Mathtrace – manual

V. Estadística

Índice

V. Estadística

41. Estadística

41. Estadística

Los datos se escriben como data(…): los valores separados por punto y coma, espacios o saltos de línea; la coma decimal vale como en el resto (data(1,5 2,5 3)). Una tabla – una fila por observación, una columna por variable – se escribe fila a fila separadas por punto y coma; la primera fila puede llevar los nombres de las variables. Más cómodo: la tecla de cuadrícula de la pestaña f(x) abre una tabla para rellenar, pegar desde el portapapeles (celdas de Excel o Hojas de cálculo de Google) o cargar desde un archivo CSV, y el botón «Como datos» la inserta para estadística – también una tabla mayor que la cuadrícula.

Con una variable, un chip elige qué calcular. Estadística descriptiva: media aritmética, mediana, moda, cuartiles (medianas de la mitad inferior y superior), recorrido y rango intercuartílico, varianza y desviación típica muestral (n − 1) y poblacional (n), coeficiente de variación y valores atípicos (fuera de $Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR$ y $Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR$), con diagrama de caja. Frecuencias e histograma: la tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas – por valores para enteros con pocos valores, si no por clases (su número por la regla de Sturges). Puntuaciones z: cada valor tipificado con la media y la desviación típica de los datos, con su puntuación T.

Dos variables (dos columnas) dan correlación y regresión: sumas, covarianza, el coeficiente de correlación de Pearson r con la fuerza de la relación en palabras, la recta de regresión por mínimos cuadrados y el coeficiente de determinación r^2, con diagrama de dispersión. Tres o más variables obtienen su estadística descriptiva lado a lado con diagramas de caja.

Inferencia estadística a partir de datos: el intervalo de confianza de la media (chip «Intervalo de confianza de la media», 90, 95 o 99 %) mediante la distribución t; la prueba t (chip «Prueba t») – una variable frente al valor contrastado μ_0, dos variables como muestras independientes (prueba de Welch, o con varianzas iguales) o valores pareados (diferencias de los pares); la prueba χ^2 (chip «Prueba χ^2») – una columna de frecuencias como prueba de bondad de ajuste a la distribución uniforme, una tabla como prueba de independencia con la V de Cramér. Debajo de los chips se introduce el nivel de significación α, la alternativa (bilateral, unilateral izquierda o derecha) y μ_0. El procedimiento: hipótesis, estadístico de contraste, valor crítico y región crítica, valor p y decisión; la gráfica muestra la distribución con la región crítica sombreada. Dos muestras independientes de distinto tamaño se escriben como columnas con nombre – data(A = 23 25 28; B = 20 22 21 25).

Comparar grupos: el chip «Prueba de rangos (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis)» compara dos grupos con la prueba de Mann-Whitney (con «Pareadas», valores pareados con la prueba de Wilcoxon) y tres o más grupos con la prueba de Kruskal-Wallis, mediante los rangos y sin suponer distribución normal; con muestras pequeñas sin empates el valor p es exacto. El chip «ANOVA (análisis de varianza)» compara las medias de los grupos con el análisis de varianza de un factor: tabla ANOVA, prueba F y tamaño del efecto η^2. Escriba los grupos en columnas, de cualquier longitud (columnas con nombre); la

gráfica muestra los diagramas de caja y la distribución del estadístico. En la prueba χ^2 de una columna de frecuencias, el campo «Proporciones esperadas» admite proporciones propias: 1:2:1, 0,25 0,5 0,25 o en porcentaje.

La regresión de dos variables tiene bajo su chip la elección del modelo: lineal (con la prueba de significación de la correlación), cuadrática (ecuaciones normales de mínimos cuadrados), exponencial y = a·e^(bx), potencial y = a·x^b y logarítmica y = a + b·ln x (por linealización con logaritmos) – con el coeficiente de determinación R^2 y la gráfica de la curva ajustada. En el formulario «Estadística y psicometría» hay además el intervalo de confianza y pruebas t a partir de valores resumidos (tamaño, media, desviación típica) – también la prueba z con σ conocida y la prueba t de dos muestras.

La distribución normal está en el formulario «Estadística y psicometría» (sección «Aplicaciones» de la pantalla de inicio, campo Estadística): las probabilidades P(X < x), P(X > x), P(a < X < b) y el cuantil – el valor por debajo del cual queda una proporción dada. Los pasos tipifican, $z = (x - \mu)/\sigma$, y usan la función de distribución Φ, una z negativa como $1 - \Phi(|z|)$ como en las tablas; la gráfica muestra la densidad con el área coloreada.

Cómo introducirlo

`data(3; 5; 7; 7; 9)`	Una variable – los valores con punto y coma, espacios o uno debajo de otro.
`data(x y; 1 52; 2 58; 3 61)`	Una tabla fila a fila, la primera fila con los nombres de las variables (opcional).
`data(x = 1 2 3 4; y = 2 4 5 4)`	Columnas con nombre, cada una con sus valores.

Ejemplos

Estadística descriptiva de ocho valores.

Enunciado: `data(2; 4; 4; 4; 5; 5; 7; 9)`

Resultado

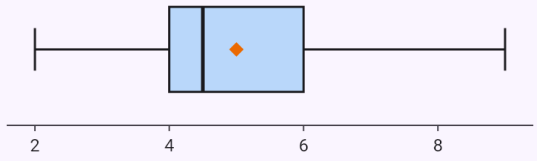
$$\bar{x} = 5$$
$$\tilde{x} = 4{,}5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Pasos

- Número de valores $n = 8$, datos ordenados: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Media aritmética: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40}{8} = 5$
- La mediana es el valor central de los datos ordenados: $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- Moda (el valor más frecuente, 3×): $\hat{x} = 4$
- Los cuartiles son las medianas de la mitad inferior y superior: $Q_1 = 4, \quad Q_2 = \tilde{x} = 4{,}5, \quad Q_3 = 6$
- Recorrido y rango intercuartílico
  $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 2 = 7$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$
- Suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 32$
- Varianza – muestral s² y poblacional σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{7} \approx 4{,}571$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{8} = 4$
- Desviación típica
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}571} \approx 2{,}138$
  $\sigma = \sqrt{4} = 2$
- Coeficiente de variación:
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}138}{5} \approx 0{,}4276 = 42{,}8\,\%$
- Vallas para valores atípicos
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 1, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 9$: ningún valor queda fuera.
- La varianza muestral s² divide entre n − 1 y estima la varianza de la población: la elección habitual. La poblacional σ² divide entre n, para datos que son toda la población.
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Gráfica

Diagrama de caja (mediana, cuartiles, valores atípicos; ◆ media)



El valor atípico 31 en el diagrama de caja.

