Mathtrace – manual

VII. Aplicaciones: ciencias, economía y optimización

Índice

VII. Aplicaciones: ciencias, economía y optimización

47. Química
48. Electrotecnia
49. Biología y medicina
50. Economía, finanzas y seguros
51. Programación lineal, transporte, asignación y juegos matriciales
52. Grafos, redes y logística
53. Psicometría

47. Química

Los cálculos químicos están en la sección «Aplicaciones» de la pantalla de inicio, campo Química: ajuste de una ecuación química, pH de un ácido, una base, una sal o un ácido poliprótico, disolución amortiguadora, valoración con su curva, ecuación de Arrhenius y ley de Lambert–Beer. En el formulario elige el problema y la magnitud buscada y rellena los valores con sus unidades; el icono «?» explica de dónde sale la fórmula. Las constantes pequeñas se pueden escribir como 1.8e-5 o 1,8·10^-5, los valores medidos (una tabla de temperaturas, un calibrado) como números separados por espacios.

Una ecuación química basta con escribirla en la entrada manual, p. ej. Fe + O2 -> Fe2O3 (flecha -> o =, equilibrio <=>), también con iones MnO4^- y Fe^3+, paréntesis Ca(OH)2, hidratos CuSO4·5H2O y estados (aq). Los coeficientes son el núcleo de la matriz del balance de elementos (y de carga): la resolución escribe las ecuaciones de balance, la matriz, su forma reducida por eliminación de Gauss, el coeficiente libre como parámetro y los menores enteros, y al final la comprobación. Reconoce también una ecuación que no se puede ajustar (un elemento solo en un lado, una sustancia en el lado equivocado) o cuyo ajuste no es único.

El pH se calcula exactamente (para un ácido débil con una ecuación cuadrática), junto con la simplificación escolar y el grado de disociación; para un ácido poliprótico el balance de carga se resuelve numéricamente y el gráfico muestra la proporción de las formas del ácido según el pH. En una disolución amortiguadora a la que se añade un ácido o una base fuerte calcula el nuevo equilibrio y el cambio de pH. Una valoración obtiene el pH según la zona de la curva (inicio, zona amortiguadora, punto de equivalencia, exceso de valorante) y el gráfico muestra toda la curva de valoración. La ecuación de Arrhenius a partir de dos mediciones o de una tabla por regresión de ln k frente a 1/T; la ley de Lambert–Beer a partir de ε conocido, un patrón o una recta de calibrado.

Ejemplos

Ajuste de la oxidación del ácido clorhídrico por permanganato.

Enunciado: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Resultado

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

Pasos

- Designamos los coeficientes desconocidos con letras
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Los átomos no se crean ni se destruyen – de cada elemento hay tantos átomos a la izquierda como a la derecha

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad a = c \\ \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = f \\ \mathrm{H}: &\quad b = 2f \\ \mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g \end{aligned}$$

- El sistema homogéneo en forma matricial – una columna por sustancia, los productos con signo menos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- La eliminación de Gauss lleva la matriz a su forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

- Un coeficiente queda libre, $g = t$; los demás se expresan con él

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Elegimos $t = 5$ para que todos los coeficientes sean los menores enteros:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Comprobación – átomos a la izquierda y a la derecha

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\ \mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\ \mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16 \end{aligned}$$

Una ecuación redox iónica con balance de carga.

Enunciado: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Resultado

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5$$

Pasos

- Designamos los coeficientes desconocidos con letras
  $a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$
- Los átomos no se crean ni se destruyen y la carga se conserva (fila q) – para cada elemento y para la carga
  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$
- El sistema homogéneo en forma matricial – una columna por sustancia, los productos con signo menos
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- La eliminación de Gauss lleva la matriz a su forma escalonada reducida
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
- Un coeficiente queda libre, $g = t$; los demás se expresan con él
  $$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$
- Elegimos $t = 4$ para que todos los coeficientes sean los menores enteros:
  $$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$$
- Comprobación – átomos y carga a la izquierda y a la derecha
  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH del ácido acético 0,1 M (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Enunciado: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Resultado

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Pasos

- Buscamos pH; datos: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- El pH es el logaritmo decimal negativo de la concentración de iones hidrógeno (oxonio): pH = −log[H⁺]. Un ácido fuerte (HCl) se disocia por completo, así que [H⁺] = c; una base fuerte da [OH⁻] = c y pH = 14 − pOH. Un ácido débil HA ⇌ H⁺ + A⁻ se disocia solo en parte según su constante de disociación Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; de ella sale la ecuación cuadrática x² + Ka·x − Ka·c = 0. Una sal de un ácido débil y una base fuerte (acetato de sodio) reacciona con el agua como base con Kb = Kw/Ka, una sal de una base débil (NH_4Cl) como ácido. Para un ácido poliprótico (H_2SO_4, H_3PO_4) el balance de carga se resuelve numéricamente. A 25 °C, Kw = 10⁻¹⁴. Ecuación del modelo

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Despejamos la magnitud buscada

$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = \bar{-}$$

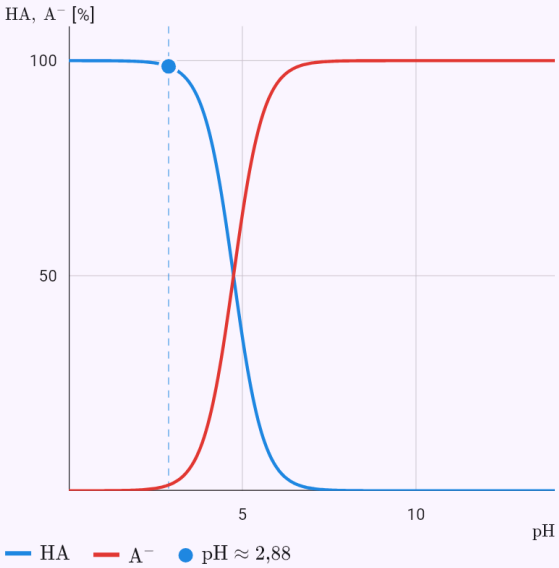
- Sustituimos

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Grado de disociación: $\alpha = \dfrac{x}{c} = \dfrac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- El grado de disociación es menor que el 5 %, así que también bastaría la simplificación c − x ≈ c: $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- El pH es el logaritmo negativo de la concentración de H⁺: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

pH del ácido fosfórico 0,1 M y la proporción de sus formas.

Enunciado: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

Resultado

$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$

Pasos

- Buscamos pH; datos

  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$

- El pH es el logaritmo decimal negativo de la concentración de iones hidrógeno (oxonio): pH = −log[H⁺]. Un ácido fuerte (HCl) se disocia por completo, así que [H⁺] = c; una base fuerte da [OH⁻] = c y pH = 14 − pOH. Un ácido débil HA ⇌ H⁺ + A⁻ se disocia solo en parte según su constante de disociación Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; de ella sale la ecuación cuadrática x² + Ka·x − Ka·c = 0. Una sal de un ácido débil y una base fuerte (acetato de sodio) reacciona con el agua como base con Kb = Kw/Ka, una sal de una base débil (NH_4Cl) como ácido. Para un ácido poliprótico (H_2SO_4, H_3PO_4) el balance de carga se resuelve numéricamente. A 25 °C, Kw = 10^{-14}. Ecuación del modelo

  $\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{H_2A^-} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{HA^{2-}} \rightleftharpoons 3\,\mathrm{H^+} + \mathrm{A^{3-}}$

- La disolución es eléctricamente neutra – balance de carga

  $[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$

- Concentraciones de las formas del ácido a partir de las constantes de disociación

  $[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1}\cdots K_{ai}\,h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$

- Resolvemos la ecuación numéricamente (bisección): $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$

- › El método: bisección, 14 iteraciones

- El pH es el logaritmo negativo de la concentración de H⁺: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$

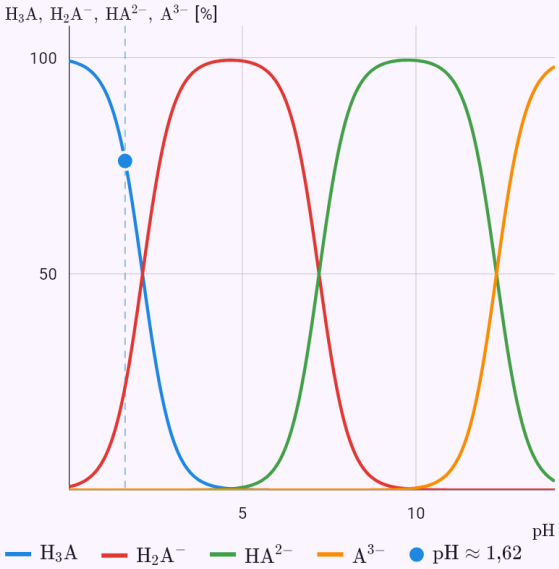
- La segunda constante es mucho menor que la primera, así que el pH lo fija sobre todo la primera etapa, como en un ácido monoprótico débil

  $x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$

- Proporción de las formas del ácido a este pH

  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Un amortiguador de acetato tras añadir 1 mmol de ácido fuerte.

Enunciado: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l];`

`V=100[ml]; n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Resultado

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Pasos

- Buscamos pH; datos
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Convertimos las unidades
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Constante a partir de pK:
  $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Una disolución amortiguadora es una mezcla de un ácido débil y su sal (CH_3COOH + CH_3COONa) o de una base débil y su sal (NH_3 + NH_4Cl). De la constante de disociación sale la ecuación de Henderson–Hasselbalch pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Un ácido fuerte añadido convierte el componente básico en el ácido (A^- + H^+ → HA), una base al revés: la razón de los componentes cambia poco y por eso el pH casi no cambia. Funciona mejor con una razón de 0,1 a 10, es decir pH = pKa ± 1.
  Ecuación del modelo
  $$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Cantidades de los componentes del amortiguador
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- La sustancia añadida reacciona con un componente del amortiguador
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \to \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,\mathrm{m}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \frac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Sustituimos: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log \frac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH antes de la adición y su cambio:
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Valoración del ácido acético con hidróxido de sodio – el punto de equivalencia.

Enunciado: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

`5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)`

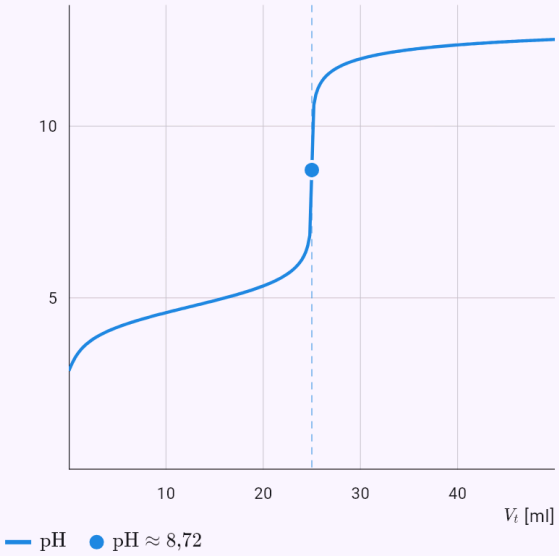
Resultado

$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$

Pasos

- Buscamos pH; datos
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- En una valoración se añade desde la bureta un valorante de concentración conocida hasta que reacciona todo el analito. El punto de equivalencia llega cuando la cantidad de valorante $c_t \cdot V_t$ iguala la del analito: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Antes de él el pH lo fija el analito sin reaccionar (con un ácido débil se forma una disolución amortiguadora), en él la reacción con el agua de la sal formada, después el exceso de valorante. La curva de valoración del gráfico se calcula exactamente a partir del balance de carga. Ecuación del modelo: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Punto de equivalencia – tanto valorante como analito
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Valorante añadido y volumen total:
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Punto de equivalencia – ha reaccionado todo el analito.
- En el punto de equivalencia solo queda la sal formada – su reacción con el agua
  $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH y pH (pH + pOH = 14)
  $\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Energía de activación a partir de una tabla de constantes de velocidad.

Enunciado: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

Resultado

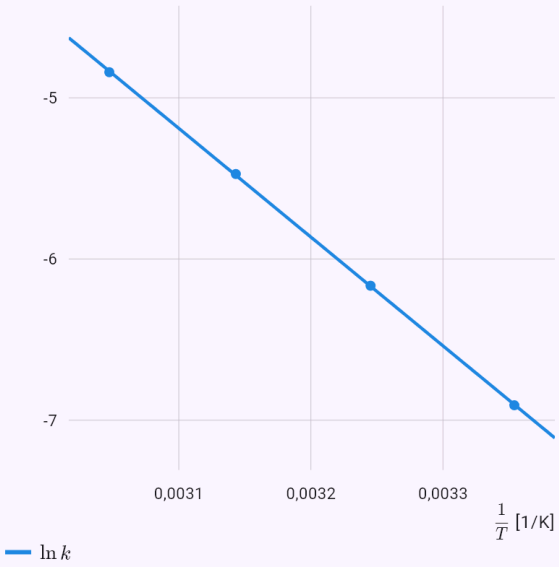
$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Pasos

- Buscamos E_a; datos
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Convertimos las unidades:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- La constante de velocidad de una reacción crece con la temperatura según la ecuación de Arrhenius k = A·e^(−Ea/RT), donde Ea es la energía de activación – la barrera energética que deben superar las moléculas al chocar – y A el factor preexponencial. De dos mediciones sale ln(k₂/k₁) = (Ea/R)(1/T₁ − 1/T₂). Con más mediciones Ea se obtiene de una recta de regresión: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) es una recta en 1/T (gráfico de Arrhenius) de pendiente −Ea/R. Ecuación del modelo:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Tomando logaritmos se obtiene una recta
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Valores para la recta de regresión
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Recta de regresión por mínimos cuadrados
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Despejamos la magnitud buscada: $E_a = -bR$
- Sustituimos:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$

- Factor preexponencial: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Concentración de una muestra a partir de una recta de calibrado.

Enunciado: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299`

`0.452 0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

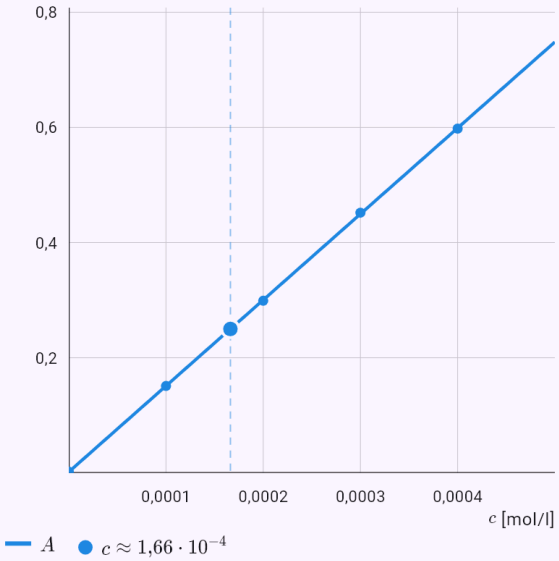
Resultado

$$c \approx 0{,}166\ \text{mmol/l}$$

Pasos

- Buscamos c; datos
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\ \text{mmol/l}, \quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Convertimos las unidades
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot 10^{-4};\ 3\cdot 10^{-4};\ 4\cdot 10^{-4}\right)\ \text{mol/l}$
- Una disolución absorbe luz en proporción a la concentración de la sustancia absorbente y al espesor de la capa: la absorbancia A = ε·l·c (ley de Lambert–Beer), donde ε es el coeficiente de absorción molar y l la longitud de la cubeta. Un espectrofotómetro mide la transmitancia T – la fracción de luz que pasa – y A = −log T. Una concentración desconocida se obtiene de ε conocido, comparando con un patrón de concentración conocida o de una recta de calibrado medida con varios patrones (mínimos cuadrados). La ley vale para disoluciones diluidas. Ecuación del modelo: $A = \varepsilon\, l\, c$
- Recta de calibrado por mínimos cuadrados
  $A = a + b\,c: \quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\text{l/m}$
- Despejamos la magnitud buscada: $c = \dfrac{A - a}{b}$
- Sustituimos: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot 10^{-4}\ \text{mol/l}$
- Convertimos las unidades:
  $c \approx 1{,}662\cdot 10^{-4}\ \text{mol/l} = 0{,}1662\ \text{mmol/l}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Cementación del acero: tiempo hasta un 0,8 % de carbono a 0,5 mm de profundidad.

Enunciado: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

`cx=0.8[pct]; x=0.5[mm]; process=carburizing)`

Resultado

$$t \approx 7{,}047\,\text{h}$$

Pasos

- Buscamos t; datos

  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$

- Convertimos las unidades

  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$

- Una sustancia se difunde desde una superficie con concentración fija c_s hacia un cuerpo con concentración inicial c_0; por ejemplo, carbono en acero durante la cementación. Rige la ecuación de difusión c_t = D·c_xx; para un cuerpo infinitamente grueso comparado con la profundidad de penetración la resuelve la transformada de Laplace en el tiempo: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))), con la función de error complementaria. De ella salen la concentración a una profundidad, la profundidad de una concentración dada o el tiempo necesario. Ecuación del modelo

  $$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$$

- Solución por la transformada de Laplace (cuerpo semiinfinito): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$

- Función de error complementaria inversa

  $\operatorname{erfc} z = \dfrac{c - c_0}{c_s - c_0} = \dfrac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$

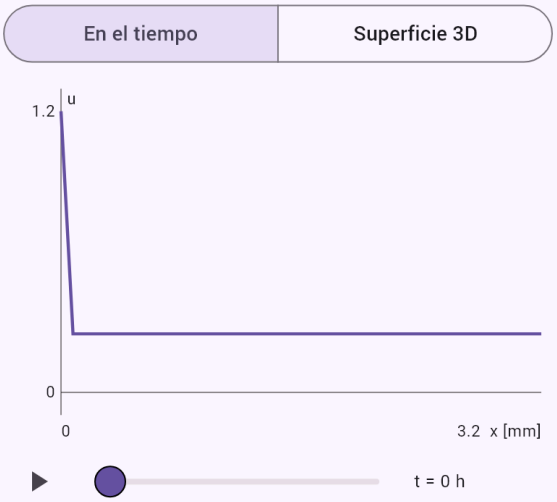
- Despejamos la magnitud buscada: $t = \dfrac{x^2}{4Dz^2}$

- Sustituimos

  $$t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\text{s}$$

- La profundidad típica de penetración es √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$. El doble de profundidad requiere cuatro veces más tiempo.
- Convertimos las unidades: $t \approx 25\,370\,\text{s} = 7{,}047\,\text{h}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Concentración de carbono a 0,5 mm de profundidad tras 7 horas.

Enunciado: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

```
x=0.5[mm]; t=7[h]; process=carburizing)
```

Resultado

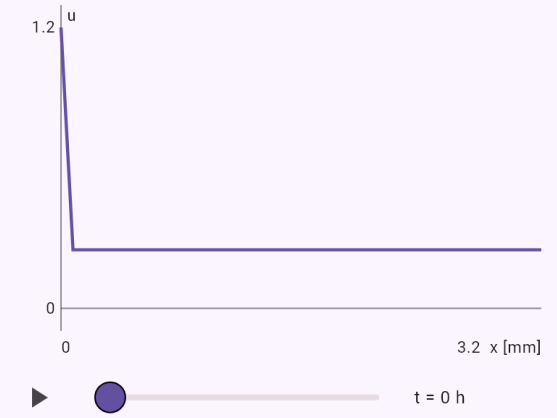
$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

Pasos

- Buscamos c; datos
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Convertimos las unidades
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Una sustancia se difunde desde una superficie con concentración fija c_s hacia un cuerpo con concentración inicial c_0; por ejemplo, carbono en acero durante la cementación. Rige la ecuación de difusión c_t = D·c_xx; para un cuerpo infinitamente grueso comparado con la profundidad de penetración la resuelve la transformada de Laplace en el tiempo: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))), con la función de error complementaria. De ella salen la concentración a una profundidad, la profundidad de una concentración dada o el tiempo necesario. Ecuación del modelo
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Solución por la transformada de Laplace (cuerpo semiinfinito): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argumento de la función de error
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \operatorname{erfc}$
- Sustituimos:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$
- La profundidad típica de penetración es √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. El doble de profundidad requiere cuatro veces más tiempo.
- Convertimos las unidades: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



t = 0 h

La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Limitaciones conocidas

- El pH y las valoraciones suponen 25 °C (Kw = 10^{-14}) y disoluciones diluidas – no se calculan coeficientes de actividad.
- Solo valoraciones de un ácido o una base monopróticos con un valorante fuerte; los ácidos polipróticos por ahora solo como pH de una disolución.
- Una ecuación química aún no se reconoce en una foto – escríbala en la entrada manual o en el formulario.

48. Electrotecnia

Los cálculos de electrotecnia están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campo Electrotecnia: circuito RLC en serie y en paralelo con corriente alterna, filtros RC y RL, circuito resonante, divisor de tensión, puente de Wheatstone y corrección del factor de potencia. En el formulario se elige la conexión y la magnitud buscada y se rellenan los valores con unidades; el icono «?» explica de dónde salen las fórmulas. Las tensiones y corrientes son valores eficaces y los números complejos se escriben con j, como en electrotecnia.

Para cada circuito la app dibuja su esquema con los valores de los componentes y, en alterna, la respuesta en frecuencia en un eje logarítmico: la impedancia y la fase; en los filtros, la ganancia en decibelios (diagrama de Bode). Los pasos muestran las reactancias, la impedancia en forma binómica y polar (50∠53,13° Ω), el desfase, las corrientes, las tensiones en los componentes y la potencia, y explican por qué las tensiones de los componentes se suman como fasores.

Un circuito serie-paralelo se puede escribir como expresión, p. ej. R1 + (L1 || (R2 + C1)) con los valores R1=100 L1=10m C1=1u (prefijos m, u, n, k, M). Los pasos simplifican el circuito grupo a grupo y después calculan la tensión y la corriente de cada componente. Cualquier circuito (también con puentes y varias fuentes) se introduce como netlist, igual que en SPICE: un componente por línea con sus nodos; el nodo 0 es tierra. Los pasos plantean la ley de corrientes de Kirchhoff en los nodos y la matriz del sistema, y lo resuelven por eliminación de Gauss. Sin frecuencia se calcula en corriente continua.

Ejemplos

Circuito RLC en serie: potencia activa y reactiva, factor de potencia.

