Mathtrace – guide d’utilisation

IV. Équations différentielles et analyse avancée

Sommaire

IV. Équations différentielles et analyse avancée

34. Analyse fonctionnelle

35. Fonctions d'une variable complexe

36. Équations différentielles

37. Calcul des variations

38. Équations aux dérivées partielles

39. Récurrences et fonctions génératrices

40. Méthodes numériques

34. Analyse fonctionnelle

> *« L'analyse fonctionnelle linéaire, c'est en fait de l'algèbre linéaire en dimension infinie. »*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., lors du cours d'introduction

La partie calculatoire de l'analyse fonctionnelle linéaire. La norme d'un vecteur s'écrit ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ ou un autre nombre ; sans indice, l'application calcule les trois), la norme d'une suite dans l'espace ℓ^p ||1/n||_2 – l'application somme la série $\Sigma|a_n|^p$ et, si elle diverge, la suite n'appartient pas à l'espace. La norme L^p d'une fonction est ||x^2||_{L^2(0; 1)} : l'application supprime la valeur absolue en coupant l'intégrale aux zéros de la fonction. La norme de la borne supérieure ||f||_{C⟨a; b⟩} est la plus grande valeur de |f| parmi les points stationnaires et les bornes. dist(f, g, ⟨a; b⟩) donne la distance de deux fonctions pour la norme de la borne supérieure et dans L^2, holder(...) et minkowski(...) vérifient les inégalités de Hölder et de Minkowski sur des fonctions ou des vecteurs donnés.

Une suite de fonctions convergence(x^n, ⟨0; 1⟩) (ou f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) est étudiée en trois étapes : la limite simple par morceaux (une puissance q^n tend vers zéro pour |q| < 1), la convergence uniforme par $s_n = \sup |f_n - f|$ à partir du point stationnaire x_n (une limite discontinue de fonctions continues ne peut pas être uniforme) et la convergence dans L^2 par $\int (f_n - f)^2$. Faute de formule, l'application estime la borne supérieure et l'intégrale numériquement. Le graphique a un curseur sur les termes f_1 à f_{20}.

Le produit scalaire dans L^2 avec un poids, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (éventuellement w = ...), donne aussi les normes et l'angle des fonctions. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) applique le procédé de Gram–Schmidt et reconnaît les polynômes classiques : Legendre, Tchebychev avec le poids $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ ou $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerre avec e^(−x) sur ⟨0; ∞⟩ et Hermite avec e^(−x²) ; il fonctionne aussi pour des vecteurs. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) trouve la meilleure approximation par un polynôme de degré n comme projection orthogonale, avec l'erreur et l'inégalité de Bessel. L'égalité de Parseval (et la déduction de $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) se trouve au chapitre des séries de Fourier.

Les normes matricielles s'écrivent ||[1 2; 3 4]||_1 (aussi _2, _oo et _F pour Frobenius ; sans indice, l'application les calcule toutes), le conditionnement cond([1 2; 3 4]) (p = 1 en option). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) calcule la norme d'un opérateur intégral de noyau K(x, t) : sur C⟨a; b⟩ comme le maximum de $\int|K|\,dt$, dans L^2 exactement pour un noyau dégénéré, sinon majorée par la norme de Hilbert-Schmidt. fnorm(g, ⟨a; b⟩) donne la norme de la forme linéaire $\varphi(u) = \int u \cdot g$ sur C et sur L^2 (théorème de Riesz), avec p = ... sur L^p.

Écrivez une équation intégrale de seconde espèce telle que vous la voyez : u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholm) ou u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterra) ; une photo convient aussi, ou les commandes fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) et volterra(K; f; λ; a). Un noyau dégénéré est ramené à un système linéaire ; avec un paramètre λ, l'application trouve les valeurs caractéristiques et les fonctions propres et tranche selon l'alternative de Fredholm. Les autres noyaux sont traités par la série de Neumann et la méthode de Nyström, une équation de Volterra à noyau k(x − t) par la transformée de Laplace.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Banach (g envoie l'intervalle dans lui-même, q = max |g′| < 1), calcule le nombre de pas a priori et itère avec l'estimation a posteriori de l'erreur (eps = ..., x0 = ... en option) ; banach(A, b) fait de même pour le système x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) donne les approximations successives de Picard avec l'intervalle où l'opérateur est contractant et une borne d'erreur. Les équations fonctionnelles de type Cauchy – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), celles de Jensen et de d'Alembert – sont résolues avec la démonstration.

Comment le saisir

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normes d'un vecteur, d'une suite (ℓ^p) et d'une fonction (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	La distance de deux fonctions pour la norme de la borne supérieure et dans L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Inégalités de Hölder et de Minkowski.
`convergence(f_n, ⟨a; b⟩)`	Convergence simple, uniforme et dans L^2 d'une suite de fonctions.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Produit scalaire, normes et angle de fonctions.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Procédé de Gram–Schmidt pour des fonctions et des vecteurs.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Meilleure approximation par un polynôme de degré n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normes matricielles 1, 2, ∞, de Frobenius et le conditionnement.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	La norme d'un opérateur intégral et de la forme linéaire ∫u·g.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Équations intégrales de Fredholm et de Volterra de seconde espèce.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Le théorème du point fixe de Banach et les approximations de Picard.

`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Équations fonctionnelles de type Cauchy.

Exemples

Les normes 1, 2 et ∞ d'un vecteur.

Énoncé: `||(1; -2; 3)||`

Résultat

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Étapes

- Les trois normes les plus courantes du vecteur $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: la somme des valeurs absolues des composantes ($\|\cdot\|_1$), la longueur euclidienne ($\|\cdot\|_2$) et la plus grande valeur absolue d'une composante ($\|\cdot\|_\infty$)

  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$

  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$

  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

||1/n||₂ = π/√6 – le problème de Bâle.

Énoncé: `||1/n||_2`

Résultat

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Étapes

- La norme de la suite $a_n = \frac{1}{n}$ dans l'espace ℓ^2 pour p = 2 : on somme la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et on prend la racine

  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

La série harmonique diverge – 1/n n'est pas dans ℓ^1.

Énoncé: `||1/n||_1`

Résultat

La suite (fonction) n'appartient pas à cet espace – sa norme est infinie.

Étapes

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ – la suite $a_n = \frac{1}{n}$ n'a pas de norme finie, elle n'appartient pas à l'espace ℓ^p pour p = 1

La valeur absolue supprimée en coupant l'intégrale.

Énoncé: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Résultat

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Étapes

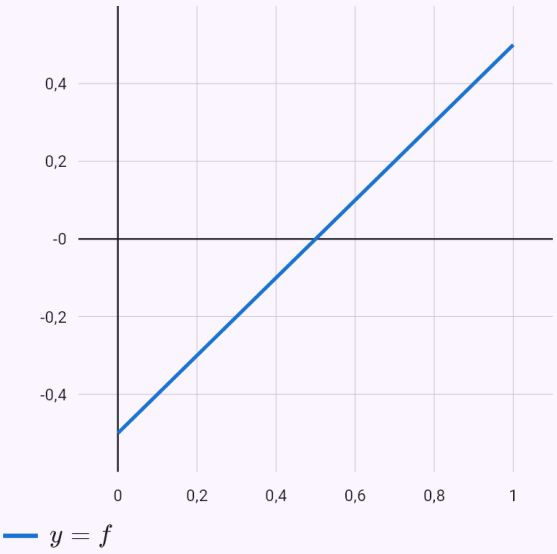
- On supprime la valeur absolue en coupant l'intégrale aux zéros de la fonction $x = \frac{1}{2}$ – sur chaque morceau, la fonction garde un signe constant

  $$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- La norme dans l'espace L^p pour p = 3 : l'intégrale $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, donc

  $$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Graphique



La fonction sur l'intervalle donné.

La norme de la borne supérieure à partir des points stationnaires et des bornes.

Énoncé: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Résultat

$$\|f\|_\infty = 18$$

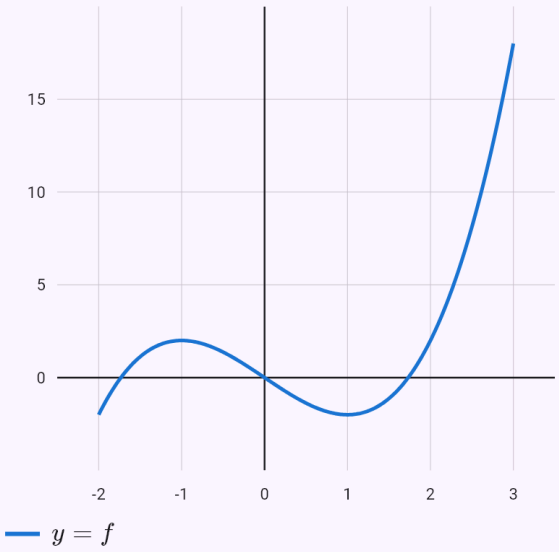
Étapes

- La norme de la borne supérieure d'une fonction continue sur un intervalle fermé est la plus grande valeur de |f|. On la cherche aux bornes et aux points stationnaires intérieurs : la dérivée $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, les points stationnaires $x = -1,\ x = 1$
- Les valeurs de |f| en ces points

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- La plus grande est la norme de la borne supérieure $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle -2;\,3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Graphique



La fonction sur l'intervalle donné.

La distance pour la norme de la borne supérieure et dans L².

Énoncé: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Résultat

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

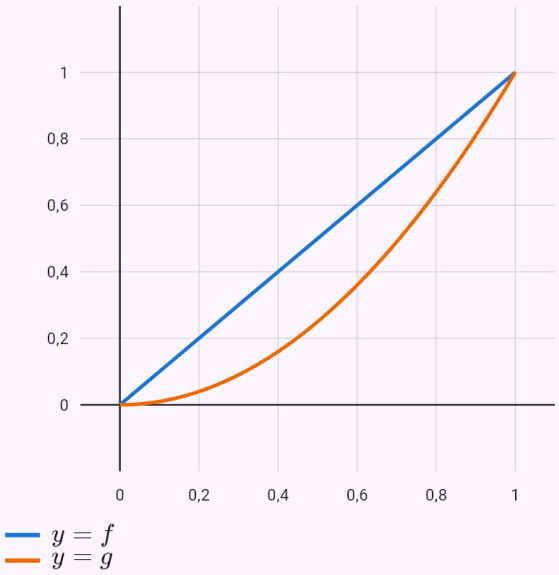
Étapes

- La distance de deux fonctions est la norme de leur différence : $f - g = x(1 - x)$
- La norme de la borne supérieure d'une fonction continue sur un intervalle fermé est la plus grande valeur de |f|. On la cherche aux bornes et aux points stationnaires intérieurs : la dérivée $(f - g)'(x) = 1 - 2x$, les points stationnaires $x = \frac{1}{2}$
- Les valeurs de |f| en ces points

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

- La plus grande est la norme de la borne supérieure $\|(f-g)\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$
- La norme dans l'espace L² pour p = 2 : l'intégrale $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, donc $\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$

Graphique



Les deux fonctions sur l'intervalle donné.

Inégalité de Hölder avec l'exposant conjugué q = 3/2.

Énoncé: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Résultat

$$\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Étapes

- L'inégalité de Hölder utilise l'exposant conjugué q : $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- La norme dans l'espace L⃞ pour p = 3 : l'intégrale $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, donc
  $\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$
- La norme dans l'espace L⃞ pour p = $\frac{3}{2}$: l'intégrale $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, donc
  $\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$
- Membre de gauche $\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, membre de droite $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – l'inégalité de Hölder est vérifiée.

x^n – simplement oui, uniformément non, dans L^2 oui.

Énoncé: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Résultat

La suite de fonctions converge simplement, mais pas uniformément.

Étapes

- La limite est décidée par la puissance q^n de base $q = x$: pour $|q| < 1$, $q^n \to 0$ (plus vite que ne croît toute puissance de n), pour $|q| > 1$ elle croît sans borne. Les points où $|q| = 1$ sont calculés à part.
- La limite simple : pour chaque x fixé, $f_n(x) = x^n$ est une suite de nombres ; on calcule sa limite quand $n \to \infty$

$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- La fonction limite

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

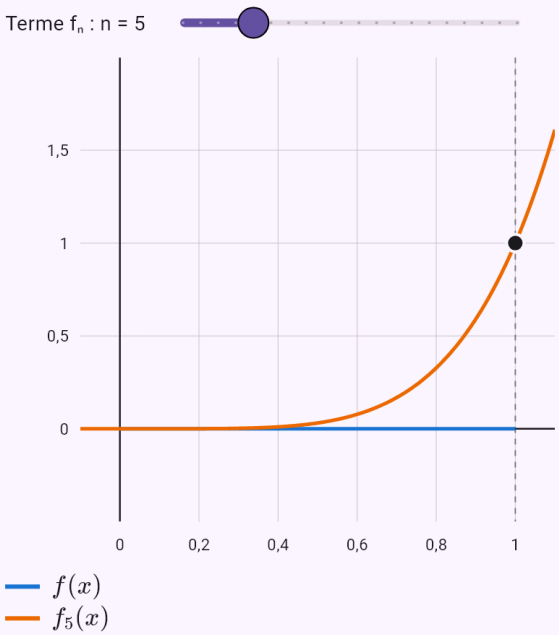
- Toutes les fonctions f_n sont continues, mais la fonction limite n'est pas continue en $x = 1$. La limite uniforme de fonctions continues est continue – la convergence n'est donc pas uniforme.
- Convergence dans L^2 :

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1},$$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – la suite converge dans L^2.

Graphique

Terme f_n : n = 5



La fonction limite f et le terme choisi f_n – le curseur montre comment f_n s'approche de f.

Convergence uniforme : $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Énoncé: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Résultat

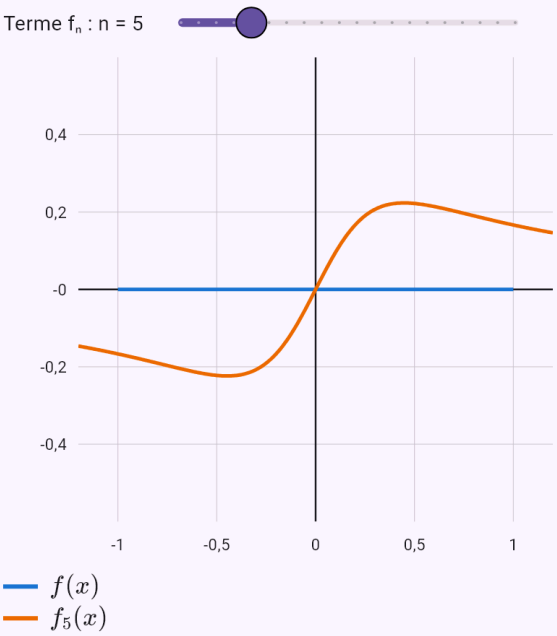
La suite de fonctions converge uniformément.

Étapes

- La limite simple : pour chaque x fixé, $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ est une suite de nombres ; on calcule sa limite quand n → ∞
  $x \in \langle -1;\ 1\rangle$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- La fonction limite : $f(x) = 0$
- On juge l'uniformité par $s_n = \sup |f_n - f|$. La différence $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ a pour dérivée $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; les candidats pour la plus grande valeur sont $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, la convergence est uniforme.
- Convergence dans L² – on calcule l'intégrale $\|f_n - f\|_2^2$ numériquement. Les valeurs tendent vers zéro – la suite converge dans L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Graphique



La fonction limite f et le terme choisi f_n – le curseur montre comment f_n s'approche de f.

La bosse mobile – simplement vers zéro, mais s_n et $\|f_n\|_2$ croissent.

Énoncé: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Résultat

La suite de fonctions converge simplement, mais pas uniformément.

Étapes

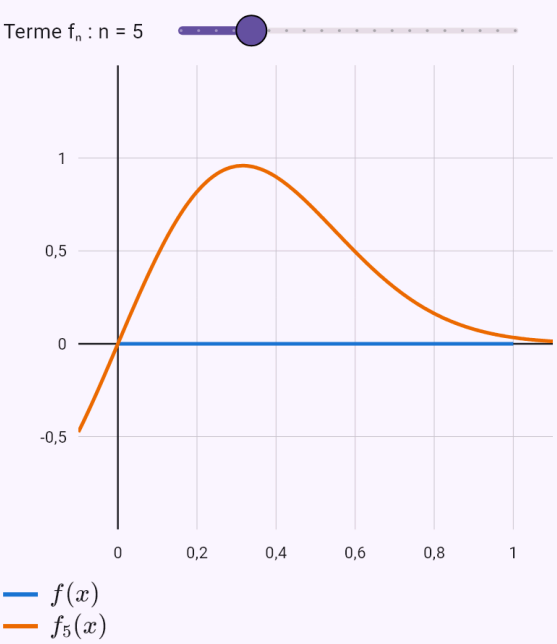
- La limite est décidée par la puissance q^n de base $q = e^{-x^2}$: pour |q| < 1, $q^n \to 0$ (plus vite que ne croît toute puissance de n), pour |q| > 1 elle croît sans borne. Les points où |q| = 1 sont calculés à part.
- La limite simple : pour chaque x fixé, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ est une suite de nombres ; on calcule sa limite quand $n \to \infty$

  $x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- La fonction limite : $f(x) = 0$
- On juge l'uniformité par $s_n = \sup |f_n - f|$. La différence $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ a pour dérivée $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; les candidats pour la plus grande valeur sont $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Comme $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (pas 0), la convergence n'est pas uniforme.

  $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$
- Convergence dans L² – on calcule l'intégrale $\|f_n - f\|_2^2$ numériquement. Les valeurs ne tendent pas vers zéro – la suite ne converge pas dans L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Graphique



La fonction limite f et le terme choisi f_n – le curseur montre comment f_n s'approche de f.

Produit scalaire, normes et angle de deux fonctions.

Énoncé: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

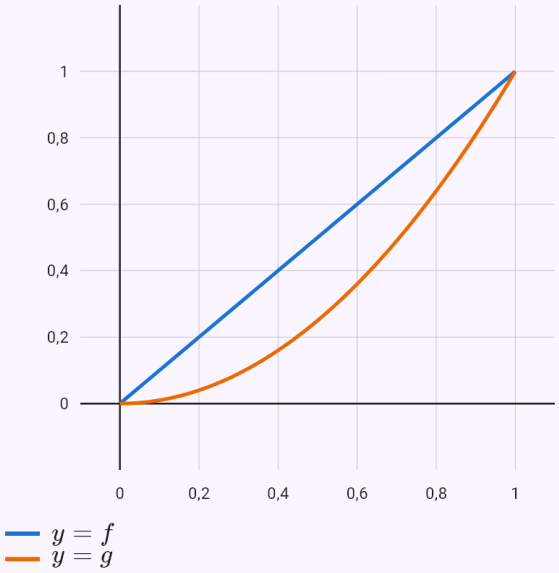
Résultat

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Étapes

- Le produit scalaire dans l'espace L² :
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- Les normes des deux fonctions données par le produit scalaire
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- L'angle entre les fonctions (l'inégalité de Cauchy–Schwarz garantit |cos φ| ≤ 1)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Graphique



Les deux fonctions sur l'intervalle donné.

Polynômes de Legendre à partir de 1, x, x², x³.

Énoncé: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Résultat

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

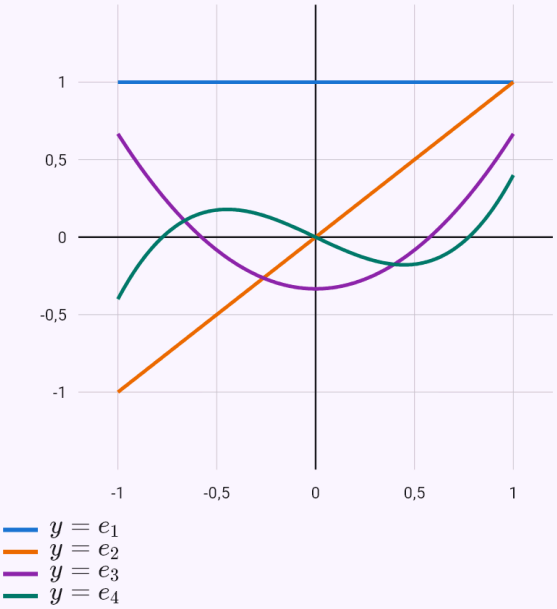
Étapes

- Le procédé de Gram–Schmidt – on garde la première fonction : $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Étape 2 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Les produits scalaires nécessaires : $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Étape 3 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Les produits scalaires nécessaires : $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Étape 4 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Les produits scalaires nécessaires $\langle f_4, e_1\rangle = 0$, $\langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5}$, $\langle f_4, e_3\rangle = 0$
- En divisant par les normes, on obtient un système orthonormé

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$, $\hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$
- Ce sont les polynômes de Legendre – sous leur forme habituelle avec $P_k(1) = 1$

  $$P_0(x) = 1$$
  $$P_1(x) = x$$
  $$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
  $$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Graphique



Les fonctions orthogonales sur l'intervalle donné.

Polynômes de Tchebychev – les intégrales à partir des moments du poids.

Énoncé: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Résultat

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Étapes

- Les produits scalaires de polynômes pour le poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se déduisent des moments du poids $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$

  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$

- Le procédé de Gram–Schmidt – on garde la première fonction : $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$
- Étape 2 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Les produits scalaires nécessaires : $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Étape 3 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Les produits scalaires nécessaires

  $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$

- Étape 4 : on retranche de la fonction ses projections sur les précédentes : $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Les produits scalaires nécessaires

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

- En divisant par les normes, on obtient un système orthonormé

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$

- Ce sont les polynômes de Tchebychev de première espèce, $T_k(\cos t) = \cos kt$

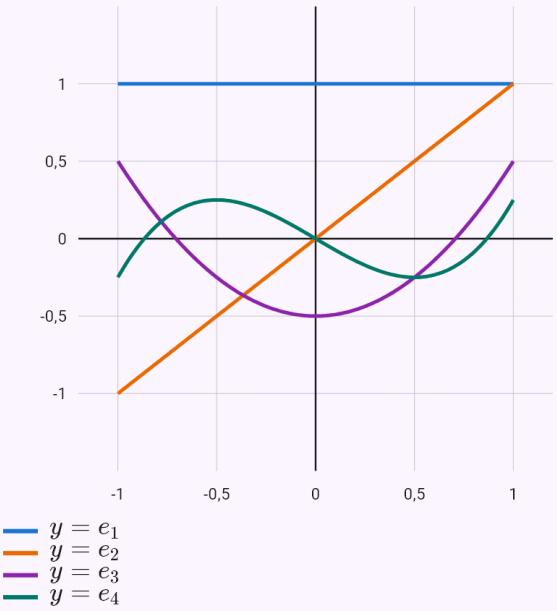
  $T_0(x) = 1$

  $T_1(x) = x$

  $T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$

  $T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$

Graphique



Les fonctions orthogonales sur l'intervalle donné.

La meilleure approximation quadratique de e^x sur $\langle -1; 1 \rangle$.

Énoncé: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Résultat

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Étapes

- La meilleure approximation dans L² est la projection orthogonale sur les polynômes de degré au plus n. Le procédé de Gram–Schmidt appliqué à 1, x, x², … donne une base orthogonale : $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$; $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Les coefficients de la projection

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

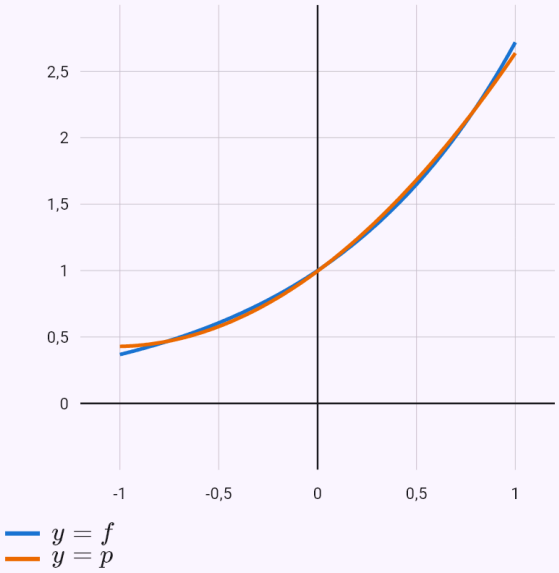
- La meilleure approximation

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$

- L'erreur par le théorème de Pythagore : $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Inégalité de Bessel : $\sum c_k^2 \|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Pour un système complet (n → ∞), elle devient une égalité – l'égalité de Parseval.

$$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2 \|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Graphique



La fonction f et sa meilleure approximation p.

Les normes 1, 2, ∞ et de Frobenius d'une matrice.

Énoncé: `|||[1 2; 3 4]||`

Résultat

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Étapes

- La matrice
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- La norme des colonnes est la plus grande somme des valeurs absolues d'une colonne :
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, donc
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- La norme spectrale est la racine de la plus grande valeur propre de. Les valeurs propres donc
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- La norme des lignes est la plus grande somme des valeurs absolues d'une ligne :
  $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, donc
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- La norme de Frobenius est la racine de la somme des carrés de tous les coefficients
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Une matrice presque singulière – κ ≈ 4·10⁴.

Énoncé: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Résultat

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Étapes

- La matrice
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- La norme spectrale est la racine de la plus grande valeur propre de. Les valeurs propres donc
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- Le conditionnement. Il indique de combien l'erreur relative des données peut être amplifiée ; la résolution d'un système peut perdre environ $4{,}6$ chiffres significatifs – la matrice est mal conditionnée.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$

Le noyau change de signe – l'intégrale coupée en t = x.

Énoncé: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Résultat

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Étapes

- La norme d'un opérateur intégral sur C⟨a; b⟩ est la plus grande valeur de φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Le noyau $K(x,t) = x - t$ change de signe là où K = 0 – on y coupe l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- La norme de la borne supérieure d'une fonction continue sur un intervalle fermé est la plus grande valeur de |f|. On la cherche aux bornes et aux points stationnaires intérieurs : la dérivée $\varphi'(x) = 2x - 1$, les points stationnaires $x = \frac{1}{2}$
- Les valeurs de |f| en ces points

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- La plus grande est la norme de la borne supérieure

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Le noyau est dégénéré, $K(x,t) = -t + x$. Sa norme dans L² découle alors des matrices de Gram des fonctions a⃗(x) et b⃗(t). À titre de comparaison, la norme de Hilbert-Schmidt n'est jamais plus petite.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}\left(G_b G_a\right)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

La norme d’une forme linéaire sur C et sur L² (théorème de Riesz).

Énoncé: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

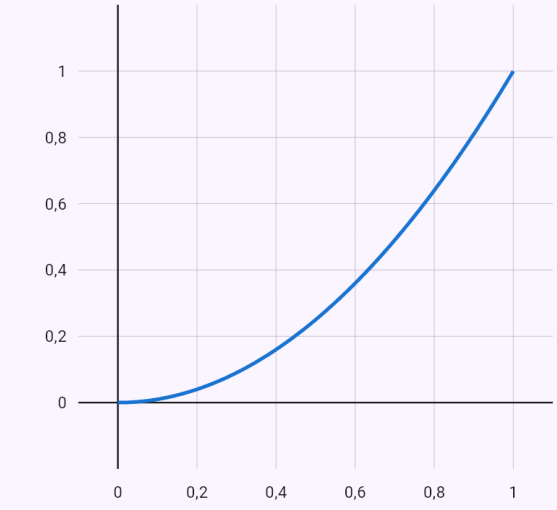
Résultat

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Étapes

- La forme linéaire φ(u) = ∫u·g sur $C\langle 0;\,1\rangle$ muni de la norme de la borne supérieure : sa norme est l’intégrale de |g|, approchée par des fonctions continues u ≈ sgn g :
  $$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_1$$
- La norme dans l'espace L𝕡 pour p = 1 : l'intégrale
  $\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$, donc $\|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$
- Sur $L^2\langle 0;\,1\rangle$, la forme linéaire φ(u) = ∫u·g est le produit scalaire avec g (théorème de Riesz). Par l’inégalité de Cauchy-Schwarz, sa norme est ‖g‖₂, atteinte pour u = g/‖g‖₂ :
  $$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_2$$
- La norme dans l'espace L𝕡 pour p = 2 : l'intégrale
  $\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}$, donc
  $$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Graphique



La fonction sur l'intervalle donné.

Un noyau dégénéré avec le paramètre λ.

Énoncé: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Résultat

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Conditions : $\lambda \neq 3$

Étapes

- Une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce (bornes fixes) : $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\,u(t)\,dt$, le noyau $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Le noyau est dégénéré – le produit d'une fonction de x et d'une fonction de t : $K(x,t) = x \cdot t$
- Les intégrales contenant la fonction inconnue sont des nombres – appelons-les constantes inconnues $c = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$. La solution a donc la forme $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- En reportant cette forme dans les définitions des constantes, on obtient un système linéaire de coefficients $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}$

$$c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$$

- Le système a une unique solution là où son déterminant est non nul : $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Ses racines sont les valeurs caractéristiques du noyau : $\lambda_1 = 3$
- Pour $\lambda \neq 3$, la solution du système est $c = \frac{1}{3-\lambda}$, donc $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Pour $\lambda_1 = 3$, l'équation homogène a des solutions non nulles – les fonctions propres $\varphi_1(x) = x$
- Alternative de Fredholm pour $\lambda_1 = 3$: le système est incompatible ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), l'équation n'a pas de solution pour ce λ (la fonction propre $\varphi(x) = x$).

Valeurs caractéristiques et fonctions propres.

Énoncé: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Résultat

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Étapes

- Une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce (bornes fixes) : $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\,u(t)\,dt$, le noyau $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Le noyau est dégénéré – une somme de 2 produits d'une fonction de x et d'une fonction de t : $K(x,t) = t + x$
- Les intégrales contenant la fonction inconnue sont des nombres – appelons-les constantes inconnues $c_1 = \int_0^1 t\,u(t)\,dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\,dt$. La solution a donc la forme $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- En reportant cette forme dans les définitions des constantes, on obtient un système linéaire de coefficients $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

$$c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$$
$$c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$$

- Le système a une unique solution là où son déterminant est non nul : $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Ses racines sont les valeurs caractéristiques du noyau : $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Pour $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$, l'équation homogène a des solutions non nulles – les fonctions propres $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Pour $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$, l'équation homogène a des solutions non nulles – les fonctions propres $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Un noyau non dégénéré – série de Neumann et méthode de Nyström.

Énoncé: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Résultat

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Étapes

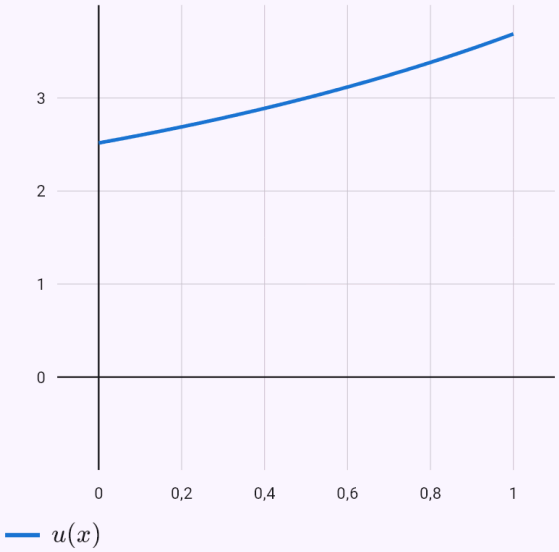
- Une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce (bornes fixes) : $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, le noyau $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Le noyau n'est pas dégénéré. La série de Neumann – les approximations successives $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – converge, car

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Méthode de Nyström : l'intégrale est remplacée par une quadrature de Gauss à 32 nœuds, l'équation aux nœuds donne un système linéaire et les valeurs entre les nœuds découlent de l'équation elle-même.Comparée à deux fois moins de nœuds, la précision est d'environ 10^{-8}. Les valeurs de la solution

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$u(x)$	$2{,}517$	$2{,}7372$	$2{,}9997$	$3{,}3134$	$3{,}6894$

Graphique



La solution de l'équation intégrale.

Une équation de Volterra par la transformée de Laplace – cos x.

Énoncé: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

Résultat

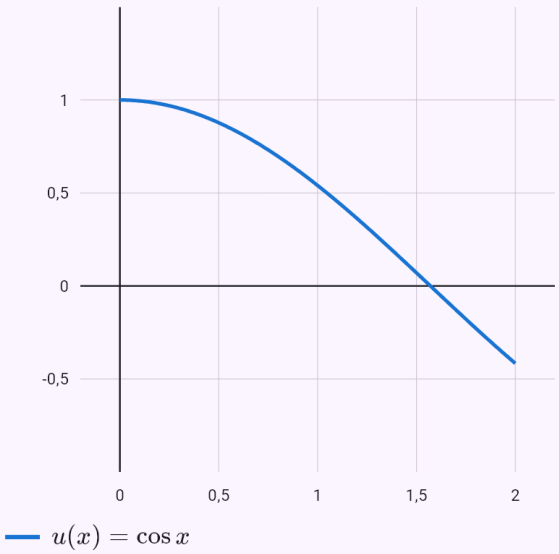
$$u(x) = \cos x$$

Étapes

- Une équation intégrale de Volterra de seconde espèce (la borne supérieure est x) : $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, le noyau $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Le noyau ne dépend que de x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – l'intégrale est un produit de convolution, que la transformée de Laplace change en produit. Les transformées. L'équation des transformées $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, d'où $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Par la transformée inverse, $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

Graphique



La solution de l'équation intégrale.

Le point fixe de cos x avec les estimations a priori et a posteriori.

Énoncé: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Résultat

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Étapes

- Le théorème du point fixe de Banach demande que $g(x) = \cos x$ envoie l'intervalle $I = \langle 0;\ 1\rangle$ dans lui-même. Son image (des bornes et des points stationnaires) est $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – elle est contenue dans I.
- La norme de la borne supérieure d'une fonction continue sur un intervalle fermé est la plus grande valeur de |f|. La dérivée $g''(x) = -\cos x$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle – les bornes suffisent.
- Les valeurs de |f| en ces points

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- La plus grande est la norme de la borne supérieure $\|g'\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$
- Par le théorème des accroissements finis, |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y| avec q la plus grande valeur de |g'| : $q = \max\limits_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g est une contraction.
- L'estimation a priori : on part de $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. De avec $\varepsilon = 10^{-6}$ et $q = \sin 1$, il faut n ≥ 86 pas.

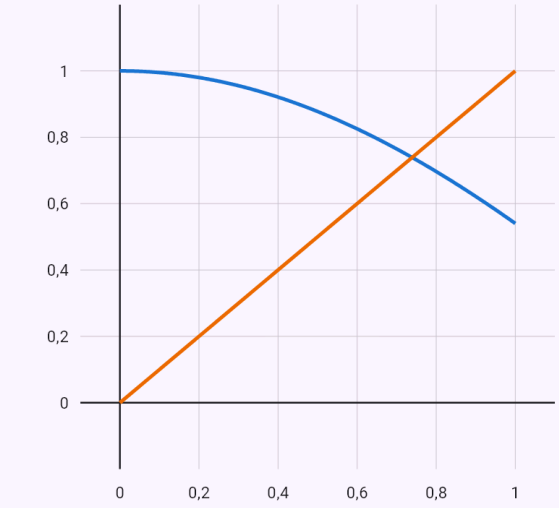
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\ln q}$$

- On itère $x_{n+1} = g(x_n)$; la dernière colonne est l'estimation a posteriori de l'erreur, et le calcul s'arrête dès qu'elle passe sous ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145\cdot 10^{-6}$	$6{,}075\cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710\cdot 10^{-7}$	$4{,}092\cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193\cdot 10^{-7}$	$2{,}757\cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498\cdot 10^{-7}$	$1{,}857\cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356\cdot 10^{-7}$	$1{,}251\cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587\cdot 10^{-7}$	$8{,}426\cdot 10^{-7}$

- Le point fixe : $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426\cdot 10^{-7}$. Il a suffi de 38 pas au lieu des 86 de l'estimation a priori – l'estimation a posteriori est en général bien plus fine.

Graphique



La fonction g et la droite y = x – le point fixe est leur intersection.

Le système x = Ax + b, une contraction pour la norme ∞.

Énoncé: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Résultat

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Étapes

- Le système sous la forme pour l'itération

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- La norme des colonnes est la plus grande somme des valeurs absolues d'une colonne donc

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- La norme des lignes est la plus grande somme des valeurs absolues d'une ligne donc

  $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- L'application x ↦ Ax + b est une contraction si une norme de A est inférieure à 1. On prend la plus petite :

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- L'estimation a priori : on part de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. De avec $\varepsilon = 10^{-6}$ et $q = 0{,}6$, il faut n ≥ 31 pas.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- On itère $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; la dernière colonne est l'estimation a posteriori de l'erreur, et le calcul s'arrête dès qu'elle passe sous ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Le point fixe. Il a suffi de 28 pas au lieu des 31 de l'estimation a priori – l'estimation a posteriori est en général bien plus fine.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Pour comparaison, le point fixe exact du système linéaire

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Les approximations de Picard et la solution exacte.

