Mathtrace – guide d’utilisation

III. Analyse

Sommaire

III. Analyse

25. Limites

26. Dérivées

27. Étude de fonction

28. Fonctions de plusieurs variables
    - Carte des théorèmes intégraux
    - Applications physiques des théorèmes intégraux

29. Polynôme de Taylor

30. Primitives et intégrales indéfinies
    - Primitives usuelles et changement de variable
    - Intégration par parties
    - Fractions rationnelles
    - Fonctions trigonométriques
    - Fonctions hyperboliques
    - Racines

31. Intégrales et leurs applications
    - Intégrale
    - Intégrales impropres
    - Aire sous une courbe et entre deux courbes
    - Longueur d’arc
    - Volume d’un solide de révolution
    - Aire latérale d’un solide de révolution
    - Applications avec paramètres
    - Centre de gravité
    - Courbes paramétrées et en coordonnées polaires
    - Courbes données par une équation

32. Séries
    - Séries numériques

Séries entières
Série de Taylor
33. Séries de Fourier

25. Limites

Mathtrace calcule la limite d'une fonction d'une variable en un point, en l'infini et les limites à gauche et à droite, et procède comme en classe : il essaie d'abord de remplacer dans la fonction. La limite d'une suite ($n \to \infty$) se calcule de même – aussi la forme 1^∞ ou une somme de puissances dont on met en facteur le terme qui croît le plus vite.

Si le remplacement donne une forme indéterminée (0/0, ∞/∞, …), il choisit une transformation selon la forme de la fonction – factoriser et simplifier, multiplier par la quantité conjuguée, diviser par la plus haute puissance, une limite usuelle (sin x / x) ou la règle de L'Hôpital, éventuellement plusieurs fois. Une puissance dont la base et l'exposant contiennent la variable (les formes 0^0, ∞^0, 1^∞) s'écrit $e^{g \cdot \ln f}$ et la limite se calcule dans l'exposant ; si la fonction n'est définie que d'un côté du point (x^(ln(x+1)) seulement pour x > 0), il calcule la limite de ce côté et le signale. La puce « Règle de L'Hôpital » choisit la règle directement ; si le remplacement ne donne pas de forme indéterminée, la démarche explique pourquoi elle ne s'applique pas.

Les autres lettres de l'énoncé (k dans (1 + k/x)^x) sont des paramètres – des constantes avec lesquelles le calcul est mené en général ; si le résultat ne vaut que pour des valeurs positives du paramètre, il le précise. La lettre peut aussi figurer dans le point de la limite : lim $(x^2 - a^2)/(x - a)$ quand $x \to a = 2a$. Une limite avec paramètre n'a pas de graphique.

Une limite infinie, ou une limite qui n'existe pas (limites à gauche et à droite différentes), n'est jamais donnée comme un nombre – il le dit en toutes lettres et montre les limites à gauche et à droite. Le résultat s'accompagne d'un graphique de la fonction près du point avec la valeur de la limite marquée.

Pour la limite d'une suite, le graphe montre les points a_1, a_2, a_3, … au lieu d'une courbe continue.

Comment le saisir

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Une limite saisie : après le mot lim, entre parenthèses la variable, la flèche -> et le point, puis la fonction.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Une limite en l'infini : l'infini s'écrit oo (moins l'infini -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Une limite à droite ou à gauche : + (à droite) ou − (à gauche) après le point.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Depuis une photo, ou en LaTeX tel que l'appareil le reconnaît.

`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	La limite d'une suite à l'infini.

Exemples

La forme indéterminée 0/0 – on factorise le numérateur et on simplifie.

Énoncé: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

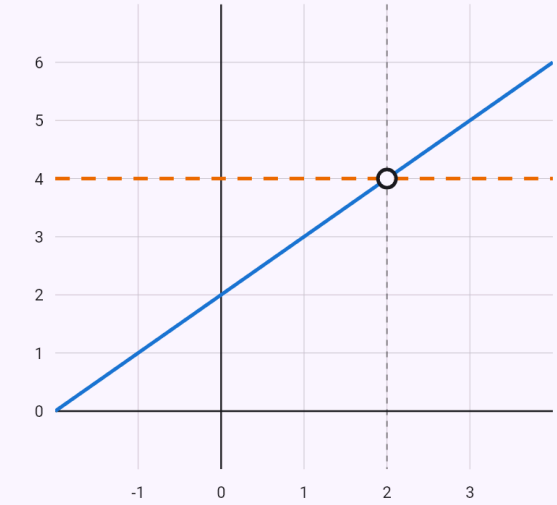
Résultat

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On transforme et on simplifie
  $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- On remplace : $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graphique



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
$y = 4$

Limite :
○ $(2; 4)$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

Une limite en l'infini – numérateur et dénominateur divisés par la plus haute puissance.

Énoncé: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Résultat

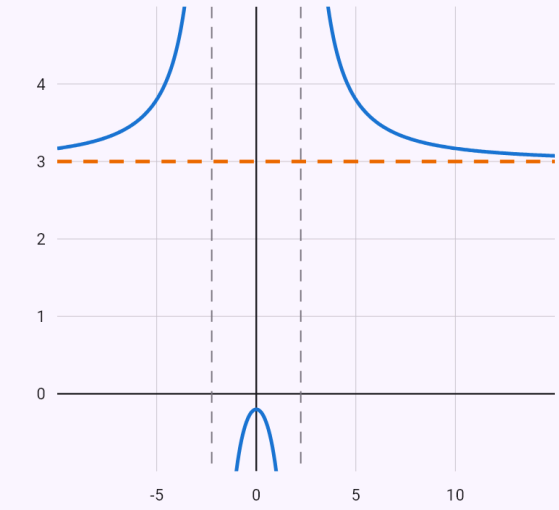
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: il faut transformer l'expression.
- On divise numérateur et dénominateur par x^2 – les termes c/x^n tendent vers zéro

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Graphique



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

La limite usuelle sin x / x.

Énoncé: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Résultat

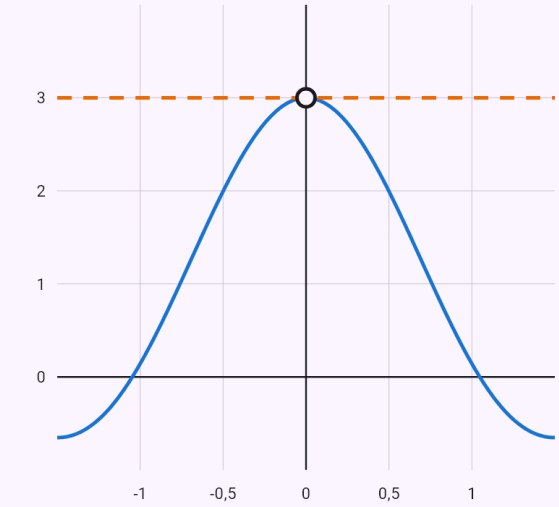
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On utilise la limite connue $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graphique



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Limite :

- $(0; 3)$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

La règle de L'Hôpital, appliquée deux fois de suite.

Énoncé: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Résultat

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

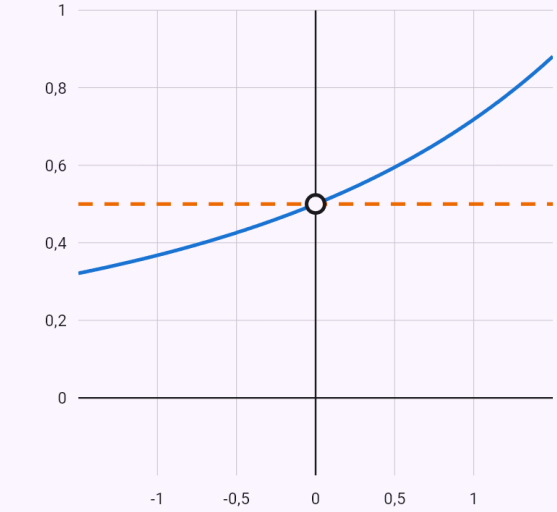
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- On remplace : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Graphique



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Limite :

- $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

La forme indéterminée 0^0 – la puissance s'écrit e^(g·ln f) ; la fonction n'est définie que pour x > 0, d'où

la limite à droite.

Énoncé: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Résultat

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Étapes

- La fonction n'est pas définie à gauche de 0 : on calcule donc la limite à droite.
- La substitution donne la forme indéterminée 0^0 : il faut transformer l'expression.
- La base et l'exposant contiennent la variable : on écrit la puissance comme e puissance (exposant fois logarithme de la base) et on calcule la limite dans l'exposant

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$
- La substitution donne la forme indéterminée $0\cdot\infty$: il faut transformer l'expression.
- On écrit le produit comme un quotient

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: il faut transformer l'expression.
- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

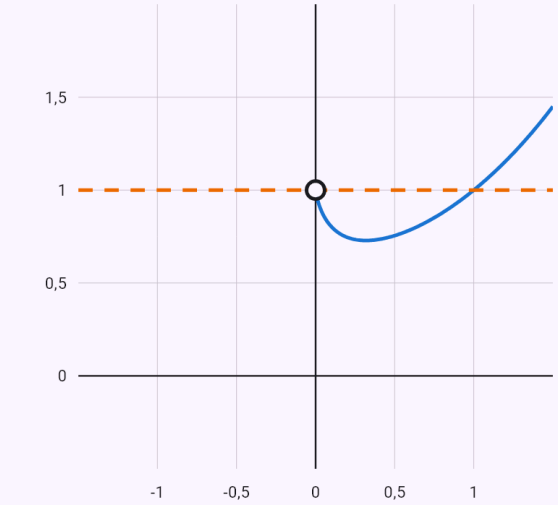
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- Le facteur $x+1$ vaut 1 au point – on le sort de la limite

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1\cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$
- On remplace

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- On remplace l'exposant par sa limite : $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$

Graphique



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Limite :

○ $(0;1)$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

Les limites à gauche et à droite diffèrent – la limite n'existe pas.

Énoncé: `lim(x->0) 1/x`

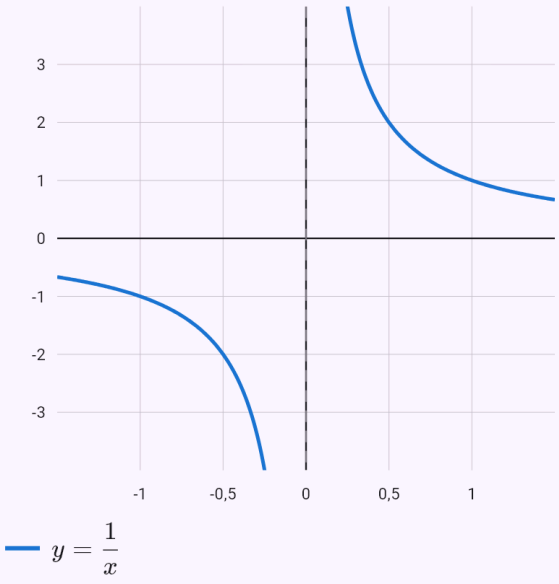
Résultat

La limite n'existe pas – les limites à gauche et à droite diffèrent.

Étapes

- La substitution donne un nombre non nul sur zéro – la limite est infinie, son signe à gauche et à droite : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Limites à gauche et à droite : $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Graphique



Limite d'une suite – on met en facteur le terme qui croît le plus vite, 9^n.

Énoncé: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Résultat

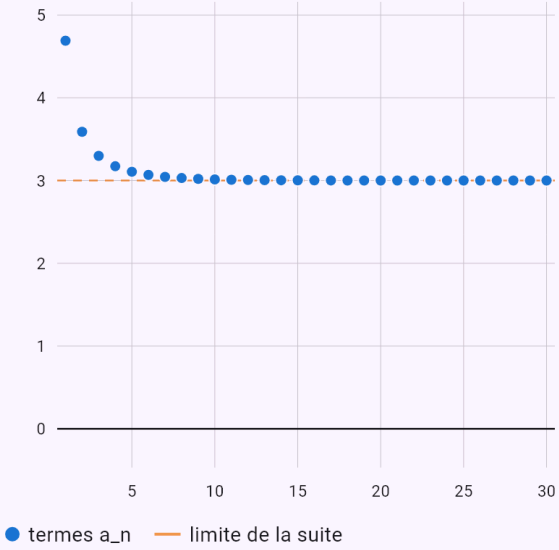
$$\lim_{n \to \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Étapes

- On met en facteur le terme qui croît le plus vite, 9^n – les autres divisés par lui tendent vers zéro

$$\lim_{n \to \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1 \right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Graphique



Les points sont les termes a_n pour n = 1, 2, 3, … Si la suite a une limite, les termes s'en approchent (en pointillés).

Limite avec un paramètre k – la limite connue (1 + 1/x)^x = e donne e^k.

Énoncé: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Résultat

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Étapes

- Les lettres autres que la variable sont des paramètres – des nombres fixes traités comme des constantes : k
- La substitution donne la forme indéterminée 1^{∞} : il faut transformer l'expression.
- On écrit la base comme $1+\frac{1}{t}$ avec t = $\frac{x}{k}$, et la puissance comme $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ élevé à k. L'expression entre crochets tend vers e – c'est la limite connue $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Reste la limite de l'exposant $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$

26. Dérivées

L'application dérive selon les règles – somme, produit par une constante, produit, quotient et composée – et indique à chaque étape la règle utilisée. Elle calcule aussi les dérivées successives et le nombre dérivé en un point. Les fonctions de référence (x^2, sin x, e^x, …) peuvent aussi être dérivées par la définition, comme limite du taux d'accroissement. Le résultat s'accompagne d'un graphique de la fonction et de sa dérivée.

Pour une fonction définie implicitement par une équation en x et y ($x^3 + y^3 = 3xy$), elle dérive les deux membres par rapport à x (y étant une fonction de x) et isole y', ou utilise la formule $y' = -F_x / F_y$; elle calcule aussi y'' et, en un point donné, la tangente et la normale, et trace la courbe.

En un point singulier (la courbe s'y recoupe ou y a un point de rebroussement), elle trouve les tangentes à partir des termes de plus bas degré – pour le folium à l'origine, x = 0 et y = 0.

La différentielle $df = f'(x)\,dx$, en un point avec un pas (« différentielle √x, x0 = 4, dx = 0.1 ») avec la valeur approchée $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. « environ √4.1 » choisit le point $x_0 = 4$, où la valeur est connue exactement, et compare l'estimation à la vraie valeur.

Comment le saisir

`(x^2 sin x)'`	La dérivée avec un prime après la parenthèse.
`d/dx (e^x / x)`	La notation d/dx, aussi depuis une photo (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Les dérivées successives avec plusieurs primes, ou avec l'ordre dans la puce « Dériver ».
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	Le nombre dérivé en un point, ou indiquez le point dans la puce.
`x^2 sin x`	Une expression avec la puce « Dériver » – vous y choisissez aussi l'ordre, le point et la méthode (par les règles / par la définition).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Une équation en x et y – la puce « Dérivée implicite » (ordre 1 ou 2, la méthode, un point $[x_0 ; y_0]$) ou « Tracé de la courbe » ; écrit diff(x^3+y^3=3xy, x).

`différentielle √x, x0 = 4, dx = 0.1`	La différentielle en un point avec un pas.
`environ √4.1`	Une valeur approchée par la différentielle.

Exemples

La dérivée d'un produit.

Énoncé: `(x^2 sin x)'`

Résultat

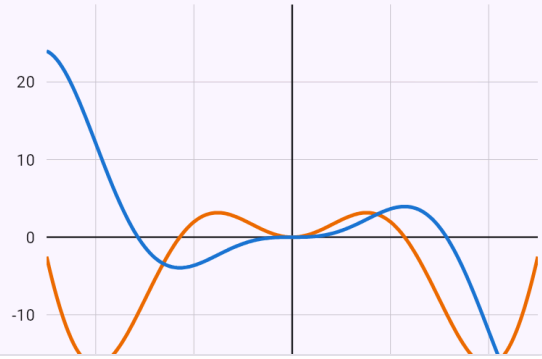
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

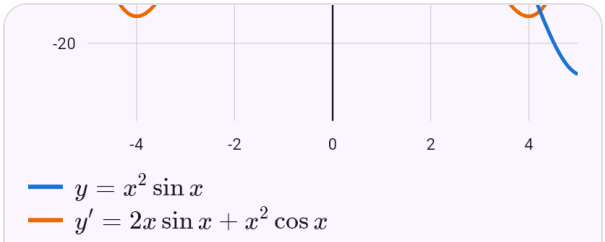
Étapes

- Dérivée d'un produit (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Graphique





Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

La dérivée d'un quotient.

Énoncé: `d/dx (e^x / x)`

Résultat

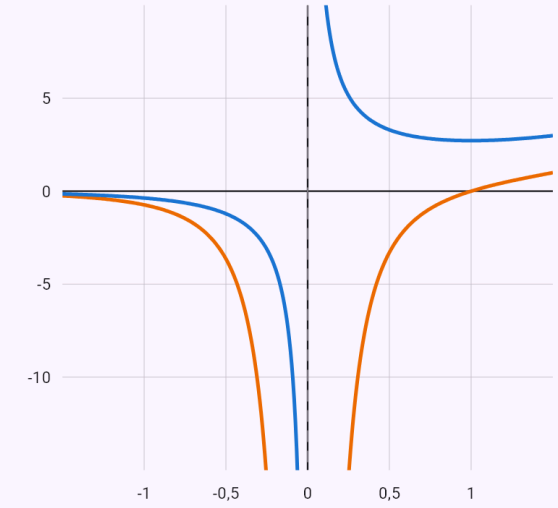
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Étapes

- Dérivée d'un quotient (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graphique



$y = \frac{e^x}{x}$

$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

La dérivée seconde.

Énoncé: `(x^3 ln x)''`

Résultat

$$y'' = 5x + 6x\ln x$$

Étapes

- Dérivée d'ordre 1 : $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Dérivée d'un produit (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$$

- Dérivée d'ordre 2 : $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- La dérivée d'une somme est la somme des dérivées :

$$\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$$

- On sort la constante de la dérivée :

$$\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$$

- Dérivée d'un produit (u·v)' = u'·v + u·v'

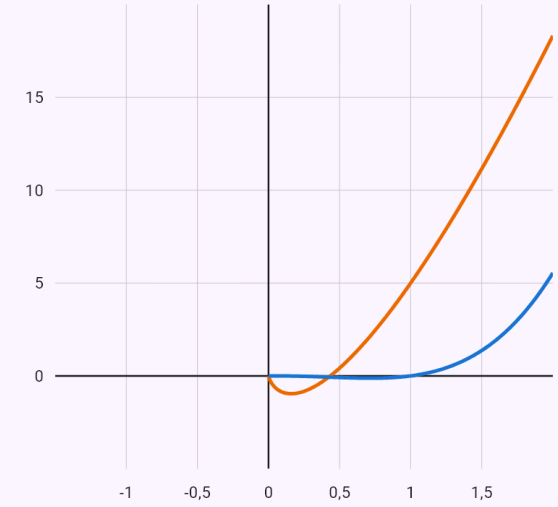
$$\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$$

- On remplace :

$$\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$$

- On remplace : $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- On simplifie : $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graphique



$y = x^3 \ln x$

$y'' = 5x + 6x \ln x$

Là où la dérivée seconde est positive, la fonction est convexe (tournée vers le haut) ; là où elle est négative, elle est concave.

La dérivée par la définition, comme limite.

Énoncé: `x^2` Dériver → Par la définition

Résultat

$$y' = 2x$$

Étapes

- Dérivée par la définition

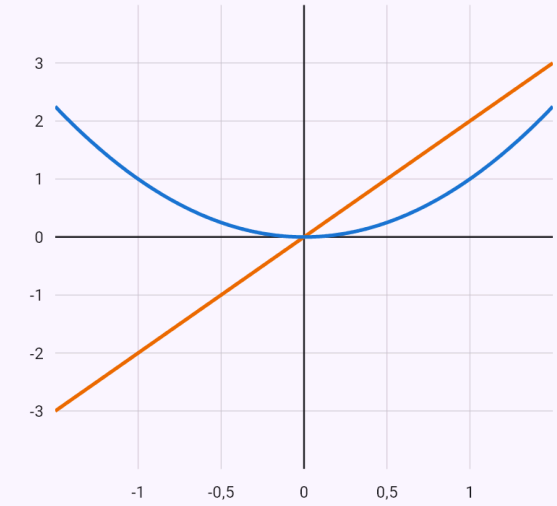
$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On transforme et on simplifie

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

- On remplace : $\lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$

Graphique



$y = x^2$
$y' = 2x$

Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

Dérivée implicite – le folium de Descartes, la tangente et la normale en [3/2 ; 3/2], la dérivée seconde.

Énoncé: `x^3 + y^3 = 3xy` Dérivée implicite, ordre 2, point [3/2 ; 3/2]

Résultat

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Conditions : $y^2 - x \neq 0$

Étapes

- La fonction y = y(x) est donnée par l'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ – on dérive les deux membres par rapport à x, y étant une fonction de x (dérivée d'une composée : par ex. (y³)' = 3y²·y').
- On dérive les deux membres : $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Les termes en y' à gauche, le reste à droite, y' mis en facteur : $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- On isole y' : $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- La dérivée seconde – on dérive à nouveau y' par rapport à x (y et y' sont des fonctions de x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

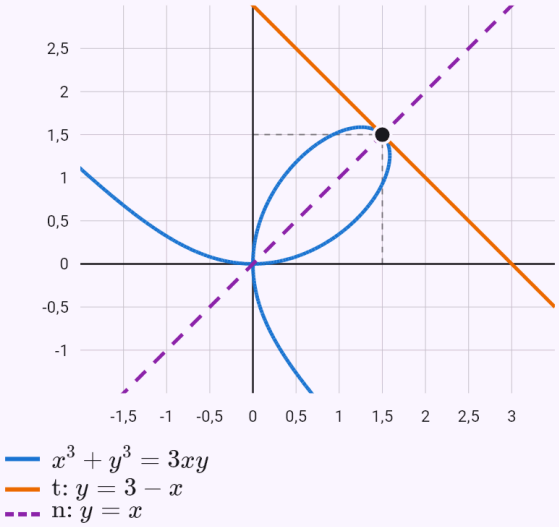
- On remplace y'

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Sur la courbe, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – ce qui simplifie l'expression : $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Le point $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ est sur la courbe : $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}} = 0$
- Le nombre dérivé au point $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – la pente de la tangente : $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- La tangente : $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- La normale est perpendiculaire à la tangente, de pente 1 : $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- La dérivée seconde au point : $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graphique



La courbe donnée par l'équation. Au point donné, la tangente (trait plein) et la normale (pointillés).

La différentielle de √x en 4 avec le pas 0,1.

Énoncé: `différentielle √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Résultat

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Étapes

- La différentielle – la partie linéaire de l'accroissement de la fonction : $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- La différentielle en x_0 pour le pas h

  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Nous remplaçons l'accroissement par la différentielle. La valeur exacte est $2{,}0248457$, l'erreur de l'estimation $0{,}00015$

  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Une valeur approchée de ∛27,1 par la différentielle.

Énoncé: `environ \sqrt[3]{27.1}`

Résultat

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Étapes

- Nous écrivons le nombre comme valeur de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ près de $x_0 = 27$, où nous la connaissons exactement ; le pas est $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- La différentielle – la partie linéaire de l'accroissement de la fonction : $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- La différentielle en x_0 pour le pas h

  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \frac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Nous remplaçons l'accroissement par la différentielle. La valeur exacte est $3{,}0036991$, l'erreur de l'estimation $0{,}0000046$

  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Étude de fonction

L'application étudie une fonction dans l'ordre habituel : ensemble de définition, parité, intersections avec les axes, signe de la fonction, limites aux bornes de l'ensemble de définition et asymptotes, dérivée première – variations et extremums (aussi par les dérivées d'ordre supérieur), dérivée seconde – convexité et points d'inflexion, et enfin l'ensemble image. Elle résume le tout et trace un graphique avec les points marqués.

Pour une fonction trigonométrique, l'application trouve la période, étudie la fonction sur une période et écrit les résultats avec la période (un maximum en x = π/2 + 2kπ) ; si seule la dérivée est périodique (x + 2 sin x), les extremums et la monotonie se répètent avec la période. Les valeurs absolues sont supprimées selon les signes sur les intervalles et les dérivées à gauche et à droite comparées aux points anguleux ; là où la dérivée est infinie, une tangente verticale est indiquée. Les valeurs absolues imbriquées et les sommes de valeurs absolues sont étudiées par morceaux ; là où la fonction est constante sur un intervalle, c'est indiqué avec sa valeur (un minimum en chaque point de l'intervalle).

Extremums absolus (globaux) sur un intervalle fermé : « extremums de x^3 - 3x sur [-2; 3] » – l'application trouve les points stationnaires et les points sans dérivée dans l'intervalle et compare les valeurs en ces points et aux bornes. Sans intervalle, « extremums … » étudie la fonction. La réciproque (« fonction réciproque f(x) = … ») s'obtient en résolvant y = f(x) par rapport à x, vérifiée par composition ; le graphique montre f, f^{-1} et la droite y = x.

Le sommet d'une parabole (« sommet de la parabole y = x^2 - 4x + 7 », un simple y = … suffit) par la forme canonique – avec l'axe, l'ensemble image et la translation de la courbe de $y = ax^2$. Une fonction composée s'écrit avec ses définitions : « f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x)) ».

Un graphe par translations, dilatations et symétries : « posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1 » (en anglais « graph transformations … ») – l'application part de la fonction de référence (sin, cos, tan, cot, e^x, a^x, ln, $\log_a$, racine, puissance, 1/x, |x|) et, pas à pas, la contracte ou la dilate selon l'axe des x, la translate vers la droite ou la gauche, la dilate selon l'axe des y, en prend le symétrique et la translate vers le haut ou le bas ; aussi |f(x)| et f(|x|). Le graphe montre la fonction de référence et le résultat.

Comment le saisir

`étude y = x^3 - 3x`	Avec le mot « étude » devant la fonction.
`x^3 - 3x`	Une fonction avec la puce « Étude de fonction ».
`extremums de x^3 - 3x sur [-2; 3]`	Extremums absolus sur un intervalle fermé.

`fonction réciproque f(x) = (2x+1)/(x-3)`	La fonction réciproque (aussi « f^{-1}, f(x) = … »).

Exemples

Un polynôme – extremums et un point d'inflexion.

Énoncé: `x^3 - 3x` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Zéros: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$

Croissante: $]-\infty\,;\,-1]$, $[1\,;\,\infty[$

Décroissante: $[-1\,;\,1]$

Maximum local: $[-1;\ 2]$

Minimum local: $[1;\ -2]$

Convexe: $[0\,;\,\infty[$

Concave: $]-\infty\,;\,0]$

Points d'inflexion: $[0;\ 0]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, soit $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,-\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}\,;\,0[$	$]0\,;\,\sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}\,;\,\infty[$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  La fonction est positive pour $x \in \left]-\sqrt{3}\,;\,0\right[\cup \left]\sqrt{3}\,;\,\infty\right[$ et négative pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0\,;\,\sqrt{3}\right[$
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en ±∞ : $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Dérivée première : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

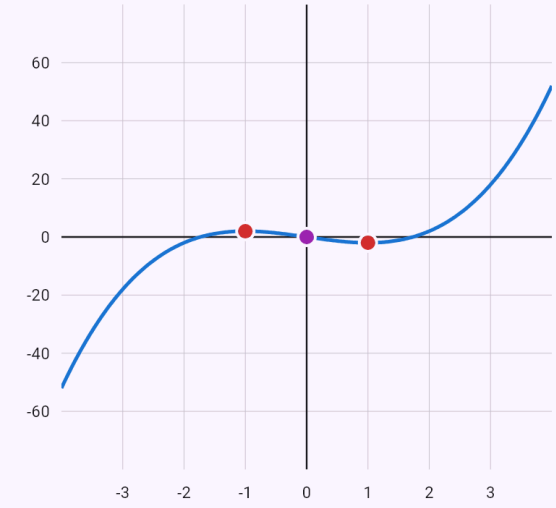
	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  La fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$, $[1\,;\,\infty[$ et décroissante sur $[-1\,;\,1]$
- En $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – maximum local.
- En $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – minimum local.
- Maximum local $[-1;\ 2]$, minimum local $[1;\ -2]$
- Dérivée seconde : $f''(x) = 6x$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  La fonction est convexe sur $[0\,;\,\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;\,0]$
- En $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – la première dérivée non nulle (à partir de la troisième) est d'ordre impair : point d'inflexion.
- Points d'inflexion : $[0;\ 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Graphique



$y = x^3 - 3x$

Points remarquables :

- maximum $(-1;2)$
- inflexion $(0;0)$
- minimum $(1;-2)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Une fonction rationnelle – asymptotes.