Enunciado: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF];`

```
f=50[Hz]; parts=rlc)
```

Resultado

$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$

$Q \approx 160\,\mathrm{var}$

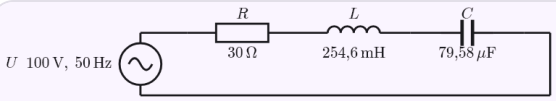
$S \approx 200\,\mathrm{VA}$

$\cos\varphi \approx 0{,}6$

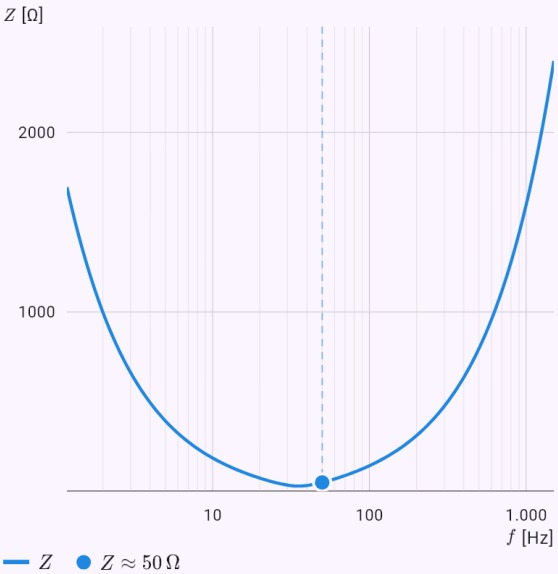
Pasos

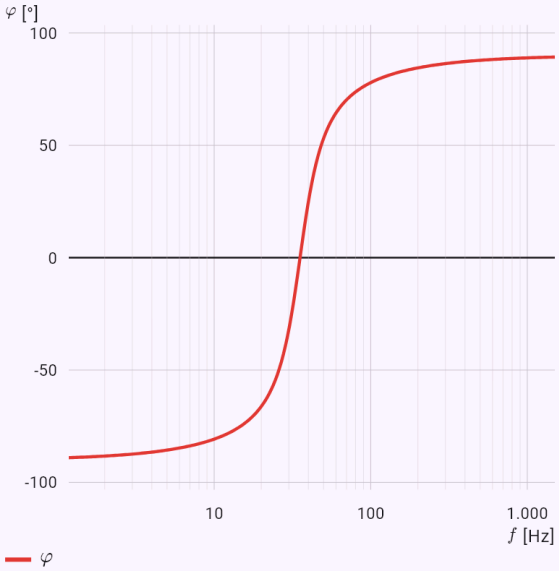
- Buscamos P; datos
  $U = 100\,\mathrm{V}, \quad R = 30\,\Omega, \quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH}, \quad C = 79{,}5$
- Convertimos las unidades
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H}, \quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- En un circuito de corriente alterna, la bobina y el condensador se oponen a la corriente con una resistencia que depende de la frecuencia, la reactancia: la inductiva X_L = ωL crece con la frecuencia y la capacitiva X_C = 1/(ωC) disminuye (ω = 2πf). La tensión de la bobina adelanta 90° a la corriente y la del condensador se retrasa 90°, por eso no se suman aritméticamente sino como fasores, números complejos con la unidad imaginaria j: la impedancia Z = R + j(X_L − X_C), su módulo Z = √(R² + (X_L − X_C)²) y el desfase φ = arctan((X_L − X_C)/R). La corriente I = U/Z y la potencia activa P = UI·cos φ. Las tensiones y corrientes son valores eficaces. Ecuación del modelo:
  $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Reactancia inductiva de la bobina:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- Reactancia capacitiva del condensador
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Módulo de la impedancia: la reactancia y la resistencia son fasores perpendiculares
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- La impedancia como número complejo (forma binómica y polar)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Desfase de la corriente respecto a la tensión:
  $\varphi = \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- El circuito es inductivo: la corriente se retrasa respecto a la tensión.
- Frecuencia de resonancia: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- La corriente por la ley de Ohm: $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Potencia activa, reactiva y aparente
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Factor de potencia: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Esquema del circuito



Respuesta en frecuencia





El eje horizontal es logarítmico: cada división es diez veces la frecuencia. Los puntos son la frecuencia dada y puntos notables.

Circuito RLC en paralelo: corrientes de las ramas y corriente total.

Enunciado: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

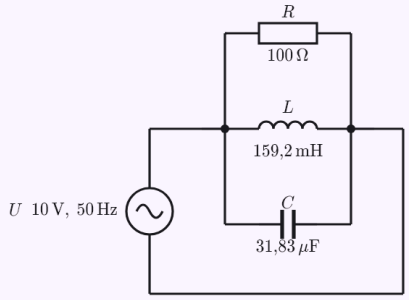
Resultado

$$I_R \approx 100\,\text{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\text{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\text{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\text{mA}$$

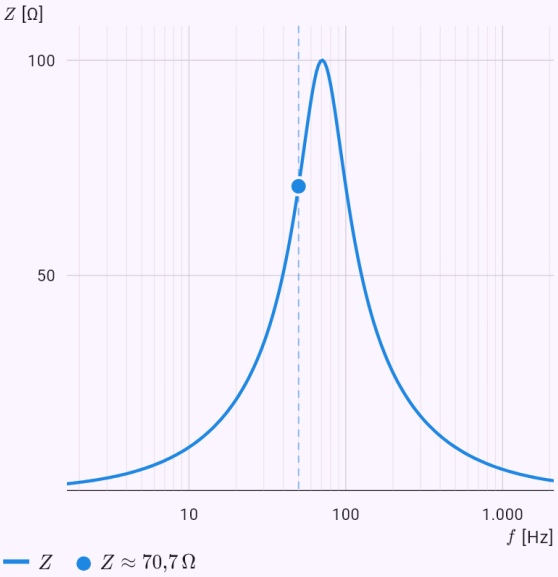
Pasos

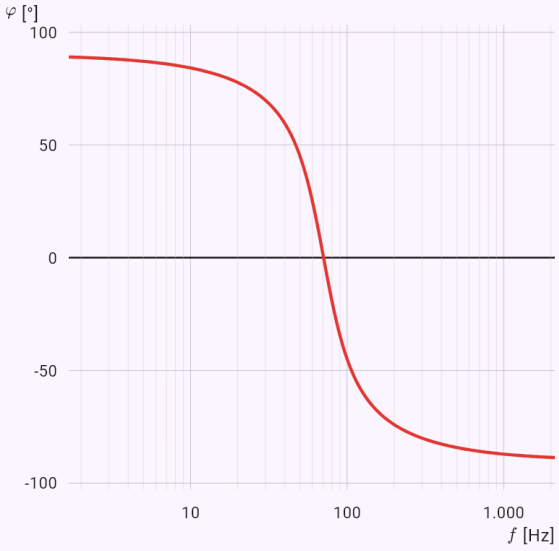
- Buscamos I; datos
  $U = 10\,\text{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\text{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Convertimos las unidades
  $L = 159{,}2\,\text{mH} = 0{,}1592\,\text{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\text{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- En un circuito en paralelo todas las ramas tienen la misma tensión y las corrientes de las ramas se suman como fasores. Por eso, en lugar de las impedancias, se suman sus inversas, las admitancias: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). La corriente de la resistencia está en fase con la tensión, la de la bobina se retrasa 90° y la del condensador adelanta 90°. La corriente total I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) puede ser menor que las de las ramas: en resonancia las corrientes de la bobina y del condensador se anulan. Ecuación del modelo
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \text{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\text{rad/s}$
- Reactancia inductiva de la bobina:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Reactancia capacitiva del condensador
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admitancia: las inversas de las impedancias de las ramas se suman como fasores
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\text{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impedancia del circuito: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- La impedancia como número complejo (forma binómica y polar)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \text{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Desfase de la corriente respecto a la tensión
  $$\varphi = \arctan\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- El circuito es inductivo: la corriente se retrasa respecto a la tensión.
- Frecuencia de resonancia: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\text{Hz}$
- Corrientes de las ramas: todas tienen la misma tensión
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\text{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\text{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\text{A}$$
- Corriente total: la suma fasorial de las corrientes de las ramas: $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\text{A}$
- Las corrientes de las ramas se suman como fasores, no aritméticamente: las corrientes de la bobina y del condensador están en oposición de fase.

Esquema del circuito



Respuesta en frecuencia





El eje horizontal es logarítmico: cada división es diez veces la frecuencia. Los puntos son la frecuencia dada y puntos notables.

Paso bajo RC: ganancia en decibelios y diagrama de Bode.

Enunciado: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V];`

kind=rcLow)

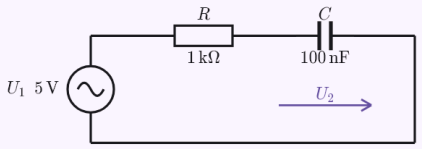
Resultado

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\text{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\text{V}$$

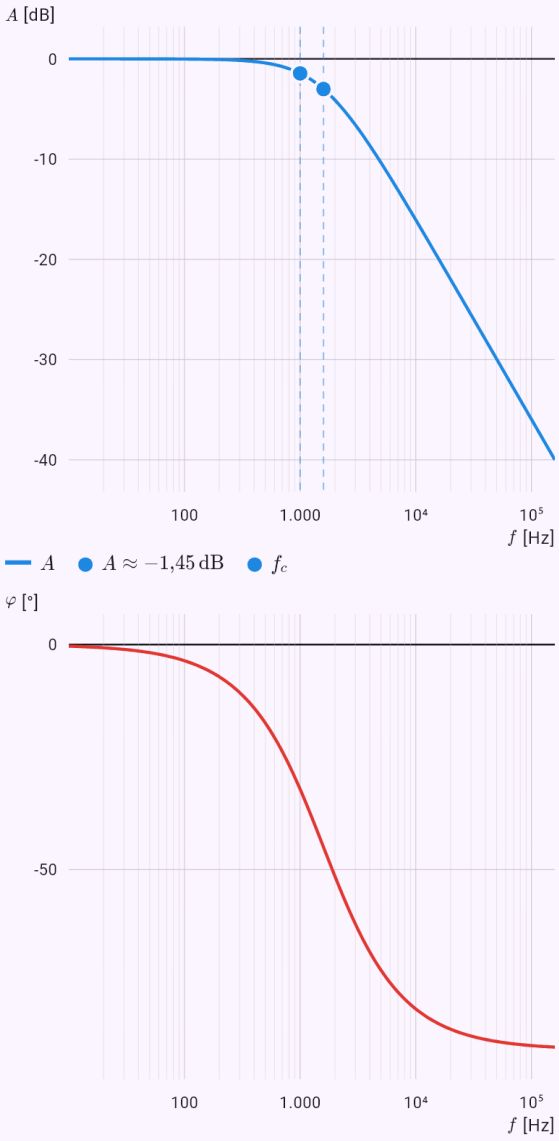
Pasos

- Datos
  $R = 1\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad f = 1\,\text{kHz}, \quad U_1 = 5\,\text{V}$
- Convertimos las unidades
  $R = 1\,\text{k}\Omega = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}, \quad f = 1$
- Un filtro de primer orden es un divisor de tensión formado por una resistencia y un condensador (o una bobina). El paso bajo (RC con la salida en el condensador) deja pasar las frecuencias bajas y atenúa las altas; el paso alto, al revés. La frecuencia de corte f_c = 1/(2πRC), en RL f_c = R/(2πL): en ella la tensión de salida cae a 1/√2 ≈ 70,7 % (3 dB) y el desfase es de 45°. La función de transferencia H = U_2/U_1 es un número complejo; su módulo en decibelios A = 20·log|H| y su fase forman el diagrama de Bode: por encima del corte un paso bajo cae 20 dB por década. Ecuación del modelo
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \text{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Paso bajo: las frecuencias bajas pasan y las altas se atenúan.
- Frecuencia de corte:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\text{Hz}$$
- A la frecuencia de corte la ganancia es 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) y el desfase 45°.
- La frecuencia respecto a la de corte:
  $$\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$$
- Módulo de la ganancia: $|\hat{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$
- Ganancia en decibelios: $A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\text{dB}$
- Desfase de la salida respecto a la entrada:
  $$\varphi = -\arctan \frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Tensión de salida: $U_2 = |\hat{H}|\, U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\text{V}$

Esquema del circuito



Respuesta en frecuencia



El eje horizontal es logarítmico: cada división es diez veces la frecuencia. Los puntos son la frecuencia dada y puntos notables.

Circuito resonante en serie: factor de calidad y ancho de banda.

Enunciado: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

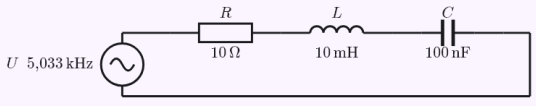
Resultado

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\text{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\text{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\text{Hz}$$

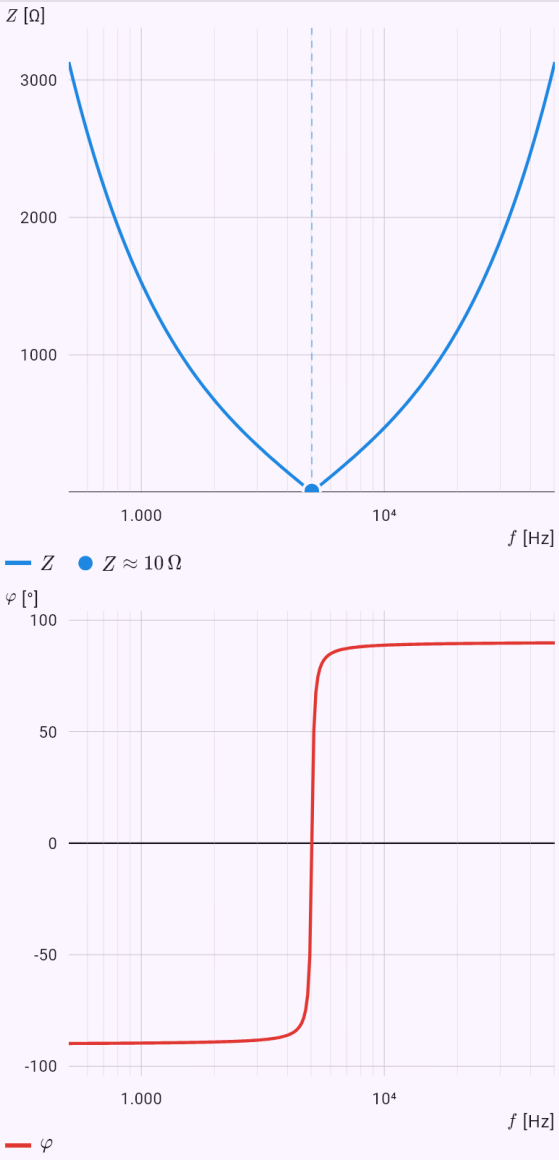
Pasos

- Datos: $L = 10\,\text{mH}, \quad C = 100\,\text{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Convertimos las unidades:
  $L = 10\,\text{mH} = 0{,}01\,\text{H}, \quad C = 100\,\text{nF} = 10^{-7}\,\text{F}$
- A la frecuencia de resonancia $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ las reactancias de la bobina y del condensador son iguales y se anulan. Un circuito en serie tiene entonces la impedancia mínima (solo R) y la corriente máxima; uno en paralelo, la impedancia máxima. La agudeza de la resonancia la da el factor de calidad Q (en serie $Q = (1/R)\sqrt{(L/C)}$) y el ancho de banda $B = f_0/Q$ entre las frecuencias en que la corriente cae a $1/\sqrt{2}$ del máximo. Sintonía: la capacidad para una frecuencia dada $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Ecuación del modelo:
  $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
- Sustituimos: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\text{Hz}$
- En resonancia las reactancias de la bobina y del condensador se anulan: el circuito en serie tiene la impedancia mínima y la corriente máxima.
- Factor de calidad
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Ancho de banda: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\text{Hz}$
- Límites de la banda (caída a $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\text{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Esquema del circuito



Respuesta en frecuencia



El eje horizontal es logarítmico: cada división es diez veces la frecuencia. Los puntos son la frecuencia dada y puntos notables.

Divisor de tensión con carga.

Enunciado: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm];`

`load=load)`

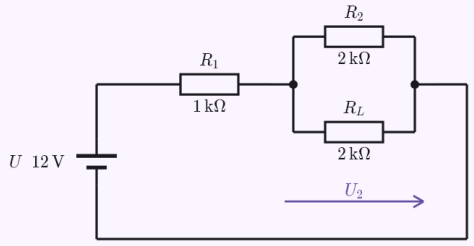
Resultado

$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$

Pasos

- Buscamos U_2; datos
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Convertimos las unidades
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Dos resistencias en serie dividen la tensión en la proporción de sus resistencias: por ambas pasa la misma corriente I = U/(R₁ + R₂), así que U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Una carga R_L queda en paralelo con R₂ y reduce la resistencia inferior a R₂R_L/(R₂ + R_L): la tensión de salida del divisor con carga es menor que en vacío. Ecuación del modelo:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- La carga está en paralelo con R_2
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Sustituimos: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- En vacío sería $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$: la carga reduce la tensión de salida.

Esquema del circuito



Equilibrado de un puente de Wheatstone.

Enunciado: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

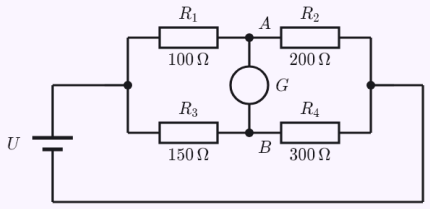
Resultado

$R_4 \approx 300\,\Omega$

Pasos

- Buscamos R_4; datos:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- El puente de Wheatstone son dos divisores de tensión en paralelo con un medidor entre sus puntos medios (A y B). El puente está equilibrado (no pasa corriente por el medidor) cuando ambos divisores dividen la tensión en la misma proporción: R₁/R₂ = R₃/R₄. Así se mide con precisión una resistencia desconocida. Un puente desequilibrado da la tensión U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)); así funcionan, por ejemplo, las galgas extensométricas. Ecuación del modelo: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- El puente está equilibrado: A y B tienen la misma tensión y por el medidor no pasa corriente.
- Despejamos la magnitud buscada: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Sustituimos: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Esquema del circuito



El condensador para corregir el factor de potencia de 0,7 a 0,95.

Enunciado: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

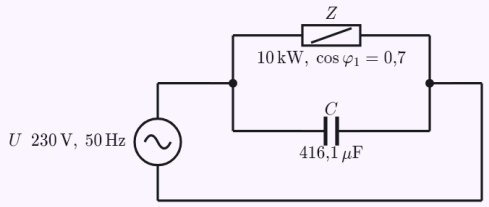
Resultado

$$C \approx 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$$

Pasos

- Buscamos C; datos
  $P = 10\,\mathrm{kW}, \quad U = 230\,\mathrm{V}, \quad f = 50\,\mathrm{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Convertimos las unidades: $P = 10\,\mathrm{kW} = 10\,000\,\mathrm{W}$
- Las cargas con bobinas (motores, transformadores) consumen, además de la potencia activa P, una potencia reactiva Q = P·tan φ que carga la línea innecesariamente con más corriente. Un condensador en paralelo aporta potencia reactiva de signo contrario Q_C = Q₁ − Q₂ y eleva el factor de potencia de cos φ₁ a cos φ₂. La capacidad necesaria es C = Q_C/(ωU²), con ω = 2πf. La potencia activa no cambia y la corriente de la red disminuye. Ecuación del modelo:
  $Q_C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2), \quad C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Desfases antes y después de la corrección
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Potencias reactivas: el condensador aporta la diferencia
  $Q_1 = P\tan\varphi_1 \approx 10\,200\,\mathrm{var}$
  $Q_2 = P\tan\varphi_2 \approx 3287\,\mathrm{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\mathrm{var}$
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Despejamos la magnitud buscada: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Sustituimos: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$
- Corriente de la red antes y después de la corrección
  $I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\mathrm{A}$
- Convertimos las unidades:
  $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} = 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$

Esquema del circuito



Circuito como expresión: simplificación y corriente de cada componente.

Enunciado: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Resultado

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\ \Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\ \text{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\ \text{W}$$

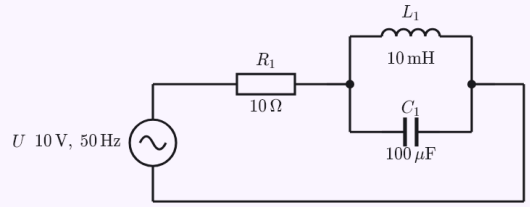
Pasos

- La conexión (+ en serie, ∥ en paralelo): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; los valores dados
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\text{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 10\,\text{V}$
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\text{rad/s}$
- Las impedancias de bobinas y condensadores como números complejos (j es la unidad imaginaria)
  $\hat{Z}_{L_1} = \text{j}\omega L_1 = \text{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \text{j}\,3{,}142\,\Omega$
  $\hat{Z}_{C_1} = \dfrac{1}{\text{j}\omega C_1} = -\text{j}\dfrac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\text{j}\,31{,}83\,\Omega$
- Un grupo en paralelo: se suman las inversas de las impedancias
  $\hat{Z}_a = \dfrac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \text{j}\,3{,}486\,\Omega$
- Un grupo en serie: las impedancias se suman:
  $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Impedancia total del circuito:
  $\hat{Z} = 10 + \text{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\ \Omega$
- La corriente de la fuente por la ley de Ohm (la tensión de la fuente tiene fase 0°)
  $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \dfrac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\ \text{A}$
- Por todas las partes del grupo $\hat{Z}$ pasa la misma corriente; sus tensiones
  $\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\ \text{V}$
  $\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\ \text{V}$
- Todas las ramas del grupo $\hat{Z}_a$ tienen la misma tensión; las corrientes de las ramas
  $\hat{I}_{L_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\ \text{A}$
  $\hat{I}_{C_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\ \text{A}$
- Los componentes: impedancia, tensión y corriente (módulo ∠ fase)

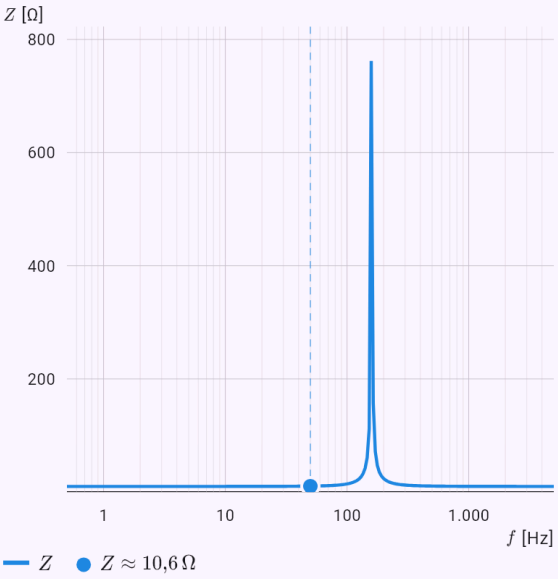
	$\hat{Z}\ [\Omega]$	$\hat{U}\ [\text{V}]$	$\hat{I}\ [\text{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\text{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\text{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

- La potencia que entrega la fuente
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \text{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\text{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

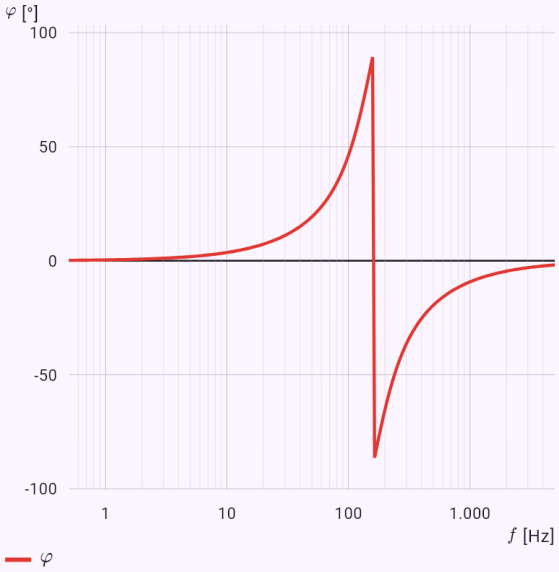
Esquema del circuito



Respuesta en frecuencia



Z $Z \approx 10{,}6\,\Omega$



φ

El eje horizontal es logarítmico: cada división es diez veces la frecuencia. Los puntos son la frecuencia dada y puntos notables.