Énoncé: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

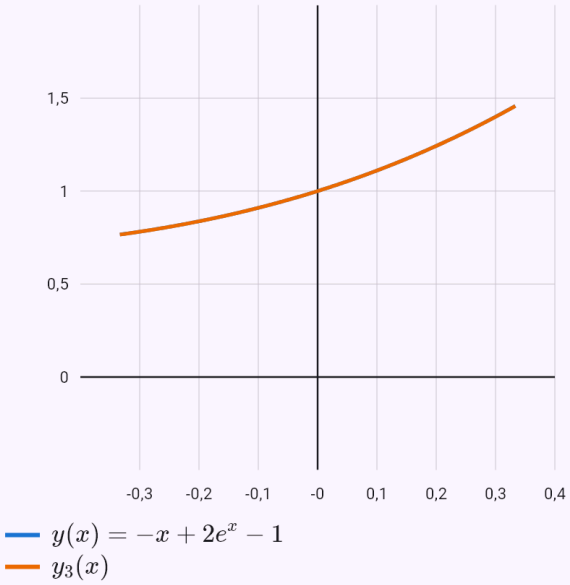
Résultat

$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Étapes

- Le problème $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ devient l'équation intégrale y = T(y) ; les approximations successives de Picard itèrent l'opérateur T :
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Approximation 1 :
  $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Approximation 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Approximation 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Où T est une contraction (théorème de Picard-Lindelöf) : sur le rectangle R : $|x| \le 1,\ |y-1| \le 1$ on a $M = \max_R |f| \doteq 3$ et. Sur l'intervalle avec $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$, les approximations restent dans le rectangle et $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- La borne d'erreur de la dernière approximation pour $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$
- La solution exacte pour comparaison : $y(x) = -x + 2e^x - 1$; l'erreur effective au bord de l'intervalle $|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Graphique



L'approximation de Picard et la solution exacte (si elle est connue).

L'équation de Cauchy – f(x) = cx.

Énoncé: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Résultat

$$f(x) = c\,x$$

Étapes

- L'équation fonctionnelle de Cauchy d'une fonction additive : $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- On suppose la fonction f continue. Sans cela, l'équation de Cauchy a aussi des solutions discontinues « pathologiques » (construites à l'aide d'une base de Hamel).
- Substitution :
  $x = y = 0:\quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- La substitution y = −x montre que la fonction est impaire :
  $y = -x:\quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Par récurrence pour n entier naturel :
  $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Pour r = m/n rationnel
  $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Les rationnels sont denses et la fonction est continue, donc cela vaut pour tout x réel :
  $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Toutes les solutions continues (a, b, c constantes quelconques) : $f(x) = c\,x$
- Vérification par substitution : $c(x+y) = c\,x + c\,y$

L'équation de d'Alembert – cos et cosh.

Énoncé: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Résultat

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Étapes

- L'équation fonctionnelle de d'Alembert :
  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- On suppose la fonction f continue. Sans cela, l'équation de Cauchy a aussi des solutions discontinues « pathologiques » (construites à l'aide d'une base de Hamel).
- Substitution
  $x = y = 0:\quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- La substitution x = 0 montre que la fonction est paire :
  $x = 0:\quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- Les solutions continues sont régulières ; en dérivant deux fois par rapport à y en y = 0, on obtient une équation différentielle
  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big|_{y=0}:\quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Selon le signe de la constante k :
  $k = -c^2:\ \cos(cx), \qquad k = 0:\ 1, \qquad k = c^2:\ \cosh(cx)$
- Toutes les solutions continues (a, b, c constantes quelconques) :
  $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Vérification par substitution :
  $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Limitations connues

- L'application trouve la limite simple des suites dont la limite est décidée par une puissance q^n ou une expression rationnelle en n ; les plus compliquées (sin nx sans division par n) peuvent être refusées.

- La convergence est étudiée sur un intervalle fermé borné ; un intervalle infini pas encore.
- Le procédé de Gram–Schmidt pour 6 fonctions au plus, l'approximation par un polynôme de degré 5 au plus.
- Un noyau dégénéré d’au plus 4 termes ; avec un paramètre λ, seulement les noyaux dégénérés, les autres sont résolus numériquement pour un λ numérique. Une équation de Volterra exactement seulement avec un noyau $k(x - t)$ depuis zéro ou $a(x) \cdot b(t)$, sinon par approximations successives et numériquement.
- Matrices jusqu’à 6×6, au plus 6 approximations de Picard. Équations fonctionnelles des seuls types cités (et celle de Cauchy avec un terme polynomial en plus), toujours avec des solutions continues.

35. Fonctions d'une variable complexe

Les conditions de Cauchy-Riemann de f(z) se vérifient par cr(z^2 + 3z) ; la fonction peut s'écrire en z, $\bar{z}$ (conj(z)), |z|, Re z, Im z ou directement en x et y. L'application décompose f = u + iv, calcule les dérivées partielles et substitue dans u_x = v_y, u_y = −v_x. Si elles sont vérifiées partout, la fonction est holomorphe et le résultat est la dérivée f'(z) écrite en z ; sinon l'application indique où elles sont vérifiées (des points ou une courbe) et la fonction n'est pas holomorphe. Pour une fonction harmonique harmonic(u = x^2 - y^2) elle trouve la conjuguée harmonique en intégrant les conditions et toute la fonction f(z) en posant x = z, y = 0 ; on peut aussi donner la partie imaginaire, harmonic(v = 2xy).

Valeurs des fonctions élémentaires dans $\mathbb{C}$: la détermination principale du logarithme ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w avec toutes les valeurs différant de 2kπi, une puissance d'exposant complexe i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh et cosh d'un nombre complexe par les formules d'addition. L'argument est dans le même intervalle que pour les nombres complexes (puce « Argument principal »). Les équations sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 se résolvent par la substitution w = e^(iz) (e^z) et une équation du second degré, e^z = 1 + i par le logarithme ; le résultat est la solution générale avec k ∈ $\mathbb{Z}$ et quelques solutions dans le plan complexe. Une équation en x sans solution réelle (sin x = 2) propose le bouton de la solution complexe.

Singularités et résidus : singularities(f) trouve les racines du dénominateur et les singularités essentielles (e^(1/z), sin(1/z)), en détermine le type – apparente, pôle d'ordre m, essentielle – et calcule les résidus : en un pôle simple g(a)/q'(a), en un pôle d'ordre supérieur par la dérivée de (z − a)^m f(z), en une singularité essentielle par la série de Laurent. Res(f, z = a) calcule un résidu. La série de Laurent d'une fraction rationnelle dans une couronne laurent(f, 1 < |z| < 2) (ou |z| > 1, 0 < |z − a| < r, autour d'un point laurent(f, z = a)) se construit par les éléments simples sur $\mathbb{C}$ et la série géométrique de chacun – selon que son pôle est à l'intérieur ou à l'extérieur de la couronne. L'intégrale sur un cercle oint(f, |z − a| = r) (sur une photo \oint_{|z−a|=r}) se calcule par le théorème des résidus ; sans singularité à l'intérieur elle est nulle, une singularité sur le cercle est signalée.

Les résidus en analyse réelle : une intégrale impropre d'une fraction rationnelle sur tout l'axe, avec cos ax ou sin ax (lemme de Jordan) et de 0 à ∞ d'une fonction paire ; une intégrale d'une fraction rationnelle en cos t et sin t sur ⟨0; 2π⟩ par z = e^(it). Les intégrales avec un cosinus ou un sinus et sur ⟨0; 2π⟩ passent directement par les résidus, pour les autres choisissez la puce « Par les résidus » (retour par « Méthode habituelle »). La même puce sur une série somme Σ R(n) à partir de 1 (de 0 ou d'un autre entier) par le noyau π cot πz, une série alternée par π/sin πz ; la somme sur tous les entiers depuis −∞ se fait directement. La transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle invlaplace(F) (sur une photo \mathcal{L}^{-1}\{F\}) se calcule comme somme des résidus de F(s)e^(st).

Le théorème de Rouché rouche(p, |z| < r) compte les racines d'un polynôme dans un disque par le terme qui l'emporte sur la somme des autres sur le cercle, dans une couronne r < |z| < R comme différence de

deux disques ; les racines sont montrées dans le plan complexe. Une application conforme w = f(z) est décomposée en u et v, l'application indique où elle est conforme (f' ≠ 0) et, pour une transformation de Möbius (αz + β)/(γz + δ), trouve les points fixes et les images des axes réel et imaginaire et du cercle unité. Le graphique montre l'image du quadrillage des droites x = c et y = c.

La transformée de Fourier d'une fonction rationnelle ftransform(1/(1 + t^2)) (d'une photo \mathcal{F}\{f\}) se calcule par les résidus - pour ω > 0 le chemin est fermé dans le demi-plan inférieur, pour ω < 0 dans le supérieur - et pour une fonction paire (impaire) le résultat s'écrit avec |ω|. Pour une densité en x on obtient la fonction caractéristique de la loi au signe de ω près, pour la loi de Cauchy symétrique directement e^(−|t|). La transformée en Z inverse invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) est la somme des résidus de $F(z)z^{n-1}$, avec la valeur initiale x[0] = lim F(z) pour z → ∞. Leur usage en filtrage, régulation et optique est au chapitre Applications de l'analyse complexe.

Comment le saisir

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Les conditions de Cauchy-Riemann et la dérivée.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	La conjuguée harmonique d'une partie réelle (imaginaire).
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logarithme, puissances, fonctions trigonométriques et équations dans $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Un résidu en un point, toutes les singularités.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Une série de Laurent dans une couronne ou autour d'un point.
`oint(f, |z - a| = r)`	Une intégrale sur un cercle par le théorème des résidus.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Intégrales réelles par les résidus.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	La somme d'une série par les résidus.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Le nombre de racines d'un polynôme dans un disque ou une couronne.
`w = (z - i)/(z + i)`	Une application conforme, une transformation de Möbius.

`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	La transformée de Laplace inverse par les résidus.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Transformée de Fourier par les résidus.
`invz(z/(z - 1/2))`	Transformée en Z inverse par les résidus.

Exemples

Une fonction holomorphe – les conditions sont vérifiées partout, la dérivée en z.

Énoncé: `cr(z^2 + 3z)`

Résultat

$$f'(z) = 2z + 3$$

Étapes

- On décompose la fonction en parties réelle et imaginaire, f = u + iv avec z = x + iy :
  $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- On substitue dans les conditions de Cauchy-Riemann
  $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$
  $u_x = v_y :\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x :\ -2y = -2y$
- Les deux conditions sont vérifiées dans tout le plan et les dérivées partielles sont continues – la fonction est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.
- La dérivée de la fonction holomorphe, écrite en z :
  $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

Les conditions ne sont vérifiées que sur la droite y = x – la fonction n'est pas holomorphe.

Énoncé: `cr(x^2 + i y^2)`

Résultat

La fonction n'est pas holomorphe – les conditions de Cauchy-Riemann ne sont vérifiées sur aucun ouvert.

Étapes

- On décompose la fonction en parties réelle et imaginaire, f = u + iv avec z = x + iy : $u = x^2, \quad v = y^2$
- Les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y

  $u_x = 2x,\ u_y = 0$

  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- On substitue dans les conditions de Cauchy-Riemann $u_x = v_y, u_y = -v_x$

  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$

  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Les deux conditions ne sont vérifiées que là où $2(x - y) = 0$. La fonction y est dérivable, mais aucun voisinage d'un point ne les vérifie – la fonction n'est holomorphe nulle part.

La conjuguée harmonique et f(z) = z² + z.

Énoncé: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Résultat

$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$

Étapes

- La partie réelle u est donnée : $u = x^2 - y^2 + x$
- On vérifie qu'elle est harmonique – son laplacien est nul : $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- La première condition de Cauchy-Riemann $v_y = u_x$ donne v en intégrant par rapport à y – la « constante » peut dépendre de x :

  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- On trouve C(x) par la seconde condition $v_x = -u_y$:

  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- La conjuguée harmonique : $v = 2xy + y + C$
- On écrit f(z) = u + iv en z – il suffit de poser x = z et y = 0 : $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

La détermination principale du logarithme et toutes ses valeurs.

Énoncé: `ln(1 + i)`

Résultat

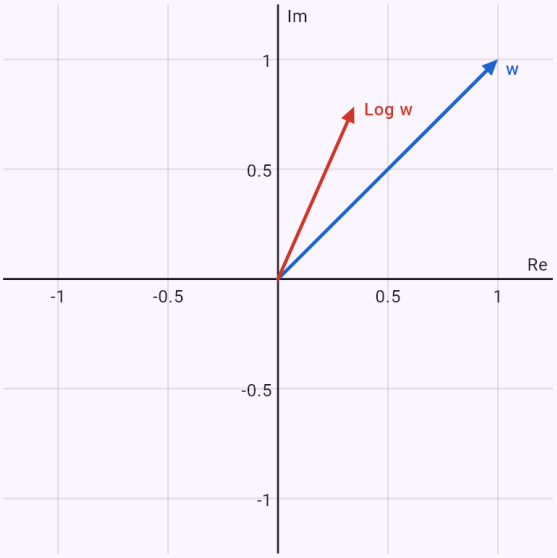
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Étapes

- La détermination principale du logarithme est $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, l'argument dans $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- Le module et l'argument principal du nombre : $|1+i| = \sqrt{2},\ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- L'exponentielle est périodique de période 2πi, le logarithme a donc une infinité de valeurs – elles diffèrent de multiples de 2πi

$$\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

i^i est le nombre réel e^(−π/2).

Énoncé: `i^i`

Résultat

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

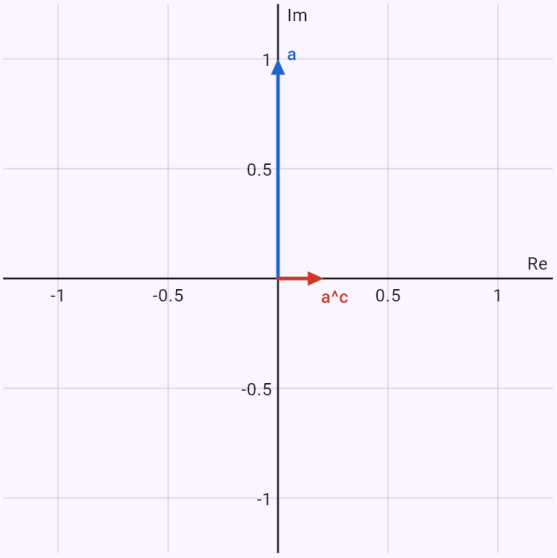
Étapes

- Une puissance d'exposant complexe se définit par la détermination principale du logarithme (argument dans $\langle 0; 2\pi)$)

$$a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$$

- On décompose l'exposant en parties réelle et imaginaire : $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- La valeur principale de la puissance, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y) : i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Les autres valeurs du logarithme donnent toutes les valeurs de la puissance : $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

Graphique



Le plan complexe – les nombres donnés en bleu, le résultat en rouge, l'argument φ en arc depuis le demi-axe réel positif.

L'équation sin z = 2 – la substitution w = e^(iz) et une équation du second degré.

Énoncé: `sin z = 2`

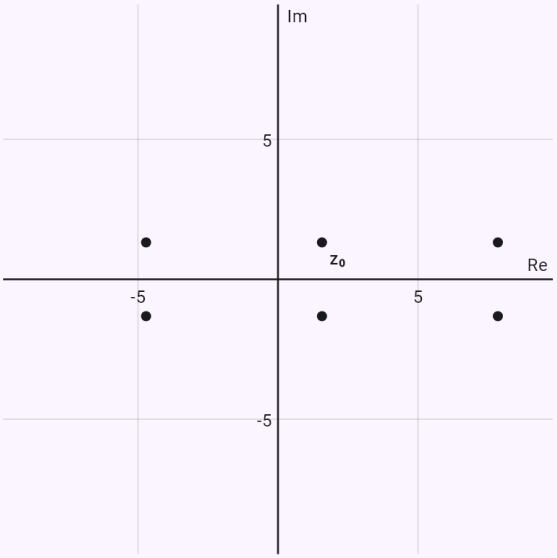
Résultat

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- On écrit la fonction avec des exponentielles et on substitue : $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- En multipliant par w on obtient une équation du second degré : $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Ses racines : $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Retour à z : $iz = \log w$, donc $z = -i\log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i\ln|w|$ (argument dans $\langle 0; 2\pi)$) : $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Graphique



Plan complexe – les solutions comme points : sur l'axe horizontal la partie réelle, sur l'axe vertical la partie imaginaire.

Un pôle d'ordre inférieur grâce à un zéro du numérateur, et un pôle simple.

Énoncé: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

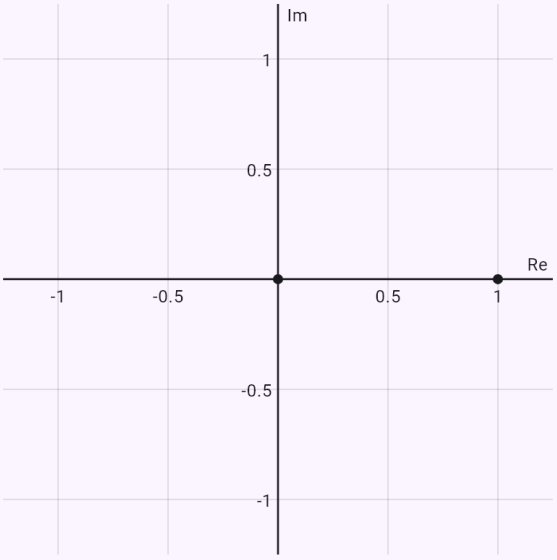
Résultat

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Étapes

- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- En 0 le dénominateur a une racine de multiplicité 3, le numérateur de multiplicité 1 – c'est un pôle d'ordre 2
- Le résidu en un pôle d'ordre 2 $\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},$ I
- En 1 le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q $\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z^$

Graphique



Plan complexe – les points singuliers de la fonction.

Une singularité essentielle – le résidu par la série de Laurent.

Énoncé: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Résultat

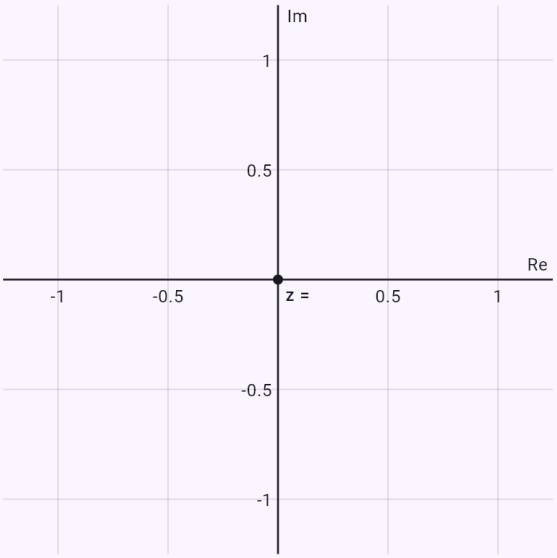
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Étapes

- En 0 il y a une singularité essentielle – l'exposant (l'argument) y a un pôle et la partie principale de la série de Laurent est infinie.
- Le résidu est le coefficient c_{-1} de $\frac{1}{z-a}$ dans la série de Laurent autour de 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Graphique



Plan complexe – les points singuliers de la fonction.

La série de Laurent dans la couronne 1 < |z| < 2 – une fraction en puissances de 1/z, l'autre en

puissances de z.

Énoncé: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

Résultat

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Étapes

- Points singuliers : $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. On cherche la série de Laurent dans la couronne $1 < |z| < 2$ – aucun point singulier ne s'y trouve.
- On décompose la fonction en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) : $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Le pôle de la fraction est à l'intérieur du cercle intérieur – on met $\frac{1}{z-c}$ en facteur et on utilise la série géométrique en puissances de $\frac{1}{z-c}$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

- Le pôle de la fraction est à l'extérieur de la couronne – on met une constante en facteur et on utilise la série géométrique en puissances de z - c

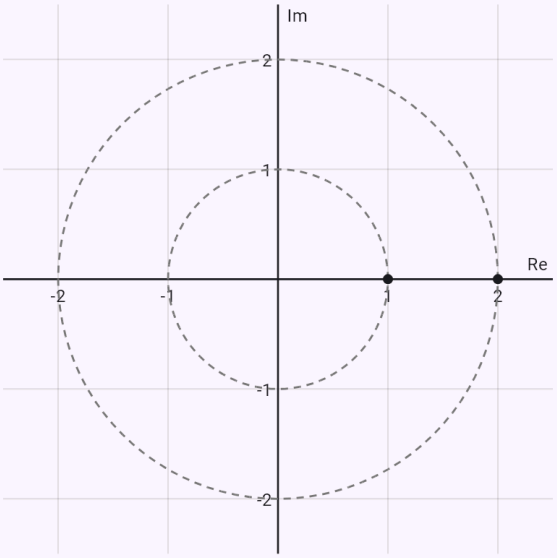
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

- On additionne les séries terme à terme

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$

- Le terme général : $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

Graphique



Plan complexe – la couronne de la série de Laurent (en pointillé) et les points singuliers.

Le théorème des résidus en un pôle d'ordre 2.

Énoncé: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Résultat

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

Étapes

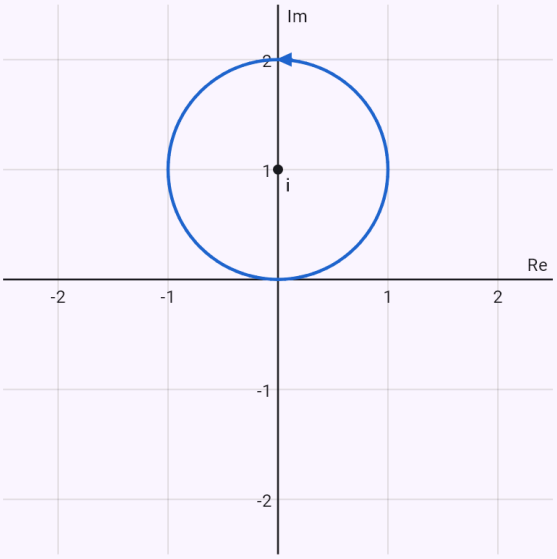
- On intègre sur le cercle de centre i et de rayon 1, dans le sens direct : $|z-i|=1$
- À l'intérieur du cercle se trouvent les points singuliers $z_0 = i$, à l'extérieur $\emptyset$
- En i le dénominateur a une racine de multiplicité 2, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 2
- Le résidu en un pôle d'ordre 2

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2 f(z)\Big], \quad (z-i)^2 f(z) = $$

- D'après le théorème des résidus

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\big(e^i\big) = 2\pi i\, e^i$$

Graphique



Plan complexe – le cercle d'intégration (la flèche indique le sens) et les points singuliers.

Une intégrale impropre avec un cosinus – lemme de Jordan.

Énoncé: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Résultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

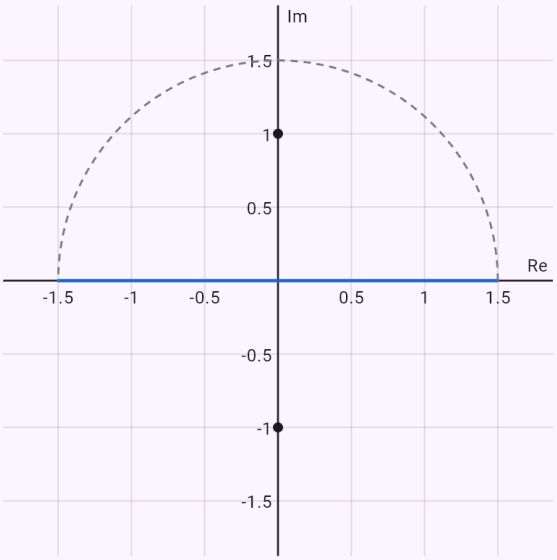
Étapes

- Avec un cosinus ou un sinus, $\deg Q \geq \deg P + 1$ et Q sans racine réelle suffisent – l'intégrale sur le demi-cercle tend alors vers zéro d'après le lemme de Jordan : $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Le cosinus est la partie réelle de e^{iax}
- On ferme l'axe réel par un grand demi-cercle dans le demi-plan supérieur. À l'intérieur se trouvent les pôles $z_0 = i$, l'intégrale sur le demi-cercle tend vers zéro.
- En i le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$$

- D'après le théorème des résidus l'intégrale vaut 2πi fois la somme des résidus du demi-plan supérieur : $2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$

Graphique



Plan complexe – l'axe réel fermé par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur (en pointillé) et les pôles de l'intégrande.

Une intégrale sur ⟨0; 2π⟩ comme intégrale sur le cercle unité.

Énoncé: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

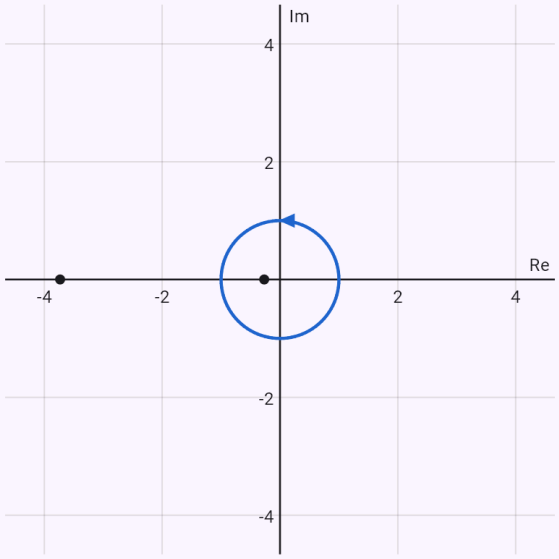
Résultat

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Étapes

- On transforme l'intégrale sur ⟨0; 2π⟩ en une intégrale sur le cercle unité par la substitution
  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$
- Après substitution et simplification on obtient l'intégrale d'une fraction rationnelle sur |z| = 1 :
  $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$
- À l'intérieur du cercle se trouvent les points singuliers $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, à l'extérieur $z_0 = -2 - \sqrt{3}$
- En $-2 + \sqrt{3}$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q
  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3},\quad g =$
- D'après le théorème des résidus
  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Graphique



Plan complexe – le cercle unité z = e^(it) et les pôles de l'intégrande.

Σ 1/n² = π²/6 – le résidu en zéro, où le noyau a aussi un pôle.

Énoncé: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Par les résidus

Résultat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Calcul de l'intégrale ou de la somme

Méthode habituelle ✓ Par les résidus

Étapes

- La fonction π cot πz a en chaque entier n un pôle simple de résidu 1. L'intégrale sur un grand carré tend vers zéro, donc la somme de la série est moins la somme des résidus aux pôles de R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \cot \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- La condition $\deg Q \geq \deg P + 2$ est vérifiée : $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $z^2 = 0:\ z_0 = 0$
- En 0, R et le noyau ont tous deux un pôle – le résidu est le coefficient de 1/z de leur produit

$$\pi \cot \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

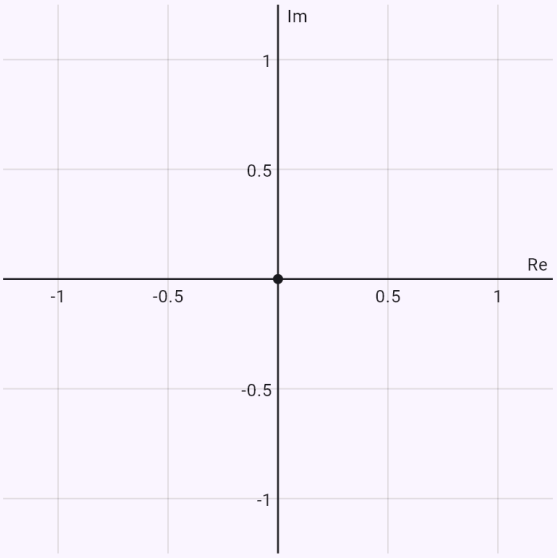
- La somme sur tous les entiers :

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R est paire, R(−n) = R(n), donc la somme à partir de 1 en est la moitié (sans le terme n = 0) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$$

Graphique



Plan complexe – les pôles de R(z) ; le noyau π cot πz a en plus des pôles en tous les entiers.

Théorème de Rouché – quatre racines dans la couronne 1 < |z| < 2.

Énoncé: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

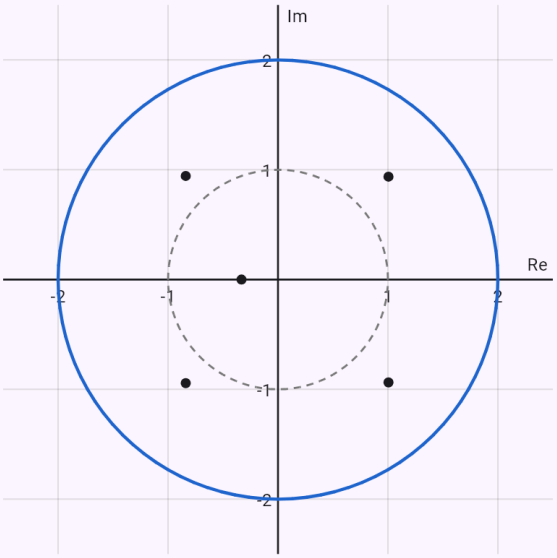
Résultat

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Étapes

- Sur le cercle |z| = 2 le terme z^5 l'emporte sur la somme des autres – d'après le théorème de Rouché le polynôme a dans le disque autant de racines que z^5, soit 5 :
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32,\quad 32 > 7$
- Sur le cercle |z| = 1 le terme $3z$ l'emporte sur la somme des autres – d'après le théorème de Rouché le polynôme a dans le disque autant de racines que $3z$, soit 1 :
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1,\quad 3 > 2$
- Dans la couronne c'est la différence des nombres dans le grand et le petit disque : $5 - 1 = 4$
- Les racines numériquement, pour vérifier
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Graphique



Plan complexe – les cercles et les racines du polynôme (calculées numériquement).

Une transformation de Möbius – le demi-plan supérieur sur le disque unité.

Énoncé: `w = (z - i)/(z + i)`

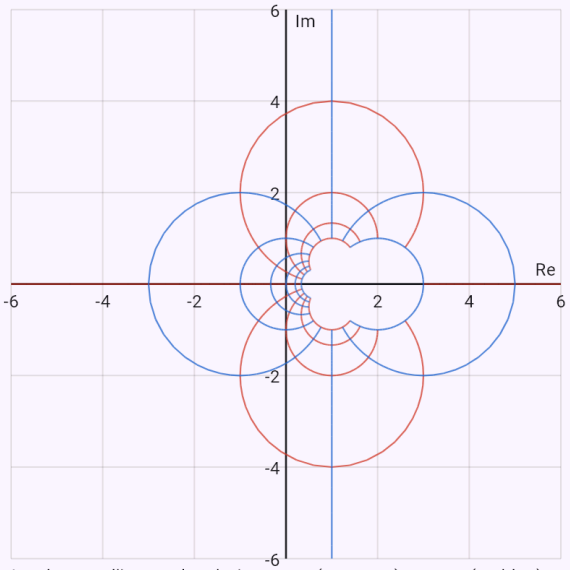
Résultat

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Étapes

- On écrit l'application par ses composantes
  $w = u + iv,\quad u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- L'application est conforme partout sauf au pôle $z_0 = -i$:
  $f'(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- C'est une transformation de Möbius $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Les points fixes sont solutions de f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0 :\ z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- L'axe réel a pour image $|w| = 1$
- L'axe imaginaire a pour image $\operatorname{Im} w = 0$
- Le cercle unité a pour image $\operatorname{Re} w = 0$
- Le graphique montre l'image d'un quadrillage – les droites x = c (en rouge) et y = c (en bleu) pour |c| ≤ 2 avec un pas de $0{,}5$

Graphique



Le plan w – l'image des droites x = c (en rouge) et y = c (en bleu) par w = f(z).

La transformée de Laplace inverse comme somme de résidus.

Énoncé: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Résultat

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Étapes

- La transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle est la somme des résidus de $F(s)\,e^{st}$ en tous les pôles de F

  $$f(t) = \sum \operatorname{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0:\ s_1 = -1,\ s_2 = -2i,\ s_3 = 2i$
- En -1 le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- En $-2i$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

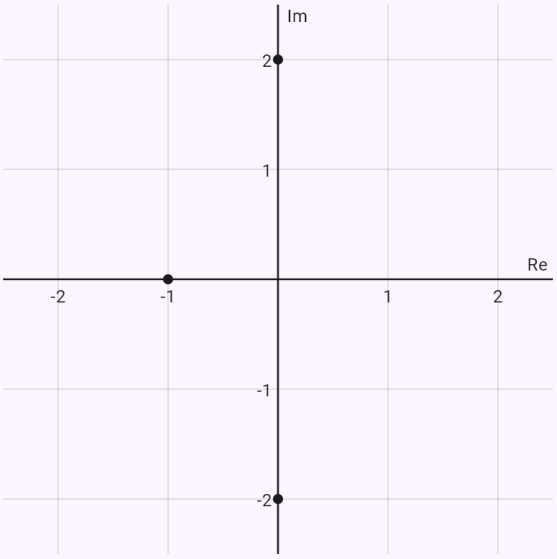
  $$\operatorname{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- En $2i$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- On additionne les résidus et on écrit le résultat sous forme réelle : $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Graphique



Plan complexe – les pôles de F(s).

Transformée de Fourier de la lorentzienne : π·e^(−|ω|).

Énoncé: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Résultat

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Étapes

- Transformée de Fourier d'une fonction rationnelle : on ferme l'intégrale par un grand demi-cercle (lemme de Jordan) et on additionne les résidus

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $t^2 + 1 = 0:\ t_1 = -i,\ t_2 = i$
- En $-i$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw},\ q' =$$

- En i le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw},\ q' = 2t$$

- Pour ω > 0 on ferme le chemin dans le demi-plan inférieur (sens négatif, −2πi)

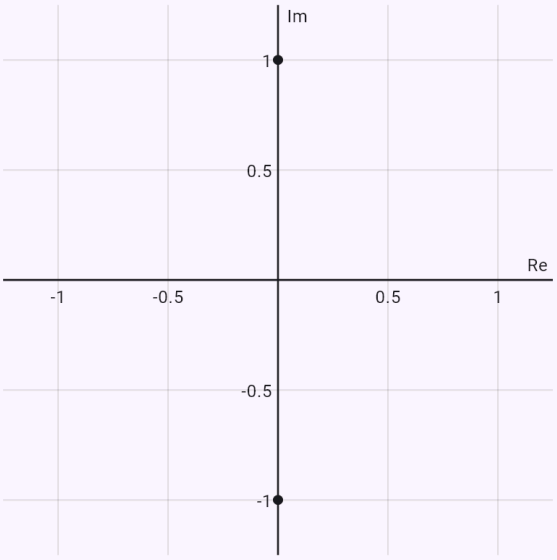
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Pour ω < 0 on ferme le chemin dans le demi-plan supérieur (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Résultat - la transformée de Fourier : $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Graphique



Plan complexe – les pôles de F(s).

Fonction caractéristique de la loi de Cauchy e^(−|t|).

Énoncé: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Résultat

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Étapes

- Transformée de Fourier d'une fonction rationnelle : on ferme l'intégrale par un grand demi-cercle (lemme de Jordan) et on additionne les résidus

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $\pi x^2 + \pi = 0:\ x_1 = -i,\ x_2 = i$
- En $-i$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx},\ q$$

- En i le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx},\ q' = 2$$

- Pour ω > 0 on ferme le chemin dans le demi-plan inférieur (sens négatif, −2πi)

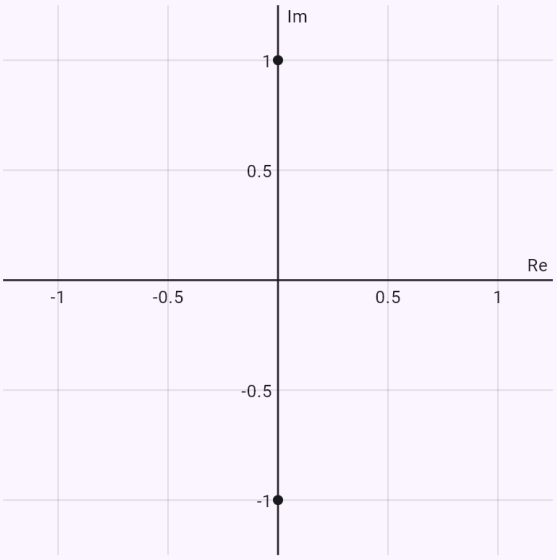
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k < 0} \operatorname{Res} = e^{-\omega}$$

- Pour ω < 0 on ferme le chemin dans le demi-plan supérieur (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k > 0} \operatorname{Res} = e^{\omega}$$

- Résultat - la transformée de Fourier : $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Graphique



Plan complexe – les pôles de F(s).

