Mathtrace – manual

II. Álgebra lineal y geometría

Índice

II. Álgebra lineal y geometría

20. Cálculos en geometría

21. Matrices

22. Vectores

23. Rectas y planos

24. Problemas de construcción

20. Cálculos en geometría

Perímetros y áreas de figuras, volúmenes y superficies de cuerpos se calculan con un formulario como las demás aplicaciones (Aplicaciones → Geometría): se elige la figura y lo que se busca, y se introducen las medidas con sus unidades. Figuras: cuadrado, rectángulo, triángulo (lado y altura, o tres lados: fórmula de Herón), paralelogramo, rombo, trapecio, polígono regular, círculo, corona circular, arco y sector, teorema de Pitágoras y triángulos semejantes; cuerpos: cubo, ortoedro, prisma, cilindro, pirámide cuadrangular, cono y esfera.

El procedimiento escribe la fórmula, sustituye y calcula; si hace falta un valor intermedio (la generatriz del cono, la apotema de la pirámide), va primero. También al revés: el radio a partir del área, la arista a partir del volumen, un cateto a partir de la hipotenusa. El resultado es exacto con π y raíces y aproximado (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Las unidades se convierten (cm a dm, dm³ a litros).

Ejemplos

Área del círculo: exacta con π y aproximada.

Enunciado: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Resultado

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Pasos

- La circunferencia son los puntos a distancia r del centro, el círculo la circunferencia con su interior. Longitud o = 2πr = πd, área S = πr². El número π ≈ 3,14159 es la longitud entre el diámetro: el resultado exacto (con π) y aproximado. Fórmulas
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Buscamos S; datos: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Sustituimos: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Al revés: el radio a partir del área.

Enunciado: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Resultado

$$r \approx 3{,}989\,\text{cm}$$

Pasos

- La circunferencia son los puntos a distancia r del centro, el círculo la circunferencia con su interior. Longitud o = 2πr = πd, área S = πr². El número π ≈ 3,14159 es la longitud entre el diámetro: el resultado exacto (con π) y aproximado. Fórmulas

  $o = \pi d$

  $d = 2r$

  $o = 2\pi r$

  $S = \pi r^2$

- Buscamos r; datos: $S = 50\,\text{cm}^2$
- Despejamos la magnitud buscada: $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$
- Sustituimos: $r = \sqrt{\dfrac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\text{cm}$

Triángulo de tres lados: fórmula de Herón.

Enunciado: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Resultado

$$S = 6\,\text{cm}^2$$

Pasos

- El área del triángulo es la mitad de un lado por su altura: S = a·v_a/2. A partir de los tres lados, con la fórmula de Herón S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), donde s = (a + b + c)/2 es el semiperímetro. Los lados deben cumplir la desigualdad triangular. Fórmulas

  $o = a + b + c$

  $S = \dfrac{a v_a}{2}$

  $s = \dfrac{a + b + c}{2}$

  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- Buscamos S; datos: $a = 3\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 5\,\text{cm}$
- Sustituimos: $s = \dfrac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\text{cm}$
- Sustituimos: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\text{cm}^2$

Un cateto a partir de la hipotenusa.

Enunciado: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Resultado

$$b = 12\,\text{cm}$$

Pasos

- En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: c² = a² + b². La hipotenusa c está frente al ángulo recto y es el lado mayor; un cateto es b = √(c² − a²). Fórmulas
  $c^2 = a^2 + b^2$
- Buscamos b; datos: $a = 5\,\text{cm},\ c = 13\,\text{cm}$
- Despejamos la magnitud buscada: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Sustituimos: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{cm}$

Superficie del cono: primero la generatriz.

Enunciado: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Resultado

$$S = 24\pi\,\text{cm}^2 \approx 75{,}4\,\text{cm}^2$$

Pasos

- El cono tiene base circular de radio r y altura v. Su volumen es un tercio del cilindro: V = πr²v/3. La generatriz s es la hipotenusa de catetos r y v; la superficie lateral es un sector S_{pl} = πrs, superficie S = πr² + πrs. Fórmulas
  $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$
  $s^2 = r^2 + v^2$
  $S_{pl} = \pi r s$
  $S = \pi r^2 + S_{pl}$
- Buscamos S; datos: $r = 3\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$
- Despejamos la magnitud buscada: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Sustituimos: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$
- Sustituimos: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\text{cm}^2 \approx 47{,}12\,\text{cm}^2$
- Sustituimos: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\text{cm}^2 \approx 75{,}4\,\text{cm}^2$

Volumen del cubo en litros.

Enunciado: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Resultado

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Pasos

- El cubo tiene seis caras cuadradas iguales de arista a. Volumen V = a³, superficie S = 6a², diagonal u = a√3. La arista a partir del volumen es su raíz cúbica: a = ∛V.
  Fórmulas
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Buscamos V; datos: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertimos las unidades: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Sustituimos: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Convertimos las unidades: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Limitaciones conocidas

- Todavía falta un esquema de la figura con sus medidas.

21. Matrices

Escribe una matriz entre corchetes como en Matlab: los elementos separados por espacios, las filas por punto y coma o un salto de línea. Un elemento puede ser una fracción, una raíz o una letra. La tecla con una cuadrícula en la pestaña f(x) abre una tabla para rellenar casilla por casilla – o para pegar desde el portapapeles (celdas copiadas de Excel o Hojas de cálculo de Google) o cargar desde un archivo CSV.

Para una sola matriz un chip dice qué calcular: el determinante (2×2 con la fórmula, 3×3 con la regla de Sarrus, si no por desarrollo por una fila o columna o triangulando con operaciones de filas – el método también es un chip), la inversa (2×2 con la fórmula, si no por Gauss–Jordan con la identidad al lado), el rango (forma escalonada) o la traspuesta.

Nombra varias matrices con mayúsculas, cada una en su línea, y escribe en la última qué calcular: suma, resta, múltiplo, producto (fila por columna, comprobando las dimensiones), potencia, traspuesta A^T, inversa A^-1, det(A), rank(A) – o una ecuación matricial AX = B o XA = B, que la app resuelve con la inversa. Un sistema de ecuaciones dado por una matriz (matriz ampliada, Ax = b) se trata en el capítulo Sistemas de ecuaciones.