Puente desequilibrado como netlist: análisis nodal.

Enunciado: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Resultado

$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$

Pasos

- Los componentes, los nodos a los que se conectan y sus valores

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Las incógnitas son las tensiones de los nodos respecto a tierra y las corrientes de las fuentes de tensión: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- Ley de corrientes de Kirchhoff: la suma de las corrientes que salen de cada nodo es cero

$$1\text{: } I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{: } \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{: } \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Las fuentes de tensión fijan la tensión entre sus nodos: $U_1 = 12$
- El sistema de ecuaciones lineales en forma matricial para las incógnitas $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- La eliminación de Gauss da las tensiones de los nodos
  $U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$
  $U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$
  $U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$
- Tensión y corriente de cada componente (del nodo + al nodo −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Limitaciones conocidas

- Los circuitos son lineales y en régimen permanente; los transitorios de RC, RL y RLC están en las aplicaciones de física. Aún no hay diodos, transistores ni amplificadores operacionales.
- El esquema se dibuja en los formularios y en el circuito escrito como expresión; la netlist tiene una tabla de componentes y nodos. No se reconoce un circuito a partir de la foto de su esquema.
- Una netlist se resuelve en continua o a una sola frecuencia; aún no hay fuentes de distintas frecuencias ni superposición.

49. Biología y medicina

Los cálculos de biología, laboratorio y medicina están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campos Biología y Medicina: cinética enzimática de Michaelis y Menten (también con inhibidor), equilibrio de Hardy–Weinberg, diluciones y recuento de colonias, potencial de membrana de Nernst y Goldman y dosificación de fármacos. El formulario se rellena como en las demás aplicaciones; el icono «?» explica de dónde salen las fórmulas.

A partir de velocidades medidas de una reacción enzimática determina K_m y V_max dos veces: por el método escolar de la recta de Lineweaver–Burk y, con más precisión, por regresión no lineal; el gráfico muestra los puntos y ambas curvas. En el equilibrio de Hardy–Weinberg calcula, a partir de los recuentos de genotipos, las frecuencias alélicas, los recuentos esperados y una prueba χ^2; en una enfermedad recesiva, la proporción de portadores a partir de su incidencia.

Diluciones: el volumen de solución madre según $c_1V_1 = c_2V_2$, la dilución seriada y las UFC/ml a partir de un recuento de colonias. Dosificación: dosis por peso o por superficie corporal (Mosteller, Du Bois), ritmo de infusión en ml/h y en gotas por minuto, y aclaramiento de creatinina de Cockcroft y Gault. Los cálculos de dosis son orientativos y no sustituyen el criterio médico.

Ejemplos

K_m y V_max a partir de velocidades medidas: Lineweaver–Burk y regresión no lineal.

Enunciado: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

81[umol_l_min]; input=table)

Resultado

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

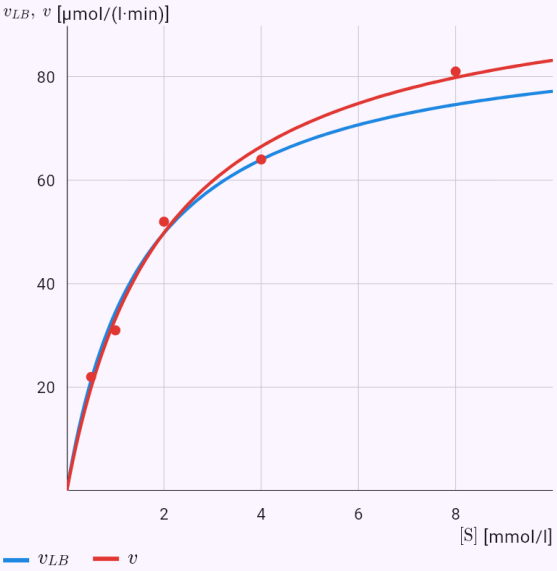
Pasos

- Datos
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Una enzima E se une al sustrato S y lo transforma en producto. La velocidad v crece con la concentración de sustrato, pero se satura: como máximo alcanza la velocidad límite V_max, cuando todas las moléculas de enzima están ocupadas. La constante de Michaelis K_m es la concentración de sustrato a la que la velocidad es la mitad: v = V_max[S]/(K_m + [S]). A partir de velocidades medidas, las constantes se obtienen de la recta de Lineweaver–Burk (1/v frente a 1/[S], ordenada 1/V_max, pendiente K_m/V_max) o, con más precisión, por regresión no lineal. Un inhibidor competitivo aumenta la K_m aparente, uno no competitivo reduce V_max y uno acompetitivo reduce ambas, siempre por el factor α = 1 + [I]/K_i. Ecuación del modelo:
  $$v = \frac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$$
- Inversos para el gráfico de Lineweaver–Burk
  $\frac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \frac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Recta de regresión de 1/v frente a 1/[S]
  $\frac{1}{v} = \frac{1}{V_{max}} + \frac{K_m}{V_{max}}\cdot\frac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Constantes a partir de la recta (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \frac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \frac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Regresión no lineal: mínimos cuadrados sobre la propia curva

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i}\right)^2: \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$$

- El gráfico de Lineweaver–Burk amplifica los errores a concentraciones bajas (1/v grande); por eso el resultado es el de la regresión no lineal y la recta es el método escolar y la estimación inicial.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Velocidad de reacción con un inhibidor competitivo.

Enunciado: model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l];

`S=2[mmol_l]; I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

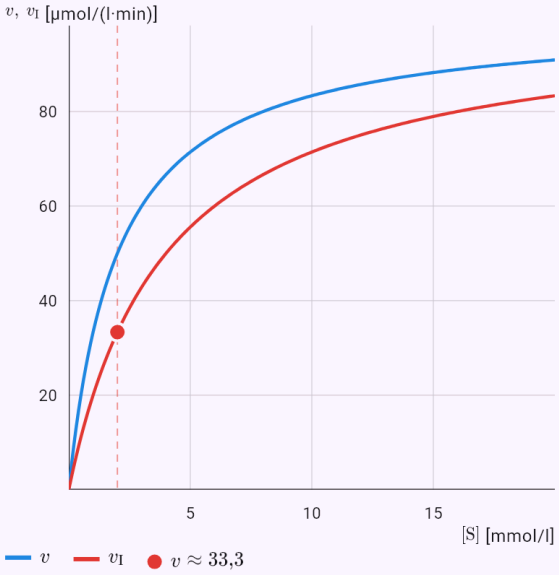
Resultado

$$v \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$

Pasos

- Buscamos v; datos $V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = 2\,\text{mmol/l}, \quad [\text{S}] =$
- Una enzima E se une al sustrato S y lo transforma en producto. La velocidad v crece con la concentración de sustrato, pero se satura: como máximo alcanza la velocidad límite V_max, cuando todas las moléculas de enzima están ocupadas. La constante de Michaelis K_m es la concentración de sustrato a la que la velocidad es la mitad: v = V_max[S]/(K_m + [S]). A partir de velocidades medidas, las constantes se obtienen de la recta de Lineweaver–Burk (1/v frente a 1/[S], ordenada 1/V_max, pendiente K_m/V_max) o, con más precisión, por regresión no lineal. Un inhibidor competitivo aumenta la K_m aparente, uno no competitivo reduce V_max y uno acompetitivo reduce ambas, siempre por el factor α = 1 + [I]/K_i. Ecuación del modelo: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Factor de inhibición: $\alpha = 1 + \dfrac{[\text{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Constantes aparentes con el inhibidor $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\text{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/$
- Un inhibidor competitivo compite con el sustrato por el sitio activo: aumenta la K_m aparente y V_max no cambia (mucho sustrato lo desplaza).
- Sustituimos $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$
- Saturación de la enzima: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Grupos sanguíneos MN: frecuencias alélicas y prueba χ² del equilibrio.

Enunciado: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one];`

`aa=1303[one]; input=counts)`

Resultado

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Pasos

- Datos: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- En una población con apareamiento al azar y sin selección, mutación ni migración, las frecuencias alélicas se mantienen y los genotipos están en la proporción p² : 2pq : q², donde p y q (p + q = 1) son las frecuencias de los alelos A y a. A partir de los recuentos de genotipos se calcula p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) y los recuentos esperados; una prueba χ² (1 grado de libertad) indica si la población se aparta del equilibrio. Para un carácter recesivo solo se conoce la proporción de homocigotos q², de donde q = √q² y la proporción de portadores 2pq. Ecuación del modelo:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frecuencias alélicas: cada individuo lleva dos
  $p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$
- Recuentos esperados en equilibrio
  $E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n$
- Prueba de bondad de ajuste χ²
  $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05: la desviación del equilibrio de Hardy–Weinberg no es significativa.

Proporción de portadores de una enfermedad recesiva con incidencia 1 : 2500.

Enunciado: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Resultado

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

Pasos

- Datos: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Convertimos las unidades: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- En una población con apareamiento al azar y sin selección, mutación ni migración, las frecuencias alélicas se mantienen y los genotipos están en la proporción p² : 2pq : q², donde p y q (p + q = 1) son las frecuencias de los alelos A y a. A partir de los recuentos de genotipos se calcula p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) y los recuentos esperados; una prueba χ² (1 grado de libertad) indica si la población se aparta del equilibrio. Para un carácter recesivo solo se conoce la proporción de homocigotos q², de donde q = √q² y la proporción de portadores 2pq. Ecuación del modelo:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frecuencia del alelo recesivo a partir de la proporción de homocigotos
  $q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Frecuencias genotípicas:
  $p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Los portadores (heterocigotos) son $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Cuánta solución madre para 50 ml diluidos diez veces.

Enunciado: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Resultado

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Pasos

- Buscamos V_1; datos:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Al diluir no cambia la cantidad (masa) de soluto: $c_1V_1 = c_2V_2$. De ahí el volumen de solución madre $V_1 = c_2V_2/c_1$, que se completa con disolvente hasta V_2. En una dilución seriada cada paso diluye por el mismo factor d (por ejemplo 1 : 10); tras n pasos la concentración es c_0/d^n. En microbiología, a partir del número N de colonias en una placa en la que se sembraron V_p ml de la dilución D, el número de células viables de la muestra original es UFC/ml = N·D/V_p (fiable para 30 a 300 colonias). Ecuación del modelo: $c_1V_1 = c_2V_2$
- Despejamos la magnitud buscada: $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- Sustituimos: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Volumen de disolvente y dilución:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Células de una muestra a partir de las colonias de una placa.

Enunciado: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Resultado

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Pasos

- Buscamos CFU; datos:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Al diluir no cambia la cantidad (masa) de soluto: $c_1V_1 = c_2V_2$. De ahí el volumen de solución madre $V_1 = c_2V_2/c_1$, que se completa con disolvente hasta V_2. En una dilución seriada cada paso diluye por el mismo factor d (por ejemplo 1 : 10); tras n pasos la concentración es c_0/d^n. En microbiología, a partir del número N de colonias en una placa en la que se sembraron V_p ml de la dilución D, el número de células viables de la muestra original es UFC/ml = N·D/V_p (fiable para 30 a 300 colonias). Ecuación del modelo: $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Sustituimos
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Potencial de membrana en reposo de una neurona (Goldman).

Enunciado: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Resultado

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Pasos

- Buscamos V_m; datos
  $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Convertimos las unidades: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Un ion para el que la membrana es permeable se reparte de modo que la fuerza eléctrica equilibra la difusión a favor de su gradiente. La tensión de equilibrio la da la ecuación de Nernst E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i), con las concentraciones exterior e interior c_o y c_i, la carga z, la constante de los gases R y la de Faraday F (a 37 °C, RT/F ≈ 26,7 mV). El potencial de reposo, al que contribuyen varios iones, lo describe la ecuación de Goldman: las concentraciones se ponderan con las permeabilidades relativas P_K, P_Na, P_Cl (para el anión Cl^- se intercambian interior y exterior). Ecuación del modelo
  $V_m = \dfrac{RT}{F} \ln \dfrac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$
- La constante RT/F a esta temperatura:
  $\dfrac{RT}{F} = \dfrac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Concentraciones ponderadas fuera (o) y dentro (i)
  $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Sustituimos: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln \dfrac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- El potencial de reposo está cerca del potencial de equilibrio del ion más permeable, en reposo el del potasio.

Dosis de un citostático según la superficie corporal.

Enunciado: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Resultado

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Pasos

- Buscamos D; datos:
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Cálculo orientativo: no sustituye el criterio médico, el prospecto ni los protocolos del centro.
- Dosis según el peso D = d·m (mg/kg × kg); con la concentración de una solución se obtiene el volumen V = D/c. En citostáticos y en niños la dosis se calcula por superficie corporal: fórmula de Mosteller S = √(talla·peso/3600) (cm, kg, m²) y, para comparar, la de Du Bois. El ritmo de una infusión en ml/h es el volumen dividido por el tiempo; en gotas por minuto, además, por el factor de goteo del equipo (normalmente 20 gotas/ml). El aclaramiento de creatinina de Cockcroft y Gault estima la función renal: Cl = (140 − edad)·peso/(72·S_cr) con la creatinina en mg/dl (µmol/l entre 88,4), en mujeres por 0,85. Los resultados son orientativos: no sustituyen el criterio médico ni el prospecto. Ecuación del modelo: $S = \sqrt{\dfrac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Superficie corporal (Mosteller): $S = \sqrt{\dfrac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Para comparar, Du Bois:
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Sustituimos: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Aclaramiento de creatinina de una mujer (Cockcroft–Gault).

Enunciado: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Resultado

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Pasos

- Buscamos Cl_{cr}; datos
  $a = 60\,\text{años}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Cálculo orientativo: no sustituye el criterio médico, el prospecto ni los protocolos del centro.
- Dosis según el peso D = d·m (mg/kg × kg); con la concentración de una solución se obtiene el volumen V = D/c. En citostáticos y en niños la dosis se calcula por superficie corporal: fórmula de Mosteller S = √(talla·peso/3600) (cm, kg, m²) y, para comparar, la de Du Bois. El ritmo de una infusión en ml/h es el volumen dividido por el tiempo; en gotas por minuto, además, por el factor de goteo del equipo (normalmente 20 gotas/ml). El aclaramiento de creatinina de Cockcroft y Gault estima la función renal: Cl = (140 − edad)·peso/(72·S_cr) con la creatinina en mg/dl (µmol/l entre 88,4), en mujeres por 0,85. Los resultados son orientativos: no sustituyen el criterio médico ni el prospecto. Ecuación del modelo: $Cl_{cr} = \dfrac{(140-a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Creatinina en mg/dl (µmol/l entre 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Sustituimos
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140-60)\cdot 72}{72\cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Limitaciones conocidas

- La cinética enzimática solo para un sustrato en estado estacionario (Michaelis–Menten); aún no hay enzimas alostéricas (ecuación de Hill).
- Hardy–Weinberg para un gen con dos alelos; aún no hay más alelos ni genes ligados al X.
- La dosificación es orientativa: no tiene en cuenta interacciones, grupos de edad ni ajustes por función orgánica salvo el aclaramiento de creatinina.

50. Economía, finanzas y seguros

Los cálculos financieros y económicos están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campo Economía: interés por días (30E/360, ACT/360, ACT/365), una letra de cambio y su descuento, una renta de lo ahorrado (temporal, diferida, perpetua), interés mixto, ahorro con depósito inicial y abono anual de intereses, un préstamo con amortización constante, intereses de un depósito (simple, compuesto, continuo, con impuesto e inflación), ahorro periódico, préstamo con cuadro de amortización y TAE, bono, inversión (VAN, TIR, plazo de recuperación), conversión de monedas, punto muerto, maximización del beneficio, equilibrio de mercado, modelo de Leontief y cadenas de Márkov, además de matemática actuarial: tablas de mortalidad, seguro de vida, rentas, provisiones y seguro de no vida con bonus-malus.

La inversión en préstamos P2P calcula el valor de la cartera (efectivo en la cuenta y capital pendiente) mes a mes: las aportaciones se invierten en cantidades enteras por préstamo, los préstamos se amortizan con cuotas iguales, la plataforma cobra una comisión de apertura y una parte de los intereses, las pérdidas son una tasa de impago anual; para comparar, una fórmula cerrada con reinversión continua. A la inversa halla la aportación mensual o el plazo para un importe objetivo.

Las cantidades pueden estar en cualquier moneda: se elige en el formulario (por defecto, la del país del teléfono) y el cálculo no depende de ella. La conversión de monedas usa los tipos diarios del Banco Nacional Checo (en checo o con el teléfono configurado en Chequia) o los tipos de referencia del Banco Central Europeo (en los demás idiomas) y convierte cualquier par a través de una moneda común, indicando la fuente y la fecha.

Los importes en una moneda se escriben según la costumbre del idioma de la aplicación y de la región de los ajustes del teléfono (2431,50 EUR y 12.431,50 EUR; en México 2,431.50), igual que la fecha de la tabla de tipos.

Los pasos muestran las fórmulas, la sustitución y los resultados intermedios: el tipo efectivo y el real, el cuadro de amortización, el valor actual de los flujos, el ingreso y el coste marginal como derivadas, los excedentes como integrales, la inversa de Leontief y la distribución estacionaria resolviendo un sistema. La matemática actuarial usa valores de conmutación; la provisión se muestra de forma prospectiva y retrospectiva.

Ejemplos

Depósito con capitalización mensual, impuesto e inflación.

Enunciado: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Resultado

$$K_n \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos:
  $K_0 = 100.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Convertimos las unidades:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Con interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial: K_n = K₀(1 + pn). Con interés compuesto se abonan y generan intereses: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), donde m es el número de abonos al año (anual, semestral, trimestral, mensual). La capitalización continua es el límite m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Un impuesto d sobre los intereses reduce el tipo a p(1 − d). La tasa anual equivalente compara las frecuencias. Descontar es lo contrario: cuánto depositar hoy. Con inflación π, el valor real es K_n/(1 + π)^n. El interés mixto (como los bancos abonan los intereses una vez al año) capitaliza los años enteros y aplica interés simple al resto del último: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f.
  Ecuación del modelo: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Abonos de intereses al año: $m = 12$
- Tipo después del impuesto:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Tasa anual efectiva: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Sustituimos
  $K_n = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Intereses en total: $K_n - K_0 \approx 52.844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Valor real (a precios de hoy):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113.730{,}47\,\mathrm{CZK}$
- Tipo de interés real: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- El interés supera la inflación: el valor real del dinero crece.

Ahorro mensual durante 15 años.

Enunciado: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Resultado

$$S \approx 438.907{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $a = 2000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Convertimos las unidades:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- En el ahorro periódico se deposita una cantidad a cada periodo (mes, año). Cada depósito genera intereses durante un tiempo distinto, así que lo ahorrado es la suma de una serie geométrica: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) con depósitos al inicio del periodo (prepagable), sin la primera q con depósitos al final (pospagable); q = 1 + p/m y N = mn es el número de depósitos. La ecuación también da el depósito necesario o el plazo. Un depósito inicial opcional K₀ gana intereses todo el tiempo − se suma K₀·q^N. Con abono anual de intereses, los depósitos mensuales ganan interés simple dentro del año − un año da A = a(12 + p·13/2) con depósitos al inicio del mes, a(12 + p·11/2) al final − y solo estas sumas anuales se capitalizan. Ecuación del modelo:
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Tipo después del impuesto:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Factor de capitalización por periodo:
  $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Sustituimos
  $S = 2000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438.907{,}24\,\mathrm{C}$
- Depositado en total e intereses
  $N \cdot a = 180 \cdot 2000 = 360.000\,\mathrm{CZK}, \quad S - Na \approx 78.90$

Hipoteca de 3 millones a 25 años: cuota, cuadro de amortización y TAE.

Enunciado: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Resultado

$$a \approx 17.537{,}70\,\mathrm{CZK}$$

$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Pasos

- Datos:
  $D = 3.000.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15.000$
- Convertimos las unidades: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un préstamo francés se devuelve con cuotas iguales a. Cada cuota paga primero los intereses sobre la deuda pendiente y el resto amortiza capital, por eso la parte de intereses baja con el tiempo. El valor actual de todas las cuotas es igual al préstamo, de donde a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. El cuadro de amortización muestra en cada cuota los intereses, la amortización y la deuda pendiente. La TAE incluye también las comisiones: es el tipo al que el valor actual de las cuotas iguala la cantidad realmente recibida. Con amortización constante la deuda baja cada período la misma cantidad M = D/N y la cuota a_k = M + U_k baja con los intereses – se pagan menos intereses que con la cuota francesa, pero las primeras cuotas son más altas. El cuadro muestra el primer año y la última cuota, o todo. Ecuación del modelo:
  $$a = D\,\frac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \frac{p}{m}, \quad N = mn$$
- Interés por periodo:
  $$i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$$
- Sustituimos
  $$a = 3.000.000 \cdot \frac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17.537{,}70$$
- Cuadro de amortización (U intereses, M amortización, D deuda pendiente)

k	a	U_k	M_k	L
1	17.537,70	12.500	5037,70	2.994.962,3
2	17.537,70	12.479,01	5058,69	2.989.903,6
3	17.537,70	12.457,93	5079,77	2.984.823,8
4	17.537,70	12.436,77	5100,94	2.979.722,9
5	17.537,70	12.415,51	5122,19	2.974.600,7
6	17.537,70	12.394,17	5143,53	2.969.457,1
7	17.537,70	12.372,74	5164,96	2.964.292,2
8	17.537,70	12.351,22	5186,48	2.959.105,7
9	17.537,70	12.329,61	5208,09	2.953.897,6
10	17.537,70	12.307,91	5229,79	2.948.667,8
11	17.537,70	12.286,12	5251,59	2.943.416,2
12	17.537,70	12.264,23	5273,47	2.938.142,7
⋮	⋮	⋮	⋮	
300	17.537,70	72,77	17.464,93	

- Pagado en total y de ello intereses
  $$\sum a \approx 5.261.310{,}37\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2.261.310{,}37\,\mathrm{C}$$
- TAE: tasa anual equivalente con comisiones
  $$D - F = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+\mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$
- › El método: bisección, 14 iteraciones

Ahorrar 1 000 al mes con depósito inicial e intereses abonados anualmente.