Transformée en Z inverse à deux pôles : x[n] = 2 − 2⁻ⁿ.

Énoncé: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Résultat

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Étapes

- La transformée en Z inverse est la somme des résidus de F(z)z^{n−1} aux pôles de F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Les points singuliers – les racines du dénominateur : $2z^2 - 3z + 1 = 0$: $z_1 = \frac{1}{2},\ z_2 = 1$
- En $\frac{1}{2}$ le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

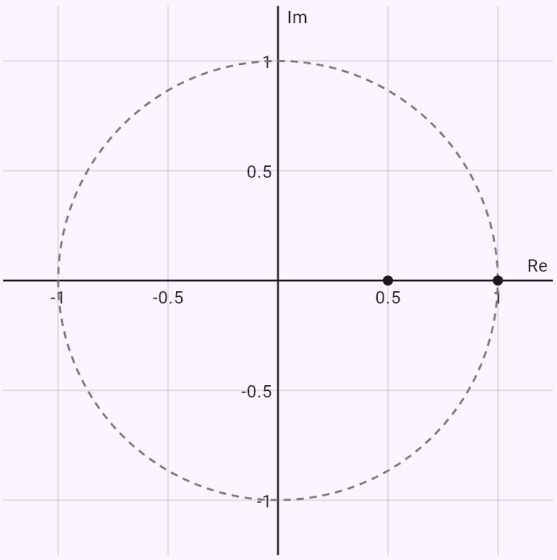
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1},\ q' = 4$$

- En 1 le dénominateur a une racine de multiplicité 1, le numérateur de multiplicité 0 – c'est un pôle d'ordre 1
- Le résidu en un pôle simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1},\ q' = 4z - 3$$

- La valeur initiale est la limite pour z → ∞ : $x[0] = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$
- On additionne les résidus : $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Graphique



Plan complexe – les pôles de F(s).

Limitations connues

- Les singularités sont trouvées pour les fonctions à dénominateur polynomial (et les singularités essentielles de e^h, sin h, cos h) ; un dénominateur comme sin z (une infinité de pôles) n'est pas encore pris en charge.
- La série de Laurent dans une couronne fonctionne pour les fractions rationnelles, en une singularité essentielle seulement autour du point quand la fonction n'a pas d'autre singularité.
- Les intégrales sur d'autres courbes qu'un cercle (carré, ellipse), la valeur principale d'une intégrale avec un pôle sur l'axe et le principe de l'argument général ne sont pas encore pris en charge.
- La somme d'une série à partir de 1 par les résidus exige une fraction rationnelle R paire ; les pôles de R en des entiers autres que zéro ne sont pas admis.
- Une application conforme montre l'image d'un quadrillage ; l'image d'un domaine donné (demi-plan, bande) seulement pour les axes et le cercle unité d'une transformation de Möbius.

- La transformée de Fourier marche pour les fonctions rationnelles sans pôle sur l'axe réel, la transformée en Z inverse pour les fonctions rationnelles sans pôle en zéro.

36. Équations différentielles

L'application résout les équations différentielles ordinaires du premier ordre : à variables séparables, linéaires, exactes, homogènes ($y' = f(y/x)$), de Bernoulli et les équations $y' = f(ax + by + c)$. Elle reconnaît le type elle-même et montre la démarche comme à l'école – séparation des variables, variation de la constante ou facteur intégrant, substitution, potentiel d'une équation exacte. Les intégrales de la démarche ont leurs propres étapes. Elle vérifie la solution : la solution et sa dérivée sont substituées dans l'équation et les deux membres ramenés à la même forme.

Ordres supérieurs : équations linéaires à coefficients constants de tout ordre par l'équation caractéristique (racines multiples et complexes aussi), une solution particulière selon le second membre particulier (résonance et somme de seconds membres aussi) ou par variation des constantes, un problème de Cauchy en zéro aussi par la transformée de Laplace (puce « Méthode »). En outre l'équation d'Euler par $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ par intégrations successives et l'abaissement de l'ordre – quand y manque ($p = y'$) ou x ($y' = p(y)$).

L'équation $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ devient linéaire par la substitution $z = \ln y$. Une équation linéaire du second ordre à coefficients variables est résolue quand on peut deviner une solution (x^k, e^{cx}, …) : la seconde par réduction de l'ordre (d'Alembert), le second membre par variation des constantes. L'ordre est aussi réduit de plus d'un ($p = y^{(m)}$ avec une équation du second ordre en p). Avec des paramètres, les cas sont distingués : un oscillateur amorti selon le signe de $\delta^2 - \omega^2$ (régime apériodique, critique, pseudo-périodique), une résonance ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ pour $\omega = 2$) et le signe d'une constante dont dépend l'intégrale ($y'' = 2yy'$). La transformée de Laplace résout aussi un problème de Cauchy en un point autre que 0 (décalage $\tau = t - t_0$) et avec des paramètres.

Une équation de Riccati $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ est résolue quand une solution particulière y_1 est connue : donnée à la ligne suivante (y1 = 1/x) ou devinée sous une forme simple (une constante, ax, a/x, ax^2, ae^{±x}, x + a). La substitution $y = y_1 + 1/z$ la rend alors linéaire. Équations non linéaires en y' : celle de Clairaut $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – les droites $y = Cx + \psi(C)$ et la solution singulière (leur enveloppe) – et celle de Lagrange $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ avec une solution paramétrique (le paramètre $p = y'$).

Le résultat est la solution générale avec une constante C, aux ordres supérieurs avec des constantes C_1, C_2, … (explicite, ou implicite quand elle ne peut l'être) ; avec des conditions, la solution qui les vérifie – initiales et aux limites, y compris les cas « aucune solution » et « une infinité de solutions ». Les solutions constantes perdues en divisant sont retrouvées. Chaque solution est vérifiée en la substituant dans l'équation. Au premier ordre le graphique montre le champ de directions et des solutions pour différents C, aux ordres supérieurs des solutions pour différentes constantes ; pour une équation autonome du second ordre (sans x), un sélecteur montre aussi le plan de phase (y, y'). Sous le graphique, vous pouvez saisir vos propres valeurs des constantes et ajouter leur courbe ; l'interrupteur « Courbes par défaut » masque celles choisies par l'application. Toucher le graphique trace la solution passant par ce point –

pour une équation linéaire du second ordre, vous réglez en plus la pente de la tangente au point avec un curseur.

Un système de deux équations linéaires à coefficients constants (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, aussi dx/dt) par les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice – réelles, complexes et doubles – avec les conditions initiales x(0), y(0). Le point stationnaire [0; 0] est classé (nœud, col, foyer, centre), le plan de phase affiché.

L'oscillation d'une équation linéaire du 2e ordre (toute solution a une infinité de zéros) s'étudie avec la commande oscillation(y" + x y = 0), aussi pour une équation sous forme autoadjointe (x y')' + y/x = 0 ou avec y′ (l'application la met sous cette forme). La démarche : exactement pour q constant et l'équation d'Euler y″ + (k/x²)y = 0 avec la frontière k = 1/4, les critères de Leighton–Wintner et de Kneser (dans le cas critique, aussi la comparaison avec l'équation de Riemann-Weber), la substitution de Riccati w = r y′/y, la transformation de Prüfer et le décompte numérique des zéros sur un intervalle (après un point-virgule : ; ⟨1; 50⟩) avec l'estimation de Sturm de leur distance. Une équation demi-linéaire (|y'| y')' + q |y| y = 0 (en général l'exposant |y'|^(p−2)) est jugée par la constante critique ((p − 1)/p)^p, l'analogue discret Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (aussi Δ(r_n Δy_n)) par ses zéros généralisés. Le graphique montre la solution avec ses zéros et l'angle de Prüfer φ.

L'asymptotique des solutions d'une équation non linéaire avec p-laplacien (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y, a, b positives, est étudiée par la commande asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (en tchèque aussi asymptotika(...)) ; |y'|^k y' et |y|^k y peuvent aussi s'écrire avec sgn, comme puissance impaire (y')³, y³, et pour α = 1 comme (a y')' ou y". Les solutions sont réparties en classes M^+ (|y| croît) et M^- (|y| décroît) selon les limites de y et de la quasi-dérivée y^[1] = a|y′|^α sgn y′. Pour une équation demi-linéaire (β = α), l'application calcule les intégrales J_1, J_2, Y_1, Y_2 (avec Symja, sinon en comparant les comportements puissance et logarithmique), détermine l'un des cas C1–C8 et les classes non vides selon le théorème 3.1 de Z. Došlá et M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), et montre l'équation réciproque. Pour une équation de type Emden-Fowler avec β ≠ α, elle utilise les théorèmes de M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000) : cas superlinéaire et sous-linéaire, solutions fortement et faiblement croissantes et régulièrement décroissantes. Le graphique montre des solutions numériques des classes non vides (M^- par tir) et, en dessous, leurs quasi-dérivées. Indiquez le début de l'intervalle après un point-virgule (; x ≥ 1). Pour une équation avec q négatif, l'oscillation propose la puce Asymptotique des solutions et l'asymptotique, inversement, la puce Oscillation de l'équation.

Comment le saisir

`y' = x*y`	La dérivée avec un prime.

`dy/dx = x y^2`	Notation de Leibniz – elle indique aussi la variable (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Notation issue d'une photo.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	La forme M dx + N dy = 0 (équation exacte).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Une condition initiale après une virgule ou à la ligne suivante.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	La fonction et la variable peuvent être n'importe quelles lettres.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Une solution particulière connue d'une équation de Riccati à la ligne suivante (ou après un point-virgule).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Une équation d'ordre supérieur – les dérivées avec plusieurs primes.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Les dérivées supérieures comme y^{(4)} (aussi depuis une photo).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Conditions initiales y(0), y′(0) – ou aux limites en des points différents.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Les points de Newton (dérivées par rapport au temps t) et des paramètres grecs.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Un système de deux équations linéaires – après une virgule ou sur des lignes, avec les conditions x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscillation d'une équation du 2e ordre, éventuellement avec un intervalle pour les zéros.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Une équation demi-linéaire (ici p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	L'analogue discret – une récurrence linéaire du 2e ordre.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asymptotique des solutions d'une équation avec p-laplacien, éventuellement avec le début de l'intervalle.

Exemples

Variables séparables – la solution générale et le champ de directions.

Énoncé: `y' = x*y`

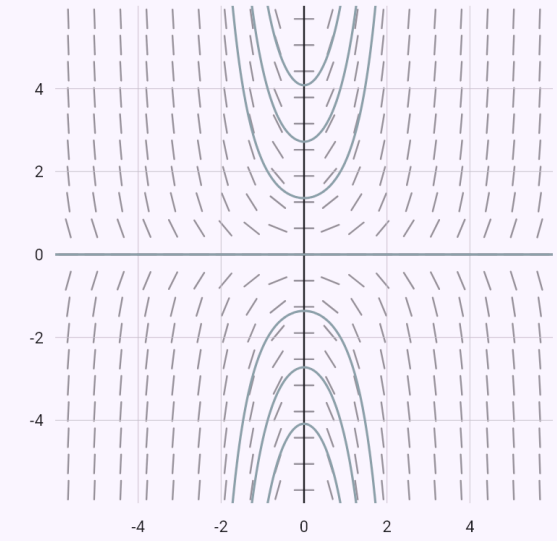
Résultat

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = xy$
- Séparation des variables (division en supposant $y \neq 0$) : $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Intégration des deux membres : $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La solution générale sous forme implicite : $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- La solution constante $y = 0$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour C = 0
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux : $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Graphique



solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

La condition initiale détermine la constante C.

Énoncé: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Résultat

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Résoudre par une méthode numérique :

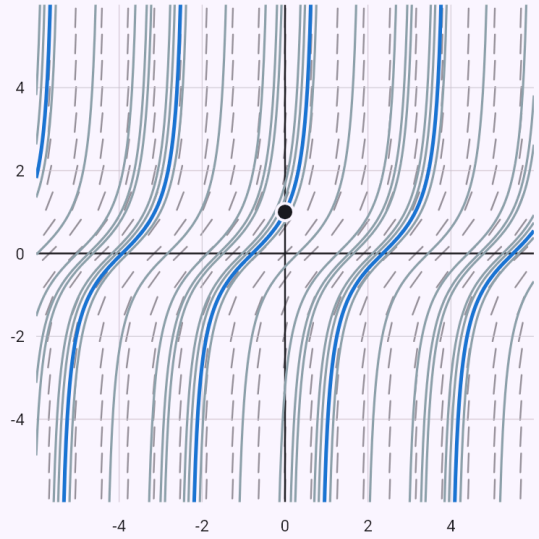
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Étapes

- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = y^2 + 1$
- Séparation des variables (division en supposant $y^2 + 1 \neq 0$) : $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Intégration des deux membres : $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1\,dx = x$
- La solution générale sous forme implicite : $\arctan y = x + C$
- On exprime la solution : $y = \tan(x + C)$
- On substitue la condition initiale $y(0) = 1$: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient $\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation et on simplifie avec l'identité $1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ – les deux membres sont égaux

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

Graphique



solutions pour différents C

$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout. En évidence, la solution de la condition initiale ; le point est la condition initiale.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C | + Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

Une équation linéaire par variation de la constante.

Énoncé: `y' + 2y = e^x` Variation de la constante

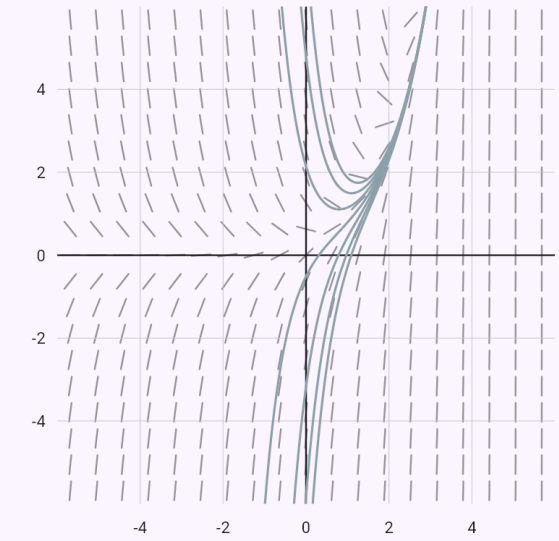
Résultat

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire du premier ordre y' + p(x)·y = q(x) : $y' + 2y = e^x$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y' + 2y = 0$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2\,dx = 2x$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = Ce^{-2x}$
- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $y = C(x)\,e^{-2x}$; substituée dans l'équation : $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- D'où $C'(x) = e^{3x}$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable : $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- On intègre : $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solution générale : $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient : $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux : $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graphique



solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

La même équation par un facteur intégrant.

Énoncé: `y' + 2y = e^x` Facteur intégrant

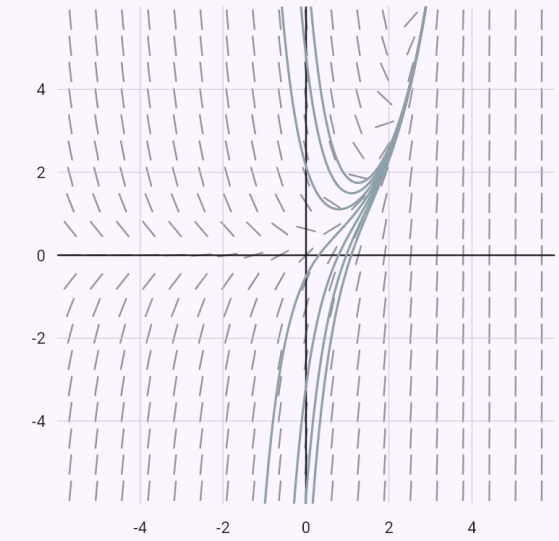
Résultat

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire du premier ordre y' + p(x)·y = q(x) : $y' + 2y = e^x$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2\,dx = 2x$
- Le facteur intégrant : $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- On multiplie par le facteur intégrant – le membre de gauche est la dérivée d'un produit : $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable : $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Intégration des deux membres : $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solution générale : $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient : $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux : $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graphique



solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

Une équation homogène – la substitution u = y/x.

Énoncé: `y' = (x - y)/(x + y)`

Résultat

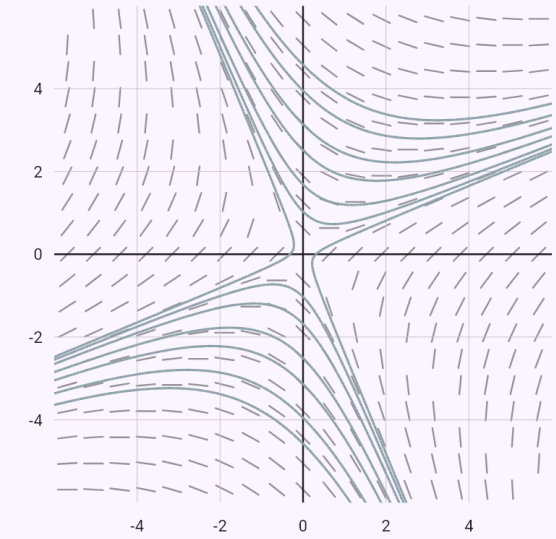
$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation homogène – le membre de droite ne dépend que du rapport y/x : $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- La substitution $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ transforme l'équation en $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Séparation des variables (division en supposant $u^2 + 2u - 1 \neq 0$) : $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Intégration des deux membres : $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- On sort la constante de l'intégrale : $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- Le numérateur est la dérivée du dénominateur (ou un multiple), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, d'après la formule $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$

  $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- On sort la constante de l'intégrale : $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- La solution générale sous forme implicite : $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- On passe à l'exponentielle – la constante ±e^C est de nouveau notée C : $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- La solution constante $u = -1 - \sqrt{2}$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour C = 0
- La solution constante $u = -1 + \sqrt{2}$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour C = 0
- Retour à l'inconnue d'origine : $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- La solution générale sous forme implicite : $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graphique



solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

Une équation de Bernoulli – la substitution z = y^(1−n) et la solution constante y = 0.

Énoncé: `xy' - y = -xy^2`

Résultat

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Étapes

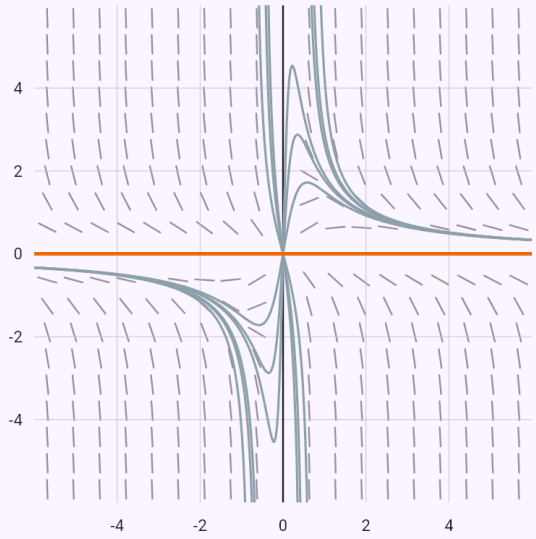
- Une équation de Bernoulli y' + p(x)·y = q(x)·yⁿ : $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- La substitution $z = \frac{1}{y},\ z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ transforme l'équation en $z' + \frac{z}{x} = 1$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $z' + \frac{z}{x} = 0$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solution de l'équation homogène : $z_h = \frac{C}{x}$
- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; substituée dans l'équation : $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$
- D'où $C'(x) = x$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- On intègre : $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- La solution générale : $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Retour à l'inconnue d'origine : $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- On exprime la solution : $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- La division a exclu la solution constante $y = 0$ – c'est une autre solution de l'équation.
- On renomme la constante (un multiple d'une constante arbitraire est encore une constante arbitraire) : $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2 + C - x \cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Graphique



solutions pour différents C

$y = 0$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

Une équation exacte – le potentiel F(x, y) = C.

Énoncé: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

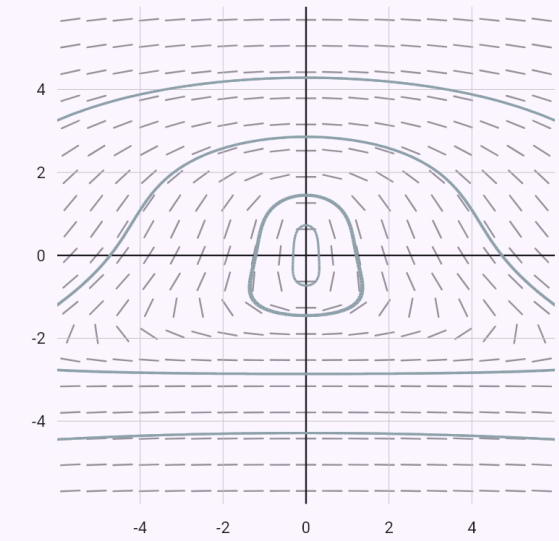
Résultat

$$y^4 + x^2 y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation M dx + N dy = 0 – vérifions si elle est exacte (le membre de gauche est une différentielle totale) : $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; l'équation est exacte, car $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales : $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Le potentiel F en intégrant M par rapport à x : $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2 y + 3x^2 + \varphi(y)$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- De ∂F/∂y = N : $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- La solution générale sous forme implicite : $y^4 + x^2 y + 3x^2 = C$

Graphique



solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

La substitution z = x − y ; Sympa perdrait ici un facteur 2, l'application vérifie le résultat.

Énoncé: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Résultat

$$y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$$

Résoudre par une méthode numérique :

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Étapes

- Le membre de droite est une fonction de ax + by + c – nous le prenons comme nouvelle inconnue : $y' = \cos(x-y)$
- La substitution $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ transforme l'équation en $z' = 1 - \cos z$
- Séparation des variables (division en supposant $1 - \cos z \neq 0$) : $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Intégration des deux membres : $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Aucun changement de variable plus simple ne convient – substitution universelle $t = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- On revient à la variable d'origine : $t = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right)$: $\quad -\cot\left(\dfrac{z}{2}\right)$
- D'après la table des primitives usuelles : $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- La solution générale sous forme implicite : $-\cot\left(\dfrac{z}{2}\right) = x + C$
- On exprime la solution : $z = 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- La division a exclu la solution constante $z = 0$ – c'est une autre solution de l'équation.
- Retour à l'inconnue d'origine : $y = x - 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- On renomme la constante (un multiple d'une constante arbitraire est encore une constante arbitraire) : $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x + C)$
- On substitue la condition initiale $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient

  $(2\,\operatorname{arccot}(x+1))' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\dfrac{2}{x^2+2}$
- On additionne et on simplifie

  $y' = 1 - \dfrac{2}{x^2+2x+2} = \dfrac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux

  $\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos(x - (x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)))$

Une équation de Riccati – la solution particulière $y_1 = -2/x$ devinée, la substitution $y = y_1 + 1/z$.

Énoncé: `y' = y^2 - 2/x^2`

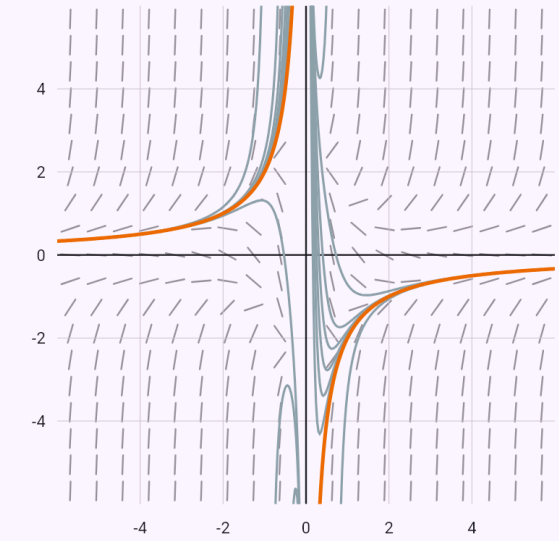
Résultat

$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Étapes

- Une équation de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x) : $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Sans solution particulière, une équation de Riccati ne se résout pas. Essayons d'en deviner une de forme simple (une constante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) : $y_1 = -\frac{2}{x}$ vérifie l'équation : $y_1' = \frac{2}{x^2}$, et en la substituant dans le membre de droite on obtient la même chose.
- La substitution $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ transforme l'équation en $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solution de l'équation homogène : $z_h = Cx^4$
- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $z = C(x)\cdot x^4$; substituée dans l'équation : $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- D'où $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- On intègre : $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- La solution générale : $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Retour à l'inconnue d'origine : $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- La solution $y = -\frac{2}{x}$ elle-même est perdue par la substitution y = y_1 + 1/z (elle correspond à z → ∞) ; on l'ajoute au résultat.
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient $\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux $\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$

Graphique



solutions pour différents C

$y = -\frac{2}{x}$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

La même équation avec la solution particulière donnée $y_1 = 1/x$.

Énoncé: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

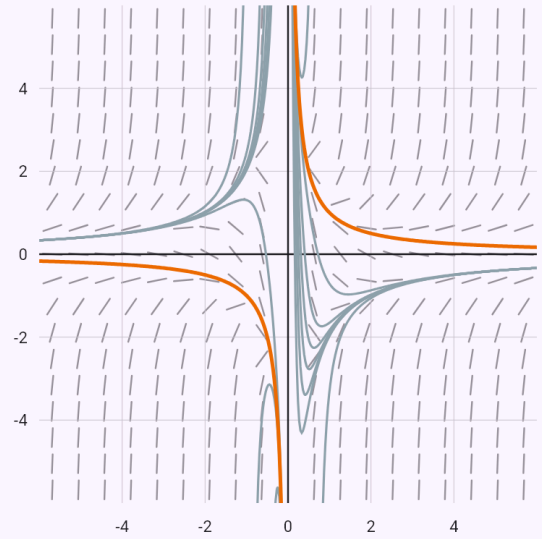
Résultat

$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Étapes

- Une équation de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x) : $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- La solution particulière donnée $y_1 = \frac{1}{x}$ vérifie l'équation : $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, et en la substituant dans le membre de droite on obtient la même chose.
- La substitution $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ transforme l'équation en $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solution de l'équation homogène : $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; substituée dans l'équation : $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- D'où $C'(x) = -x^2$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- On intègre : $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- La solution générale : $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Retour à l'inconnue d'origine : $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- La solution $y = \frac{1}{x}$ elle-même est perdue par la substitution y = y_1 + 1/z (elle correspond à z → ∞) ; on l'ajoute au résultat.
- Vérification – la dérivée de la solution $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ substituée dans l'équation donne une égalité.
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Graphique



solutions pour différents C

$y = \frac{1}{x}$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique – la solution passant par ce point est tracée.

Une équation de Clairaut – les droites y = Cx + C² et leur enveloppe y = −x²/4.

Énoncé: `y = xy' + y'^2`

Résultat

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Étapes

- Une équation de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Posons $p = y'$: $y = xp + p^2$
- On dérive l'équation par rapport à x (p = y' dépend de x, p' = y'') : $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Si p' = 0, p est constant et la solution générale est formée de droites : $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- L'autre facteur x + ψ'(p) = 0 donne la solution singulière, l'enveloppe de toutes ces droites. Sous forme paramétrique $x = -2p,\ y = -p^2$; après élimination de p : $y = -\frac{x^2}{4}$

Graphique



solutions pour différents C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Les droites grises sont les solutions pour diverses valeurs de C ; en couleur, la solution singulière – leur enveloppe, que touche chaque droite.

Par le point [2 ; −1] de l'enveloppe passe une seule droite y = 1 − x – et l'enveloppe elle-même.

Énoncé: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Résultat

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Étapes

- Une équation de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Posons $p = y'$: $y = xp + p^2$
- On dérive l'équation par rapport à x (p = y' dépend de x, p' = y'') : $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Si p' = 0, p est constant et la solution générale est formée de droites : $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- L'autre facteur x + ψ'(p) = 0 donne la solution singulière, l'enveloppe de toutes ces droites. Sous forme paramétrique $x = -2p,\ y = -p^2$; après élimination de p : $y = -\frac{x^2}{4}$
- On substitue la condition initiale $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Graphique



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

En couleur, les solutions passant par le point donné – des droites, éventuellement aussi l'enveloppe.

Une équation de Lagrange – la solution sous forme paramétrique et la droite y = 0.

Énoncé: `y = 2xy' + y'^2`

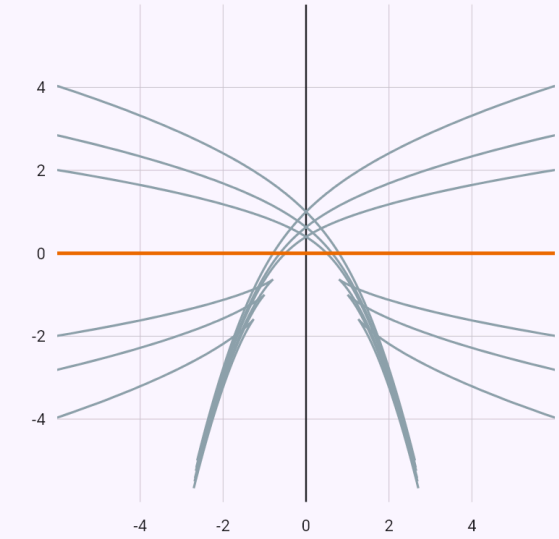
Résultat

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p},\quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation de Lagrange y = x·φ(y') + ψ(y'). Posons $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- On dérive l'équation par rapport à x (p = y' dépend de x) : $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- On cherche x comme fonction de p : on isole dx/dp, l'équation est linéaire en l'inconnue x : $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Une équation linéaire du premier ordre y' + p(x)·y = q(x) : $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Solution de l'équation homogène : $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; substituée dans l'équation : $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- D'où $C'(p) = -2p^2$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- On intègre : $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- La solution générale : $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- On renomme la constante (un multiple d'une constante arbitraire est encore une constante arbitraire) : $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- En substituant x dans l'équation donnée, on obtient la solution générale sous forme paramétrique (paramètre p) : $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- On a divisé par p − φ(p), en laissant de côté les valeurs pour lesquelles $p = 2p$. Chacune donne une droite qui vérifie aussi l'équation : $y = 0$

Graphique



solutions pour différents C

$y = 0$

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

L'équation caractéristique aux racines complexes −2 ± 3i.

Énoncé: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Résultat

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

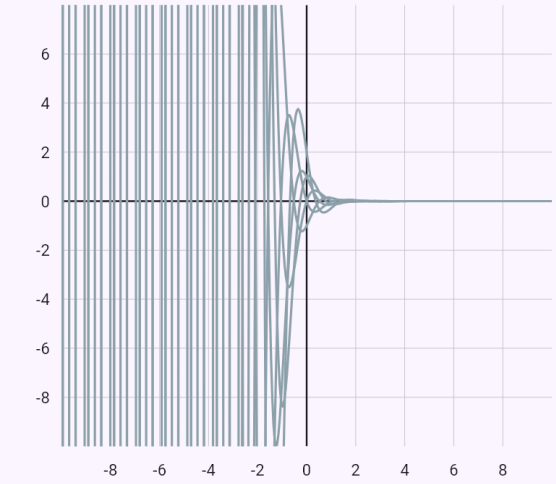
Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + 4y' + 13y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Le discriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; les racines : $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- La solution générale : $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

Graphique

Solutions | Plan de phase



solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C_1 C_2

+ Ajouter une courbe

Second membre particulier avec résonance – 2 est racine de l'équation caractéristique.

Énoncé: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Second membre particulier

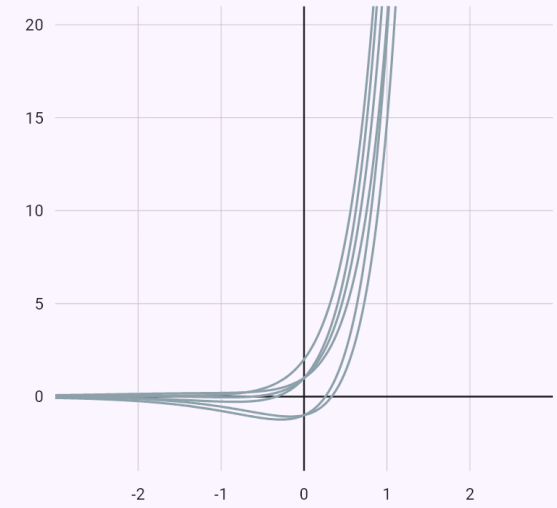
Résultat

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y'' - 3y' + 2y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Le discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; les racines : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Le second membre $3e^{2x}$ est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par x : $y_p = Axe^{2x}$
- Les dérivées : $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $A = 3$
- Une solution particulière : $y_p = 3xe^{2x}$
- La solution générale : $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Graphique



solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C1 C2

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

Le second membre tan x n'est pas particulier – variation des constantes et wronskien.

Énoncé: `y'' + y = tan x`

Résultat

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + y = \tan x$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y'' + y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variation des constantes – on cherche la solution sous la forme $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, les dérivées des fonctions C_k vérifient le système

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \tan x \end{cases}$$

- Le déterminant du système (le wronskien)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- D'où $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- D'où $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = -\int \sin x \cdot \tan x \, dx$
- La fonction est impaire en cosinus – changement de variable $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int -1 \, dt = -t$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\dfrac{1}{2(t-1)} \, dt = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{t-1} \, dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \dfrac{1}{t-1} \, dt = \ln|t-1|$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int \dfrac{1}{2(t+1)} \, dt = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{t+1} \, dt$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \dfrac{1}{t+1} \, dt = \ln|t+1|$
- On revient à la variable d'origine

$$t = \sin x: \quad \frac{\ln|\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln|\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) : $C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \sin x - \ln\left|\dfrac{1}{\cos x} + \tan x\right|$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) : $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Une solution particulière : $y_p = -\cos x \cdot \ln\left|\dfrac{1}{\cos x} + \tan x\right|$
- La solution générale

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Intégrales de la variation des constantes non exprimables par des fonctions élémentaires – une

solution avec intégrale.

Énoncé: `y'' + y' + y = tan x`

Résultat

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + y' + y = \tan x$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y'' + y' + y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Le discriminant $D = 1^2 - 4 = -3$; les racines : $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
- Solution de l'équation homogène $y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
- Variation des constantes – on cherche la solution sous la forme les dérivées des fonctions C_k vérifient le système

$$y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- Le déterminant du système (le wronskien)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right))}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- D'où $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$
- D'où $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$
- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) $C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$
- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) $C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$
- Ces intégrales ne s'expriment pas à l'aide de fonctions élémentaires (elles mènent à des fonctions supérieures, non élémentaires), la solution les garde donc sous forme d'intégrales $\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$
- La solution générale $y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$

Un problème de Cauchy – un système pour les constantes C_1, C_2.

Énoncé: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Résultat

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

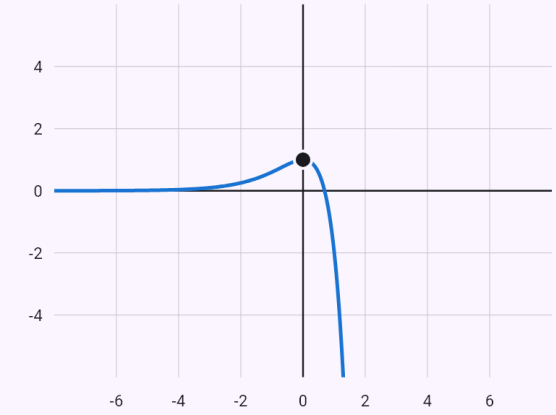
Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y'' - 4y' + 3y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Le discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; les racines : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- Le second membre e^{2x} est de forme particulière ; le nombre 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $y_p = Ae^{2x}$
- Les dérivées : $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $-A = 1$
- D'où $A = -1$
- Une solution particulière : $y_p = -e^{2x}$
- La solution générale : $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Les dérivées de la solution générale : $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Les conditions donnent le système d'où $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Graphique



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Celle mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Vos propres valeurs des constantes

C₁ | C₂

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

Le même problème par la transformée de Laplace.