Enunciado: `data(12 15 14 13 16 15 14 31)`

Resultado

$$\bar{x} = 16{,}25$$
$$\tilde{x} = 14{,}5$$
$$s \approx 6{,}089$$

Pasos

- Número de valores $n = 8$, datos ordenados: $12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16,\ 31$
- Media aritmética: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{8} = 16{,}25$
- La mediana es el valor central de los datos ordenados: $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$
- Moda (el valor más frecuente, 2×): $\hat{x} = 14,\ 15$
- Los cuartiles son las medianas de la mitad inferior y superior: $Q_1 = 13{,}5, \quad Q_2 = \tilde{x} = 14{,}5, \quad Q_3 = 15{,}5$
- Recorrido y rango intercuartílico
  $R = x_{max} - x_{min} = 31 - 12 = 19$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 15{,}5 - 13{,}5 = 2$
- Suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 259{,}5$
- Varianza – muestral s² y poblacional σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{7} \approx 37{,}07$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{8} \approx 32{,}44$
- Desviación típica
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{37{,}07} \approx 6{,}089$
  $\sigma = \sqrt{32{,}44} \approx 5{,}695$
- Coeficiente de variación:
  $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6{,}089}{16{,}25} \approx 0{,}3747 = 37{,}5\,\%$
- Los valores atípicos quedan fuera de las vallas
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 10{,}5, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 18{,}5$: 31
- La varianza muestral s² divide entre n − 1 y estima la varianza de la población: la elección habitual. La poblacional σ² divide entre n, para datos que son toda la población.
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Gráfica

Diagrama de caja (mediana, cuartiles, valores atípicos; ◆ media)

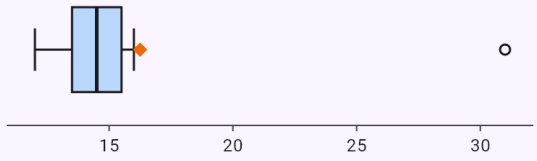


Tabla de frecuencias de notas e histograma.

Enunciado: `data(1 2 2 3 3 3 3 4 4 5 1 3 2 4 3)` Frecuencias e histograma

Resultado

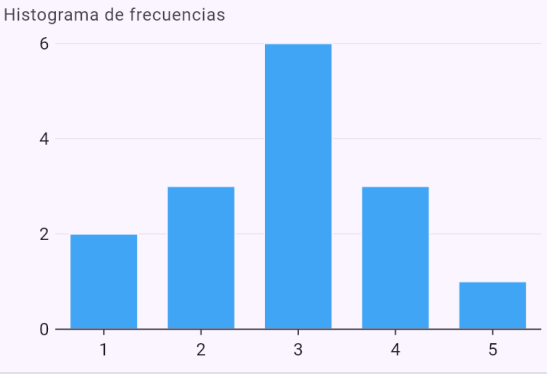
$$n = 15$$
$$\hat{x} = 3$$

Pasos

- Número de valores $n = 15$, datos ordenados:
  $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5$
- Tabla de frecuencias – absoluta n, relativa f, acumuladas N y F

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,133	2	0,133
2	3	0,200	5	0,333
3	6	0,400	11	0,733
4	3	0,200	14	0,933
5	1	0,067	15	1,000
$\sum$	15	1		

Gráfica



Datos continuos agrupados en clases.

Enunciado: `data(12.5 14.1 15.8 17.2 18.9 21.3 22.0 23.7 25.1 26.4 28.8 31.2)` Frecuencias e histograma

Resultado

$$n = 12$$
$$k = 5, \quad h = 5$$

Pasos

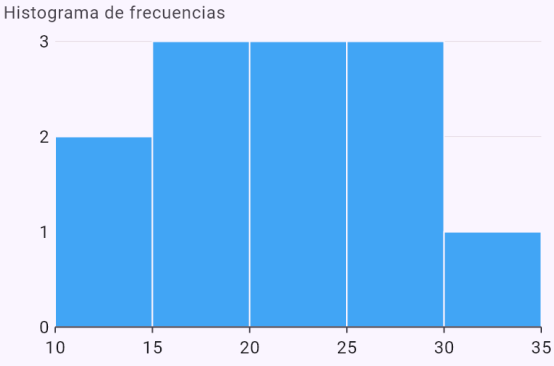
- Número de valores $n = 12$, datos ordenados
  $12{,}5,\ 14{,}1,\ 15{,}8,\ 17{,}2,\ 18{,}9,\ 21{,}3,\ 22,\ 23{,}7,\ 25{,}1,\ 26,$
- Hay muchos valores: los agrupamos en 5 clases (regla de Sturges)

  $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + \log_2 12 \approx 4{,}585 \Rightarrow k = 5$

  $h \approx \frac{R}{k} = \frac{18{,}7}{5} \approx 3{,}74 \Rightarrow h = 5$
- Tabla de frecuencias de las clases (x la marca de clase)

I_j	x_j	n_j	f_j	N_j	F_j
[10, 15)	12,5	2	0,167	2	0,167
[15, 20)	17,5	3	0,250	5	0,417
[20, 25)	22,5	3	0,250	8	0,667
[25, 30)	27,5	3	0,250	11	0,917
[30, 35]	32,5	1	0,083	12	1,000
$\sum$		12	1		

Gráfica



Puntuaciones z y T de los valores.

Enunciado: `data(2 4 4 4 5 5 7 9)` Puntuaciones z

Resultado

$$\bar{x} = 5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Pasos

- Número de valores $n = 8$, datos ordenados: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Media aritmética: $\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$
- Desviación típica

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{32}{7}} \approx 2{,}138$$

- Tipificamos cada valor

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 5}{2{,}138}$$
$$T_i = 50 + 10 z_i$$

- Puntuaciones z y T de los valores

x_i	z_i	T_i
2	−1,40	36,0
4	−0,47	45,3
4	−0,47	45,3
4	−0,47	45,3
5	0,00	50,0
5	0,00	50,0
7	0,94	59,4
9	1,87	68,7

- Las puntuaciones z usan la media y la desviación típica de estos datos. Para comparar con una población se usan la media y la DT del baremo (modelo «Conversión de puntuaciones típicas»).

Correlación y recta de regresión – horas de estudio y puntos del examen.

