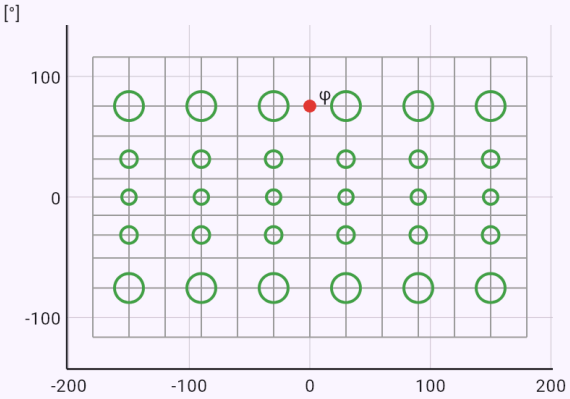
Étapes

- On cherche k ; données : $\varphi = 60\,^{\circ}$
- Distance du parallèle φ à l'équateur sur une carte de largeur W et échelle k = 1/cos φ. Les cercles de Tissot du graphique sont égaux sur le globe. Équation du modèle

$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$$

- La projection est conforme, les longueurs croissent également dans toutes les directions : $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0 : \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$
- Échelle sur le parallèle φ : $k = \frac{1}{\cos 60^{\circ}} = 2, \quad k^2 = 4$
- Les aires croissent en k², quatre fois à 60°. Les pôles ne figurent pas sur la carte, ils sont à l'infini.

Graphique



Méridiens tous les 30° et parallèles tous les 15°. Les cercles de Tissot sont égaux sur le globe et grandissent en 1/cos φ sur la carte - la forme est conservée, pas l'aire.

Prague – New York : l'orthodromie et la loxodromie plus longue.

Énoncé: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg];`

`lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Résultat

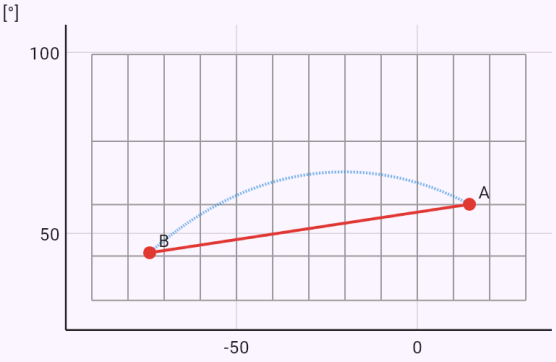
$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Étapes

- On cherche d ; données
  $\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$
- Loxodromie entre deux lieux (latitude et longitude, ouest négatif) : cap, longueur et comparaison avec l'orthodromie - le plus court chemin sur un grand cercle. Équation du modèle
  $x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$
- La projection est conforme, les longueurs croissent également dans toutes les directions :
  $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0 : \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$
- Sur la carte la loxodromie est une droite - le cap par les différences de coordonnées
  $\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$
- Longueur de la loxodromie : $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos \alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Orthodromie (plus court chemin sur la sphère)
  $d = 2R \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$

- La loxodromie est plus longue que l'orthodromie, mais se suit à cap constant. Les avions long-courriers suivent l'orthodromie et changent de cap en continu.

Graphique



La droite pleine est la loxodromie (cap constant), la courbe en tirets l'orthodromie (plus court chemin), toutes deux en projection de Mercator.

Marge de phase d'une boucle à trois retards du premier ordre.

Énoncé: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s];`

`T2=1[s]; T3=1[s])`

Résultat

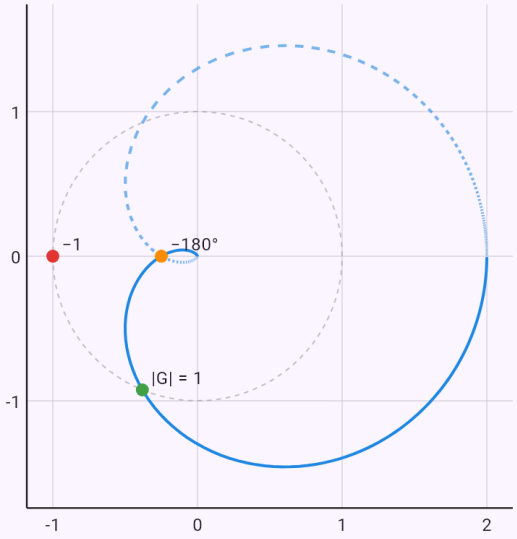
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Étapes