Énoncé: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Transformée de Laplace

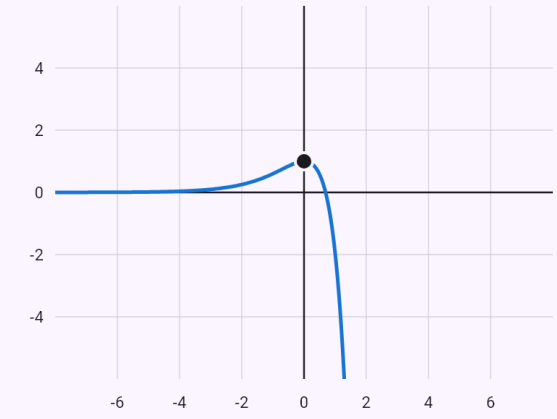
Résultat

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformée de Laplace des deux membres : $\mathcal{L}$(y) = Y, $\mathcal{L}$(y') = sY − y(0), $\mathcal{L}$(y") = s²Y − s·y(0) − y'(0) ; avec les conditions initiales : $\left(s^2Y - s\right) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s - 2}$
- On exprime l'image Y : $Y = \frac{s - 3}{(s - 2)(s - 1)}$
- Décomposition en éléments simples : $Y = -\frac{1}{s - 2} + \frac{2}{s - 1}$
- La transformée inverse (d'après la table des images) donne la solution : $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Graphique



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

Celle mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Un problème aux limites avec une infinité de solutions.

Énoncé: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Résultat

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- La solution générale : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 0$
$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$
- La constante C_2 reste arbitraire – le problème a une infinité de solutions.
- La solution qui vérifie les conditions données : $y = C_2 \sin x$

Équation d'Euler – la substitution x = eᵗ.

Énoncé: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

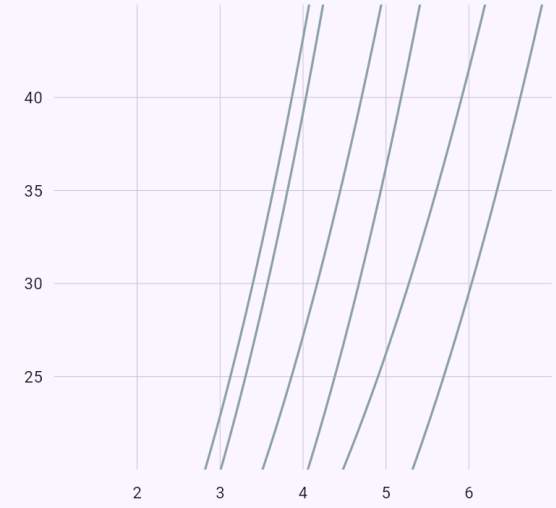
Résultat

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Étapes

- Équation d'Euler – chaque dérivée y^(k) est multipliée par x^k ; la substitution x = e^t la ramène à une équation à coefficients constants : $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- La substitution $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ transforme l'équation en $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λt) ; en substituant et en divisant par e^(λt), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Le discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; les racines : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- On découpe le second membre en parties de forme particulière – une solution particulière pour chacune, puis on les additionne : $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Le second membre 2 est de forme particulière ; le nombre 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $y_{p_1} = A$
- Les dérivées : $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $2A = 2$
- D'où $A = 1$
- Une solution particulière : $y_{p_1} = 1$
- Le second membre e^{2t} est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par x : $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Les dérivées : $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $A = 1$
- Une solution particulière : $y_{p_2} = te^{2t}$
- Une solution particulière : $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- La solution générale : $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Retour à la variable d'origine (t = ln x, pour $x > 0$) : $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graphique



solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C₁ C₂

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

L'abaissement y' = p(y), les constantes tirées des conditions initiales pas à pas.

Énoncé: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Résultat

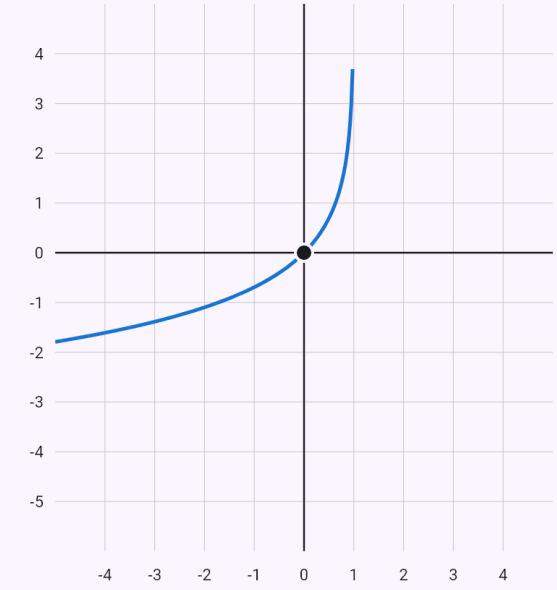
$$y = -\ln(1-x)$$

Étapes

- La variable indépendante manque – on considère y' comme une fonction de y : $y'' = e^{2y}$
- La substitution $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ transforme l'équation en $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; les conditions initiales donnent $p(0) = 1$
- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Séparation des variables : $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Intégration des deux membres : $\displaystyle\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- D'après la table des primitives usuelles : $\displaystyle\int p\,dp = \frac{p^2}{2}$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable : $\displaystyle\int e^{2y}\,dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- La solution générale sous forme implicite : $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- On exprime la solution : $p^2 = e^{2y} + C_1$
- On substitue la condition initiale $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $p = e^y$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux : $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Retour à l'inconnue d'origine : $y' = e^y$
- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = e^y$
- Séparation des variables (division en supposant $e^y \neq 0$) : $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Intégration des deux membres : $\displaystyle\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine, on divise donc le résultat par son coefficient de la variable : $\displaystyle\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- La solution générale sous forme implicite : $-e^{-y} = x + C_2$
- On exprime la solution : $y = -\ln(C_2 - x)$
- On substitue la condition initiale $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $y = -\ln(1-x)$
- On dérive le terme par les règles de la fonction composée, du produit et du quotient : $(-\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{1-x}$
- On substitue la solution et sa dérivée dans l'équation – les deux membres sont égaux : $\dfrac{1}{1-x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Graphique

Solutions | Plan de phase



$y = -\ln(1-x)$

Celle mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Un oscillateur amorti : trois cas selon δ et ω.

Énoncé: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Résultat

$$\delta > \omega : \quad y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega : \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : \quad y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \right.$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Pour $\delta > \omega$ donc

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta)x}$
- Pour $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, donc $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Pour $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2} i$, donc

  $y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right.$

Résonance : pour ω = 2 la solution a une autre forme.

Énoncé: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Résultat

$$\omega \neq 2 : \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2 : \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $y'' + \omega^2 y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λt) ; en substituant et en divisant par e^(λt), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Le second membre $\cos(2t)$ est de forme particulière ; le nombre $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Les dérivées

$$y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$$

- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés $\left(A\omega^2 - 4A\right)\cos(2t) + \left(B\omega^2 - 4B\right)\sin(2t) = \cos(2t)$
- On identifie les coefficients des termes semblables des deux côtés d'où $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Une solution particulière : $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- La solution générale $y = y_h + y_p = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Pour $\omega = 2$, le nombre du second membre est racine de l'équation caractéristique (résonance) : la solution a une autre forme : $y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{t\sin(2t)}{4}$

Une solution devinée $y_1 = x$ et la réduction de l'ordre (d'Alembert).

Énoncé: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Résultat

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Étapes

- Une équation linéaire du second ordre à coefficients variables : $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$
- On devine une solution et on la vérifie en la substituant : $y_1 = x$. La seconde par réduction de l'ordre (d'Alembert, y = $y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

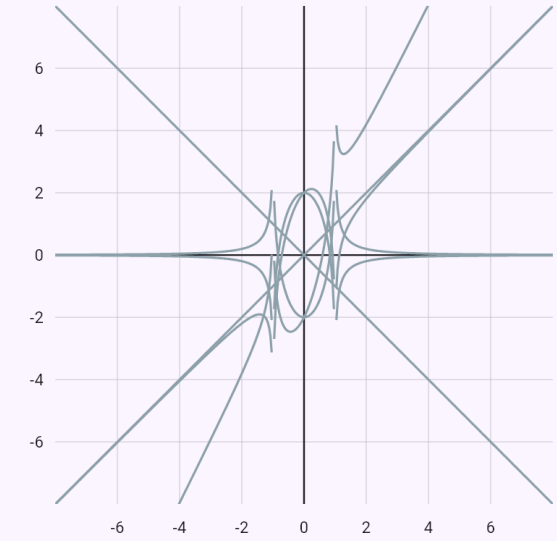
$$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

- On sort la constante de l'intégrale : $\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- La solution générale : $y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$

Graphique



solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Courbes par défaut

Vos propres valeurs des constantes

C_1 C_2

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

Un système – valeurs propres de signes opposés, un col.

Énoncé: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Résultat

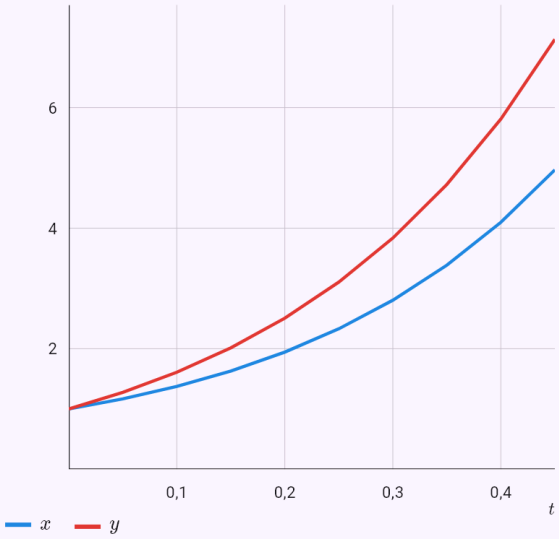
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Étapes

- Le système sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Les valeurs propres de la matrice par l'équation caractéristique $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – deux réelles distinctes.
- Vecteurs propres, $(A - \lambda E)v = 0$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- La solution générale
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$$
$$y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$$
- Le point stationnaire $[0;\ 0]$ est un col – les valeurs propres sont de signes opposés, il est instable.

Graphique

Au cours du temps | Plan de phase



La solution du système dans le temps pour les conditions initiales données (sans elles, pour x(0) = y(0) = 1).

Valeurs propres complexes – un foyer instable.

Énoncé: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Résultat

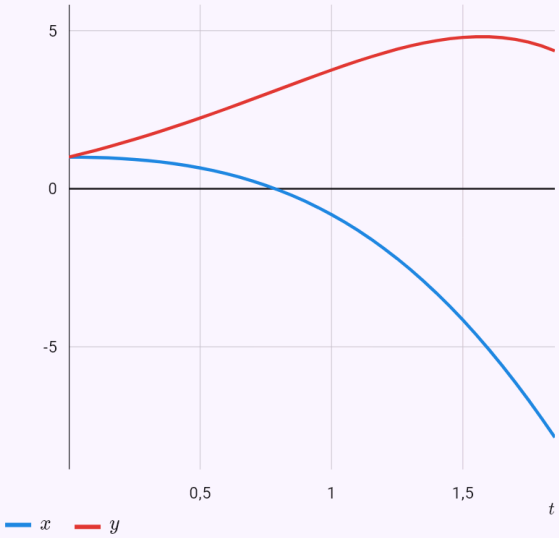
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Étapes

- Le système sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Les valeurs propres de la matrice par l'équation caractéristique $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – complexes conjuguées.
- Vecteurs propres, $(A - \lambda E)v = 0$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La solution générale
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$$
$$y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$$
- Le point stationnaire $[0;\ 0]$ est un foyer instable – la partie réelle des valeurs propres est positive, les trajectoires s'en éloignent en spirale.

Graphique

Au cours du temps | Plan de phase



La solution du système dans le temps pour les conditions initiales données (sans elles, pour x(0) = y(0) = 1).

Un système avec conditions initiales – un centre.

Énoncé: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Résultat

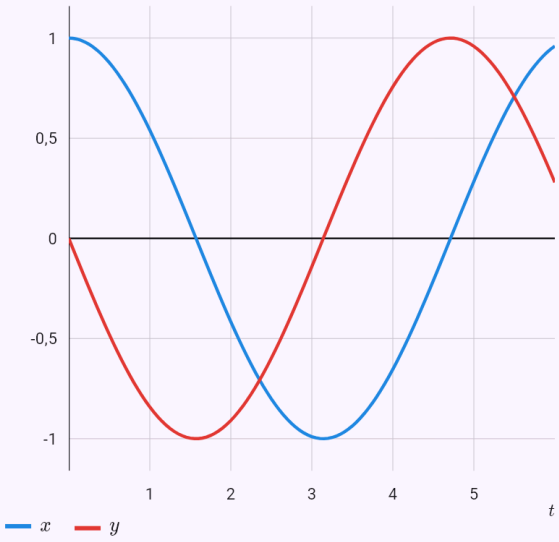
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Étapes

- Le système sous forme matricielle
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Les valeurs propres de la matrice par l'équation caractéristique $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0 : \lambda_{1,2} = \pm i$ – complexes conjuguées.
- Vecteurs propres, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La solution générale
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Les constantes par les conditions initiales d'où
  $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $C_1 = 1$
  $C_2 = 0$
- Le point stationnaire $[0;\ 0]$ est un centre – les valeurs propres sont imaginaires pures, les trajectoires sont des courbes fermées autour.

Graphique

Au cours du temps | Plan de phase



La solution du système dans le temps pour les conditions initiales données (sans elles, pour x(0) = y(0) = 1).

L'équation d'Airy – critère de Leighton–Wintner et 12 zéros.

Énoncé: `oscillation(y'' + x y = 0)`

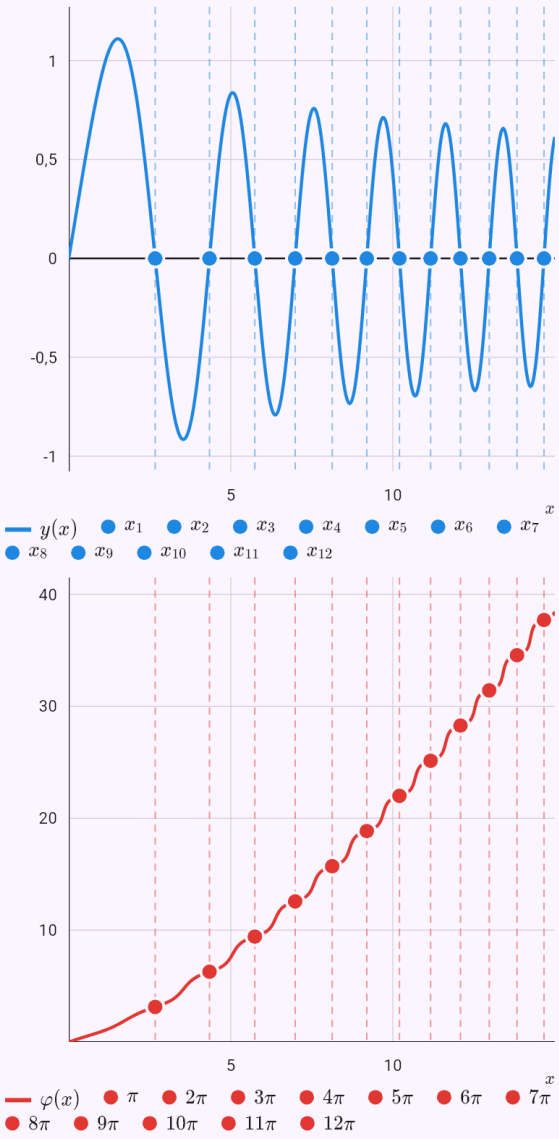
Résultat

L'équation est oscillante.

Étapes

- On étudie l'équation $y'' + xy = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,\infty[$, c'est-à-dire y" + q(x)y = 0 avec q = x
- L'équation est oscillante si toute solution non triviale a une infinité de zéros sur l'intervalle. D'après le théorème de séparation de Sturm, les zéros de deux solutions indépendantes alternent ; une seule solution suffit donc : soit toutes les solutions oscillent, soit aucune.
- Le critère de Leighton et Wintner : si ∫ 1/r = ∞ et ∫ q = ∞, l'équation est oscillante. Ici $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ et $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, l'équation est donc oscillante.
- Le critère de Kneser avec la constante critique $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, l'équation est oscillante.
- La technique de Riccati : la substitution $w = \frac{y'}{y}$ transforme l'équation en l'équation de Riccati $w' + w^2 + x = 0$. L'équation est non oscillante exactement lorsque l'équation de Riccati a une solution sur tout un intervalle ⟨T ; ∞) pour un certain T. Pour une équation oscillante, il n'y en a pas : w « s'échappe » vers −∞ en chaque zéro de y.
- La transformation de Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ transforme l'équation en une équation pour l'angle φ : $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. En un zéro de y, l'angle φ est un multiple de π et φ' > 0 ; φ ne fait donc que croître en passant les multiples de π. Le nombre de zéros sur (a ; b⟩ vaut donc ⌊φ(b)/π⌋. On calcule numériquement par la méthode de Runge-Kutta (RK4) à partir des valeurs initiales $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Sur l'intervalle $]0\,;\,15]$, la solution a ce nombre de zéros : 12 ; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Deux zéros voisins sont distants de $0{,}8322$ à $1{,}6761$. Les zéros $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,$ …
- Le théorème de comparaison de Sturm : sur l'intervalle $[0\,;\,15]$, on a $q \in [0\,;\,15]$. q n'y est pas partout positif, on n'obtient donc qu'une borne inférieure de la distance entre zéros voisins : $0{,}8112 \le \Delta$
- Conclusion : l'équation est oscillante – toute solution non triviale a une infinité de zéros.

Graphique



La solution avec ses zéros marqués ; en dessous, l'angle de Prüfer φ, qui passe par des multiples de π aux zéros.

L’équation d’Euler à la frontière k = 1/4 – pas encore oscillante.

Énoncé: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

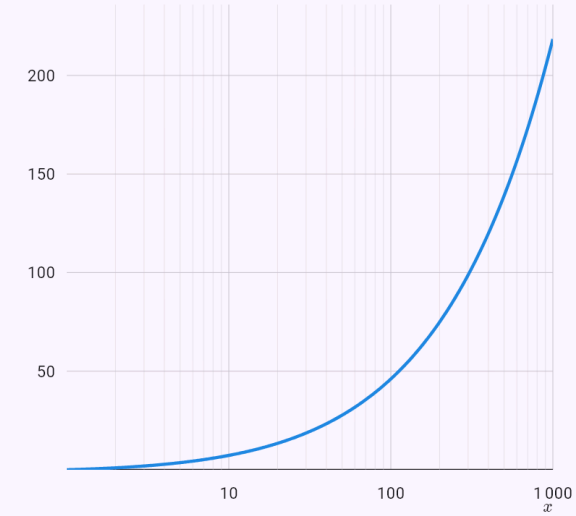
Résultat

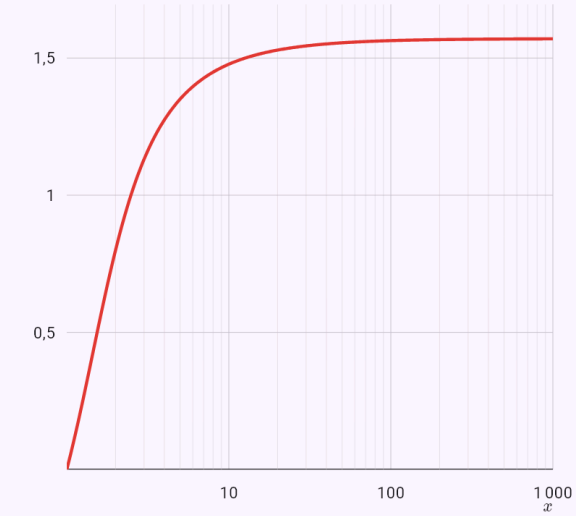
L’équation n’est pas oscillante.

Étapes

- On étudie l’équation $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ sur l’intervalle $[1\,;\,\infty[$, c’est-à-dire y" + q(x)y = 0 avec q = $\frac{1}{4x^2}$
- L’équation est oscillante si toute solution non triviale a une infinité de zéros sur l’intervalle. D’après le théorème de séparation de Sturm, les zéros de deux solutions indépendantes alternent ; une seule solution suffit donc : soit toutes les solutions oscillent, soit aucune.
- C’est l’équation d’Euler y" + (k/x²)y = 0 avec la valeur limite k = $\frac{1}{4}$. L’équation caractéristique $\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{4} = 0$ a la racine double $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$, la solution $y = \sqrt{x}(C_1 + C_2 \ln x)$ a au plus un zéro. L’équation n’est pas encore oscillante.
- Le critère de Leighton et Wintner : si ∫ 1/r = ∞ et ∫ q = ∞, l’équation est oscillante. Ici $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, mais $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, le critère ne tranche donc pas.
- Le critère de Kneser : $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$ est égal à la constante critique $\frac{1}{4}$, le critère seul ne tranche donc pas. C’est le terme suivant qui décide.
- Dans le cas critique, on compare avec l’équation de Riemann-Weber y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, oscillante exactement pour μ > 1/4 : $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4}\right) \ln^2 x = 0 < \frac{1}{4}$, l’équation n’est pas oscillante.
- La technique de Riccati : la substitution $w = \frac{y'}{y}$ transforme l’équation en l’équation de Riccati $w' + w^2 + \frac{1}{4x^2} = 0$. Celle-ci a la solution $w = \frac{1}{2x}$ sur tout l’intervalle – elle correspond à une solution y sans zéro, l’équation n’est donc pas oscillante.
- La transformation de Prüfer $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ transforme l’équation en une équation pour l’angle φ : $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. En un zéro de y, l’angle φ est un multiple de π et φ' > 0 ; φ ne fait donc que croître en passant les multiples de π. Le nombre de zéros sur (a ; b⟩ vaut donc ⌊φ(b)/π⌋. On calcule numériquement par la méthode de Runge-Kutta (RK4) à partir des valeurs initiales $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Sur l’intervalle $]1\,;\,1000]$, la solution n’a aucun zéro : $\varphi(1000) \doteq 1{,}5702 \doteq 0{,}4998\pi$, l’angle n’a pas atteint π.
- Conclusion : l’équation n’est pas oscillante – toute solution non triviale n’a qu’un nombre fini de zéros.

Graphique





La solution n’a aucun zéro sur l’intervalle choisi ; l’angle de Prüfer φ, en dessous, n’atteint pas π.

Critère de Kneser : x²q → 1 > 1/4, les zéros croissent géométriquement.

Énoncé: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

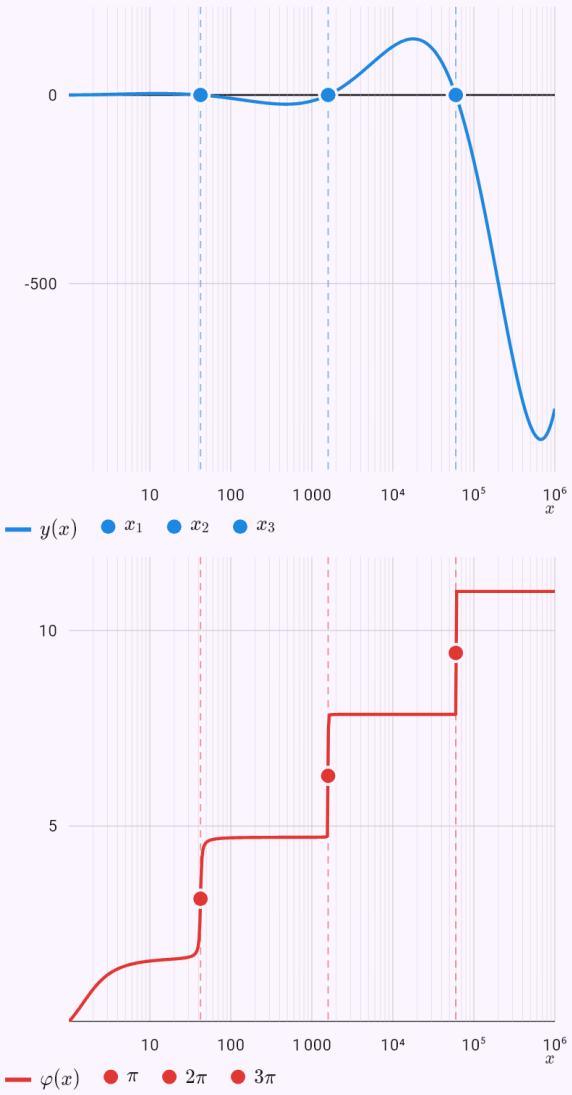
Résultat

L'équation est oscillante.

Étapes

- On étudie l'équation $y'' + \dfrac{1}{x^2+1}y = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,\infty[$, c'est-à-dire y" + q(x)y = 0 avec q = $\dfrac{1}{x^2+1}$
- L'équation est oscillante si toute solution non triviale a une infinité de zéros sur l'intervalle. D'après le théorème de séparation de Sturm, les zéros de deux solutions indépendantes alternent ; une seule solution suffit donc : soit toutes les solutions oscillent, soit aucune.
- Le critère de Leighton et Wintner : si ∫ 1/r = ∞ et ∫ q = ∞, l'équation est oscillante. Ici $\displaystyle\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, mais $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, le critère ne tranche donc pas.
- Le critère de Kneser avec la constante critique $\dfrac{1}{4}$: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, l'équation est oscillante.
- La technique de Riccati : la substitution $w = \dfrac{y'}{y}$ transforme l'équation en l'équation de Riccati $w' + w^2 + \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. L'équation est non oscillante exactement lorsque l'équation de Riccati a une solution sur tout un intervalle ⟨T ; ∞) pour un certain T. Pour une équation oscillante, il n'y en a pas : w « s'échappe » vers −∞ en chaque zéro de y.
- La transformation de Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ transforme l'équation en une équation pour l'angle φ : $\varphi' = \cos^2\varphi + \dfrac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. En un zéro de y, l'angle φ est un multiple de π et φ' > 0 ; φ ne fait donc que croître en passant les multiples de π. Le nombre de zéros sur (a ; b⟩ vaut donc ⌊φ(b)/π⌋. On calcule numériquement par la méthode de Runge-Kutta (RK4) à partir des valeurs initiales $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Sur l'intervalle $]1\,;\,1\,000\,000]$, la solution a ce nombre de zéros : 3 ; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Deux zéros voisins sont distants de $1548{,}7974$ à $58269{,}3046$. Les zéros : $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Conclusion : l'équation est oscillante – toute solution non triviale a une infinité de zéros.

Graphique



La solution avec ses zéros marqués ; en dessous, l'angle de Prüfer φ, qui passe par des multiples de π aux zéros.

L’équation d’Euler demi-linéaire, k = 1 > (2/3)³.

Énoncé: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Résultat

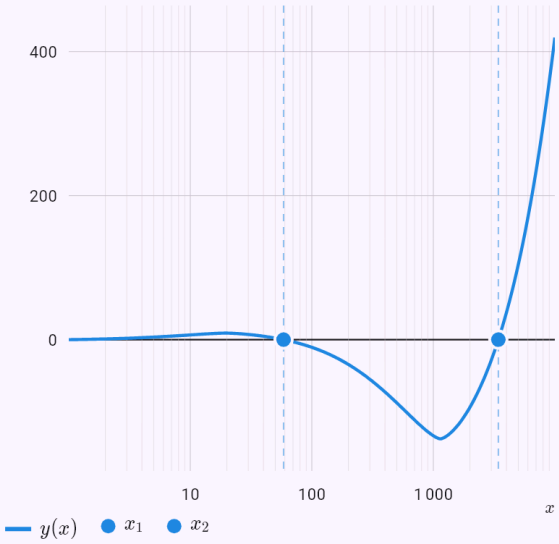
L’équation est oscillante.

Étapes

- On étudie l’équation demi-linéaire $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ avec p = 3 sur l’intervalle $[1\,;\,\infty[$, où $\Phi(s) = |s|^1 s$. Un multiple d’une solution est encore une solution, mais la somme de deux solutions en général ne l’est pas. Pour p = 2, c’est l’équation linéaire y" + q(x)y = 0.
- L’équation est oscillante si toute solution non triviale a une infinité de zéros sur l’intervalle. Le théorème de séparation de Sturm vaut aussi pour les équations demi-linéaires : soit toutes les solutions oscillent, soit aucune.
- C’est l’équation d’Euler demi-linéaire avec k = 1. En posant y = x^λ avec 0 < λ < 1, on obtient k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ pour p = 3. La fonction G atteint son maximum, la constante critique $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, en λ = (p − 1)/p. Ici k est plus grand, il n’y a pas de solution x^λ et l’équation est oscillante.
- Le critère de Leighton et Wintner (si ∫ q = ∞, l’équation est oscillante) ne tranche pas ici : $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Le critère de Kneser pour les équations demi-linéaires avec la constante critique $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ est plus grand, l’équation est oscillante.
- La technique de Riccati pour une équation demi-linéaire : la substitution $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ mène à l’équation de Riccati $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. L’équation est non oscillante exactement lorsque celle-ci a une solution sur tout un intervalle ⟨T ; ∞).

- Numériquement (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1), la solution a sur l’intervalle $]1\,;\,10\,000]$ ce nombre de zéros : 2, distants de $3369{,}2413$. Les zéros : $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Conclusion : l’équation est oscillante – toute solution non triviale a une infinité de zéros.

Graphique



La solution avec ses zéros marqués.

Le critère de Kneser discret : n²q_n = 1/8 < 1/4.

Énoncé: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

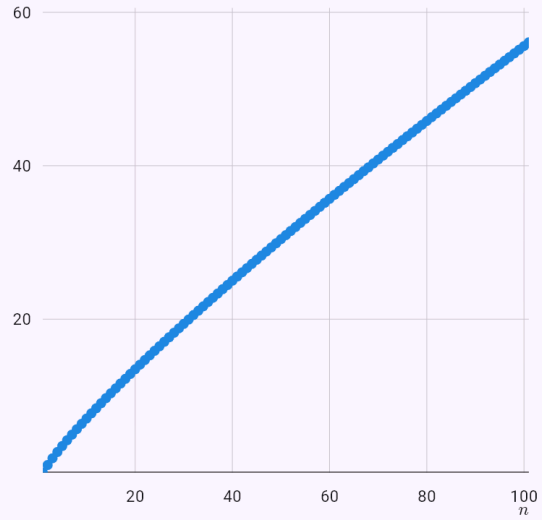
Résultat

L'équation n'est pas oscillante.

Étapes

- On étudie l'analogue discret de (r y')' + q y = 0, la récurrence linéaire $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ pour $n \geq 1$, où $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Sous forme de récurrence : $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Pour une suite, on compte les zéros généralisés : $y_n = 0$, ou un changement de signe entre y_n et y_{n+1}. L'équation est oscillante si toute solution non triviale a une infinité de zéros généralisés. Le théorème de séparation de Sturm vaut ici aussi.
- Le critère de Leighton et Wintner discret : si $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ et $\Sigma\, q_n = \infty$, l'équation est oscillante. Ici $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, le critère ne tranche donc pas.
- Le critère de Kneser discret avec la constante critique $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, l'équation n'est pas oscillante.
- La technique de Riccati discrète : la substitution $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ mène à $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. L'équation est non oscillante exactement lorsque cette équation a, à partir d'un certain n, une solution avec $w_n + r_n > 0$.
- La solution avec $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ n'a aucun zéro généralisé pour n dans $]1\,;\,101]$
- Conclusion : l'équation n'est pas oscillante – toute solution non triviale n'a qu'un nombre fini de zéros.

Graphique



La solution n'a aucun zéro sur l'intervalle choisi.

Exemple 4.2 de Došlá et Marini – le cas C5 : solutions régulièrement croissantes et fortement

décroissantes.

Énoncé: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Résultat

$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

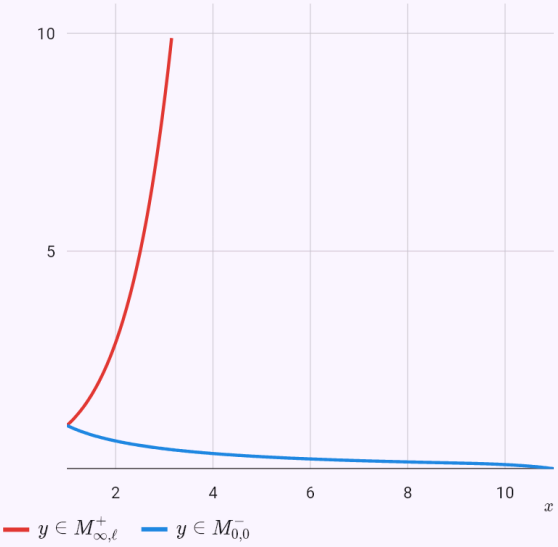
Étapes

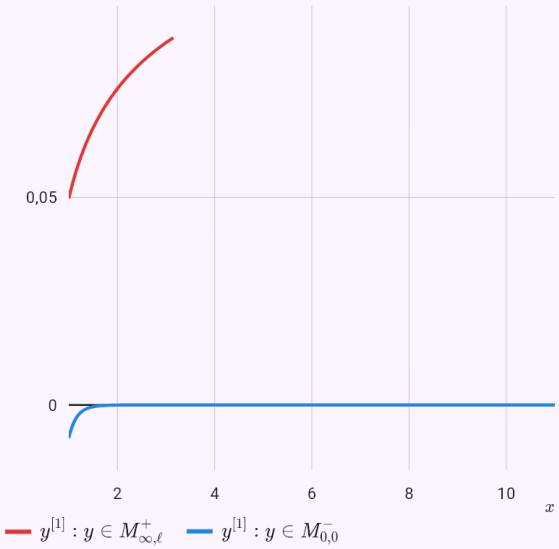
- On étudie l'équation demi-linéaire $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ sur l'intervalle $[1\,;\,\infty[$ avec α = 3, a = e^{-3x} > 0 et b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. C'est une équation avec p-laplacien pour p = α + 1 et un « potentiel négatif » : elle n'oscille pas. La forme générale de l'équation est $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- Le comportement d'une solution est décrit, avec y, par sa quasi-dérivée $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3 \operatorname{sgn} y'$. Toute solution non triviale appartient à l'une de deux classes : M^+ – à partir d'un certain x, y·y' > 0 et |y| croît – ou M^- – y·y' < 0 sur tout l'intervalle et |y| décroît. Les classes se subdivisent selon les limites de |y| et de $|y^{[1]}|$ quand x → ∞ : indice ∞ (infinie), ℓ (finie non nulle) ou 0 (nulle), par exemple $M^+_{\infty,\ell}$
- D'après le théorème 2.1 (Došlá–Marini), toute solution est définie sur tout l'intervalle et les deux classes M^+ et M^- sont non vides. À M^+ appartiennent par exemple les solutions avec y(x₀) > 0 et y'(x₀) ≥ 0.
- L'intégrale A : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme e^x (à une constante positive près). L'exponentielle l'emporte, donc $\displaystyle\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale B $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- L'intégrale J_1 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme e^x (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). L'exponentielle l'emporte, donc $\displaystyle\int_1^\infty e^x \left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale J_2 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme $x^{-\frac{2}{3}}$ (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale Y_1 diverge, car l'intégrale intérieure diverge déjà $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale Y_2 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme x^{-2} (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2} \left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x < \infty$
- Lemme 2.1 (une généralisation du théorème de Fubini) : pour α = 3 ≥ 1, $Y_2 = \infty$ entraîne $J_2 = \infty$ et $Y_1 = \infty$ entraîne $J_1 = \infty$.
- Les intégrales donnent $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – c'est le cas C_5 de la classification (théorème 3.1).
- L'équation réciproque $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a et b échangent leurs rôles et α devient 1/α) a pour solutions les quasi-dérivées des solutions de l'équation

donnée. Ses intégrales J_1, J_2 se lisent comme Y_2, Y_1, c'est donc le cas C_8. Les classes se correspondent avec les indices échangés : $M^+_{\infty,\ell}$ de l'équation donnée correspond à $M^+_{\ell,\infty}$ de la réciproque.

- $M^+_{\infty,\ell} \neq \varnothing$: solutions régulièrement croissantes – $|y| \to \infty$, mais la quasi-dérivée a une limite finie non nulle ; y croît comme $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (théorème 3.1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: solutions fortement décroissantes – $y \to 0$ et $y^{[1]} \to 0$ (théorème 3.1).
- La solution de M^- du graphique est trouvée numériquement par tir : on cherche la valeur initiale de la quasi-dérivée pour laquelle la solution avec $y(1) = 1$ n'atteint pas zéro et ne se met pas à croître sur un long intervalle – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Cette valeur est unique, car $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (théorème 4).

Graphique





En haut, des solutions numériques y(x) des classes non vides (M^+ depuis $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- par tir) ; en bas, leurs quasi-dérivées y^[1](x). Une courbe s'arrête là où |y| dépasse 10.

Le cas C4 – solutions croissantes bornées et tout un intervalle de décroissantes.