Si una matriz contiene un parámetro (una letra), la aplicación discute su rango según sus valores igual que un sistema: reducción a forma escalonada y los valores críticos sustituidos. Para la inversa calcula primero el determinante y la condición de para qué valores del parámetro no es cero (la inversa existe). La inversa de 3×3 o mayor la calcula por Gauss–Jordan o, según el chip, por la matriz adjunta (adjuntos, A^{-1} = adj A / det A).

De una matriz cuadrada también calculas los valores y vectores propios: el polinomio característico det(A − λE) se desarrolla como un determinante, se factoriza y sus raíces son los valores propios (un factor cuadrático mediante el discriminante, también complejos; uno cúbico sin raíz racional, de forma aproximada). Los vectores propios son las soluciones de (A − λE)v = o, por operaciones de fila hasta la forma escalonada reducida; para cada valor propio la aplicación da su multiplicidad algebraica y geométrica. El chip Diagonalización construye además P y D ($A = PDP^{-1}$) o explica por qué la matriz no es diagonalizable. La descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$ (SVD) y la pseudoinversa A^+ sirven para matrices de cualquier tamaño: la SVD mediante los valores propios de A^TA (AA^T en una matriz ancha), los vectores propios normalizados y el otro lado calculado a partir de ellos; la pseudoinversa de una matriz de rango completo por la fórmula $(A^TA)^{-1}A^T$, si no, de la descomposición $A^+ = V\Sigma^+U^T$ y, si los valores singulares fueran radicales anidados, exactamente a partir de la factorización de rango A = BC con $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Los valores propios y la diagonalización la aplicación los estudia también en una matriz con un parámetro (hasta 3×3): factoriza el polinomio característico con el parámetro, escribe los valores propios como funciones suyas y encuentra los valores especiales del parámetro, en los que coinciden

dos valores propios (dos factores tienen una raíz común, un factor cuadrático el discriminante nulo) o en los que el cálculo general de los vectores propios dividiría entre cero; indica también para qué valores los valores propios son complejos. El caso general lo resuelve con el parámetro; los valores especiales los sustituye y los trata aparte. El chip Diagonalización responde después para qué valores del parámetro la matriz es diagonalizable.

La forma de Jordan de una matriz cuadrada (el chip Forma de Jordan, escrito jordan(A)) sale de los rangos de las potencias $(A - \lambda E)^k$: dan el número y los tamaños de los bloques de Jordan, las cadenas de vectores propios generalizados se construyen desde el vector superior hasta un vector propio y se comprueban P, J ($A = PJP^{-1}$). Mediante la forma de Jordan la app calcula también la potencia A^n para un n general (el chip Potencia A^n, escrito A^n; la potencia de un bloque con el teorema del binomio, el resultado como $2^{n-1}(n + 2)$) o un número grande (A^10), y la exponencial e^{At} y e^A (el chip Exponencial de la matriz, escrito e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)), útil para los sistemas de ecuaciones diferenciales $x' = Ax$; los valores propios complejos se reescriben con cosenos y senos. El polinomio mínimo (el chip Polinomio mínimo, escrito minpoly(A)) se encuentra probando los candidatos – los divisores del polinomio característico – desde el grado más bajo; la app recuerda el teorema de Cayley–Hamilton $p(A) = O$ y, si la matriz es invertible, despeja la inversa de $m(A) = O$.

Cómo introducirlo

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Elementos con espacios, filas con punto y coma (o en líneas dentro de los corchetes).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Matrices con nombre, una por línea, el cálculo en la última.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinante, inversa y traspuesta, rango.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Valores propios, diagonalización, descomposición en valores singulares, pseudoinversa.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Forma de Jordan, potencia general, exponencial de la matriz, polinomio mínimo.

Ejemplos

Un determinante 3×3 con la regla de Sarrus.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinante

Resultado

$$\det A = -3$$

Pasos

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 \\ &= -3\end{aligned}$$

Desarrollo por la columna con más ceros.

Enunciado: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Desarrollo

Resultado

$$\det A = 25$$

Pasos

- Desarrollo por la columna 2, cada elemento por su adjunto con el signo de su posición

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (-5) \\ &= 25\end{aligned}$$

La inversa por Gauss–Jordan.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Matriz inversa

Resultado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasos

- Escribimos la matriz identidad junto a la matriz. Con operaciones de filas convertimos la parte izquierda en la identidad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- A la izquierda la identidad, a la derecha la inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango por operaciones de filas.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Rango

Resultado

$$h(A) = 2$$

Pasos

- Operaciones por filas

  $R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Operaciones por filas $R_3 \to R_3 - R_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz en forma escalonada

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El rango es el número de filas no nulas de la forma escalonada: $h(A) = 2$

El rango de una matriz con parámetro.

Enunciado: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Rango

Resultado

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Pasos

- La matriz contiene el parámetro a, un número real cualquiera. El rango puede depender de su valor, así que analizamos los casos.
- Operaciones por filas $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Seguimos con el elemento $1-a$, que puede ser cero; por eso suponemos $a \neq 1$, y el caso $a = 1$ lo analizamos aparte.
- Operaciones por filas $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Operaciones por filas $R_3 \to \dfrac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Seguimos con el elemento $a+2$, que puede ser cero; por eso suponemos $a \neq -2$, y el caso $a = -2$ lo analizamos aparte.
- La matriz en forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Para $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Para $a = 1$: $h(A) = 1$; la matriz tras sustituir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para $a = -2$: $h(A) = 2$; la matriz tras sustituir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La inversa con parámetro por la matriz adjunta.

Enunciado: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Matriz adjunta

Resultado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Condiciones: $a \neq 1$

Pasos

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$: la inversa existe exactamente cuando el determinante no es cero, es decir, para $a \neq 1$
- Los adjuntos de los elementos (con el signo (−1)^(i+j))

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \\ A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

- La matriz adjunta es la traspuesta de la matriz de adjuntos; la dividimos por el determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Producto, traspuesta, múltiplo y resta de matrices.

Enunciado: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Resultado

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pasos

- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Trasponemos, las filas se convierten en columnas

  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos cada elemento por el número

  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sumamos (restamos) los elementos en las mismas posiciones

  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una ecuación matricial AX = B con la inversa.