Enunciado: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Resultado

$$S \approx 85.206{,}62\,\mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $a = 1000, \quad K_0 = 20.000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Convertimos las unidades: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- En el ahorro periódico se deposita una cantidad a cada periodo (mes, año). Cada depósito genera intereses durante un tiempo distinto, así que lo ahorrado es la suma de una serie geométrica: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) con depósitos al inicio del periodo (prepagable), sin la primera q con depósitos al final (pospagable); q = 1 + p/m y N = mn es el número de depósitos. La ecuación también da el depósito necesario o el plazo. Un depósito inicial opcional K_0 gana intereses todo el tiempo – se suma K_0·q^N. Con abono anual de intereses, los depósitos mensuales ganan interés simple dentro del año – un año da A = a(12 + p·13/2) con depósitos al inicio del mes, a(12 + p·11/2) al final – y solo estas sumas anuales se capitalizan. Ecuación del modelo

$$A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$$

- Los depósitos de un año con los intereses dentro del año: $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Factor de capitalización por periodo: $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Sustituimos

$$S = 1000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20.000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85.206$$

- Depositado en total e intereses

$$K_0 + N \cdot a = 20.000 + 60 \cdot 1000 = 80.000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$$

Inversión en préstamos P2P: 2 000 CZK al mes durante 10 años, 200 CZK por préstamo, con comisión y pérdidas.

Enunciado: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct];`

`L=200[one]; M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)`

Resultado

$$V \approx 318.974{,}12\,\text{CZK}$$

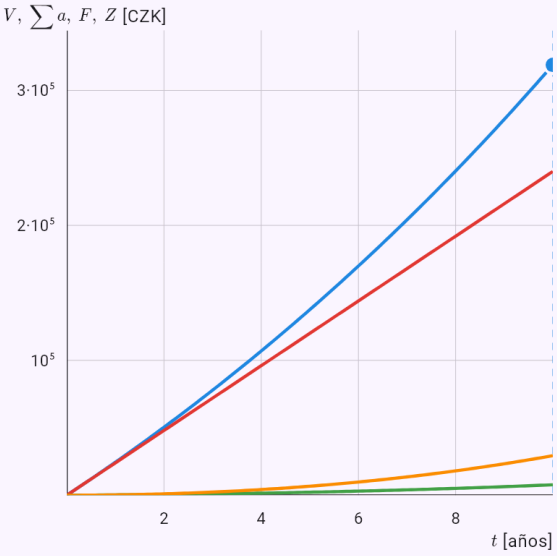
Pasos

- Datos
  $a = 2000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20($
- Convertimos las unidades:
  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$
- En una plataforma de préstamos P2P el inversor ingresa cada mes la cantidad a en su cuenta. El efectivo se invierte en múltiplos enteros de la cantidad L por préstamo (p. ej. 200 CZK), el resto espera en la cuenta. De cada inversión la plataforma descuenta la comisión de apertura f, al préstamo va L(1 − f). Los préstamos se amortizan con cuotas mensuales iguales s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) durante M meses, i = p/12; la plataforma se queda la parte g de los intereses. La tasa de impago λ (anual) da por perdida cada mes una parte del capital, λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Las cuotas vuelven a la cuenta y se reinvierten. El valor de la cartera V = H + P es el efectivo en la cuenta H más el capital pendiente en préstamos P. El cálculo simula mes a mes y, para comparar, da una fórmula cerrada con reinversión continua: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). El problema inverso halla la aportación mensual o el plazo necesarios para un valor objetivo. Es una estimación con rentabilidad fija – el resultado real depende sobre todo de las pérdidas. La rentabilidad que anuncia una plataforma suele ser ya neta de comisiones y pérdidas; en tal caso no las introduzca otra vez. No es una recomendación de inversión. Ecuación del modelo
  $V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$
- Interés mensual, pérdidas mensuales y cuota
  $i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$
- Sustituimos
  $V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10.735{,}19 + 308.238{,}93 \approx 318.97$
- Simulación mes a mes – estado al final de los años (k en meses): aportado, capital en préstamos P, efectivo H, comisiones F, pérdidas Z, valor V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24.000	23.784,39	726,58	266	2(
24	48.000	49.198,83	1248,72	606	10:
36	72.000	75.757,04	2129,17	1032	23:
48	96.000	103.744,84	3148,57	1568	42
60	120.000	133.102,33	4439,70	2240	66'
72	144.000	164.382,06	5541,37	3054	98(
84	168.000	197.551,52	6600,52	4002	13.5:
96	192.000	232.369,52	7962,71	5094	18.0'
108	216.000	269.327,69	9238,91	6346	23.3(
120	240.000	308.238,93	10.735,19	7764	29.3:

- Aportado, comisiones F, pérdidas Z, intereses netos U y ganancia
  $\sum a = 240.000\,\text{CZK}, \quad F = 7764\,\text{CZK}, \quad Z = 29.337$
- Para comparar: fórmula cerrada con reinversión continua
  $r = p(1-g)(1-f) - \lambda - f\,\frac{24}{M+1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$
- Es una estimación con rentabilidad fija y tasa de impago constante – la realidad depende sobre todo de las pérdidas. La rentabilidad que anuncia una plataforma suele ser ya neta de comisiones y pérdidas. No es una recomendación de inversión.

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Un préstamo con amortización constante – cuotas decrecientes comparadas con la cuota francesa.

Enunciado: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Resultado

$$a_1 \approx 15.000\,\mathrm{CZK}$$
$$a_N \approx 10.041{,}67\,\mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $D = 1.200.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Convertimos las unidades: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Un préstamo francés se devuelve con cuotas iguales a. Cada cuota paga primero los intereses sobre la deuda pendiente y el resto amortiza capital, por eso la parte de intereses baja con el tiempo. El valor actual de todas las cuotas es igual al préstamo, de donde a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. El cuadro de amortización muestra en cada cuota los intereses, la amortización y la deuda pendiente. La TAE incluye también las comisiones: es el tipo al que el valor actual de las cuotas iguala la cantidad realmente recibida. Con amortización constante la deuda baja cada período la misma cantidad M = D/N y la cuota a_k = M + U_k baja con los intereses – se pagan menos intereses que con la cuota francesa, pero las primeras cuotas son más altas. El cuadro muestra el primer año y la última cuota, o todo. Ecuación del modelo

  $$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\, i, \quad i = \frac{p}{m},$$

- Interés por periodo: $i = \dfrac{p}{m} = \dfrac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Sustituimos: $M = \dfrac{1.200.000}{120} \approx 10.000\,\mathrm{CZK}$
- Primera y última cuota

  $$a_1 = M + D\, i \approx 15.000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1 + i) \approx 10.$$

- Cuadro de amortización (U intereses, M amortización, D deuda pendiente)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15.000	5000	10.000	1.190.000
2	14.958,33	4958,33	10.000	1.180.000
3	14.916,67	4916,67	10.000	1.170.000
4	14.875	4875	10.000	1.160.000
5	14.833,33	4833,33	10.000	1.150.000
6	14.791,67	4791,67	10.000	1.140.000
7	14.750	4750	10.000	1.130.000
8	14.708,33	4708,33	10.000	1.120.000
9	14.666,67	4666,67	10.000	1.110.000
10	14.625	4625	10.000	1.100.000
11	14.583,33	4583,33	10.000	1.090.000
12	14.541,67	4541,67	10.000	1.080.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10.041,67	41,67	10.000	0

- Pagado en total y de ello intereses

  $$\sum a_k \approx 1.502.500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302.500\,\mathrm{CZK}$$

- Comparado con la cuota francesa – cuota e intereses totales:

  $$a \approx 12.727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327.343{,}42\,\mathrm{CZK}$$

- La amortización constante ahorra $24.843{,}42\,\mathrm{CZK}$ de intereses, pero las primeras cuotas son más altas.

Interés por días según 30E/360 con un impuesto del 15 %.

Enunciado: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15;`

`end=2026-09-20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Resultado

$$u' \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$$
$$K_n \approx 50.436{,}81\ \mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $K_0 = 50.000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Convertimos las unidades: $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Los depósitos a corto plazo ganan interés simple por t días: u = K₀·p·t/B. Los días y la duración del año B siguen la convención de cómputo de días: 30E/360 (bancos checos y alemanes) cuenta cada mes como 30 días (el 31 como 30) y el año como 360, ACT/360 (año comercial: Francia, España, mercado monetario) los días reales y un año de 360, ACT/365 (año civil, Reino Unido) los días reales y un año de 365. Los días se cuentan entre las fechas del depósito y la retirada, o se escriben directamente. El impuesto se descuenta del interés. Lo contrario – cuánto depositar hoy para un importe – es el descuento. Ecuación del modelo: $u = K_0 \cdot p \cdot \frac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$
- Convención de cómputo de días y duración del año: $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Días (30E/360: mes de 30 días, el 31 como 30) $15/3/2026 \to 20/9/2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026) +$
- Sustituimos: $u = 50.000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{185}{360} \approx 513{,}89\ \mathrm{CZK}$
- Impuesto sobre el interés e interés neto $u \cdot d \approx 77{,}08\ \mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\ \mathrm{CZK}$
- Intereses en total: $K_n = K_0 + u' \approx 50.436{,}81\ \mathrm{CZK}$

Una letra descontada – lo que paga el banco 90 días antes del vencimiento.

Enunciado: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Resultado

$$K \approx 98.500\ \mathrm{CZK}$$
$$D \approx 1500\ \mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $N = 100.000, \quad d = 6\,\%$
- Convertimos las unidades: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Una letra de cambio promete pagar su nominal N en la fecha de vencimiento. Un banco puede comprarla antes (descontarla) y paga el nominal menos el descuento D = N·d·t/B, donde d es el tipo de descuento y t los días hasta el vencimiento: K = N(1 − d·t/B). El descuento se calcula sobre el importe final, no sobre el pagado, por eso la rentabilidad real del banco i = d/(1 − d·t/B) es mayor que el tipo de descuento. Lo habitual es ACT/360. Ecuación del modelo: $D = N \cdot d \cdot \frac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\frac{t}{B}\right)$
- Convención de cómputo de días y duración del año: $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$
- Días según el calendario: $10/1/2026 \to 10/4/2026: \quad t = 90$
- Sustituimos: $D = 100.000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{90}{360} \approx 1500\ \mathrm{CZK}$
- Importe pagado: $K = N - D \approx 98.500\ \mathrm{CZK}$
- Rentabilidad real del banco: $i = \frac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- El descuento se calcula sobre el importe final – por eso el banco gana en realidad más que el tipo de descuento.

Una renta mensual de 2 millones durante 20 años, diferida 5 años.

Enunciado: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Resultado

$$a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $K = 2.000.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Convertimos las unidades: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Una renta paga una cantidad regular a de un capital K, que mientras tanto sigue ganando intereses. El valor actual de N pagos es K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m – la misma fórmula que la cuota de un préstamo. Los pagos al inicio de los períodos (renta prepagable) la multiplican por q. Una renta diferida empieza a pagar tras k años, y el capital crece mientras tanto a K·q^(mk). Una renta perpetua paga solo los intereses y el capital se mantiene: K = a/(q − 1). El resultado es el pago, el capital necesario o cuánto duran los pagos. Ecuación del modelo:
  $$K = a\,\frac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Factor de capitalización por periodo:
  $q = 1 + \frac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Descontado por el diferimiento:
  $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- Despejamos la magnitud buscada: $a = \frac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- Sustituimos: $a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$

- Capital al empezar los pagos:
  $K\,q^{mk} \approx 2.323.233{,}56\,\mathrm{CZK}$
- Evolución de los pagos (U interés, K saldo)

k	a	U_k	K_k
1	12.884,60	5808,08	2.316.157,05
2	12.884,60	5790,39	2.309.062,84
3	12.884,60	5772,66	2.301.950,90
4	12.884,60	5754,88	2.294.821,18
5	12.884,60	5737,05	2.287.673,64
6	12.884,60	5719,18	2.280.508,23
7	12.884,60	5701,27	2.273.324,90
8	12.884,60	5683,31	2.266.123,61
9	12.884,60	5665,31	2.258.904,33
10	12.884,60	5647,26	2.251.666,99
11	12.884,60	5629,17	2.244.411,56
12	12.884,60	5611,03	2.237.137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12.884,60	32,13	0

- Pagado en total y los intereses incluidos
  $\sum a \approx 3.092.303{,}41\,\mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1.092.303{,}4$

Precio y duración de un bono.

Enunciado: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct];`

`freq=annual; cur=EUR)`

Resultado

$$P \approx 1044{,}52\,€$$

Pasos

- Datos: $N = 1000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Convertimos las unidades:
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Un bono paga cada periodo un cupón C = c·N/m y al final su valor nominal N. Su precio es el valor actual de esos pagos descontados con la rentabilidad de mercado y. Si la rentabilidad de mercado es menor que el cupón, el bono cotiza sobre la par; si no, bajo la par. La rentabilidad al vencimiento es el tipo al que el valor actual de los pagos iguala el precio, y se calcula numéricamente. La duración es el plazo medio ponderado de los pagos y mide la sensibilidad del precio a los tipos de interés. Ecuación del modelo

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{k}} + \frac{N_{nom}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{N}}$$

- Cupón por periodo: $C = \dfrac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,€, \quad N = 5$
- Sustituimos

$$P = 50 \cdot \frac{1 - 0{,}961538^{5}}{0{,}04} + \frac{1000}{1{,}04^{5}} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$$

- La rentabilidad de mercado es menor que el cupón: el bono cotiza sobre la par.
- Duración (de Macaulay y modificada)

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k} t_k\, PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \approx 4{,}382$$

Tasa interna de retorno de una inversión.

Enunciado: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

Resultado

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

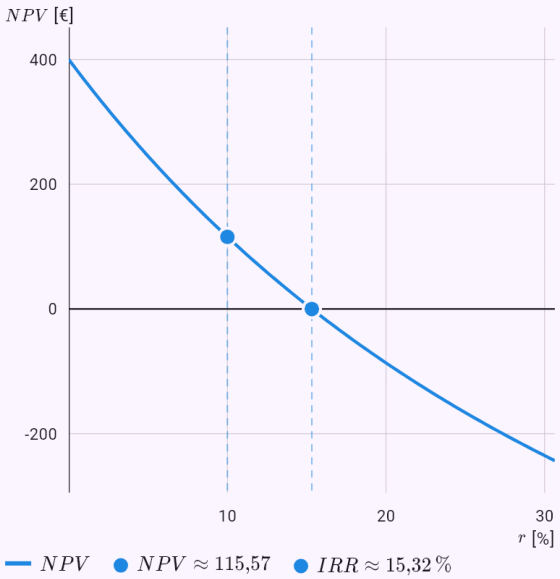
Pasos

- Datos:
  $CF_t = (-1000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Convertimos las unidades: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- El valor actual neto VAN suma los flujos de caja CF_0, CF_1, … de un proyecto descontados con la rentabilidad exigida r: VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un proyecto con VAN > 0 rinde más de lo exigido. La tasa interna de retorno TIR es el tipo con el que VAN = 0, raíz de una ecuación polinómica que se busca numéricamente. El plazo de recuperación es el momento en que la suma acumulada (simple o descontada) deja de ser negativa. Ecuación del modelo: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \dfrac{CF_t}{(1+r)^{t}}$
- Valor actual neto

$$NPV = -1000 + \frac{300}{1{,}1^{1}} + \frac{400}{1{,}1^{2}} + \frac{500}{1{,}1^{3}} + \frac{200}{1{,}1^{4}} \approx 115{,}5$$

- VAN ≥ 0: el proyecto rinde al menos lo exigido.
- Resolvemos la ecuación numéricamente (bisección): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › El método: bisección, 14 iteraciones

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Euros a coronas según el tipo de hoy del ČNB.

Enunciado: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Resultado

$$2443{,}50\ \mathrm{CZK}$$

$$1\ € \approx 24{,}435\ \mathrm{CZK}$$

Pasos

- Datos: $A = 100$
- El tipo de cambio es el precio de una unidad de moneda extranjera. El Banco Nacional Checo publica cada día hábil los tipos de la corona y el Banco Central Europeo los tipos de referencia del euro. Una cantidad se convierte a través de una moneda común: $A_2 = A_1 \cdot k_1 / k_2$, donde k_1 y k_2 son los valores de ambas monedas en coronas (ČNB) o en euros (BCE), es decir, un tipo cruzado. Los bancos y las casas de cambio aplican sus propios tipos con margen; el resultado es orientativo.
  Ecuación del modelo: $A_2 = A_1 \cdot \dfrac{k_1}{k_2}$
- Tabla de tipos de cambio: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026$
- Tipos: $1\ € = 24{,}435\ \mathrm{CZK}$
- Sustituimos: $A_2 = 100 \cdot \dfrac{24{,}435}{1} \approx 2443{,}50\ \mathrm{CZK}$
- Los bancos y casas de cambio aplican sus propios tipos con margen; el resultado es orientativo.

Beneficio máximo a partir del ingreso y el coste marginal.

Enunciado: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

`e=0.5[one]; cur=CZK)`

Resultado

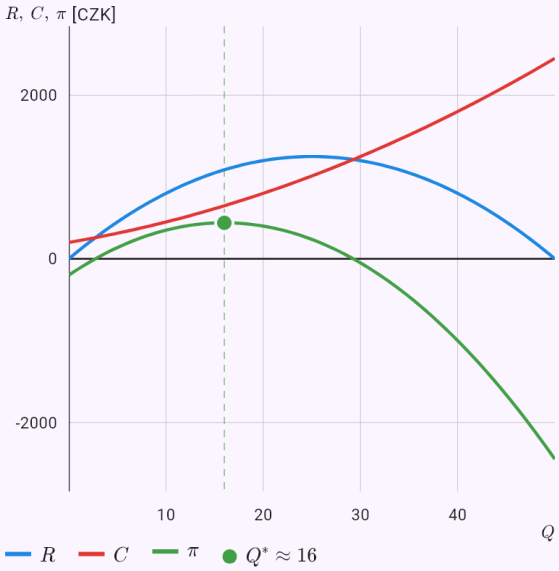
$$Q^* \approx 16$$
$$p^* \approx 68\,\text{CZK}$$
$$\pi^* \approx 440\,\text{CZK}$$

Pasos

- Datos:
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Una empresa con demanda lineal p = a − bQ tiene ingresos R = pQ y costes C(Q) = F + cQ + eQ². El beneficio π = R − C es máximo donde su derivada es cero, es decir, donde el ingreso marginal iguala el coste marginal: IMg = R'(Q) = CMg = C'(Q). La segunda derivada confirma el máximo. La elasticidad precio de la demanda ε = (dQ/dp)·(p/Q) indica en qué porcentaje cambia la cantidad demandada cuando el precio cambia un 1 %; |ε| > 1 es demanda elástica. Ecuación del modelo: $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Ingresos y costes:
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Ingreso marginal y coste marginal (derivadas):
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Sustituimos:
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- La segunda derivada del beneficio es negativa: un máximo: $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Precio y beneficio en el óptimo:
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\text{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\text{CZK}$

- Elasticidad precio de la demanda: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Equilibrio de mercado, excedentes e impuesto.

Enunciado: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

`t=5[one]; cur=CZK)`

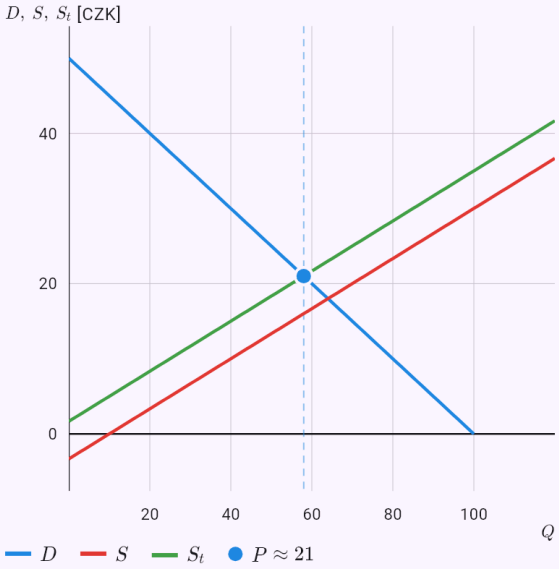
Resultado

$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Pasos

- Datos: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- La demanda Q_D = a − bP baja con el precio y la oferta Q_S = c + dP sube. El mercado está en equilibrio donde se cortan: P* = (a − c)/(b + d). El excedente del consumidor es el área entre la curva de demanda y el precio (lo que los compradores habrían pagado de más) y el del productor, el área entre el precio y la curva de oferta; ambos son integrales. Un impuesto t por unidad desplaza la oferta t hacia arriba: los compradores pagan más, los vendedores reciben menos, se intercambia menos y aparece una pérdida irrecuperable de eficiencia. Ecuación del modelo:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Sustituimos:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- Con el impuesto: precio para compradores y para vendedores
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Recaudación y pérdida irrecuperable de eficiencia
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Excedente del consumidor:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Excedente del productor:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$
- Elasticidad de demanda y oferta en el equilibrio
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Modelo de Leontief con tres sectores.

Enunciado: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100`

`200 150[one])`

Resultado

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Pasos

- Datos
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- El modelo de Leontief describe una economía de n sectores que se suministran entre sí. El elemento a_ij de la matriz de coeficientes técnicos A indica cuánta producción del sector i consume el sector j por unidad de su propia producción. La producción total x debe cubrir el consumo intermedio Ax y la demanda final y: x = Ax + y, así que x = (I − A)⁻¹y. La inversa de Leontief (I − A)⁻¹ muestra cuánto debe producir cada sector por unidad de demanda final. Ecuación del modelo:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Coeficientes técnicos y demanda final
  $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$$
- La matriz I − A
  $$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
- Inversa de Leontief
  $$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$$
- Sustituimos: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Flujos entre sectores
  $$x_{ij} = a_{ij}x_j: \quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$$

Cuotas de clientes a largo plazo de tres marcas.

Enunciado: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])`

Resultado

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Pasos

- Datos:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Una cadena de Márkov pasa entre estados con probabilidades p_ij que solo dependen del estado actual (no de la historia). Las filas de la matriz de transición P suman 1. La distribución tras un paso es π₁ = π₀P y tras n pasos π_n = π₀Pⁿ. La distribución estacionaria cumple πP = π y muestra las proporciones a largo plazo de los estados: clientes de marcas, clases de bonus-malus, estados de una máquina. Ecuación del modelo:
  $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Matriz de transición
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- El sistema de la distribución estacionaria
  $$\pi_1 = 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3$$
  $$\pi_2 = 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3$$
  $$\pi_3 = 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- A largo plazo la distribución se estabiliza en la estacionaria, sea cual sea el inicio (en una cadena regular).

Esperanza de vida de una mujer de 65 años.