Énoncé: `x^2/(x - 1)` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) =]-\infty\,;\,0] \cup [4\,;\,\infty[$

Parité: ni paire ni impaire

Zéros: $[0;\ 0]$

Croissante: $]-\infty\,;\,0],\ [2\,;\,\infty[$

Décroissante: $[0\,;\,1[,\ ]1\,;\,2]$

Maximum local: $[0;\ 0]$

Minimum local: $[2;\ 4]$

Convexe: $]1\,;\,\infty[$

Concave: $]-\infty\,;\,1[$

Asymptotes: $x = 1,\ y = x + 1$

Étapes

- Ensemble de définition – conditions $x \neq 1$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- L'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro – la fonction n'est ni paire ni impaire.
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

La fonction est positive pour $x \in]1\,;\,\infty[$ et négative pour $x \in]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,1[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Asymptotes verticales (la limite y est infinie) : $x = 1$
- Asymptote en ±∞ : $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – la droite $y = x + 1$
- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,1[$	$]1\,;\,2[$	$]2\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

La fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,0],\ [2\,;\,\infty[$ et décroissante sur $[0\,;\,1[,\ ]1\,;\,2]$

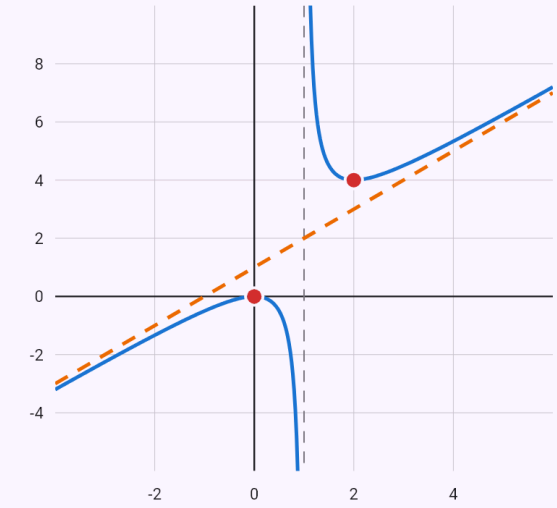
- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maximum local.
- En $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – minimum local.
- Maximum local $[0;\ 0]$, minimum local $[2;\ 4]$

- Dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

  La fonction est convexe sur $]1\,;\,\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;\,1[$
- La fonction n'a pas de point d'inflexion.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) =]-\infty\,;\,0] \cup [4\,;\,\infty[$

Graphique



$y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Points remarquables :

- maximum $(0;0)$
- minimum $(2;4)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Fonction périodique – tout sur une période, les résultats avec la période.

Énoncé: `sin 2x + 2cos x` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Parité: ni paire ni impaire

Période: $p = 2\pi$

Zéros: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Croissante: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Décroissante: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Maximum local: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Minimum local: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexe:
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right],\ \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,;\right.$

Concave:
$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\ \left[-\arcsin\left(\right.\right.$

Points d'inflexion:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- La fonction est périodique de période 2π : on l'étudie sur une période (de 0 à 2π) et on répète les résultats avec la période, k ∈ ℤ.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – ni f(x) ni −f(x) : la fonction n'est ni paire ni impaire.
- Intersections avec l'axe des abscisses :
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 2$, soit $[0;\ 2]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

x	$\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$
$f(x)$	+	−	+

  La fonction est positive pour
  $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ et négative pour
  $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$
- Une fonction périodique (non constante) n'a pas de limite en ±∞.
- Dérivée première : $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Points stationnaires
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

x	$\left]0\,;\,\frac{\pi}{6}\right[$	$\left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right[$	$\left]\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  La fonction est croissante sur $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$
  et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$
- Maximum local $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, minimum local $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Dérivée seconde : $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Points d'inflexion possibles
  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)[$	$]\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\,;$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

La fonction est convexe sur et concave sur

$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,;\,2\pi\right.$

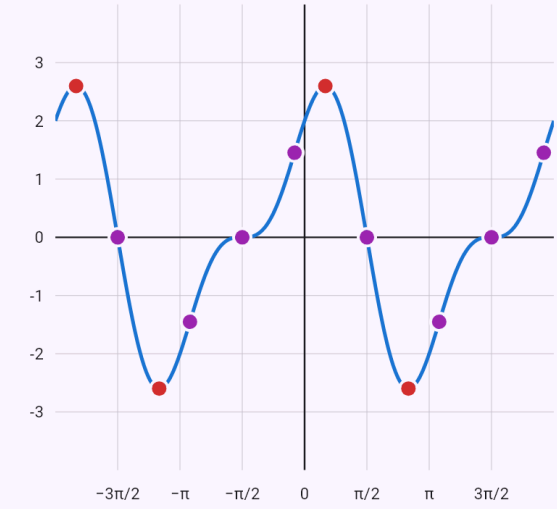
$\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $\left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right.$

- Points d'inflexion

$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right]$, $\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$, $\left[2\pi\right.$

- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f)=\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Graphique



$y=\sin 2x+2\cos x$

Points remarquables :

- maximum $\left(-\frac{11\pi}{6}\,;\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(-\frac{3\pi}{2}\,;\,0\right)$
- minimum $\left(-\frac{7\pi}{6}\,;\,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\,;\,-\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexion $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$
- inflexion $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\,;\,\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- maximum $\left(\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$
- minimum $\left(\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\,;\,-\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexion $\left(\frac{3\pi}{2}\,;\,0\right)$
- inflexion $\left(2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\,;\,\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Tangente – asymptotes verticales, ensemble image $\mathbb{R}$.

Énoncé: `tg x` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Période: $p = \pi$

Zéros: $[k\pi;\ 0]$

Croissante: $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

Convexe: $\left[k\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

Concave: $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \pi + k\pi\right]$

Points d'inflexion: $[k\pi;\ 0]$

Asymptotes: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Étapes

- Ensemble de définition – conditions $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- La fonction est périodique de période π : on l'étudie sur une période (de 0 à π) et on répète les résultats avec la période, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses :
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, soit $[k\pi;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$\left]0\,;\ \frac{\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{\pi}{2}\,;\ \pi\right[$
$f(x)$	$+$	$-$

  La fonction est positive pour $x \in \left]k\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et négative pour $x \in \left]\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \pi + k\pi\right[$
- Une fonction périodique (non constante) n'a pas de limite en ±∞.
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Asymptotes verticales (la limite y est infinie) :
  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$\left]0\,;\ \frac{\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{\pi}{2}\,;\ \pi\right[$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

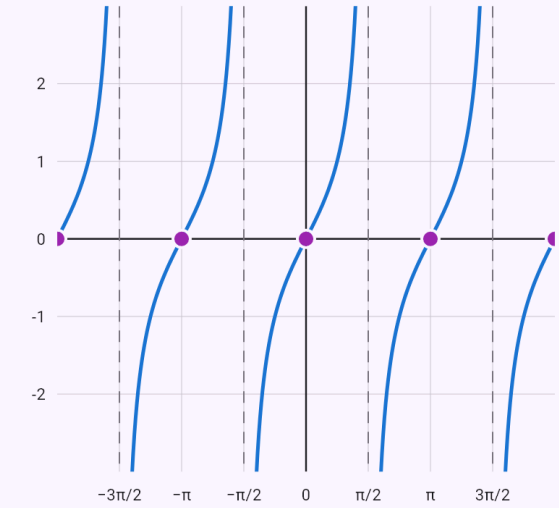
  La fonction est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

- La fonction n'a pas d'extremum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi[$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  La fonction est convexe sur $\left[k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et concave sur $\left]\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\pi+k\pi\right]$
- Points d'inflexion : $[k\pi;\;0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Graphique



$y = \mathrm{tg}\,x$

Points remarquables :

- inflexion $(-2\pi;0)$
- inflexion $(-\pi;0)$
- inflexion $(0;0)$
- inflexion $(\pi;0)$
- inflexion $(2\pi;0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Tangente hyperbolique – asymptotes horizontales y = ±1.

Énoncé: `tanh x` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) =]-1\,;\,1[$

Parité: impaire

Zéros: $[0;\ 0]$

Croissante: $\mathbb{R}$

Convexe: $]-\infty\,;\,0]$

Concave: $[0\,;\,\infty[$

Points d'inflexion: $[0;\ 0]$

Asymptotes: $y = -1,\ y = 1$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f(x)$	$-$	$+$

  La fonction est positive pour $x \in\,]0\,;\,\infty[$ et négative pour $x \in\,]-\infty\,;\,0[$
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Asymptote en −∞ : $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – la droite $y = -1$
- Asymptote en +∞ : $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – la droite $y = 1$
- Dérivée première : $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- La fonction n'a pas d'extremum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  La fonction est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,\infty[$
- En $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – la première dérivée non nulle (à partir de la troisième) est d'ordre impair : point d'inflexion.
- Points d'inflexion : $[0;\ 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) =]-1\,;\,1[$

Seule la dérivée est périodique – les valeurs des extremums croissent avec k.

Énoncé: `x + 2sin x` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Période: $p = 2\pi$

Zéros: $[0;\ 0]$

Croissante: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Décroissante: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Maximum local: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Minimum local: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexe: $[\pi + 2k\pi\,;\ 2\pi + 2k\pi]$

Concave: $[2k\pi\,;\ \pi + 2k\pi]$

Points d'inflexion: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- La fonction n'est pas périodique, mais sa dérivée l'est (période 2π) : la monotonie, les extremums et la convexité se répètent avec cette période, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Dérivée première : $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Points stationnaires
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]0\,;\,\frac{2\pi}{3}[$	$]\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{4\pi}{3}[$	$]\frac{4\pi}{3}\,;\,2\pi[$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La fonction est croissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

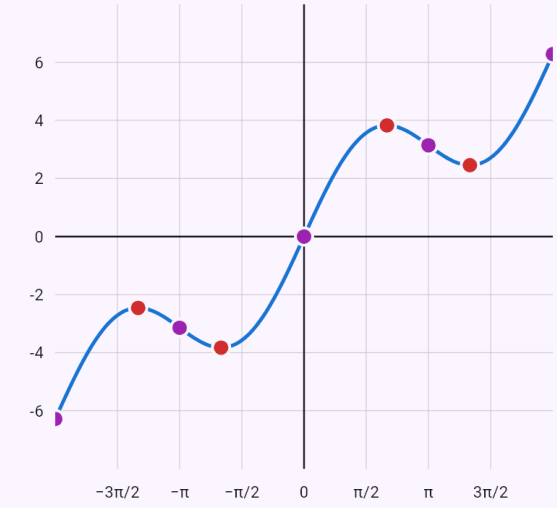
- Maximum local $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, minimum local $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Dérivée seconde : $f''(x) = -2\sin x$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]0\,;\,\pi[$	$]\pi\,;\,2\pi[$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

La fonction est convexe sur $[\pi + 2k\pi\,;\ 2\pi + 2k\pi]$ et concave sur $[2k\pi\,;\ \pi + 2k\pi]$

- Points d'inflexion : $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Graphique



$y = x + 2\sin x$

Points remarquables :

- inflexion $(-2\pi; -2\pi)$
- maximum $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- inflexion $(-\pi; -\pi)$
- minimum $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexion $(0; 0)$
- maximum $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexion $(\pi; \pi)$
- minimum $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexion $(2\pi; 2\pi)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Valeur absolue – points anguleux, dérivées à gauche et à droite.

Énoncé: `|x^2 - 1|` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = [0\,;\,\infty[$

Parité: paire

Zéros: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Croissante: $[-1\,;\,0],\ [1\,;\,\infty[$

Décroissante: $]-\infty\,;\,-1],\ [0\,;\,1]$

Maximum local: $[0;\ 1]$

Minimum local: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Convexe: $]-\infty\,;\,-1],\ [1\,;\,\infty[$

Concave: $[-1\,;\,1]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in\,]-\infty\,;\,-1[\\ 1 - x^2, & x \in [-1\,;\,1[\\ x^2 - 1, & x \in [1\,;\,\infty[\end{cases}$$

- – la fonction est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, soit $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 1$, soit $[0;\ 1]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La fonction est positive pour et négative pour $x \in \emptyset$

$x \in\,]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,\infty[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en -∞ : $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Pas d'asymptote en +∞ : $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- En $x = -1$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), le graphe y a un point anguleux.
- En $x = 1$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), le graphe y a un point anguleux.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,0[$	$]0\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

La fonction est croissante sur $[-1\,;\,0]$, $[1\,;\,\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$, $[0\,;\,1]$

- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maximum local.
- Maximum local $[0;\ 1]$, minimum local $[-1;\ 0]$, $[1;\ 0]$
- Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

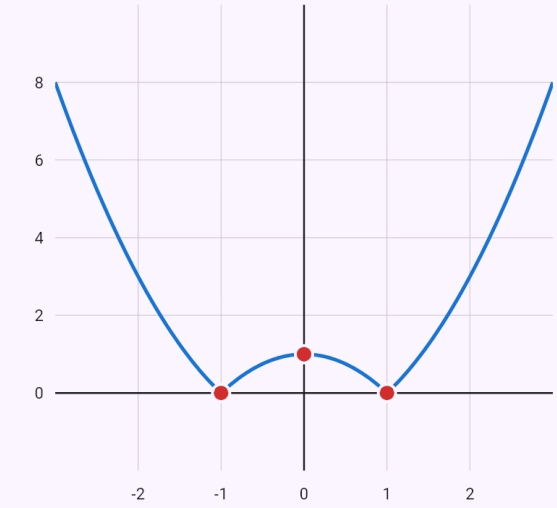
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,-1[$	$]-1\,;\,1[$	$]1\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

La fonction est convexe sur $]-\infty\,;\,-1]$, $[1\,;\,\infty[$ et concave sur $[-1\,;\,1]$

- La fonction n'a pas de point d'inflexion.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = [0\,;\,\infty[$

Graphique



$y = |x^2 - 1|$

Points remarquables :

- minimum $(-1; 0)$
- maximum $(0; 1)$
- minimum $(1; 0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Racine cubique – tangente verticale en zéro.

Énoncé: `x^(1/3)` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Zéros: $[0;\ 0]$

Croissante: $\mathbb{R}$

Convexe: $]-\infty\,;\,0]$

Concave: $[0\,;\,\infty[$

Points d'inflexion: $[0;\ 0]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0;\ 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f(x)$	$-$	$+$

  La fonction est positive pour $x \in\,]0\,;\,\infty[$ et négative pour $x \in\,]-\infty\,;\,0[$
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en -∞ : $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, mais $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Pas d'asymptote en +∞ : $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, mais $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Dérivée première : $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- En $x = 0$, la dérivée est infinie ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) : le graphe y a une tangente verticale.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

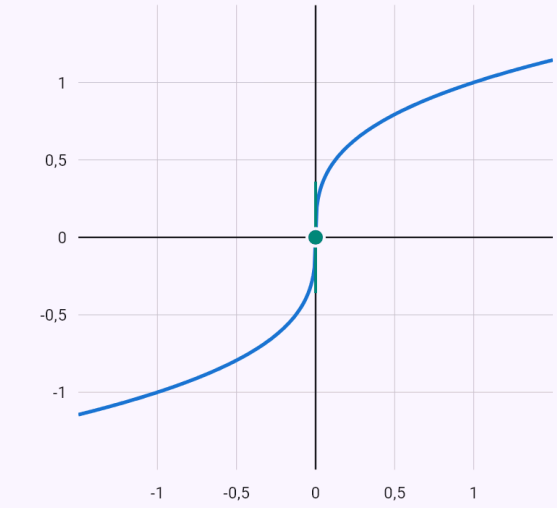
	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- La fonction n'a pas d'extremum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,0[$	$]0\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  La fonction est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,\infty[$
- Points d'inflexion : $[0;\ 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Graphique



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Points remarquables :

- inflexion $(0;0)$
- tangente verticale $(0;0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Valeur absolue imbriquée – par morceaux, fonction paire.

Énoncé: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = [0\,;\,\infty[$

Parité: paire

Zéros: $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$

Croissante: $[-3\,;\,-1],\ [0\,;\,1],\ [3\,;\,\infty[$

Décroissante: $]-\infty\,;\,-3],\ [-1\,;\,0],\ [1\,;\,3]$

Maximum local: $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$

Minimum local: $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$

Convexe: $]-\infty\,;\,-3],\ [3\,;\,\infty[$

Concave: $[-3\,;\,0],\ [0\,;\,3]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in\,]-\infty\,;\,-3[\\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3\,;\,0[\\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0\,;\,3[\\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3\,;\,\infty[\end{cases}$$

- – la fonction est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, soit $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 3$, soit $[0;\ 3]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,-3[$	$]-3\,;\,3[$	$]3\,;\,\infty[$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La fonction est positive pour et négative pour $x \in \emptyset$

$x \in\,]-\infty\,;\,-3[\cup\,]-3\,;\,3[\cup\,]3\,;\,\infty[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en -∞ : $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Pas d'asymptote en +∞ : $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+}{|x|\left|-x^2 + \right.}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- En $x = -3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), le graphe y a un point anguleux.
- En $x = 0$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), le graphe y a un point anguleux.
- En $x = 3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), le graphe y a un point anguleux.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty\,;\,-3[$	$]-3\,;\,-1[$	$]-1\,;\,0[$	$]0\,;\,1[$	$]1\,;\,3[$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

La fonction est croissante sur $[-3\,;\,-1]$, $[0\,;\,1]$, $[3\,;\,\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$, $[-1\,;\,0]$, $[1\,;\,3]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – maximum local.
- En $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – maximum local.
- Maximum local $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$, minimum local $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$
- Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

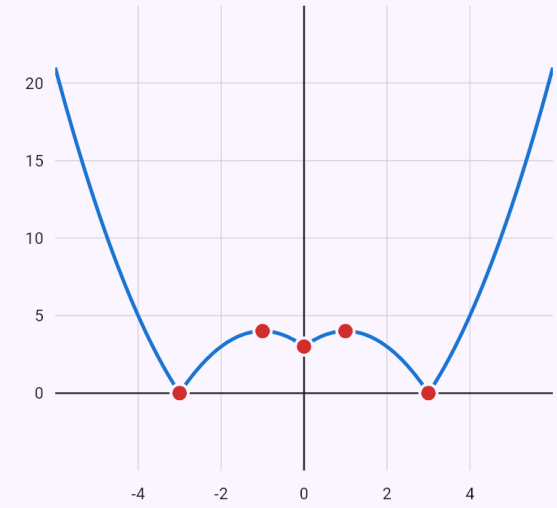
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty\,;\,-3[$	$]-3\,;\,0[$	$]0\,;\,3[$	$]3\,;\,\infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

La fonction est convexe sur $]-\infty\,;\,-3]$, $[3\,;\,\infty[$ et concave sur $[-3\,;\,0]$, $[0\,;\,3]$

- La fonction n'a pas de point d'inflexion.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = [0\,;\,\infty[$

Graphique



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Points remarquables :

- minimum $(-3; 0)$
- maximum $(-1; 4)$
- minimum $(0; 3)$
- maximum $(1; 4)$
- minimum $(3; 0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Somme de valeurs absolues – un morceau constant et deux asymptotes obliques.

Énoncé: `|x - 2| + |x + 3|` Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\mathrm{Im}\,(f) = [5\,;\,\infty[$

Parité: ni paire ni impaire

Croissante: $[2\,;\,\infty[$

Décroissante: $]-\infty\,;\,-3]$

Constante: $[-3\,;\,2]$

Minimum local: $f(x) = 5,\ x \in [-3\,;\,2]$

Asymptotes: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in]-\infty\,;\,-3[\\ 5, & x \in [-3\,;\,2[\\ 2x + 1, & x \in [2\,;\,\infty[\end{cases}$$

- − ni f(x) ni −f(x) : la fonction n'est ni paire ni impaire.
  $f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$
- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution – la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 5$, soit $[0;\ 5]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]-\infty\,;\,\infty[$
$f(x)$	$+$

  La fonction est positive pour $x \in \mathbb{R}$ et négative pour $x \in \emptyset$
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Asymptote en −∞ : $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – la droite $y = -2x - 1$
- Asymptote en +∞ : $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = 1$ – la droite $y = 2x + 1$
- Dérivée première

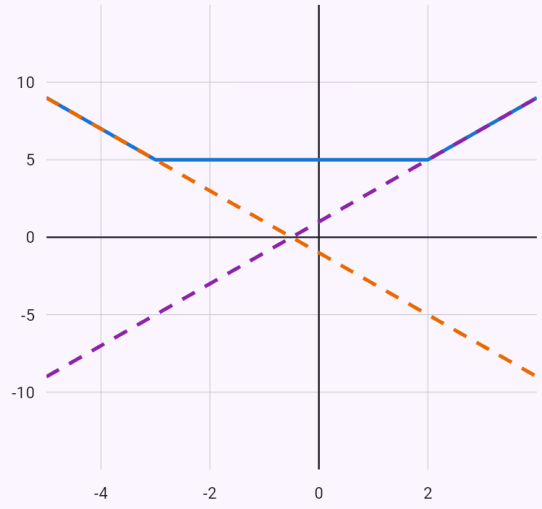
$$f'(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x}{|x+3|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|} = \frac{x|x -$$

- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- En $x = -3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), le graphe y a un point anguleux.
- En $x = 2$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), le graphe y a un point anguleux.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty\,;\,-3[$	$]-3\,;\,2[$	$]2\,;\,\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

  La fonction est croissante sur $[2\,;\,\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$. Sur $[-3\,;\,2]$ elle est constante (f' = 0).
- Minimum local $f(x) = 5,\ x \in [-3\,;\,2]$, pas de maximum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = 0$
- La dérivée seconde est nulle – la courbe est (une partie d')une droite, ni convexe ni concave.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\mathrm{Im}\,(f) = [5\,;\,\infty[$

Graphique



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Extremums absolus sur un intervalle – points stationnaires et bornes.

Énoncé: `extremums de x^3 - 3x sur [-2; 3]`

Résultat

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

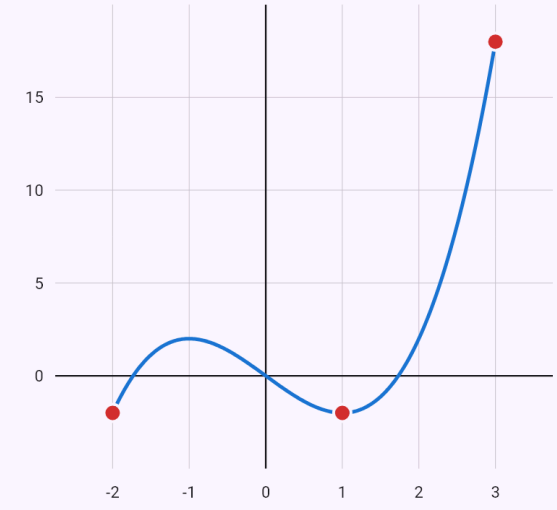
Étapes

- La dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Points stationnaires ($f'(x) = 0$) : $x = -1,\ x = 1$; tous sont dans l'intervalle $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Une fonction continue atteint sur un intervalle fermé sa plus grande et sa plus petite valeur (théorème des bornes) – en un point stationnaire, en un point sans dérivée ou en une borne. Nous comparons les valeurs

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- La plus grande valeur sur $\langle -2;\ 3 \rangle$ est $f(3) = 18$, la plus petite $f(-2) = f(1) = -2$

Graphique



$y = x^3 - 3x$

Points remarquables :

- maximum $(3; 18)$
- minimum $(-2; -2)$
- minimum $(1; -2)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

La réciproque d'une fonction homographique, avec vérification.

Énoncé: `fonction réciproque f(x) = (2x+1)/(x-3)`

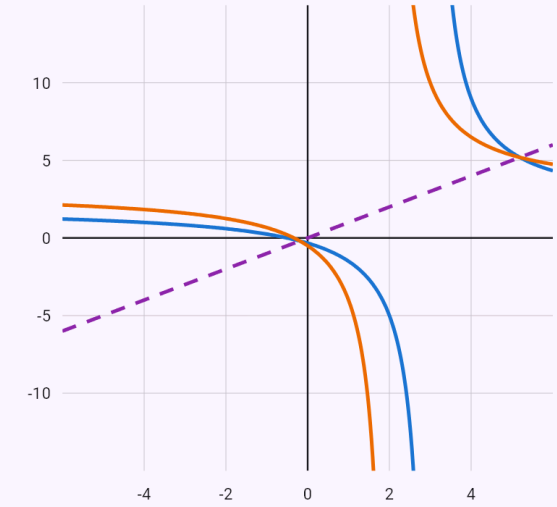
Résultat

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Étapes

- La fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, conditions de son ensemble de définition : $x - 3 \neq 0$
- Nous résolvons $y = f(x)$ par rapport à x : $y = \dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{y-2}$
- Nous échangeons x et y : $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$. L'ensemble de définition de la réciproque est l'image de f : $x - 2 \neq 0$
- Vérification par composition : $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

Graphique



$y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

f^{-1}

$y = x$

Le graphique de la réciproque est symétrique de celui de f par rapport à la droite y = x.

Le sommet d'une parabole par la forme canonique.

Énoncé: `sommet de la parabole y = x^2 - 4x + 7`

Résultat

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Étapes

- Forme canonique : $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Sommet $V = [2;\ 3]$, axe $x = 2$; la parabole est tournée vers le haut, ensemble image $H(f) = \langle 3; \infty)$
- La courbe est celle de $y = x^2$ translatée du vecteur $(2;\ 3)$

Une sinusoïde par contraction, translation et dilatation.

Énoncé: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

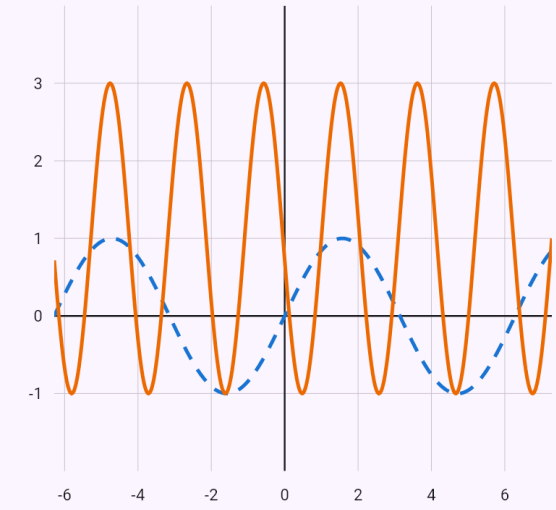
Résultat

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Étapes

- On part du graphe de la fonction de référence $y = \sin x$
- On contracte le graphe selon l'axe des x d'un facteur 3 (vers l'axe des y) : $y = \sin\left(3x\right)$
- On translate le graphe de 1 vers la droite selon l'axe des x : $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- On dilate le graphe selon l'axe des y d'un facteur 2 : $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- On translate le graphe de 1 vers le haut selon l'axe des y : $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Graphique



$y = \sin x$

$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

En pointillé le graphe de la fonction de référence, en trait plein le graphe obtenu.

Une racine translatée et symétrisée par rapport à l'axe des x.