Enunciado: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Resultado

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Pasos

- Multiplicamos la ecuación por la inversa del lado de la incógnita: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- $\det A = -2 \neq 0$, la inversa existe.
- En una matriz 2×2 intercambiamos los elementos de la diagonal principal, cambiamos el signo de los otros dos y dividimos por el determinante

  $$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)

  $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Valores y vectores propios de una matriz simétrica.

Enunciado: `[2 1; 1 2]` Valores propios

Resultado

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- El polinomio característico factorizado

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 3$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 3$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Valores propios irracionales mediante el discriminante.

Enunciado: `[1 2; 3 4]` Valores propios

Resultado

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

  $$A-\lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$$

- El polinomio característico factorizado: $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Las raíces del factor cuadrático mediante el discriminante

  $$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\0 & 0\end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$$

La diagonalización A = PDP⁻¹.

Enunciado: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalización

Resultado

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 11$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 11$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- La matriz tiene tantos vectores propios linealmente independientes como filas, así que es diagonalizable: P tiene los vectores propios como columnas, D los valores propios en la diagonal en el mismo orden, y se cumple $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz es simétrica: sus valores propios son reales y los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales. Normalizados, forman una P ortogonal, $P^{-1} = P^T$

Una matriz que no es diagonalizable.

Enunciado: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalización

Resultado

La matriz no es diagonalizable: no tiene suficientes vectores propios linealmente independientes.

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 2, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 2$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 1$ la multiplicidad geométrica 1 es menor que la algebraica 2: la matriz no tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, por lo que no es diagonalizable.

Valores propios de una matriz con parámetro: los valores especiales y sus casos.

Enunciado: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Valores propios

Resultado

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Valores especiales del parámetro: en ellos coinciden dos valores propios o el cálculo de los vectores propios dividiría entre cero: $a = 1,\ a = 2$. Los tratamos aparte ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- El caso general $a \neq 1,\ a \neq 2$: los valores propios son distintos, así que la matriz tiene tantos vectores propios linealmente independientes como filas y es diagonalizable.
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = a$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = a$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- El caso $a = 1$, sustituido en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda -$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 2, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_3 = 2$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 1$ la multiplicidad geométrica 1 es menor que la algebraica 2: la matriz no tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, por lo que no es diagonalizable.
- El caso $a = 2$, sustituido en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad algebraica 2, geométrica 2, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Para qué valores del parámetro la matriz es diagonalizable.

Enunciado: `[0 1; a 0]` Diagonalización

Resultado

La matriz es diagonalizable para: $a \neq 0$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- El polinomio característico factorizado: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Las raíces del factor cuadrático mediante el discriminante

$$\lambda^2 - a = 0: \ D = 4a, \ \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \ \sqrt{a}$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \ \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Valores especiales del parámetro: en ellos coinciden dos valores propios o el cálculo de los vectores propios dividiría entre cero: $a = 0$. Los tratamos aparte ($a = 0: \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Para $a \in (-\infty, 0)$ el discriminante es negativo y los valores propios son complejos conjugados (diagonalizable solo sobre los números complejos).
- El caso general $a \neq 0$: los valores propios son distintos, así que la matriz tiene tantos vectores propios linealmente independientes como filas y es diagonalizable.
- El caso $a = 0$, sustituido en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El polinomio característico factorizado: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 0$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los vectores propios de $\lambda_1 = 0$ (multiplicidad algebraica 2, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

- Para $\lambda = 0$ la multiplicidad geométrica 1 es menor que la algebraica 2: la matriz no tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, por lo que no es diagonalizable.

La descomposición en valores singulares de una matriz 2×3.

Enunciado: `[3 2 2; 2 3 -2]` Descomposición en valores singulares (SVD)

Resultado

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Pasos

- La descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$: la matriz tiene más columnas que filas, así que empezamos con la menor AA^T: sus valores propios son los cuadrados de los valores singulares y sus vectores propios forman U. Calculamos AA^T
- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot(- \\ 2\cdot 3+3\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 3+(-2)\cdot \end{pmatrix}$
- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

  $AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$
- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$
- El polinomio característico factorizado

  $\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$
- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 25$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 25$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$
- Los vectores propios de $\lambda_2 = 9$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida

  $\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Los vectores propios de $\lambda_2 = 9$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$
- Los valores singulares son las raíces cuadradas de los valores propios, en orden descendente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ tiene el tamaño de A

  $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- Los vectores propios normalizados (divididos por su módulo); los de un valor propio múltiple, antes ortogonalizados por el proceso de Gram-Schmidt. Son las columnas de

  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

  $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
- Las columnas de V para los valores singulares no nulos, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$

  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$
- Las columnas que faltan de V completan una base ortonormal: soluciones normalizadas de $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonales a las columnas anteriores

  $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- La descomposición en valores singulares

  $A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

La pseudoinversa de una matriz con columnas independientes.

Enunciado: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinversa

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Pasos

- Las columnas de la matriz son linealmente independientes (rango 2 = número de columnas), así que $A^T A$ es invertible y la pseudoinversa la da la fórmula:
- $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$
- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

- $\det A^T A = 3 \neq 0$, la inversa existe.
- En una matriz 2×2 intercambiamos los elementos de la diagonal principal, cambiamos el signo de los otros dos y dividimos por el determinante

  $$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$$

La pseudoinversa de una matriz singular a partir de su descomposición en valores singulares.