Enunciado: `data(x y; 1 52; 2 58; 3 61; 4 70; 5 74; 6 79)`

Resultado

$$r \approx 0{,}9937$$

$$\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$$

Pasos

- Número de valores $n = 6$, datos ordenados $[1,\ 52],\ [2,\ 58],\ [3,\ 61],\ [4,\ 70],\ [5,\ 74],\ [6,\ 79]$
- Sumas y medias

  $\sum x_i = 21$

  $\sum y_i = 394$

  $\sum x_i^2 = 91$

  $\sum y_i^2 = 26\,410$

  $\sum x_i y_i = 1475$

  $\bar{x} = 3{,}5$

  $\bar{y} = 65{,}67$
- Desviación típica

  $$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \approx 1{,}871$$

  $$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}} \approx 10{,}33$$
- Covarianza

  $$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{1475 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot 65{,}67}{5} = 19{,}2$$
- Coeficiente de correlación de Pearson:

  $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{19{,}2}{1{,}871 \cdot 10{,}33} \approx 0{,}9937$ – la relación es muy fuerte, positiva (y crece con x).
- Coeficientes de la recta de regresión por mínimos cuadrados

  $b = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} = \dfrac{19{,}2}{3{,}5} \approx 5{,}486$

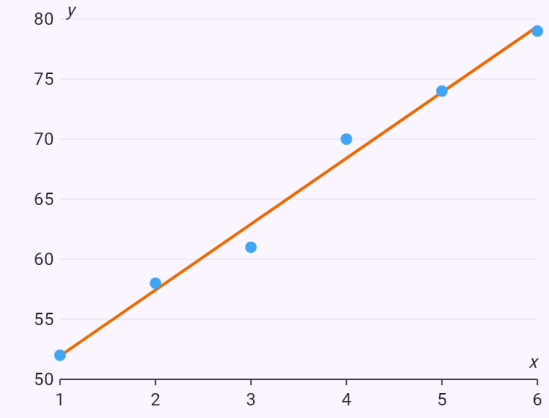
  $a = \bar{y} - b\bar{x} = 65{,}67 - 5{,}486 \cdot 3{,}5 \approx 46{,}47$
- Recta de regresión: $\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$
- Coeficiente de determinación $r^2 = 0{,}9937^2 \approx 0{,}9874$: la recta explica el $98{,}7\,\%$ de la varianza de y.
- Prueba de la hipótesis nula ρ = 0 (distribución t con 4 grados de libertad) – la correlación es estadísticamente significativa.

  $$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}9937\sqrt{4}}{\sqrt{1-0{,}9937^2}} \approx 17{,}73$$

  $p < 0{,}0001 \le \alpha = 0{,}05$
- La correlación describe solo una relación lineal: no dice qué causa qué y puede pasar por alto una no lineal. La recta de regresión solo debe usarse en el rango de las x medidas.

Gráfica

Diagrama de dispersión con la recta de regresión



Tres variables lado a lado.

Enunciado: `data(A B C; 12 15 9; 14 18 11; 11 16 10; 15 19 12; 13 17 10)`

Resultado

$$\bar{x}_{\mathrm{A}} = 13$$
$$\bar{x}_{\mathrm{B}} = 17$$
$$\bar{x}_{\mathrm{C}} = 10{,}4$$

Pasos

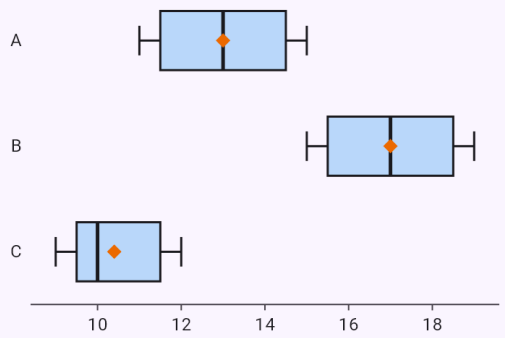
- Estadística descriptiva de las variables

	A	B	C
n	5	5	5
$\bar{x}$	13	17	10,4
$\tilde{x}$	13	17	10
Q_1	11,5	15,5	9,5
Q_3	14,5	18,5	11,5
s	1,581	1,581	1,14
σ	1,414	1,414	1,02
x_{min}	11	15	9
x_{max}	15	19	12

- La varianza muestral s² divide entre n − 1 y estima la varianza de la población: la elección habitual. La poblacional σ² divide entre n, para datos que son toda la población.

Gráfica

Diagrama de caja (mediana, cuartiles, valores atípicos; ◆ media)



Intervalo de confianza del 95 % de la media de diez mediciones.

Enunciado: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Intervalo de confianza de la media

Resultado

$$95\,\%: \ [99{,}71,\ 106{,}3]$$

Pasos

- Tamaño, media y desviación típica muestral:
  $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- El error típico: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- El cuantil para la confianza elegida: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$
- El intervalo de confianza
  $\bar{x} \pm t \cdot SE = 103 \pm 2{,}262 \cdot 1{,}453 = 103 \pm 3{,}287 \Rightarrow [99,$
- Una confianza del 95 % significa: si se repitiera el muestreo muchas veces, cerca del 95 % de los intervalos calculados así contendrían la media verdadera μ. No significa que μ esté en este intervalo concreto con probabilidad del 95 %.
- Con una muestra pequeña (n < 30), la distribución t supone que los datos proceden de una distribución aproximadamente normal. Con datos muy asimétricos o valores atípicos es más adecuada una prueba no paramétrica.

¿Difiere la media de 100? Prueba t de una muestra.

Enunciado: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Prueba t

Resultado

$$t \approx 2{,}065$$

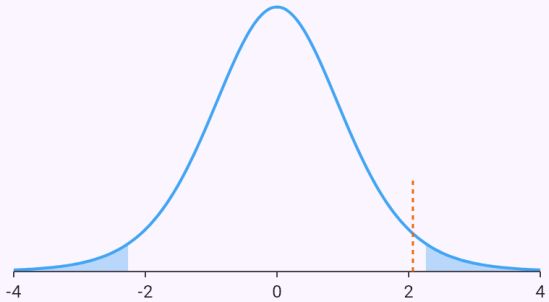
$$p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Tamaño, media y desviación típica muestral: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- La hipótesis nula y la alternativa: $H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu \neq 100$
- El error típico: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución t con 9 grados de libertad: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{103 - 100}{1{,}453} \approx 2{,}065$
- El valor crítico al nivel α: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$, la región crítica $|t| \geq 2{,}262$
- El valor p: $p = 2\,P(T \geq 2{,}065) \approx 0{,}06895$
- Como $p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$, no rechazamos la hipótesis nula – los datos no aportan suficiente evidencia en su contra.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- Con una muestra pequeña (n < 30), la distribución t supone que los datos proceden de una distribución aproximadamente normal. Con datos muy asimétricos o valores atípicos es más adecuada una prueba no paramétrica.

Gráfica

Distribución t – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}065$

Dos muestras independientes de distinto tamaño – prueba t de Welch.