Énoncé: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

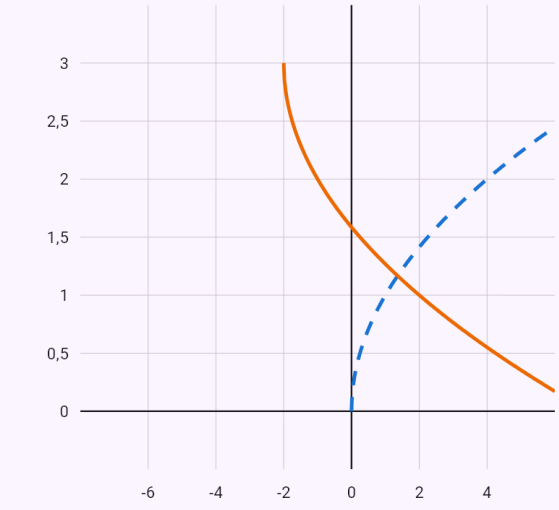
Résultat

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Étapes

- On part du graphe de la fonction de référence $y = \sqrt{x}$
- On translate le graphe de 2 vers la gauche selon l'axe des x : $y = \sqrt{x+2}$
- On prend le symétrique du graphe par rapport à l'axe des x : $y = -\sqrt{x+2}$
- On translate le graphe de 3 vers le haut selon l'axe des y : $y = -\sqrt{x+2} + 3$

Graphique



$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x+2} + 3$

En pointillé le graphe de la fonction de référence, en trait plein le graphe obtenu.

Une fonction composée f(g(x)).

Énoncé: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Résultat

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Étapes

- Dans la fonction extérieure f, on remplace x par la fonction intérieure g :
  $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Limitations connues

- Une fonction dont même la dérivée n'est pas périodique (x·sin x) n'est étudiée que numériquement sur ⟨−2π ; 2π⟩, sans la période ; les fonctions trigonométriques réciproques (arcsin, arctan) ne sont pas encore prises en charge.
- Extremums absolus seulement sur un intervalle fermé et pour une fonction continue ; la réciproque seulement là où une formule l'exprime – pour une fonction non injective (x²), la réciproque sur une partie de l'ensemble de définition n'est pas encore cherchée.

28. Fonctions de plusieurs variables

Dérivées partielles (premières et secondes, croisées) et gradient d'une fonction de deux ou trois variables – en dérivant par rapport à une variable, les autres sont des constantes.

Extremums locaux d'une fonction de deux variables : les points stationnaires de f_x = 0, f_y = 0, chacun tranché par le déterminant de la matrice hessienne D = f_xx·f_yy − f_xy² (minimum, maximum, col). Extremums liés avec une contrainte (« extremums de xy, x + y = 1 ») par la méthode de Lagrange et le hessien bordé.

La dérivée directionnelle (le gradient par un vecteur unitaire), la différentielle totale avec une valeur approchée et le plan tangent à une surface. Une intégrale double se saisit par des bornes itérées ou comme domaine d'inéquations ; l'application découpe le domaine en parties normales, montre l'intégrale intérieure et l'intégrale extérieure et dessine le domaine ; le bouton 3D montre la surface de l'intégrande au-dessus. Les puces sous le résultat changent l'ordre d'intégration et passent en coordonnées polaires.

Analyse vectorielle : la divergence, le rotationnel (pour un champ plan un seul nombre ∂Q/∂x − ∂P/∂y), le laplacien et le potentiel d'un champ conservatif – l'application vérifie d'abord que le rotationnel est nul, puis trouve φ en intégrant les composantes l'une après l'autre et vérifie ∇φ = F. Un champ se saisit comme un vecteur (P; Q; R) ou (P; Q), aussi avec les vecteurs unitaires i, j, k ou nommé « F = … » sur une ligne à part. Pour un champ plan, le graphique montre les flèches du champ et les lignes de niveau du potentiel. Les puces sous le résultat passent de la divergence au rotationnel et au potentiel du même champ.

Intégrales curvilignes : de première espèce ∫_C f ds (longueur d'une courbe, masse d'un fil) et de seconde espèce ∫_C F·dr (travail d'une force, circulation $\oint$ le long d'une courbe fermée). La courbe est donnée par un paramétrage r(t) ou un modèle – segment, cercle, graphe y = f(x), ligne brisée ; les étapes montrent le vecteur tangent, la substitution dans le champ et l'intégrale en t. Pour un champ conservatif, l'application vérifie le résultat par le potentiel φ(B) − φ(A) (indépendance du chemin), pour une courbe plane fermée (cercle, ellipse, polygone convexe) par le théorème de Green – elle calcule aussi l'intégrale double sur la région intérieure. Les puces sous le résultat choisissent la méthode principale. Le formulaire « Intégrale curviligne » (section « Applications », domaine Analyse à plusieurs variables) propose des modèles de courbe ; le graphique montre la courbe et son orientation sur les flèches du champ et la région du théorème de Green, une courbe de l'espace en 3D, à faire tourner du doigt.

Intégrales triples : par bornes itérées, sur un solide d'inéquations (∭_V, aussi depuis une photo) ou avec le formulaire « Intégrale triple » (section « Applications », domaine Analyse à plusieurs variables) avec les modèles pavé, boule, cylindre, cône, solide entre deux graphes et inéquations. L'application décrit le solide comme un domaine normal – la variable la plus intérieure entre deux surfaces au-dessus de la projection – et calcule trois intégrales successives (théorème de Fubini). En coordonnées cylindriques et

sphériques, elle montre la substitution avec le jacobien (r, ρ² sin θ) et les bornes dans les nouvelles variables ; quand les coordonnées cartésiennes ne donnent pas de résultat exact, elle y passe d'elle-même, et pour une boule, un cylindre ou x² + y² dans l'énoncé une puce les propose. Le formulaire calcule aussi le volume, la masse avec une densité ρ, le centre de gravité et le moment d'inertie par rapport à un axe. Un graphique 3D qu'on fait tourner montre le solide.

Les lettres autres que x, y, z (un rayon r, une hauteur h, des arêtes a, b, c) sont des paramètres positifs : le résultat est une formule, par exemple V = 4/3 πr³ pour la boule ball(r) – à côté du rayon r, la coordonnée cylindrique s'écrit ϱ – ou V = abc pour un pavé. L'application vérifie la formule numériquement pour plusieurs valeurs des paramètres ; l'image 3D du solide est tracée pour la valeur 1.

Intégrales de surface : de première espèce ∬_S f dS (aire d'une surface, masse d'une coque) et de seconde espèce – le flux ∬_S F·n dS. La surface se donne par un modèle – un graphe z = g(x, y) au-dessus d'un domaine D, une sphère, une demi-sphère, un cylindre, un cône (toute la surface avec ses disques, ou seulement la surface latérale) – ou par un paramétrage r(u, v). Les étapes montrent les vecteurs tangents r_u, r_v, le vecteur normal r_u × r_v avec son orientation (sortante pour une surface fermée, vers le haut pour un graphe, sinon selon le paramétrage ; au choix outward, inward, up, down), l'élément de surface et l'intégrale double sur les paramètres ; une surface fermée est additionnée par parties. Le flux à travers une surface fermée est vérifié par le théorème de Gauss (intégrale triple de la divergence), le flux d'un rotationnel par le théorème de Stokes – l'intégrale curviligne le long du bord ; des puces sous le résultat changent la méthode principale. Le formulaire « Intégrale de surface » (section « Applications », domaine Analyse à plusieurs variables) propose des modèles de surface ; un graphe 3D orientable montre la surface avec ses normales, les flèches du champ et le bord.

Fils et coques : les formulaires de l'intégrale curviligne et de surface (le choix « Que calculer ») et la notation quantity=mass / centroid / inertia calculent la masse d'un fil ou d'une coque de densité f (vide = 1), son centre de gravité et son moment d'inertie par rapport à un axe (axis=x, y, z). Le planimètre lineint(area; C) calcule l'aire intérieure à une courbe plane fermée comme ½∮ x dy − y dx et la vérifie par le théorème de Green.

Comment le saisir

`dérivées partielles x^2 y + y^3`	Toutes les dérivées partielles premières (avec « secondes » les secondes).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Une dérivée partielle (aussi \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	Le gradient.
`extremums de x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Extremums locaux d'une fonction de deux variables.

`extremums de xy, x + y = 1`	Extremums liés – la fonction et, après une virgule, la contrainte.
`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Dérivée directionnelle : la fonction, le point, la direction (aussi en toutes lettres).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Différentielle totale ; le point et les accroissements h sont facultatifs (aussi en toutes lettres).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Plan tangent en un point, pour z = f(x, y) ou F(x, y, z) = 0 (aussi en toutes lettres).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Intégrale double par bornes itérées (aussi \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Intégrale double sur un domaine d'inéquations (aussi \iint_D ..., D: ...) ; on peut ajouter order=dxdy ou polar.
`div(x y; y z; z x)`	La divergence d'un champ (aussi ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, en toutes lettres « divergence »).
`∇×(y z; x z; x y)`	Le rotationnel (aussi rot, curl, \nabla \times) ; pour un champ (P; Q) un seul nombre.
`Δ(x^2 y + y^3)`	Le laplacien d'une fonction de deux ou trois variables (aussi laplace(...), ∇², \Delta).
`potentiel (2x + y; x + 2y)`	Le potentiel d'un champ conservatif (aussi potential(...)) ; le champ peut être nommé : « div F, F = (y; x; 0) ».
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Une intégrale curviligne – un champ (P; Q) ou une fonction f, puis la courbe : r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …) ; aussi cw (sens horaire), method=green / method=potential (aussi en mots « intégrale curviligne … le long de … »). Après la courbe aussi quantity=mass / centroid / inertia (avec axis=…) ; area à la place de la fonction calcule l'aire intérieure à une courbe fermée.

`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	La masse d'un fil de densité f, quantity=centroid son centre de gravité, quantity=inertia son moment d'inertie (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	Le planimètre – l'aire intérieure à une courbe plane fermée à partir de l'intégrale le long de son bord (théorème de Green).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	D'une photo $\oint_C$ ou $\int_C$ avec P dx + Q dy, F·dr ou f ds ; la courbe après une virgule ou sur la ligne suivante (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Une intégrale de première espèce – la courbe paramétrée avec l'intervalle du paramètre (aussi t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Une intégrale triple – la fonction, puis le solide par des inéquations ou un modèle ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h) ; coordonnées cart, cyl, sph, l'ordre order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (avec axis=x). En mots « intégrale triple de z sur V : … », « volume du solide … », « masse du solide … de densité … », « centre de gravité du solide … », « moment d'inertie du solide … par rapport à l'axe z ».
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Depuis une photo $\iiint$ (\iiint_V) avec dV ou dx dy dz ; le solide après une virgule (V : …) ou sous l'intégrale.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Par bornes itérées – trois intégrales à la suite, les différentielles à la fin ou juste après leur intégrale.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Une intégrale de surface – une fonction f, un champ (P; Q; R) ou curl(P; Q; R), puis la surface : graph(z = …; inégalités de D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d ; lateral (la surface latérale seule), closed (demi-sphère avec sa base), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. En mots « intégrale de surface de …

	sur … », « flux de … à travers … ». Avec une fonction f aussi quantity=mass / centroid / inertia (avec axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	D'une photo ∬_S ou ∯_S avec f dS, F·dS ou F·n dS ; la surface après une virgule ou à la ligne : S: x² + y² + z² = R² (avec z ≥ 0 une demi-sphère), x² + y² = R² avec des bornes de z (surface latérale d'un cylindre), z = g(x, y) avec des inégalités, r(u, v) avec les intervalles des paramètres.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	Le flux d'un rotationnel (∇ × F, rot F, curl F) – le champ nommé à part ; vérification par le théorème de Stokes.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	La masse, le centre de gravité ou le moment d'inertie d'une coque de densité surfacique f.

Exemples

Dérivées partielles secondes, la croisée aussi.

Énoncé: `secondes dérivées partielles x^2 y + y^3`

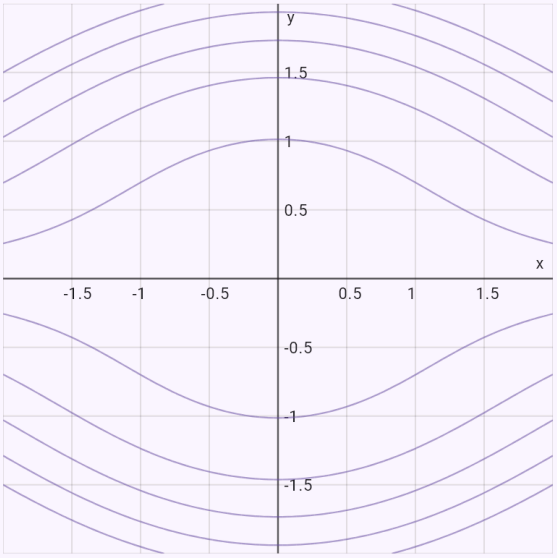
Résultat

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Étapes

- La dérivée partielle par rapport à x – les autres variables sont des constantes : $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- La dérivée partielle par rapport à y – les autres variables sont des constantes : $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- La dérivée partielle par rapport à xx – les autres variables sont des constantes : $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- La dérivée partielle par rapport à xy – les autres variables sont des constantes : $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- La dérivée partielle par rapport à yy – les autres variables sont des constantes : $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Graphique



Lignes de niveau de f.

Extremums locaux – un point col et un minimum.

Énoncé: `extremums de x^3 - 3xy + y^3`

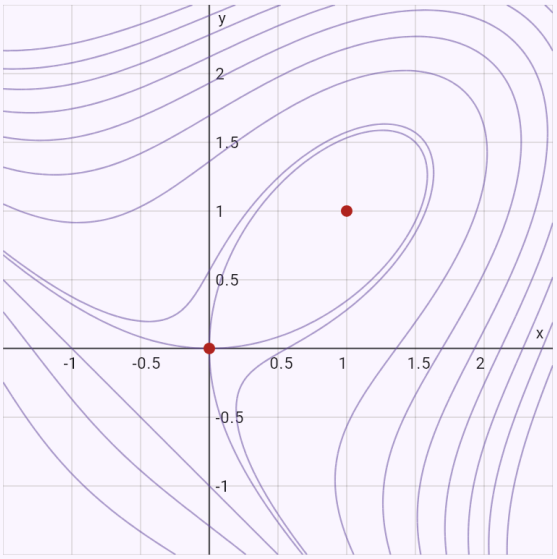
Résultat

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Étapes

- La dérivée partielle par rapport à x – les autres variables sont des constantes : $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- La dérivée partielle par rapport à y – les autres variables sont des constantes : $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Les points stationnaires $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ résolvent le système où les deux dérivées partielles sont nulles
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Les dérivées partielles secondes $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ et le déterminant de la matrice hessienne
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- En $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – un point col, pas d'extremum ($f(0;\ 0) = 0$).
- En $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ et $f_{xx} = 6 > 0$ – un minimum local $f(1;\ 1) = -1$

Graphique



Lignes de niveau de f.

Un extremum lié par la méthode de Lagrange.

Énoncé: `extremums de xy, x + y = 1`

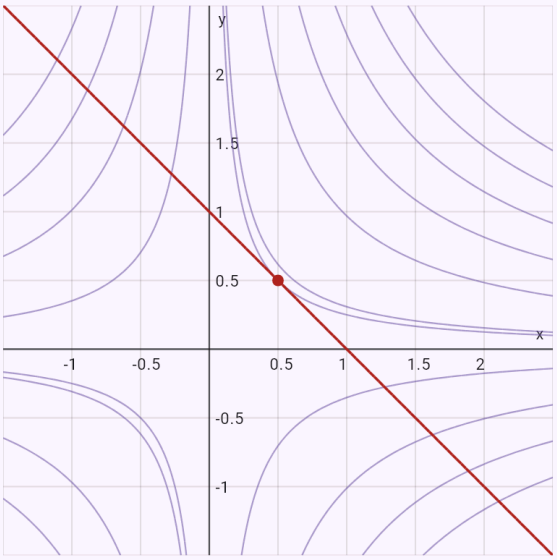
Résultat

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Étapes

- Le lagrangien avec le multiplicateur λ :
  $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Ses dérivées partielles sont nulles et la contrainte est vérifiée
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Candidats à un extremum lié (solutions du système) :
  $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- En $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ le hessien bordé est positif – un maximum local lié $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Graphique



Lignes de niveau de f.

La dérivée directionnelle et la croissance maximale.

Énoncé: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

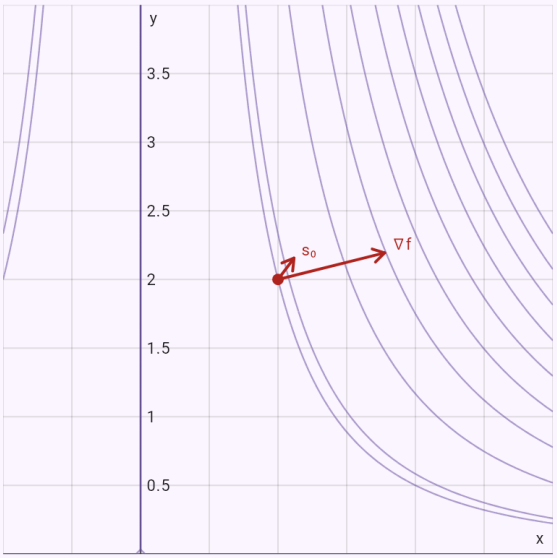
Résultat

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Étapes

- La dérivée partielle par rapport à x – les autres variables sont des constantes : $f_x = 2xy$
- La dérivée partielle par rapport à y – les autres variables sont des constantes : $f_y = x^2$
- On ramène la direction à un vecteur unitaire : $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Le gradient au point $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- La dérivée directionnelle est le produit scalaire du gradient et du vecteur unitaire $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- La croissance maximale suit le gradient, de norme $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Graphique



Lignes de niveau de f. La flèche ∇f indique la direction de plus forte croissance.

Le plan tangent d'un paraboloïde.

Énoncé: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

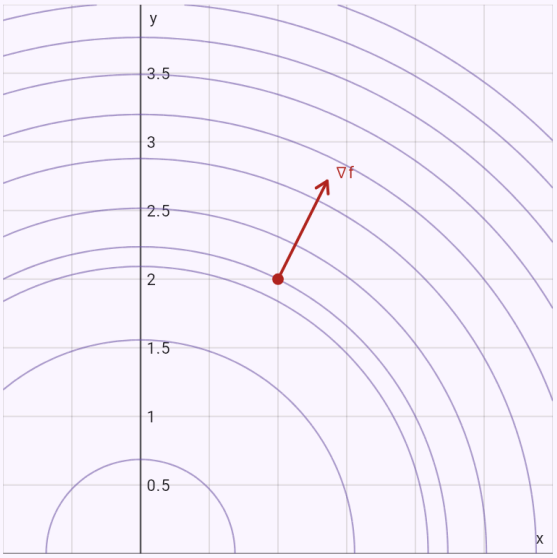
Résultat

$$z = 2x + 4y - 5$$

Étapes

- La dérivée partielle par rapport à x – les autres variables sont des constantes : $f_x = 2x$
- La dérivée partielle par rapport à y – les autres variables sont des constantes : $f_y = 2y$
- La troisième coordonnée du point de contact : $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- On remplace dans le plan tangent $z - z_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)$: $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Le vecteur normal du plan : $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Graphique



Lignes de niveau de f. La flèche ∇f indique la direction de plus forte croissance.

Une intégrale double sur un triangle.

Énoncé: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Résultat

$$\frac{1}{8}$$

Ordre d'intégration :

✓ dy dx | dx dy

Coordonnées :

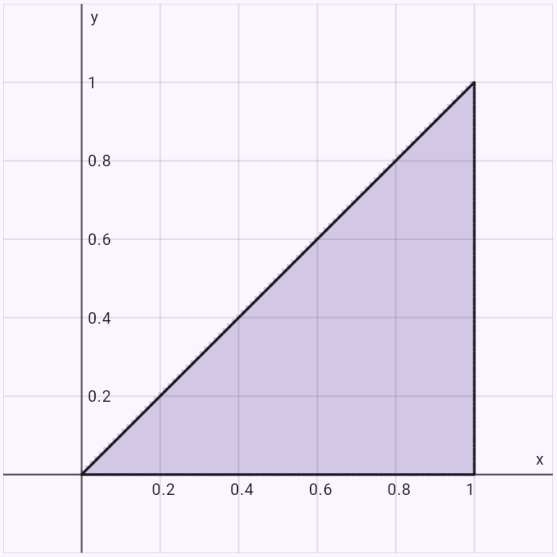
✓ Cartésiennes | Polaires

Étapes

- On décrit le domaine comme domaine normal : $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- D'après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée : $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- L'intégrale intérieure en y (l'autre variable est constante) : $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- L'intégrale extérieure en x : $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Graphique

✓ 2D | 3D



Le domaine d'intégration.

L’intégrale intérieure n’est pas élémentaire – l’application échange l’ordre d’elle-même.

Énoncé: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Résultat

$$\frac{e-1}{2}$$

Ordre d’intégration :

✓ dx dy | dy dx

Coordonnées :

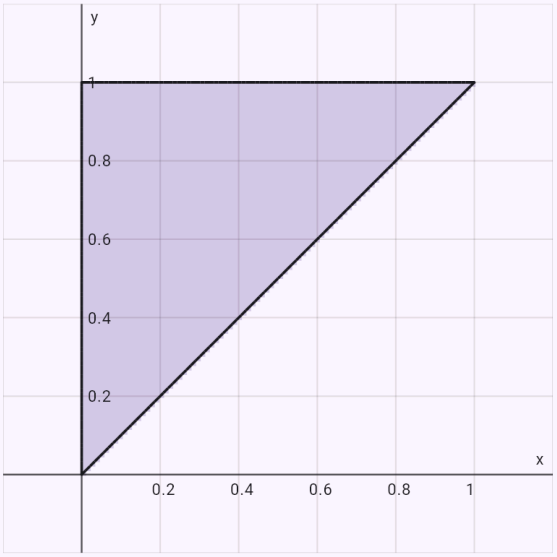
✓ Cartésiennes | Polaires

Étapes

- L’intégrale intérieure en y n’a pas de primitive élémentaire : on échange l’ordre d’intégration.
- On décrit le domaine comme domaine normal : $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- D’après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée : $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- L’intégrale intérieure en x (l’autre variable est constante) : $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- L’intégrale extérieure en y : $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Graphique

✓ 2D | 3D



Le domaine d’intégration.

Un quart de disque en coordonnées polaires.

Énoncé: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Résultat

$$\frac{\pi}{8}$$

Coordonnées :

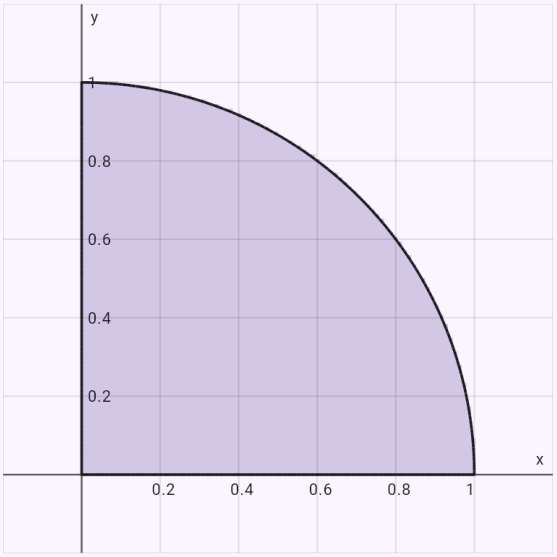
Cartésiennes | ✓ Polaires

Étapes

- Coordonnées polaires : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, r étant le jacobien du changement. L'intégrande : $f \cdot r = r^3$
- Le domaine en coordonnées polaires : $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- D'après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- L'intégrale intérieure en r (l'autre variable est constante) : $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- L'intégrale extérieure en φ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Graphique

✓ 2D | 3D



Le domaine d'intégration.

La divergence d’un champ de l’espace comme somme de trois dérivées partielles.

Énoncé: `div(x y; y z; z x)`

Résultat

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Pour ce champ, calculer :

✓ divergence | rotationnel | potentiel

Étapes

- Le champ de vecteurs et ses composantes : $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- La dérivée partielle par rapport à x – les autres variables sont des constantes : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = y$
- La dérivée partielle par rapport à y – les autres variables sont des constantes : $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = z$
- La dérivée partielle par rapport à z – les autres variables sont des constantes : $\dfrac{\partial R}{\partial z} = x$
- La divergence est la somme des dérivées partielles des composantes, chacune par rapport à « sa » variable $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

Le rotationnel d’un tourbillon plan – les flèches tournent autour de l’origine.

Énoncé: `rot(-y; x)`

Résultat

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

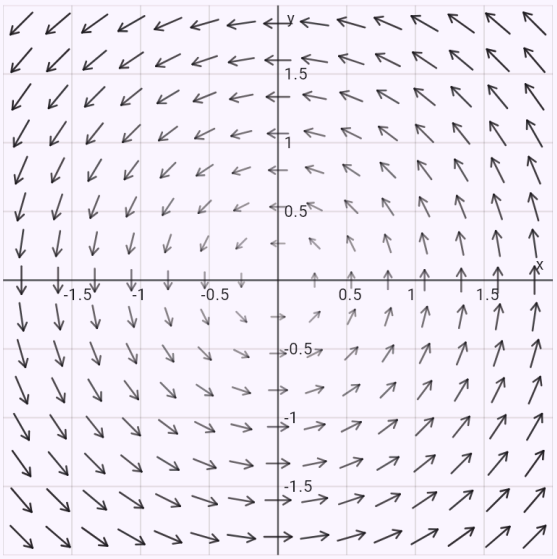
Pour ce champ, calculer :

divergence | ✓ rotationnel | potentiel

Étapes

- Le champ de vecteurs et ses composantes : $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Pour un champ plan, le rotationnel est un seul nombre – la composante z, ∂Q/∂x − ∂P/∂y $(\nabla \times \vec{F})_z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Graphique



Les flèches montrent la direction et l’intensité du champ (plus longues et plus foncées = plus fort).

Une fonction harmonique – le laplacien est nul.

Énoncé: `Δ(x^2 - y^2)`

Résultat

$$\Delta f = 0$$

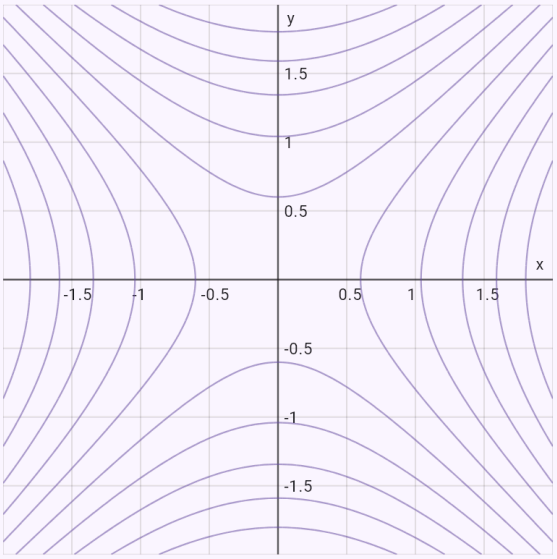
Pour cette fonction, calculer :

✓ laplacien Δf | gradient ∇f

Étapes

- Les dérivées partielles première et seconde par rapport à x : $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- Les dérivées partielles première et seconde par rapport à y : $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- Le laplacien est la somme des dérivées partielles secondes : $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – la fonction est harmonique.

Graphique



Lignes de niveau de f.

Le potentiel à la manière scolaire : P intégré par rapport à x, comparé avec Q, vérifié ; graphique avec

les équipotentielles.