- On cherche φ_m ; données :
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Le critère de Nyquist découle du principe de l'argument : le nombre de tours de la courbe G(iω) autour de −1 est la différence des pôles instables de la boucle fermée et de la boucle ouverte. Pour une boucle ouverte stable, la courbe ne doit pas entourer −1. Sa distance à ce point se mesure par les marges de gain et de phase. Équation du modèle
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Principe de l'argument : N tours autour de −1, Z pôles instables de la boucle fermée, P de la boucle ouverte :
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Pulsation où la phase atteint −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ : \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Marge de gain et gain critique
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Pulsation où |G| = 1 :
  $|G(i\omega_c)| = 1 : \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Marge de phase : $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- La courbe n'entoure pas −1 - la boucle fermée est stable :
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Exigence habituelle : marge de gain d'au moins 6 dB et marge de phase de 30 à 60°. Un retard pur retire sans cesse de la phase, d'où la difficulté à réguler un procédé retardé.

Graphique

Diagramme de Nyquist | Graphique



La courbe pleine est G(iω) pour ω > 0, celle en tirets son symétrique pour ω négatif, le cercle en tirets |G| = 1. La boucle fermée est stable si la courbe n'entoure pas −1.

Lieu des racines avec intégrateur : gain critique 3.

Énoncé: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

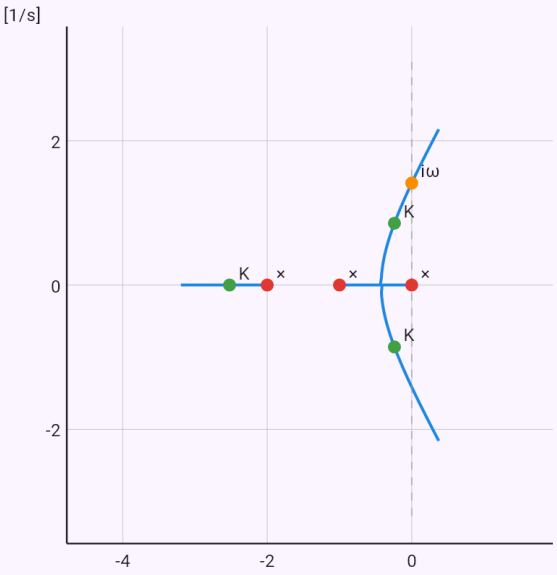
Résultat

$$K_{krit} \approx 3$$

Étapes

- On cherche K_{krit} ; données :
  $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- Le lieu des racines : comment les pôles de la boucle fermée se déplacent quand le gain K croît depuis zéro. Les branches partent des pôles de la boucle ouverte, s'éloignent le long d'asymptotes et le système devient instable sur l'axe imaginaire (gain critique par la condition de Routh–Hurwitz). Équation du modèle :
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Pôles de la boucle ouverte (départs des branches) :
  $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asymptotes des branches : centre et angles
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Point de séparation sur l'axe réel :
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Croisement de l'axe imaginaire - la limite de stabilité
  $s = i\omega: \quad \operatorname{Im} D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Le gain donné est inférieur au gain critique - stable :
  $K = 1 < K_{krit}$
- Pôles de la boucle fermée pour le K donné :
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Graphique



Les branches montrent les pôles de la boucle fermée quand K croît : elles partent des pôles de la boucle ouverte (×), les points K sont les pôles pour le gain donné, iω le croisement de l'axe imaginaire.

Ordre d'un filtre de Tchebychev pour 40 dB une octave plus haut.

Énoncé: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

Résultat

$$n \approx 5$$

Étapes

- On cherche n ; données

  $f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($

- Tchebychev : une ondulation A_p dans la bande passante, en échange une transition plus raide vers la bande coupée qu'un Butterworth du même ordre. Équation du modèle

  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

- Paramètre d'ondulation : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Ordre nécessaire (arrondi vers le haut)

- Pôles sur une demi-ellipse

  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$$

- Pôles (rapportés à ω_c)