Enunciado: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Resultado

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

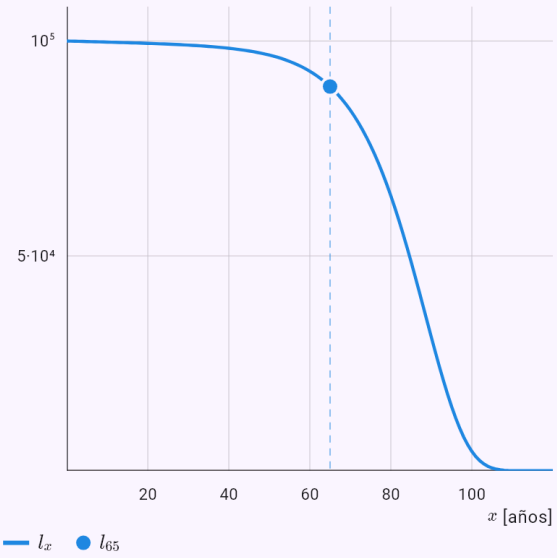
Pasos

- Datos: $x = 65$
- Tabla modelo (Gompertz–Makeham) aproximada a la población checa; para resultados precisos introduzca q_x oficiales.
- Una tabla de mortalidad indica cuántos de 100 000 recién nacidos (l_x) llegan a la edad x. La probabilidad de que una persona de x años viva n años más es ${}_np_x$ = l_{x+n}/l_x, y la de morir ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$. La esperanza de vida e_x es el número medio de años que vivirá todavía una persona de x años. La tabla modelo según la ley de Gompertz–Makeham μ(x) = A + B·c^x se ajusta aproximadamente a la población checa; los cálculos precisos usan tablas oficiales: introduzca sus propios q_x. Ecuación del modelo

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Supervivientes según la tabla: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Sustituimos: $e_{65} \approx 20{,}57$
- De media se alcanza la edad de $85{,}57$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Prima anual de un seguro mixto.

Enunciado: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct];`

`S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Resultado

$$P \approx 40.227{,}05\,\text{CZK}$$

Pasos

- Datos:
  $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1.000.000$
- Convertimos las unidades: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Tabla modelo (Gompertz–Makeham) aproximada a la población checa; para resultados precisos introduzca q_x oficiales.
- La prima pura sale del principio de equivalencia: el valor actual de las primas iguala el valor actual de las prestaciones futuras. Con los valores de conmutación D_x = v^xl_x, N_x, C_x y M_x (v = 1/(1 + i), i el tipo técnico), la prima única de un seguro de fallecimiento temporal a n años es (M_x − M_{x+n})/D_x, la de un capital diferido D_{x+n}/D_x, la de un seguro mixto su suma; una renta ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. La prima anual se obtiene dividiendo por ä. La provisión en el año t es el valor actual de las prestaciones futuras menos el de las primas futuras (prospectiva), y coincide con las primas cobradas menos las prestaciones pagadas (retrospectiva). Ecuación del modelo

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k \geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k \geq}$$

- Valores de conmutación
  $D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$
- Prima única pura
  $A_{x:\overline{20}|} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20}|} \approx 622.543{,}08\,\text{CZK}$
- Prima anual
  $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} \approx 15{,}4757, \quad P = \dfrac{S \cdot A_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \approx 40.227{,}05\,\text{CZK}$

Sistema bonus-malus y nivel medio de prima.

Enunciado: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Resultado

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Pasos

- Datos: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Convertimos las unidades: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- En los seguros de no vida (automóviles, hogar) la siniestralidad anual esperada de un asegurado es E[S] = λ·m, donde λ es el número medio de siniestros al año y m el coste medio. La prima de riesgo lleva un recargo θ por gastos y seguridad. Un sistema bonus-malus cambia la prima según el historial: un año sin siniestros lleva a una clase mejor y un siniestro, hacia atrás. Las clases forman una cadena de Márkov; su distribución estacionaria da las proporciones a largo plazo y el nivel medio de prima. Ecuación del modelo:
  $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Un año sin siniestros baja una clase (descuento); un siniestro vuelve a la primera clase.
- Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

- El sistema de la distribución estacionaria

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

- Proporciones de las clases a largo plazo:
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Sustituimos: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Limitaciones conocidas

- Las tablas de mortalidad son modelos (Gompertz–Makeham, aproximadas a la población checa); para resultados precisos introduzca sus propios q_x de tablas oficiales.
- Los tipos son de referencia: los bancos y casas de cambio aplican sus propios tipos y comisiones.
- Microeconomía con demanda lineal y costes cuadráticos; aún no hay funciones generales dadas por una fórmula.
- Las convenciones no mueven fechas por festivos – el interés es por los días entre las fechas dadas; el préstamo no admite amortizaciones anticipadas ni cambios de tipo.
- La inversión en préstamos P2P es una estimación con rentabilidad fija y tasa de impago constante; no tiene en cuenta el recobro, la amortización anticipada, el mercado secundario ni los impuestos. No es una recomendación de inversión.

51. Programación lineal, transporte, asignación y juegos matriciales

Los problemas de optimización están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campo Logística y redes (la programación lineal también en Economía): programación lineal y entera, problema de transporte y problema de asignación. Un problema lineal también se puede escribir o fotografiar, p. ej. max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – las restricciones en líneas separadas o tras un punto y coma, min en lugar de max, y la palabra integer lo hace entero.

El procedimiento muestra la forma estándar con variables de holgura y artificiales y las tablas símplex en fracciones exactas con el pivote marcado. Las restricciones ≥ y = se resuelven por defecto con el método de dos fases; un chip elige el método de la gran M. El óptimo va acompañado del problema dual, los precios sombra y un análisis de sensibilidad (intervalos de los coeficientes del objetivo y de los términos independientes). Con dos variables, la aplicación dibuja la región factible, los vértices con los valores del objetivo y la recta de nivel por el óptimo. Un problema entero se resuelve por ramificación y acotación; el árbol se recorre con las flechas como un grafo.

El problema de transporte se da con la matriz de costes unitarios, las ofertas de los proveedores y las demandas de los clientes; un problema desequilibrado recibe un proveedor o cliente ficticio. La solución inicial la da la esquina noroeste, el coste mínimo o el método de Vogel, el óptimo el método MODI con potenciales y ciclos cerrados; el plan de transporte se muestra también como grafo. El problema de asignación se resuelve con el método húngaro – reducción de filas y columnas, cobertura de los ceros con líneas y elección de ceros independientes; admite también maximización y matrices rectangulares.

Juegos matriciales de dos jugadores (área Logística y redes, o la notación game(3 -1 2; -2 4 1): las filas son las estrategias del jugador A y las columnas las del jugador B). Un juego de suma cero busca primero un punto de silla (maximin = minimax), luego tacha las estrategias dominadas y calcula las estrategias mixtas con una fórmula en un juego 2 × 2, gráficamente en 2 × n y m × 2 (envolventes inferior y superior de las rectas) y por programación lineal con tablas símplex en uno mayor; el problema dual da la estrategia del otro jugador. El resultado son las estrategias óptimas de ambos y el valor del juego en fracciones exactas. Un juego bimatricial (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), pagos de A | pagos de B) muestra las mejores respuestas y los equilibrios de Nash en estrategias puras y, en un juego 2 × 2, también el equilibrio mixto.

Ejemplos

Un plan de producción con el símplex, precios sombra y sensibilidad.

Enunciado: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Resultado

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Pasos

- El problema de programación lineal

  $$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
  $$x_1 \le 4$$
  $$2x_2 \le 12$$
  $$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
  $$x_1, x_2 \ge 0$$

- No se dan condiciones de no negatividad – suponemos $x_1, x_2 \ge 0$
- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a

  $$x_1 + s_1 = 4$$
  $$2x_2 + s_2 = 12$$
  $$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

- Tabla símplex 1: entra x_2 (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_2 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	-3	-5	0	0	0	0	

- Tabla símplex 2: entra x_1 (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_3 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	$\boxed{3}$	0	0	-1	1	6	2
z	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- Tabla 3: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es óptima.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero): $x_1 = 2,\ x_2 = 6, \quad z_{max} = 36$
- El problema dual – una variable dual por restricción, una restricción por variable

  $$\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$
  $$y_1 + 3y_3 \ge 3$$
  $$2y_2 + 2y_3 \ge 5$$
  $$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- Los precios sombra (las variables duales óptimas) de la última tabla: cuánto cambia el óptimo si el término independiente de una restricción aumenta en 1. Una restricción con holgura ($b_i - a_i x > 0$) tiene precio sombra 0.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- El óptimo del dual es igual al del primal:

  $$w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$$

- Análisis de sensibilidad – los intervalos de los

coeficientes del objetivo en los que la misma solución sigue siendo óptima

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2} \rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

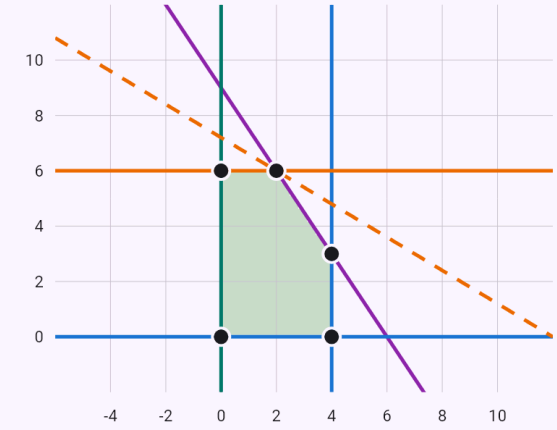
- Los intervalos de los términos independientes en los que la misma base sigue siendo óptima (los precios sombra solo valen ahí)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18 \rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24 \rangle$

- La solución gráfica: la región factible es un polígono y el óptimo está en un vértice. Los valores del objetivo en los vértices (★ el óptimo)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Gráfica



- $x \leq 4 \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty,\ 4]$
- $2y \leq 12 \ \Leftrightarrow \ y \in (-\infty,\ 6]$
- $3x + 2y \leq 18 \ \Leftrightarrow \ y \leq 9 - \dfrac{3x}{2}$
- $x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0,\ \infty)$
- $y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0,\ \infty)$
- $z = 36 \ \Leftrightarrow \ 3x + 5y = 36$

Las soluciones son las intersecciones de las curvas en la región coloreada (punto lleno); un punto vacío no cumple las desigualdades.

Intersecciones de las gráficas:

● $(0;0)$ ● $(0;6)$ ● $(2;6)$ ● $(4;0)$ ● $(4;3)$

Un problema escrito – la solución gráfica para dos variables.

Enunciado: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Resultado

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Pasos

- El problema de programación lineal

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \le 4$
  $x + 3y \le 6$
  $x, y \ge 0$

- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- Tabla símplex 1: entra x (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_1 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- Tabla 2: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es óptima.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero): $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 12$

- El problema dual – una variable dual por restricción, una restricción por variable

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \ge 3$
  $u_1 + 3u_2 \ge 2$
  $u_1, u_2 \ge 0$

- Los precios sombra (las variables duales óptimas) de la última tabla: cuánto cambia el óptimo si el término independiente de una restricción aumenta en 1. Una restricción con holgura ($b_i - a_i x > 0$) tiene precio sombra 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- El óptimo del dual es igual al del primal: $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Análisis de sensibilidad – los intervalos de los coeficientes del objetivo en los que la misma solución sigue siendo óptima

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

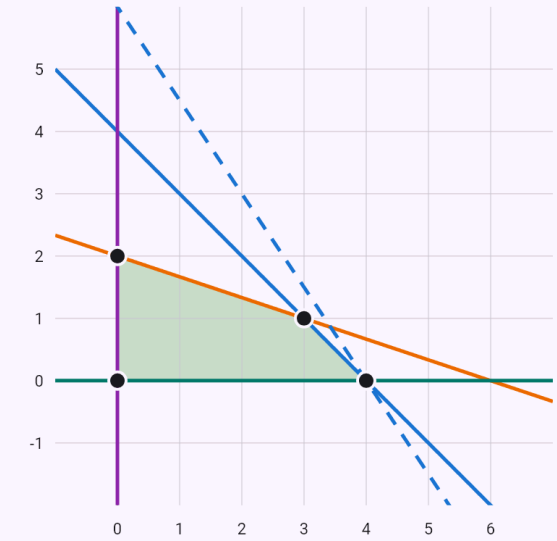
- Los intervalos de los términos independientes en los que la misma base sigue siendo óptima (los precios sombra solo valen ahí)

	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- La solución gráfica: la región factible es un polígono y el óptimo está en un vértice. Los valores del objetivo en los vértices (★ el óptimo)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Gráfica



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$

$x + 3y \leq 6 \ \Leftrightarrow \ y \leq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0,\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0,\ \infty)$

$z = 12 \ \Leftrightarrow \ 3x + 2y = 12$

Las soluciones son las intersecciones de las curvas en la región coloreada (punto lleno); un punto vacío no cumple las desigualdades.

Intersecciones de las gráficas:

● $(0;0)$ ● $(0;2)$ ● $(3;1)$ ● $(4;0)$

Un mínimo con restricciones ≥ por el método de dos fases.

Enunciado: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Resultado

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Pasos

- El problema de programación lineal

  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- No se dan condiciones de no negatividad – suponemos $x, y \geq 0$
- Un mínimo se busca como el máximo de la función opuesta: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a

  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Fase uno: las variables artificiales no son una solución real, así que primero las anulamos – minimizamos su suma $\min w = a_1 + a_2$
- Tabla símplex 1: entra y (el $z_j - c_j$ más negativo), sale a_2 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- Tabla símplex 2: entra x (el $z_j - c_j$ más negativo), sale a_1 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- La fase uno termina con w = 0 – las variables artificiales son cero y se eliminan. La fase dos sigue con el objetivo real.
- Tabla 3: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es óptima.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- El problema dual – una variable dual por restricción, una restricción por variable

  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Los precios sombra (las variables duales óptimas) de la última tabla: cuánto cambia el óptimo si el término independiente de una restricción aumenta en 1. Una restricción con holgura ($b_i - a_i x > 0$) tiene precio sombra 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- El óptimo del dual es igual al del primal:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Análisis de sensibilidad – los intervalos de los coeficientes del objetivo en los que la misma solución sigue siendo óptima

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3\rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6\rangle$

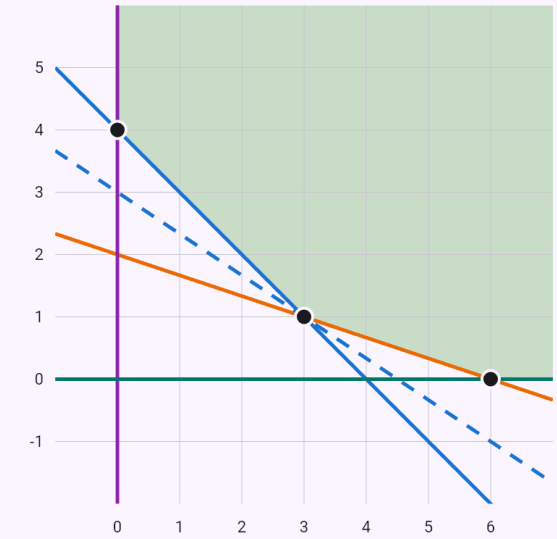
- Los intervalos de los términos independientes en los que la misma base sigue siendo óptima (los precios sombra solo valen ahí)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- La solución gráfica: la región factible es un polígono y el óptimo está en un vértice. Los valores del objetivo en los vértices (★ el óptimo)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Gráfica



- $x + y \geq 4 \iff y \geq 4 - x$
- $x + 3y \geq 6 \iff y \geq 2 - \frac{x}{3}$
- $x \geq 0 \iff x \in [0, \infty)$
- $y \geq 0 \iff y \in [0, \infty)$
- $z = 9 \iff 2x + 3y = 9$

Las soluciones son las intersecciones de las curvas en la región coloreada (punto lleno); un punto vacío no cumple las desigualdades.

Intersecciones de las gráficas:

● $(0; 4)$ ● $(3; 1)$ ● $(6; 0)$

El mismo problema por el método de la gran M.

Enunciado: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Resultado

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Pasos

- El problema de programación lineal
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$
- No se dan condiciones de no negatividad – suponemos $x, y \geq 0$
- Un mínimo se busca como el máximo de la función opuesta: $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$
- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$
- El método de la gran M: las variables artificiales entran en el objetivo con una gran penalización −M para que el símplex las saque de la base:
  $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$
- Tabla símplex 1: entra y (el $z_j - c_j$ más negativo), sale a_2 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- Tabla símplex 2: entra x (el $z_j - c_j$ más negativo), sale a_1 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- Tabla 3: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es óptima.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero): $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$
- El problema dual – una variable dual por restricción, una restricción por variable
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$
- Los precios sombra (las variables duales óptimas) de la última tabla: cuánto cambia el óptimo si el término independiente de una restricción aumenta en 1. Una restricción con holgura ($b_i - a_i x > 0$) tiene precio sombra 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- El óptimo del dual es igual al del primal:
  $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Análisis de sensibilidad – los intervalos de los coeficientes del objetivo en los que la misma solución sigue siendo óptima

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1\rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2\rangle$

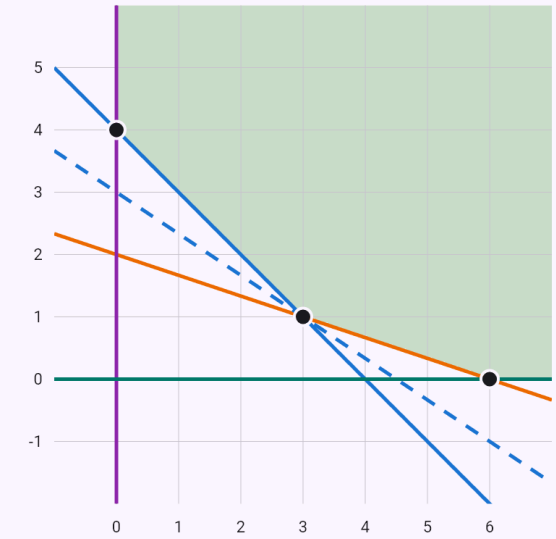
- Los intervalos de los términos independientes en los que la misma base sigue siendo óptima (los precios sombra solo valen ahí)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12\rangle$

- La solución gráfica: la región factible es un polígono y el óptimo está en un vértice. Los valores del objetivo en los vértices (★ el óptimo)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Gráfica



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0, \infty)$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0, \infty)$
$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Las soluciones son las intersecciones de las curvas en la región coloreada (punto lleno); un punto vacío no cumple las desigualdades.

Intersecciones de las gráficas:
● $(0; 4)$ ● $(3; 1)$ ● $(6; 0)$

Una solución entera por ramificación y acotación.

Enunciado: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Resultado

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

Pasos

- El problema de programación lineal
  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \le 24$
  $x + 2y \le 6$
  $x, y \ge 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$
- No se dan condiciones de no negatividad – suponemos $x, y \ge 0$
- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a
  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$
- Tabla símplex 1: entra x (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_1 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	-5	-4	0	0	0	

- Tabla símplex 2: entra y (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_2 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- Tabla 3: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es óptima.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero): $x = 3,\ y = \dfrac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- El problema es entero – usamos ramificación y acotación. La solución sin la condición de integralidad de arriba es la raíz P_0 del árbol.
- Los nodos del árbol (en profundidad, primero la rama ≤): una variable no entera se divide en dos ramas; × – sin solución factible, z ≤ z* – la rama no puede superar la mejor solución hallada (se poda), ✓ – una solución entera.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \le 1,\ y \ge 2$
P_1	$y \le 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \le 3,\ x \ge 4$
P_2	$x \le 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \ge 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \ge 2$	$2,\ 2$	18	$z \le z^*$

- La mejor solución entera: $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Gráfica



Estado inicial

$P_0:\ x = 3,\ y = \dfrac{3}{2}$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Un problema de transporte – método de Vogel y MODI.

Enunciado: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Resultado

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Pasos

- Los costes unitarios, las ofertas a_i de los proveedores y las demandas b_j de los clientes

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- La oferta es igual a la demanda – el problema está equilibrado: $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- El método de Vogel: en cada paso calculamos las penalizaciones – la diferencia de los dos costes menores de cada fila y columna – y en la fila o columna con mayor penalización (recuadrada) asignamos a la celda más barata.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	[22]	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	[21]		10	10	$(1,1)$
3	40	20	[50]			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	[50]	$(1,4)$
5		20				40	[60]	$(2,4)$
6		[40]				40		$(2,3)$

- La solución inicial (el número pequeño es el coste, el negrito la cantidad) – el coste
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- Iteración MODI 1: los potenciales de $u_i + v_j = c_{ij}$ en las celdas ocupadas ($u_1 = 0$), en las vacías $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (entre paréntesis). El d más negativo, -18, está en la celda $(2,2)$ – la ocupamos. El ciclo cerrado $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, trasladamos θ = 2 (la menor cantidad en las celdas marcadas −).

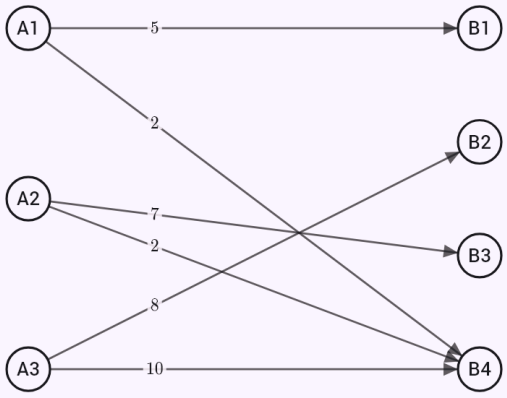
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}[-18]$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	−2	−10	10		

- Ningún d_{ij} es negativo – el plan de transporte es óptimo.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	−2	8	10		

- El coste total:
  $z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Gráfica



Estado inicial
$\sum$=779

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Un problema de transporte desequilibrado con un cliente ficticio.

Enunciado: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Resultado

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Pasos

- Los costes unitarios, las ofertas a_i de los proveedores y las demandas b_j de los clientes

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- La oferta supera la demanda ($\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – añadimos un cliente ficticio B_4^* con demanda 20 y coste cero (mercancía que queda en los proveedores).

- La solución inicial por la esquina noroeste: desde la celda superior izquierda asignamos lo máximo posible y avanzamos a la derecha o hacia abajo (el número pequeño es el coste, el negrito la cantidad), el coste $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

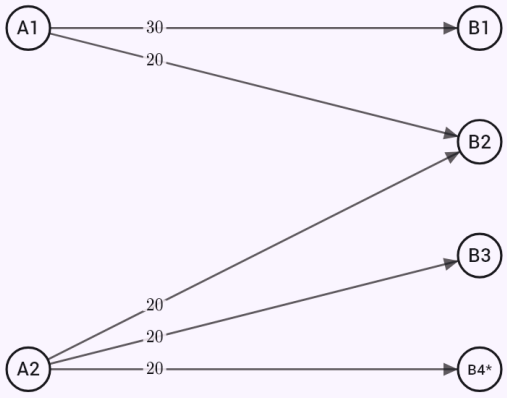
	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	^{4}**30**	^{6}**20**	^{8}.	^{0}.	50
A_2	^{5}.	^{7}**20**	^{3}**20**	^{0}**20**	60
b_j	30	40	20	20	

- Ningún d_{ij} es negativo – el plan de transporte es óptimo.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	^{4}**30**	^{6}**20**	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	^{7}**20**	^{3}**20**	^{0}**20**	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	-1		

- Algún d_{ij} es cero – existe otra solución óptima con el mismo coste.
- El coste total: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Gráfica



Estado inicial
$\sum = 440$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Asignación de trabajadores a tareas con el menor coste.