Énoncé: `potential(2x y; x^2)`

Résultat

$$\varphi = x^2 y + C$$

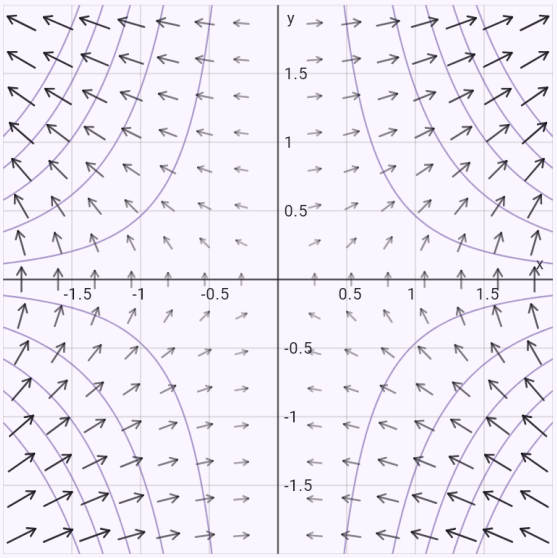
Pour ce champ, calculer :

divergence | rotationnel | ✓ potentiel

Étapes

- Le champ de vecteurs et ses composantes : $\vec{F} = (2xy;\ x^2),\quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Le rotationnel est nul (dans le plan ∂Q/∂x = ∂P/∂y), le champ est conservatif, chercher un potentiel a un sens : $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- On cherche φ tel que ∇φ = F. On intègre P par rapport à x ; la constante d'intégration peut dépendre des autres variables : $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- On dérive φ par rapport à y et on compare avec la composante Q – il reste la dérivée de la « constante » $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- On intègre la « constante » par rapport à y ; la nouvelle ne dépend que des variables restantes, à la fin c'est un nombre C : $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Vérification – le gradient du potentiel est le champ donné : $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Graphique



Les flèches montrent la direction et l'intensité du champ (plus longues et plus foncées = plus fort). Lignes de niveau du potentiel φ (équipotentielles) – le champ leur est partout perpendiculaire.

Le travail d'un champ conservatif – par le paramétrage, vérifié par le potentiel φ = x²y.

Énoncé: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Résultat

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Calculer :

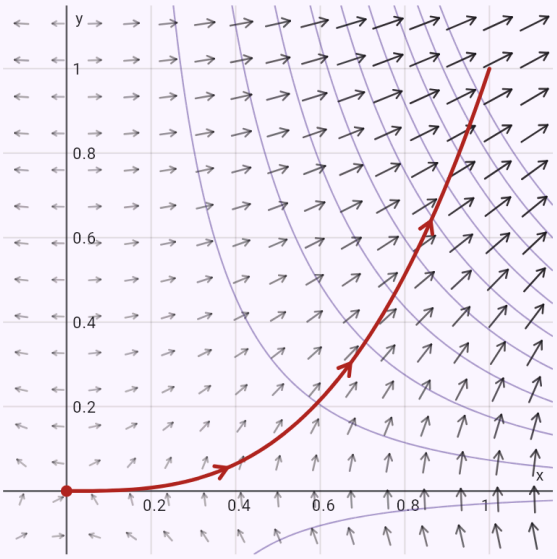
✓ par paramétrage | par le potentiel

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Intégrale curviligne de seconde espèce d'un champ de vecteurs le long de la courbe orientée C (par exemple le travail d'une force le long d'un chemin) :
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Paramétrage de la courbe : $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur tangent
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l'intervalle du paramètre : $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Vérification : le champ est conservatif, il a un potentiel φ et l'intégrale est indépendante du chemin – la différence φ(B) − φ(A) suffit
  $\varphi = x^2 y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial). Les flèches montrent la direction et l'intensité du champ (plus longues et plus foncées = plus fort). Lignes de niveau du potentiel φ (équipotentielles) – le champ leur est partout perpendiculaire.

Une circulation le long du cercle unité depuis une photo, vérifiée par le théorème de Green en

coordonnées polaires.

Énoncé: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Résultat

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculer :

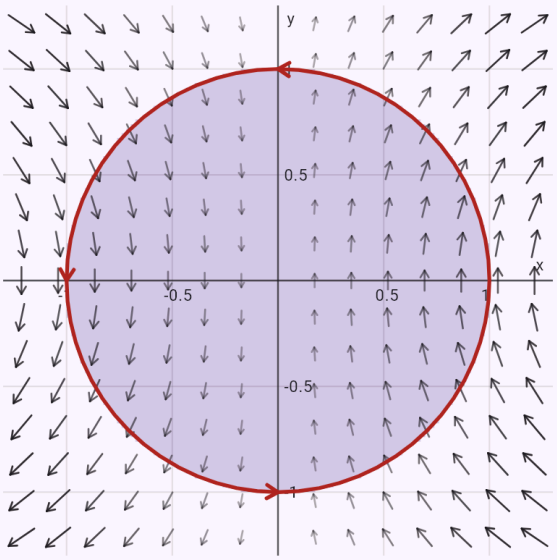
✓ par paramétrage | par le théorème de Green

Modifier dans le formulaire

Étapes

- La courbe est fermée – l'intégrale de seconde espèce le long d'elle est la circulation du champ :
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- Le cercle de centre S et de rayon r, parcouru une fois (paramétrage par l'angle t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur tangent
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + \cdots$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l'intervalle du paramètre : $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Vérification par le théorème de Green : la courbe est orientée positivement (sens trigonométrique), l'intégrale le long d'elle est égale à l'intégrale double sur la région D intérieure
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- La région D à l'intérieur de la courbe – l'intégrale double sur elle : $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Coordonnées polaires : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r,$ r étant le jacobien du changement. L'intégrande :
  $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- Le domaine en coordonnées polaires :
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- D'après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- L'intégrale intérieure en r (l'autre variable est constante)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$
- L'intégrale extérieure en φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Les deux membres du théorème de Green concordent :
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial). Les flèches montrent la direction et l'intensité du champ (plus longues et plus foncées = plus fort). En couleur, la région D à l'intérieur de la courbe, du théorème de Green.

La longueur d’une parabole – l’intégrale de première espèce de 1.

Énoncé: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Résultat

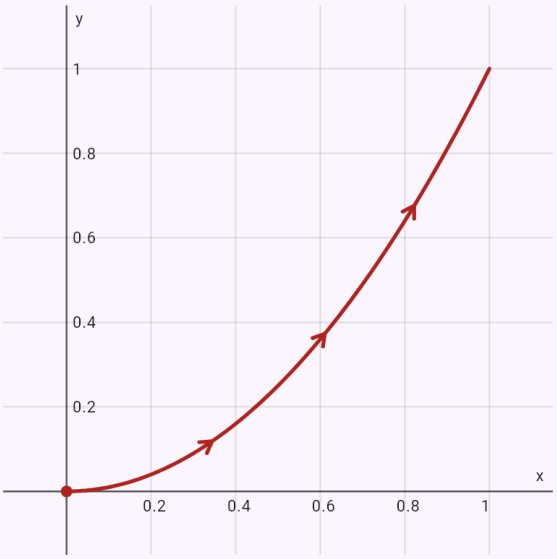
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Intégrale curviligne de première espèce de f le long de la courbe C – on additionne f fois la longueur ds de petits morceaux de la courbe : $\int_C ds$
- Le graphe d’une fonction – x lui-même est le paramètre (paramétrage r(x) = (x; f(x))) :
  $y = x^2$: $\quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}\,'(x) = (1;\ 2x)$
- Sa norme ; l’élément de longueur d’arc est ds = |r'(t)| dt :
  $|\vec{r}\,'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- On substitue le paramétrage dans f et on multiplie par la norme du vecteur tangent :
  $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}\,'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l’intervalle du paramètre
  $$\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$$
- L’intégrale de 1 ds est la longueur de la courbe (avec une densité f au lieu de 1, ce serait la masse d’un fil).

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial).

Une hélice dans l’espace – un graphique 3D orientable avec les flèches du champ.

Énoncé: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Résultat

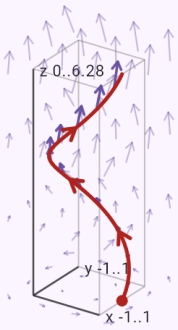
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Intégrale curviligne de seconde espèce d’un champ de vecteurs le long de la courbe orientée C (par exemple le travail d’une force le long d’un chemin) :
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Paramétrage de la courbe :
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur tangent
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l’intervalle du paramètre :
  $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial). Les flèches montrent le champ, plus marquées sur la courbe. Faites tourner en glissant le doigt.

Le centre de gravité d'un demi-cercle – la masse et deux moments statiques.

Énoncé: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Résultat

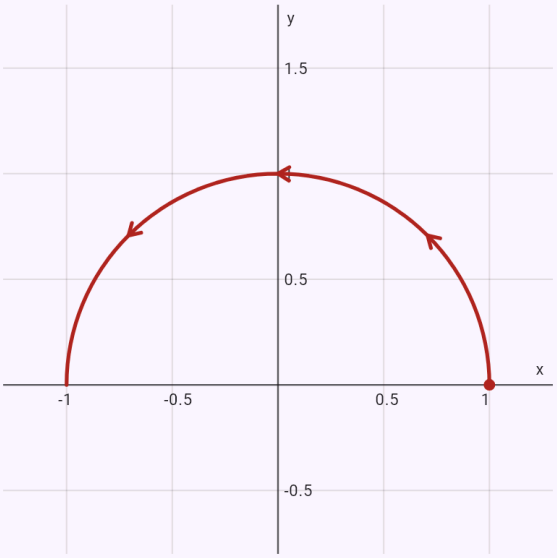
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Intégrale curviligne de première espèce de f le long de la courbe C – on additionne f fois la longueur ds de petits morceaux de la courbe : $\int_C ds$
- Le centre de gravité du fil : les moments statiques (intégrale d'une coordonnée fois la densité) divisés par la masse, de même pour y (et z)
  $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Paramétrage de la courbe :
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Sa norme ; l'élément de longueur d'arc est ds = |r'(t)| dt :
  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- On substitue le paramétrage dans f et on multiplie par la norme du vecteur tangent : $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l'intervalle du paramètre : $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- Le moment statique pour la coordonnée x – le même calcul avec l'intégrande $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Le moment statique pour la coordonnée y – le même calcul avec l'intégrande $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Les coordonnées du centre de gravité sont les moments divisés par la masse : $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial).

L’aire d’une ellipse au planimètre : ½∮ x dy − y dx = πab.

Énoncé: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Résultat

$$A = 6\pi$$

Calculer :

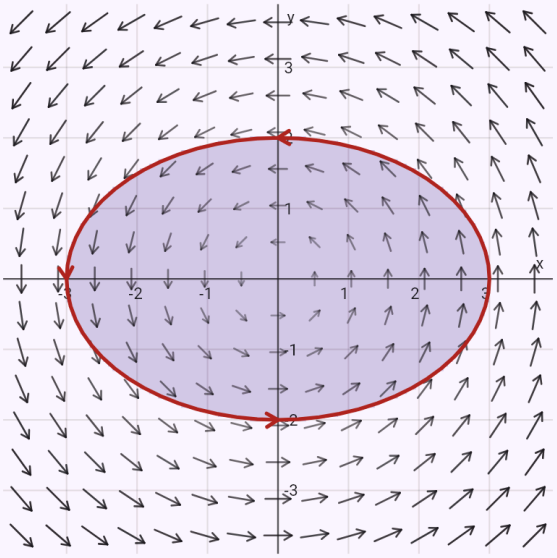
✓ par paramétrage | par le théorème de Green

Modifier dans le formulaire

Étapes

- La courbe est fermée – l’intégrale de seconde espèce le long d’elle est la circulation du champ :
  $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$$
- L’aire à l’intérieur d’une courbe fermée comme intégrale curviligne le long du bord (le planimètre) – d’après le théorème de Green avec Q_x − P_y = 1 :
  $$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$
- Paramétrage de la courbe :
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Le vecteur tangent – la dérivée du paramétrage :
  $\vec{r}\,'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur tangent
  $$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \frac{3}{2}$$
- Il reste une intégrale définie ordinaire sur l’intervalle du paramètre : $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Vérification par le théorème de Green : la courbe est orientée positivement (sens trigonométrique), l’intégrale le long d’elle est égale à l’intégrale double sur la région D intérieure
  $$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$
- La région D à l’intérieur de la courbe – l’intégrale double sur elle : D : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- On décrit le domaine comme domaine normal :
  $$-3 \le x \le 3, \ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- D’après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée
  $$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$
- L’intégrale intérieure en y (l’autre variable est constante)
  $$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- L’intégrale extérieure en x
  $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$
- Les deux membres du théorème de Green concordent :
  $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$$

Graphique



La courbe C avec des flèches dans le sens de son orientation (le point = le point initial). Les flèches montrent la direction et l’intensité du champ (plus longues et plus foncées = plus fort). En couleur, la région D à l’intérieur de la courbe, du théorème de Green.

La demi-boule supérieure en coordonnées sphériques – le jacobien ρ² sin θ, les bornes de ρ, θ, φ.

Énoncé: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Résultat

$$4\pi \approx 12{,}566$$

Calculer en coordonnées :

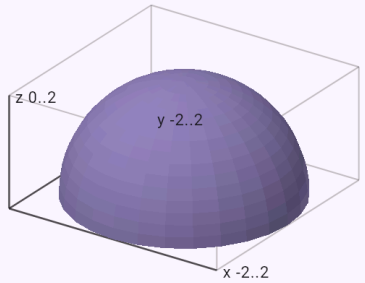
cartésiennes | cylindriques | ✓ sphériques

Modifier dans le formulaire

Étapes

- L'intégrale triple de la fonction sur le solide V :
$$\iiint_V z\,dV$$
- Coordonnées sphériques – J = ρ² sin θ est le jacobien de la transformation (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ) ; substitution et intégrande
$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$$
$$f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$$
- Le solide en coordonnées sphériques :
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$$
- D'après le théorème de Fubini, on l'écrit comme une intégrale itérée triple
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$
- L'intégrale la plus intérieure par rapport à ρ (les autres variables sont des constantes)
$$\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$$
- L'intégrale du milieu par rapport à θ
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$$
- L'intégrale extérieure par rapport à φ :
$$\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Graphique



Le solide V sur lequel on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Un tétraèdre par bornes itérées – trois intégrales successives.

Énoncé: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Résultat

$$\frac{1}{24}$$

Calculer en coordonnées :

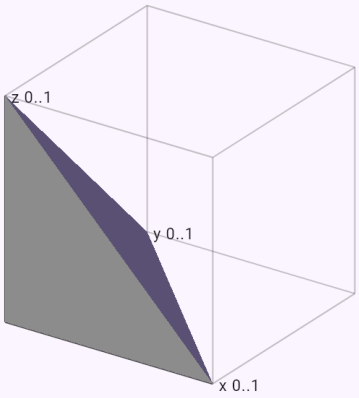
✓ cartésiennes | cylindriques | sphériques

Modifier dans le formulaire

Étapes

- L'intégrale triple de la fonction sur le solide V :
$$\iiint_V x \, dV$$
- On décrit le solide comme un domaine normal – z est compris entre deux surfaces au-dessus de la projection du solide :
$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le -x - y + 1$
- D'après le théorème de Fubini, on l'écrit comme une intégrale itérée triple : $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- L'intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes) :
$$\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x - y + 1)$$
- L'intégrale du milieu par rapport à y
$$\int_0^{1-x} (x(-x - y + 1)) \, dy = \left[-\frac{x(x + y - 1)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$
- L'intégrale extérieure par rapport à x
$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Graphique



Le solide V sur lequel on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le volume d’un cône en coordonnées cylindriques.

Énoncé: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Résultat

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Calculer en coordonnées :

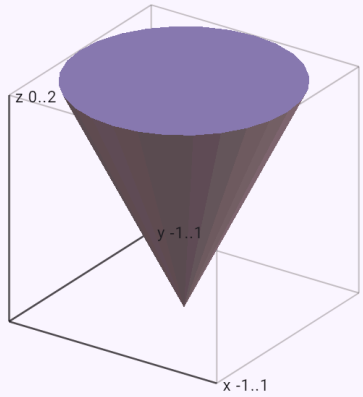
cartésiennes | ✓ cylindriques

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le volume du solide est l’intégrale triple de un :
  $V = \iiint_V dV$
- Coordonnées cylindriques – J = r est le jacobien de la transformation (dV = r dr dφ dz) ; substitution et intégrande
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- Le solide en coordonnées cylindriques :
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- D’après le théorème de Fubini, on l’écrit comme une intégrale itérée triple : $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 r\,dz\,dr\,d\varphi$
- L’intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes) :
  $\int_{2r}^2 r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- L’intégrale du milieu par rapport à r
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- L’intégrale extérieure par rapport à φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Graphique



Le solide V sur lequel on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le centre de gravité d'une demi-boule – la masse et trois moments statiques.

Énoncé: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Résultat

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Le solide ou la fonction contient x² + y² + z² – les coordonnées sphériques sont souvent plus simples :

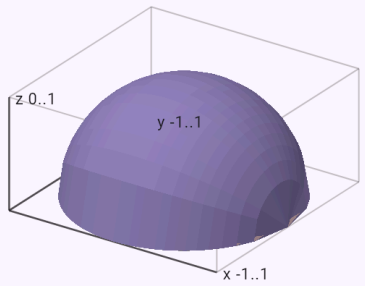
✓ cartésiennes | cylindriques | sphériques

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le centre de gravité du solide : chaque coordonnée est un moment statique (l'intégrale de la coordonnée fois la densité) divisé par la masse m, de même pour y et z :
$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$$
- On décrit le solide comme un domaine normal – z est compris entre deux surfaces au-dessus de la projection du solide
$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-$$
- D'après le théorème de Fubini, on l'écrit comme une intégrale itérée triple
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- L'intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes)
$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- L'intégrale du milieu par rapport à y
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right)dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\frac{}{\sqrt{}}\right.}{2}\right.$$
- L'intégrale extérieure par rapport à x
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- Le moment statique pour la coordonnée x – les mêmes étapes avec l'intégrande $x \cdot \rho$
$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Le moment statique pour la coordonnée y – les mêmes étapes avec l'intégrande $y \cdot \rho$
$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- Le moment statique pour la coordonnée z – les mêmes étapes avec l'intégrande $z \cdot \rho$
$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- Les coordonnées du centre de gravité sont les moments divisés par la masse
$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Graphique



Le solide V sur lequel on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le moment d’inertie d’un cylindre par rapport à son axe.

Énoncé: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Résultat

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Calculer en coordonnées :

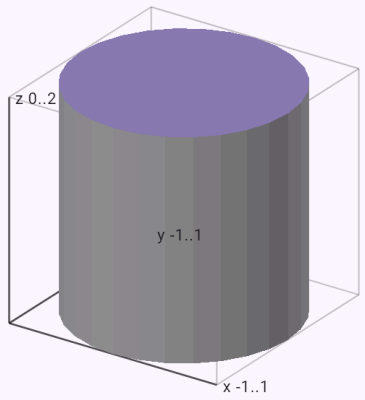
cartésiennes | ✓ cylindriques

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le moment d’inertie par rapport à l’axe z – la densité fois le carré de la distance d à l’axe :
  $$I_z = \iiint_V d^2 \, dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$
- Coordonnées cylindriques – J = r est le jacobien de la transformation (dV = r dr dφ dz) ; substitution et intégrande
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- Le solide en coordonnées cylindriques :
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- D’après le théorème de Fubini, on l’écrit comme une intégrale itérée triple : $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 r^3 \, dz \, dr \, d\varphi$
- L’intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes) :
  $$\int_0^2 r^3 \, dz = \left[z r^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$$
- L’intégrale du milieu par rapport à r :
  $$\int_0^1 2r^3 \, dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$$
- L’intégrale extérieure par rapport à φ
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Graphique



Le solide V sur lequel on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le flux sortant d'une sphère – paramétrage par les angles θ, φ et vérification par le théorème de Gauss.

Énoncé: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Résultat

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Calculer :

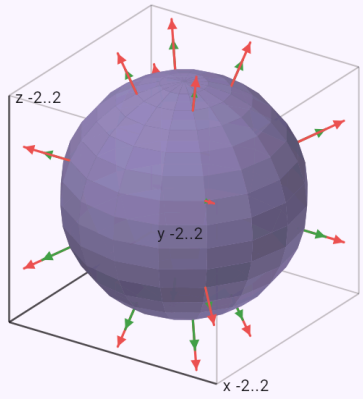
✓ par paramétrage | par le théorème de Gauss

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le flux du champ de vecteurs à travers la surface S – une intégrale de surface de seconde espèce :
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Paramétrage de la sphère par les angles θ (depuis l'axe des z positifs) et φ (autour de l'axe z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Les dérivées partielles par rapport aux paramètres – les vecteurs tangents de la surface
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Le vecteur normal (produit vectoriel des vecteurs tangents) orienté vers l'extérieur du solide
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot si\right.$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur normal (F · n dS = F · N du dv) : $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- L'intégrale double sur le rectangle des paramètres
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$$
- Vérification par le théorème de Gauss : le flux sortant de la surface fermée est l'intégrale triple de la divergence sur le solide intérieur
- L'intégrale triple de la fonction sur le solide V :
  $$\iiint_V 3\,dV$$
- On décrit le solide comme un domaine normal – z est compris entre deux surfaces au-dessus de la projection du solide
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- D'après le théorème de Fubini, on l'écrit comme une intégrale itérée triple
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$$
- L'intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes)
  $\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$
- L'intégrale du milieu par rapport à y
  $\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right)dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$
- L'intégrale extérieure par rapport à x
  $$\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- Le théorème de Gauss donne la même valeur :
  $$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Graphique



La surface S avec ses normales (en vert) et les flèches du champ (en rouge). Faites tourner en glissant le doigt.

L’aire d’un paraboloïde – l’élément de surface du graphe, une intégrale double en coordonnées polaires.

Énoncé: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Résultat

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Modifier dans le formulaire

Étapes

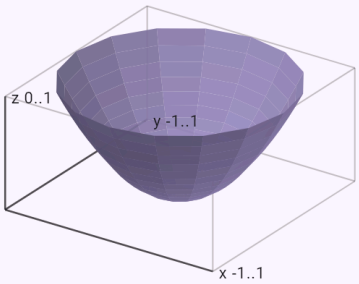
- L’aire de la surface S est l’intégrale de surface de un :
  $\iint_S dS$
- La surface est le graphe de z = g(x, y) au-dessus du domaine D du plan xy :
  $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \le 1$
- Les dérivées partielles de g : $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- L’élément de surface du graphe :
  $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- On substitue le paramétrage dans f et on multiplie par l’élément de surface :
  $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- L’intégrale de surface sur un graphe est une intégrale double sur sa projection D :
  $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Coordonnées polaires : $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, r étant le jacobien du changement. L’intégrande :
  $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- Le domaine en coordonnées polaires :
  $0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1$
- D’après le théorème de Fubini, on écrit une intégrale itérée : $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2+1}\right) dr \right) d\varphi$
- L’intégrale intérieure en r (l’autre variable est constante)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2+1}\right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2+1\right)^3}}{12}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1+5\sqrt{}}{12}$$

- L’intégrale extérieure en φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1+5\sqrt{5}}{12}\right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{(-1+}{}$$

Graphique



La surface S sur laquelle on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le flux à travers un cylindre fermé par le théorème de Gauss, vérifié partie par partie – surface latérale

et deux disques.

Énoncé: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Résultat

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$$

Calculer :

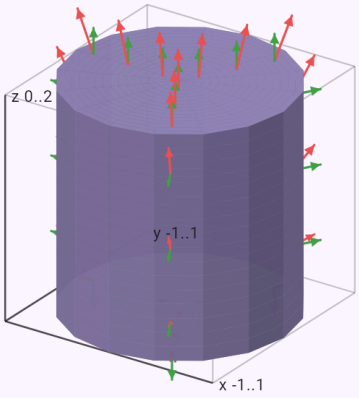
par paramétrage | ✓ par le théorème de Gauss

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le flux du champ de vecteurs à travers la surface S – une intégrale de surface de seconde espèce : $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- D'après le théorème de Gauss (flux-divergence), le flux sortant d'une surface fermée est égal à l'intégrale triple de la divergence sur le solide V intérieur
- L'intégrale triple de la fonction sur le solide V : $\iiint_V 3\, dV$
- On décrit le solide comme un domaine normal – z est compris entre deux surfaces au-dessus de la projection du solide : $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- D'après le théorème de Fubini, on l'écrit comme une intégrale itérée triple : $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} 3\, dz\, dy\, dx$
- L'intégrale la plus intérieure par rapport à z (les autres variables sont des constantes) : $\int_0^2 3\, dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- L'intégrale du milieu par rapport à y $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$
- L'intégrale extérieure par rapport à x $\int_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$
- La vérification par le paramétrage de la surface donne la même valeur : $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$

Graphique



La surface S avec ses normales (en vert) et les flèches du champ (en rouge). Faites tourner en glissant le doigt.

Le flux d'un rotationnel à travers une demi-sphère – vérifié par le théorème de Stokes le long de

l'équateur.

Énoncé: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Résultat

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Calculer :

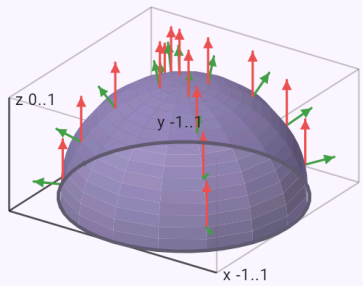
✓ par paramétrage | par le théorème de Stokes

Modifier dans le formulaire

Étapes

- Le flux du rotationnel à travers S – une intégrale de surface de seconde espèce, calculable aussi par le théorème de Stokes
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Le rotationnel du champ
  $$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Paramétrage de la demi-sphère supérieure – θ seulement jusqu'à π/2
  $$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Les dérivées partielles par rapport aux paramètres – les vecteurs tangents de la surface
  $$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Le vecteur normal (produit vectoriel des vecteurs tangents) orienté vers l'extérieur du solide
  $$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- On substitue le paramétrage dans le champ et on fait le produit scalaire avec le vecteur normal (F · n dS = F · N du dv) : $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$
- L'intégrale double sur le rectangle des paramètres
  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Vérification par le théorème de Stokes : le flux du rotationnel est égal à la circulation du champ le long du bord (règle de la main droite)
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- Les côtés du rectangle des paramètres qui s'envoient sur un point ou sont parcourus deux fois en sens contraires (une couture) s'annulent – il reste le vrai bord de la surface.
- Une partie du bord
  $$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- L'intégrale curviligne le long d'elle :
  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$
- Le théorème de Stokes donne la même valeur :
  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Graphique



La surface S avec ses normales (en vert) et les flèches du champ (en rouge). Le bord avec une flèche de son sens. Faites tourner en glissant le doigt.

Une intégrale de surface de première espèce sur une demi-sphère donnée par son équation.

Énoncé: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Résultat

$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Modifier dans le formulaire

Étapes

- L'intégrale de surface de première espèce de f sur la surface S : $\iint_S z \, dS$
- Paramétrage de la demi-sphère supérieure – θ seulement jusqu'à π/2

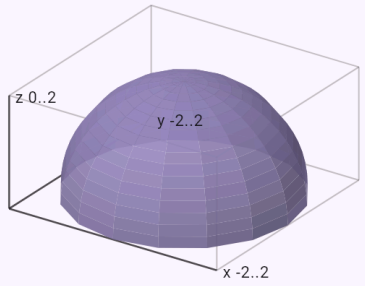
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Les dérivées partielles par rapport aux paramètres – les vecteurs tangents de la surface

  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Le produit vectoriel des vecteurs tangents est un vecteur normal, sa norme donne l'élément de surface dS = |r_u × r_v| du dv

  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- On substitue le paramétrage dans f et on multiplie par l'élément de surface : $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- L'intégrale double sur le rectangle des paramètres

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$$

Graphique



La surface S sur laquelle on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Le moment d’inertie d’une coque sphérique par rapport à l’axe z.