Enunciado: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Pasos

- La matriz no tiene rango completo (rango 1), así que la pseudoinversa se obtiene de la descomposición en valores singulares: $A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T}$
- La descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^{T}$: los valores propios de $A^{T}A$ son los cuadrados de los valores singulares y sus vectores propios forman V. Calculamos $A^{T}A$
- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$A^{T}A = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 2 & 2\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$
- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal
  $$A^{T}A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$
- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria
  $$\det\left(A^{T}A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$
- El polinomio característico factorizado
  $$\det\left(A^{T}A - \lambda E\right) = \lambda^{2} - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0$$
- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 25$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida
  $$\left(A^{T}A - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \ \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Los vectores propios de $\lambda_1 = 25$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)
  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Los vectores propios de $\lambda_2 = 0$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo; la matriz en forma escalonada reducida
  $$\left(A^{T}A - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \ \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Los vectores propios de $\lambda_2 = 0$ (multiplicidad algebraica 1, geométrica 1, el número de incógnitas libres)
  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Los valores singulares son las raíces cuadradas de los valores propios, en orden descendente: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ tiene el tamaño de A
  $$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Los vectores propios normalizados (divididos por su módulo); los de un valor propio múltiple, antes ortogonalizados por el proceso de Gram-Schmidt. Son las columnas de
  $$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
  $$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Las columnas de U para los valores singulares no nulos, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$
  $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Las columnas que faltan de U completan una base ortonormal: soluciones normalizadas de $A^{T}\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ortogonales a las columnas anteriores
  $$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- La descomposición en valores singulares
  $$A = U\Sigma V^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Σ^{+} es Σ traspuesta, con los valores singulares no nulos invertidos
  $$\Sigma^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- La pseudoinversa
  $$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

La pseudoinversa a partir de la factorización de rango A = BC.

Enunciado: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinversa

Resultado

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Pasos

- La matriz no tiene rango completo (rango 2) y sus valores singulares serían radicales anidados, así que la pseudoinversa se calcula exactamente a partir de la factorización de rango A = BC: B son las columnas linealmente independientes de A y C las filas no nulas de su forma escalonada reducida.
- Llevamos la matriz a la forma escalonada reducida; los pivotes están en las columnas $1, 2$, B la forman esas columnas de A y C las filas no nulas de la matriz reducida

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (- \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, la inversa existe.
- En una matriz 2×2 intercambiamos los elementos de la diagonal principal, cambiamos el signo de los otros dos y dividimos por el determinante

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos fila por columna (dimensiones $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 7\cdot 7 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 + 7\cdot 8 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 + 8\cdot 7 & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 \end{pmatrix} = \left($$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66\cdot 93 - 78\cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, la inversa existe.
- En una matriz 2×2 intercambiamos los elementos de la diagonal principal, cambiamos el signo de los otros dos y dividimos por el determinante

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- La pseudoinversa

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Una forma de Jordan con dos bloques de un mismo valor propio.

Enunciado: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Forma de Jordan

Resultado

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Para $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica 3) calculamos las potencias de $A - \lambda E$ y sus rangos h hasta que el rango baje en la multiplicidad algebraica

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Hay tantos bloques de Jordan para $\lambda = 2$ como vectores propios independientes: $n - h(A - \lambda E)$ = 2. El número de bloques de tamaño al menos k es $h_{k-1} - h_k$, así que los tamaños de los bloques son $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Una cadena de longitud 2 para $\lambda = 2$: elegimos su vector superior en el núcleo de $(A - \lambda E)^k$ fuera del núcleo de la potencia menor y del espacio generado por las cadenas anteriores, y lo multiplicamos por $A - \lambda E$ hasta llegar a un vector propio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Un bloque de tamaño 1 para $\lambda = 2$ da un vector propio

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La forma de Jordan: las columnas de P son los vectores de las cadenas (cada una desde su vector propio hacia arriba), J tiene los valores propios en la diagonal y unos encima de ella dentro de los bloques; se cumple $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La potencia A^n mediante la forma de Jordan.

Enunciado: `[3 1; -1 1]` Potencia A^n

Resultado

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$$

- El polinomio característico factorizado: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Para $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica 2) calculamos las potencias de $A - \lambda E$ y sus rangos h hasta que el rango baje en la multiplicidad algebraica

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Hay tantos bloques de Jordan para $\lambda = 2$ como vectores propios independientes: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. El número de bloques de tamaño al menos k es $h_{k-1} - h_k$, así que los tamaños de los bloques son 2: $J_2(2)$
- Una cadena de longitud 2 para $\lambda = 2$: elegimos su vector superior en el núcleo de $(A - \lambda E)^k$ fuera del núcleo de la potencia menor y del espacio generado por las cadenas anteriores, y lo multiplicamos por $A - \lambda E$ hasta llegar a un vector propio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- La forma de Jordan: las columnas de P son los vectores de las cadenas (cada una desde su vector propio hacia arriba), J tiene los valores propios en la diagonal y unos encima de ella dentro de los bloques; se cumple $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos la potencia mediante la forma de Jordan: $A^n = PJ^nP^{-1}$. La potencia de un bloque sale del teorema del binomio: el elemento d lugares por encima de la diagonal es $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos las matrices

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2 \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$$

La exponencial e^{At}: la solución del sistema x' = Ax.

Enunciado: `A = [0 1; -2 -3]`

`e^(At)`

Resultado

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

  $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$

- Un determinante 2×2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria

  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$

- El polinomio característico factorizado

  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Un bloque de tamaño 1 para $\lambda = -2$ da un vector propio

  $(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Un bloque de tamaño 1 para $\lambda = -1$ da un vector propio

  $(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Todos los bloques de Jordan son de tamaño 1, así que J es diagonal y la matriz es diagonalizable. Las columnas de P son los vectores propios y se cumple $A = PJP^{-1}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculamos la exponencial mediante la forma de Jordan: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. En un bloque, el elemento d lugares por encima de la diagonal es $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

- Multiplicamos las matrices

  $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$

- Para t = 1

  $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$

El polinomio mínimo, el teorema de Cayley–Hamilton y la inversa a partir de él.

Enunciado: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Polinomio mínimo

Resultado

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Pasos

- Los valores propios son las raíces de la ecuación característica det(A − λE) = 0 (E la matriz identidad). Restamos λ en la diagonal

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- El polinomio característico factorizado

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Los valores propios (una raíz múltiple tiene varios nombres): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- El polinomio mínimo divide al polinomio característico y tiene todas sus raíces. Los candidatos desde el grado más bajo

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- Sustituimos la matriz no es la matriz nula, así que este candidato no es el polinomio mínimo.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Sustituimos la matriz es la matriz nula, y el candidato más bajo así es el polinomio mínimo.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- El teorema de Cayley–Hamilton: toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$$

- La matriz es invertible (el término independiente del polinomio mínimo no es cero), así que de m(A) = O se despeja la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Limitaciones conocidas

- Matrices de hasta 6×6.
- Valores propios, diagonalización, descomposición en valores singulares, forma de Jordan, potencia A^n, exponencial y polinomio mínimo para matrices de hasta 4×4 y sin parámetro; valores propios y diagonalización con un parámetro hasta 3×3 (sin factor cúbico con el parámetro), los vectores propios del caso general solo con valores propios sin raíz del parámetro.
- La forma de Jordan con sus pasos solo para valores propios racionales, si no solo el resultado; una potencia general A^n y e^{At} necesitan valores propios exactos (un factor cúbico sin raíz racional: solo e^A aproximada).