Enunciado: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Resultado

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Pasos

- Los costes – las filas son trabajadores (máquinas), las columnas tareas

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- A cada fila le restamos su mínimo $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- A cada columna le restamos su mínimo $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

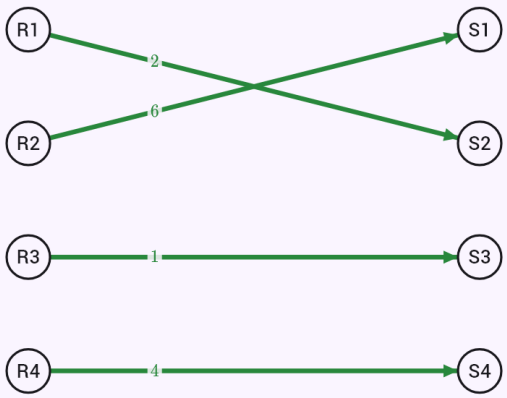
- Hacen falta 4 líneas para cubrir los ceros – elegimos ceros independientes, uno en cada fila y columna (recuadrados).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- La asignación con los costes originales – total $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Gráfica



Una asignación con el mayor beneficio.

Enunciado: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Resultado

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Pasos

- Los costes – las filas son trabajadores (máquinas), las columnas tareas

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Buscamos un máximo – lo convertimos en mínimo restando cada elemento del mayor, 9.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- A cada fila le restamos su mínimo $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- A cada columna le restamos su mínimo $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

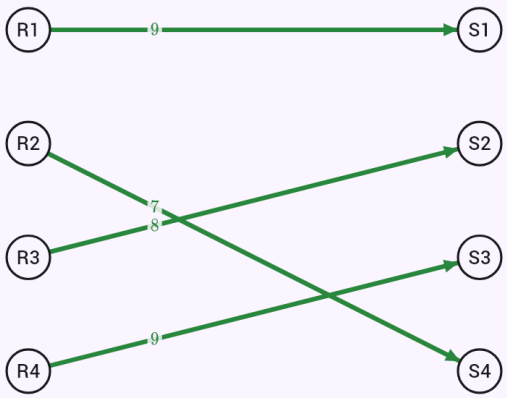
- Hacen falta 4 líneas para cubrir los ceros – elegimos ceros independientes, uno en cada fila y columna (recuadrados).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- La asignación con los costes originales – total $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Gráfica



Un juego con punto de silla: el maximin es igual al minimax.

Enunciado: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Resultado

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Pasos

- La matriz de pagos (3×3): las filas son las estrategias del jugador A, las columnas las del jugador B y los números las ganancias de A (pérdidas de B). A quiere ganar lo máximo; B, perder lo mínimo.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- Buscamos un punto de silla: el mínimo de cada fila (lo que A se asegura) y el máximo de cada columna (B no pierde más). $\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 2$. : el maximin es igual al minimax, el juego tiene punto de silla.

	B_1	B_2	B_3	$\min$
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
$\max$	6	2	6	

- Las estrategias puras óptimas (puntos de silla): (A_1, B_2) ; el valor del juego $v = 2$

Un juego 2 × 2 sin punto de silla: estrategias mixtas con la fórmula.

Enunciado: `game(3 -1; -2 4)`

Resultado

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Pasos

- La matriz de pagos (2×2): las filas son las estrategias del jugador A, las columnas las del jugador B y los números las ganancias de A (pérdidas de B). A quiere ganar lo máximo; B, perder lo mínimo.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Buscamos un punto de silla: el mínimo de cada fila (lo que A se asegura) y el máximo de cada columna (B no pierde más). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$. no hay punto de silla. Los jugadores usarán estrategias mixtas: cada estrategia pura con cierta probabilidad.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Un juego 2 × 2 sin punto de silla (estrategias A_1, A_2 y B_1, B_2): A juega la primera fila con probabilidad p de modo que su ganancia esperada sea igual frente a ambas columnas, y B la primera columna con probabilidad q del mismo modo. Para la matriz (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Las estrategias mixtas óptimas: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; el valor del juego $v = 1$

Estrategias dominadas tachadas una tras otra.

Enunciado: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Resultado

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Pasos

- La matriz de pagos (3×3): las filas son las estrategias del jugador A, las columnas las del jugador B y los números las ganancias de A (pérdidas de B). A quiere ganar lo máximo; B, perder lo mínimo.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- Buscamos un punto de silla: el mínimo de cada fila (lo que A se asegura) y el máximo de cada columna (B no pierde más).
$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$. no hay punto de silla. Los jugadores usarán estrategias mixtas: cada estrategia pura con cierta probabilidad.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- La estrategia A_3 está dominada por A_1, que da al jugador A al menos lo mismo en cada columna. A no la elegirá; la tachamos

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- La estrategia B_3 está dominada por B_1: con ella el jugador B no pierde más en ninguna fila. B no la elegirá; la tachamos

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Un juego 2×2 sin punto de silla (estrategias A_1, A_2 y B_1, B_2): A juega la primera fila con probabilidad p de modo que su ganancia esperada sea igual frente a ambas columnas, y B la primera columna con probabilidad q del mismo modo. Para la matriz (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Las estrategias mixtas óptimas: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; el valor del juego $v = 1$

Un juego 2 × 4 gráficamente: el máximo de la envolvente inferior.

Enunciado: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Resultado

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Pasos

- La matriz de pagos (2×4): las filas son las estrategias del jugador A, las columnas las del jugador B y los números las ganancias de A (pérdidas de B). A quiere ganar lo máximo; B, perder lo mínimo.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- Buscamos un punto de silla: el mínimo de cada fila (lo que A se asegura) y el máximo de cada columna (B no pierde más).
$\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$: no hay punto de silla. Los jugadores usarán estrategias mixtas: cada estrategia pura con cierta probabilidad.

	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

- El método gráfico: A juega la primera fila con probabilidad p y la segunda con 1 − p. Su ganancia esperada frente a cada estrategia de B es una recta en p; B elige la menor, así que A busca el punto más alto de la envolvente inferior: máximo $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Las rectas

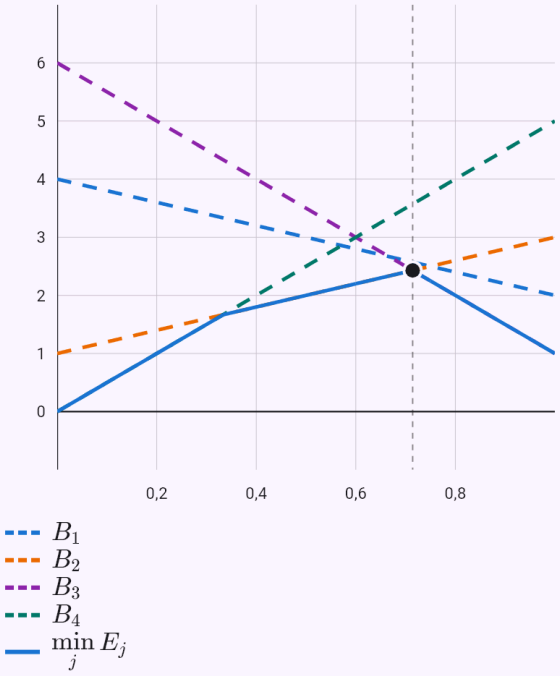
$$B_1: \ E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \ E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \ E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \ E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- El óptimo está en el cruce de las rectas B_2, B_3. B las mezcla con probabilidades w y 1 − w de modo que a A le dé igual qué fila jugar:

$$2w + (-5)(1-w) = 0 \ \Rightarrow \ w = \frac{5}{7}$$

- Las estrategias mixtas óptimas: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; el valor del juego $v = \frac{17}{7}$

Gráfica



Las rectas son las ganancias esperadas de A frente a las estrategias de B según p; la envolvente inferior resaltada es lo que A se asegura, y el punto, su máximo.

Piedra, papel o tijera por programación lineal: cada estrategia con probabilidad 1/3.

Enunciado: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Resultado

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Pasos

- La matriz de pagos (3×3): las filas son las estrategias del jugador A, las columnas las del jugador B y los números las ganancias de A (pérdidas de B). A quiere ganar lo máximo; B, perder lo mínimo.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	1
A_2	1	0	-1
A_3	-1	1	0

- Buscamos un punto de silla: el mínimo de cada fila (lo que A se asegura) y el máximo de cada columna (B no pierde más). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$: no hay punto de silla. Los jugadores usarán estrategias mixtas: cada estrategia pura con cierta probabilidad.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	-1	1	-1
A_2	1	0	-1	-1
A_3	-1	1	0	-1
max	1	1	1	

- Sumamos k = 2 a todos los elementos para que sean positivos; las estrategias óptimas no cambian y el valor aumenta en k.
- Un juego mayor se convierte en programación lineal. Jugador B: max Σ y sujeto a Σ a'·y ≤ 1, y ≥ 0, donde $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Su problema dual corresponde al jugador A.
- El problema de programación lineal

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

- La forma estándar: a una restricción ≤ se suma una variable de holgura s, a una ≥ se resta y se añade una variable artificial a, a una igualdad solo una artificial. La base inicial la forman las s y a

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$$

- Tabla símplex 1: entra y_1 (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_2 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	

- Tabla símplex 2: entra y_3 (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_1 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- Tabla símplex 3: entra y_2 (el $z_j - c_j$ más negativo), sale s_3 (el menor cociente b/a); el pivote va recuadrado.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	—
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- Tabla 4: ningún $z_j - c_j$ es negativo – la solución es

óptima.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- La solución óptima leída de la última tabla (las variables no básicas son cero)

$$y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$$

- El problema dual – una variable dual por restricción, una restricción por variable

$$\min v = u_1 + u_2 + u_3$$
$$2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$$
$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$$
$$3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

- Los precios sombra (las variables duales óptimas) de la última tabla: cuánto cambia el óptimo si el término independiente de una restricción aumenta en 1. Una restricción con holgura ($b_i - a_i x > 0$) tiene precio sombra 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- El óptimo del dual es igual al del primal:
$v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$
- Análisis de sensibilidad – los intervalos de los coeficientes del objetivo en los que la misma solución sigue siendo óptima

	c_j	
y_1	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$
y_2	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$
y_3	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$

- Los intervalos de los términos independientes en los que la misma base sigue siendo óptima (los precios sombra solo valen ahí)

	b_i	
1	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$
2	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$
3	1	$\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \rangle$

- Del óptimo: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$. Las estrategias son los y□ óptimos (para el jugador A, los precios sombra) multiplicados por v'.
- Las estrategias mixtas óptimas: $p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; el valor del juego $v = 0$

Un juego bimatricial (la batalla de los sexos): dos equilibrios de Nash puros y uno mixto.

Enunciado: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Resultado

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Pasos

- Un juego bimatricial (2 × 2): cada casilla contiene (pago de A, pago de B) y cada jugador quiere el suyo lo mayor posible.

	B_1	B_2
A_1	(2, 1)	(0, 0)
A_2	(0, 0)	(1, 2)

- Mejores respuestas: en cada columna subrayamos el mayor pago de A y en cada fila marcamos por encima el mayor de B. Las casillas con ambos (enmarcadas) son equilibrios de Nash en estrategias puras: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	(0, 0)
A_2	(0, 0)	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- El equilibrio mixto: A elige p de modo que a B le dé igual qué columna jugar, y B elige q de modo que a A le dé igual qué fila jugar (pagos esperados $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow\ p = \frac{2}{3}$$
$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow\ q = \frac{1}{3}$$

Limitaciones conocidas

- Como máximo 12 variables y 15 restricciones; problemas enteros hasta 6 variables. Todas las variables deben ser no negativas – las variables libres aún no se admiten.
- Problemas de transporte y de asignación hasta 8 × 8.
- Juegos matriciales hasta 6 × 6; el equilibrio de Nash mixto de un juego bimatricial, solo en juegos 2 × 2.

52. Grafos, redes y logística

Los problemas de grafos y redes están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campo Logística y redes: camino más corto (algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford y Floyd-Warshall), árbol de expansión mínima (Kruskal, Prim), flujo máximo y corte mínimo, arbitraje de divisas como búsqueda de un ciclo negativo y ruta crítica de un proyecto (CPM, PERT).

El grafo se introduce en un campo de varias líneas, una arista por línea – A-B 4 es una arista no dirigida de peso 4, A->B 4 una dirigida, en un flujo A->B 3/7 un flujo dado y la capacidad; sin número, una arista tiene peso 1. En lugar de las aristas puede pegar una matriz de pesos por filas (-, ∞ o 0 significa que no hay arista), opcionalmente con una línea de nombres de nodos encima. Los nodos pueden llamarse con una letra o una palabra (PHA, Madrid). Las actividades de un proyecto se dan con su nombre, duración y predecesoras (D 5 B C); para PERT, con tres estimaciones (B 3/4/11 A).

En el arbitraje puede elegir, en lugar de tipos propios, la tabla de hoy del ČNB o del BCE – basta con enumerar las monedas (CZK EUR USD GBP). Con una sola tabla nunca sale arbitraje (los pasos muestran por qué); con ambas tablas a la vez cada par de monedas toma el mejor tipo y puede salir un ciclo por encima de 1. El botón «Rellenar los tipos para editarlos» pone los tipos de una tabla en el campo Tipos de cambio – edítelos, por ejemplo, según los tipos de compra y venta de una casa de cambio.

El procedimiento muestra una tabla de iteraciones como en los apuntes – etiquetas definitivas y provisionales de Dijkstra, pasadas de Bellman-Ford, la matriz de Floyd-Warshall tras cada nodo, las aristas ordenadas de Kruskal, los caminos de aumento de un flujo, las pasadas hacia delante y hacia atrás de CPM. Bajo el resultado está el grafo, que recorre paso a paso con las flechas: en rojo el cambio del paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado.

Ejemplos

El camino más corto con el algoritmo de Dijkstra.

Enunciado: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2;`

`from=A; to=F; method=dijkstra)`

Resultado

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

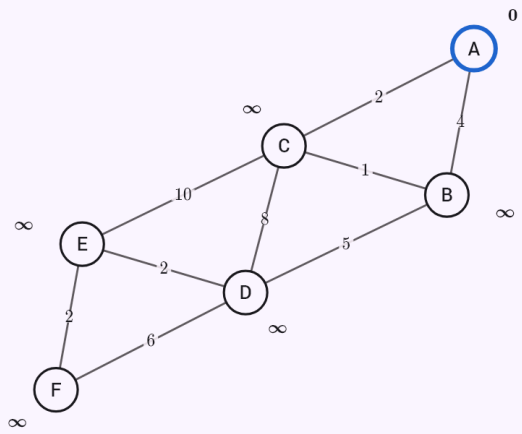
Pasos

- Un grafo no dirigido con 6 nodos y 9 aristas.
- Algoritmo de Dijkstra: en cada paso el nodo con la menor etiqueta provisional pasa a definitivo (recuadrado) y las etiquetas de sus vecinos bajan si por él pasa un camino más corto (en negrita); el subíndice es el predecesor.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- El camino leído hacia atrás por los predecesores: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, su longitud $2+1+5+2+2 = 12$

Gráfica



Estado inicial
$d(\mathrm{A}) = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Un peso de arista negativo – el algoritmo de Bellman-Ford.

Enunciado: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Resultado

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

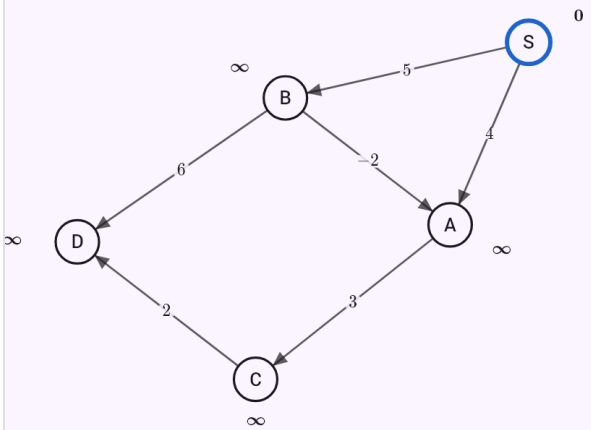
Pasos

- Un grafo dirigido con 5 nodos y 6 aristas.
- Algoritmo de Bellman-Ford: en cada pasada intentamos acortar el camino por cada arista, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; las etiquetas cambiadas van en negrita, el subíndice es el predecesor.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- En la pasada 2 ya no cambió ninguna etiqueta – las distancias son definitivas.
- El camino leído hacia atrás por los predecesores: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, su longitud $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Gráfica



Estado inicial
$d(\mathrm{S}) = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Las distancias entre todos los pares de nodos.

Enunciado: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Resultado

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Pasos

- Un grafo dirigido con 4 nodos y 6 aristas.
- El algoritmo de Floyd-Warshall empieza con la matriz de pesos de las aristas (∞ – no hay arista)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Permitimos el nodo A como parada: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; las distancias acortadas van en negrita.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Permitimos el nodo B como parada: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; las distancias acortadas van en negrita.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

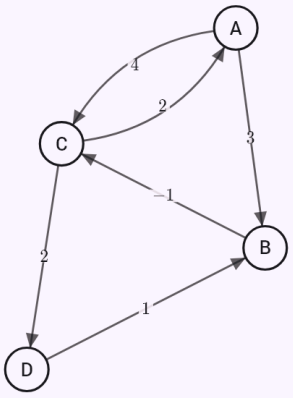
- Permitimos el nodo C como parada: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; las distancias acortadas van en negrita.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Permitimos el nodo D como parada: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; las distancias acortadas van en negrita.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Gráfica



Estado inicial
$D^{(0)}$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

El árbol de expansión mínima con el algoritmo de Kruskal.

Enunciado: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G`

`9; F-G 11; method=kruskal)`

Resultado

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

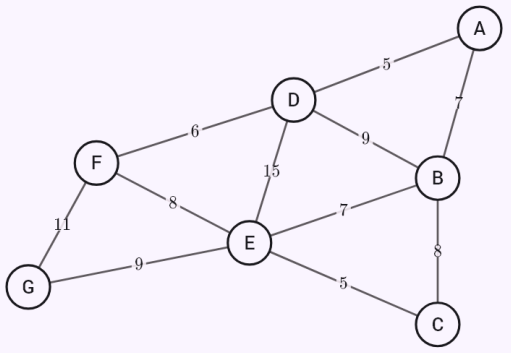
Pasos

- Un grafo no dirigido con 7 nodos y 11 aristas.
- Algoritmo de Kruskal: las aristas de la más barata a la más cara, cada una se añade (✓) salvo que cierre un ciclo (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- El peso total de las aristas del árbol:
  $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Gráfica



Estado inicial

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

La red más corta que une capitales regionales con el algoritmo de Prim.

Enunciado: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Resultado

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

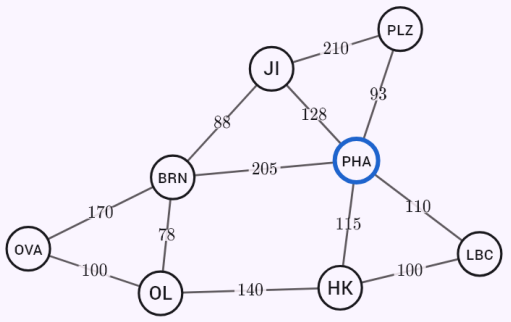
Pasos

- Un grafo no dirigido con 8 nodos y 12 aristas.
- Algoritmo de Prim desde el nodo PHA: en cada paso añadimos la arista más barata que va del árbol a un nodo fuera de él.

		w
1	$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ}$	93
2	$\mathrm{PHA}-\mathrm{LBC}$	110
3	$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK}$	100
4	$\mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$	128
5	$\mathrm{JI}-\mathrm{BRN}$	88
6	$\mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$	78
7	$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$	100

- El peso total de las aristas del árbol:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Gráfica



Estado inicial
PHA

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

El flujo máximo y el corte mínimo.

Enunciado: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Resultado

$f_{max} = 23$

$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$

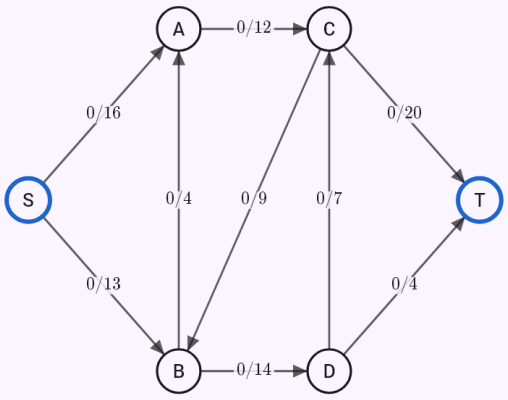
Pasos

- Buscamos el flujo máximo de la fuente S al sumidero T, partiendo de un flujo de valor 0
- 1.º camino de aumento (el más corto en la red residual): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. El flujo crece en la menor capacidad residual $\min(16, 12, 20) = 12$; su valor es ahora 12
- 2.º camino de aumento (el más corto en la red residual): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. El flujo crece en la menor capacidad residual $\min(13, 14, 4) = 4$; su valor es ahora 16
- 3.º camino de aumento (el más corto en la red residual): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. El flujo crece en la menor capacidad residual $\min(9, 10, 7, 8) = 7$; su valor es ahora 23
- No hay más caminos de aumento – en la red residual la fuente solo alcanza los nodos $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- El flujo por las aristas (f) y sus capacidades (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Las aristas que salen del conjunto S forman el corte mínimo: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Están todas saturadas y su capacidad total $12 + 7 + 4 = 23$ es igual al flujo máximo.

Gráfica



Estado inicial
$f = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Un ciclo de cambio rentable entre tres monedas.

Enunciado: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24;`

USD->GBP 0.7)

Resultado

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Pasos

- Los tipos y los pesos de las aristas $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

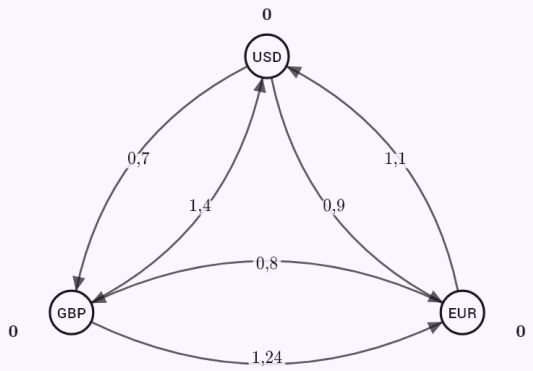
- Un ciclo es rentable cuando el producto de sus tipos supera 1 – en logaritmos, un ciclo negativo de los pesos $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- Iniciamos el algoritmo de Bellman-Ford desde todas las monedas a la vez (todas las etiquetas 0); las etiquetas cambiadas van en negrita, el subíndice es el predecesor.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{GBP}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{USD}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{GBP}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{USD}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Las etiquetas cambian también en la n-ésima pasada – los predecesores llevan al ciclo negativo $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Producto de los tipos $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, ganancia $0{,}8\,\%$: 1000 unidades se convierten en 1008 tras una vuelta.