Énoncé: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Résultat

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

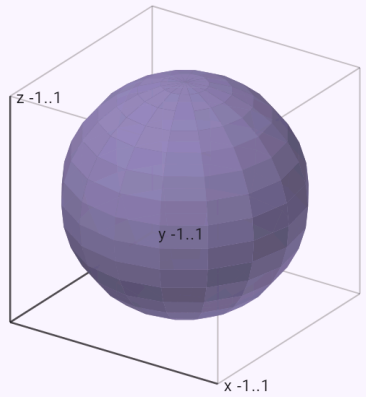
Modifier dans le formulaire

Étapes

- L’intégrale de surface de première espèce de f sur la surface S : $\oiint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- Le moment d’inertie de la coque par rapport à l’axe z – la densité fois le carré de la distance d à l’axe : $I_z = \oiint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Paramétrage de la sphère par les angles θ (depuis l’axe des z positifs) et φ (autour de l’axe z) $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Les dérivées partielles par rapport aux paramètres – les vecteurs tangents de la surface $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Le produit vectoriel des vecteurs tangents est un vecteur normal, sa norme donne l’élément de surface dS = |r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- On substitue le paramétrage dans f et on multiplie par l’élément de surface : $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- L’intégrale double sur le rectangle des paramètres

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Graphique



La surface S sur laquelle on intègre. Faites tourner en glissant le doigt.

Carte des théorèmes intégraux

Tous les théorèmes intégraux disent la même chose : l’intégrale d’une dérivée sur un domaine est égale à une intégrale sur son bord. Le bord d’un segment est deux points, celui d’une surface une courbe, celui d’un solide une surface fermée ; le théorème de Stokes généralisé ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω dit tout à la fois. L’application utilise les théorèmes comme second calcul et comme vérification (les puces sous le résultat) ; le glossaire montre la même carte sous « Théorèmes intégraux ».

Comment le saisir

`∫ f’(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Formule de Newton–Leibniz – dedans : la dérivée sur [a, b], sur le bord : les valeurs aux extrémités.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Théorème du gradient (potentiel, indépendance du chemin) – dedans : le gradient le long d’une courbe,

	sur le bord : le potentiel aux extrémités.
`∫∫_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Théorème de Green – dedans : ∂Q/∂x − ∂P/∂y sur un domaine plan, sur le bord : la circulation le long de la courbe fermée.
`∫∫_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Théorème de Stokes – dedans : le flux du rotationnel à travers une surface, sur le bord : la circulation le long de son contour.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Théorème de Gauss – dedans : la divergence sur un solide, sur le bord : le flux sortant de la surface fermée.

Applications physiques des théorèmes intégraux

La section « Applications » (domaines Physique et Analyse à plusieurs variables, l'électricité aussi en Électrotechnique, l'écoulement et la chaleur en Technique) propose des modèles avec unités : le théorème de Gauss (sphère, droite, plan), le théorème d'Ampère et la loi de Biot et Savart (fil, solénoïde, tore, spire), l'induction électromagnétique (flux magnétique, champ variable, alternateur), le condensateur (plan, sphérique, cylindrique), l'énergie d'un champ, le travail dans un champ de forces (gravitation, ressort, force de Coulomb), l'écoulement d'un fluide (débit, profil parabolique, équation de continuité, circulation et rotationnel), la conduction thermique (paroi plane et cylindrique) et le champ de gravitation par le théorème de Gauss.

Les étapes commencent par la loi intégrale, justifient ensuite la symétrie (sur la surface ou la courbe choisie, le champ est constant et dirigé selon la normale ou la tangente), montrent l'intégrale calculée, la charge, le courant ou la masse intérieure et la formule où l'on substitue. Les lois électromagnétiques sont suivies de leur forme locale – le terme du glossaire « Équations de Maxwell » présente les deux formes côte à côte. Le graphique montre le champ en fonction de la distance (E(r), B(r), g(r)), un profil de vitesses, la température dans une paroi ou la tension d'un alternateur.

Exemples

Le champ à l'intérieur d'une boule uniformément chargée – la charge intérieure Q r³/R³, le champ croît

linéairement.

Énoncé: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

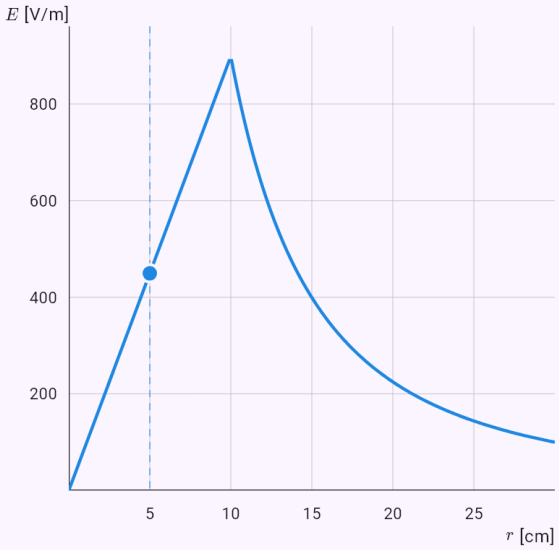
Résultat

$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Étapes

- On cherche E ; données :
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- On convertit les unités
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Une charge Q répartie symétriquement autour du centre – à la surface d'une sphère (sphère conductrice, coquille) ou uniformément dans tout son volume. La surface de Gauss est une sphère concentrique de rayon r ; à l'extérieur, la charge agit comme une charge ponctuelle. Équation du modèle : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Symétrie : le champ est radial et a la même norme sur chaque sphère concentrique. On prend comme surface de Gauss une sphère de rayon r – le champ y est parallèle à la normale et constant.
- L'intégrale calculée : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- La charge intérieure
  $$Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$$
- On exprime la grandeur cherchée
  $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
- On remplace
  $$E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$
- La même loi sous forme locale (équations de Maxwell) :
  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le champ magnétique d’un fil rectiligne par le théorème d’Ampère le long d’un cercle autour de l’axe.

Énoncé: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

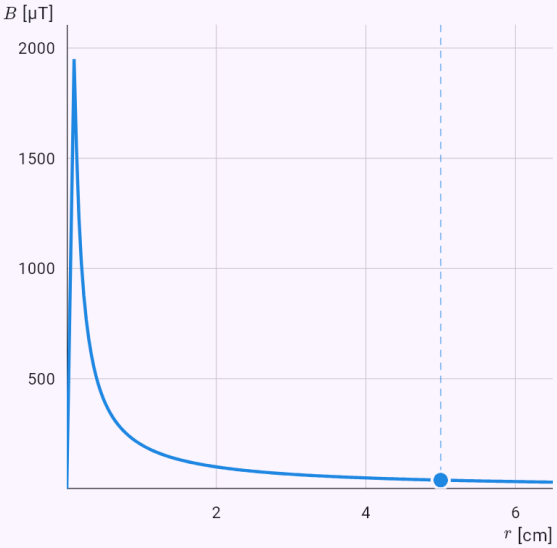
Résultat

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Étapes

- On cherche B ; données :
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- On convertit les unités :
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un long fil rectiligne de rayon R parcouru par un courant I réparti uniformément sur sa section. La courbe est un cercle autour de l’axe du fil ; dans le fil, elle n’entoure qu’une partie du courant. Équation du modèle :
  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Symétrie : les lignes de champ sont des cercles autour de l’axe du fil ; B leur est tangent et constant sur un cercle de rayon r.
- L’intégrale calculée : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- Le courant enlacé : $I_{\mathrm{in}} = I$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- On remplace
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- La même loi sous forme locale (équations de Maxwell) :
  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- On convertit les unités : $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le champ sur l’axe d’une spire par la loi de Biot et Savart.

Énoncé: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

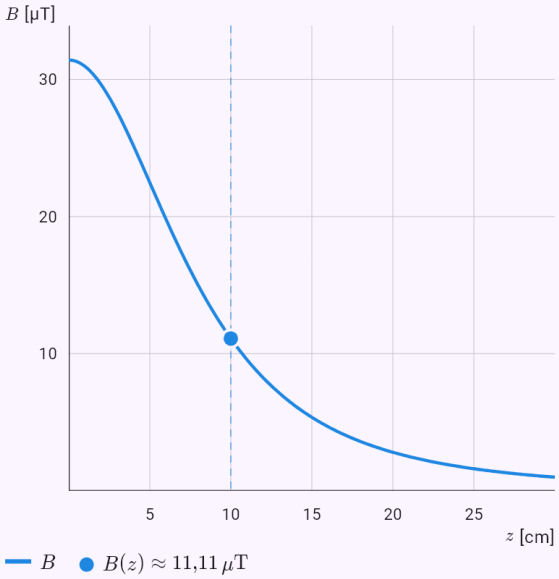
Résultat

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Étapes

- On cherche B ; données :
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- On convertit les unités :
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I. Le champ sur son axe à la distance z du centre découle de la loi de Biot et Savart – les composantes perpendiculaires s’annulent, les axiales s’additionnent.
  Équation du modèle : $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Chaque élément dl de la spire est à la même distance d’un point de l’axe, ρ = √(R² + z²), et perpendiculaire à la droite qui les joint. Les composantes perpendiculaires à l’axe s’annulent sur le tour ; seules les axiales, dB · R/ρ, s’additionnent.
- L’intégrale calculée
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- On exprime la grandeur cherchée : $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- On remplace
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- Au centre de la spire (z = 0) :
  $B(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- On convertit les unités : $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

L’amplitude de la fém d’un alternateur ε = NBAω et son allure sinusoïdale dans le graphique.

Énoncé: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

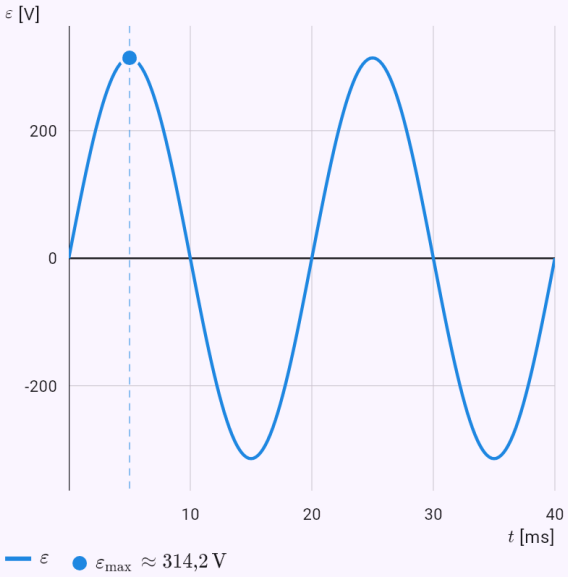
Résultat

$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\ \mathrm{V}$

Étapes

- On cherche $\varepsilon_{\max}$; données
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\ \mathrm{T}, \quad A = 500\ \mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\ \mathrm{r}\varepsilon$
- On convertit les unités : $A = 500\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}05\ \mathrm{m}^2$
- Une boucle de N spires tourne à la vitesse angulaire ω dans un champ uniforme B – le principe de l'alternateur. La fém est sinusoïdale d'amplitude NBAω. Équation du modèle : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- Le flux magnétique à travers une spire : $\Phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- L'intégrale calculée : $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega \sin\omega t$
- On exprime la grandeur cherchée : $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- On remplace : $\varepsilon_{\max} = 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\ \mathrm{V}$
- La fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\ \mathrm{Hz}$
- La même loi sous forme locale (équations de Maxwell) : $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

La capacité d'un mètre de câble coaxial – le champ par le théorème de Gauss, la tension comme intégrale du champ.

Énoncé: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

Résultat

$C \approx 102{,}1\ \mathrm{pF}$

Étapes

- On cherche C ; données
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\ \mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\ \mathrm{mm}, \quad L = 1\ \mathrm{m}$
- On convertit les unités
  $R_1 = 1\ \mathrm{mm} = 0{,}001\ \mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\ \mathrm{mm} = 0{,}0035\ \mathrm{m}$
- Deux armatures cylindriques coaxiales de rayons $R_1 < R_2$ et de longueur L – un câble coaxial, par exemple. Équation du modèle
  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$
- La surface de Gauss est un cylindre coaxial de rayon r et de longueur L entre les armatures ; il entoure la charge Q de l'armature intérieure et aucun champ ne traverse ses bases.
- Le champ entre les armatures par le théorème de Gauss

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$

- La tension comme intégrale curviligne du champ
  $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\, dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L} \ln\frac{R_2}{R_1}$
- La capacité
  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}3 \cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$
- On convertit les unités : $C \approx 1{,}021 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F} = 102{,}1\ \mathrm{pF}$

L’énergie d’un champ magnétique de 1 T dans un litre de volume.

Énoncé: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Résultat

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Étapes

- On cherche W ; données : $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\mathrm{l}$
- On convertit les unités : $V = 1\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- La densité d’énergie d’un champ magnétique dans le vide, w = B²/(2μ₀) – le champ dans une bobine, par exemple. Équation du modèle :
  $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- On remplace
  $w = \frac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m}^3$
- Dans un champ uniforme, la densité d’énergie est partout la même ; l’intégrale de volume est la densité fois le volume.
- On exprime la grandeur cherchée :
  $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- On remplace : $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- C’est ainsi qu’une bobine parcourue par un courant stocke son énergie : $W = \frac{1}{2}LI^2$

Le travail de la gravitation quand on soulève 1 kg de la surface de la Terre à une hauteur d’un rayon.

Énoncé: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km];`

`mode=gravity)`

Résultat

$$W \approx -31{,}28\,\text{MJ}$$

Étapes

- On cherche W ; données
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad m = 1\,\text{kg}, \quad r_1 = 6371\,\text{km}, \quad r_2$
- On convertit les unités
  $r_1 = 6371\,\text{km} = 6\,371\,000\,\text{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\text{km} = 1{,}27$
- La force est conservative (elle dérive d'un potentiel) : le travail est indépendant du chemin, il ne dépend que du début et de la fin. On le calcule donc le long du chemin le plus simple – la droite qui les joint.
- La gravitation d'un corps de masse M agit sur un corps m déplacé de la distance r_1 à r_2 du centre. Un travail négatif du champ signifie qu'il a fallu soulever le corps. Équation du modèle :
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- L'intégrale calculée
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- On remplace
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- L'énergie potentielle
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\text{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Le travail d'une force conservative est égal à la perte d'énergie potentielle : $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J}$
- On convertit les unités :
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J} = -31{,}28\,\text{MJ}$

Le débit d'un écoulement laminaire – l'intégrale du profil parabolique en coordonnées polaires.

Énoncé: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

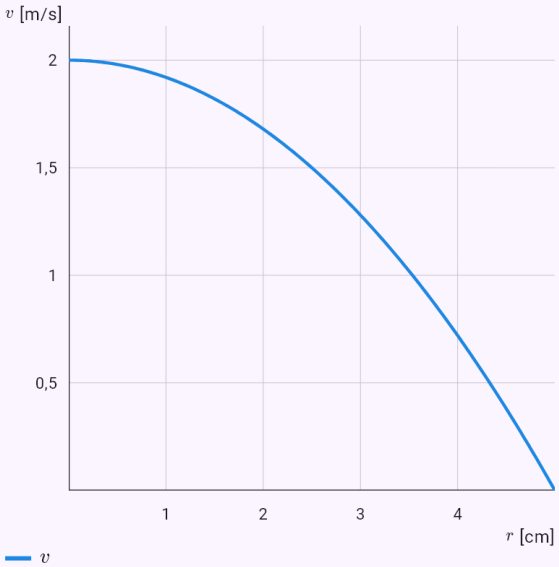
Résultat

$$Q \approx 7{,}854\,\text{l/s}$$

Étapes

- On cherche Q ; données : $v_{\max} = 2\,\text{m/s}, \quad R = 5\,\text{cm}$
- On convertit les unités : $R = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Écoulement laminaire (de Poiseuille) : le fluide est au repos à la paroi et le plus rapide sur l'axe ; le profil des vitesses est la parabole v = v_max(1 − r²/R²). Équation du modèle
  $Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
- La vitesse ne dépend que de la distance r à l'axe, on intègre donc la section en coordonnées polaires (dS = r dr dφ).
- L'intégrale calculée
  $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$
- On remplace
  $Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s}$
- La vitesse moyenne sur la section : $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\text{m/s}$
- On convertit les unités : $Q \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s} = 7{,}854\,\text{l/s}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Les pertes thermiques d’un tuyau isolé – la température décroît logarithmiquement dans la paroi.

Énoncé: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC]; T2=20[degC]; mode=cylinder)`

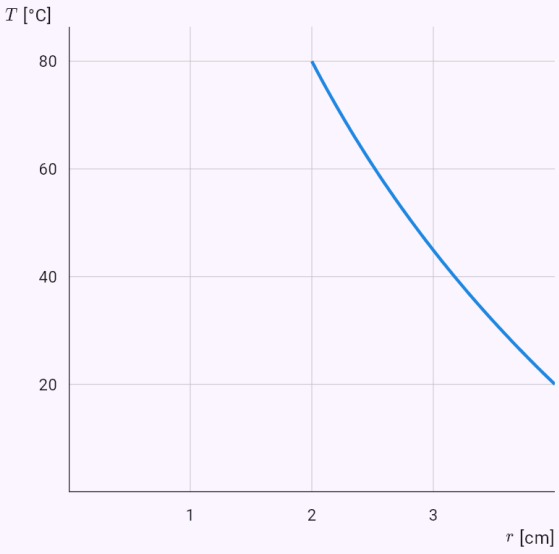
Résultat

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Étapes

- On cherche P ; données
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- On convertit les unités :
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Une paroi cylindrique – l’isolation d’un tuyau de rayon intérieur r_1, extérieur r_2 et de longueur L. La chaleur traverse des cylindres d’aire croissante, la température décroît donc logarithmiquement. Équation du modèle :
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Régime permanent sans sources de chaleur – la même puissance traverse chaque couche : $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- L’intégrale calculée
  $P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- On exprime la grandeur cherchée
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- On remplace
  $P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

L’accélération de la pesanteur à mi-chemin du centre de la Terre.

Énoncé: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

Résultat

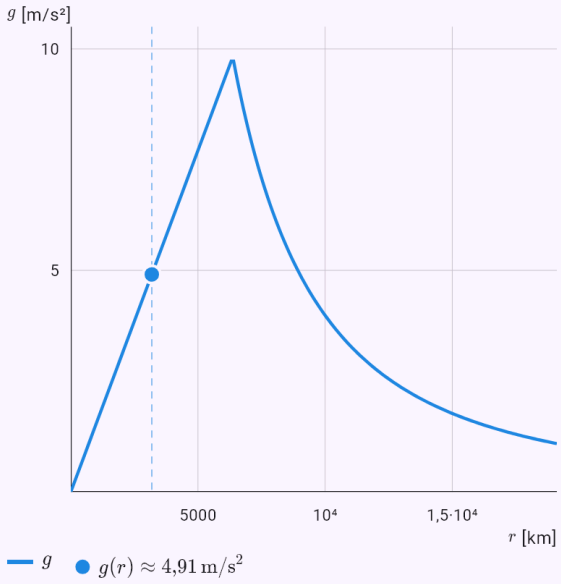
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

Étapes

- On cherche g ; données
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- On convertit les unités
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Une boule homogène (une planète de densité constante). À l'intérieur, l'accélération de la pesanteur croît linéairement avec la distance au centre. Équation du modèle : $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{in}}$
- Symétrie : le champ est radial et a la même norme sur chaque sphère concentrique. On prend comme surface de Gauss une sphère de rayon r – le champ y est parallèle à la normale et constant.
- L'intégrale calculée : $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- La masse intérieure
  $M_{\text{in}} = M\dfrac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \dfrac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- On exprime la grandeur cherchée :
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\text{in}} \Rightarrow g = \dfrac{G M_{\text{in}}}{r^2}$
- On remplace
  $g = \dfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- La même loi sous forme locale (par le théorème de Gauss) : $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Limitations connues

- Extremums uniquement pour les fonctions de deux variables, liés avec une seule contrainte. Intégrale double uniquement sur un domaine borné dont le bord est au plus quadratique en une variable ; la surface z = f(x, y) n'est dessinée en 3D pour l'instant que pour l'intégrale double. Champs de vecteurs uniquement en x, y (z), les autres lettres sont des constantes ; les flèches seulement pour un champ plan. Le potentiel est trouvé en intégrant les composantes – si une intégrale n'est pas élémentaire, il n'est pas trouvé. Intégrales curvilignes : le théorème de Green n'est vérifié que pour un cercle, une ellipse et un polygone convexe ; une courbe fermée faite d'un graphe et d'un segment ne se saisit que comme ligne brisée ou par morceaux paramétrés. Une intégrale triple uniquement sur un solide borné, normal par rapport à une variable (une surface inférieure et une supérieure au-dessus de toute la projection) et dont les inéquations sont au plus quadratiques en elle ; les coordonnées sphériques uniquement pour un solide dont les angles θ et φ forment un rectangle.

- Intégrales de surface : le théorème de Gauss n’est vérifié que pour les modèles (sphère, demi-sphère fermée, cylindre, cône), celui de Stokes seulement pour le flux d’un rotationnel écrit curl ou $\nabla \times F$; un graphe $z = g(x, y)$ seulement au-dessus d’un domaine que traite l’intégrale double ; saisissez une sphère avec une autre borne que $z \geq 0$ comme un graphe ou par un paramétrage.
- Les applications physiques des théorèmes intégraux ne calculent que des cas symétriques (sphère, droite et plan infinis, longue bobine, champ uniforme) où l’intégrale devient un produit ; saisissez une répartition générale de charge ou de courant comme intégrale curviligne ou de surface. Elles négligent le courant de déplacement dans le théorème d’Ampère-Maxwell et ne prennent en compte les matériaux que par la permittivité relative d’un condensateur.

29. Polynôme de Taylor

L’application construit le polynôme de Taylor (en 0, celui de Maclaurin) du degré demandé : un tableau des dérivées au point, le remplacement dans la formule et le reste de Lagrange. Elle peut aussi trouver le degré elle-même – le plus petit pour lequel l’erreur en un point ou sur un intervalle ne dépasse pas une borne donnée. Le graphique montre la fonction et le polynôme ; un curseur change le degré pour voir l’approximation s’améliorer.

Les degrés élevés (jusqu'à environ 1000) sont calculés exactement et abrégés dans la solution et le graphique ; le curseur du degré est alors logarithmique. Les fonctions dont les dérivées croissent vite (tan x) passent par la division de séries, l'erreur par l'estimation de Cauchy dans le plan complexe ou celle d'une série alternée. Si cela échoue aussi, l'application explique pourquoi et donne un conseil.

Comment le saisir

`taylor(sin x, 0, 5)`	La fonction, le point et le degré.
`maclaurin(e^x, 4)`	Le polynôme de Maclaurin – le point est 0.
`taylor(e^x, 0, erreur=0.001, x=0.5)`	Le degré selon l’erreur au point x (sur un intervalle, saisissez r=… au lieu de x).
`ln(1 + x)`	Une fonction avec la puce « Polynôme de Taylor » – le point, le degré ou la précision s’y indiquent.

Exemples

Un polynôme de degré 4 avec le reste.

Énoncé: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Résultat

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Étapes

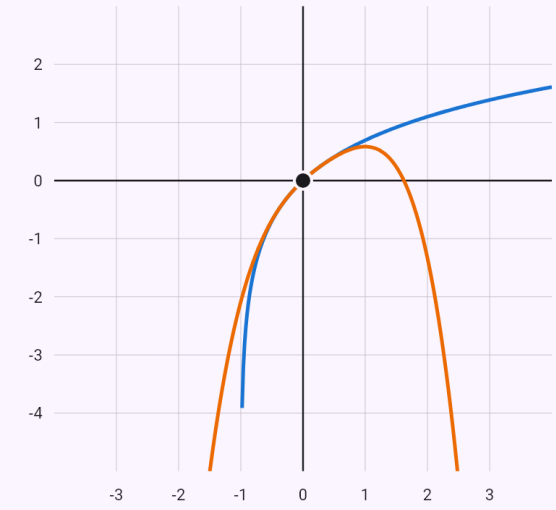
- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :
  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$
- Les dérivées et leurs valeurs en a

$f(x) = \ln(x+1)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$	$f'''(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$	$f^{(4)}(0) = -6$

- On remplace par les valeurs des dérivées
  $$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
  $$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$
- Le reste (l'erreur) sous la forme de Lagrange, ξ entre a et x : $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

Graphique

Degré : 4



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Le point autour duquel le polynôme approche la fonction :

- $(0; 0)$

Le curseur au-dessus du graphe choisit le degré – plus il est élevé, mieux et plus loin du point le polynôme approche la fonction.

Le degré selon la précision demandée – une valeur approchée de e^0,5.

Énoncé: `taylor(e^x, 0, erreur=0.001, x=0.5)`

Résultat

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Étapes

- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Les dérivées et leurs valeurs en a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- On remplace par les valeurs des dérivées

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Le reste (l'erreur) sous la forme de Lagrange, ξ entre a et x : $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!}x^5$

- On cherche le plus petit degré n dont l'estimation du reste en x ne dépasse pas l'erreur

$$M_k = \max_{t \in [0\,;\,0{,}5]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

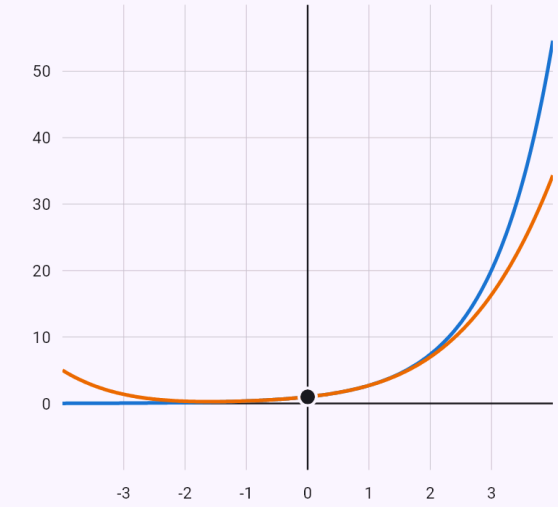
$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- La valeur approchée :

$$f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$$

Graphique

Degré : 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Le point autour duquel le polynôme approche la fonction :

- $(0; 1)$

Le curseur au-dessus du graphe choisit le degré – plus il est élevé, mieux et plus loin du point le polynôme approche la fonction.

Degré 999 : un degré élevé est abrégé dans la solution.

Énoncé: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Résultat

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Étapes

- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Les dérivées et leurs valeurs en a

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$\vdots$$
$$f^{(998)}(x) = -\frac{997!}{(x+1)^{998}} \qquad f^{(998)}(0) = -997!$$
$$f^{(999)}(x) = \frac{998!}{(x+1)^{999}} \qquad f^{(999)}(0) = 998!$$

- Le reste (l'erreur) sous la forme de Lagrange, ξ entre a et x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

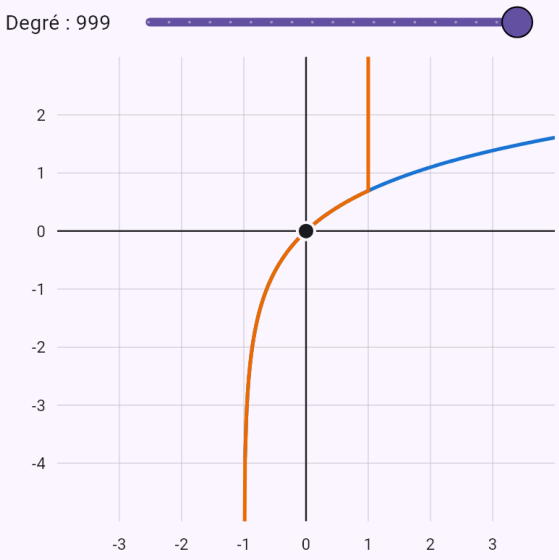
- On cherche le plus petit degré n dont l'estimation du reste en x ne dépasse pas l'erreur

$$M_k = \max_{t \in [0\,;\,1]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$
$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$
$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$
$$\cdots$$
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$
$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- La valeur approchée : $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Graphique

Degré : 999



$y = \ln(1+x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$

Le point autour duquel le polynôme approche la fonction :

- $(0; 0)$

Le curseur au-dessus du graphe choisit le degré – plus il est élevé, mieux et plus loin du point le polynôme approche la fonction.