22. Vectores

Escribe un vector con punto y coma, cada uno en su propia línea: u = (1; 2; 3); el nombre puede llevar índice (F_1 = (3; 4)). Escribe un punto con corchetes: A[1; 2; 3]. Los vectores del plano tienen dos coordenadas; los del espacio, tres.

Un punto solo en el plano se sitúa en su cuadrante (o en un eje) según los signos de sus coordenadas y se dibuja. Con dos puntos, junto a la distancia |AB| está el chip «Punto medio»: sus coordenadas son las medias de las de los extremos. También con palabras: «punto medio AB, A[1; 2], B[5; 6]», «distancia entre A[1; 2] y B[4; 6]», «cuadrante A[3; −2]».

Sin otra línea, el chip elige qué calcular: el módulo, la suma (la resultante de fuerzas con su módulo y dirección), el producto escalar (cero significa vectores perpendiculares), el ángulo (a partir del coseno, exacto en los valores de la tabla, si no, en grados y minutos), el producto vectorial (mediante el determinante con i, j, k), el área de un paralelogramo y de un triángulo, el volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro mediante el producto mixto, o la dependencia lineal. Con puntos, la aplicación construye primero los vectores AB, AC, AD desde el primero: dos puntos dan la distancia, tres un triángulo, cuatro un tetraedro.

En la última línea puedes escribir una expresión: u + 2v, u·v (o u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| y el vector AB entre dos puntos. La gráfica muestra los vectores como flechas: en el plano con cuadrícula, en el espacio con ejes que giras con el dedo; un área aparece coloreada y un ángulo marcado con un arco.

Cómo introducirlo

`u = (1; 2; 3)`	Un vector con punto y coma, cada uno en su línea.
`A[1; 2; 3]`	Un punto con corchetes.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Una expresión con vectores en la última línea.

Ejemplos

El cuadrante de un punto.

Enunciado: `A[3; -2]`

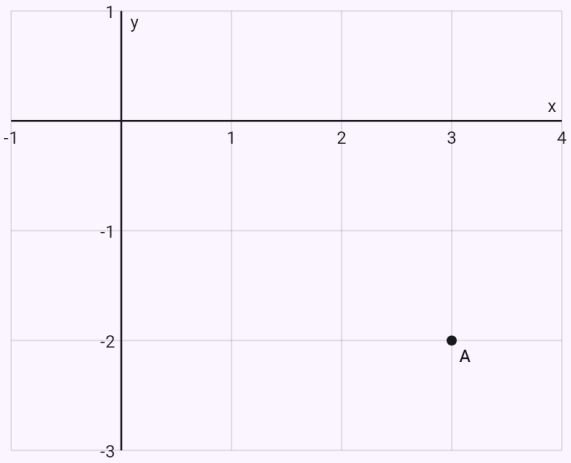
Resultado

$A \in \text{IV}$

Pasos

- El punto $A[3;\ -2]$ tiene x positiva e y negativa: está en el IV cuadrante (abajo a la derecha).

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas.

El punto medio de un segmento.

Enunciado: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Resultado

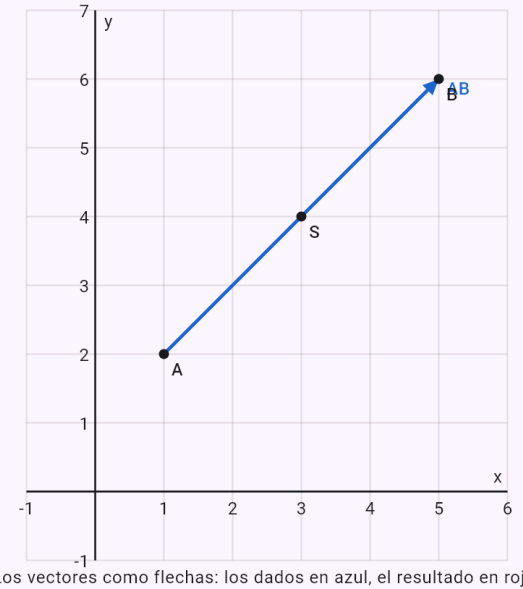
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Pasos

- Las coordenadas del punto medio son las medias de las de los extremos

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas.

El módulo de un vector.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`

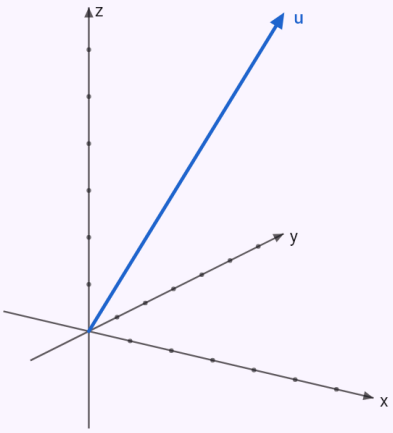
Resultado

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Pasos

- El módulo del vector:
  $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

El ángulo de dos vectores.

Enunciado: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

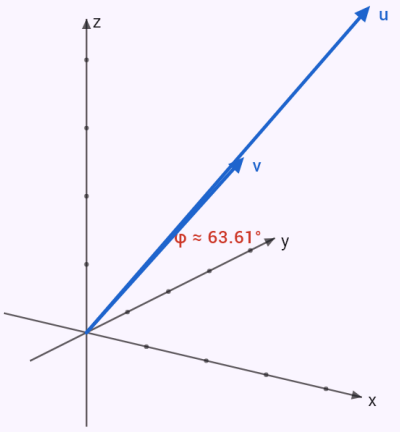
Resultado

$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Pasos

- El producto escalar es la suma de los productos de las coordenadas correspondientes:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- El módulo del vector: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- El módulo del vector:
  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- El ángulo de los vectores a partir del producto escalar es decir $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$
  $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

Suma y múltiplo de vectores.