Enunciado: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)` Prueba t

Resultado

$t \approx 3{,}503$

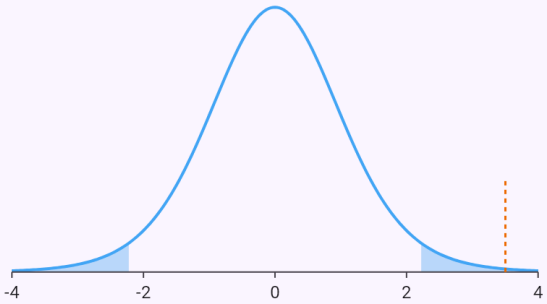
$p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$

Pasos

- Tamaño, media y desviación típica muestral
  $n_1 = 6,\ \bar{x}_1 = 26{,}5,\ s_1 \approx 2{,}429$
  $n_2 = 7,\ \bar{x}_2 = 22,\ s_2 \approx 2{,}16$
- La hipótesis nula y la alternativa:
  $H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- El error típico
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2{,}429^2}{6} + \frac{2{,}16^2}{7}} \approx 1{,}285$$
- Los grados de libertad de Welch y Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 10{,}18$$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución t con $10{,}18$ grados de libertad:
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{26{,}5 - 22}{1{,}285} \approx 3{,}503$$
- El valor crítico al nivel α: $t_{0{,}975}(10{,}18) \approx 2{,}223$, la región crítica $|t| \geq 2{,}223$
- El valor p: $p = 2\,P(T \geq 3{,}503) \approx 0{,}005546$
- Como $p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- La prueba de Welch no supone varianzas iguales de los grupos; sus grados de libertad v no tienen por qué ser enteros.

Gráfica

Distribución t – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}503$

Prueba t pareada – mediciones antes y después.

Enunciado: `data(x1 x2; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71)` Prueba t · Pareadas

Resultado

$$t \approx 3{,}081$$

$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Las diferencias de los pares d (columna 1 − columna 2): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3;\ n = 6, \quad \bar{d} \approx 2{,}167, \quad s_d \approx 1{,}722$
- La hipótesis nula y la alternativa: $H_0 : \mu_d = 0, \quad H_1 : \mu_d \neq 0$
- El error típico: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}722}{\sqrt{6}} \approx 0{,}7032$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución t con 5 grados de libertad: $t = \dfrac{\bar{d} - \mu_0}{SE} = \dfrac{2{,}167 - 0}{0{,}7032} \approx 3{,}081$
- El valor crítico al nivel α: $t_{0{,}975}(5) \approx 2{,}571$, la región crítica $|t| \geq 2{,}571$
- El valor p: $p = 2\,P(T \geq 3{,}081) \approx 0{,}02743$
- Como $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- Con una muestra pequeña (n < 30), la distribución t supone que los datos proceden de una distribución aproximadamente normal. Con datos muy asimétricos o valores atípicos es más adecuada una prueba no paramétrica.
- La prueba t pareada es una prueba t de una muestra para las diferencias (columna 1 − columna 2) – cada par pertenece al mismo sujeto (p. ej. antes y después).

Gráfica

Distribución t – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}081$

¿Es el dado justo? Prueba χ² de bondad de ajuste.

Enunciado: `data(8 12 9 11 6 14)` Prueba χ^2

Resultado

$$\chi^2 = 4{,}2$$
$$p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Hipótesis nula: las 6 categorías son igualmente probables ($H_0: p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$); alternativa: al menos una difiere.
- Las frecuencias esperadas bajo H_0 $E_i = \frac{N}{k} = \frac{60}{6} = 10$ y las contribuciones de las categorías

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	0,4
2	12	10	0,4
3	9	10	0,1
4	11	10	0,1
5	6	10	1,6
6	14	10	1,6
$\sum$	60	60	4,2

- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución χ^2 con 5 grados de libertad

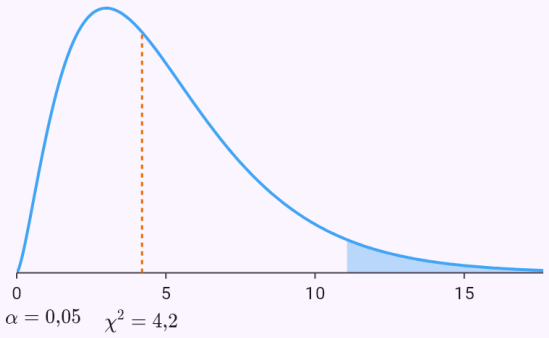
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}6 + 1$$

- El valor crítico al nivel α: $\chi^2_{0{,}95}(5) \approx 11{,}07$, la región crítica $\chi^2 \geq 11{,}07$
- El valor p: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}2) \approx 0{,}521$
- Como $p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$, no rechazamos la hipótesis nula – los datos no aportan suficiente evidencia en su contra.

- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- La prueba χ^2 trabaja con frecuencias (números de casos), no con porcentajes ni medias.

Gráfica

Distribución χ^2 – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



Prueba de independencia en una tabla 2×2.

Enunciado: `data(20 30; 25 15)` Prueba χ²

Resultado

$$\chi^2 = 4{,}5$$
$$p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$V \approx 0{,}2236$$

Pasos

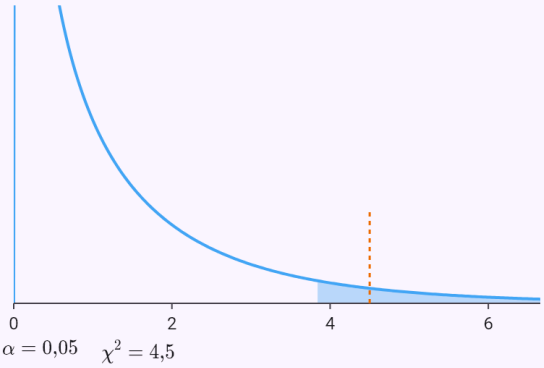
- Hipótesis nula: la variable de filas y la de columnas son independientes; alternativa: son dependientes.
- Las frecuencias esperadas bajo independencia $E_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{N}$, entre paréntesis las observadas

	1	2	∑
1	25 (20)	25 (30)	50
2	20 (25)	20 (15)	40
∑	45	45	90

- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución χ² con 1 grados de libertad: $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 1 + 1 + 1{,}25 + 1{,}25 = 4{,}5$
- El valor crítico al nivel α: $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}841$, la región crítica $\chi^2 \geq 3{,}841$
- El valor p: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}5) \approx 0{,}03389$
- Como $p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- La fuerza de la asociación – V de Cramér (0 ninguna, 1 total) $V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(r,c)-1)}} = \sqrt{\frac{4{,}5}{90 \cdot 1}} \approx 0{,}2236$
- La prueba χ² trabaja con frecuencias (números de casos), no con porcentajes ni medias.

Gráfica

Distribución χ² – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



Dos grupos con la prueba de Mann-Whitney: muestras pequeñas, valor p exacto.