Tangente : coefficients par les séries, erreur par l'estimation de Cauchy.

Énoncé: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Résultat

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Étapes

- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Les dérivées et leurs valeurs en a

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\tan x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\tan^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Les coefficients viennent de l'arithmétique des séries ; les dérivées élevées seraient énormes

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Les dérivées sont trop grandes ; utilisons l'estimation de Cauchy sur un cercle du plan complexe

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- La valeur approchée : $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Limitations connues

- Les degrés supérieurs à 1000 ne sont pas calculés ; un point au bord de la convergence ou au-delà échappe à l'estimation de Cauchy.

30. Primitives et intégrales indéfinies

L'application intègre avec les méthodes enseignées en classe et indique à chaque étape ce qu'elle fait. Elle vérifie le résultat – le dérive terme à terme par les règles et ramène la somme à la fonction à intégrer (dénominateur commun, identités comme sin²x + cos²x = 1) – et trace la fonction à intégrer et la primitive.

Les racines de puissances de la variable ($\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt{x^3}$) sont réécrites en puissances d'exposant rationnel ; une valeur absolue ($|\cos x|$, $\sqrt{1 - \sin^2 x}$) avec la fonction signe sgn.

Si une intégrale n'a pas de primitive élémentaire (comme e^(−x²)), l'application le dit et l'exprime à l'aide d'une fonction spéciale (erf, Si, …).

Comment le saisir

`int(x e^x, x)`	Une intégrale avec la variable – les bornes ou une application (aire, volume, …) peuvent être ajoutées dans les champs sous l'énoncé.
`int(x^2 sin x)`	Sans la variable quand il n'y en a qu'une.
`∫ x^2 dx`	Avec le signe intégrale, aussi depuis une photo.
`x e^x`	Une fonction avec la puce « Intégrer ».

Primitives usuelles et changement de variable

L'intégrale d'une somme terme à terme, les constantes sorties de l'intégrale, les primitives du tableau (aussi avec une fonction intérieure affine) et le changement de variable quand on reconnaît une fonction composée avec la dérivée de l'intérieur.

Exemples

Terme à terme d'après le tableau.

Énoncé: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

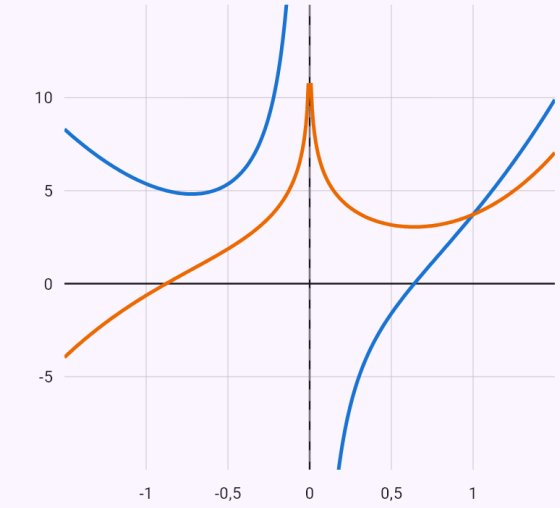
Résultat

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Étapes

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int e^x\, dx + \int -\frac{2}{x}$$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int e^x\, dx = e^x$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int -\frac{2}{x}\, dx = -2\int \frac{1}{x}\, dx$$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée :
  $$\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Graphique



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Le changement de variable t = x².

Énoncé: `int(2x cos(x^2))`

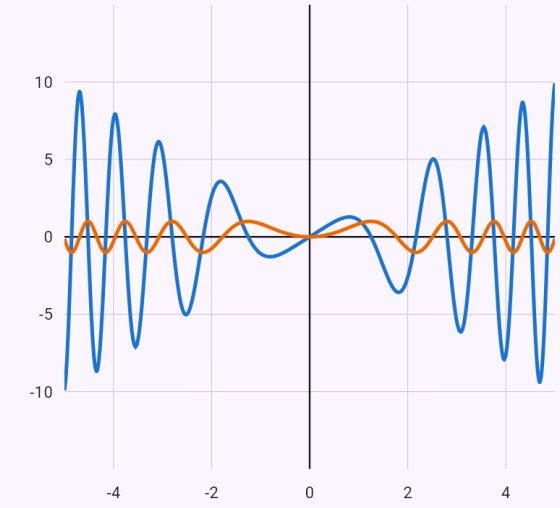
Résultat

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Étapes

- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Changement de variable $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $\int \cos t\,dt = \sin t$
- On revient à la variable d'origine : $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Graphique



$f(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$
$F(x) = \sin\left(x^2\right)$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Intégrale avec des constantes a, b.

Énoncé: `int(1/(a - bx)^3)`

Résultat

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Conditions : $b \neq 0$

Étapes

- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Intégration par parties

Le produit d'un polynôme par une exponentielle, une fonction trigonométrique ou un logarithme est intégré par parties, plusieurs fois si nécessaire ; les intégrales comme $e^x \sin x$ par parties de façon cyclique.

Exemples

Deux intégrations par parties successives.

Énoncé: `int(x^2 e^x)`

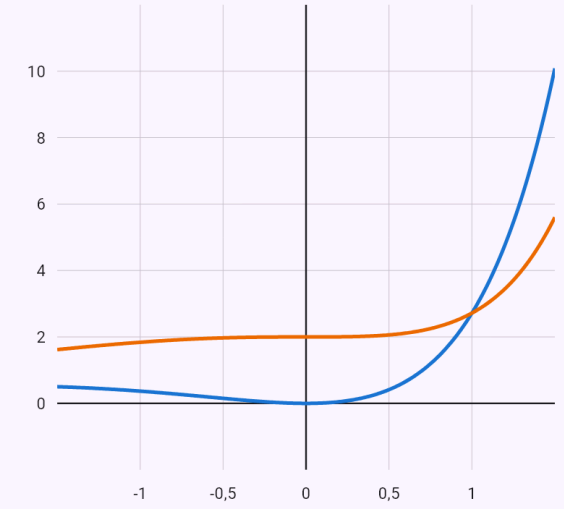
Résultat

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Étapes

- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = e^x, donc u' = $2x$, v = e^x : $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = e^x, donc u' = 1, v = e^x : $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int e^x \, dx = e^x$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée : $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient : $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient : $(-2xe^x)' = -2 \cdot (e^x \cdot x + e^x) = -2xe^x - 2e^x$
- On additionne et on simplifie $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Graphique



La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Fractions rationnelles

L'application effectue si besoin la division, factorise le dénominateur et décompose la fraction en éléments simples, qu'elle intègre en logarithmes et en arctangentes.

Un dénominateur qu'on ne peut pas factoriser sur les rationnels ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) est factorisé sur les réels – chaque paire de racines complexes conjuguées donne un facteur du second degré sans racine réelle.

Exemples

Décomposition en éléments simples.

Énoncé: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

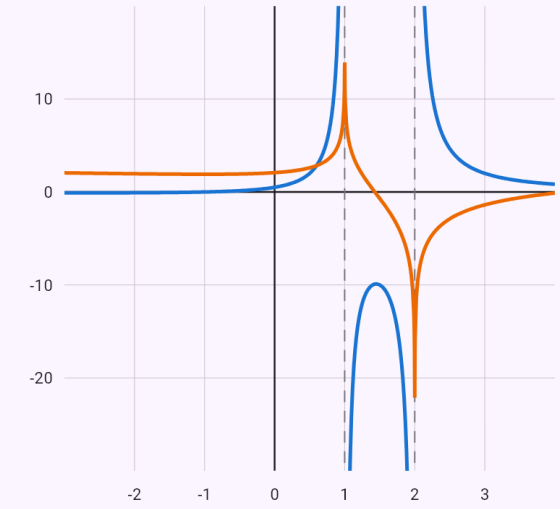
Résultat

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Étapes

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples :
  $$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée :
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient :
  $$(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient :
  $$(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$
- On additionne et on simplifie
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Graphique



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Factorisation du dénominateur x⁴ + 1 sur les réels.

Énoncé: `int(1/(x^4 + 1))`

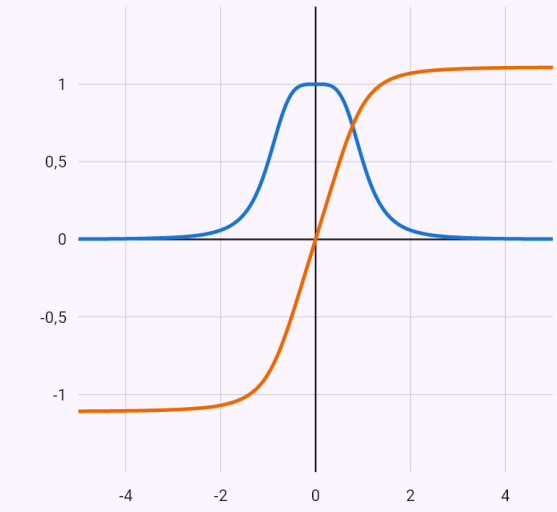
Résultat

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x -\right.\right.$$

Étapes

- On factorise le dénominateur sur $\mathbb{R}$: ses racines complexes forment des paires conjuguées r, r̄, et chaque paire donne un facteur du second degré (x − r)(x − r̄) = x² − 2·Re r·x + |r|² sans racine réelle :
  $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$
- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples
  $$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$$
- Le dénominateur n'a pas de racines réelles : un multiple de sa dérivée isolé au numérateur donne ln, le reste, après la mise sous forme canonique, donne arctan
  $$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$$
- Le dénominateur n'a pas de racines réelles : un multiple de sa dérivée isolé au numérateur donne ln, le reste, après la mise sous forme canonique, donne arctan
  $$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Graphique



$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \dfrac{\sqrt{2}\,\text{ar}}{}$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Vérification des éléments simples par le dénominateur commun.

Énoncé: `int(1/(x^3 + 1))`

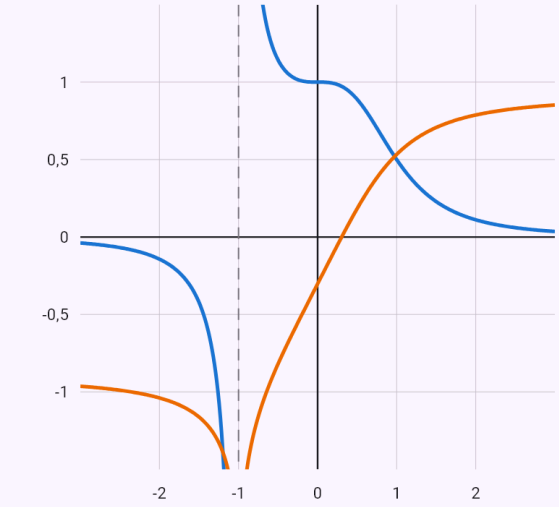
Résultat

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-$$

Étapes

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right)dx$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right)dx = \int \frac{2-x}{3(x^2-x+$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$
- Le dénominateur n'a pas de racines réelles : un multiple de sa dérivée isolé au numérateur donne ln, le reste, après la mise sous forme canonique, donne arctan
$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$
- D'après la table des primitives usuelles :
$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x}{}\right.$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2}{}$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
$$\left(-\frac{\ln(x^2-x+1)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$
- On additionne et on simplifie
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x}{}\right.$$

Graphique



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-}{6}$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Fonctions trigonométriques

D'abord les formules (sin²x = (1 − cos 2x)/2, produits en sommes), pour une puissance impaire le changement t = sin x ou t = cos x, pour une fraction rationnelle en sinus et cosinus un changement selon la parité, et le changement t = tan(x/2) seulement en dernier recours.

Exemples

Une puissance impaire du sinus – le changement t = cos x.

Énoncé: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

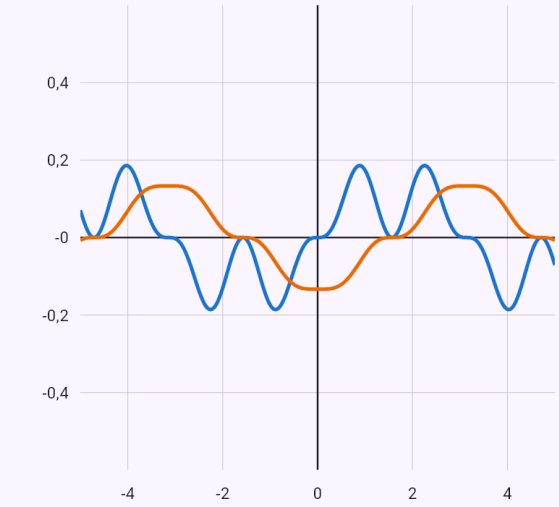
Résultat

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Étapes

- Une puissance impaire – changement de variable
  $t = \cos x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- On revient à la variable d'origine :
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée :
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- On additionne et on simplifie avec l'identité
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Graphique



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

La vérification : dérivée terme à terme, transformée avec l'identité 1 + tan²x = 1/cos²x.

Énoncé: `int(1/cos(x)^4)`

Résultat

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

Étapes

- La fonction ne change pas quand sinus et cosinus changent de signe ensemble – changement de variable $t = \tan x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales : $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1\,dt = t$
- On revient à la variable d'origine : $t = \tan x$: $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$

- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée : $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient

  $\left(\frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$
- On additionne et on simplifie avec l'identité $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\cos^2 x} =$

Fonctions hyperboliques

Intégrales usuelles (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx par le logarithme de la dérivée, par parties (x sinh x, arsinh x), carrés par les formules sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x ; le reste par la définition à l'aide d'exponentielles.

Exemples

La formule sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Énoncé: `int(sinh(x)^2)`

Résultat

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Étapes

- On utilise la formule $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$
- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée : $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient
  $\left(\frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- On additionne et on simplifie avec l'identité $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

Racines

Les intégrales avec la racine d'une fonction homographique par changement de variable, avec la racine d'un trinôme par un changement d'Euler, et les intégrales binômes selon les conditions de Tchebychev – si aucune n'est satisfaite, l'application dit que l'intégrale n'est pas élémentaire.

Exemples

Un changement d'Euler.

Énoncé: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Résultat

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Étapes

- Substitution d'Euler (type 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – l'intégrale devient celle d'une fraction rationnelle en t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- On revient à la variable d'origine

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Vérification – la dérivée du résultat (la primitive) redonne la fonction intégrée

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

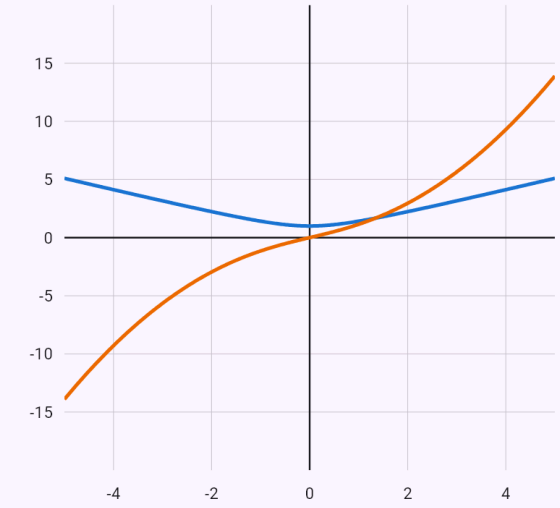
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- On additionne et on simplifie

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Graphique



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Limitations connues

- Pour certaines intégrales, nous trouvons le résultat sans démarche – l'application l'indique dans les étapes.
- Un calcul sans démarche qui prend trop de temps est interrompu – l'application l'indique.
- Pour les résultats longs dont la transformation en fonction à intégrer ne serait pas lisible (plusieurs termes avec des racines de nombres, p. ex. $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), l'application omet la vérification.

31. Intégrales et leurs applications

L’application calcule une intégrale à l’aide d’une primitive (formule de Newton–Leibniz) et trace l’aire sous la courbe – la partie au-dessus de l’axe des x d’une autre couleur que celle en dessous. Elle traite aussi les intégrales impropres et les applications : aire, longueur d’arc, volume et aire latérale d’un solide de révolution, aussi pour les courbes paramétrées et en coordonnées polaires.

Intégrale

L’application trouve la primitive comme pour l’intégrale indéfinie et substitue les bornes. Avec un changement de variable, elle recalcule directement les bornes. Sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, elle utilise la symétrie : l’intégrale de la partie impaire est nulle sans chercher de primitive, et $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ est reconnue comme l’aire d’un demi-disque. Sans primitive élémentaire, elle donne la forme exacte avec une fonction spéciale (par exemple $2\,\mathrm{Si}(\pi)$) et en calcule le nombre par une série entière avec une majoration de l’erreur ; si elle ne trouve pas de forme exacte, elle calcule la valeur numériquement et indique la méthode.

Les lettres de l'énoncé ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,dx$ de $-r$ à r) sont des paramètres positifs : le résultat est une formule ($\pi r^2/2$), vérifiée numériquement pour diverses valeurs des paramètres, et le graphique a un curseur pour chaque lettre.

Comment le saisir

`int(x^2, x, 0, 3)`	Une intégrale avec la variable et les bornes.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Depuis une photo ou en LaTeX.
`x^2`	Une fonction avec la puce « Intégrer » – indiquez les bornes dans les champs.

Exemples

Un changement de variable avec les bornes changées.

Énoncé: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Résultat

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

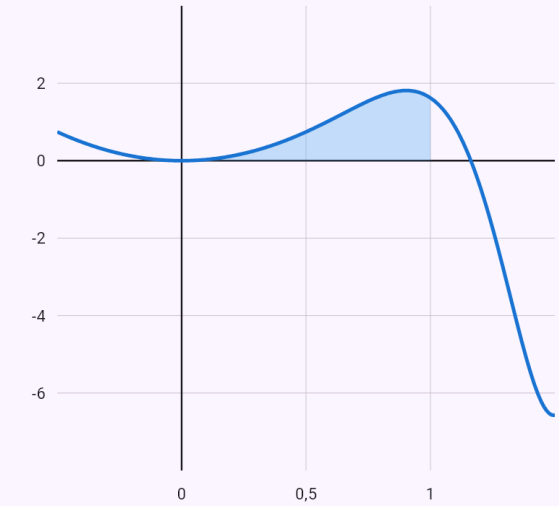
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Simpson | Σ Trapèzes | Σ Romberg

Étapes

- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Changement de variable $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) - F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Graphique



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

La partie impaire est nulle sur l'intervalle symétrique, le reste est l'aire d'un demi-disque – résultat π.

Énoncé: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Résultat

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx =$$

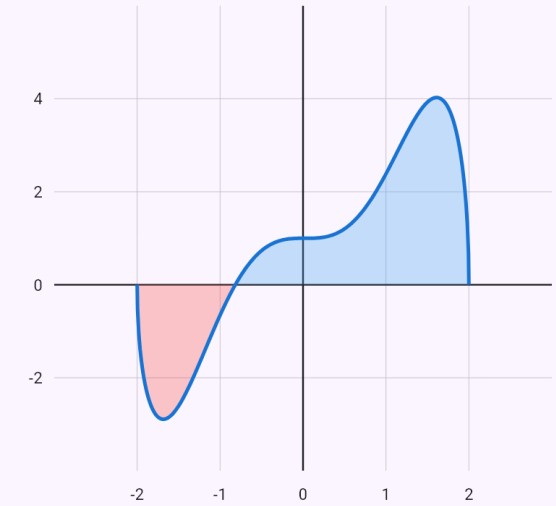
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Simpson | Σ Trapèzes | Σ Romberg

Étapes

- L'intervalle est symétrique par rapport à zéro, on sépare l'intégrale en partie impaire et reste
  $$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$
- La fonction $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est impaire (f(−x) = −f(x)) : sur ⟨−2; 2⟩, les aires au-dessus et au-dessous de l'axe s'annulent, l'intégrale est nulle sans chercher de primitive : $\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$
- La courbe de √(r² − x²) est le demi-cercle supérieur de rayon r = 2, l'intégrale est l'aire du demi-disque πr²/2
  $$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Graphique



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

La primitive n’est pas élémentaire : exactement 2 Si(π), la valeur par une série entière.

Énoncé: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Résultat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

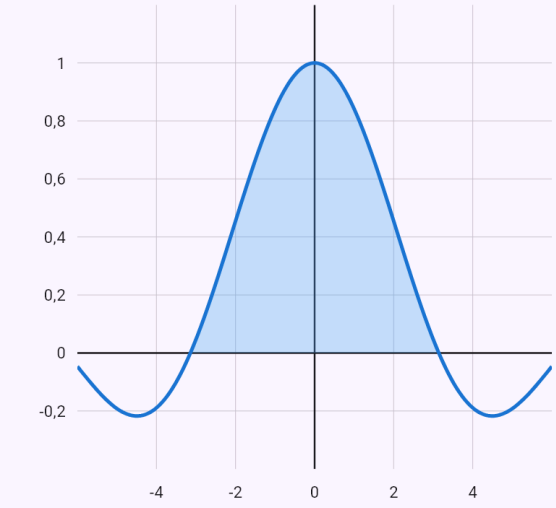
Une méthode numérique calcule aussi le nombre de la forme exacte :

Σ Simpson | Σ Trapèzes | Σ Romberg

Étapes

- La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est paire (f(−x) = f(x)), sa courbe est symétrique par rapport à l’axe des y, donc l’intégrale sur $\langle -\pi;\ \pi\rangle$ est le double de celle sur $\langle 0;\ \pi\rangle$:
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
- La primitive n’est pas élémentaire, c’est une fonction spéciale – le résultat exact s’écrit avec elle
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$
- Le nombre de la forme exacte se calcule par la série entière de la fonction spéciale : $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Pour t = π, on additionne 6 termes. La série est alternée, l’erreur est inférieure au premier terme omis, $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ (majoration de la série alternée) : $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Graphique



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

au-dessus de l’axe x (+) sous l’axe x (−)

L’intégrale définie est l’aire entre la courbe et l’axe x – la partie au-dessus de l’axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Intégrale avec un paramètre r – l'aire d'un demi-disque, πr²/2 ; le curseur du graphique fait varier r.

Énoncé: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Résultat

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Étapes

- Les lettres autres que la variable sont des paramètres positifs : $r > 0$
- Une racine d'une différence de carrés – le changement de variable trigonométrique $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, la racine $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- On utilise la formule $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

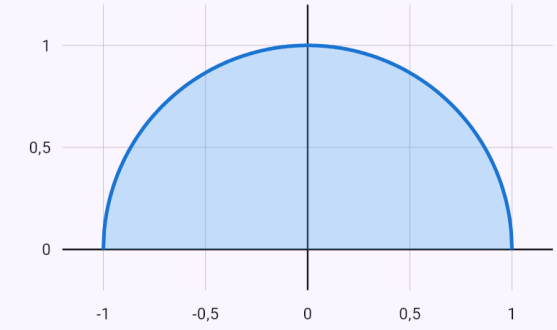
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Valeurs des paramètres

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Graphique



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Intégrales impropres

Une borne infinie ou une fonction non bornée sont traitées par une limite de la primitive, et l'application dit si l'intégrale converge ou diverge. Si cette limite ne peut pas être calculée, elle conclut par un critère de comparaison.

Les intégrales ∫₀^∞ x^(s − 1) ln^k x/(x^n + a^n)^m dx (0 < s < mn, k = 0 à 3) sont calculées exactement même sans primitive : comme la dérivée k-ième par rapport à s de l'intégrale à paramètre I(s). L'application trouve I(s) par le changement t = x^n/(x^n + a^n) via la fonction bêta et la formule des compléments (puce « Fonction bêta »), ou sur un contour en trou de serrure autour du demi-axe positif via les résidus (puce «

Résidus »). Là où une primitive existe, la formule de Newton-Leibniz reste par défaut (puce « Primitive »). La valeur est toujours vérifiée numériquement.

Une autre intégrale impropre sans primitive est comparée à 1/x^α à chaque borne (une borne infinie ou un point où la fonction croît au-delà de toute borne) par le critère de comparaison par la limite. Ce n'est que si elle converge à toutes les bornes que l'application calcule la valeur numériquement (≈) ; une intégrale divergente est signalée comme divergente.

Exemples

Une borne supérieure infinie.

Énoncé: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Résultat

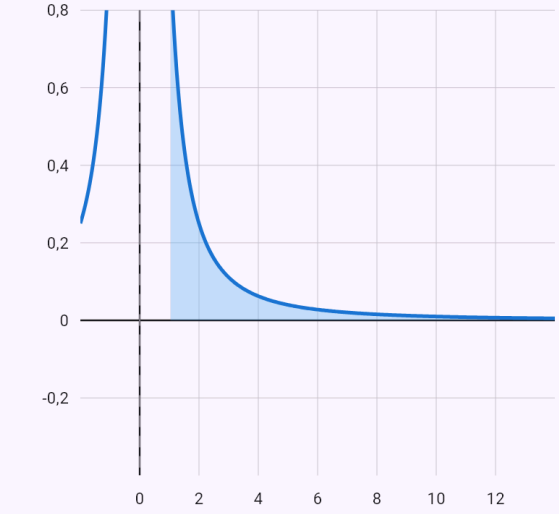
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Étapes

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graphique



L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Une fonction non bornée à la borne inférieure.

Énoncé: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Résultat

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

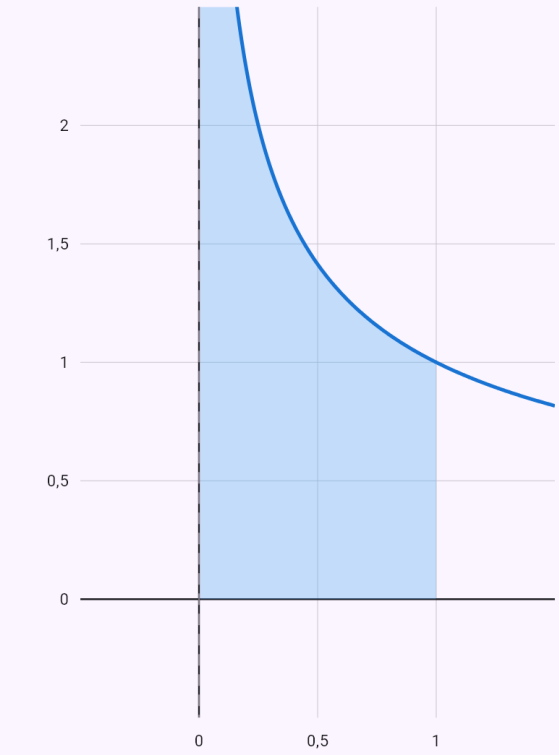
Résoudre par une méthode numérique :

Σ Simpson | Σ Trapèzes | Σ Romberg

Étapes

- D'après la table des primitives usuelles :
  $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$$
- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge
  $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graphique



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I″(4) via la fonction bêta – 5√3π³/972.

Énoncé: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Résultat

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Étapes

- Le logarithme provient de la dérivation par rapport au paramètre s : $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. L'intégrale est donc une dérivée de l'intégrale à paramètre $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, qui converge pour $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. On calcule I(s) pour s quelconque, on dérive et on substitue.
- Le changement de variable ramène l'intégrale à ⟨0; 1⟩ et donne la fonction bêta d'Euler B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}\,dt$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- On exprime la fonction bêta par la fonction gamma, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), et on utilise la formule des compléments Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

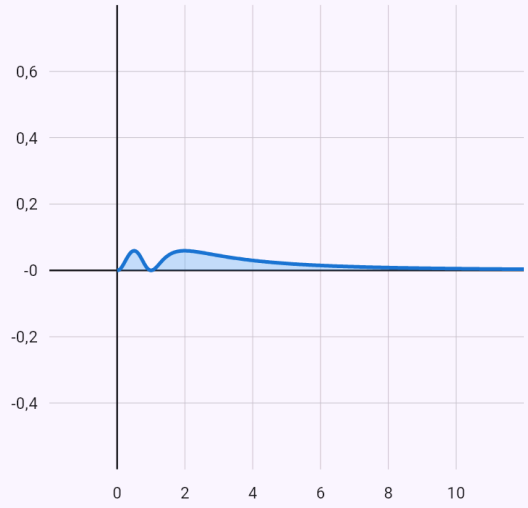
- La dérivée par rapport au paramètre s (d'ordre 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- On substitue s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graphique



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

La même intégrale sur un contour en trou de serrure via les résidus.