Enunciado: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

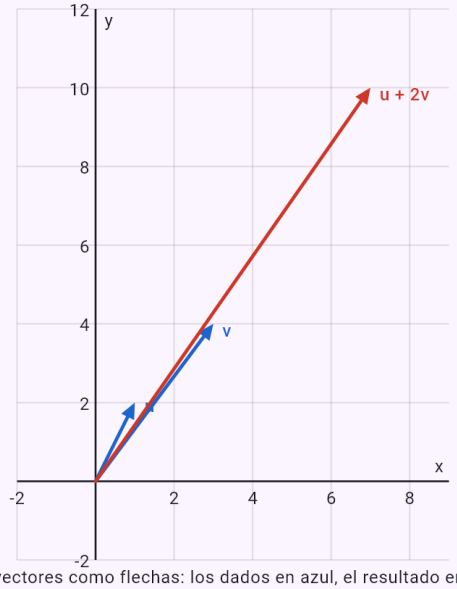
Resultado

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Pasos

- Un múltiplo de un vector: cada coordenada por el número: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Los vectores se suman (restan) coordenada a coordenada: $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas.

El producto vectorial.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Producto vectorial

Resultado

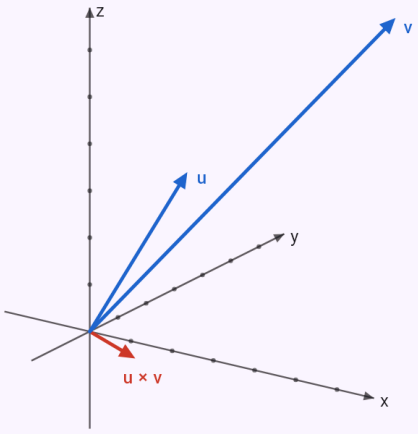
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Pasos

- El producto vectorial desarrollando el determinante por la primera fila

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

El área de un triángulo a partir de tres puntos.

Enunciado: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Resultado

$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Pasos

- Un vector a partir de dos puntos: coordenadas del extremo menos las del origen

  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$

- Un vector a partir de dos puntos: coordenadas del extremo menos las del origen

  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$

- El producto vectorial desarrollando el determinante por la primera fila

  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1\cdot(-1) - (-2)\cdot 2;\ (-2)\cdot(-1) - 2\cdot(-$$

- El módulo del vector

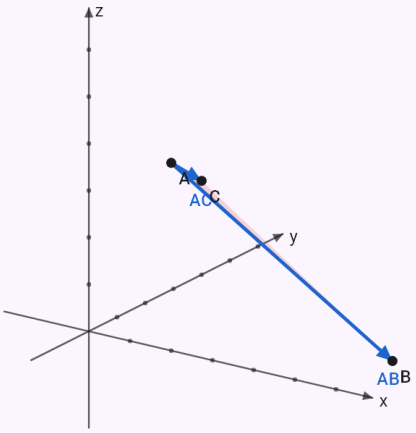
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial (en el plano, el valor absoluto del determinante): $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- El triángulo es la mitad del paralelogramo:

  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

El volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro mediante el producto mixto.

Enunciado: `u = (1; 0; 2)`

`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Resultado

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Pasos

- El producto mixto como determinante de las coordenadas de los vectores

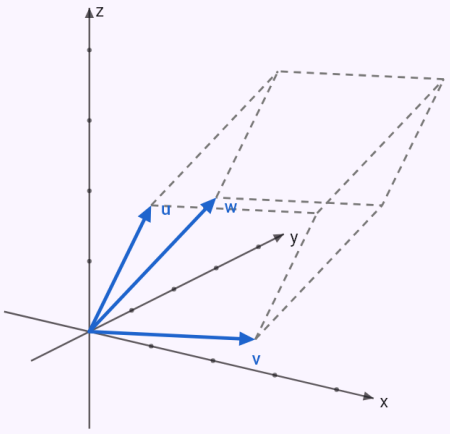
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0 = 13$$

- El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- El tetraedro tiene la sexta parte del volumen del paralelepípedo: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

La resultante de dos fuerzas.

Enunciado: `F_1 = (3; 1)`

`F_2 = (-1; 3)` Suma (resultante)

Resultado

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Pasos

- Los vectores se suman (restan) coordenada a coordenada

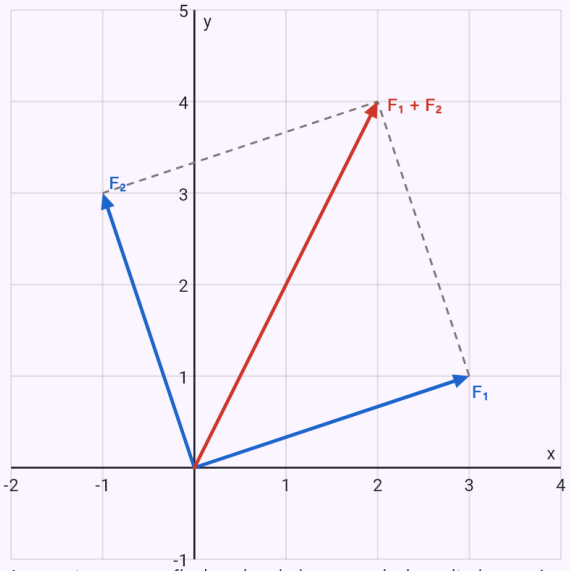
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$$

- El módulo del vector

$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$$

- La dirección de la resultante, su ángulo con el semieje x positivo: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2}, \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas.

La dependencia lineal de tres vectores.

Enunciado: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Dependencia lineal

Resultado

Los vectores son linealmente dependientes.

Pasos

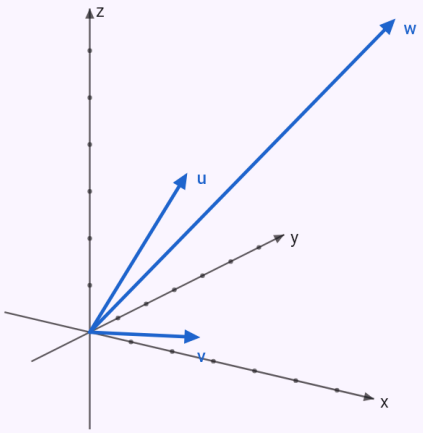
- Regla de Sarrus, los productos en la dirección de la diagonal principal menos los de la secundaria

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ &= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- El determinante de las coordenadas de los vectores: $D = 0$. Si no es nulo, los vectores son linealmente independientes; si es nulo, dependientes.