Enunciado: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)`

Prueba de rangos (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis)

Resultado

$$U = 3$$
$$z \approx -2{,}579$$
$$p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Hipótesis nula: ambos grupos proceden de la misma distribución; alternativa: los valores de uno tienden a ser mayores

  $H_0\colon F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}$
  $H_1\colon F_{\mathrm{A}} \neq F_{\mathrm{B}}$

- Ordenamos juntos los valores de ambos grupos y los numeramos por su rango R (los valores iguales reciben la media de sus rangos)

x	R	
19	1	B
20	2	B
21	3	B
22	4	B
23	5,5	A
23	5,5	B
24	7	B
25	8,5	A
25	8,5	B
26	10	A
27	11	A
28	12	A
30	13	A

- Tamaños de los grupos y sumas de rangos:
  $n_1 = 6, \quad n_2 = 7, \quad R_1 = 60, \quad R_2 = 31$

- El estadístico U de Mann-Whitney: el número de pares en los que el valor de un grupo tiene mayor rango que el del otro; se prueba el menor

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 60 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 39$$
$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 6 \cdot 7 - 39 = 3$$
$$U = \min(U_1, U_2) = 3$$

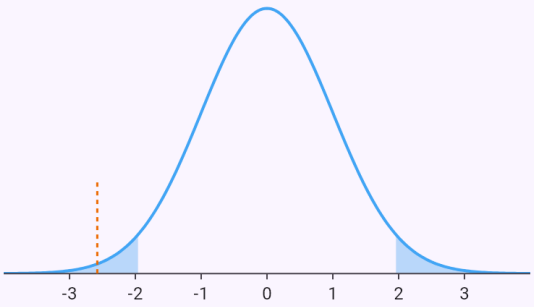
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue la distribución normal estándar:

$$z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_U} = \frac{3 - 21}{6{,}981} \approx -2{,}579$$

- El valor crítico al nivel α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la región crítica $|z| \geq 1{,}96$
- El valor p: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}579) \approx 0{,}009922$
- Como $p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El tamaño del efecto r (orientativamente 0,1 pequeño, 0,3 mediano, 0,5 grande): $r = \frac{|z|}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}579}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7152$
- La prueba de Mann-Whitney es una prueba de rangos: no supone distribución normal y sirve también para datos ordinales y valores atípicos. Compara las distribuciones completas; con formas parecidas, es una prueba de diferencia de medianas.

Gráfica

Distribución normal estándar – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}579$

Valores pareados antes y después con la prueba de Wilcoxon.

Enunciado: `data(pred po; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71; 79 72)`

Prueba de rangos (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis) · Pareadas

Resultado

$$T = 1$$
$$z \approx -2{,}205$$
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Hipótesis nula: la mediana de las diferencias es cero (sin cambio); alternativa: no lo es: $H_0\colon \tilde{d} = 0, \quad H_1\colon \tilde{d} \neq 0$
- Las diferencias de los pares d (1.ª columna − 2.ª columna): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 7$; las diferencias nulas se omiten: $n = 7$
- Ordenamos las diferencias no nulas por su tamaño (sin signo) y las numeramos por su rango R; el signo se queda con el rango

d_i	R	
-1	1	$-$
2	$2{,}5$	$+$
2	$2{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
4	6	$+$
7	7	$+$

- Las sumas de rangos de las diferencias positivas y negativas
  $T^+ = 27$
  $T^- = 1$
  $T = \min\left(T^+, T^-\right) = 1$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue la distribución normal estándar:
  $$z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sigma_T} = \frac{1 - 14}{5{,}895} \approx -2{,}205$$
- El valor crítico al nivel α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la región crítica $|z| \geq 1{,}96$
- El valor p: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}205) \approx 0{,}02743$
- Como $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El tamaño del efecto r (orientativamente 0,1 pequeño, 0,3 mediano, 0,5 grande): $r = \frac{|z|}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}205}{\sqrt{7}} \approx 0{,}8335$
- La prueba de Wilcoxon es la versión de rangos de la prueba t pareada: no supone diferencias normales y tiene en cuenta su signo y tamaño mediante los rangos.

Gráfica

Distribución normal estándar – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}205$

Tres grupos con la prueba de Kruskal-Wallis.

Enunciado: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

Prueba de rangos (Mann-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis)

Resultado

$$H \approx 8{,}263$$
$$p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Hipótesis nula: todos los grupos proceden de la misma distribución; alternativa: al menos uno difiere
  $H_0: F_1 = \cdots = F_3$
  $H_1: \exists\, i, j: F_i \neq F_j$

- Ordenamos juntos los valores de todos los grupos y los numeramos por su rango R (los valores iguales reciben la media de sus rangos)

x	R	
11	1	A
12	2,5	A
12	2,5	C
13	4,5	A
13	4,5	C
14	6,5	A
14	6,5	C
15	9	A
15	9	B
15	9	C
16	11,5	B
16	11,5	C
17	13	B
18	14	B
19	15	B

- La suma de rangos de cada grupo
  $R_{\mathrm{A}} = 23{,}5 \ (n = 5)$
  $R_{\mathrm{B}} = 62{,}5 \ (n = 5)$
  $R_{\mathrm{C}} = 34 \ (n = 5)$

- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución χ^2 con 2 grados de libertad

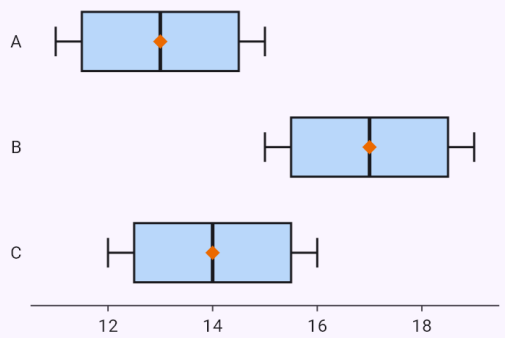
$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{15 \cdot 16} \left(\frac{23{,}5^2}{5} \right.$$
$$C = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N} = 1 - \frac{48}{3360} \approx 0{,}9857$$
$$H_c = \frac{H}{C} = \frac{8{,}145}{0{,}9857} \approx 8{,}263$$

- El valor crítico al nivel α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la región crítica $\chi^2 \geq 5{,}991$
- El valor p: $p = P\left(\chi^2 \geq 8{,}263\right) \approx 0{,}01606$
- Como $p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.

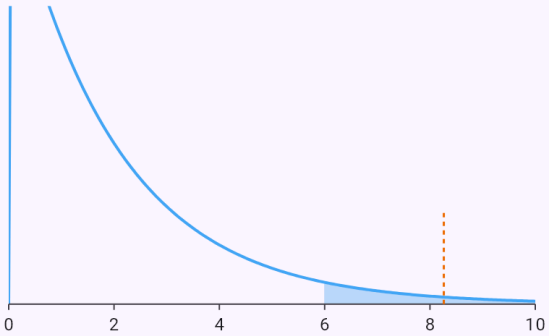
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El tamaño del efecto ε^2: la parte de la varianza de los rangos explicada por los grupos:
  $\varepsilon^2 = \frac{H}{N-1} = \frac{8{,}263}{14} \approx 0{,}5902$
- La prueba de Kruskal-Wallis es la versión de rangos del ANOVA de un factor. Solo dice que algunos grupos difieren; cuáles, lo muestra la comparación por pares (Mann-Whitney con corrección de Bonferroni).