Énoncé: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Résidus

Résultat

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Étapes

- Le logarithme provient de la dérivation par rapport au paramètre s : $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. L'intégrale est donc une dérivée de l'intégrale à paramètre $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, qui converge pour $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. On calcule I(s) pour s quelconque, on dérive et on substitue.
- On prend la puissance z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) avec l'argument de z dans (0; 2π) et on intègre sur le contour en trou de serrure C autour du demi-axe réel positif. Sur le bord supérieur z^(s − 1) = x^(s − 1), sur le bord inférieur x^(s − 1)·e^(2πis) ; le grand et le petit cercle ne contribuent pas à la limite, car $0 < s < 6$. À l'intérieur se trouvent les pôles $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ d'ordre 1 et, par le théorème des résidus (pour s non entier)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Les pôles sont simples ; le résidu est le numérateur divisé par la dérivée du dénominateur au pôle, avec z□ⁿ = −aⁿ

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- On substitue les puissances des pôles, on somme la série géométrique et on simplifie. La formule a été obtenue pour s non entier (sinon 1 − e^(2πis) = 0). Mais les deux membres sont continus en s, elle vaut donc aussi pour s = 4, par la limite s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

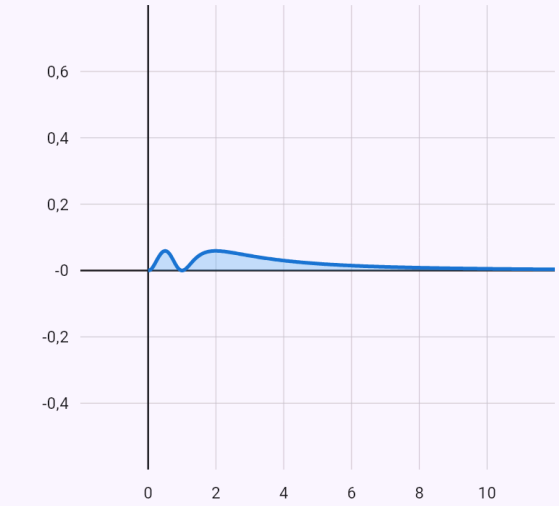
- La dérivée par rapport au paramètre s (d'ordre 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- On substitue s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graphique



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x − la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Sans primitive : convergence par comparaison à 1/x³, puis la valeur numériquement.

Énoncé: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

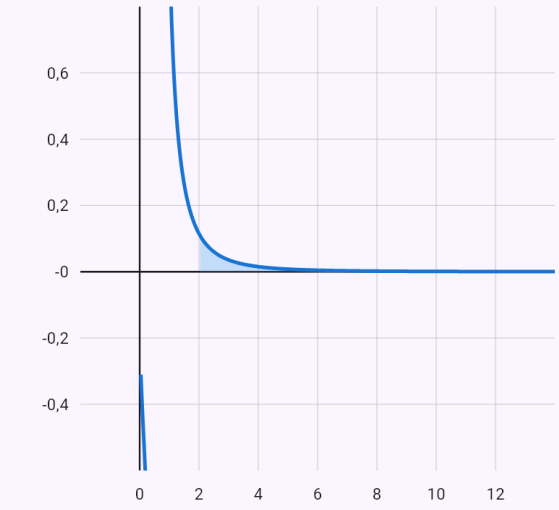
Résultat

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3+\ln x}\,dx \approx 0{,}1197$$

Étapes

- Pour $x \to \infty$, on compare l'intégrande à $\frac{1}{x^3}$ (critère de comparaison par la limite) : $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. La limite est un nombre positif, l'intégrale s'y comporte donc comme l'intégrale de $\frac{1}{x^3}$, qui converge pour $\alpha = 3 > 1$
- L'intégrale converge à toutes les bornes ; sa valeur : $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3+\ln x}\,dx \approx 0{,}1197$
- Aucune forme exacte trouvée, la valeur de l'intégrale impropre est calculée numériquement par la quadrature adaptative de Gauss-Kronrod.

Graphique



$f(x) = \frac{1}{x^3+\ln x}$

au-dessus de l'axe x (+) sous l'axe x (−)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Aire sous une courbe et entre deux courbes

L'aire entre une courbe et l'axe des x, ou entre deux courbes, est calculée comme l'intégrale de la valeur absolue de la différence – les parties au-dessus et en dessous comptent toutes deux positivement. Inutile de donner les bornes : elles sont trouvées comme les points d'intersection des courbes.

Comment le saisir

`aire(x^2, x)`	L'aire entre deux courbes, bornes aux points d'intersection.
`aire(sin x, 0, pi)`	L'aire entre une courbe et l'axe des x sur un intervalle.
`x^2`	Une fonction avec la puce « Intégrer » → « Aire entre courbes » ; indiquez la seconde courbe et les bornes dans les champs.

Exemples

L’aire entre une parabole et une droite.

Énoncé: `x^2` Aire entre courbes, seconde courbe x

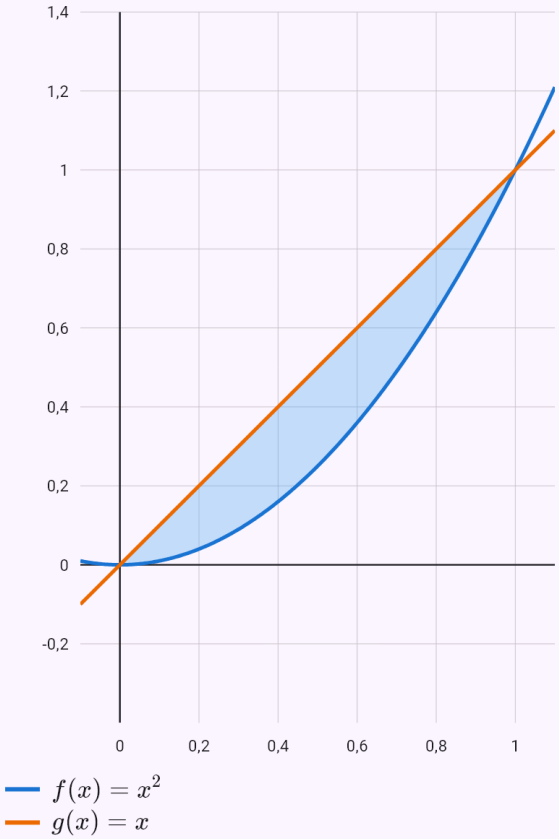
Résultat

$$S = \frac{1}{6}$$

Étapes

- Les bornes sont les intersections des courbes : $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- L’aire entre les courbes (les parties au-dessus et en dessous comptent positivement), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx : S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- L’expression en valeur absolue ne change pas de signe sur l’intervalle – on enlève la valeur absolue selon lui : $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- L’intégrale d’une somme est la somme des intégrales : $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- On sort la constante de l’intégrale : $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- D’après la table des primitives usuelles : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- D’après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Graphique



La région colorée – son aire est le résultat (les parties au-dessus et en dessous de l’axe comptent positivement).

Longueur d’arc

La longueur d’une courbe sur un intervalle est calculée par la formule l = ∫√(1 + f′²) dx. L’application essaie de simplifier la racine (pour un demi-cercle, on obtient l’arc sinus) ; quand l’intégrale n’a pas de primitive élémentaire, le résultat est numérique.

Comment le saisir

`longueur(x^(3/2), 0, 4)`	La longueur d’arc sur un intervalle.

Exemples

La longueur d’un demi-cercle.

Énoncé: `sqrt(1 - x^2)` Longueur d’arc, bornes −1 et 1

Résultat

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Étapes

- La longueur de la courbe

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

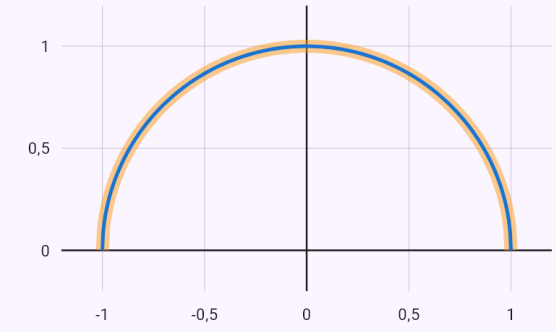
- D’après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n’est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l’intégrale converge

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graphique



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

L’arc mis en évidence – sa longueur est le résultat.

Volume d’un solide de révolution

Le volume d’un solide de révolution autour de l’axe des x est calculé par la formule V = π∫f² dx (entre deux courbes, par couronnes), autour de l’axe des y par la méthode des tubes. L’application montre aussi le solide en 3D – faites-le tourner avec le doigt.

Comment le saisir

`volume(sqrt(x), 0, 4)`	Le volume du solide obtenu par rotation autour de l’axe des x.
`volume(x^2, 0, 2, y)`	Rotation autour de l’axe des y.

Exemples

Un paraboloïde de révolution.

Énoncé: `sqrt(x)` Volume d’un solide, bornes 0 et 4

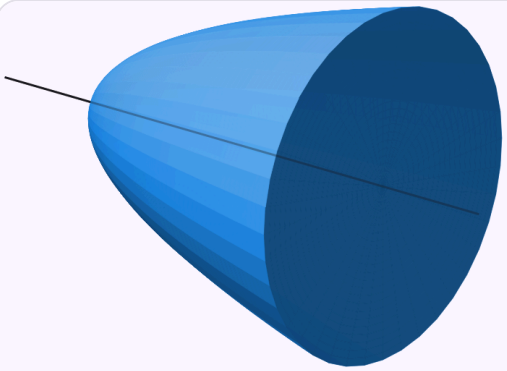
Résultat

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Étapes

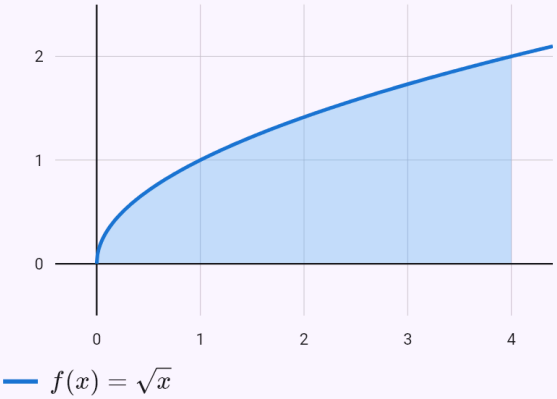
- Le volume du solide de révolution autour de l’axe x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx : V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- D’après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) : $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- La valeur de l’intégrale multipliée par la constante devant : $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l’axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



Aire latérale d’un solide de révolution

L’aire latérale est calculée par la formule S = 2π∫f√(1 + f′²) dx ; le produit sous la racine se simplifie souvent (pour une sphère, on obtient une constante).

Comment le saisir

`surface(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	L’aire latérale par rotation autour de l’axe des x.

Exemples

L'aire d'une sphère de rayon 2.

Énoncé: `sqrt(4 - x^2)` Surface d'un solide, bornes −2 et 2

Résultat

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Étapes

- L'aire latérale du solide de révolution autour de l'axe x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

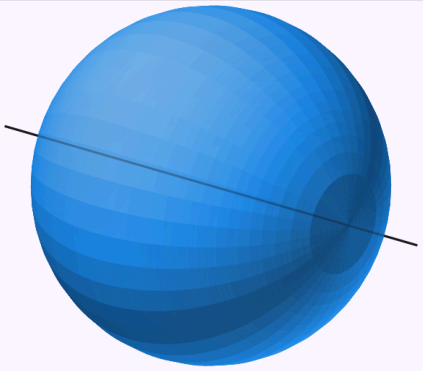
$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2\,dx = 2x$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) :

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

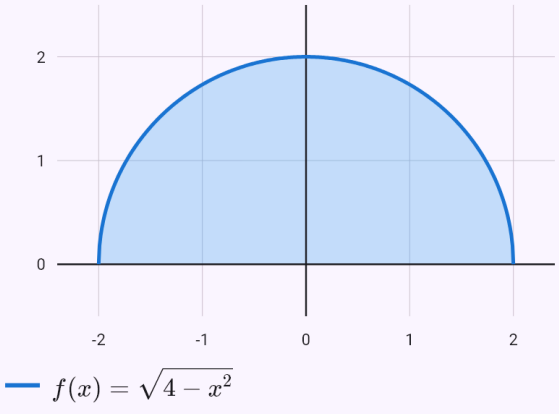
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



Applications avec paramètres

Chaque lettre sauf x est un paramètre positif et le résultat est une formule, comme le volume de la sphère 4πr³/3. Les vérifications numériques utilisent des valeurs substituées. Le graphique et le solide 3D ont un curseur par paramètre.

Comment le saisir

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Volume d'une sphère de rayon r.

Exemples

Volume d'une sphère de rayon r.

Énoncé: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Résultat

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Étapes

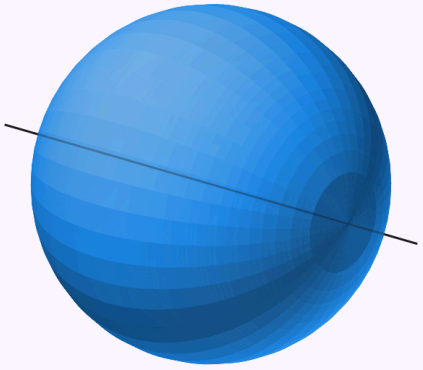
- Les lettres autres que la variable sont des paramètres positifs : $r > 0$
- Le volume du solide de révolution autour de l'axe x,
  $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$
  $V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int r^2\,dx = r^2 x$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Valeurs des paramètres

$r = 1$

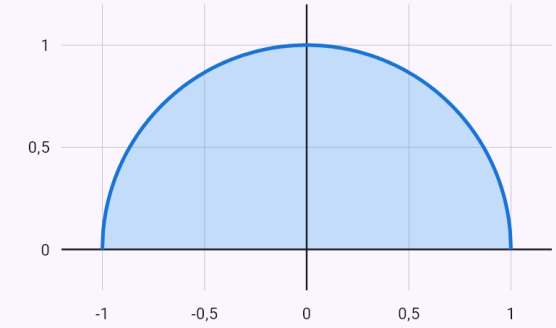
$V \approx 4{,}189$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



Tronc de cône de rayons a, b et de hauteur h.

Énoncé: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Résultat

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Étapes

- Les lettres autres que la variable sont des paramètres positifs : $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Le volume du solide de révolution autour de l'axe x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx : V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable $\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) $\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant $V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$

Valeurs des paramètres

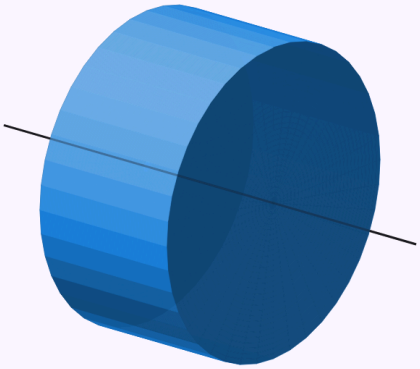
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

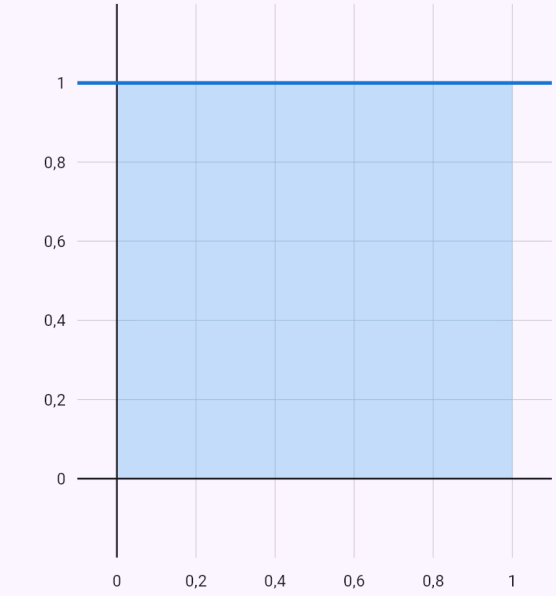
$V \approx 3{,}142$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

Centre de gravité

Le centre de gravité d'une région sous ou entre des courbes, d'un arc et d'un solide de révolution est calculé par intégrales avec toutes les étapes et marqué sur le graphique. Les lettres servent de paramètres.

Comment le saisir

`teziste(x^2, 0, 1)`	Région sous la courbe ; une seconde fonction donne la région entre courbes.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	Le dernier mot oblouk ou teleso choisit l'arc ou le solide de révolution.

Exemples

Centre de gravité du demi-disque, 4r/(3π).

Énoncé: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Résultat

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Étapes

- Les lettres autres que la variable sont des paramètres positifs : $r > 0$
- Le centre de gravité se calcule par des intégrales

  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$

  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$
- Calculons l'intégrale : $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Une racine d'une différence de carrés – le changement de variable trigonométrique $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, la racine $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$:

  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- On utilise la formule $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :

  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :

  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},\quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Calculons l'intégrale : $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Changement de variable $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:

  $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- D'après la table des primitives usuelles :

  $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :

  $x = -r \Rightarrow t = 0,\quad x = r \Rightarrow t = 0$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^0 = 0-0=0$$

- Calculons l'intégrale : $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales : $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int r^2\,dx = r^2x$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Les coordonnées du centre de gravité sont des quotients des intégrales

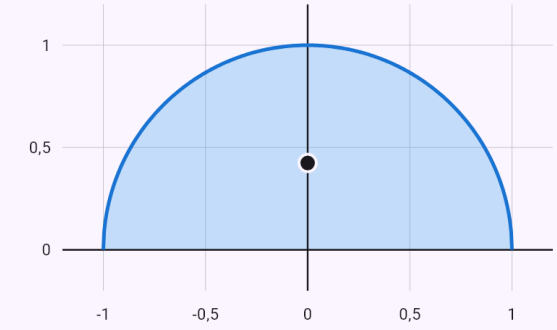
$$x_T = \frac{M_y}{S} = 0$$
$$y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$$

Valeurs des paramètres

$r = 1$

$T \approx [0;\,0{,}424]$

Graphique



$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

Le point T est le centre de gravité.

Centre de gravité du cône aux 3/4 de la hauteur depuis le sommet.

Énoncé: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Résultat

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Étapes

- Les lettres autres que la variable sont des paramètres positifs : $h > 0,\ r > 0$
- Le centre de gravité se calcule par des intégrales

  $$x_T = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$

  $$y_T = 0$$

- Calculons l'intégrale : $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- On sort la constante de l'intégrale :

  $$\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $$\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$$

- Calculons l'intégrale : $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- On sort la constante de l'intégrale :

  $$\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

  $$\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$$

- Les coordonnées du centre de gravité sont des quotients des intégrales

  $$x_T = \frac{M_y}{J} = \frac{3h}{4}$$

  $$y_T = 0$$

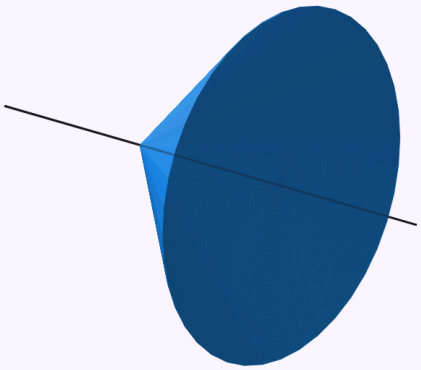
Valeurs des paramètres

$h = 1$

$r = 1$

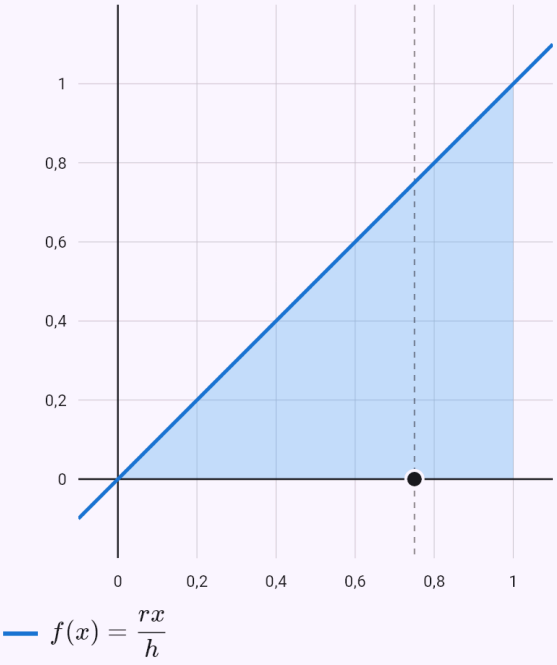
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



Le point T est le centre de gravité.

Courbes paramétrées et en coordonnées polaires

Écrivez une courbe x = φ(t), y = ψ(t) sur deux lignes, une courbe en coordonnées polaires sous la forme r = ρ(φ). La puce « Intégrer » propose alors l'aire, la longueur, le volume et la surface ; les bornes du paramètre sont facultatives (sans elles, de 0 à 2π). Le graphique colore la région ; volume et surface apparaissent en solide 3D. La rotation se fait autour de l'axe x ou y ; pour l'axe y, ajoutez y en dernier argument.

Comment le saisir

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Une courbe paramétrée sur deux lignes.
`r = 1 + cos(phi)`	Une courbe en coordonnées polaires (aussi r^2 = … pour une lemniscate).
`longueur(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	La forme écrite avec le paramètre et les bornes.

Exemples

L'aire sous une arche de cycloïde.

Énoncé: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Aire

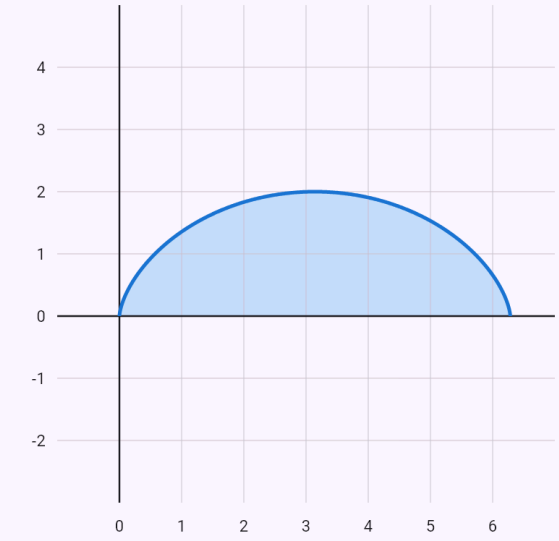
Résultat

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Étapes

- Les dérivées par rapport au paramètre :
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- L'aire sous une courbe paramétrée (à l'intérieur d'une courbe fermée) pour $t \in [0\,;\,2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt\right|$: $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt\right|$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\,dt + \int -2\cos t\,dt$ -
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1\,dt = t$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int -2\cos t\,dt = -2\int \cos t\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles :
  $\int \cos t\,dt = \sin t$
- On utilise la formule $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\,dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2}\,dt = \frac{t}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int \cos(2t)\,dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4}\right.$

Graphique



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

La courbe donnée paramétriquement (ou en coordonnées polaires), tracée pour les bornes choisies du paramètre.

La longueur d’une cardioïde.

Énoncé: `r = 1 + cos(phi)` Longueur d’arc

Résultat

$$l = 8$$

Étapes

- Les dérivées par rapport au paramètre : $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- La longueur d’une courbe en coordonnées polaires pour $\varphi \in [0\,;\,2\pi]$, $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\right.\right.$$

- On découpe l’intervalle aux zéros des expressions en valeur absolue (π) et on enlève la valeur absolue sur chaque partie selon le signe

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos$$

- On sort la constante de l’intégrale

$$\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

- D’après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :

$$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- On sort la constante de l’intégrale

$$\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

- D’après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :

$$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

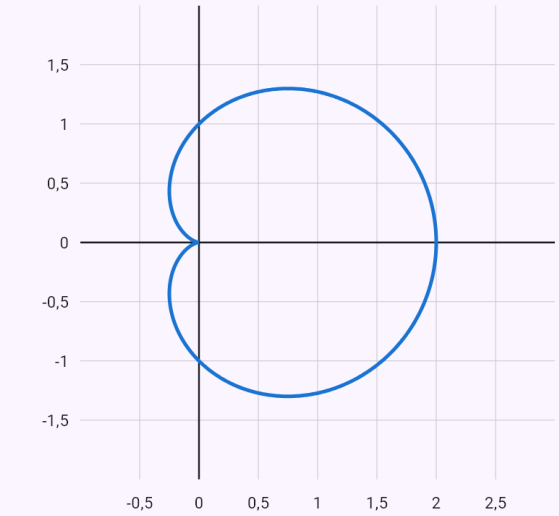
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- On additionne les valeurs des parties :

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Graphique



$r = \cos\varphi + 1$

La courbe donnée paramétriquement (ou en coordonnées polaires), tracée pour les bornes choisies du paramètre.

Astroïde tournée autour de l'axe y.

Énoncé: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Résultat

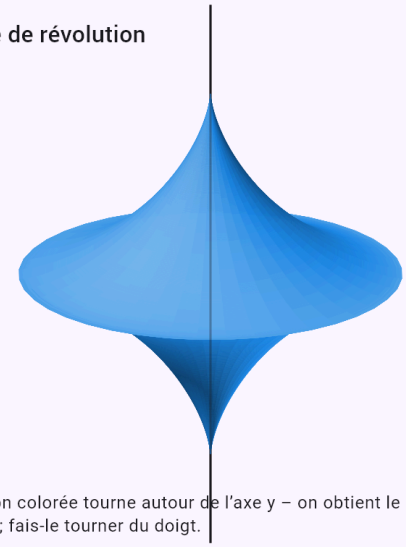
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Étapes

- Les dérivées par rapport au paramètre :
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Le solide provient de la partie de la courbe à droite de l'axe y (x ≥ 0) : $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$
- Volume du solide autour de l'axe y pour $t \in [0\,;\,2\pi]$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Une puissance impaire – changement de variable
  $w = \sin t$, $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) – F(a)
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Une puissance impaire – changement de variable
  $w = \sin t$, $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$

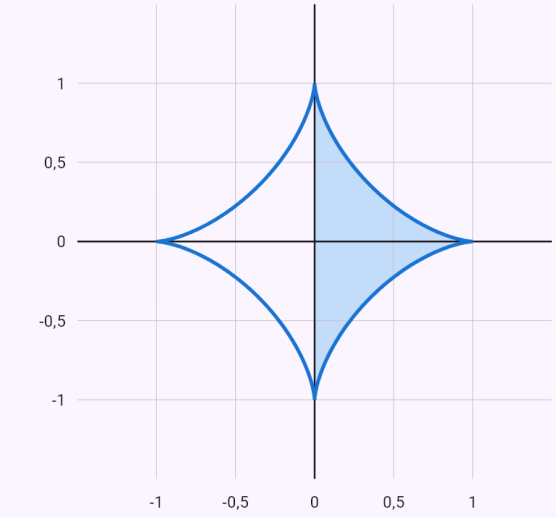
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine : $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe y – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

La courbe donnée paramétriquement (ou en coordonnées polaires), tracée pour les bornes choisies du paramètre.

Courbes données par une équation

Pour une équation en x et y (x³ + y³ = 3xy), la puce « Intégrer » propose l'aire, la longueur, le volume et la surface. Sans bornes, elle prend toute la courbe fermée : le cercle et l'ellipse sous forme paramétrique par cos et sin, une boucle passant par l'origine (le folium de Descartes) par les droites y = tx – l'aire de la boucle alors exactement par les secteurs, la longueur, le volume et la surface numériquement. Avec des bornes en x, elle utilise la branche supérieure y = f(x).

Comment le saisir

`x^3 + y^3 = 3xy`	Une courbe fermée – la puce « Intégrer » sans bornes.

`y^2 = x^3`	Une courbe non fermée – la puce « Intégrer » avec des bornes en x (la branche supérieure y = x^(3/2)).