Gráfica



Los vectores como flechas: los dados en azul, el resultado en rojo, las líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

Limitaciones conocidas

- Las coordenadas son números (sin parámetro), seis como máximo; la gráfica solo en el plano y en el espacio.

23. Rectas y planos

Geometría analítica en el plano y en el espacio. Un punto se escribe como en los vectores: A[1; 2]. Ponga nombre a una recta o un plano y escriba su ecuación tras dos puntos, cada una en su propia línea: general (p: 2x + 3y − 5 = 0), explícita (p: y = 2x + 1), paramétrica (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) o vectorial (p: X = A + t·u). En el espacio una ecuación en x, y, z es un plano (ρ: x + y + z = 1), también unas paramétricas con dos parámetros; una recta en el espacio se escribe en paramétricas o como intersección de dos planos (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Las teclas p:, q: y ρ: están en el teclado de funciones.

Qué calcular se elige con un chip – la oferta depende de lo que escriba: una recta o un plano dan todas las formas de su ecuación, dos su posición relativa con la intersección, el ángulo y la distancia, un punto y una recta (plano) la distancia, la perpendicular y la paralela por el punto, la proyección y el punto simétrico. Dos o tres puntos solos añaden a los chips de vectores la recta AB, la mediatriz y el baricentro con las alturas del triángulo (en el espacio el plano ABC).

La distancia se calcula con la fórmula o – con el chip «Con la proyección» – como en clase: la perpendicular por el punto, su pie y la longitud del segmento. Para rectas que se cruzan también encuentra su perpendicular común. Los ángulos son exactos en los valores de tabla, si no en grados y minutos. La tarea también se puede escribir en la última línea: angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). El gráfico muestra las rectas y los planos; en el espacio se gira con el dedo.

Transformaciones en el plano: traslación según un vector, giro de centro y ángulo (en grados, positivo en sentido antihorario), homotecia de centro y razón, y simetrías central y axial. Se puede transformar un punto, un polígono (puntos seguidos: translation(A, B, C, u) es un triángulo), una recta y una circunferencia (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Escribe la tarea en la última línea o elige el chip «Traslación», «Giro», «Homotecia» o «Simetría»; entonces el ángulo y la razón van en una línea propia (φ = 90, κ = 2) y el centro es el punto S. Los pasos muestran la transformación en coordenadas y la imagen de cada punto, de dos puntos para una recta y del centro y el radio para una circunferencia; el gráfico, la figura y su imagen.

Cónicas en posición paralela a los ejes (sin término xy): completando cuadrados, la ecuación canónica o del vértice; de la circunferencia el centro y el radio, de la elipse y la hipérbola el centro, los semiejes, la excentricidad y los focos (de la hipérbola también las asíntotas), de la parábola el vértice, el parámetro, el foco y la directriz; la gráfica muestra la curva con sus puntos.

La tangente en un punto de una cónica se escribe con palabras – «tangente a la circunferencia x^2 + y^2 = 25 en el punto [3; 4]» – y la app la halla por desdoblamiento de la ecuación. La posición de una cónica y una recta («posición relativa de x^2/9 + y^2/4 = 1 y y = x + 1») sale de la sustitución y el discriminante:

secante, tangente o exterior, con los puntos de intersección. Una esfera (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) se completa a cuadrados: centro y radio. Entre las formas de la recta está también la segmentaria x/p + y/q = 1. Las tangentes desde un punto exterior («tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]», en inglés «… from the point …») se buscan entre las rectas que pasan por el punto con pendiente k: tangente es la de discriminante cero; la recta vertical se comprueba aparte. Las tangentes paralelas o perpendiculares a una recta tienen el mismo vector normal y un término independiente c desconocido. Una superficie esférica se escribe con nombre y en la línea siguiente un plano, una recta o un punto: con un plano se compara la distancia del centro con el radio (la circunferencia de la sección con centro y radio, el punto de tangencia o nada), en una recta se sustituyen sus ecuaciones paramétricas y decide el discriminante, en un punto de la esfera se halla el plano tangente.

Cómo introducirlo

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Una recta por su ecuación general, explícita o paramétrica, cada una en su línea.
`p: X = A + t·u`	Una recta por su ecuación vectorial con un punto y un vector.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Un plano por su ecuación general (en el espacio).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Una recta en el espacio como intersección de dos planos.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	La tarea en la última línea.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Una transformación: las figuras, luego el vector, el centro y el ángulo o la razón, o el centro o eje de simetría.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Una cónica – una ecuación de segundo grado en x e y.

Ejemplos

Todas las formas de la ecuación de una recta a partir de sus paramétricas.

Enunciado: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

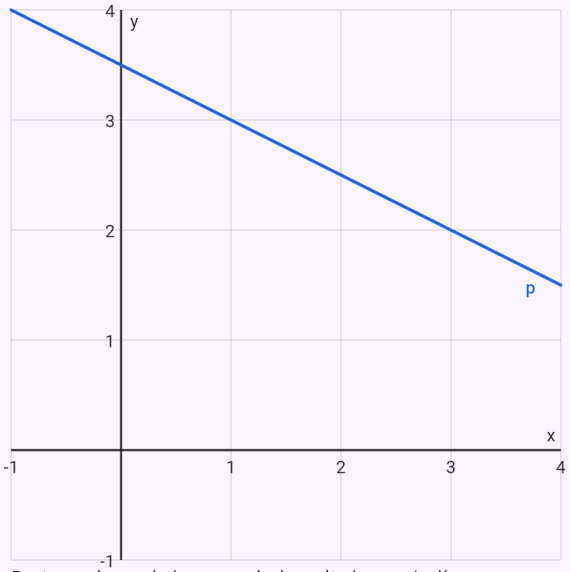
Resultado

$$p: x + 2y - 7 = 0$$
$$p: x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p: \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Pasos

- Las ecuaciones paramétricas dan un punto (los términos independientes) y el vector director (los coeficientes del parámetro): $P_p[1;\ 3],\ \vec{u}_p = (2;\ -1)$
- El vector normal es perpendicular al director – se intercambian las coordenadas y se cambia un signo: $\vec{u}_p = (2;\ -1)\ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\ 2)$
- La ecuación general: los coeficientes son las coordenadas del vector normal, el término independiente sale del punto $p: x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\ 3]:\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0\ \Rightarrow\ c =$
- La forma explícita – la ecuación general despejada para y: $p: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Forma segmentaria: en los denominadores están los segmentos que la recta corta en los ejes x e y: $p: \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

El punto de corte de dos rectas.