  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28($$

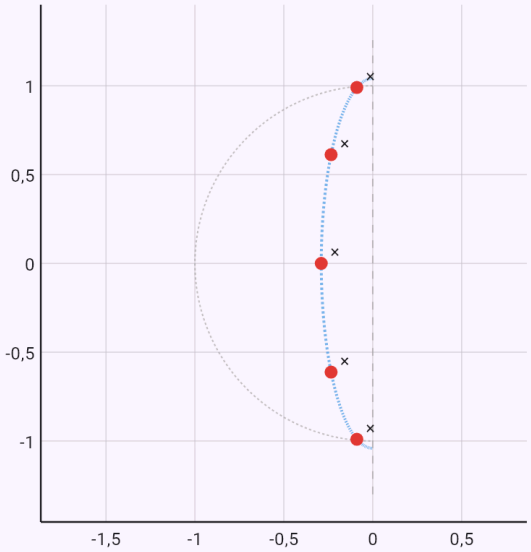
- Fonction de transfert - tous les pôles à gauche, le filtre est stable

  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$

- Tchebychev paie la raideur par l'ondulation et un moins bon temps de propagation de groupe - il respecte moins la forme des impulsions.

Graphique

Pôles | Graphique



Pôles dans le plan complexe s (×) ; un système stable les a à gauche de l'axe imaginaire.

Réponse impulsionnelle d'un filtre numérique à pôles complexes par les résidus.

Énoncé: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Résultat

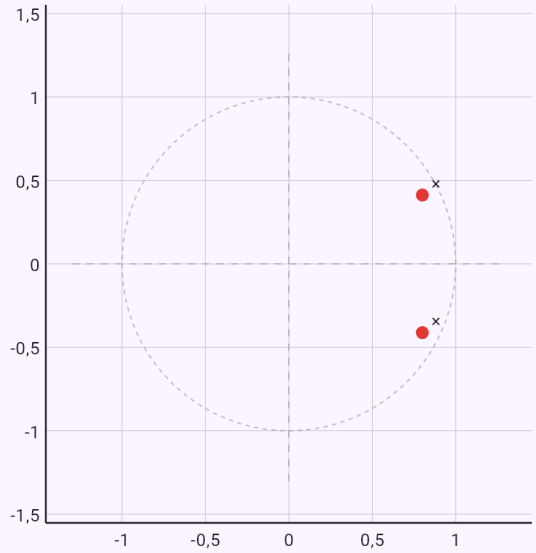
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Étapes

- On cherche $h[n]$; données :
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Un filtre numérique calcule la sortie à partir des derniers échantillons : y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. Sa fonction de transfert est une fonction rationnelle H(z) (transformée en Z). Le filtre est stable si tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité. La réponse impulsionnelle s'obtient par la transformée en Z inverse par les résidus : h[n] = Σ Rés[H(z)z^{n-1}]. La réponse en fréquence est H sur le cercle unité, z = e^(iΩ).
  Équation du modèle
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Équation aux différences du filtre :
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Pôles de la fonction de transfert
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0 : \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Pôles à l'intérieur du cercle unité - le filtre est stable :
  $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Transformée en Z inverse par les résidus :
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Des pôles complexes conjugués donnent une oscillation amortie
  $n \geq 1 : \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \imath$
- Valeur de la réponse : $h[10] = -0{,}6596$

Graphique

Pôles et zéros | Graphique



Pôles (×) et zéros (○) de la fonction de transfert dans le plan z avec le cercle unité. Le filtre est stable si tous les pôles sont à l'intérieur.

Facteur de qualité d'un oscillateur d'après la position des pôles.