Énoncé: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Résultat

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oscillation de l'équation

Étapes

- On étudie l'équation linéaire $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ sur l'intervalle $[1\,;\,\infty[$, c'est-à-dire (a(x)y')' = b(x)y avec a = x^4 > 0 et b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. Écrite (a y')' + q y = 0, elle a q = −b négatif : l'équation n'est donc pas oscillante – chaque solution a au plus un zéro.
- Le comportement d'une solution est décrit, avec y, par sa quasi-dérivée $y^{[1]} = x^4 y'$. Toute solution non triviale appartient à l'une de deux classes : M^+ – à partir d'un certain x, y·y' > 0 et |y| croît – ou M^- – y·y' < 0 sur tout l'intervalle et |y| décroît. Les classes se subdivisent selon les limites de |y| et de $|y^{[1]}|$ quand x → ∞ : indice ∞ (infinie), ℓ (finie non nulle) ou 0 (nulle), par exemple $M^+_{\infty,\ell}$
- D'après le théorème 2.1 (Došlá–Marini), toute solution est définie sur tout l'intervalle et les deux classes M^+ et M^- sont non vides. À M^+ appartiennent par exemple les solutions avec $y(x_0) > 0$ et $y'(x_0) \geq 0$.
- L'intégrale A : $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- L'intégrale B : $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- L'intégrale J_1 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme x^{-4} (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

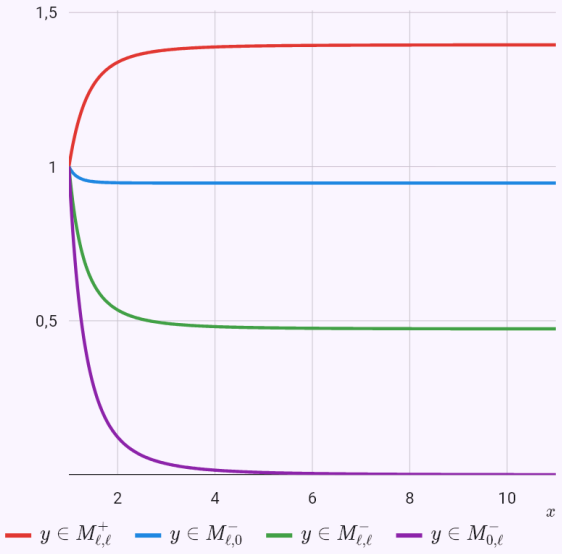
- L'intégrale J_2 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme x^{-7} (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1

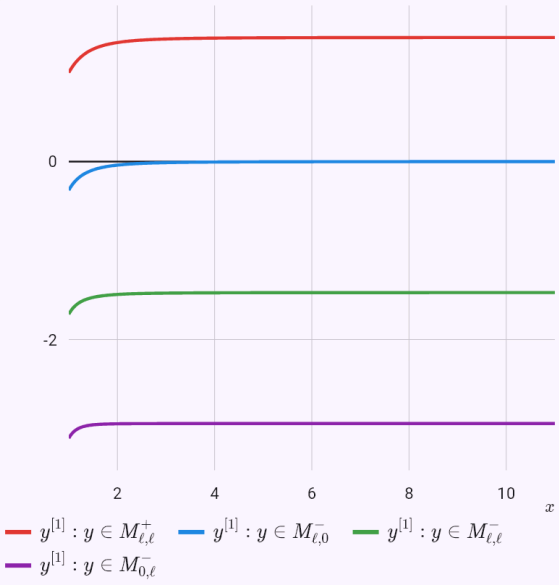
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Les intégrales donnent $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – c'est le cas C_4 de la classification (théorème 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: solutions croissantes avec des limites finies de y et de la quasi-dérivée (théorème 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: solutions décroissantes dont y et la quasi-dérivée ont des limites non nulles (théorème 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: solutions décroissant vers une limite non nulle, la quasi-dérivée → 0 (théorème 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: solutions régulièrement décroissantes – y → 0, mais la quasi-dérivée a une limite non nulle ; y décroît comme $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (théorème 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$ – aucune solution de ce type (théorème 3.1).
- Les solutions de M^- du graphique sont trouvées numériquement par tir : avec $y(1) = 1$, elles restent positives et décroissantes pour tout un intervalle de

valeurs initiales de la quasi-dérivée $y^{[1]}(1) \in [-3{,}1103\,;\,-0{,}3215]$, car $\int (a^{-1/\alpha}+b)\,dx < \infty$ (théorème 4). Les extrémités et le milieu de l'intervalle donnent des solutions de classes différentes.

Graphique





En haut, des solutions numériques y(x) des classes non vides (M^{+} depuis $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} par tir) ; en bas, leurs quasi-dérivées y^[1](x). Une courbe s'arrête là où |y| dépasse 10.

Une équation superlinéaire – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (la solution √2/(x + √2)).

Énoncé: `asymptotics(y'' = y^3)`

Résultat

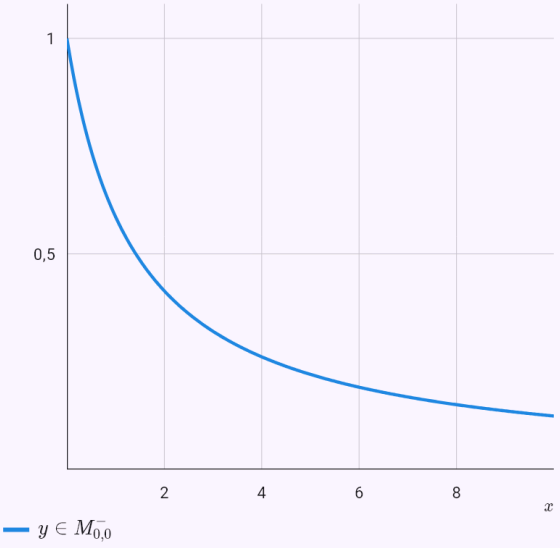
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

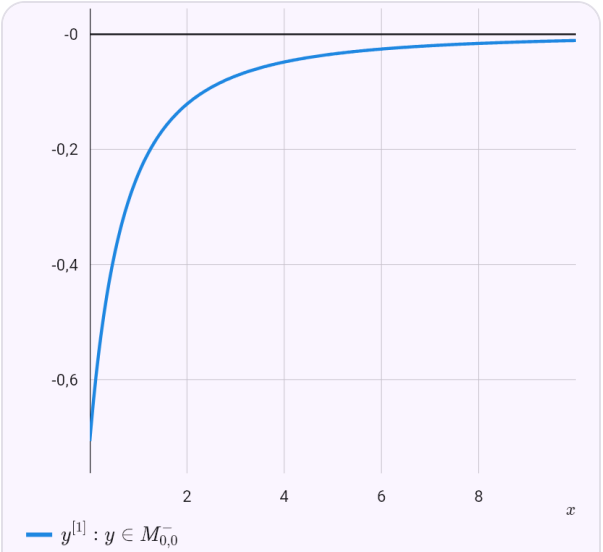
Étapes

- On étudie l'équation de type Emden-Fowler $y'' = |y|^2 y$ sur l'intervalle $[0\,;\,\infty[$ avec α = 1, β = 3, a = 1 > 0 et b = 1 > 0. Comme β > α, l'équation est superlinéaire. La forme générale de l'équation est $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Le comportement d'une solution est décrit, avec y, par sa quasi-dérivée $y^{[1]} = y'$. Toute solution non triviale définie jusqu'à l'infini appartient à l'une de deux classes : M^+ – à partir d'un certain x, y·y' > 0 et |y| croît – ou M^- – y·y' < 0 et |y| décroît. Les classes se subdivisent selon les limites de |y| et de $|y^{[1]}|$ quand x → ∞ : indice ∞ (infinie), ℓ (finie non nulle) ou 0 (nulle).
- D'après le théorème 1 (Cecchi–Došlá–Marini), la classe M^- est non vide pour β > α. Certaines solutions « explosent » cependant : |y| → ∞ dès un point fini, elles ne sont donc pas définies jusqu'à l'infini. La classe M^+ peut être vide.
- L'intégrale A : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme 1 (à une constante positive près). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale B : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme 1 (à une constante positive près). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale J_1 : quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme x (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale $Y_2^{(\beta)}$: quand x → ∞, l'intégrande se comporte comme x^3 (à une constante positive près, l'intégrale intérieure remplacée par son comportement asymptotique). D'après le critère de comparaison avec $\int x^\mu\,dx$, qui converge exactement pour μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- L'intégrale $Y_1^{(\beta)}$ diverge, car l'intégrale intérieure diverge déjà : $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \emptyset$ – aucune solution de ce type (Kiguradze, cité dans Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \emptyset$ – aucune solution de ce type (lemme 1).
- $M^-_{\ell,0} = \emptyset$ – aucune solution de ce type (lemme 2).
- $M^-_{0,\ell} = \emptyset$ – aucune solution de ce type (lemme 1).
- $M^-_{0,0} \neq \emptyset$: solutions fortement décroissantes – y → 0 et $y^{[1]} \to 0$ (théorème 1).

- La solution de M^- du graphique est trouvée numériquement par tir : on cherche la valeur initiale de la quasi-dérivée pour laquelle la solution avec $y(0) = 1$ n'atteint pas zéro et ne se met pas à croître sur un long intervalle – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Cette valeur est unique, car $\int (a^{-1/\alpha} + b)\, dx = \infty$ (théorème 4).

Graphique





En haut, des solutions numériques y(x) des classes non vides (M^+ depuis $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- par tir) ; en bas, leurs quasi-dérivées y^[1](x). Une courbe s'arrête là où |y| dépasse 10.

Limitations connues

- Une équation qui demande une indication de l'énoncé (autre que z = ln y) n'est pas encore résolue.
- Pour une équation à paramètre (k, λ, ω), l'application ne trace pas de graphe et prend les paramètres positifs.
- Quand la solution ne s'exprime pas explicitement, elle reste implicite.
- La transformée de Laplace ne connaît pas encore la fonction de Heaviside, les décalages ni les seconds membres périodiques.
- Si les intégrales de la variation des constantes ne s'expriment pas à l'aide de fonctions élémentaires (y″ + y′ + y = tan x), la solution les garde sous forme d'intégrales ; il n'y a alors pas de graphique et les conditions initiales ne sont pas appliquées.
- Systèmes seulement de deux équations linéaires à coefficients constants sans second membre ; systèmes non linéaires seulement dans les applications (modèles).
- Une équation de Riccati sans solution particulière donnée n'est résolue que si l'on en devine une de forme simple – sinon l'application indique qu'il en faut une.
- L'équation de Lagrange seulement sans condition initiale ; pour celle de Clairaut, la condition choisit les droites (et l'enveloppe) passant par le point.
- L'oscillation seulement pour des équations à coefficients numériques (k doit être un nombre) ; une équation demi-linéaire seulement avec r = 1. Les zéros sont comptés numériquement sur un intervalle

fini – seuls les critères décident de l'infini.

- L'asymptotique d'une équation de type Emden-Fowler ($\beta \neq \alpha$) n'est décidée que là où les théorèmes cités le disent – les autres classes sont marquées non décidées. Les coefficients a, b doivent être positifs ; leur comportement à l'infini est reconnu pour des produits de puissances, de logarithmes et d'exponentielles, sinon seulement des intégrales exactes avec Symja.

37. Calcul des variations

L'application cherche une extrémale d'une fonctionnelle J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx avec les conditions aux limites y(a), y(b) : elle pose l'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (avec les dérivées partielles dans la solution), montre l'intégrale première d'une intégrande sans y et résout l'équation différentielle obtenue par le solveur d'EDO, avec les conditions aux limites et la vérification. Le problème existe aussi sous forme de formulaire dans les domaines Analyse et Physique (Applications).

Si l'équation n'a pas de solution sous forme close et que F ne dépend pas de x, elle utilise l'identité de Beltrami et reconnaît les extrémales connues : la brachistochrone (une cycloïde, comparée à la droite, avec la durée de la glissade), la chaînette et la surface de révolution minimale (deux, une ou aucune chaînette – solution de Goldschmidt), un problème isopérimétrique avec multiplicateur de Lagrange (un arc de cercle de longueur donnée, une chaîne suspendue). Les constantes sont calculées numériquement. Le principe de moindre action tire d'un lagrangien l'équation du mouvement, pour le pendule avec sin θ ≈ θ. Une démo interactive – une course de billes sur la brachistochrone – se trouve sur mathtrace.app, rubrique « À essayer ».

Comment le saisir

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	L'intégrande et les conditions aux limites, séparées par des points-virgules.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	La contrainte ∫ G dx = L en dernier élément.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Un lagrangien L = T − V et le mot action – l'équation du mouvement.

Exemples

Le plus court chemin entre deux points est un segment.

Énoncé: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Résultat

$$y = 2x$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, conditions aux limites $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$

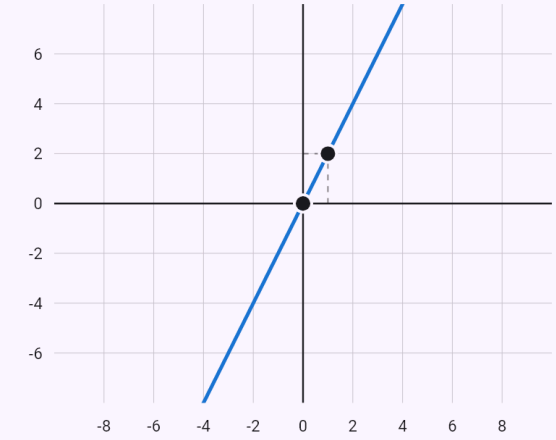
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $-y'' = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de y – l'équation d'Euler-Lagrange a une intégrale première : $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- On résout l'équation différentielle :
- Le second membre ne dépend que de la variable indépendante – on intègre l'équation pas à pas : $y'' = 0$
- Intégration des deux membres : $y' = \int 0\, dx = C_1$
- Intégration des deux membres : $y = \int C_1\, dx = C_1 x + C_2$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $y = 2x$

Graphique

Solutions | Plan de phase



$y = 2x$

Celle mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Vos propres valeurs des constantes

C_1 C_2

+ Ajouter une courbe

Touchez le graphique et réglez la pente avec le curseur – la solution passant par ce point avec cette pente de la tangente est tracée.

L'équation d'Euler-Lagrange y'' = y avec conditions aux limites.

Énoncé: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Résultat

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, conditions aux limites $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $-2(-y + y'') = 0$
- On résout l'équation différentielle :
- Une équation linéaire à coefficients constants : $y'' - y = 0$
- On cherche des solutions y = e^(λx) ; en substituant et en divisant par e^(λx), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental : $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^{x}$
- La solution générale : $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$
  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- La solution qui vérifie les conditions données : $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- La solution qui vérifie les conditions données : $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

La brachistochrone – une cycloïde de A [0 ; 0] à B [2 ; 1], glissade de 0,806 s contre 1,010 s en ligne

droite.

Énoncé: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

Résultat

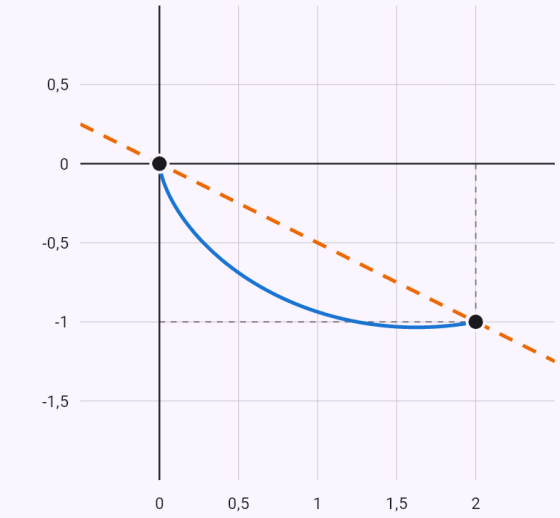
$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx,$ conditions aux limites $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x − l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1 est vérifiée : $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identité de Beltrami donne y·(1 + y'²) = const. La solution est une cycloïde − la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule (l'axe y vers le bas, départ au repos en A) : $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Les constantes à partir du point d'arrivée B (θ_B numériquement par dichotomie)
$$\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$$
- La valeur de la fonctionnelle : $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; le long de la droite $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Pour J = ∫ ds/v avec v = √(2gy), J est la durée de la glissade : $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s

- θ_B > π − la trajectoire la plus rapide descend sous le niveau de B puis remonte jusqu'à B.

Graphique



L'axe y est orienté vers le bas − la trajectoire passe sous le point A. En trait plein la cycloïde (la glissade la plus rapide), en pointillé la droite pour comparer.

La surface de révolution minimale entre deux anneaux – deux chaînettes, la moins profonde est le

minimum.

Énoncé: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

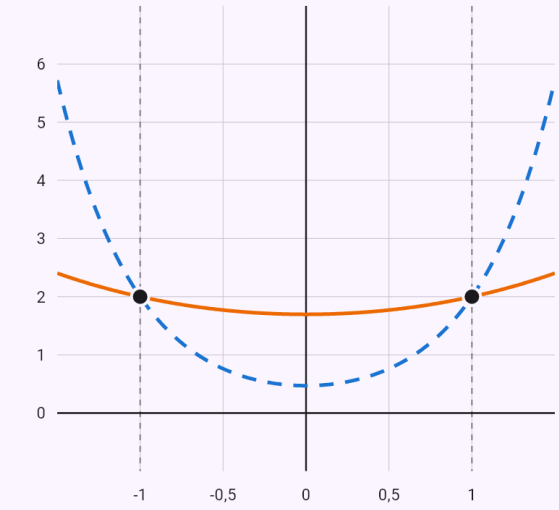
Résultat

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, conditions aux limites $y(-1) = 2,\quad y(1) = 2$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy''+y'^2+1\right) = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x − l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁ est vérifiée : $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identité de Beltrami donne une chaînette (le cosinus hyperbolique) : $y = C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Deux chaînettes vérifient les conditions aux limites (numériquement). Le minimum est celle de plus petit J − la moins profonde ; la plus profonde n'est que stationnaire.
  $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358;\quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Graphique



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

L'extrémale entre les points donnés ; en pointillé l'autre solution ou une courbe de comparaison.

Anneaux éloignés – aucune chaînette (solution de Goldschmidt).

Énoncé: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Résultat

Il n'y a pas de solution.

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, conditions aux limites $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x – l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1 est vérifiée : $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identité de Beltrami donne une chaînette (le cosinus hyperbolique) : $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Aucune chaînette ne passe par les deux points – les anneaux sont trop petits pour leur écartement. La surface minimale n'est alors que les deux disques et l'axe entre eux (solution de Goldschmidt) ; il n'y a pas d'extrémale lisse.

La plus grande aire sous une courbe de longueur π – un demi-cercle.

Énoncé: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Résultat

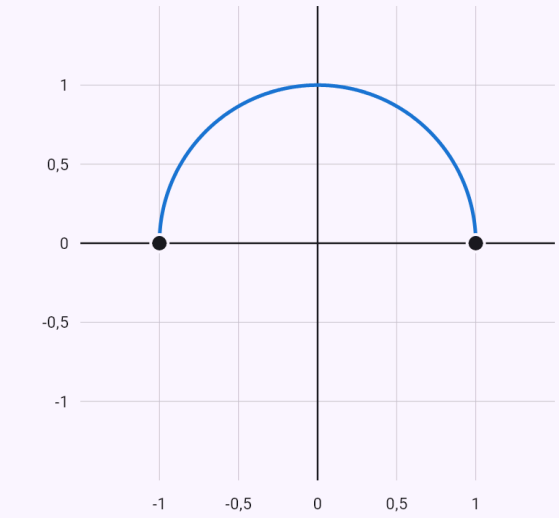
$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, conditions aux limites $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Un problème isopérimétrique avec la contrainte $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: on l'adjoint par un multiplicateur de Lagrange λ et on cherche un extremum de la fonctionnelle d'intégrande $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x − l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1 est vérifiée : $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- L'identité de Beltrami pour F + λG donne un cercle − un arc de rayon |λ| : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Les constantes à partir de la longueur de l'arc et de la corde, angle au centre 2α (numériquement)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Graphique



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

L'extrémale entre les points donnés ; en pointillé l'autre solution ou une courbe de comparaison.

Une chaîne suspendue de longueur 3 – une chaînette avec multiplicateur de Lagrange.

Énoncé: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Résultat

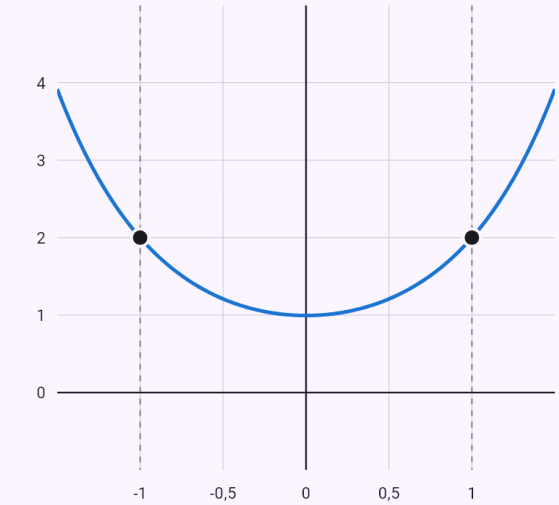
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$$

Étapes

- On cherche la fonction pour laquelle la fonctionnelle a un extremum : $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, conditions aux limites $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Un problème isopérimétrique avec la contrainte $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2+1}\right) dx = 3$: on l'adjoint par un multiplicateur de Lagrange λ et on cherche un extremum de la fonctionnelle d'intégrande $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- L'équation d'Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0 : $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x – l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1 est vérifiée : $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- L'identité de Beltrami pour F + λG donne une chaînette décalée de λ : $y = c + C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Les constantes à partir de la longueur de la chaîne et des conditions aux limites (numériquement)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Graphique



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$

L'extrémale entre les points donnés ; en pointillé l'autre solution ou une courbe de comparaison.

Le principe de moindre action – un ressort, l'équation du mouvement m x'' + k x = 0.

Énoncé: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Résultat

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Étapes

- Le principe de moindre action : le mouvement rend l'action stationnaire : $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- L'équation d'Euler-Lagrange du lagrangien est l'équation du mouvement : $-kx - mx'' = 0$
- On résout l'équation différentielle :
- Une équation linéaire à coefficients constants : $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- On cherche des solutions x = e^(λt) ; en substituant et en divisant par e^(λt), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- La solution générale
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Un pendule – sin θ ≈ θ pour de petites oscillations.

Énoncé: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Résultat

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Étapes

- Le principe de moindre action : le mouvement rend l'action stationnaire : $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Les dérivées partielles de l'intégrande par rapport à y et y' et la dérivée totale par rapport à x (y et y' dépendent de x)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- L'équation d'Euler-Lagrange du lagrangien est l'équation du mouvement : $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- L'intégrande ne dépend pas de x − l'identité de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁ est vérifiée : $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- L'équation avec sin θ n'a pas de solution élémentaire. Pour de petites oscillations, sin θ ≈ θ donne l'équation des oscillations harmoniques : $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- On résout l'équation différentielle :
- Une équation linéaire à coefficients constants : $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- On cherche des solutions \theta = e^(λt) ; en substituant et en divisant par e^(λt), on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Chaque racine λ donne la solution e^(λx), une racine de multiplicité k aussi x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), et une paire α ± βi les solutions e^(αx)·cos βx et e^(αx)·sin βx. Le système fondamental
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- La solution générale
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Limitations connues

- Une seule fonction inconnue et au plus sa dérivée première dans l'intégrande ; pas encore de fonctionnelles de plusieurs fonctions ni avec y''.
- Les extrémales connues (cycloïde, chaînette, arc de cercle) sont reconnues d'après la forme de l'intégrande ; les autres équations non linéaires restent sous forme d'équation d'Euler-Lagrange.
- La brachistochrone part du repos – le point de départ doit avoir $y(a) = 0$ et l'axe y est orienté vers le bas.

38. Équations aux dérivées partielles

Écrivez l'équation avec les indices u_t, u_xx, u_xy (sur une photo l'app lit aussi ∂u/∂t et ∂²u/∂x²), le laplacien comme Δu ; conditions et domaine séparés par un point-virgule. Sans conditions l'app détermine le type d'une équation linéaire du second ordre (elliptique, parabolique, hyperbolique – par régions pour des coefficients variables), l'équation des caractéristiques, la forme canonique et, sans termes d'ordre inférieur, la solution générale. Une équation du premier ordre a·u_x + b·u_y + c·u = f est résolue par les caractéristiques avec vérification.

Avec des conditions aux limites et initiales elle résout par séparation des variables l'équation de la chaleur u_t = k·u_xx et l'équation des ondes u_tt = c²·u_xx sur un intervalle (extrémités à température fixée ou isolées, valeurs non nulles via l'état stationnaire) et l'équation de Laplace sur un rectangle et dans un disque (ou au dehors). Les coefficients de Fourier sont donnés par une formule en n ; si la fonction initiale est une somme de fonctions propres, on obtient une somme finie. Sur toute la droite elle utilise la formule de d'Alembert et la transformée de Fourier (noyau de la chaleur), sur la demi-droite x > 0 la transformée de Laplace en temps. Elle traite aussi une source f(x, t) (principe de Duhamel), un flux de chaleur à une extrémité, des valeurs au bord variables dans le temps et, pour l'équation de Laplace, des dérivées sur les côtés. Parmi les équations non linéaires, elle résout celle de Burgers – par les caractéristiques jusqu'à la formation d'un choc, avec viscosité par la transformation de Cole-Hopf ; l'équation des ondes sur la droite est aussi montrée par la transformée de Fourier. L'équation de Poisson Δu = f sur un rectangle est résolue par une série de Fourier double (la source comme somme de produits p(x)·q(y)) ; avec des dérivées sur les quatre côtés, la condition de solvabilité est vérifiée et la solution est donnée à une constante près. Les équations à coefficients variables αx²u_xx + βxu_x deviennent un problème de Sturm-Liouville avec poids.

Numériquement sur un maillage avec le schéma en tête comme pour les autres méthodes numériques : l'équation de la chaleur en explicite (ftcs), implicite (btcs), par Crank-Nicolson (cranknicolson) et la θ-méthode (theta) – les systèmes implicites par l'algorithme de Thomas, avec l'analyse de stabilité de von Neumann ; l'équation de transport par upwind, laxwendroff et leapfrog avec la condition CFL, l'équation des ondes par leapfrog ; l'équation de Laplace (Poisson) par le schéma à cinq points et les itérations jacobi, gaussseidel et sor en comparant le nombre d'itérations. Valeurs nommées : h pas d'espace, k pas de temps, to temps final, theta, omega, tol, max. L'équation de la chaleur est aussi un formulaire dans Méthodes numériques. La chaleur en 2D sur un rectangle est résolue par les schémas ftcs et adi (directions alternées), l'équation de Laplace aussi par gradient conjugué (cg), multigrille (multigrid) et éléments finis triangulaires (fem) ; l'équation de Burgers par le schéma de Godunov (upwind). Les équations de transport et de Laplace sont aussi des formulaires du domaine Méthodes numériques, les applications (barre, corde, tambour, diffusion) des formulaires de physique et de chimie. Pour les lois de conservation, il y a les schémas laxfriedrichs et muscl (avec le limiteur minmod) – pour l'équation de transport et celle de Burgers, celle-ci aussi avec viscosité (comparaison avec la transformation de Cole-

Hopf). La méthode des éléments finis (fem) calcule aussi sur un polygone quelconque donné par ses sommets, polygon = (0,0), (2,0), …, avec la valeur au bord u = … ; le maillage vient du découpage d'oreilles et de la subdivision des triangles. La chaleur dans une plaque est un formulaire de physique.

Le résultat est un graphe de u(x, t) : une courbe dans le temps avec un curseur et un bouton de lecture, et une surface 3D à tourner ; pour une solution numérique la solution exacte est en tirets. La solution stationnaire u(x, y) de Laplace est une surface 3D.

Comment le saisir

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	L'équation, les conditions aux limites et initiales ; une dérivée dans une condition comme u_t(x,0) ou u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Le domaine : x ∈ ℝ, x > 0 ou 0 < x < π ; sans conditions aux limites toute la droite.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	L'équation de Laplace dans un disque : Δu, le rayon r et l'angle φ (ou θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numériquement : le schéma en tête, les pas h et k et le temps final to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Chaleur en 2D : u(x,y,t), conditions comme u(x,y,0) = … et u(0,y,t) = … ; les côtés sans condition valent 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Éléments finis sur un polygone : les sommets après polygon =, la valeur au bord u = …, la plus longue arête h.

Exemples

Une équation hyperbolique – caractéristiques, forme canonique u_ξη = 0 et solution générale.

Énoncé: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Résultat

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Les coefficients des dérivées secondes sous la forme $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Le discriminant : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, l'équation est hyperbolique (comme l'équation des ondes) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- L'équation des caractéristiques : $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Deux familles réelles de caractéristiques : $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nouvelles variables le long des caractéristiques : $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Après le changement de variables (dérivation composée) on obtient la forme canonique : $u_{\xi\eta} = 0$
- L'équation u_ξη = 0 s'intègre deux fois – la solution générale avec deux fonctions arbitraires $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

L'équation de Tricomi – le type par régions.

Énoncé: `y u_xx + u_yy = 0`

Résultat

$$D = -y$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Les coefficients des dérivées secondes sous la forme $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Le discriminant dépend de la position : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Le type par régions – hyperbolique pour $y < 0$, parabolique pour $y = 0$, elliptique pour $y > 0$
- L'équation des caractéristiques : $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

L’équation de transport par les caractéristiques – l’onde avance à la vitesse 2.

Énoncé: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Résultat

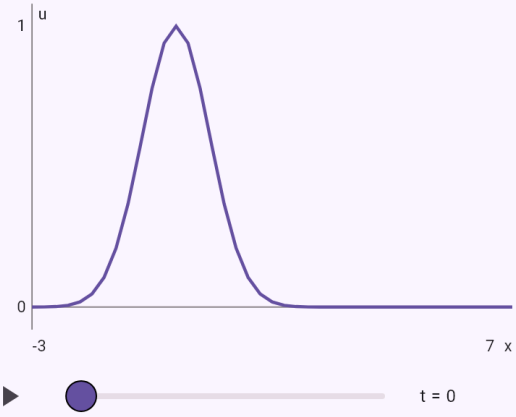
$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Étapes

- Nous résolvons l’équation aux dérivées partielles $u_t + 2u_x = 0$
- Conditions : $u(x,0) = e^{-x^2}$
- La méthode des caractéristiques : le long des courbes solutions du système l’équation devient une équation différentielle ordinaire pour u.
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$
- Les caractéristiques sont les courbes sur lesquelles $x - 2t = \xi$ est constant.
- Le long d’une caractéristique on résout une équation ordinaire, la valeur initiale venant de la condition :
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$$
- Vérification : substituée dans l’équation, le membre de gauche égale celui de droite.
- La solution : $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

La chaleur dans une barre aux extrémités refroidies – une série de Fourier.

Énoncé: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Résultat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-4(-1)^n}{n^3\pi}\, e^{-4n^2t}\, \sin(n$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = 4u_{xx}$
- Conditions : $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Séparation des variables : on cherche un produit ; substitué et divisé, les variables se séparent – les deux membres doivent égaler la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -4n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2t}$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition) : $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-4n^2t}\, \sin(nx)$
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties)

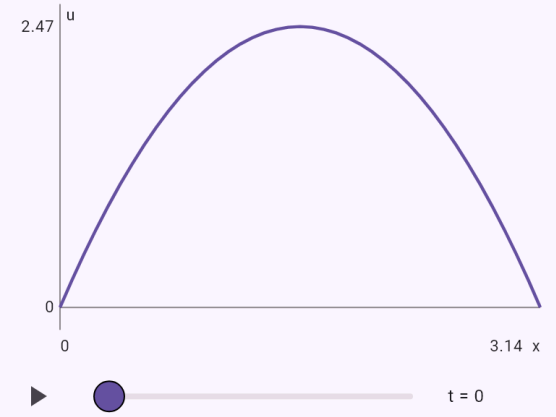
$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{4-4(-1)^n}{n^3\pi}$$

- La solution

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-4(-1)^n}{n^3\pi}\, e^{-4n^2t}\, \sin(nx)$$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Extrémités à des températures différentes – l'état stationnaire et l'écart.

Énoncé: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Résultat

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4}}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = 2u_{xx}$
- Conditions : $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Les extrémités ont des valeurs non nulles. D'abord l'état stationnaire $w(x) = x + 1$ (l'équation sans le temps, w" = 0), puis on cherche $u = w(x) + v(x,t)$; l'écart v est nul aux extrémités.
- Séparation des variables : on cherche un produit ; substitué et divisé, les variables se séparent – les deux membres doivent égaler la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour

  $$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition)

  $$u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties)

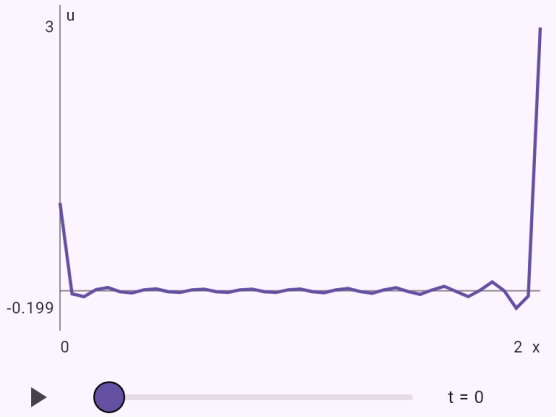
  $$c_n = \int_0^2 (-x-1)\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$$

- La solution

  $$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Une corde pincée – des ondes stationnaires.

Énoncé: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Résultat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ s$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Conditions : $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l'équation est hyperbolique (comme l'équation des ondes) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Séparation des variables : on cherche un produit – des ondes stationnaires ; les deux membres égalent la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\dfrac{T''}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – des oscillations à sa propre fréquence : $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$

- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties)

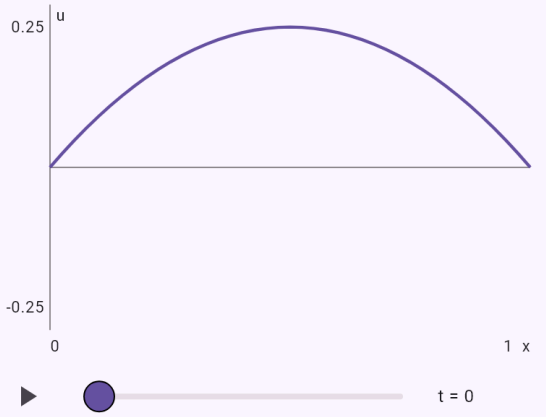
$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\ \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- La solution

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

L’équation de Laplace sur un rectangle avec un côté chauffé.

Énoncé: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Résultat

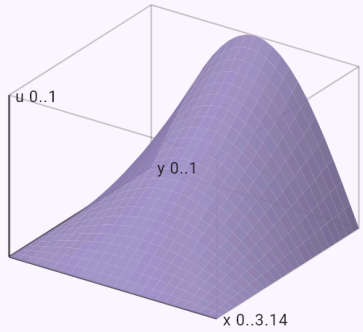
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Étapes

- Nous résolvons l’équation aux dérivées partielles $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Conditions : $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, l’équation est elliptique (comme l’équation de Laplace) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Le côté avec des valeurs non nulles (les autres ont u = 0) : $u(x,1) = \sin x$
- Séparation des variables : on cherche un produit : $u = X(x)\,Y(y)$: $\quad \dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n’a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- L’autre équation Y" = λY, nulle sur le côté opposé, normée à 1 sur le côté donné : $Y_n = \dfrac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- La fonction initiale (au bord) est déjà une somme de fonctions propres, seuls quelques coefficients $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, \sin(nx)\,dx$ sont non nuls : $c_1 = 1$, les autres sont nuls.

- La solution : $u(x,y) = \dfrac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

L’équation de Laplace dans un disque – une somme finie d’harmoniques.

Énoncé: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

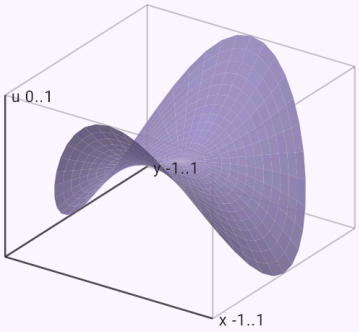
Résultat

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Étapes

- Nous résolvons l’équation aux dérivées partielles
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Conditions : $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, l’équation est elliptique (comme l’équation de Laplace) : $\Delta u = 0$
- Séparation des variables en coordonnées polaires :
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi)$: $\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- L’angle revient après un tour, Φ doit être périodique :
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – les solutions
  $\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \quad n = 0,1,2,\ldots$
- La partie radiale est l’équation d’Euler ; dans le disque la solution doit être bornée (r^{-n} et ln r disparaissent) :
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- L’équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Les coefficients de Fourier de la fonction au bord :
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- La fonction initiale (au bord) est déjà une somme de fonctions propres, seuls quelques coefficients $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ sont non nuls : $a_2 = -\frac{1}{2}$, les autres sont nuls.
- Tous les coefficients sont nuls :
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- La solution : $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

La formule de d'Alembert – une impulsion initiale se partage en deux ondes.