Gráfica



Estado inicial
$d = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Tipos coherentes dados como matriz – no hay arbitraje.

Enunciado: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Resultado

No hay arbitraje – ningún ciclo de cambio es rentable.

Pasos

- Los tipos y los pesos de las aristas $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
CZK → EUR	0,04	3,2189
CZK → USD	0,0432	3,1419
EUR → CZK	25	−3,2189
EUR → USD	1,08	−0,076961
USD → CZK	23,1481	−3,1419
USD → EUR	0,925926	0,076961

- Un ciclo es rentable cuando el producto de sus tipos supera 1 – en logaritmos, un ciclo negativo de los pesos $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$

- Iniciamos el algoritmo de Bellman-Ford desde todas las monedas a la vez (todas las etiquetas 0); las etiquetas cambiadas van en negrita, el subíndice es el predecesor.

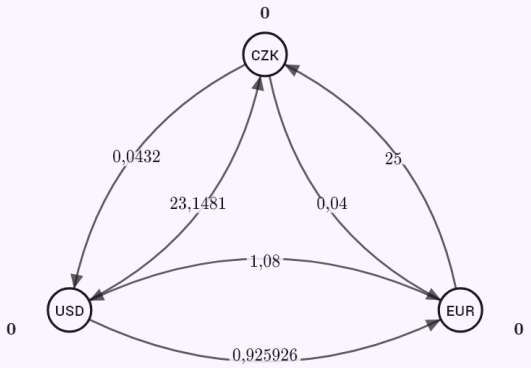
	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- En la pasada 2 ya no cambió ninguna etiqueta – las distancias son definitivas.

- Ni en la n-ésima pasada cambió ninguna etiqueta – no hay ciclo negativo y, por tanto, no hay arbitraje. Los potenciales p = −d son logaritmos de «precios» coherentes de las monedas: todo tipo cumple $\ln r \le p($ destino) − p(origen).

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Gráfica



Estado inicial
$d = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Los tipos de una sola tabla (ČNB) – nunca hay arbitraje.

Enunciado: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Resultado

No hay arbitraje – ningún ciclo de cambio es rentable.

Pasos

- Tipos de la tabla de tipos de cambio: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27/11/2026$
- La tabla da el valor de una unidad de cada moneda en la moneda base CZK (k) – y su logaritmo p = ln k

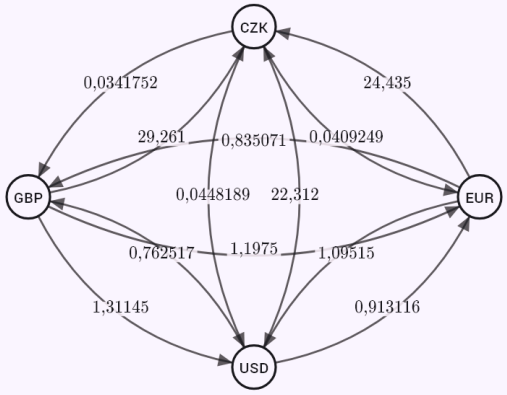
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$	$3{,}3763$

- El tipo entre dos monedas es un tipo cruzado a través de la moneda base: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- En cada ciclo los valores k se simplifican y el producto de los tipos es exactamente 1. Los tipos de una sola tabla ($\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB}$) son coherentes y nunca dan arbitraje – los logaritmos p = ln k son los «precios» de las monedas que lo demuestran.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- El ČNB y el BCE publican solo tipos medios (de referencia), sin compra ni venta. Con los tipos de una casa de cambio (compra y venta) cada ciclo pierde.

Gráfica



Los tipos del ČNB y del BCE juntos – una «ganancia» mínima entre tipos de referencia.

Enunciado: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Resultado

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$
$$\prod r \approx 1{,}0009332 \ (+0{,}09332\,\%)$$

Pasos

- Tipos de la tabla de tipos de cambio:
  $\text{ČNB},\ 27/11/2026;\quad \text{ECB},\ 27/11/2026$
- Para cada par de monedas tomamos el mejor de los dos tipos – el del ČNB o el del BCE (última columna de la tabla). El otro no mejoraría ningún ciclo.
- Los tipos y los pesos de las aristas $w = -\ln r$

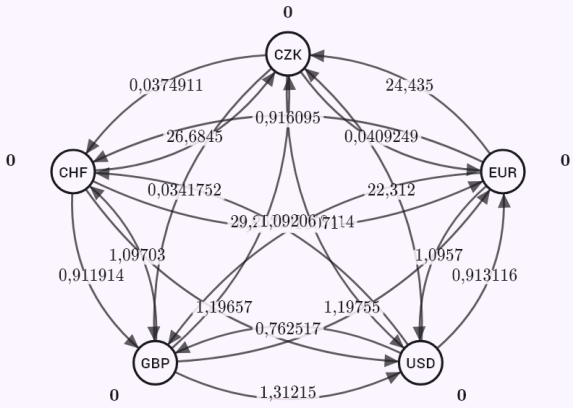
	r	$w = -\ln r$	
CZK → EUR	0,0409249	3,196	ČNB
CZK → USD	0,0448414	3,1046	ECB
CZK → GBP	0,0341752	3,3763	ČNB
CZK → CHF	0,0374911	3,2837	ČNB
EUR → CZK	24,435	−3,196	ČNB
EUR → USD	1,0957	−0,091393	ECB
EUR → GBP	0,835071	0,18024	ČNB
EUR → CHF	0,916095	0,087635	ČNB
USD → CZK	22,312	−3,1051	ČNB
USD → EUR	0,913116	0,090892	ČNB
USD → GBP	0,762517	0,27113	ČNB
USD → CHF	0,836501	0,17853	ČNB
GBP → CZK	29,2621	−3,3763	ECB
GBP → EUR	1,19755	−0,18028	ECB
GBP → USD	1,31215	−0,27167	ECB
GBP → CHF	1,09703	−0,092604	ČNB
CHF → CZK	26,6845	−3,2841	ECB
CHF → EUR	1,09206	−0,088066	ECB
CHF → USD	1,19657	−0,17946	ECB
CHF → GBP	0,911914	0,092209	ECB

- Un ciclo es rentable cuando el producto de sus tipos supera 1 – en logaritmos, un ciclo negativo de los pesos $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- Iniciamos el algoritmo de Bellman-Ford desde todas las monedas a la vez (todas las etiquetas 0); las etiquetas cambiadas van en negrita, el subíndice es el predecesor.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272064_{(}}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}272996_{(}}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}273929_{(}}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}274862_{(}}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{CHF}}$	$\mathbf{-0{,}275795_{(}}$

- Las etiquetas cambian también en la n-ésima pasada – los predecesores llevan al ciclo negativo $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Producto de los tipos $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, ganancia $0{,}09332\,\%$: 1000 unidades se convierten en $1000{,}933$ tras una vuelta.
- El ciclo solo sale entre los tipos de referencia de dos bancos, que se fijan en momentos distintos y se redondean de otra manera. Nadie opera a estos tipos – la ganancia es prácticamente inalcanzable.

Gráfica



Estado inicial
$d = 0$

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

La ruta crítica y las holguras de las actividades.

Enunciado: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Resultado

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Pasos

- Las actividades, sus duraciones y predecesoras

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Pasada hacia delante: una actividad empieza lo antes posible cuando terminan todas sus predecesoras (ES = el mayor EF de las predecesoras) y termina en EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- La duración del proyecto es el más tardío de los finales tempranos: $T = 14$
- Pasada hacia atrás: una actividad debe terminar a más tardar cuando deben empezar sus sucesoras (LF = el menor LS de las sucesoras) y empezar a más tardar en LS = LF − t.

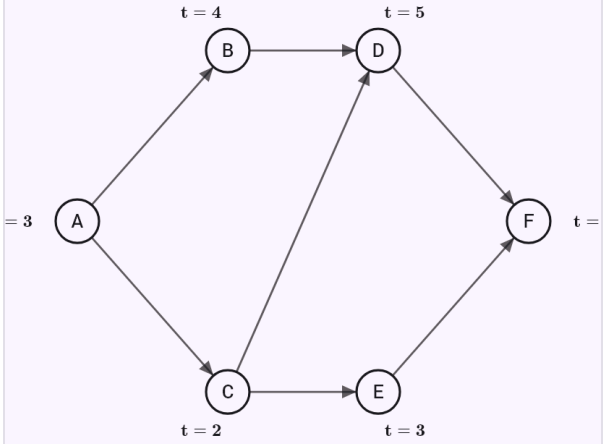
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- La holgura de cada actividad; las actividades críticas (★) no tienen ninguna

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- La ruta crítica – un retraso de cualquiera de sus actividades retrasa todo el proyecto: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Gráfica



Estado inicial

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

PERT – la probabilidad de terminar el proyecto en el plazo.

Enunciado: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Resultado

$$T = 13$$
$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$$
$$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$$

Pasos

- Las actividades, sus duraciones y predecesoras

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT: duraciones esperadas y varianzas a partir de las tres estimaciones

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Pasada hacia delante: una actividad empieza lo antes posible cuando terminan todas sus predecesoras (ES = el mayor EF de las predecesoras) y termina en EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- La duración del proyecto es el más tardío de los finales tempranos: $T = 13$
- Pasada hacia atrás: una actividad debe terminar a más tardar cuando deben empezar sus sucesoras (LF = el menor LS de las sucesoras) y empezar a más tardar en LS = LF − t.

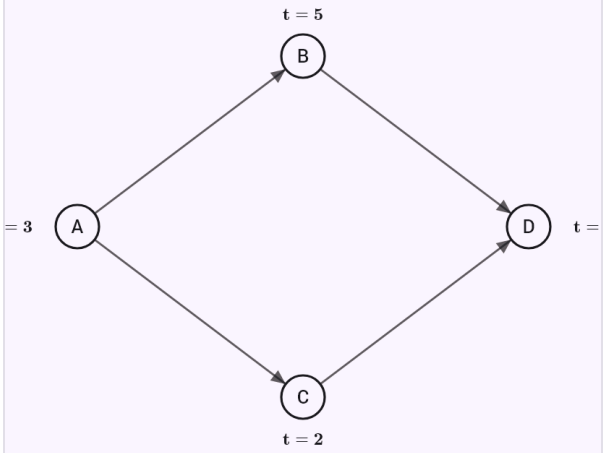
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- La holgura de cada actividad; las actividades críticas (★) no tienen ninguna

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- La ruta crítica – un retraso de cualquiera de sus actividades retrasa todo el proyecto: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- La varianza de la duración del proyecto es la suma de las varianzas en la ruta crítica: $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- La duración sigue aproximadamente una distribución normal – probabilidad de terminar en el plazo: $P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15-13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$

Gráfica



Estado inicial

Con las flechas recorre el algoritmo paso a paso. En rojo el cambio de este paso, en azul lo ya decidido, en verde el resultado. Junto a los nodos están sus etiquetas (distancia, tiempos más tempranos y más tardíos).

Limitaciones conocidas

- Un grafo puede tener como máximo 30 nodos y 200 aristas; las matrices de Floyd-Warshall nodo a nodo se muestran hasta 6 nodos, en grafos mayores solo la matriz final.

- La búsqueda de arbitraje encuentra un ciclo rentable (no necesariamente el más rentable); las diferencias por debajo del 0,0001 % se consideran redondeo de los tipos.
- El ČNB y el BCE publican solo tipos medios (de referencia), a los que nadie opera; la «ganancia» con ambas tablas a la vez es de centésimas de punto porcentual y prácticamente inalcanzable.
- Con ambas tablas solo las monedas que publican los dos bancos (ninguno publica el rublo ruso).
- Las rutas de vehículos, el problema de la mochila, los inventarios y las colas están en preparación; la programación lineal, el transporte y la asignación tienen su propio capítulo.

53. Psicometría

Los cálculos psicométricos para interpretar resultados de pruebas (según el texto «Psicometría clínica – del número a la interpretación») están en el formulario «Estadística y psicometría» – sección «Aplicaciones» de la pantalla de inicio, campo Psicología. Elija la tarea, la escala y lo que busca y rellene los valores medidos; la escala rellena la media y la desviación típica del baremo (CI 100; 15, T 50; 10, escalar 10; 3, z 0; 1, decatipo 5,5; 2, estanino 5; 2), «Propia» permite introducir el baremo de otra prueba. El icono «?» explica de dónde sale la fórmula.

Ayuda dentro de la aplicación: el icono «?» de cada tarea del formulario explica qué calcula y de dónde viene la fórmula. El resultado muestra el procedimiento paso a paso y sus términos técnicos (kappa de Cohen, curva ROC, intervalo de confianza, valor p, percentil, puntuación verdadera, valores predictivos…) están subrayados con puntos: al tocar un término se muestra una breve explicación en palabras sencillas, a menudo con un ejemplo. Las notas al final del procedimiento indican cómo interpretar el resultado y qué tener en cuenta.

Conversión de puntuaciones típicas: $z = (X - M)/DT$ y a partir de ella T, CI, la puntuación escalar, decatipo y estanino (redondeados a un entero dentro de la escala) y el percentil. Puntuación y percentil: $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ suponiendo la distribución normal y, a la inversa, la puntuación de un percentil dado.

El error típico de medida $SEM = DT \cdot \sqrt{(1 - r)}$ a partir de la fiabilidad r. El intervalo de confianza alrededor de la puntuación observada $X \pm z \cdot SEM$ al 80, 90, 95 o 99 % (z = 1,28; 1,645; 1,96; 2,576). La estimación de la puntuación verdadera $T' = M + r(X - M)$ – regresión a la media – con el intervalo alrededor de T′ y el error típico de estimación $SEE = DT \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

La significación de la diferencia de dos puntuaciones de la misma escala (índices del WAIS, por ejemplo): error típico de la diferencia $SE_dif = DT \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ y diferencia crítica $z \cdot SE_dif$. Valores predictivos de una prueba por el teorema de Bayes: VPP y VPN a partir de la sensibilidad, la especificidad y la prevalencia – o de una tabla 2×2 (verdaderos y falsos positivos y negativos), opcionalmente con la prevalencia de la población donde se usa la prueba – y las razones de verosimilitud LR^+ y LR^-.

La fórmula de Spearman-Brown (en el mismo formulario) calcula la fiabilidad de un test alargado k veces, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, o al revés cuántas veces alargar el test para una fiabilidad objetivo – con el número actual de ítems, también los ítems necesarios. La corrección de Bonferroni da el nivel más estricto $\alpha' = \alpha/m$ para m comparaciones, junto con la probabilidad de un resultado falsamente significativo sin corrección y la corrección de Šidák.

La fiabilidad y el acuerdo a partir de datos medidos se obtienen con los chips de data(…) o de la cuadrícula «Como datos» (pegado desde Excel, archivo CSV): alfa de Cronbach – ítems en columnas, encuestados en filas – con análisis de ítems (correlación del ítem con el resto del test, alfa si se elimina

el ítem); el ICC – evaluadores en columnas, sujetos en filas – las seis formas de Shrout y Fleiss a partir de una tabla de análisis de varianza; kappa de Cohen de dos columnas de valoraciones (categorías como números) o de una tabla de acuerdo cuadrada; curva ROC y AUC de una columna de puntuaciones y una columna de estado 0/1 (1 = trastorno) mediante el estadístico U de Mann-Whitney, con el punto de corte según el índice de Youden y la gráfica de la curva ROC. Alfa, ICC, kappa y AUC llevan un intervalo de confianza (90, 95 o 99 % con un chip): alfa según Feldt, ICC a partir de la distribución F, kappa a partir del error estándar asintótico, AUC según Hanley y McNeil. Con categorías ordenadas calcula kappa también con pesos lineales o cuadráticos. La curva ROC puede salir también de dos columnas con las puntuaciones de dos grupos (la primera positiva, de cualquier longitud), y a la AUC se añade la prueba de Mann-Whitney. Tres columnas – las puntuaciones de dos pruebas y el estado – se comparan con la prueba de DeLong, con ambas curvas en una gráfica.

Los pasos terminan con una nota de interpretación: los percentiles son ordinales (no se suman ni promedian), la conversión a percentil solo vale con distribución normal, una diferencia significativa no es necesariamente infrecuente (tasa base de la discrepancia), los valores predictivos dependen de la prevalencia. La gráfica muestra la curva normal con la puntuación, el intervalo o la región crítica marcados.

Ejemplos

CI 85 en todas las escalas: z = −1, T = 40, puntuación escalar 7.

Enunciado: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Resultado

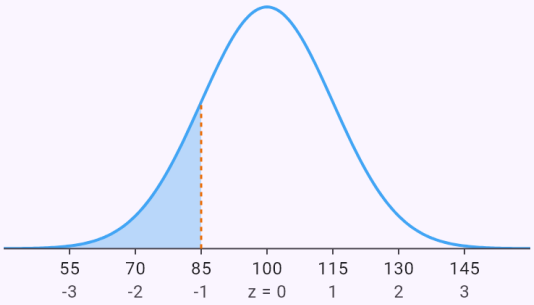
$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

Pasos

- Datos: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Las puntuaciones típicas indican a cuántas desviaciones típicas de la media del baremo está un rendimiento. Primero z = (X − M)/DT, después la otra escala: T = 50 + 10z, CI = 100 + 15z, escalar = 10 + 3z, decatipo = 5,5 + 2z (1–10), estanino = 5 + 2z (1–9). El percentil es el porcentaje de la población con puntuación menor – solo para una puntuación con distribución normal. Ecuación del modelo: $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Despejamos la magnitud buscada: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Sustituimos: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Sustituimos: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Sustituimos: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Sustituimos: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Sustituimos
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Sustituimos:
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$
- Decatipos y estaninos son enteros: el valor se redondea y se limita al rango de la escala (1–10, 1–9).
- Sustituimos: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- La conversión a percentil solo vale para una puntuación con distribución normal. En pruebas asimétricas (los tiempos del TMT, por ejemplo) el percentil se lee en la tabla del baremo.
- Los percentiles son una escala ordinal: sus pasos no son iguales (en el centro los percentiles 50 y 60 están cerca en puntuación, en los extremos lejos). Por eso no se suman, promedian ni restan.

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$PR \approx 16 \quad X = 85$

Un CI de 130 corresponde al percentil 98.

Enunciado: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Resultado

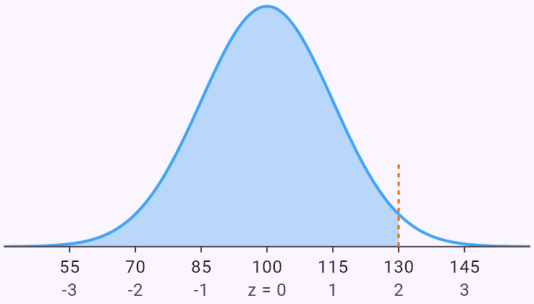
$$PR \approx 98$$

Pasos

- Buscamos PR; datos:
  $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- El percentil indica qué porcentaje del grupo normativo obtuvo una puntuación menor. Suponiendo la distribución normal, sale de la puntuación z: PR = 100·Φ(z); la puntuación a partir del percentil, por el cuantil z = Φ⁻¹(PR/100). Ecuación del modelo:
  $$PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$$
- Despejamos la magnitud buscada: $z = \dfrac{X - M}{SD}$
- Sustituimos: $z = \dfrac{130 - 100}{15} = 2$
- Sustituimos: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- La conversión a percentil solo vale para una puntuación con distribución normal. En pruebas asimétricas (los tiempos del TMT, por ejemplo) el percentil se lee en la tabla del baremo.
- Los percentiles son una escala ordinal: sus pasos no son iguales (en el centro los percentiles 50 y 60 están cerca en puntuación, en los extremos lejos). Por eso no se suman, promedian ni restan.

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$PR \approx 98 \quad X = 130$

La puntuación T del percentil 16.

Enunciado: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Resultado

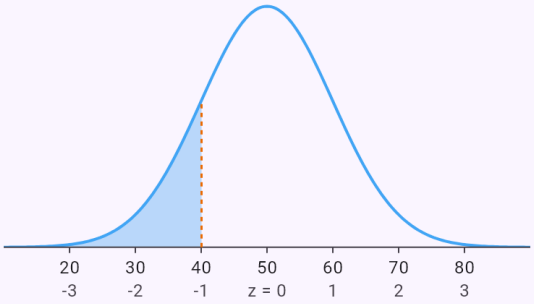
$$X \approx 40{,}1$$

Pasos

- Buscamos X; datos:
  $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Convertimos las unidades: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- El percentil indica qué porcentaje del grupo normativo obtuvo una puntuación menor. Suponiendo la distribución normal, sale de la puntuación z: PR = 100·Φ(z); la puntuación a partir del percentil, por el cuantil z = Φ⁻¹(PR/100). Ecuación del modelo:
  $PR = 100 \cdot \Phi\left(\dfrac{X - M}{SD}\right)$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $z = \Phi^{-1}\left(\dfrac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- Sustituimos
  $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- La conversión a percentil solo vale para una puntuación con distribución normal. En pruebas asimétricas (los tiempos del TMT, por ejemplo) el percentil se lee en la tabla del baremo.
- Los percentiles son una escala ordinal: sus pasos no son iguales (en el centro los percentiles 50 y 60 están cerca en puntuación, en los extremos lejos). Por eso no se suman, promedian ni restan.

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

El error típico de medida de una prueba con fiabilidad 0,97.

Enunciado: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Resultado

$$SEM \approx 2{,}6$$

Pasos

- Buscamos SEM; datos: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Ninguna medida es exacta: puntuación observada X = verdadera T + error E. El error típico de medida SEM = DT·√(1 − r) indica cuánto difiere típicamente la observada de la verdadera; r es la fiabilidad de la prueba (test-retest, α de Cronbach). A mayor fiabilidad, menor error. Ecuación del modelo: $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Error típico de medida: $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

Intervalo de confianza al 95 % alrededor de un CI de 95.

Enunciado: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Resultado

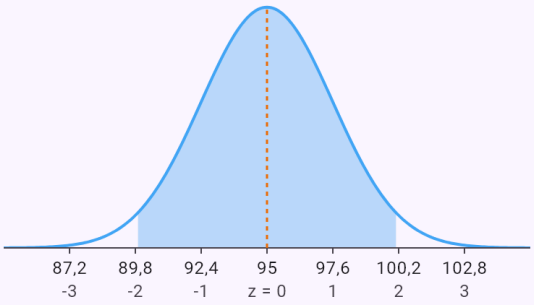
$95\,\%:\ [89{,}9,\ 100{,}1]$

Pasos

- Buscamos X; datos: $X = 95,\quad SD = 15,\quad r_{xx} = 0{,}97$
- Alrededor de la puntuación observada trazamos la banda donde está la verdadera con una confianza dada: X ± z·SEM, con z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) o 2,576 (99 %). Una puntuación debe leerse como un intervalo, no como un número exacto. Ecuación del modelo
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Error típico de medida: $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Valor crítico de la normal estándar:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Sustituimos:
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow [89{,}91,\ 100{,}1]$
- El intervalo se construye alrededor de la puntuación observada. Más preciso (sobre todo en puntuaciones extremas) es el intervalo alrededor de la verdadera estimada: el modelo «Estimación de la puntuación verdadera».