Énoncé: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Résultat

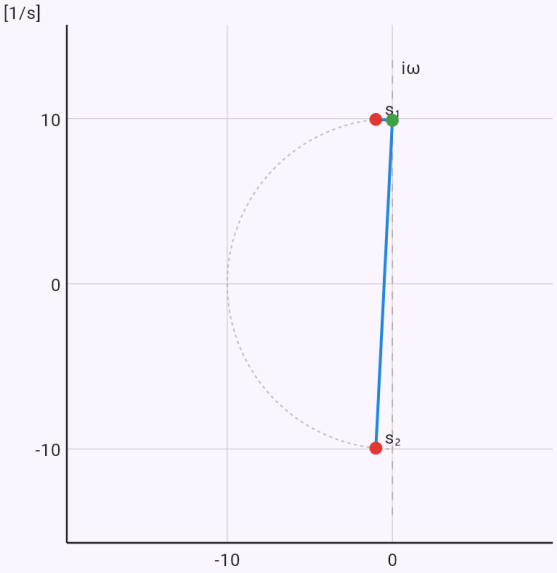
$$Q \approx 5$$

Étapes

- On cherche Q ; données :
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Une masse sur un ressort amorti, excitée par une force harmonique. X/X₀ est l'amplitude rapportée à la déformation statique sous la même force. Équation du modèle : $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Pôles de la fonction de transfert
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplitude par les distances aux pôles
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Pic de la courbe de résonance
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Facteur de qualité et bande passante
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Près de la résonance la courbe a la forme d'une lorentzienne
  $\omega \approx \omega_0 : \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- C'est pourquoi une machine ne doit pas tourner longtemps à la fréquence propre de son bâti, et l'on vérifie les ponts face à l'excitation par les piétons et le vent.

Graphique

Pôles | Graphique



Pôles dans le plan complexe s (×) ; un système stable les a à gauche de l'axe imaginaire.

Indice de réfraction sous la résonance d'un oscillateur de Lorentz, vérifié par la relation de Kramers–

Kronig.

Énoncé: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

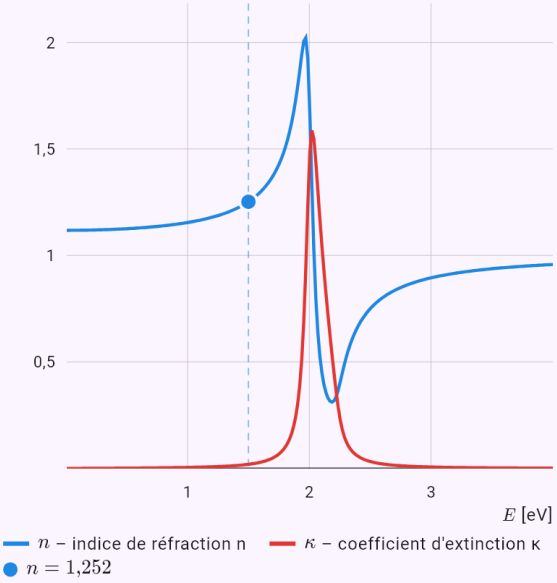
Résultat

$$n \approx 1{,}252$$

Étapes

- On cherche n ; données
  $E_0 = 2\,\text{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\text{eV}, \quad E_p = 1\,\text{eV}, \quad E = 1{,}5\,\text{eV}$
- Indice de réfraction n et coefficient d'extinction κ par n + iκ = √(1 + χ). Énergie du photon E, résonance E_0, largeur Γ et force d'oscillateur E_p en électronvolts. Équation du modèle : $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Les pôles de la susceptibilité sont dans le demi-plan inférieur
  $$E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} - \frac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$$
- Causalité : la relation de Kramers–Kronig
  $$\operatorname{Im} E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty \frac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$$
- Susceptibilité à l'énergie donnée :
  $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Vérification : χ' par l'intégrale sur χ" (numériquement) et directement : $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Indice de réfraction complexe :
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Longueur d'onde et coefficient d'absorption
  $$\lambda = \frac{hc}{E} = 826{,}6\,\text{nm}, \quad \alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\text{m}^{-1}$$
- Sous la résonance l'indice croît avec l'énergie - la dispersion normale, par laquelle un prisme décompose la lumière en couleurs.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Largeur naturelle de la raie D du sodium - environ 10 MHz.