Gráfica

Diagrama de caja (mediana, cuartiles, valores atípicos; ◆ media)



Distribución χ^2 – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 \approx 8{,}263$

Las medias de tres grupos con el ANOVA de un factor.

Enunciado: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

ANOVA (análisis de varianza)

Resultado

$$F \approx 8{,}667$$
$$p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$\eta^2 \approx 0{,}5909$$

Pasos

- Hipótesis nula: las medias de todos los grupos son iguales; alternativa: al menos dos difieren

  $H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_3$

  $H_1: \exists\, i, j: \mu_i \neq \mu_j$

- Tamaños, medias y desviaciones típicas de los grupos y la media global $\bar{x} \approx 14{,}67$

	n_j	$\bar{x}_j$	s_j
A	5	13	1,581
B	5	17	1,581
C	5	14	1,581
$\sum$	15	14,67	

- Análisis de varianza: suma de cuadrados entre grupos (B) y dentro de ellos (W), grados de libertad y cuadrados medios

$$SS_B = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$
$$SS_W = \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

	SS	df	MS	F
B	43,33	2	21,67	8,667
W	30	12	2,5	
$\sum$	73,33	14		

- El estadístico de contraste: bajo H_0 sigue la distribución F con 2 y 12 grados de libertad:

$$F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{21{,}67}{2{,}5} \approx 8{,}667$$

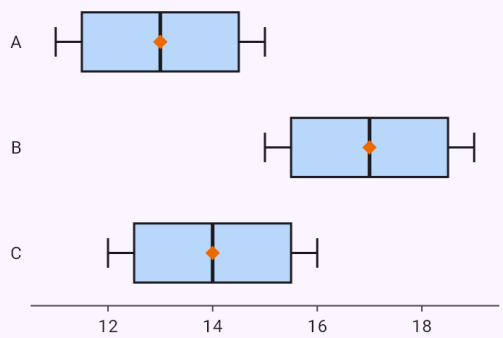
- El valor crítico al nivel α: $F_{0{,}95}(2;\ 12) \approx 3{,}885$, la región crítica $F \geq 3{,}885$
- El valor p: $p = P(F \geq 8{,}667) \approx 0{,}004687$
- Como $p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El tamaño del efecto η²: la parte de la varianza explicada por las diferencias entre grupos (orientativamente 0,01 pequeño, 0,06 mediano, 0,14 grande):

$$\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{43{,}33}{73{,}33} \approx 0{,}5909$$

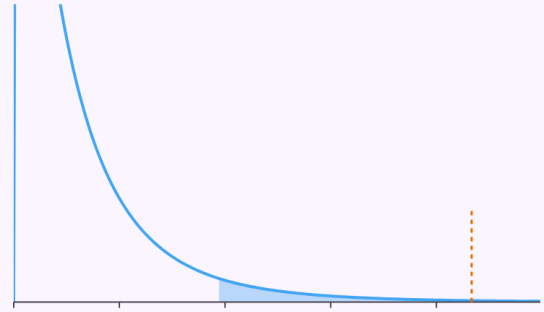
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El ANOVA supone grupos independientes, una distribución aproximadamente normal en cada uno y varianzas parecidas. Si no se cumple (grupos pequeños, atípicos, datos ordinales), use la prueba de Kruskal-Wallis.
- Rechazar H_0 solo indica que al menos dos medias difieren. Cuáles, lo muestra la comparación por pares (pruebas post hoc, p. ej. pruebas t con corrección de Bonferroni).

Gráfica

Diagrama de caja (mediana, cuartiles, valores atípicos; ◆ media)



Distribución F: sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05$ $F \approx 8{,}667$

Prueba de bondad de ajuste con las proporciones esperadas 1 : 2 : 1.

Enunciado: `data(30 50 20)` Prueba χ² · Proporciones esperadas 1:2:1

Resultado

$$\chi^2 = 2$$
$$p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$$

Pasos

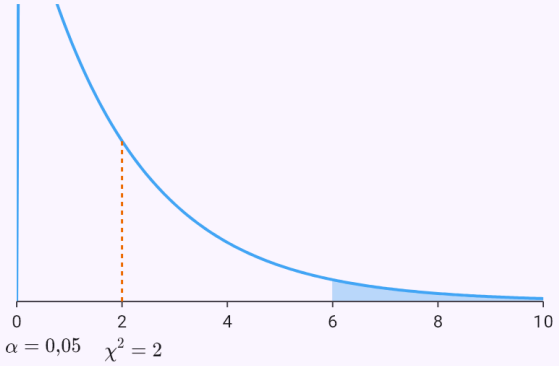
- Hipótesis nula: las categorías tienen las proporciones dadas; alternativa: al menos una difiere: $H_0: p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}5,\ p_3 = 0{,}25$
- Las frecuencias esperadas según las proporciones dadas $E_i = N \cdot p_i, \quad N = 100$ y las contribuciones de las categorías

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	30	25	1
2	50	50	0
3	20	25	1
$\sum$	100	100	2

- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución χ² con 2 grados de libertad: $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1 + 0 + 1 = 2$
- El valor crítico al nivel α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, la región crítica $\chi^2 \geq 5{,}991$
- El valor p: $p = P(\chi^2 \geq 2) \approx 0{,}3679$
- Como $p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$, no rechazamos la hipótesis nula – los datos no aportan suficiente evidencia en su contra.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- La prueba χ² trabaja con frecuencias (números de casos), no con porcentajes ni medias.

Gráfica

Distribución χ² – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



Regresión cuadrática.

Enunciado: `data(x y; 1 2.1; 2 3.9; 3 9.2; 4 15.8; 5 25.1; 6 36.2)`

Correlación y regresión · Cuadrática

Resultado

$$\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$$

$$R^2 \approx 0{,}9997$$

Pasos

- Número de valores $n = 6$, datos ordenados
  $[1,\ 2{,}1],\ [2,\ 3{,}9],\ [3,\ 9{,}2],\ [4,\ 15{,}8],\ [5,\ 25{,}1],\ [6,\ 36{,}2]$
- Sumas y medias
  $\sum x_i = 21$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum x_i^3 = 441$
  $\sum x_i^4 = 2275$
  $\sum y_i = 92{,}3$
  $\sum x_i y_i = 443{,}4$
  $\sum x_i^2 y_i = 2284$
- Las ecuaciones normales de mínimos cuadrados para ŷ = a + bx + cx²

$$\begin{aligned} 6a + 21b + 91c &= 92{,}3 \\ 21a + 91b + 441c &= 443{,}4 \\ 91a + 441b + 2275c &= 2284 \end{aligned}$$

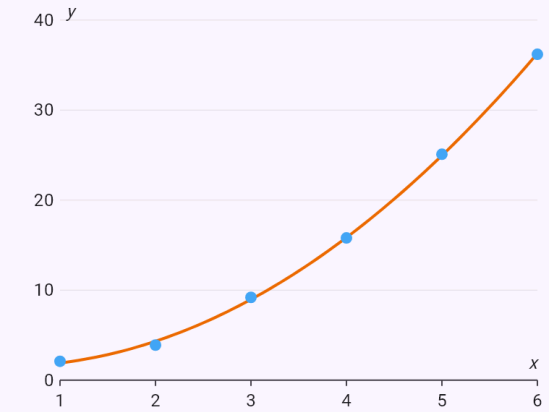
- La curva de regresión: $\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$
- El coeficiente de determinación – la curva explica el $99{,}97\,\%$ de la varianza de y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}3012}{874{,}5} \approx 0{,}9997$$

- La curva de regresión solo es razonable dentro del rango de los x medidos – fuera de él (extrapolación) la estimación puede ser muy imprecisa.