Exemples

L'aire de la boucle du folium – par les droites y = tx et les secteurs, S = 3/2.

Énoncé: `x^3 + y^3 = 3xy` Intégrer → Aire

Résultat

$$S = \frac{3}{2}$$

Étapes

- La boucle passant par l'origine sous forme paramétrique par les droites y = tx – on remplace dans l'équation et on isole x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- L'aire de la boucle par les secteurs depuis l'origine : S = ½∫(x·y' − y·x') dt, et sur la droite y = tx, x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Changement de variable $u = t^3+1,\ du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

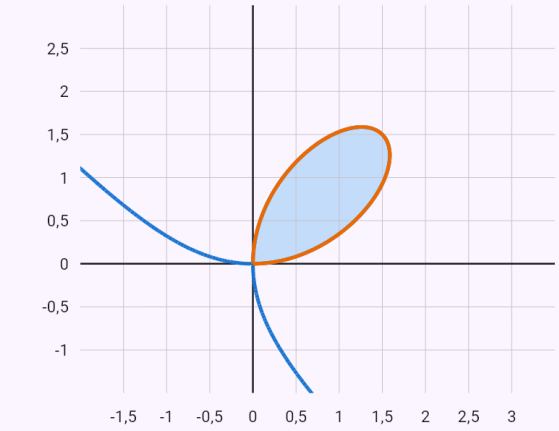
- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- On revient à la variable d'origine : $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Graphique



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Toute la courbe donnée par l'équation ; la partie utilisée pour le calcul est mise en évidence.

Aire de la lemniscate, par coordonnées polaires.

Énoncé: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

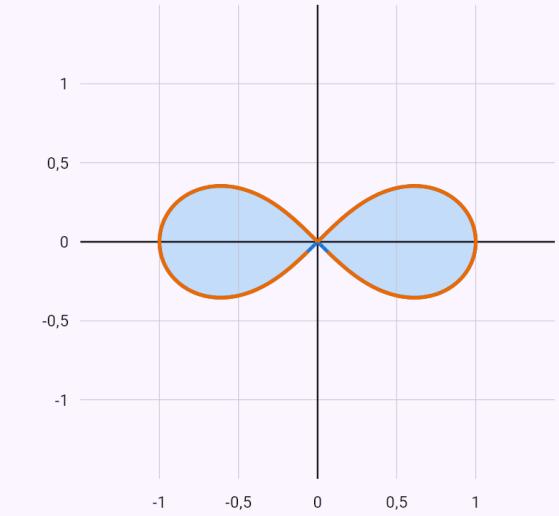
Résultat

$$S = 1$$

Étapes

- Écrivons la courbe en coordonnées polaires
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- L'aire délimitée par une courbe en coordonnées polaires (somme des secteurs depuis l'origine) pour
  $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right], S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(2\varphi)\,d\varphi$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- La courbe a des boucles égales (2) ; la valeur d'une boucle est multipliée par leur nombre : $2 \cdot 1$
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $S = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Graphique



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Toute la courbe donnée par l'équation ; la partie utilisée pour le calcul est mise en évidence.

Ellipse tournée avec un terme xy.

Énoncé: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Résultat

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Étapes

- La courbe est une ellipse tournée ; ses axes viennent de l'angle de rotation, sous forme paramétrique

  $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos$

- Les dérivées par rapport au paramètre :

  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$

- L'aire sous une courbe paramétrée (à l'intérieur d'une courbe fermée) pour $t \in [0\,;\,2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt\right|$

  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t\cdot\sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) d$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t\cdot\sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \int -$

- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\,dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \cos^2 t\,dt$

- On utilise la formule $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\,dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2}\,dt = \frac{t}{2}$

- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :

  $\int \cos(2t)\,dt = \frac{\sin(2t)}{2}$

- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int -\frac{4\cos t\cdot\sin t}{3}\,dt = -\frac{4}{3}\int \cos t\cdot\sin t\,dt$

- On utilise la formule $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

  $\int \cos t\cdot\sin t\,dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\,dt$

- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(2t)\,dt$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :

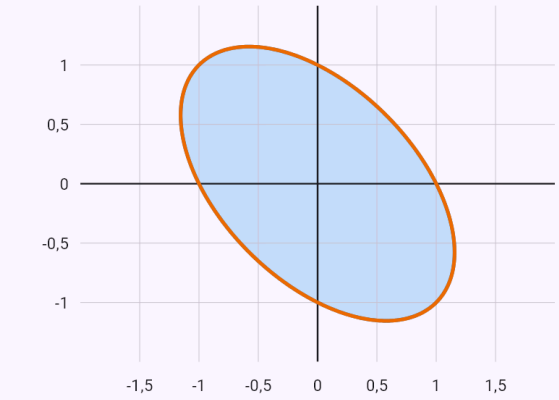
  $\int \sin(2t)\,dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$

- On sort la constante de l'intégrale :

  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\,dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \sin^2 t\,dt$

- On utilise la formule $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- La formule de Newton–Leibniz, F(b) - F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \Big[$$
- L'intégrale est négative (la courbe est parcourue de droite à gauche) – on prend sa valeur absolue :
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Graphique



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \dfrac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Toute la courbe donnée par l'équation ; la partie utilisée pour le calcul est mise en évidence.

Limitations connues

- La longueur d'arc de y = ∛x (et de courbes semblables) n'est calculée que numériquement – elle conduit à une intégrale elliptique, qui n'a pas de primitive élémentaire.
- Rotation autour de l'axe des y seulement pour une région d'un seul côté de l'axe.
- Une formule avec paramètres n'est donnée que si le résultat ne dépend pas de leur comparaison ; si le signe change selon leurs valeurs, aucune formule n'est donnée.
- Pour les courbes implicites sans bornes : coniques (même avec terme xy), boucle par l'origine et courbes à deux parties homogènes (lemniscate).
- Intégrale définie avec paramètre, pour l'instant seulement avec des bornes finies.
- Quand le critère de comparaison par la limite ne tranche pas (l'intégrande oscille à l'infini, par exemple cos x/(x + ln x)), l'application ne donne aucune valeur sans preuve de convergence et signale l'intégrale comme non encore résolue.

32. Séries

Pour une série numérique, l'application vérifie d'abord la condition nécessaire de convergence (terme général tendant vers 0), puis choisit un critère selon la forme de la série – série géométrique, Σ $1/n^p$, règle de d'Alembert, de Cauchy, comparaison par équivalents, comparaison à une intégrale ou critère des séries alternées ; pour une série alternée, elle distingue convergence absolue et semi-convergence. Quand c'est possible, elle calcule la somme. Le graphique montre les termes et les sommes partielles.

Séries numériques

L'application trouve la somme des séries géométriques et télescopiques, des séries Σ $P(n)q^n$ et des séries connues (Σ $1/n^2 = \pi^2/6$) ; sinon elle la calcule numériquement. Une somme finie se calcule comme à l'école – télescopique, arithmétique, géométrique, sinon terme à terme. Une équation avec la somme d'une série géométrique est aussi résolue, avec la condition de convergence $|q| < 1$ vérifiée.

Une somme jusqu'à une lettre (sum(k^2, k, 1, n)) par les formules des sommes de puissances, une somme géométrique par sa formule et un terme rationnel par les éléments simples (télescopique) ; le résultat est vérifié sur les premiers termes.

Comment le saisir

`somme(1/n^2)`	Le terme général ; l'indice n à partir de 1 (aussi sum).
`somme(1/n^2, n, 1, oo)`	Avec l'indice et la valeur de départ.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Depuis une photo ou en LaTeX.
`1/n^2`	Le terme général avec la puce « Série » – indiquez l'indice de départ dans le champ.
`somme(2k+1, k, 1, 100)`	Une somme finie – avec l'indice, la borne inférieure et la borne supérieure.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Une somme jusqu'à n – la formule de la somme.

Exemples

La série Σ 1/n² – converge, la somme vaut π²/6.

Énoncé: `sum(1/n^2)`

Résultat

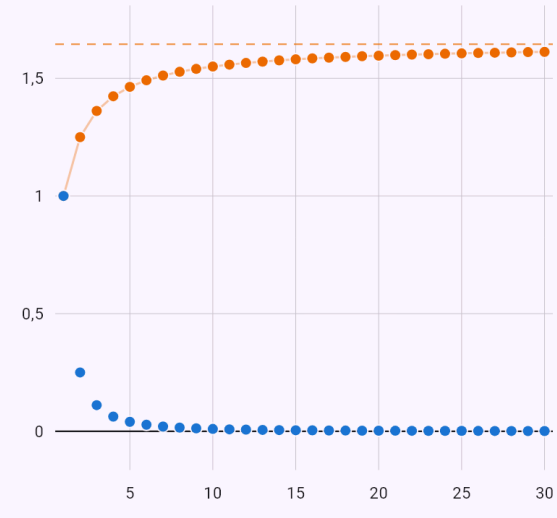
La série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est de Riemann Σ 1/n^p avec p = 2 > 1 – elle converge.
- La somme d'une série connue : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles s_n = a_1 + … + a_n. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

Le critère des séries alternées – semi-convergente.

Énoncé: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Résultat

La série converge, mais pas absolument.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Les termes sont de signes différents – d'abord la convergence absolue

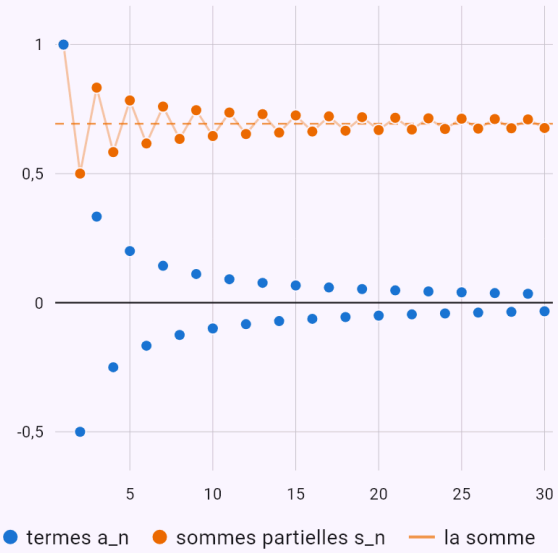
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- La série harmonique diverge – les termes regroupés par puissances de deux, chaque groupe au moins 1/2

  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Critère de Leibniz : |a_n| = $\frac{1}{n}$ décroît et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – la série converge.
- Conclusion : la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).
- La somme d'une série connue : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles s_n = a_1 + … + a_n. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

La règle de d’Alembert et la somme.

Énoncé: `sum(n/2^n)`

Résultat

La série converge.

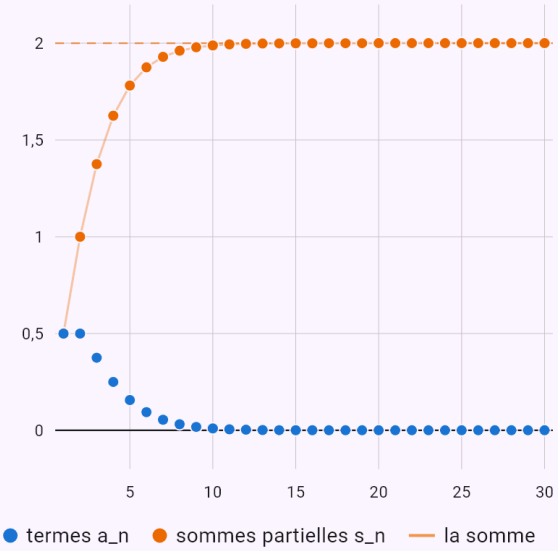
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Règle de d’Alembert – la série converge.

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Une série Σ P(n)·qⁿ sommée en dérivant la série géométrique : $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles s_n = a_1 + … + a_n. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

La condition nécessaire n’est pas remplie – la série diverge.

Énoncé: `sum(n/(n+1))`

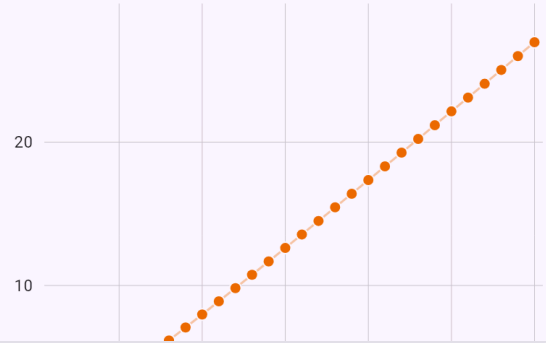
Résultat

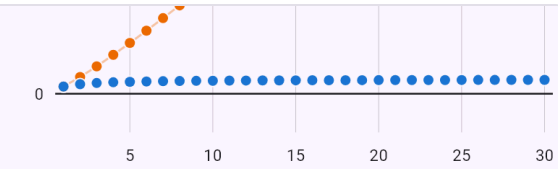
La série diverge.

Étapes

- La condition nécessaire de convergence n’est pas vérifiée : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Graphique





Les points sont les termes a_n et les sommes partielles s_n = a_1 + … + a_n. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

Somme télescopique – il reste le premier et le dernier terme.

Énoncé: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Résultat

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Étapes

- Somme télescopique – les termes voisins s'annulent, il ne reste que le premier et le dernier : $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Équation avec la somme d'une série géométrique.

Énoncé: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Résultat

$$x = -1$$

Étapes

- La série est géométrique de raison q = 2^x et converge pour $|2^x| < 1$; sa somme : $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- On résout : $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ satisfait la condition de convergence : $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

La somme des carrés par la formule.

Énoncé: `sum(k^2, k, 1, n)`

Résultat

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Étapes

- Nous utilisons les formules des sommes de puissances : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- La somme : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Une somme télescopique jusqu'à n – éléments simples.

Énoncé: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Résultat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Étapes

- Nous décomposons le terme en éléments simples – leurs parties s'annulent l'une après l'autre dans la somme (somme télescopique) : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- La somme : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Séries entières

Pour une série entière, l'application trouve le rayon de convergence par la règle de d'Alembert, étudie les bornes comme des séries numériques et donne le domaine de convergence ; quand c'est possible, aussi la somme. Le graphique montre les sommes partielles avec un curseur pour le nombre de termes.

Exemples

Le domaine de convergence [−1 ; 1[.

Énoncé: `sum(x^n/n)`

Résultat

$$x \in [-1\,;\,1[$$

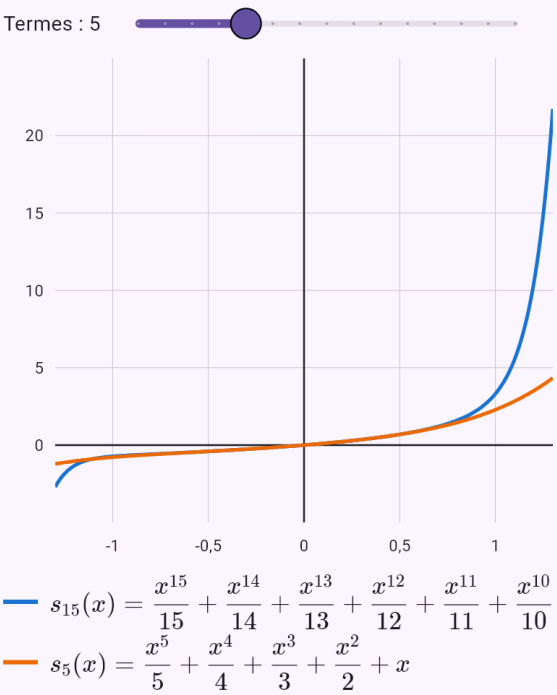
Étapes

- Le rayon de convergence R = 1 par la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- La borne $x = -1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).
- La borne $x = 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge d'après le regroupement des termes de la série harmonique.
- Le domaine de convergence : $x \in [-1\,;\,1[$

Graphique



Choisis le nombre de termes avec le curseur – les sommes partielles ne s'approchent de la somme qu'à l'intérieur du domaine de convergence.

Série de Taylor

L'application obtient la série de Taylor d'une fonction à partir de développements connus (e^x, sin x, ln(1 + x), …) par substitution et en détermine le domaine de convergence.

Comment le saisir

`taylor(e^x, 0, oo)`	La fonction, le point et oo au lieu du degré ; ou la puce « Polynôme de Taylor » → « Série ».

Exemples

La série de ln(1 + x) et son domaine de convergence.

Énoncé: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Résultat

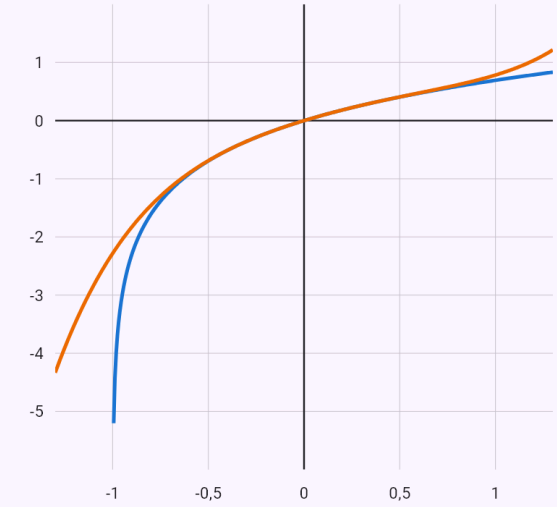
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in]-$$

Étapes

- Du développement connu $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ avec $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Le rayon de convergence R = 1 par la règle de d'Alembert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- La borne $x = -1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge d'après le regroupement des termes de la série harmonique.
- La borne $x = 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).
- Le domaine de convergence : $x \in]-1\,;\,1]$

Graphique

Termes : 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Choisis le nombre de termes avec le curseur – les sommes partielles ne s'approchent de la somme qu'à l'intérieur du domaine de convergence.

33. Séries de Fourier

L'application construit la série de Fourier d'une fonction sur un intervalle pris comme une période (sans indication, sur [−π ; π]), ou la série en sinus ou en cosinus d'une fonction sur [0 ; L]. La fonction peut aussi être définie par morceaux.

Elle calcule les coefficients par des intégrales avec toute la démarche (intégration par parties avec le paramètre n), remplace sin nπ = 0 et cos nπ = $(-1)^n$ et exploite la symétrie des fonctions paires et impaires. Aux points de discontinuité, elle détermine la somme de la série par le théorème de Dirichlet et, en remplaçant un point et avec l'égalité de Parseval, elle en déduit des sommes de séries numériques (comme Σ $1/n^2 = \pi^2/6$). Le graphique montre le prolongement périodique de la fonction et les sommes partielles avec un curseur.

Le bouton « Complexe » (ou fourierc) montre aussi la forme complexe : les coefficients c_n, leur lien avec a_n et b_n et les spectres d'amplitude et de phase.

Comment le saisir

`fourier(x^2, -pi, pi)`	La fonction et l'intervalle.
`fouriersin(x, 0, pi)`	La série en sinus (fouriercos – en cosinus).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Une fonction par morceaux, ligne par ligne, avec la puce « Série de Fourier ».
`x^2`	Une fonction avec la puce « Série de Fourier » – le type de série et l'intervalle s'y choisissent.

Exemples

Une fonction paire – uniquement des cosinus ; les sommes Σ 1/n² et Σ 1/n⁴.

Énoncé: `fourier(x^2)`

Résultat

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

Étapes

- L'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ est une période : $T = 2\pi$, la demi-période $l = \pi$. On cherche la série de coefficients

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La fonction est paire, $f(-x) = x^2 = f(x)$, donc les coefficients des sinus sont nuls et il suffit de calculer les autres sur la moitié de l'intervalle

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

- Le coefficient a_0 : $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

- On substitue les bornes : $a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

- Le coefficient a_n : $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$

- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, donc u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2\cos(nx)\,dx = \frac{x^2\sin(nx)}{n} - \int \frac{2x\sin(nx)}{n}\,dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int \frac{2x\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int x\sin(nx)\,dx$$

- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, donc u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :
  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $$\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pour n entier, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- On substitue les bornes

  $$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- On substitue les coefficients dans la série

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Le prolongement périodique de la fonction est continu, donc d'après le théorème de Dirichlet la somme de la série vaut f(x) pour $x \in [-\pi\,;\,\pi]$
- En substituant $x = 0$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- En substituant $x = \pi$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

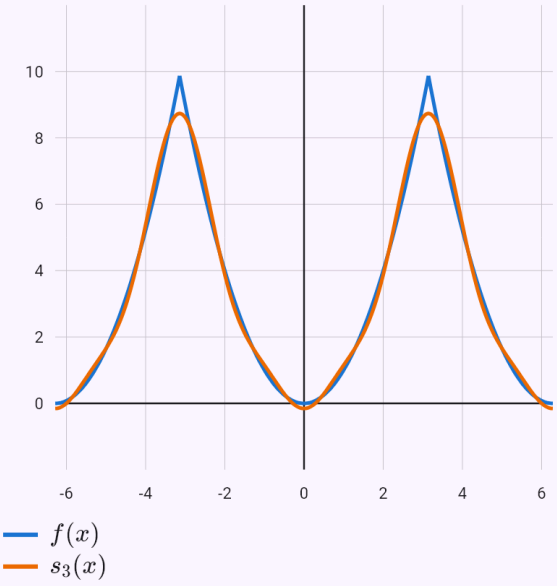
- De l'égalité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graphique

Termes jusqu'à n = 3



La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Une fonction par morceaux – sauts et phénomène de Gibbs.

Énoncé: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Série de Fourier

Résultat

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Étapes

- L'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ est une période : $T = 2\pi$, la demi-période $l = \pi$. On cherche la série de coefficients

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La fonction est impaire, $f(-x) = -f(x)$, donc le terme constant et les coefficients des cosinus sont nuls et il suffit de calculer ceux des sinus sur la moitié de l'intervalle

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Le coefficient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable : $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Pour n entier, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- On substitue les bornes

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- On substitue les coefficients dans la série :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Les termes de rang n pair sont nuls – il ne reste que les n impairs, n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- D'après le théorème de Dirichlet, la somme de la série vaut f(x) pour $x \in \,]-\pi\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,\pi[$; en un point de discontinuité, c'est la moyenne des limites à gauche et à droite

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- En substituant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

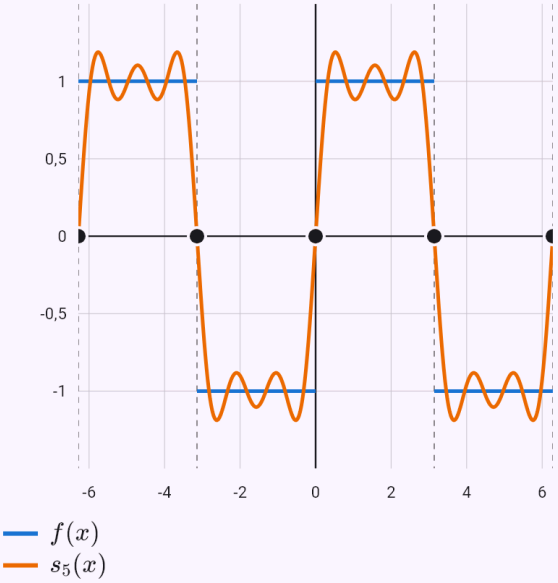
- De l'égalité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Graphique

Termes jusqu'à n = 5



La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Une série en sinus et la somme 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Énoncé: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Résultat

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

Étapes

- On prolonge la fonction de $[0\,;\,\pi]$ en une fonction impaire, puis périodiquement ($T = 2\pi$) – on obtient la série en sinus $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, où
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
- Le coefficient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$
- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, donc u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$
- On sort la constante de l'intégrale
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$
- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, donc u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$
- On sort la constante de l'intégrale :
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Pour n entier, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- On substitue les bornes
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$
- On substitue les coefficients dans la série :
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$
- Les termes de rang n pair sont nuls – il ne reste que les n impairs, n = 2k − 1
  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$
- Le prolongement périodique de la fonction est continu, donc d'après le théorème de Dirichlet la somme de la série vaut f(x) pour $x \in [0\,;\,\pi]$
- En substituant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la somme d'une série numérique
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
- De l'égalité de Parseval $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, on obtient
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Graphique

Termes jusqu'à n = 5



La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Forme complexe avec son spectre.

Énoncé: `fourierc(x, -pi, pi)`

Résultat

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i \, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Étapes

- L'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ est une période : $T = 2\pi$, la demi-période $l = \pi$. On cherche la série de coefficients

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La fonction est impaire, $f(-x) = -x = -f(x)$, donc le terme constant et les coefficients des cosinus sont nuls et il suffit de calculer ceux des sinus sur la moitié de l'intervalle

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Le coefficient b_n : $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Par parties (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, donc u' = 1, v = $-\dfrac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :
  $\displaystyle\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable :
  $\displaystyle\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Pour n entier, $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- On substitue les bornes

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- On substitue les coefficients dans la série :
  $\displaystyle s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

- D'après le théorème de Dirichlet, la somme de la série vaut f(x) pour $x \in \,]-\pi\,;\,\pi[$; en un point de discontinuité, c'est la moyenne des limites à gauche et à droite :
  $\displaystyle s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$

- En substituant $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient la somme d'une série numérique

  $$s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- De l'égalité de Parseval on obtient

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Forme complexe de la série : $\displaystyle f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$, où $\displaystyle c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-inx}\,dx$. Lien avec la forme réelle

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Substituons les coefficients de la forme réelle

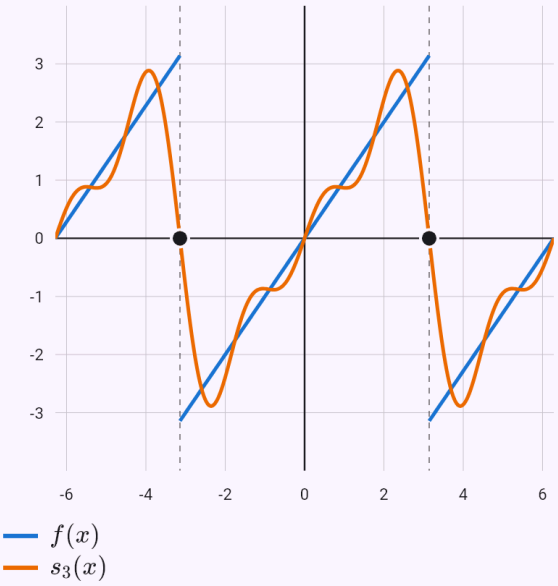
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

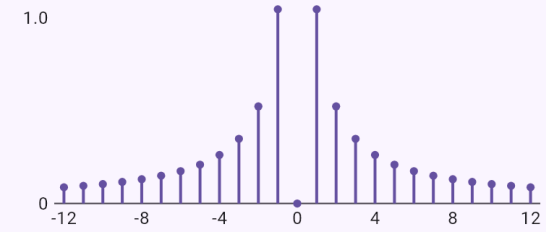
Graphique

Termes jusqu'à n = 3

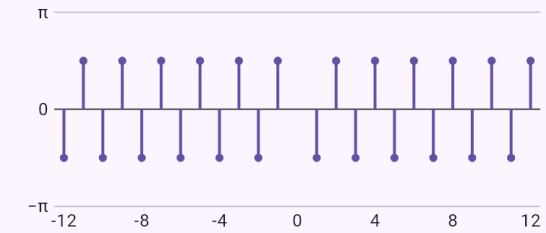


La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Spectre d'amplitude $|c_n|$



Spectre de phase arg c_n



L'axe horizontal est n. La hauteur montre le module ou l'angle de c_n ; les coefficients nuls n'ont pas de phase.

Limitations connues

- Une fonction non bornée à une extrémité de l'intervalle (ln x sur [0 ; 2π]) est développée avec des coefficients calculés numériquement ; au point où elle croît sans limite, le théorème de Dirichlet ne s'applique pas. Une fonction avec un pôle (1/x) n'est pas développée : elle n'est pas intégrable.
- Quand les coefficients conduisent à une intégrale sans primitive élémentaire (ln x sur [1 ; 3]), ils sont exprimés avec le sinus et le cosinus intégraux.