Énoncé: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Résultat

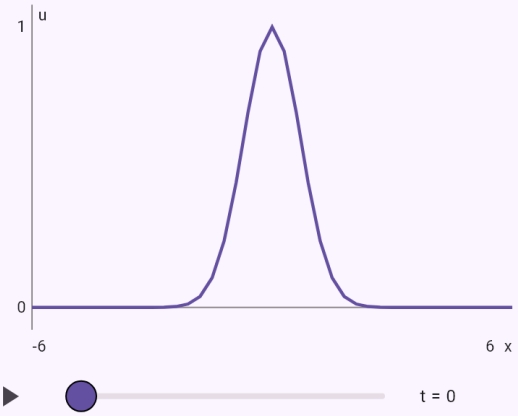
$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{tt} = u_{xx}$
- Conditions : $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l'équation est hyperbolique (comme l'équation des ondes) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- La solution générale de l'équation des ondes est formée de deux ondes allant à la vitesse c vers la gauche et vers la droite : $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- La même chose par la transformée de Fourier en x : chaque fréquence ω oscille séparément. La multiplication par e^(±icωt) est un décalage de ∓ct, donc la transformée inverse donne – la formule de d'Alembert.
- Les conditions initiales u = f et u_t = g donnent la formule de d'Alembert : $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Vérification : substituée dans l'équation, le membre de gauche égale celui de droite.
- La solution : $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0

La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

La transformée de Fourier sur toute la droite – un profil gaussien s'élargit.

Énoncé: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Résultat

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

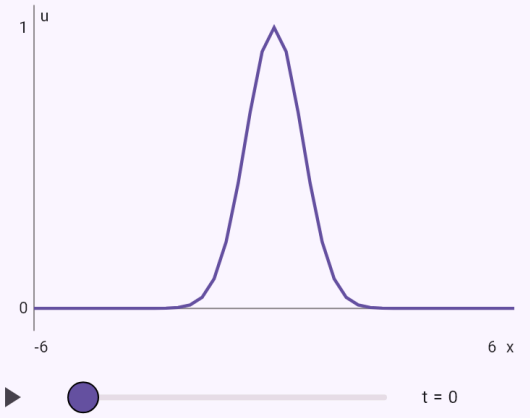
Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = u_{xx}$
- Conditions : $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Sur toute la droite on utilise la transformée de Fourier en x – la dérivée u_xx devient une multiplication par −ω² : $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Pour chaque ω il reste une équation ordinaire en temps $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- La transformée inverse d'un produit est la convolution avec le noyau de la chaleur (une gaussienne qui s'élargit avec le temps) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- La convolution de deux gaussiennes est encore une gaussienne, seulement plus large et plus basse $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Vérification : substituée dans l'équation, le membre de gauche égale celui de droite.

- La solution : $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

La transformée de Laplace – un demi-espace chauffé, la fonction erfc.

Énoncé: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

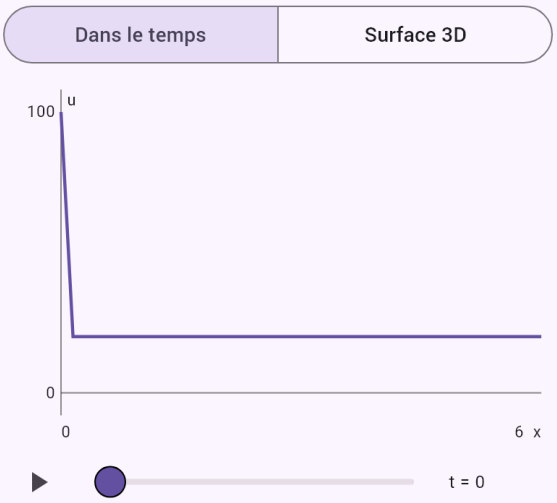
Résultat

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = 4u_{xx}$
- Conditions : $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Sur une demi-droite on utilise la transformée de Laplace en temps $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – la dérivée u_t devient sU − u(x, 0) et il reste une équation ordinaire en x : $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Quand x → ∞ U doit rester bornée, l'exponentielle croissante disparaît : $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; la constante par la condition au bord : $U(0,s) = \frac{100}{s} \Rightarrow A(s) = \frac{80}{s}$
- La transformée inverse d'après la table $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- La solution : $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Graphique



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Le schéma explicite avec r = 0,7 > 1/2 – instable selon von Neumann.

Énoncé: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Le maillage : 11 nœuds en x, 143 pas de temps jusqu'à t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \frac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r est le pas de temps sur le carré du pas d'espace).
- Le schéma explicite (avant en temps, centré en espace) – chaque nouvelle valeur directement à partir de trois anciennes : $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Analyse de von Neumann : l'erreur se décompose en ondes e^(iβx), chacune est multipliée à chaque pas par G : $G = 1 - 4r\sin^2\frac{\beta h}{2}$. La stabilité exige $r = 0{,}7000 > \frac{1}{2}$ – pas ici, les erreurs croîtront exponentiellement.
- Le premier niveau de temps

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

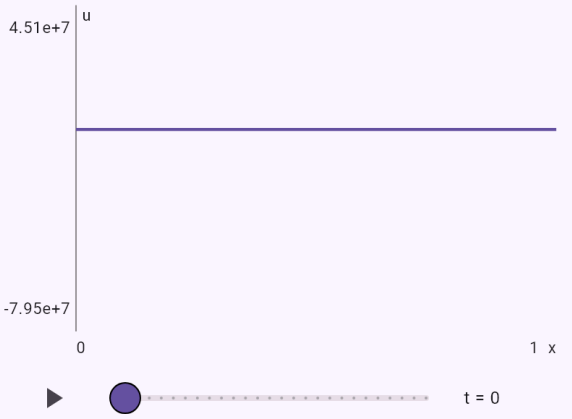
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- Au niveau level.50 les valeurs ont dépassé toute borne – le schéma est instable, le calcul a été arrêté.
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Le schéma de Crank-Nicolson avec l'algorithme de Thomas.

Énoncé: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Le maillage : 11 nœuds en x, 10 pas de temps jusqu'à t = $0{,}1$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r est le pas de temps sur le carré du pas d'espace).
- Le schéma de Crank-Nicolson – la moyenne de l'explicite et de l'implicite, d'ordre deux aussi en temps $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Analyse de von Neumann : l'erreur se décompose en ondes e^(iβx), l'amplification à chaque pas est $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; toujours $|G| \le 1$, le schéma est stable pour tout pas (inconditionnellement).
- À chaque niveau de temps il faut résoudre un système tridiagonal a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (les valeurs au bord au second membre). Le premier niveau

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Le système par l'algorithme de Thomas – la descente et la remontée

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad u_i^1 = d'_i - c'_i\,u_{i+}^1$$

i	c'_i	d'_i	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

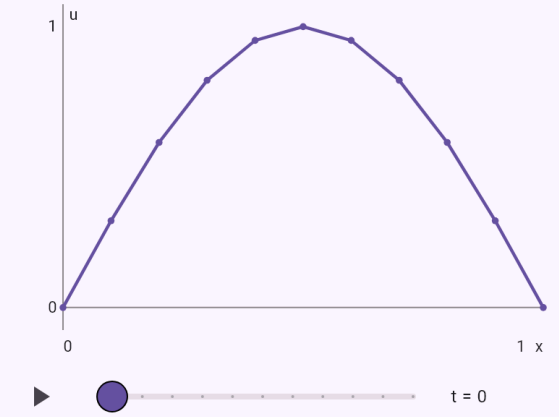
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_i |u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}| \approx 0{,}00273$ (exactement $0{,}372708$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



Points : la solution numérique aux nœuds du maillage ; en tirets : la solution exacte. Le curseur choisit le niveau de temps.

Le schéma de Lax-Wendroff pour l'équation de transport, la condition CFL.

Énoncé: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =`

```
0.016; to = 0.4)
```

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Le maillage sur $0 \le x \le 1$: 51 nœuds, 25 pas de temps jusqu'à t = 0,4 ; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ est le nombre de Courant.
- La solution exacte est transportée le long des caractéristiques $x - t = C$ à la vitesse a = 1
- Le schéma de Lax-Wendroff – le développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux, u_tt remplacé par a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- La condition CFL (le domaine numérique de dépendance contient la caractéristique) : $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Analyse de von Neumann : l'erreur se décompose en ondes e^(iβx), chacune est multipliée à chaque pas par l'amplification G. Le schéma est stable si |G| ≤ 1 pour tout β : $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; c'est le cas car $|\nu| \le 1$
- Le premier niveau de temps

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

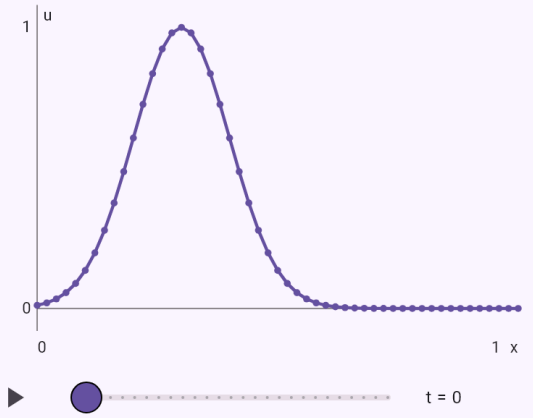
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (exactement $0{,}135335$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



t = 0

Points : la solution numérique aux nœuds du maillage ; en tirets : la solution exacte. Le curseur choisit le niveau de temps.

Le schéma à cinq points et SOR avec ω optimal – comparé à Jacobi et Gauss-Seidel.

Énoncé: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Un maillage carré : $h = 0{,}1$, 121 nœuds, dont 81 inconnues intérieures.
- Le schéma à cinq points – u_xx + u_yy remplacé par des différences, une équation en chaque nœud : $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- La surrelaxation successive (SOR) – le pas de Gauss-Seidel « prolongé » par le facteur ω : $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Le facteur de relaxation optimal à partir du rayon spectral de l'itération de Jacobi $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Les itérations à partir d'une estimation nulle à l'intérieur (nœuds choisis et plus grand changement)

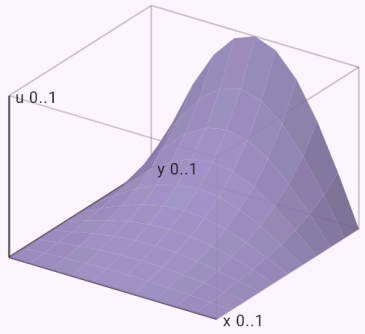
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- L'itération s'est arrêtée après 20 pas, quand le plus grand changement est passé sous 10^{-4}
- Les méthodes sur le même maillage avec la même tolérance : Jacobi 102 itérations, Gauss-Seidel 61, SOR avec ω = $1{,}528$ seulement 20
- Méthodes plus rapides pour le même système (81 inconnues) : gradient conjugué 10 itérations, multigrille 5 cycles en V. Le nombre de cycles en V dépend à peine de la finesse de la grille.
- Les valeurs aux nœuds du maillage

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}0028$ (exactement $0{,}199268$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Une source de chaleur qui faiblit avec le temps – principe de Duhamel.

Énoncé: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Résultat

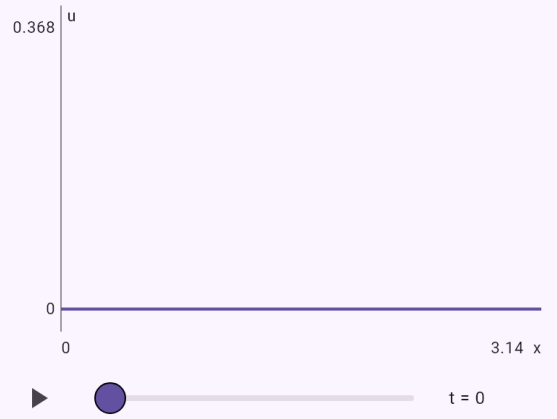
$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Conditions : $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Séparation des variables : on cherche un produit ; substitué et divisé, les variables se séparent – les deux membres doivent égaler la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition) : $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Tous les coefficients sont nuls : $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- On développe la source $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ sur les fonctions propres comme la condition initiale : $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, les coefficients par une intégrale.
- La fonction initiale (au bord) est déjà une somme de fonctions propres, seuls quelques coefficients $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ sont non nuls : $f_1 = 1$, les autres sont nuls.
- Principe de Duhamel : chaque coefficient de la série vérifie une équation différentielle linéaire avec source ; la solution est la décroissance libre plus la convolution de la source avec la décroissance $T_n' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \displaystyle\int_0^t e^{-n^2(t-s)}$
- La source n'a qu'un nombre fini de coefficients non nuls, leurs contributions sont exactes : $T_1^F(t) = te^{-t}$
- La solution : $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Une source de chaleur constante dans la barre – l'état stationnaire est une parabole.

Énoncé: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Résultat

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = u_{xx} + 1$
- Conditions : $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Ni la source ni les valeurs au bord ne dépendent du temps. On cherche d'abord l'état stationnaire – la solution de l'équation sans dérivée en temps $w'' + 1 = 0$ avec les conditions aux limites : $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. On cherche $u = w(x) + v(x,t)$; l'écart v a des conditions aux limites nulles et aucune source.
- Séparation des variables : on cherche un produit ; substitué et divisé, les variables se séparent – les deux membres doivent égaler la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition) :

$$u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties)

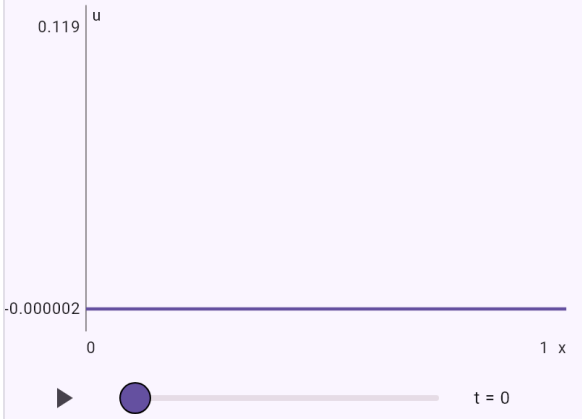
$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- La solution

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi$$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Une barre isolée où la chaleur entre par une extrémité – la température moyenne croît linéairement.

Énoncé: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Résultat

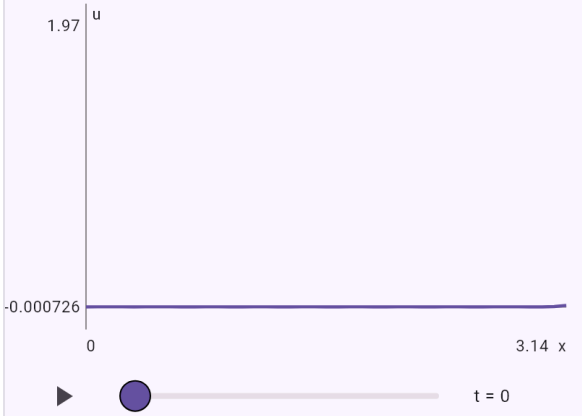
$$u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = u_{xx}$
- Conditions : $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, l'équation est parabolique (comme l'équation de la chaleur) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Les deux extrémités sont isolées, mais de la chaleur entre dans la barre (un flux aux extrémités ou une source). Il n'y a pas d'état stationnaire – la température moyenne croît au taux $R = \frac{1}{\pi}$. On cherche $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, où W vérifie l'équation sans dérivée en temps : $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Séparation des variables : on cherche un produit ; substitué et divisé, les variables se séparent – les deux membres doivent égaler la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X' = 0 aux deux extrémités (extrémités isolées) a les solutions $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition) : $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties) : $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- La solution $u(x,t) = \frac{x^2 + 2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Une corde secouée à son extrémité à sa propre fréquence – résonance, l'amplitude croît avec t.

Énoncé: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Résultat

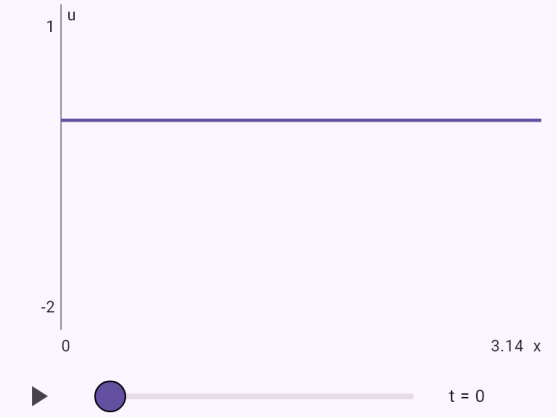
$$u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{tt} = u_{xx}$
- Conditions : $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, l'équation est hyperbolique (comme l'équation des ondes) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Les valeurs au bord varient avec le temps. On choisit une fonction $w(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ qui vérifie les conditions aux limites et on cherche $u = w + v$. L'écart v a des conditions aux limites nulles, mais son équation reçoit une source : $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x\sin t}{\pi}$
- Séparation des variables : on cherche un produit – des ondes stationnaires ; les deux membres égalent la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La partie temporelle pour chaque n – des oscillations à sa propre fréquence : $T_n'' + n^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n\cos nt + b_n\sin nt$
- L'équation est linéaire – une somme de solutions est une solution (superposition) : $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\ \sin(nx)$
- Tous les coefficients sont nuls : $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties) $b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- On développe la source $F(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ sur les fonctions propres comme la condition initiale : $F_n(t) = f_n\ \sin t$, les coefficients par une intégrale.
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties) $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Principe de Duhamel : chaque coefficient de la série est une oscillation forcée – un oscillateur de fréquence propre soumis à une force F_n(t). La solution est l'oscillation libre plus la convolution de la force avec la réponse impulsionnelle sin(ω_n t)/ω_n $T_n'' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(n$
- L'intégrale est calculée en général pour tout n (K_n est le noyau de l'étape précédente) ; là où la formule générale diviserait par zéro (résonance), à part $\int_0^t K_n(t-s)\ \sin s\,\mathrm{d}s = \frac{n\sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1 : \int$
- La solution $u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt)\ \sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Équation de Laplace avec le côté inférieur isolé (u_y = 0) – cosh au lieu de sinh.

Énoncé: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Résultat

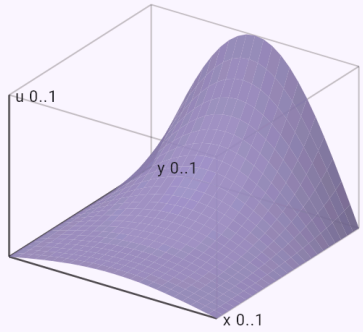
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Conditions : $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, l'équation est elliptique (comme l'équation de Laplace) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Le côté avec des valeurs non nulles (les autres ont u = 0) : $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Séparation des variables : on cherche un produit : $u = X(x)\,Y(y)$: $\quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X = 0 aux deux extrémités n'a de solutions non nulles que pour $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La seconde équation Y" = λY avec une dérivée nulle sur le côté opposé (isolé) – d'où cosh –, normalisée à 1 sur le côté donné : $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- La fonction initiale (au bord) est déjà une somme de fonctions propres, seuls quelques coefficients $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ sont non nuls : $c_1 = 1$, les autres sont nuls.

- La solution : $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Équation de Burgers – les caractéristiques se croisent et une onde de choc se forme.

Énoncé: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

Résultat

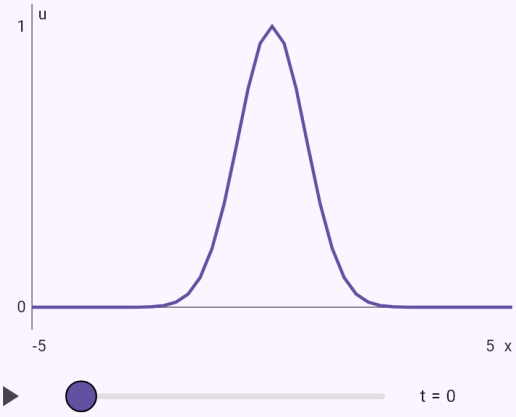
$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t + uu_x = 0$
- Conditions : $u(x,0) = e^{-x^2}$
- L'équation de Burgers est non linéaire – la vitesse de propagation est u lui-même. Le long des caractéristiques, u est constant, donc les caractéristiques sont des droites $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- La solution est donnée implicitement par $u = f(x - ut)$ – pour chaque point, on cherche le x_0 dont la caractéristique y mène.
- Là où f décroît, la partie rapide de l'onde rattrape la partie lente et les caractéristiques se croisent. Le premier croisement a lieu à l'instant $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ ($x_0 \approx 0{,}710$) – une onde de choc se forme et la solution régulière cesse d'exister.
- La solution (implicite, jusqu'à la formation d'un choc) : $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Équation de Burgers avec viscosité – transformation de Cole-Hopf en équation de la chaleur.

Énoncé: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Résultat

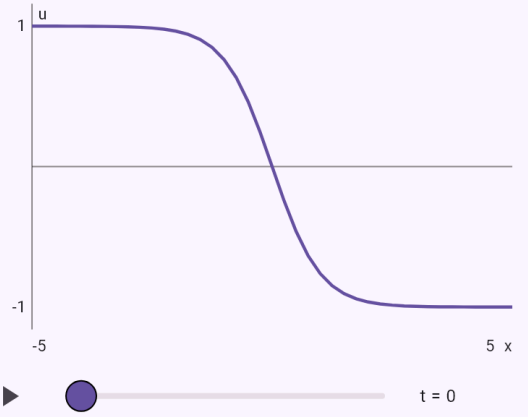
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Conditions : $u(x,0) = -\tanh x$
- Avec une viscosité v > 0, la transformation de Cole-Hopf linéarise l'équation : $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – l'équation de Burgers devient l'équation de la chaleur.
- La condition initiale pour φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- L'équation de la chaleur se résout par convolution avec le noyau de la chaleur ; après substitution, u est un quotient de deux intégrales, calculées numériquement pour le graphique $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}}{\int K}$
- L'intégrale n'a pas de forme élémentaire – la solution reste une convolution, le graphe est calculé numériquement : $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Schéma de Godunov – le choc avance à la vitesse 1/2.

Énoncé: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Résultat

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Grille : 61 nœuds, 25 pas de temps ; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Une onde de choc est traitée par le schéma conservatif de Godunov – le flux F entre les cellules vient de la solution exacte du problème de Riemann (un saut)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

- La condition CFL (le domaine numérique de dépendance contient la caractéristique) : $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- La chute de u_L à u_R < u_L se propage comme une onde de choc à la vitesse donnée par la condition de Rankine-Hugoniot : $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x = -2$	$x = -1{,}4$	$x = -0{,}8$	$x = -0,$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Le résultat au nœud central : $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Chaleur dans une plaque carrée par ADI – stable même pour un grand pas.

Énoncé: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Grille : 121 nœuds, 10 pas de temps (les rapports du pas de temps aux carrés des pas d'espace).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- La méthode des directions alternées (ADI) de Peaceman et Rachford : un demi-pas est implicite en x et explicite en y, l'autre moitié inversement

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Analyse de von Neumann : les deux demi-pas ont ensemble l'amplification pour tout pas – ADI est inconditionnellement stable.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- Dans la première moitié du pas, on résout 9 systèmes tridiagonaux le long des lignes de la grille, dans la seconde 9 le long des colonnes – chacun par l'algorithme de Thomas. C'est bien moins coûteux qu'un grand système pour toute la grille.
- La solution à des niveaux de temps choisis

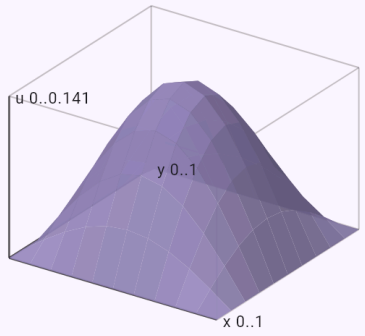
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max \lvert u \rvert$
0	$1{,}000000$	$1{,}000000$
$0{,}01$	$0{,}822069$	$0{,}822069$
$0{,}02$	$0{,}675798$	$0{,}675798$
$0{,}03$	$0{,}555553$	$0{,}555553$
$0{,}04$	$0{,}456703$	$0{,}456703$
$0{,}05$	$0{,}375442$	$0{,}375442$
$0{,}06$	$0{,}308639$	$0{,}308639$
$0{,}07$	$0{,}253723$	$0{,}253723$
$0{,}08$	$0{,}208578$	$0{,}208578$
$0{,}09$	$0{,}171465$	$0{,}171465$
$0{,}1$	$0{,}140956$	$0{,}140956$

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau (exactement $0{,}138911$ au milieu).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Équation de Laplace par gradient conjugué – comparaison avec SOR et multigrille.

Énoncé: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.125)

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Un maillage carré : $h = 0{,}125$, 81 nœuds, dont 49 inconnues intérieures.
- Le schéma à cinq points – u_xx + u_yy remplacé par des différences, une équation en chaque nœud : $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- La méthode du gradient conjugué – le système $-\Delta_h u = -f$ est symétrique défini positif ; chaque pas réduit l'erreur dans une nouvelle direction p_k, conjuguée aux précédentes

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_i$$

- Les itérations à partir d'une estimation nulle à l'intérieur (nœuds choisis et plus grand changement)

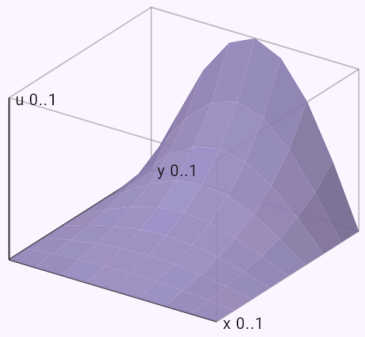
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- L'itération s'est arrêtée après 8 pas, quand le plus grand changement est passé sous 10^{-4}
- Les méthodes sur le même maillage avec la même tolérance : Jacobi 71 itérations, Gauss-Seidel 42, SOR avec ω = $1{,}446$ seulement 16
- Méthodes plus rapides pour le même système (49 inconnues) : gradient conjugué 8 itérations, multigrille 5 cycles en V. Le nombre de cycles en V dépend à peine de la finesse de la grille.
- Les valeurs aux nœuds du maillage

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j} \rvert \approx 0{,}00432$ (exactement $0{,}199268$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Équation de Poisson par multigrille – quelques cycles en V sur une grille fine.

Énoncé: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Un maillage carré : $h = 0{,}0625$, 289 nœuds, dont 225 inconnues intérieures.
- Le schéma à cinq points – u_xx + u_yy remplacé par des différences, une équation en chaque nœud

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Multigrille (cycle en V) : l'itération de Gauss-Seidel n'amortit rapidement que la partie de l'erreur qui varie vite (S^2 – deux balayages). Le reste lisse r passe sur la grille grossière 2h, y est corrigé (à nouveau par multigrille) et la correction est interpolée en retour

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Les itérations à partir d'une estimation nulle à l'intérieur (nœuds choisis et plus grand changement)

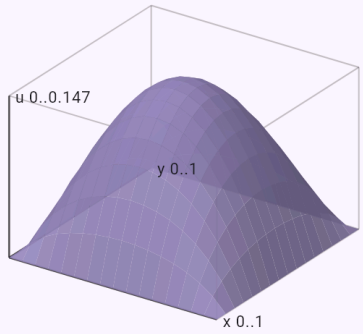
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- L'itération s'est arrêtée après 4 pas, quand le plus grand changement est passé sous 10^{-4}
- Les méthodes sur le même maillage avec la même tolérance : Jacobi 179 itérations, Gauss-Seidel 108, SOR avec ω = $1{,}674$ seulement 25
- Méthodes plus rapides pour le même système (225 inconnues) : gradient conjugué 15 itérations, multigrille 4 cycles en V. Le nombre de cycles en V dépend à peine de la finesse de la grille.
- Les valeurs aux nœuds du maillage

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (exactement $0{,}147342$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Méthode des éléments finis avec des triangles – matrice de rigidité et même système que le schéma à

cinq points.

Énoncé: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Un maillage carré : $h = 0{,}25$, 25 nœuds, dont 9 inconnues intérieures.
- La méthode des éléments finis : on multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre par parties (formulation faible) ; on cherche la solution comme combinaison de fonctions « chapeau » φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Le maillage : chaque cellule est coupée par une diagonale en deux triangles rectangles – 32 triangles, 25 nœuds, dont 9 inconnus.
- La matrice de rigidité d'un triangle (les gradients des fonctions linéaires y sont constants)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\, \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0, \\ -0, \end{pmatrix}$$

- La somme des contributions des six triangles autour d'un nœud intérieur donne son équation – sur une grille régulière, c'est le schéma à cinq points multiplié par h_x·h_y

$$4{,}0000\, u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + \cdot$$

- La méthode du gradient conjugué – le système $-\Delta_h u = -f$ est symétrique défini positif ; chaque pas réduit l'erreur dans une nouvelle direction p_k, conjuguée aux précédentes

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_{\cdot}$$

- Les itérations à partir d'une estimation nulle à l'intérieur (nœuds choisis et plus grand changement)

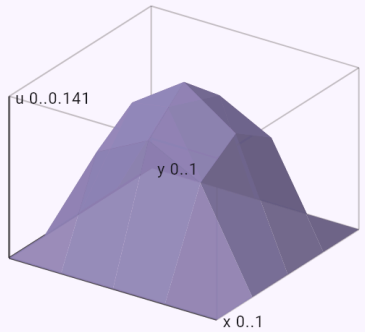
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- L'itération s'est arrêtée après 4 pas, quand le plus grand changement est passé sous 10^{-4}
- Les méthodes sur le même maillage avec la même tolérance : Jacobi 19 itérations, Gauss-Seidel 11, SOR avec ω = $1{,}172$ seulement 8
- Méthodes plus rapides pour le même système (9 inconnues) : gradient conjugué 4 itérations, multigrille 3 cycles en V. Le nombre de cycles en V dépend à peine de la finesse de la grille.
- Les valeurs aux nœuds du maillage

$y \backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00672$ (exactement $0{,}147342$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Équation de Poisson sur un carré – série de Fourier double, à comparer avec le schéma sor.

Énoncé: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Résultat

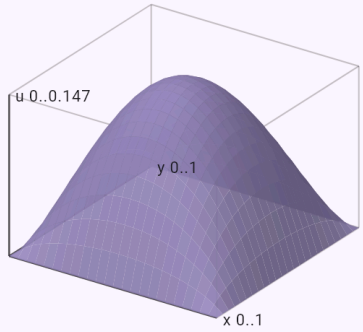
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -}{mn\pi^4\left(m^2 +\right.}$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Conditions : $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, l'équation est elliptique (comme l'équation de Laplace) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- La partie avec la source est une série double des fonctions propres des deux directions – chaque produit X_m·Y_n vérifie les conditions sur les côtés et le laplacien ne fait que le multiplier par un nombre : $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, où $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- On développe la source dans la même série double. En substituant dans Δv = f et en identifiant les coefficients : $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, donc $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$ $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- La solution

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Dérivées sur les quatre côtés – condition de solvabilité et solution à une constante près.

Énoncé: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

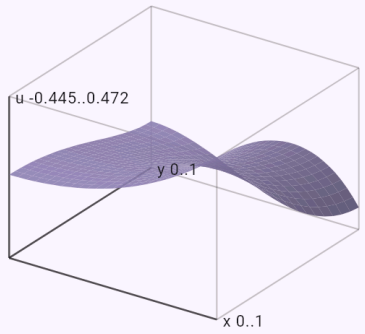
Résultat

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Conditions $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, l'équation est elliptique (comme l'équation de Laplace) : $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Sur les quatre côtés, la dérivée (un flux) est imposée. D'après le théorème de Gauss, le flux total à travers le bord doit correspondre à la source intérieure ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – la condition de solvabilité. Elle est vérifiée ; une solution existe, mais seulement à une constante additive près. Le flux à travers le bord $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Un polynôme quadratique P reprend les flux moyens des côtés ; le reste v a sur chaque côté un flux de moyenne nulle et se somme côté par côté comme avant : $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; les flux moyens $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Le côté avec des valeurs non nulles (les autres ont u = 0) : $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Séparation des variables : on cherche un produit : $u = X(x)\,Y(y)$: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Le problème aux valeurs propres $X'' + \lambda X = 0$ avec X' = 0 aux deux extrémités (extrémités isolées) a les solutions $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Une dérivée est imposée sur le côté donné et le côté opposé est isolé : cosh, normalisé pour que sa dérivée sur le côté donné vaille 1 : $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- La fonction initiale (au bord) est déjà une somme de fonctions propres, seuls quelques coefficients $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ sont non nuls : $c_1 = 1$, les autres sont nuls.
- La solution (C est une constante arbitraire – avec des dérivées sur tous les côtés, u n'est déterminée qu'à une translation près) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Coefficients variables – problème de Sturm-Liouville avec le poids 1/x, fonctions propres sin(n ln x).

Énoncé: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Résultat

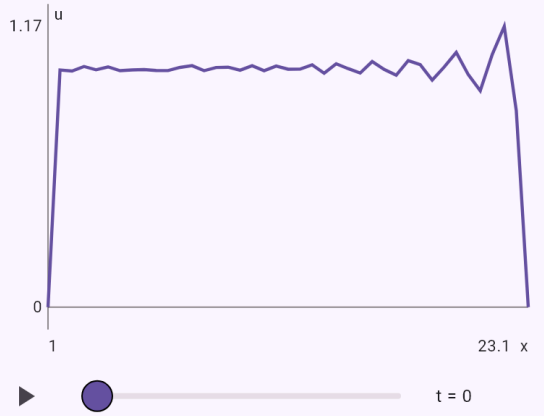
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Étapes

- Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Conditions : $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Séparation des variables pour une équation à coefficients variables – les deux membres doivent valoir la même constante : $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- En multipliant l'équation de X par une fonction adaptée, on obtient un problème de Sturm-Liouville $(xX')' + \lambda \dfrac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ avec p = x et le poids w = $\dfrac{1}{x}$. Ses fonctions propres sont orthogonales pour le poids w.
- L'équation de X est d'Euler, on essaie X = x^r : $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r : \quad r^2 + \lambda = 0$. Une solution non nulle avec X = 0 aux deux extrémités n'existe que pour des racines complexes : $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Les conditions aux extrémités donnent $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Orthogonalité des fonctions propres pour le poids w : $\int_1^{e^\pi} X_m X_n \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; leur norme $\int_1^{e^\pi} X_n^2 \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$
- La partie temporelle pour chaque n – une décroissance exponentielle, les hautes fréquences s'amortissent plus vite : $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Les coefficients de la fonction initiale f sont ses projections pour le poids w : $c_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2} \int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x$. Après un changement de variable, ce sont les coefficients d'une série de sinus ordinaire de $\xi = \ln x$: $\quad 1$
- Les coefficients à partir de la fonction initiale (au bord) grâce à l'orthogonalité des fonctions propres (intégration par parties) $c_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, \sin(n\xi)\, \mathrm{d}\xi = \dfrac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- La solution $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



La solution u au temps t choisi par le curseur ; le bouton la fait défiler.

Schéma MUSCL avec limiteur – comparez son erreur avec les schémas de Lax-Wendroff et de Lax-Friedrichs.

Énoncé: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to`

= 0.4)

Résultat

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Le maillage sur $0 \le x \le 1$: 51 nœuds, 25 pas de temps jusqu'à t = 0,4 ; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ est le nombre de Courant.
- La solution exacte est transportée le long des caractéristiques $x - t = C$ à la vitesse a = 1
- Le schéma MUSCL – dans chaque cellule un profil linéaire de pente σ_i bornée par un limiteur ; le flux vient de la cellule amont décalée d'un demi-pas. Ordre deux là où la solution est régulière, pas d'oscillations aux sauts $u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \dfrac{1-\nu}{2}$
- La pente d'une cellule est bornée par minmod – nulle à un extremum, sinon la plus petite des deux différences latérales $\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$
- La condition CFL (le domaine numérique de dépendance contient la caractéristique) : $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Un schéma avec limiteur est non linéaire ; au lieu de l'analyse de von Neumann, il n'augmente pas la variation totale (TVD – pas de nouvelles oscillations) : $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, pourvu que $|\nu| \le 1$
- Le premier niveau de temps

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

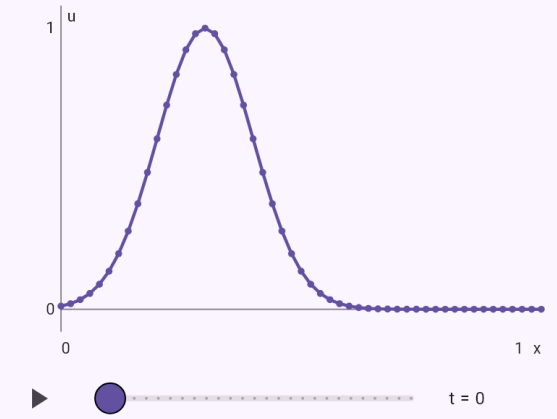
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_i |u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}| \approx 0{,}0326$ (exactement $0{,}135335$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



Points : la solution numérique aux nœuds du maillage ; en tirets : la solution exacte. Le curseur choisit le niveau de temps.