Gráfica

Diagrama de dispersión con la curva de regresión



Regresión exponencial por linealización.

Enunciado: `data(x y; 0 2.0; 1 2.7; 2 3.7; 3 5.0; 4 6.8; 5 9.1)`

Correlación y regresión · Exponencial

Resultado

$$\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$$

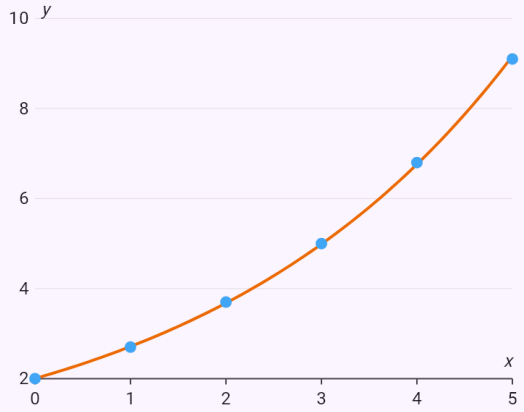
$$R^2 \approx 0{,}9998$$

Pasos

- Número de valores $n = 6$, datos ordenados
  $[0,\ 2],\ [1,\ 2{,}7],\ [2,\ 3{,}7],\ [3,\ 5],\ [4,\ 6{,}8],\ [5,\ 9{,}1]$
- Tomando logaritmos, el modelo se convierte en una recta en las variables (u, v):
  $y = a\, e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$; los pares transformados
  $[0,\ 0{,}6931],\ [1,\ 0{,}9933],\ [2,\ 1{,}308],\ [3,\ 1{,}609],\ [4,\ 1{,}91$
- Coeficientes de la recta de regresión por mínimos cuadrados
  $$b = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum (u_i - \bar{u})^2} = \frac{5{,}324}{17{,}5} \approx 0{,}3042$$
  $$\ln a = \overline{\ln y} - b\bar{x} = 1{,}455 - 0{,}3042 \cdot 2{,}5 \approx 0{,}6943$$
- El coeficiente a por la transformación inversa:
  $a = e^{0{,}6943} \approx 2{,}002$
- La curva de regresión: $\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$
- El coeficiente de determinación – la curva explica el $99{,}98\,\%$ de la varianza de y.
  $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}006563}{35{,}95} \approx 0{,}9998$$
- Los coeficientes se ajustan por mínimos cuadrados a los datos transformados (logaritmos), no a los valores originales – el resultado puede diferir un poco de una regresión no lineal en programas estadísticos.
- La curva de regresión solo es razonable dentro del rango de los x medidos – fuera de él (extrapolación) la estimación puede ser muy imprecisa.

Gráfica

Diagrama de dispersión con la curva de regresión



Prueba t unilateral derecha a partir de valores resumidos: n = 25, x̄ = 104, s = 15, μ_0 = 100.

Enunciado: `model(ttest; find=test[one]; n=25[one]; mean=104[one]; sd=15[one]; mu0=100[one];`

`alpha=0.05[one]; alternative=greater; sigma=sample)`

Resultado

$t \approx 1{,}333$

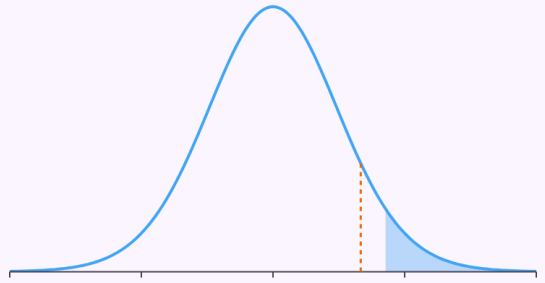
$p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$

Pasos

- Buscamos t; datos:
  $n = 25, \quad \bar{x} = 104, \quad s = 15, \quad \mu_0 = 100, \quad \alpha = 0{,}05$
- La prueba t comprueba si la media poblacional difiere de un valor μ₀. El estadístico t = (x̄ − μ₀)/(s/√n) sigue bajo la hipótesis nula una distribución t con n − 1 grados de libertad; el valor p indica lo probable que sería un resultado así o más extremo si H_0 fuera cierta. Con σ conocida es una prueba z. Ecuación del modelo:
  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- La hipótesis nula y la alternativa:
  $H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu > 100$
- El error típico: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución t con 24 grados de libertad:
  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \frac{104 - 100}{3} \approx 1{,}333$
- El valor crítico al nivel α: $t_{0{,}95}(24) \approx 1{,}711$, la región crítica $t \geq 1{,}711$
- El valor p: $p = P(T \geq 1{,}333) \approx 0{,}09747$
- Como $p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$, no rechazamos la hipótesis nula – los datos no aportan suficiente evidencia en su contra.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- Con una muestra pequeña (n < 30), la distribución t supone que los datos proceden de una distribución aproximadamente normal. Con datos muy asimétricos o valores atípicos es más adecuada una prueba no paramétrica.

Gráfica

Distribución t – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 1{,}333$

Prueba t de Welch de dos grupos a partir de valores resumidos.

Enunciado: `model(twosample; find=test[one]; n1=30[one]; mean1=52[one]; sd1=8[one];`

```
n2=28[one]; mean2=47[one]; sd2=10[one]; alpha=0.05[one]; variances=welch; alternative=two)
```

Resultado

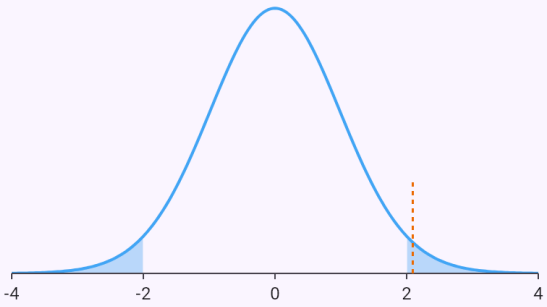
$$t \approx 2{,}093$$
$$p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $n_1 = 30, \quad \bar{x}_1 = 52, \quad s_1 = 8, \quad n_2 = 28, \quad \bar{x}_2 = 47,$
- Comparación de las medias de dos grupos independientes. La prueba de Welch no supone varianzas iguales y es hoy la opción recomendada; la prueba t clásica con varianza combinada supone que ambos grupos tienen la misma varianza. Bastan los tamaños, medias y desviaciones típicas de ambos grupos. Ecuación del modelo: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- La hipótesis nula y la alternativa:
  $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 \colon \mu_1 \neq \mu_2$
- El error típico
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{28}} \approx 2{,}388$$
- Los grados de libertad de Welch y Satterthwaite
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 51{,}71$$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue una distribución t con $51{,}71$ grados de libertad:
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{52 - 47}{2{,}388} \approx 2{,}093$$
- El valor crítico al nivel α: $t_{0{,}975}(51{,}71) \approx 2{,}007$, la región crítica $|t| \geq 2{,}007$
- El valor p: $p = 2\,P(T \geq 2{,}093) \approx 0{,}04124$
- Como $p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- La prueba de Welch no supone varianzas iguales de los grupos; sus grados de libertad v no tienen por qué ser enteros.