Énoncé: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

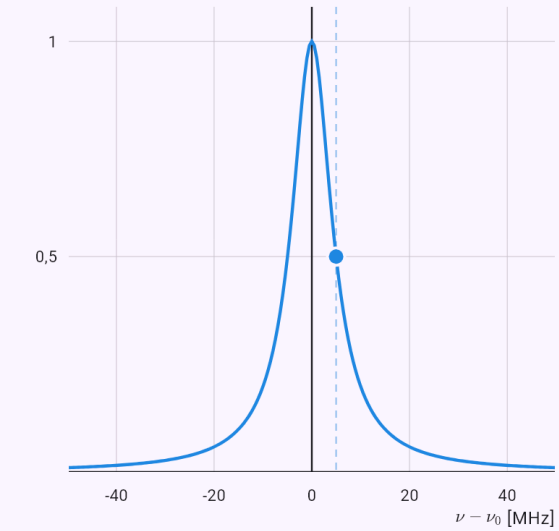
Résultat

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$

Étapes

- On cherche $\Delta\nu$; données : $\tau = 16\,\mathrm{ns}$
- Un atome excité émet une onde qui décroît exponentiellement avec la durée de vie τ. Sa transformée de Fourier (un résidu en un pôle) donne la raie lorentzienne de largeur Δν = 1/(2πτ) - la largeur naturelle d'une raie spectrale. Équation du modèle :
  $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Transformée de Fourier de l'onde amortie
  $$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$
- Profil lorentzien et sa largeur
  $$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}} : \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$
- Largeur naturelle de la raie :
  $$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\mathrm{ns}} = 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$
- La raie D du sodium (τ ≈ 16 ns) a une largeur naturelle d'environ 10 MHz. Dans un gaz, l'effet Doppler et les collisions élargissent encore les raies.

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Adaptation d'une charge de 100 Ω à une ligne de 50 Ω par un stub court-circuité.

Énoncé: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

Résultat

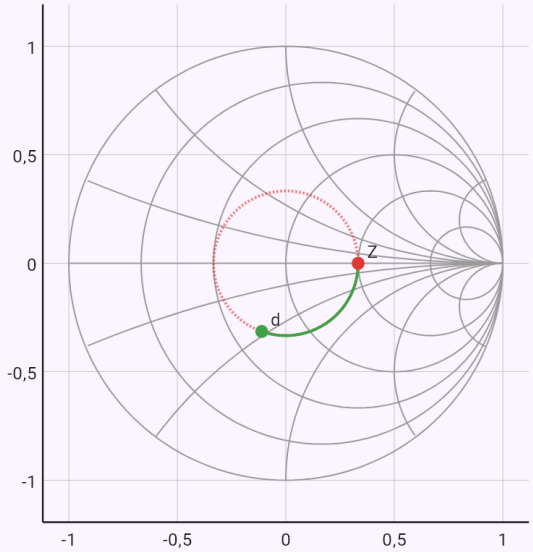
$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

Étapes

- On cherche d ; données
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Le coefficient de réflexion Γ = (Z − Z_0)/(Z + Z_0) sur une ligne d'impédance caractéristique Z_0 est une transformation de Möbius. Elle envoie le demi-plan droit des impédances sur le disque unité - l'abaque de Smith. Se déplacer le long de la ligne vers le générateur revient à tourner dans le sens horaire sur le cercle |Γ| = const., une demi-longueur d'onde faisant un tour complet. D'où le rapport d'ondes stationnaires, l'impédance d'entrée, le transformateur quart d'onde et l'adaptation par stub.
  Équation du modèle
  $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{z-1}{z+1}, \quad z = \dfrac{Z_L}{Z_0}$
- Impédance de charge normalisée : $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Coefficient de réflexion :
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Rapport d'ondes stationnaires et affaiblissement de réflexion
  $PSV = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$
- Longueur d'onde sur la ligne : $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Admittance de charge normalisée : $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Point où la partie réelle de l'admittance vaut 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Longueur du stub court-circuité qui annule la susceptance
  $y_s = -j\cot\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccot}\,(0{,}707$
- Un stub est un tronçon de ligne terminé par un court-circuit, branché en parallèle. À la fréquence choisie la ligne en amont ne voit alors plus de réflexion.

Graphique



Cercles de résistance constante et arcs de réactance constante (r, x = 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5). Le cercle en tirets a le rayon |Γ| (ROS constant), l'arc coloré est le déplacement le long de la ligne vers le générateur.

Limitations connues

- L'écoulement est idéal : sans viscosité, décollement ni sillage. Le modèle ne donne ni la traînée ni le comportement aux grandes incidences.
- Les transformations conformes ne couvrent que les formes indiquées ; une forme quelconque de conducteurs ou de profil (transformation de Schwarz–Christoffel) n'est pas encore prise en charge.
- La fonction de transfert de la boucle a une forme fixe à trois retards et au plus deux intégrateurs ; des zéros au numérateur et une boucle ouverte instable ne sont pas encore pris en charge.

- Le filtre numérique est du second ordre, les filtres analogiques seulement passe-bas.

Généré à partir de l’application Mathtrace