Équation de Burgers avec viscosité par le schéma MUSCL – comparaison avec la transformation de Cole-Hopf.

Énoncé: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Résultat

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx},\ u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Grille : 41 nœuds, 10 pas de temps ; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Le schéma MUSCL pour l'équation de Burgers : les pentes limitées σ_i (limiteur) donnent les valeurs aux bords des cellules, le flux entre elles vient de la solution de Godunov du saut, et la méthode de Heun avance en temps (deux étapes)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- La pente d'une cellule est bornée par minmod – nulle à un extremum, sinon la plus petite des deux différences latérales

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\ u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

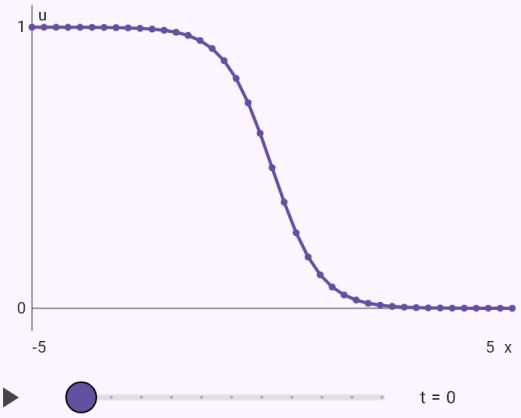
- La condition CFL (le domaine numérique de dépendance contient la caractéristique) : $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Le terme visqueux ν·u_xx est ajouté par une différence centrée : $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. Le pas explicite est stable, car $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- La chute de u_L à u_R < u_L se propage comme une onde de choc à la vitesse donnée par la condition de Rankine-Hugoniot : $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- La solution à des niveaux de temps choisis

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- La plus grande erreur par rapport à la solution exacte au dernier niveau : $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (exactement $0{,}811680$ au milieu).
- Le résultat au nœud central : $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Graphique

Dans le temps | Surface 3D



Points : la solution numérique aux nœuds du maillage ; en tirets : la solution exacte. Le curseur choisit le niveau de temps.

Éléments finis sur un domaine en L – triangulation par découpage d'oreilles, surface 3D seulement au-

dessus du domaine.

Énoncé: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Résultat

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Étapes

- Résolu numériquement sur un maillage : $u_{xx} + u_{yy} = -4, u = 0 \ \ (\partial\Omega)$
- Le domaine est un polygone de sommets $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, d'aire $|\Omega| = 3{,}0000$
- La méthode des éléments finis : on multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre par parties (formulation faible) ; on cherche la solution comme combinaison de fonctions « chapeau » φ_j

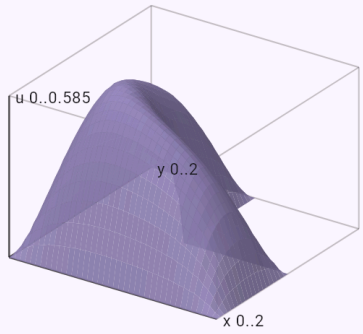
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulation : en coupant des « oreilles » (un sommet convexe dont le triangle ne contient aucun autre sommet), on obtient 4 triangles ; 4 fois chacun est divisé en quatre par les milieux de ses côtés – 1024 triangles, 561 nœuds, dont 465 intérieurs (inconnues), plus longue arête $h = 0{,}1398$
- La matrice de rigidité d'un triangle (les gradients des fonctions linéaires y sont constants)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- Les valeurs aux nœuds du bord sont données, leurs contributions passent au second membre : $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Le système creux K·U = F à 465 inconnues est résolu par la méthode du gradient conjugué en 128 itérations. Plus grande valeur : $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- Le résultat au nœud central : $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Graphique



La solution u comme surface au-dessus du domaine. Faites tourner en glissant le doigt.

Limitations connues

- Analytiquement, seulement les équations linéaires à une fonction inconnue u de deux variables, et l'équation de Burgers ; pas les autres équations non linéaires ni les systèmes.
- Par séparation des variables, les équations de la chaleur et des ondes sur un intervalle ; une source seulement comme somme de produits p(x)·q(t), pour l'équation de Poisson au plus trois produits p(x)·q(y). Coefficients variables seulement de type d'Euler αx²u_xx + βxu_x avec des valeurs nulles aux extrémités.
- La transformée de Fourier en forme close pour une gaussienne, un polynôme et les fonctions avec f″ = λf ; sinon la convolution reste et le graphique est calculé numériquement.
- Numériquement en 2D, les équations de la chaleur et de Laplace sur un rectangle avec une grille régulière ; sur un polygone seulement la méthode des éléments finis avec des triangles linéaires et une valeur au bord (pas une dérivée), sans trous et avec au plus 40 sommets.

39. Récurrences et fonctions génératrices

L'application résout les récurrences linéaires à coefficients constants de tout ordre par l'équation caractéristique – racines multiples et complexes comprises (la forme complexe de la solution et son passage à la forme réelle par la formule de Moivre) – et avec un second membre de la forme $P(n)\cdot q^n$ (aussi cos nφ, sin nφ, résonance et somme de seconds membres). Les conditions initiales déterminent les constantes ; pour vérifier, l'application calcule d'autres termes par la récurrence et les compare à la formule.

La puce « Méthode » propose aussi la fonction génératrice ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, éléments simples, séries géométriques), les puissances d'une matrice (diagonalisation) ou, à l'ordre 1, la sommation. Une récurrence d'ordre 1 à coefficient variable ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) se résout par un produit (factorielles), les récurrences non linéaires convertibles par la substitution $b_n = 1/a_n$ ou $b_n = \ln a_n$. Un système de deux récurrences se résout en éliminant une suite ou par la matrice, une récurrence « diviser pour régner » $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ par $n = b^k$ – avec l'estimation du théorème maître.

Avec l'opération « Fonction génératrice », l'application trouve la fonction génératrice d'une suite donnée par une formule ($n^2 + 2^n$) ou par ses premiers termes (1, 0, 1, 0, …), et inversement la formule de a_n à partir d'une fonction A(x). Le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (aussi avec des bornes ou des coefficients – payer avec des pièces) est un coefficient d'une fonction génératrice.

Le graphique montre les termes de la suite sous forme de points (les deux suites d'un système).

Une différence Δf(n) = f(n + 1) − f(n) (« Δ(n^3) ») et l'équation aux différences Δy_n = n comme la récurrence y_{n+1} − y_n = n. Une suite arithmétique ou géométrique à partir de deux données (« a_3 = 7, a_7 = 19 », « suite géométrique a_2 = 6, a_5 = 162 ») – a_1, d ou q, le terme de rang n et les termes et sommes cherchés (s_{10}, a_{20} = ?).

Une suite donnée par son terme général (a_n = (n+1)/n) est étudiée : les cinq premiers termes, la monotonie par la différence de deux termes consécutifs, le caractère borné et la limite.

Comment le saisir

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Avec des parenthèses, les conditions après une virgule.

`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Avec des indices (aussi depuis une photo). Sans conditions : la solution générale avec les constantes C_1, C_2.
`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	L'indice peut descendre (a_{n-1}, a_{n-2}) ; une même valeur peut être donnée à plusieurs termes.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Un système – les équations sur des lignes, les conditions sur la dernière.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Diviser pour régner – un terme en n/b.
`n^2 + 2^n`	La formule d'une suite avec l'opération « Fonction génératrice » (aussi a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Les premiers termes séparés par des virgules.
`1/(1 - x - x^2)`	Une fonction génératrice en x (aussi A(x) = …) – la formule de a_n.
`nombre de solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Le nombre de solutions entières positives ou nulles avec des bornes.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Une différence et une équation aux différences.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Une suite à partir de termes donnés – arithmétique sans mot, géométrique avec « géométrique ».

Exemples

Deux racines réelles distinctes, la vérification par d’autres termes.

Énoncé: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

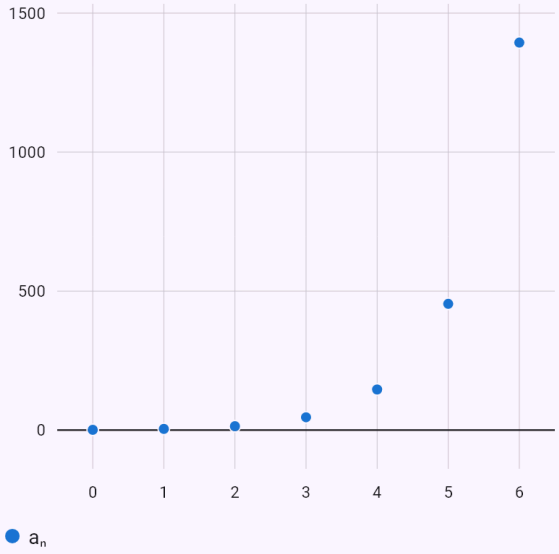
Étapes

- Récurrence linéaire d’ordre 2 à coefficients constants : $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l’équation caractéristique : $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Le discriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; les racines : $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- La solution générale : $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$2C_1 + 3C_2 = 4$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Vérification : la récurrence donne $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La suite de Fibonacci – la formule de Binet.

Énoncé: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Résultat

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

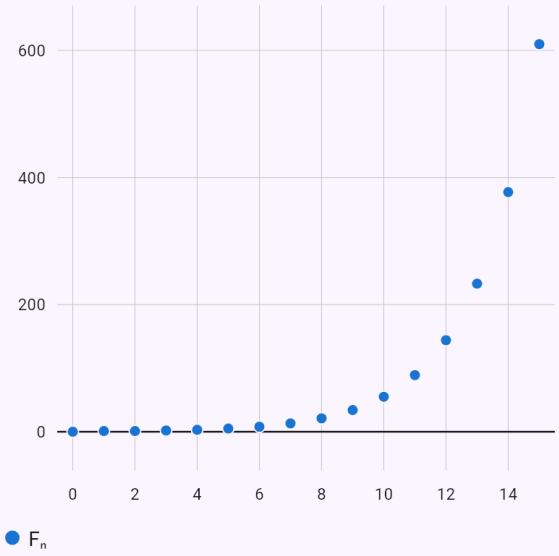
Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- On cherche des solutions $F_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^{n-2}, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Le discriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; les racines : $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- La solution générale $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- La solution qui vérifie les conditions données $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Vérification : la récurrence donne $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Racines complexes 1 ± i – la forme complexe et la formule de Moivre.

Énoncé: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Résultat

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

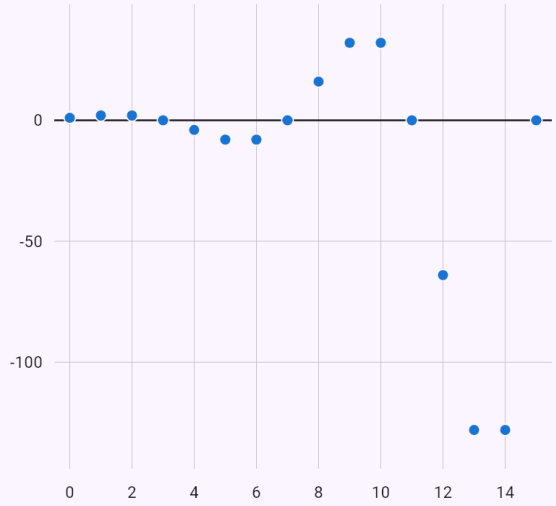
Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Le discriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; les racines : $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- On écrit les racines complexes $1 \pm i$ sous forme trigonométrique : |λ| = $\sqrt{2}$, φ = $\frac{\pi}{4}$, donc λ = $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. D'après la formule de Moivre λⁿ = $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- La solution générale sous forme complexe (constantes complexes) : $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. En ajoutant les termes conjugués, avec de nouvelles constantes réelles, on obtient la forme réelle $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1,\ C_2 = 1$

$$C_1 = 1$$
$$C_1 + C_2 = 2$$

- La solution qui vérifie les conditions données $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Vérification : la récurrence donne $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Le second membre n, une racine double 2.

Énoncé: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Résultat

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Le discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; les racines : $\lambda_{1,2} = 2$
- La solution générale de la récurrence homogène : $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Le second membre n est de forme particulière ; le nombre 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $a_n^{(p)} = An + B$
- On substitue dans la récurrence et on regroupe les termes : $An + B - 2A = n$
- On identifie les coefficients des termes semblables des deux côtés d'où $A = 1,\ B = 2$

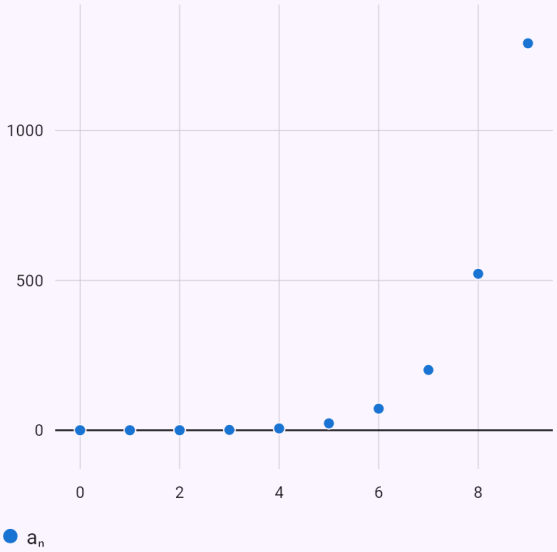
$$A = 1$$
$$B - 2A = 0$$

- Une solution particulière : $a_n^{(p)} = n + 2$
- La solution générale : $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + 2 = 0$$
$$2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Vérification : la récurrence donne $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La même récurrence par la fonction génératrice.

Énoncé: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Fonction génératrice

Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- On introduit la fonction génératrice $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- On multiplie la récurrence par x^{n+2} et on somme pour tout n ≥ 0

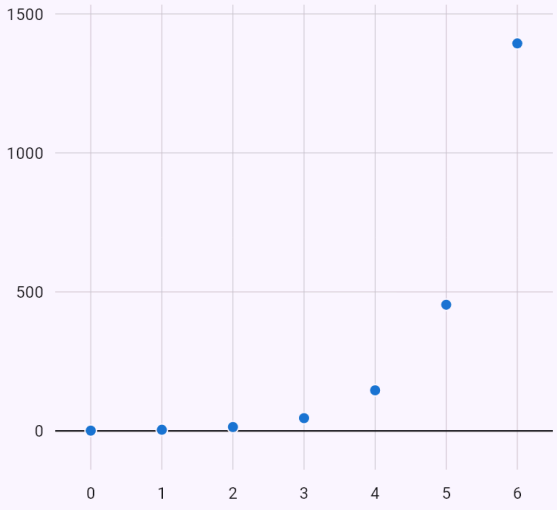
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- On exprime les sommes à l'aide de la fonction génératrice et des valeurs initiales : $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- On exprime la fonction génératrice et on factorise le dénominateur : $A(x) = \dfrac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Décomposition en éléments simples : $A(x) = -\dfrac{1}{1 - 2x} + \dfrac{2}{1 - 3x}$
- On développe les fractions en séries géométriques

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Le coefficient de x^n est le terme cherché : $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La même récurrence par les puissances d'une matrice.

Énoncé: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Puissances d'une matrice

Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- La récurrence sous forme matricielle soit $v_{n+1} = M \cdot v_n$ avec

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Par substitutions successives, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de la matrice : $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, d'où $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Les vecteurs propres – solutions de $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On diagonalise la matrice, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

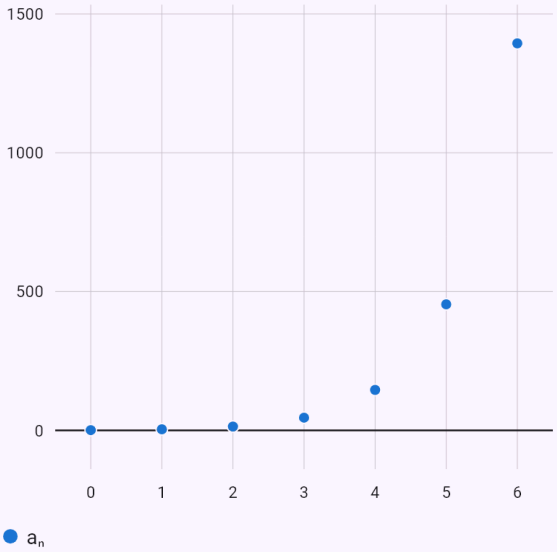
- La puissance de la matrice les coefficients donc $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = PD^nP^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Vérification : la récurrence donne $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Une récurrence d'ordre 1 par sommation.

Énoncé: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Sommation

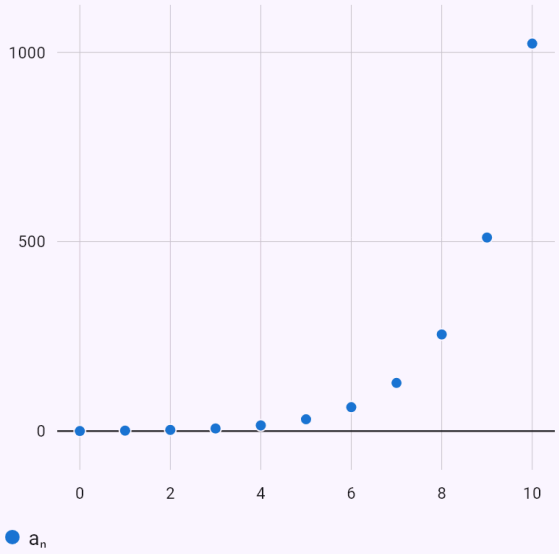
Résultat

$$a_n = 2^n - 1$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants : $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- On substitue la récurrence en elle-même à plusieurs reprises : $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, en général $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- On calcule la somme : $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = 2^n - 1$
- Vérification : la récurrence donne $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Un coefficient variable – le produit donne une factorielle.

Énoncé: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Résultat

$$a_n = n!$$

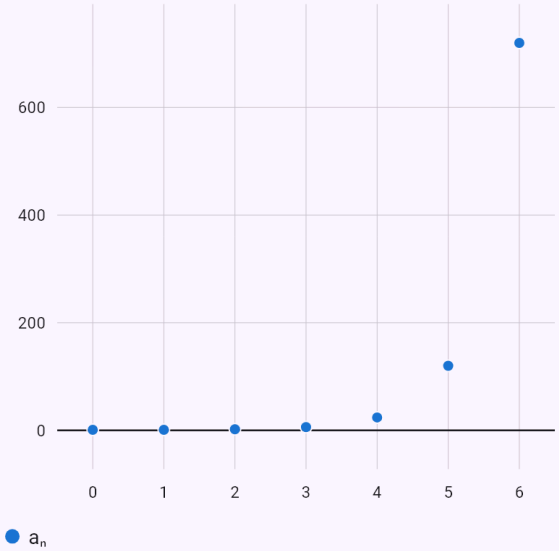
Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficient variable : $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- En substituant la récurrence en elle-même, le terme est un produit

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- On simplifie le produit (les factorielles se simplifient) : $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = n!$
- Vérification : la récurrence donne $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Une récurrence non linéaire – la substitution $b_n = 1/a_n$.

Énoncé: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

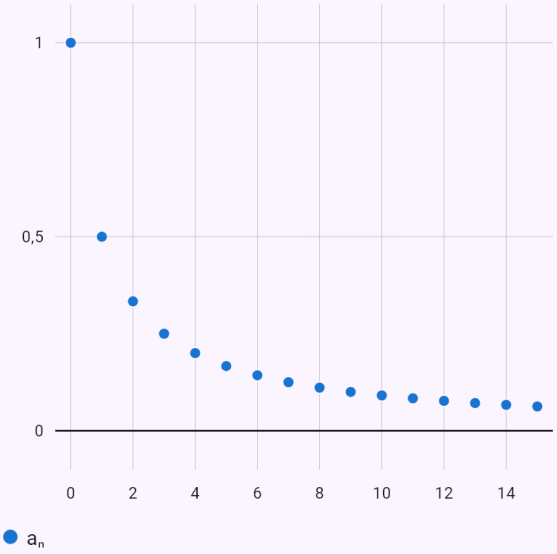
Résultat

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Étapes

- Une récurrence non linéaire – les inverses des termes la rendent linéaire : $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- On inverse les deux membres : $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; la substitution $b_n = \frac{1}{a_n}$ rend ainsi la récurrence linéaire : $b_{n+1} = b_n + 1$
- Les conditions initiales de la nouvelle suite : $b_0 = 1$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $b_{n+1} - b_n = 0$
- On cherche des solutions $b_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda - 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = 1$
- La solution générale de la récurrence homogène : $b_n^{(h)} = C_1$
- Le second membre 1 est de forme particulière ; le nombre 1 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par n : $b_n^{(p)} = An$
- On substitue dans la récurrence et on regroupe les termes : $A = 1$
- Une solution particulière : $b_n^{(p)} = n$
- La solution générale : $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- La solution qui vérifie les conditions données : $b_n = 1 + n$
- Vérification : la récurrence donne $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – comme la formule.
- On revient à la suite initiale : $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Un système de deux récurrences en éliminant la suite b_n.

Énoncé: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Résultat

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Étapes

- Un système de deux récurrences linéaires
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$

- De la première équation $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, donc $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; en reportant dans la seconde, on obtient une récurrence pour une seule suite :
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$

- La seconde condition initiale vient de la première équation : $a_1 = 1 + 0 = 1$

- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l'équation caractéristique :
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

- Le discriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; les racines : $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$

- La solution générale :
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$

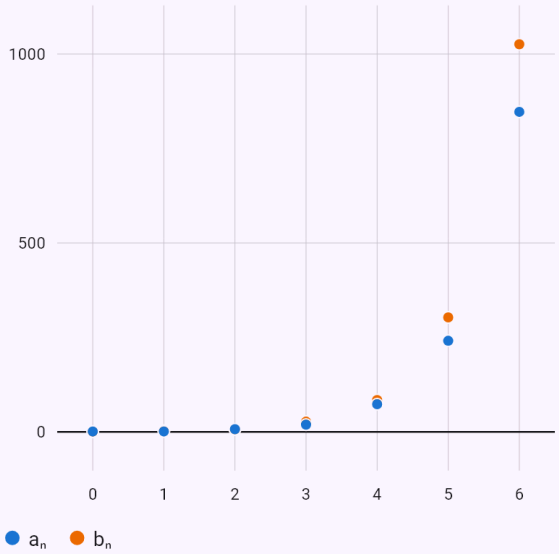
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$
  $C_1 + C_2 = 1$
  $\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$

- La solution qui vérifie les conditions données :
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$

- Vérification : la récurrence donne
  $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – comme la formule.

- L'autre suite à partir de l'expression
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Diviser pour régner (tri fusion) – n = 2ᵏ et le théorème maître.

Énoncé: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Résultat

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Conditions : $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Étapes

- Une récurrence de type « diviser pour régner » : $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Pour n puissance de la base : la substitution $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ donne une récurrence linéaire d'ordre 1 : $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Les conditions initiales de la nouvelle suite : $S_0 = 1$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- On cherche des solutions $S_k = \lambda^k$; en substituant et en divisant par λ^k, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda - 2 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = 2$
- La solution générale de la récurrence homogène : $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Le second membre 2^{k+1} est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par k : $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- On substitue dans la récurrence, on divise par 2^k et on regroupe les termes : $2A = 2$
- D'où $A = 1$
- Une solution particulière : $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- La solution générale : $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1$

  $C_1 = 1$
- La solution qui vérifie les conditions données : $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Vérification : la récurrence donne $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – comme la formule.
- On revient à n ($k = \log_2 n$) : $T(n) = n + n\log_2 n$
- Le théorème maître (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)) : $2 = 2^1$, donc T(n) = $\Theta(n \log n)$

La fonction génératrice de la suite n² + 2ⁿ.

Énoncé: `n^2 + 2^n` Fonction génératrice

Résultat

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Étapes

- On introduit la fonction génératrice $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- On sépare la série par linéarité : $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Une série connue : $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Une série connue : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Multiplier les termes par n revient à dériver puis multiplier par x

  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Multiplier les termes par n revient à dériver puis multiplier par x

  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- La fonction génératrice : $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Vérification – le développement commence par les termes de la suite : $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

La formule de a_n à partir d'une fonction génératrice – éléments simples avec des racines irrationnelles.

Énoncé: `1/(1 - x - x^2)` Fonction génératrice

Résultat

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Étapes

- On exprime la fonction génératrice et on factorise le dénominateur

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Décomposition en éléments simples

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- On développe les fractions en séries géométriques

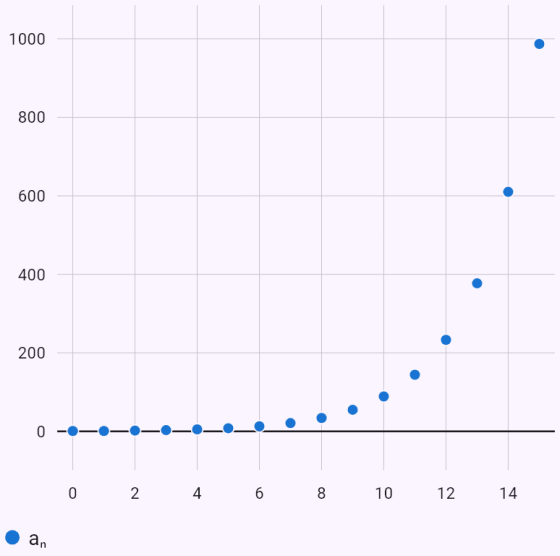
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- Le coefficient de x^n est le terme cherché

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Vérification – le développement commence par les termes de la suite : $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ avec $x_1 \le 3$.

Énoncé: `nombre de solutions x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Résultat

$$38$$

Étapes

- L'inconnue x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ donne la série $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- L'inconnue x_2 $(x_2 \ge 0)$ donne la série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- L'inconnue x_3 $(x_3 \ge 0)$ donne la série $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- La fonction génératrice est leur produit – le coefficient de x^N compte les solutions : $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- Le nombre de solutions est le coefficient de x^{10} : 38

La différence d’une fonction.

Énoncé: `Δ(n^3)`

Résultat

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Étapes

- La différence – l’accroissement de la fonction quand n augmente de 1

  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Une équation aux différences comme récurrence.

Énoncé: `\Delta y_n = n`

Résultat

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Récurrence linéaire d’ordre 1 à coefficients constants : $y_{n+1} - y_n = n$
- On résout d’abord la récurrence homogène (second membre nul) : $y_{n+1} - y_n = 0$
- On cherche des solutions $y_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n, on obtient l’équation caractéristique : $\lambda - 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = 1$
- La solution générale de la récurrence homogène : $y_n^{(h)} = C_1$
- Le second membre n est de forme particulière ; le nombre 1 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par n : $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- On substitue dans la récurrence et on regroupe les termes : $2An + A + B = n$
- On identifie les coefficients des termes semblables des deux côtés d'où $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

- Une solution particulière : $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- La solution générale : $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Une suite arithmétique à partir de deux termes et la somme de dix termes.

Énoncé: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Résultat

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Étapes

- Une suite arithmétique : $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Les données forment un système
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- La solution du système : $a_1 = 1,\ d = 3$
- Le terme de rang n : $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Les valeurs cherchées : $s_{10} = 145$

Une suite géométrique à partir de deux termes.

Énoncé: `suite géométrique a_2 = 6, a_5 = 162`

Résultat

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Étapes

- Une suite géométrique : $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Les données forment un système
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- La solution du système : $a_1 = 2,\ q = 3$
- Le terme de rang n : $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Les propriétés d'une suite donnée par une formule.

Énoncé: `a_n = (n+1)/n`

Résultat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Étapes

- Les cinq premiers termes
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- La différence de deux termes consécutifs
  $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ est négative pour tout $n \geq 1$: la suite est décroissante.
- La limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$: la suite converge.
- La suite est bornée : $1 < a_n \leq 2$

Limitations connues

- Pas encore : les récurrences linéaires d'ordre supérieur à coefficients variables, les systèmes de trois récurrences ou plus, « diviser pour régner » avec plusieurs termes (T(n/2) et T(n/3)) et les récurrences non linéaires que ces substitutions ne rendent pas linéaires.
- Une suite à partir de termes donnés demande exactement deux données (termes, sommes, d ou q).

40. Méthodes numériques

Les méthodes numériques se trouvent sur l'écran d'accueil, dans la section « Applications », domaine Méthodes numériques : racines d'équations (dichotomie, méthodes de Newton, de la sécante, regula falsi, point fixe), intégrales numériques (méthodes des trapèzes, de Simpson et de Romberg), dérivées numériques par taux d'accroissement, équations différentielles (méthodes d'Euler, de Heun et de Runge–Kutta), systèmes linéaires (méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel, décomposition LU), interpolation (polynômes de Lagrange et de Newton, spline cubique) et moindres carrés. L'intégrale et la dérivée se calculent aussi à partir d'un tableau de valeurs mesurées.

Équations différentielles aussi par des méthodes multipas – Adams-Bashforth et le prédicteur-correcteur Adams-Bashforth-Moulton (démarrage par Runge-Kutta) –, par la méthode adaptative RK45 (Dormand-Prince, un tableau des pas acceptés et rejetés selon l'estimation de l'erreur, notation tol=…) et par des méthodes implicites pour les équations raides : la méthode d'Euler implicite et la méthode des trapèzes (Crank-Nicolson), avec la méthode de Newton à chaque pas. Pour une équation avec $\partial f/\partial y < 0$, la solution montre la stabilité de la méthode : $h\lambda$ et le facteur d'amplification $|R(h\lambda)|$; s'il dépasse 1, une méthode explicite diverge et le calcul l'indique.

Problèmes aux limites $y'' = f(x, y, y')$ avec les conditions $y(a)$, $y(b)$: par la méthode du tir (la pente initiale par la méthode de la sécante, chaque tir par Runge-Kutta) et par les différences finies (une équation linéaire comme système tridiagonal résolu par l'algorithme de Thomas, avec les tableaux de la descente et de la remontée) ; si le solveur d'EDO trouve la solution exacte, elle est comparée aux nœuds. L'équation du mouvement $x'' = a(x)$ est résolue par la méthode symplectique de Verlet à côté de RK4, en montrant comment évolue pour chacune l'erreur sur l'énergie totale.

Les étapes montrent la formule de la méthode, le tableau des itérations ou des valeurs aux nœuds, le critère d'arrêt (précision par défaut $\varepsilon = 10^{-4}$, au plus 50 itérations) et l'estimation de l'erreur ; quand la valeur exacte est connue, le résultat lui est comparé. Les conditions de convergence sont vérifiées : changement de signe sur l'intervalle, condition de Fourier pour le départ de Newton, $|g'(x)| < 1$ pour le point fixe, diagonale dominante et rayon spectral pour les systèmes. Le graphique montre les tangentes ou sécantes, les trapèzes ou paraboles, la solution numérique d'une équation différentielle face à la solution exacte, et le polynôme ajusté avec les points.

Pour un problème courant – une équation à une inconnue, une intégrale définie, une équation différentielle avec condition initiale – l'application propose sous le résultat les puces « Résoudre par une méthode numérique » ; le formulaire est prérempli avec l'énoncé. Quand il n'y a pas de solution exacte ou qu'elle est inutilement compliquée ($x = \cos x$, formules de Cardan), la proposition est mise en avant, et une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement est résolue directement par la méthode de Newton. Les applications qui calculent un nombre sans le montrer (taux de rendement interne, TAEG,

rendement d'une obligation, pH d'un polyacide, Runge–Kutta dans les modèles) ont sous le résultat une ligne repliée « La méthode » avec un court tableau d'itérations.

Comment le saisir

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	La méthode – son nom anglais – puis, après des points-virgules, l'équation, l'estimation initiale x0, la précision tol, éventuellement max (itérations) et stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Une fonction f(x) (on résout f(x) = 0) et l'intervalle a, b. Sans intervalle ni estimation, les racines sont isolées automatiquement.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	L'intégrale d'une fonction entre a et b avec n sous-intervalles ; aussi trapezoid et romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	L'intégrale de valeurs mesurées – x et y séparés par des espaces.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	La dérivée au point at avec le pas h ; à partir d'un tableau x=… ; y=… (at facultatif).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Une équation différentielle du premier ordre avec sa condition initiale, le pas h et la fin de l'intervalle to ; aussi euler et heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Un système – les équations après des points-virgules ou sur des lignes ; aussi jacobi et lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Les points x, y et le point at ; aussi newtonpoly et spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Un polynôme des moindres carrés de degré degree.

Exemples

Une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement – l'application la résout par la méthode de Newton et propose les autres.

Énoncé: `x = cos x`

Résultat

$x \approx 0{,}7391$

Résoudre par une méthode numérique :

Σ Dichotomie | Σ Sécante | Σ Regula falsi | Σ Point fixe

Étapes

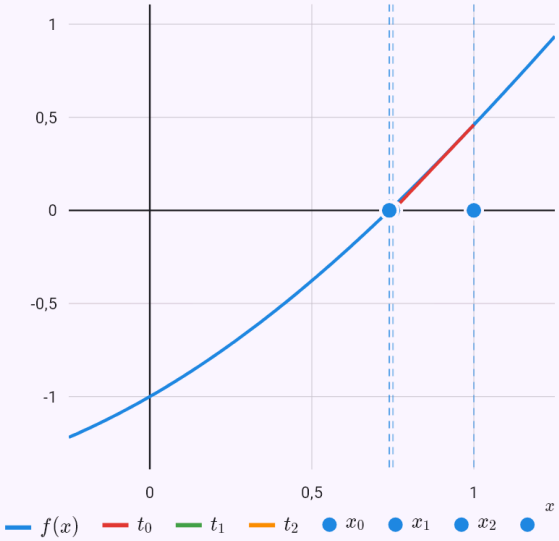
- On cherche une racine de l'équation $x = \cos x$, c'est-à-dire un zéro de la fonction $f(x) = x - \cos x$
- On isole les racines à l'aide d'un tableau de valeurs : la fonction change de signe sur les intervalles $[0\,;\,1]$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Une fonction continue y a une racine dans chacun.
- La méthode de Newton a besoin de la dérivée : $f'(x) = \sin x + 1$
- L'estimation initiale $x_0 = 1$ est choisie selon la condition de Fourier – à la borne où $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$) ; de là, les tangentes convergent vers la racine de façon monotone.
- Méthode de Newton : depuis le point x_n, on suit la tangente jusqu'à l'axe des x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- Le critère d'arrêt $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ est atteint après 3 itérations.

- Estimation de l'erreur par le théorème des accroissements finis, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Résultat de la méthode : $x \approx 0{,}7391$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode de Newton avec la racine isolée automatiquement et le départ selon la condition de Fourier.

Énoncé: `newton(x^3 - x - 2)`

Résultat

$$x \approx 1{,}5214$$

Étapes

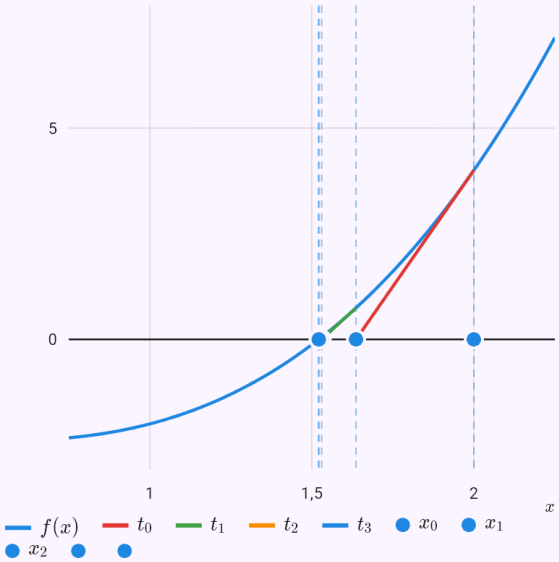
- On cherche une racine de l'équation $x^3 - x - 2 = 0$, c'est-à-dire un zéro de la fonction $f(x) = x^3 - x - 2$
- On isole les racines à l'aide d'un tableau de valeurs : la fonction change de signe sur les intervalles $[1\,;\,2]$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Une fonction continue y a une racine dans chacun.
- La méthode de Newton a besoin de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 1$
- L'estimation initiale $x_0 = 2$ est choisie selon la condition de Fourier – à la borne où $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$) ; de là, les tangentes convergent vers la racine de façon monotone.
- Méthode de Newton : depuis le point x_n, on suit la tangente jusqu'à l'axe des x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- Le critère d'arrêt $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ est atteint après 4 itérations.
- Estimation de l'erreur par le théorème des accroissements finis, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 2$ sur l'intervalle $[1\,;\,2]$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Résultat de la méthode : $x \approx 1{,}5214$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Dichotomie sur un intervalle donné avec l'estimation de l'erreur.