Gráfica

Distribución t – sombreada la región crítica, discontinuo el valor del estadístico



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}093$

Distribución normal: P(X < 85) para N(100; 15²).

Enunciado: `model(normal; find=below[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; x=85[one])`

Resultado

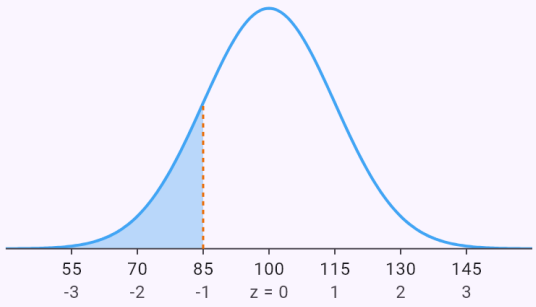
$$P(X < 85) \approx 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$$

Pasos

- Buscamos P; datos: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad x = 85$
- Muchas magnitudes (estatura, rendimiento en una prueba, error de medida) varían simétricamente alrededor de la media μ, y cuanto más lejos, con menos frecuencia: es la distribución normal (de Gauss) N(μ; σ²) con desviación típica σ. Las probabilidades se calculan tipificando, z = (x − μ)/σ, con la función de distribución Φ de la normal estándar N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un cuantil es el valor por debajo del cual queda la proporción p.
  Ecuación del modelo
  $$X \sim N(\mu,\, \sigma^2)$$
  $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$$
- Despejamos la magnitud buscada: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
- Sustituimos: $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$
- Sustituimos
  $P(X < 85) = \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) \approx (1 - 0{,}8413) \approx 0$

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$P \approx 0{,}1587 \quad x = 85$

Proporción de personas de entre 160 y 185 cm con μ = 170, σ = 8.

Enunciado: `model(normal; find=between[one]; mu=170[one]; sigma=8[one]; a=160[one];`

b=185[one])

Resultado

$$P(160 < X < 185) \approx 0{,}864 = 86{,}4\,\%$$

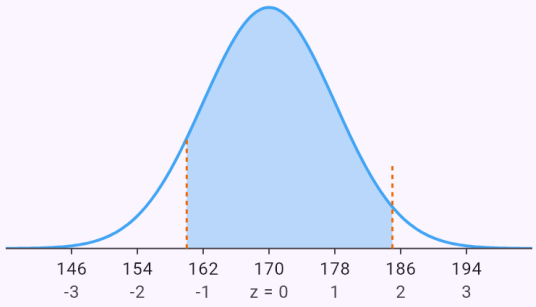
Pasos

- Buscamos P; datos:
  $\mu = 170, \quad \sigma = 8, \quad a = 160, \quad b = 185$
- Muchas magnitudes (estatura, rendimiento en una prueba, error de medida) varían simétricamente alrededor de la media μ, y cuanto más lejos, con menos frecuencia: es la distribución normal (de Gauss) N(μ; σ²) con desviación típica σ. Las probabilidades se calculan tipificando, z = (x − μ)/σ, con la función de distribución Φ de la normal estándar N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un cuantil es el valor por debajo del cual queda la proporción p.
  Ecuación del modelo
  $X \sim N(\mu,\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $z_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
- Sustituimos:
  $z_a = \dfrac{160 - 170}{8} = -1{,}25, \quad z_b = \dfrac{185 - 170}{8} = 1{,}875$
- Sustituimos

$$P(160 < X < 185) = \Phi(1{,}875) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}9696$$

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$P \approx 0{,}864 \quad a \quad b$

Un cuantil: la puntuación por debajo de la cual está el 95 % de la población.

Enunciado: `model(normal; find=quantile[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; p=95[pct])`

Resultado

$$x \approx 124{,}7$$

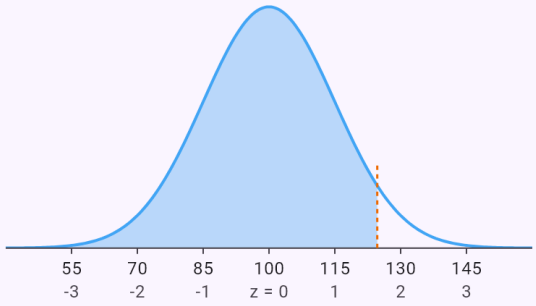
Pasos

- Buscamos x; datos: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad p = 95\,\%$
- Convertimos las unidades: $p = 95\,\% = 0{,}95$
- Muchas magnitudes (estatura, rendimiento en una prueba, error de medida) varían simétricamente alrededor de la media μ, y cuanto más lejos, con menos frecuencia: es la distribución normal (de Gauss) N(μ; σ²) con desviación típica σ. Las probabilidades se calculan tipificando, z = (x − μ)/σ, con la función de distribución Φ de la normal estándar N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Un cuantil es el valor por debajo del cual queda la proporción p.
  Ecuación del modelo
  $X \sim N(\mu,\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$
- Despejamos la magnitud buscada
  $P(X < x) = \Phi\left(\dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow x = \mu + z_p\sigma, \quad z_p =$
- Sustituimos

$$z_{0{,}95} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645, \quad x = 100 + 1{,}645 \cdot 15 \approx 1$$

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$p = 0{,}95 \quad x \approx 124{,}7$

Limitaciones conocidas

- Los cuartiles son las medianas de las mitades (el método escolar); los programas estadísticos (Excel, SPSS) usan otras fórmulas y con pocos datos pueden obtener valores algo distintos.
- La comparación por pares tras el ANOVA o la prueba de Kruskal-Wallis (post hoc) y el ANOVA de varios factores aún no están disponibles: compare los pares con una prueba t o de Mann-Whitney con corrección de Bonferroni; las regresiones no lineales se calculan por linealización.
- Los datos se introducen solo a mano, con la cuadrícula o un archivo CSV – la app todavía no reconoce una tabla en una foto.