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$95\,\%:\ [89{,}9,\ 100{,}1] \quad X = 95$

Estimación de la puntuación verdadera de un CI de 74 con fiabilidad 0,92.

Enunciado: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Resultado

$$T' \approx 76{,}1$$

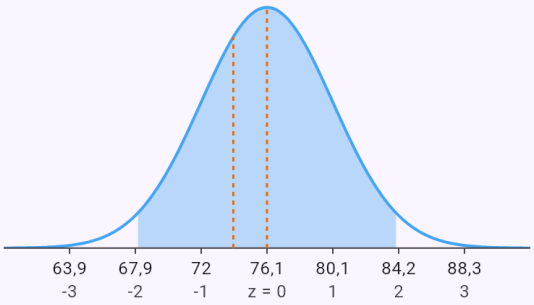
$$95\,\%: \ [68{,}1,\ 84{,}1]$$

Pasos

- Buscamos T'; datos:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- En puntuaciones extremas la verdadera se estima más cerca de la media (regresión a la media): T' = M + r(X − M). El intervalo de confianza se construye entonces alrededor de T' con el error típico de estimación SEE = DT·√(r(1 − r)): más preciso que alrededor de la observada, sobre todo con baja fiabilidad. Ecuación del modelo
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Sustituimos: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- La estimación de la puntuación verdadera está más cerca de la media que la observada: al medir de nuevo, un resultado extremo probablemente saldría menos extremo.
- Error típico de estimación de la puntuación verdadera:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Valor crítico de la normal estándar:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Sustituimos
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow [68{,}1,\ 84{,}06]$

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$X = 74 \quad T'$

Dos índices, 112 y 97: ¿es significativa la diferencia?

Enunciado: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one];`

`r1=0.95[one]; r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Resultado

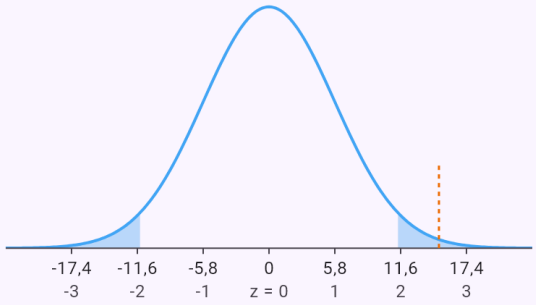
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

Pasos

- Buscamos D; datos:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- ¿Difieren dos puntuaciones (índices del WAIS, por ejemplo) más de lo que explicaría el error de medida? Error típico de la diferencia SE_dif = DT·√(2 − r_{11} − r_{22}), diferencia crítica z·SE_dif. Una diferencia que la alcanza es significativa, lo que no significa que sea infrecuente. Ecuación del modelo
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Error típico de la diferencia:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Valor crítico de la normal estándar:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Diferencia crítica: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Sustituimos: $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- La diferencia alcanza el valor crítico: es significativa (no se explica solo por el error de medida).
- Significativa no quiere decir infrecuente: diferencias de índices de este tamaño las presenta a menudo el 20–30 % de la muestra normativa (tasa base de la discrepancia). Para interpretar importa también su frecuencia en el baremo.

Gráfica

Densidad normal, el área coloreada es la probabilidad buscada



$95\,\%$ $D = 15$

Un cribado con sensibilidad del 92,5 % y especificidad del 74,6 % con prevalencia del 2 %.

Enunciado: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

input=rates)

Resultado

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Pasos

- Buscamos PPV; datos:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Convertimos las unidades:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- La sensibilidad (Se) es la proporción de enfermos que la prueba detecta; la especificidad (Sp), la de sanos que descarta correctamente. En la práctica importa la probabilidad del trastorno ante un resultado positivo: el valor predictivo positivo VPP. Por el teorema de Bayes depende de la prevalencia p: VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)); el negativo VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Ecuación del modelo
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Sustituimos
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Sustituimos
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Razones de verosimilitud:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Los valores predictivos dependen de la prevalencia: con prevalencia baja, incluso con una buena prueba, la mayoría de los positivos son falsos positivos. Un cribado positivo debe confirmarse.

Valores predictivos a partir de una tabla 2×2.

Enunciado: model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)

Resultado

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Pasos

- Buscamos PPV; datos:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Sensibilidad: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Especificidad: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Prevalencia en la muestra:
  $p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$
- La sensibilidad (Se) es la proporción de enfermos que la prueba detecta; la especificidad (Sp), la de sanos que descarta correctamente. En la práctica importa la probabilidad del trastorno ante un resultado positivo: el valor predictivo positivo VPP. Por el teorema de Bayes depende de la prevalencia p: VPP = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)); el negativo VPN = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Ecuación del modelo
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$

- Sustituimos
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Sustituimos
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Razones de verosimilitud:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Los valores predictivos dependen de la prevalencia: con prevalencia baja, incluso con una buena prueba, la mayoría de los positivos son falsos positivos. Un cribado positivo debe confirmarse.

Consistencia interna de un cuestionario de cuatro ítems.

Enunciado: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Alfa de Cronbach

Resultado

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ [0{,}765,\ 0{,}990]$$

Pasos

- Número de ítems (columnas) k = 4, número de encuestados (filas) 6
- Las varianzas muestrales de los ítems y su suma

$$s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$$

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- La puntuación total de cada encuestado (suma de sus respuestas): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. La varianza de las puntuaciones totales: $s_X^2 \approx 24{,}17$
- Alfa de Cronbach – la consistencia interna es excelente.

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Análisis de ítems – media, varianza, correlación del ítem con el resto del test y alfa si se elimina el ítem

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- Intervalo de confianza del 95 % según Feldt: el cociente (1 − α)/(1 − α□) sigue la distribución F con n − 1 y (n − 1) (k − 1) grados de libertad

$$F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$$

$$F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$$

$$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

$$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Orientación para α: ≥ 0,9 excelente, ≥ 0,8 buena, ≥ 0,7 aceptable consistencia interna. Para investigación basta aproximadamente 0,7; para decisiones sobre una persona (diagnóstico) se recomienda al menos 0,9.
- Un α alto no significa que el test mida un único rasgo, y crece con el mero número de ítems. Si α sube al eliminar un ítem (última columna de la tabla), probablemente el ítem no pertenece a la escala.

Acuerdo de cuatro evaluadores sobre seis sujetos (ejemplo de Shrout y Fleiss).

Enunciado: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (acuerdo entre evaluadores)

Resultado

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \quad [-0{,}133,\ 0{,}723]$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \quad [-0{,}884,\ 0{,}912]$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \quad [0{,}019,\ 0{,}761]$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \quad [0{,}071,\ 0{,}927]$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \quad [0{,}342,\ 0{,}946]$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \quad [0{,}676,\ 0{,}986]$$

Pasos

- Número de sujetos evaluados (filas) 6, número de evaluadores (columnas) k = 4, media global $\bar{x} = 5{,}292$
- Análisis de varianza – sumas de cuadrados SS, grados de libertad df y cuadrados medios MS entre sujetos (R), entre evaluadores (C), residual (E) y dentro de los sujetos (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Modelo de un factor – cada sujeto puede ser evaluado por evaluadores distintos

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Modelo de dos factores con evaluadores aleatorios – acuerdo absoluto

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Modelo de dos factores con evaluadores fijos – consistencia

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Intervalos de confianza del 95 % a partir de la distribución F (Shrout y Fleiss): los cocientes de las medias cuadráticas y sus límites

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\ 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\ 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\ 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\ 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Los seis ICC con sus intervalos de confianza del 95 %

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$[-0{,}133,\ 0{,}723]$
$ICC(1,4)$	0,443	$[-0{,}884,\ 0{,}912]$
$ICC(2,1)$	0,290	$[0{,}019,\ 0{,}761]$
$ICC(2,4)$	0,620	$[0{,}071,\ 0{,}927]$
$ICC(3,1)$	0,715	$[0{,}342,\ 0{,}946]$
$ICC(3,4)$	0,909	$[0{,}676,\ 0{,}986]$

- Qué ICC usar: ICC(1,·) – cada sujeto lo evalúan evaluadores distintos; ICC(2,·) – los evaluadores son una muestra aleatoria e interesa el acuerdo absoluto; ICC(3,·) – evaluadores fijos, interesa la consistencia. ICC(·,1) vale para un evaluador, ICC(·,k) para la media de k evaluadores. Orientación (Koo y Li): menos de 0,5 pobre, 0,5–0,75 moderada, 0,75–0,9 buena, más de 0,9 excelente.
- ICC(3,k) es igual al alfa de Cronbach de los mismos datos (los evaluadores como ítems).
- El intervalo de confianza de un ICC suele ser amplio con pocos sujetos: incluso un ICC alto puede tener un límite inferior bajo. Los intervalos de ICC(2,·) son aproximados (grados de libertad de Satterthwaite).
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Acuerdo de dos médicos en tres categorías diagnósticas.

Enunciado: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa de Cohen

Resultado

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\%:\ [0{,}256,\ 0{,}986]$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Pasos

- Con los pares de valoraciones se forma la tabla de acuerdo (filas evaluador A, columnas evaluador B, acuerdo en la diagonal)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- El acuerdo observado – la proporción de casos en la diagonal: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$
- El acuerdo esperado por azar – a partir de los totales de filas y columnas

  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$

- Kappa de Cohen – el acuerdo es considerable (Landis y Koch).

  $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$

- Intervalo de confianza del 95 % a partir del error estándar asintótico (Fleiss, Cohen y Everitt)

  $SE \approx 0{,}1861$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow [0{,}256,\ 0{,}986]$

- κ descuenta del acuerdo el esperado por azar: 0 significa acuerdo solo por azar, 1 acuerdo total. Si predomina una categoría, κ sale baja incluso con un alto porcentaje de acuerdo – por eso se da también p_o.
- Las categorías se toman como nominales – todo desacuerdo pesa igual. Con categorías ordenadas (p. ej. grado de gravedad) se usa la κ ponderada, que penaliza menos un desacuerdo menor.

Los mismos diagnósticos con pesos cuadráticos: las categorías vecinas cuentan como acuerdo parcial.

Enunciado: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Kappa de Cohen, Pesos cuadráticos

Resultado

$\kappa_w \approx 0{,}7955$

$95\,\%:\ [0{,}576,\ 1{,}000]$

$p_o = 0{,}9375$

$p_e \approx 0{,}6944$

Pasos

- Con los pares de valoraciones se forma la tabla de acuerdo (filas evaluador A, columnas evaluador B, acuerdo en la diagonal)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Pesos de acuerdo cuadráticos: un desacuerdo pequeño penaliza poco y uno grande mucho: $w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- Acuerdo observado ponderado: las frecuencias de la tabla por los pesos: $p_o = \frac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \frac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$
- Acuerdo ponderado esperado por azar: de los totales de filas y columnas con los pesos: $p_e = \frac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \frac{100}{144} \approx 0{,}6944$
- Kappa de Cohen ponderada el acuerdo es considerable (Landis y Koch).

  $\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$

- Intervalo de confianza del 95 % a partir del error estándar asintótico (Fleiss, Cohen y Everitt)

  $SE \approx 0{,}1119$

  $\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow [0{,}576,\ 1{,}000]$

- κ descuenta del acuerdo el esperado por azar: 0 significa acuerdo solo por azar, 1 acuerdo total. Si predomina una categoría, κ sale baja incluso con un alto porcentaje de acuerdo – por eso se da también p_o.
- La kappa ponderada cuenta también el acuerdo parcial: calificaciones que difieren en un grado no son un desacuerdo total. Con pesos cuadráticos se acerca al ICC; conviene indicar qué pesos se usaron.

Kappa de Cohen de una tabla de acuerdo 2×2.

Enunciado: `data(20 5; 10 15)` Kappa de Cohen

Resultado

$\kappa = 0{,}4$

$95\,\%:\ [0{,}151,\ 0{,}649]$

$p_o = 0{,}7$

$p_e = 0{,}5$

Pasos

- La tabla de acuerdo (filas evaluador A, columnas evaluador B, acuerdo en la diagonal) con los totales de filas y columnas

$A\backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- El acuerdo observado – la proporción de casos en la diagonal: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20 + 15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$
- El acuerdo esperado por azar – a partir de los totales de filas y columnas $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$
- Kappa de Cohen: $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – el acuerdo es aceptable (Landis y Koch).
- Intervalo de confianza del 95 % a partir del error estándar asintótico (Fleiss, Cohen y Everitt)

  $SE \approx 0{,}127$

  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow [0{,}151,\ 0{,}649]$

- κ descuenta del acuerdo el esperado por azar: 0 significa acuerdo solo por azar, 1 acuerdo total. Si predomina una categoría, κ sale baja incluso con un alto porcentaje de acuerdo – por eso se da también p_o.

Qué tan bien la puntuación del test separa a los pacientes (estado 1) de los sanos (estado 0).

Enunciado: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` Curva ROC y AUC

Resultado

$$AUC \approx 0{,}9167$$

$$95\,\%:\ [0{,}706,\ 1{,}000]$$

$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$

$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Pasos

- Casos positivos (estado 1) y negativos (estado 0): $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Se ordenan todas las puntuaciones y se les asigna su rango. La suma de rangos de los casos positivos: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- El estadístico U de Mann-Whitney – el número de pares (positivo, negativo) en los que el caso positivo puntúa más alto: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- El área bajo la curva ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – la capacidad discriminativa del test es sobresaliente.
- Intervalo de confianza del 95 % según Hanley y McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$

$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$

$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right) + }{n_1 n_0}}$$

$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow [0{,}706,\ 1{,}0$$

- Hipótesis nula: la prueba no discrimina (AUC = 0,5); alternativa: discrimina. Prueba de Mann-Whitney: $H_0\colon AUC = 0{,}5, \quad H_1\colon AUC \neq 0{,}5$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue la distribución normal estándar: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- El valor crítico al nivel α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la región crítica $|z| \ge 1{,}96$
- El valor p: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Como $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El punto de corte con el mayor índice de Youden es 14 (es positiva una puntuación ≥ 14)

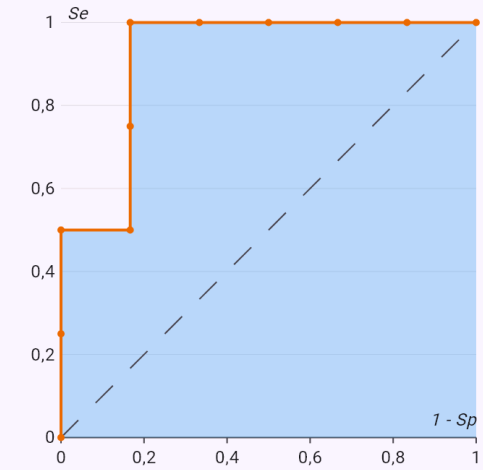
  $Se = 1$

  $Sp \approx 0{,}8333$

  $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$
- El AUC es la probabilidad de que un caso positivo elegido al azar puntúe más alto que uno negativo elegido al azar (0,5 – el test no discrimina, 1 – discrimina perfectamente). El punto de corte según el índice de Youden es solo una opción – en la práctica también cuenta el coste de los falsos positivos y falsos negativos.
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Gráfica

Curva ROC – el área sombreada es el AUC, la diagonal discontinua corresponde a un test que no discrimina



Puntuaciones de pacientes y sanos en dos grupos de distinto tamaño, con la prueba de Mann-Whitney.

Enunciado: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` Curva ROC y AUC

Resultado

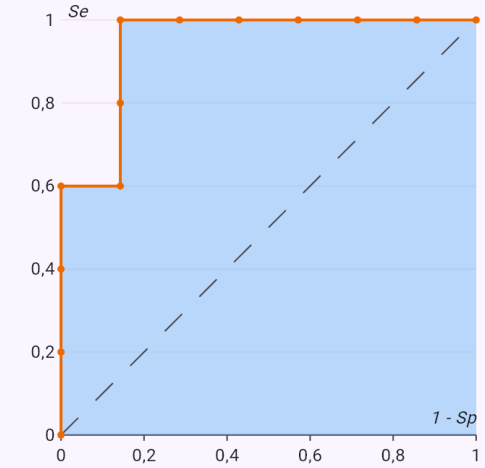
$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%:\ [0{,}787,\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Pasos

- Grupo positivo $\mathrm{pacienti}$ y grupo negativo zdravi: $n_1 = 5, \quad n_0 = 7$
- Se ordenan todas las puntuaciones y se les asigna su rango. La suma de rangos de los casos positivos: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- El estadístico U de Mann-Whitney – el número de pares (positivo, negativo) en los que el caso positivo puntúa más alto: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- El área bajo la curva ROC: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – la capacidad discriminativa del test es sobresaliente.
- Intervalo de confianza del 95 % según Hanley y McNeil
  $$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
  $$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
  $$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
  $$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow [0{,}787,\ 1{,}$$
- Hipótesis nula: la prueba no discrimina (AUC = 0,5); alternativa: discrimina. Prueba de Mann-Whitney: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \ne 0{,}5$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue la distribución normal estándar: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- El valor crítico al nivel α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la región crítica $|z| \ge 1{,}96$
- El valor p: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Como $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, rechazamos la hipótesis nula – el resultado es estadísticamente significativo.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- El punto de corte con el mayor índice de Youden es 14 (es positiva una puntuación ≥ 14)
  $Se = 1$
  $Sp \approx 0{,}8571$
  $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$
- El AUC es la probabilidad de que un caso positivo elegido al azar puntúe más alto que uno negativo elegido al azar (0,5 – el test no discrimina, 1 – discrimina perfectamente). El punto de corte según el índice de Youden es solo una opción – en la práctica también cuenta el coste de los falsos positivos y falsos negativos.
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Gráfica

Curva ROC – el área sombreada es el AUC, la diagonal discontinua corresponde a un test que no discrimina



Dos pruebas en las mismas personas: ¿discriminan igual de bien? (prueba de DeLong)

Enunciado: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16`

1; 16 8 0; 10 13 0)

Curva ROC y AUC

Resultado

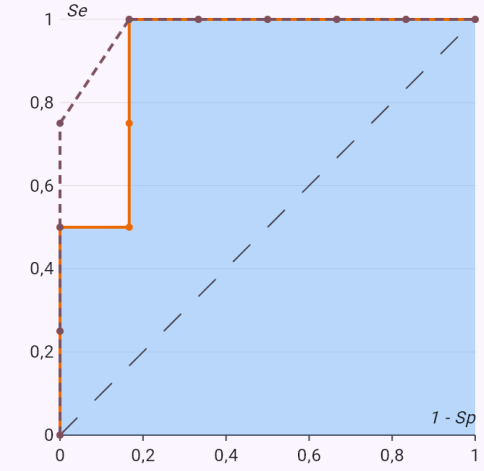
$$AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167,\ AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ [-0{,}277,\ 0{,}152]$$

Pasos

- Dos pruebas A y B en los mismos casos, estado positivo 1: $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Las áreas bajo las curvas ROC de ambas pruebas y sus errores estándar (DeLong)
  $AUC_{\mathrm{A}} \approx 0{,}9167$
  $AUC_{\mathrm{B}} \approx 0{,}9792$
  $SE_{\mathrm{A}} \approx 0{,}09623$
  $SE_{\mathrm{B}} \approx 0{,}02946$
- La varianza de la diferencia según DeLong: las pruebas se aplican a los mismos casos, por eso se resta su covarianza (correlación de las AUC $-0{,}327$)
  $\operatorname{var}(AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}) = \operatorname{var} AUC_{\mathrm{A}} + \operatorname{var} AUC_{\mathrm{B}} - 2\,\mathrm{c}$
  $= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot$
  $SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$
- Hipótesis nula: ambas pruebas discriminan igual; alternativa: difieren
  H_0: $AUC_{\mathrm{A}} = AUC_{\mathrm{B}}$
  H_1: $AUC_{\mathrm{A}} \neq AUC_{\mathrm{B}}$
- El estadístico de contraste – bajo H_0 sigue la distribución normal estándar
  $$z = \frac{AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- El valor crítico al nivel α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, la región crítica $|z| \geq 1{,}96$
- El valor p: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Como $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, no rechazamos la hipótesis nula – los datos no aportan suficiente evidencia en su contra.
- El valor p es la probabilidad de un resultado al menos tan extremo como el observado si H_0 es cierta – no la probabilidad de que H_0 sea cierta. No rechazar H_0 no significa que H_0 sea verdadera; la significación estadística no dice nada del tamaño ni de la importancia práctica de una diferencia.
- Intervalo de confianza del 95 % de la diferencia de ambas AUC
  $AUC_{\mathrm{A}} - AUC_{\mathrm{B}} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- La prueba de DeLong compara las AUC de dos pruebas en los mismos casos y tiene en cuenta que están correlacionadas. Una diferencia no significativa no significa que las pruebas sean igual de buenas, solo que los datos no mostraron diferencia.
- Atención: hay pocos datos, las estimaciones (sobre todo varianza y cuartiles) son inciertas.

Gráfica

Curvas ROC de ambas pruebas: la primera continua con el área sombreada, la segunda discontinua



Cuánto alargar un test de 20 ítems con fiabilidad 0,7 para llegar a 0,9.

Enunciado: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Resultado

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Pasos

- Buscamos k; datos: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Un test más largo mide con más fiabilidad: si se alarga k veces con ítems de la misma calidad (paralelos), la fiabilidad crece según la fórmula de Spearman-Brown r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). A la inversa, indica cuántas veces alargar un test para alcanzar una fiabilidad objetivo. La fórmula también corrige la fiabilidad por mitades (k = 2).
  Ecuación del modelo: $k = \dfrac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$
- Sustituimos
  $k = \dfrac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$
- Número de ítems necesario:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- La fórmula supone que los ítems añadidos son tan buenos como los originales (paralelos). La mejora real suele ser menor, y un test más largo cansa más.

El nivel corregido para 10 comparaciones.

Enunciado: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Resultado

$$\alpha' = 0{,}005$$

Pasos

- Buscamos α'; datos: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Con m pruebas al nivel α crece la probabilidad de que al menos una resulte significativa solo por azar: 1 − (1 − α)^m. La corrección de Bonferroni juzga por eso cada prueba al nivel más estricto α' = α/m. La corrección de Šidák 1 − (1 − α)^(1/m) es algo menos estricta. Ecuación del modelo: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Sustituimos: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Probabilidad de al menos un resultado falsamente significativo sin corrección: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1 - 0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Corrección de Šidák $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1 - 0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- La corrección de Bonferroni es conservadora: protege frente a resultados falsamente significativos, pero con muchas comparaciones pasa por alto fácilmente una diferencia real. Menos estrictos son, p. ej., el método de Holm o el control de la FDR (Benjamini-Hochberg).

Limitaciones conocidas

- El percentil se calcula con la distribución normal – en pruebas asimétricas (tiempos del TMT) solo es correcto el percentil del baremo.
- Los intervalos de confianza son asintóticos o aproximados: con muestras pequeñas (hasta 10–20 casos) tómelos solo como orientación.
- Todavía no se admite una tarea en palabras o desde una foto – los valores se introducen en el formulario.