Énoncé: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Résultat

$$x \approx 1{,}5214$$

Étapes

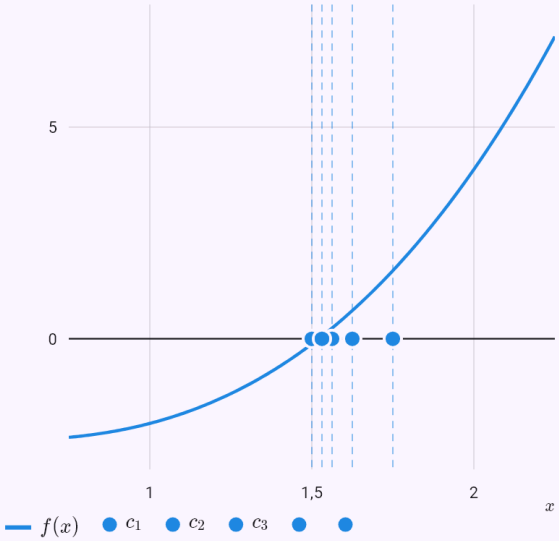
- On cherche une racine de l'équation $x^3 - x - 2 = 0$, c'est-à-dire un zéro de la fonction $f(x) = x^3 - x - 2$
- Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – signes opposés, la fonction continue y a une racine.
- Dichotomie : le milieu de l'intervalle $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on garde la moitié sur laquelle f change de signe.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- Le critère d'arrêt $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ est atteint après 14 itérations.
- Estimation de l'erreur : la racine ξ est dans le dernier intervalle, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Résultat de la méthode : $x \approx 1{,}5214$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode de la sécante à partir de deux estimations.

Énoncé: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Résultat

$$x \approx 2{,}0946$$

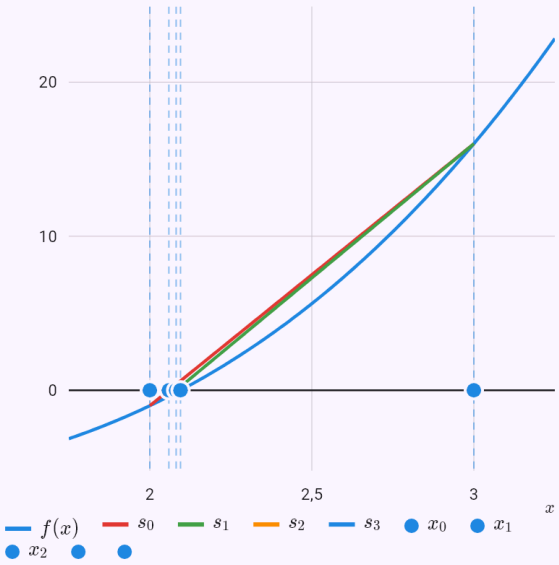
Étapes

- On cherche une racine de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, c'est-à-dire un zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Méthode de la sécante : la sécante des deux derniers points remplace la tangente, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	−1,000000	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	−0,390800	0,941176
3	2,081264	−0,147204	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	−0,000023	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- Le critère d'arrêt $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ est atteint après 6 itérations.
- Estimation de l'erreur par le théorème des accroissements finis, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ sur l'intervalle $[2\,;\,3]$: $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Résultat de la méthode : $x \approx 2{,}0946$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode du point fixe avec la condition de convergence |g'(x)| < 1 vérifiée.

Énoncé: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Résultat

$$x \approx 0{,}7391$$

Étapes

- L'équation $x = \cos x$ écrite sous la forme x = g(x) : $g(x) = \cos x$
- Condition de convergence : $g'(x) = -\sin x$, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ on a $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 − g est une contraction et l'itération converge.
- Méthode du point fixe : $x_{n+1} = g(x_n)$.

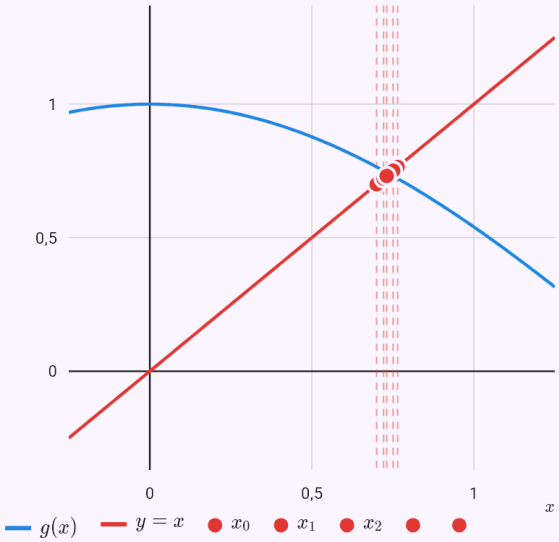
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- Le critère d'arrêt $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ est atteint après 18 itérations.
- Estimation de l'erreur du point fixe

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Résultat de la méthode : $x \approx 0{,}7391$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode de Simpson, estimation de l'erreur de Runge et comparaison avec la valeur exacte.

Énoncé: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Résultat

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Étapes

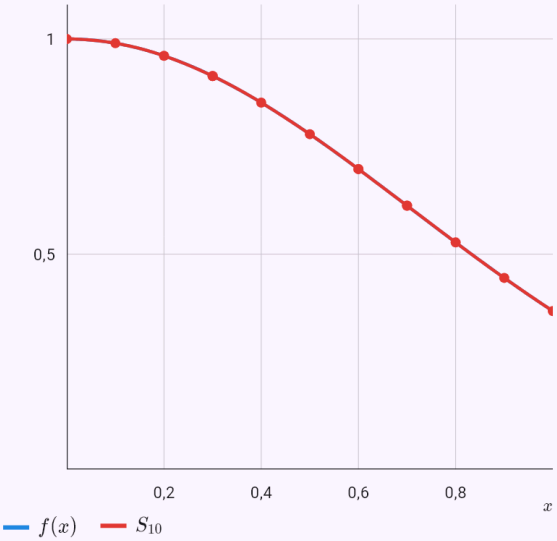
- On calcule l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ numériquement.
- Le pas : $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Les valeurs aux nœuds et leurs coefficients

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Méthode de Simpson
  $S_n = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \dfrac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Pour comparer, la valeur exacte
  $I = \dfrac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, l'erreur de la méthode
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Résultat de la méthode : $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Tableau de Romberg pour une intégrale sans primitive élémentaire.

Énoncé: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Résultat

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

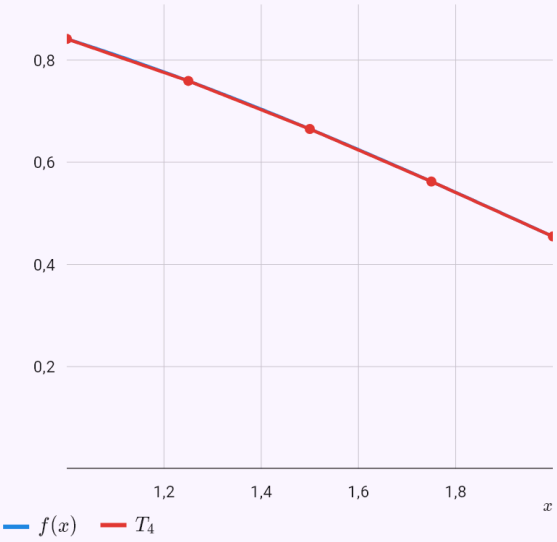
Étapes

- On calcule l'intégrale $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ numériquement.
- Méthode de Romberg : la première colonne contient les trapèzes de pas h, h/2, h/4, …, les suivantes les affinent par l'extrapolation de Richardson,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- Le critère d'arrêt $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ est atteint après 2 itérations.
- Pour comparer, la valeur exacte l'erreur de la méthode
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Résultat de la méthode : $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

La distance à partir d'une vitesse mesurée par la méthode des trapèzes.

Énoncé: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Résultat

$$\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

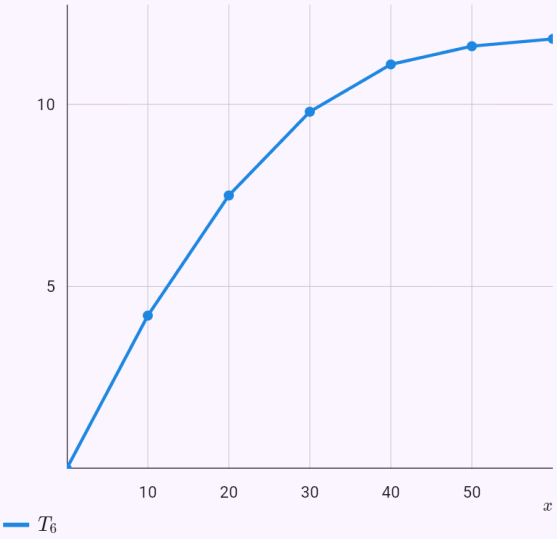
Étapes

- On intègre un tableau de 6 sous-intervalles sur $[0\,;\,60]$
- Le pas : $h = 10$
- Les valeurs aux nœuds et leurs coefficients

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Méthode des trapèzes $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Erreur estimée par la règle de Runge (le calcul avec le pas double) : $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Résultat de la méthode : $\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Différences avant, arrière et centrée pour trois pas.

Énoncé: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Résultat

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

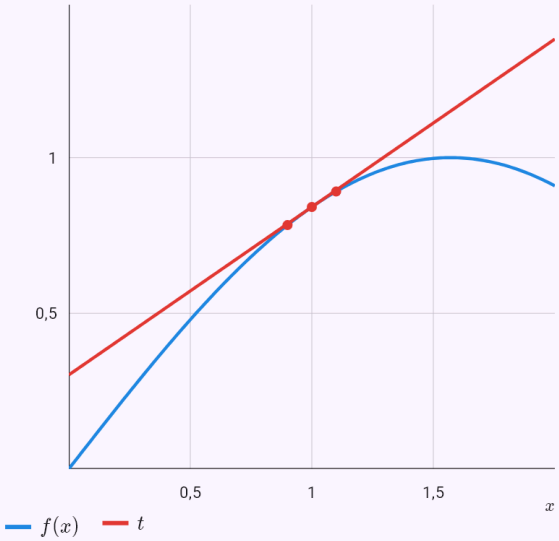
Étapes

- On estime la dérivée de la fonction $f(x) = \sin x$ en $x_0 = 1$ par des taux d'accroissement.
- La différence avant $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ a une erreur proportionnelle à h, la différence arrière $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ aussi ; la différence centrée $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ seulement à h². Dérivée seconde : $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
0,1	0,497364	0,581441	0,539402	−0,840770
0,05	0,519045	0,561110	0,540077	−0,841296
0,025	0,529728	0,550764	0,540246	−0,841427

- Exactement : $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. L'erreur de la différence avant avec le premier pas est $0{,}0429$, celle de la centrée seulement $9 \cdot 10^{-4}$
- Résultat de la méthode : $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 avec le tableau des pentes et la solution exacte pour comparer.

Énoncé: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Résultat

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Étapes

- Le problème de Cauchy $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, le pas $h = 0{,}1$ (10 pas).
- Méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 – une moyenne pondérée de quatre pentes

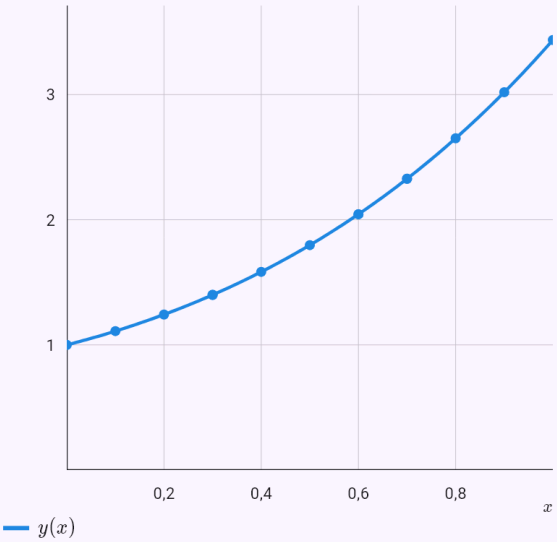
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Pour comparer, la solution exacte : $y = -x + 2e^x - 1$
- Pas à pas

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- À la fin de l'intervalle, exactement $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Résultat de la méthode : $y(1) \approx 3{,}436559$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Méthode d'Euler pour une équation sans solution élémentaire.

Énoncé: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Résultat

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

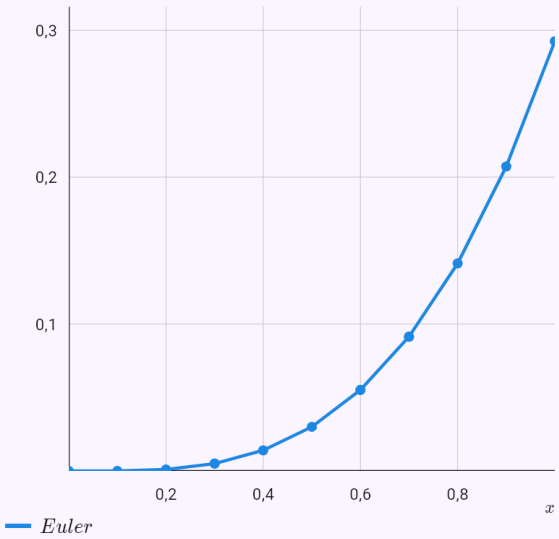
Étapes

- Le problème de Cauchy $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, le pas $h = 0{,}1$ (10 pas).
- Méthode d'Euler – un pas le long de la tangente : $y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$
- Pas à pas

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Résultat de la méthode : $y(1) \approx 0{,}292542$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le prédicteur-correcteur ABM – plus précis qu'Adams-Bashforth seul.

Énoncé: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Résultat

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Étapes

- Le problème de Cauchy $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, le pas $h = 0{,}1$ (10 pas).
- Un prédicteur-correcteur : Adams-Bashforth estime le nouveau point, Adams-Moulton le corrige par la pente au point estimé. Démarrage par la méthode de Runge-Kutta

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

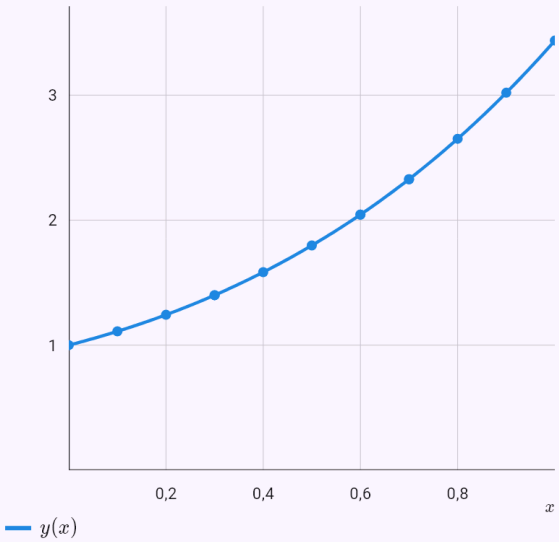
- Pour comparer, la solution exacte : $y = -x + 2e^x - 1$
- Pas à pas

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + A$
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + A$
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + A$
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + A$
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + A$
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + A$
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + A$
10	1	3,436567	4,436567		

- À la fin de l'intervalle, exactement $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Résultat de la méthode : $y(1) \approx 3{,}436567$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le RK45 adaptatif – le premier pas est rejeté et raccourci, puis la méthode règle elle-même son pas.

Énoncé: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Résultat

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Étapes

- Le problème de Cauchy $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, le pas $h = 0{,}5$ (4 pas).
- Un pas adaptatif : à chaque pas, deux méthodes (d'ordre 5 et 4) à partir des mêmes pentes – leur différence estime l'erreur. Le pas est accepté si l'erreur est sous la tolérance, et le suivant augmente ou diminue en conséquence

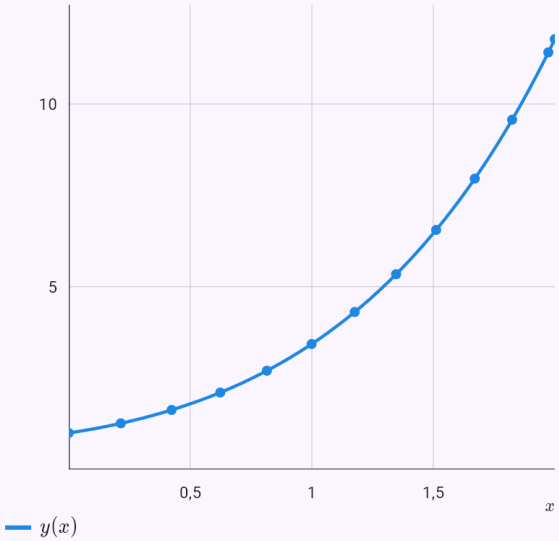
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Pour comparer, la solution exacte : $y = -x + 2e^x - 1$
- Les pas avec la tolérance $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ pas accepté, × rejeté (le pas a été réduit et recommencé). Acceptés 12, rejetés 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- À la fin de l'intervalle, exactement $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Résultat de la méthode : $y(2) \approx 11{,}778114$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Une équation raide – la méthode d'Euler explicite avec le pas 0,05 est instable (|1 + hλ| = 1,5) et

diverge.

Énoncé: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Résultat

La solution numérique diverge avec ce pas (voir la solution).

Étapes

- Le problème de Cauchy
  $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, le pas $h = 0{,}05$ (20 pas).
- Méthode d'Euler – un pas le long de la tangente :
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Pour comparer, la solution exacte :
  $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilité : l'équation se comporte comme y' = λy avec $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. La méthode amplifie une erreur à chaque pas : $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – avec ce pas, elle est instable, les valeurs oscilleront et croîtront. Un pas plus petit ou une méthode implicite aide.
- Pas à pas

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Les valeurs croissent sans limite (en $x \approx 0{,}6000$) – la méthode est instable avec ce pas. Essayez un pas plus petit ou une méthode implicite.

La même équation par la méthode d'Euler implicite – stable même avec un grand pas.

Énoncé: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Résultat

$y(1) \approx 0{,}556616$

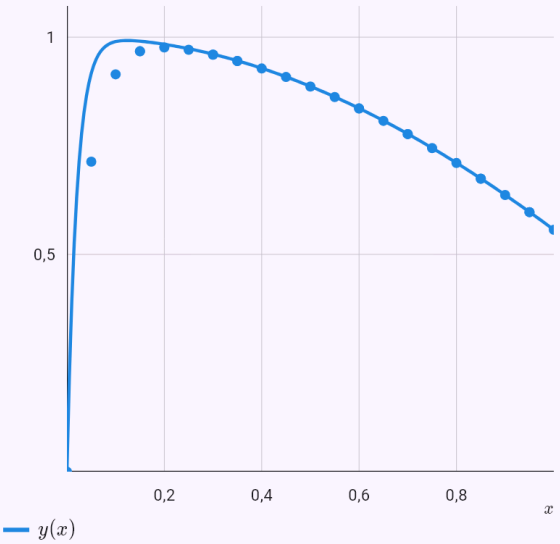
Étapes

- Le problème de Cauchy
  $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, le pas $h = 0{,}05$ (20 pas).
- La méthode d'Euler implicite – la pente à la fin du pas, donc y_{n+1} figure des deux côtés d'une équation. On la résout à chaque pas par la méthode de Newton :
  $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Pour comparer, la solution exacte :
  $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilité : l'équation se comporte comme y' = λy avec $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. La méthode réduit une erreur à chaque pas : $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – le calcul est stable.
- Pas à pas

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- À la fin de l'intervalle, exactement
  $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Résultat de la méthode : $y(1) \approx 0{,}556616$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Un problème aux limites non linéaire par la méthode du tir – cinq pas de sécante corrigent la pente.

Énoncé: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Résultat

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Étapes

- Le problème aux limites $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, pas $h = 0{,}05$ (20 sous-intervalles).
- La méthode du tir : on choisit une pente initiale s = y'(a), on résout le problème comme un problème de Cauchy (Runge-Kutta) et on regarde de combien il manque l'extrémité droite. La pente est corrigée par la méthode de la sécante

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_{k-1})}$$

- Les tirs – chacun est un problème de Cauchy ; on corrige jusqu'à ce que F(s) soit sous la tolérance.

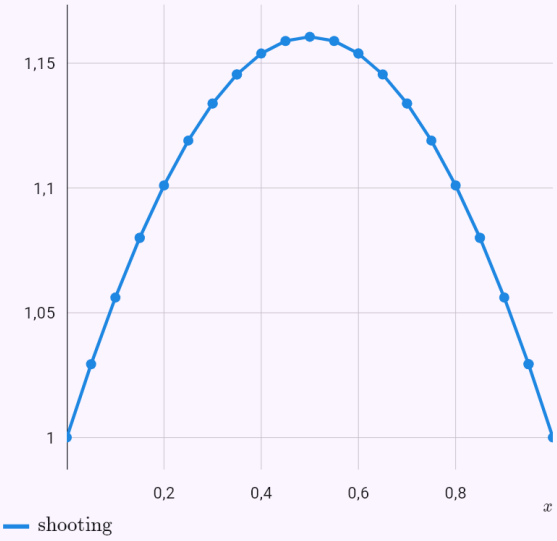
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- La pente initiale avec laquelle la solution atteint la condition aux limites : $y'(0) \approx 0{,}612849$
- La solution aux nœuds

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Résultat de la méthode : $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Les différences finies et l'algorithme de Thomas – exact aux nœuds pour y = x³.

Énoncé: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Résultat

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Étapes

- Le problème aux limites $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, pas $h = 0{,}25$ (4 sous-intervalles).
- Les différences finies : aux nœuds x_i, on remplace y" et y' par des différences centrées

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Le système tridiagonal a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i ; les valeurs aux limites passent au second membre

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- L'algorithme de Thomas – l'élimination de Gauss pour une matrice tridiagonale : la descente, puis la remontée depuis la fin

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

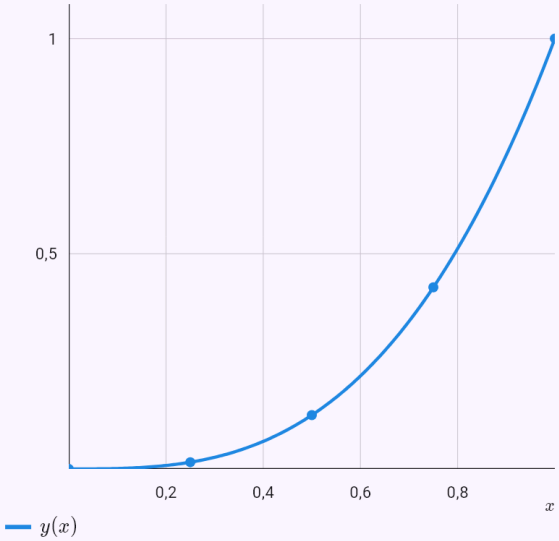
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Pour comparer, la solution exacte : $y = x^3$
- La solution aux nœuds

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- La plus grande erreur aux nœuds par rapport à la solution exacte : $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Résultat de la méthode : $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Problème aux limites par éléments finis – exact aux nœuds.

Énoncé: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Résultat

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Étapes

- Le problème aux limites $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, pas $h = 0{,}25$ (4 sous-intervalles).
- La méthode des éléments finis : on multiplie l'équation par une fonction « chapeau » φ_i (affine par morceaux, égale à 1 au nœud i et à 0 aux autres) et on intègre par parties. On cherche la solution comme combinaison de chapeaux, les intégrales sur les éléments par la règle de Gauss

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Le système assemblé – une ligne par nœud intérieur (la matrice de rigidité K est tridiagonale, les valeurs au bord passées au second membre)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- L'algorithme de Thomas – l'élimination de Gauss pour une matrice tridiagonale : la descente, puis la remontée depuis la fin

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+1}$$

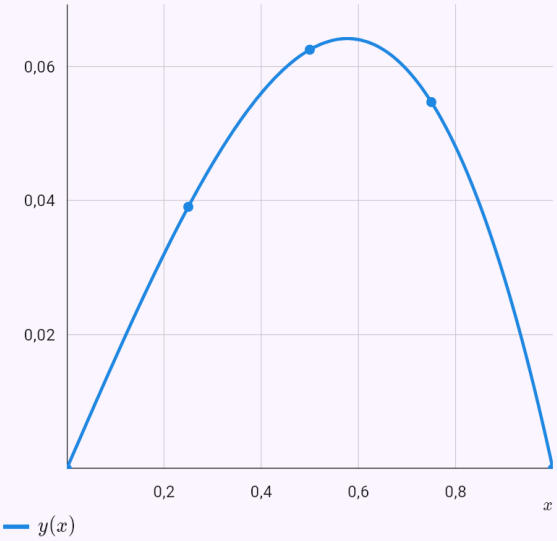
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Pour comparer, la solution exacte : $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- La solution aux nœuds

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- La plus grande erreur aux nœuds par rapport à la solution exacte : $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Résultat de la méthode : $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Un pendule par la méthode de Verlet – son erreur d'énergie reste, celle de RK4 décuple.

Énoncé: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Résultat

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx (\text{illegible})$$

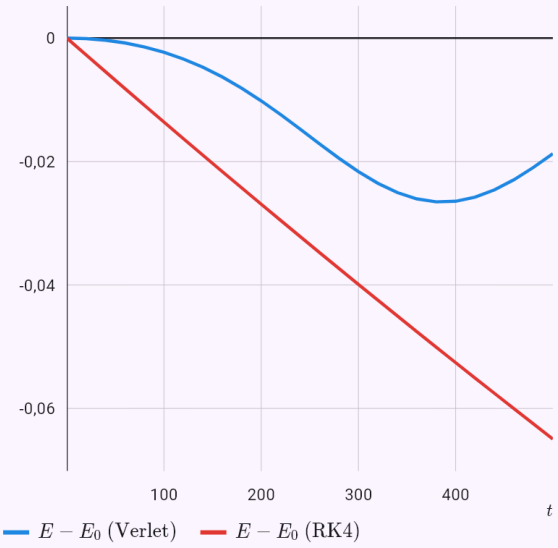
Étapes

- L'équation du mouvement
  $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, pas $h = 0{,}5$ (1000 pas).
- La méthode de Verlet en vitesse – la nouvelle position à partir de la vitesse et de l'accélération, la vitesse à partir de l'accélération moyenne au début et à la fin du pas.
  L'énergie totale $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ est calculée pour les deux méthodes
  $x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \frac{h^2}{2}a(x_n)$
  $v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$
- Verlet contre RK4 avec le même pas (lignes choisies)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^F
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

- L'erreur d'énergie de Verlet reste la même, celle de RK4 croît avec le temps – sur un long calcul, Verlet est plus fidèle. La plus grande erreur au début et à la fin, en haut Verlet, en bas RK4
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$
  $\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$
- Résultat de la méthode :
  $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Graphique



L'écart de l'énergie totale par rapport à l'énergie initiale : Verlet oscille autour de zéro, RK4 s'en éloigne lentement.

Méthode de Gauss–Seidel – équations réordonnées pour la diagonale dominante.

Énoncé: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Résultat

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Étapes

- Le système sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- On réordonne les équations pour rendre la matrice à diagonale dominante ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- La matrice d'itération son rayon spectral $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – la méthode converge.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Méthode de Gauss–Seidel – les nouvelles valeurs servent dès qu'elles sont calculées

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Les itérations

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- Le critère d'arrêt $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ est atteint après 6 itérations.
- Résultat de la méthode : $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

Décomposition LU en fractions exactes, substitutions avant et arrière.

Énoncé: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Résultat

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Étapes

- Le système sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Élimination de Gauss – les multiplicateurs des lignes forment la matrice L :
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- Décomposition LU A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Substitution avant Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$

- Substitution arrière Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$

- Résultat de la méthode : $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Le polynôme d’interpolation de Lagrange et sa valeur en un point.

Énoncé: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Résultat

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Étapes

- Les points donnés (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Les polynômes de base de Lagrange $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

- Le polynôme d’interpolation de Lagrange

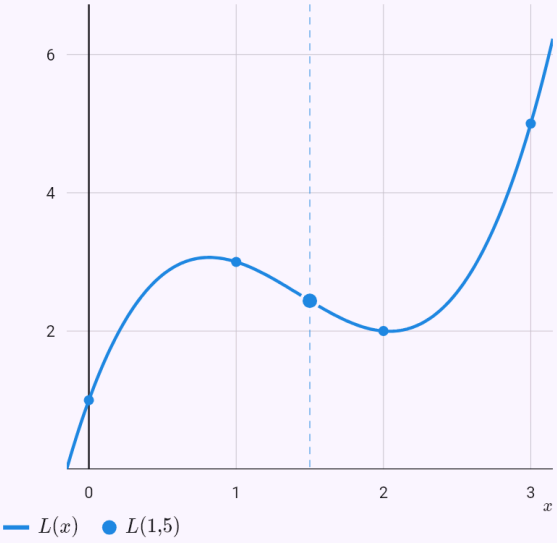
$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^{3}$$

- La valeur au point donné : $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$

- Résultat de la méthode

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le polynôme de Newton à partir du tableau des différences divisées.

Énoncé: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Résultat

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Étapes

- Les points donnés (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Le tableau des différences divisées

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

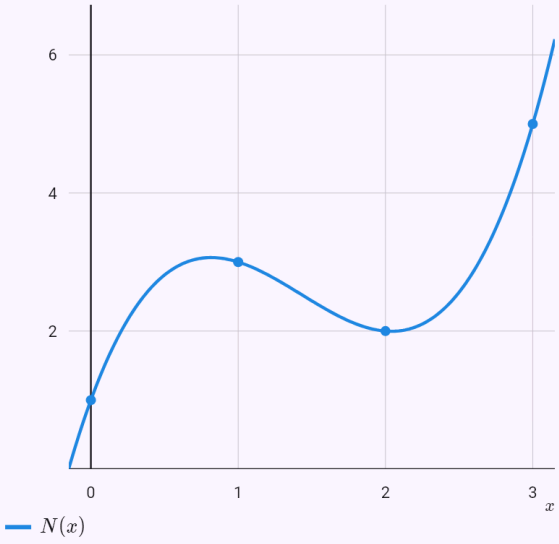
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- Le polynôme d'interpolation de Newton (coefficients de la diagonale supérieure du tableau)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Résultat de la méthode : $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Spline cubique naturelle – le système des moments et les polynômes par morceaux.

Énoncé: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Résultat

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Étapes

- Les points donnés (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Spline cubique naturelle : les dérivées secondes M aux nœuds vérifient avec $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

- La solution du système :
$M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$

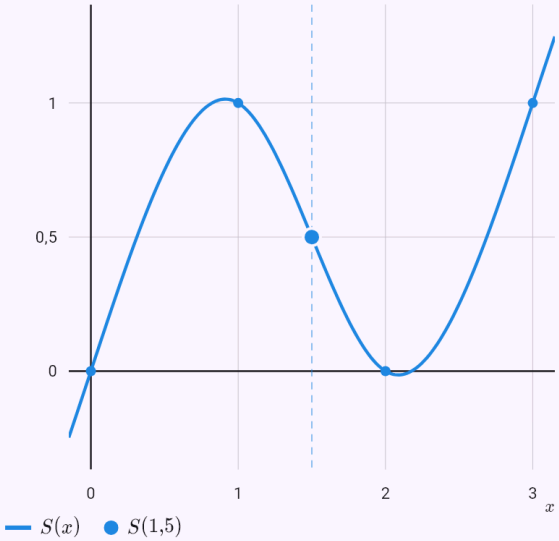
- Sur chaque sous-intervalle

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- La valeur au point donné : $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Résultat de la méthode : $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Approximation quadratique par les moindres carrés.

Énoncé: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Résultat

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Étapes

- Les points donnés (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- On cherche le polynôme avec $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Les sommes nécessaires

$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

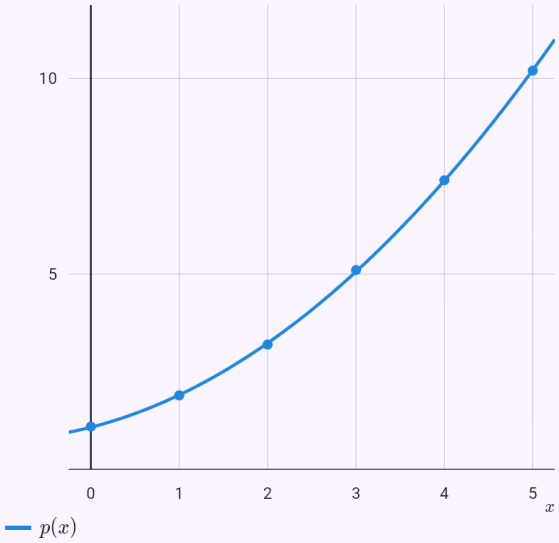
- Les équations normales pour les coefficients $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- La solution :
  $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- La somme des carrés des écarts :
  $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Résultat de la méthode :

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Le taux de rendement interne – sous le résultat, les étapes repliées de la dichotomie.

Énoncé: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

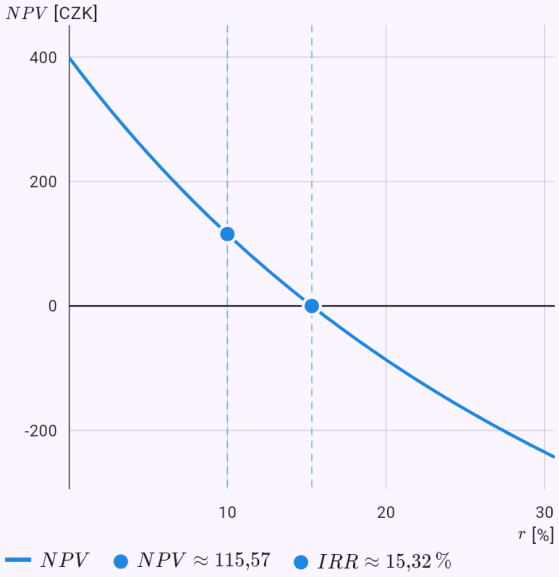
Résultat

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Étapes

- Données :
  $CF_t = (-1\,000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- On convertit les unités : $r = 10\,\% = 0{,}1$
- La valeur actuelle nette VAN additionne les flux CF_0, CF_1, … d'un projet actualisés au taux de rentabilité exigé r : VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un projet de VAN > 0 rapporte plus que le rendement exigé. Le taux de rendement interne TRI est le taux pour lequel VAN = 0 – racine d'une équation polynomiale, cherchée numériquement. Le délai de récupération est le moment où la somme cumulée (simple ou actualisée) cesse d'être négative. Équation du modèle : $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Valeur actuelle nette
  $$NPV = -1\,000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- VAN ≥ 0 – le projet rapporte au moins le rendement exigé.
- On résout l'équation numériquement (dichotomie) :
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › La méthode : dichotomie, 14 itérations

Graphique



Le graphique calculé à partir de la solution du modèle ; les points sont les valeurs données ou la réponse.

Limitations connues

- Racines : une équation à une inconnue, racines réelles ; au plus trois racines dans ⟨−50; 50⟩ sont isolées automatiquement.
- Équations différentielles : une seule équation du premier ordre y′ = f(x, y), au plus 2 000 pas ; systèmes et ordres supérieurs pas encore.
- Systèmes : 2 à 6 équations ; interpolation au plus 12 points, polynôme des moindres carrés au plus de degré 5.
- Les méthodes de Simpson et de Romberg à partir d'un tableau demandent un pas constant (Romberg 2, 4, 8, … sous-intervalles).
- Problèmes aux limites seulement du 2e ordre avec les valeurs y(a), y(b) (pas de dérivée à une extrémité) ; les différences finies seulement pour une équation linéaire en y et y′. La méthode de Verlet seulement pour un mouvement x″ = a(x) à une coordonnée – pas encore l'orbite d'une planète dans le plan.

Généré à partir de l’application Mathtrace