Enunciado: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Resultado

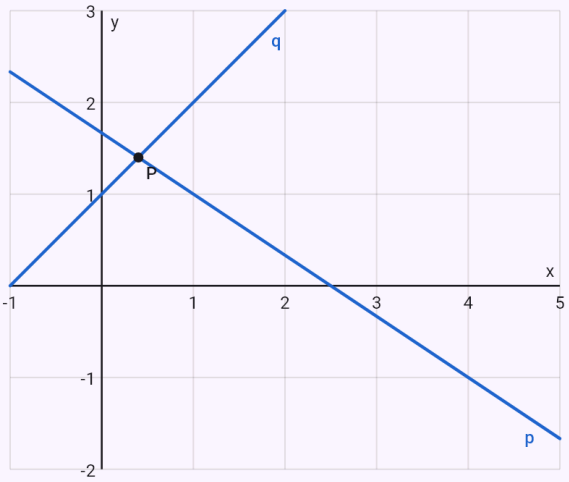
Las rectas se cortan en:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Ningún vector es múltiplo del otro – no son paralelos
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- El punto de corte resuelve el sistema de ambas rectas (regla de Cramer)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$:

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

La distancia de un punto a una recta con la fórmula.

Enunciado: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

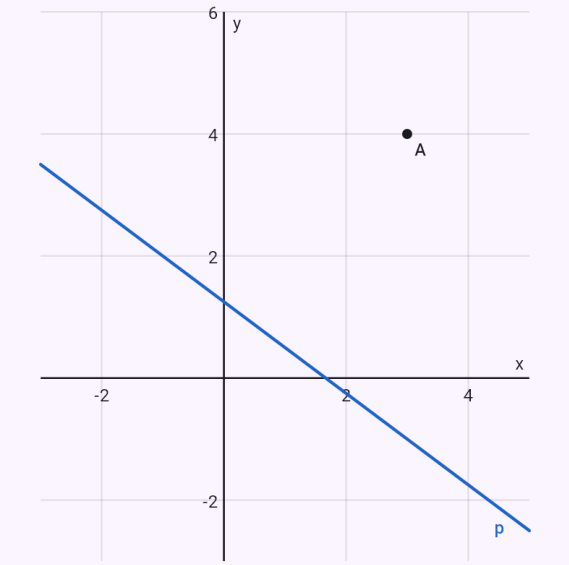
Resultado

$$v(A, p) = 4$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- La distancia del punto a la recta
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

La misma distancia con la proyección.

Enunciado: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Con la proyección

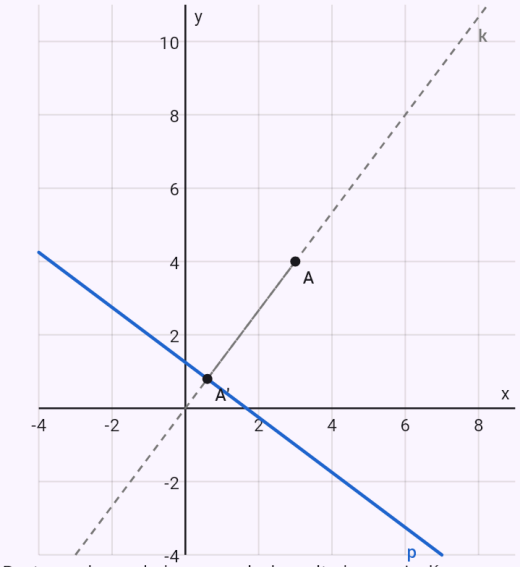
Resultado

$$v(A,p) = 4$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\, 4)$
- La perpendicular por A a la recta p – el director de una es el normal de la otra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\, 4),\; k: x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- El pie de la perpendicular A' es su corte con p – se sustituye y se calcula t
  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- La distancia del punto a la recta
  $$v(A,p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

Baricentro, alturas y ortocentro de un triángulo.

Enunciado: `A[1; 2]`
`B[5; 2]`

`C[3; 6]` Baricentro y alturas

Resultado

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Pasos

- El baricentro – la media de las coordenadas de los vértices

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- La altura desde A es perpendicular al lado opuesto – el vector del lado es su normal, su longitud la distancia del vértice al lado

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$$

- La altura desde B es perpendicular al lado opuesto – el vector del lado es su normal, su longitud la distancia del vértice al lado

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

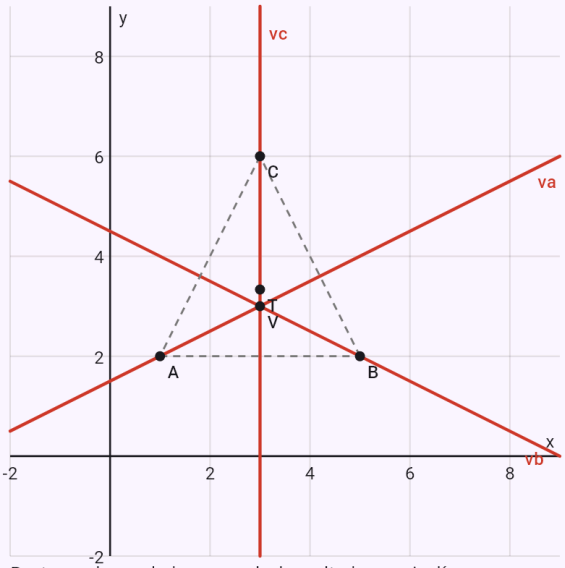
- La altura desde C es perpendicular al lado opuesto – el vector del lado es su normal, su longitud la distancia del vértice al lado

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- El ortocentro – el corte de dos alturas

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

El simétrico de un punto respecto de una recta.

Enunciado: `A[1; 2]`

`p: x - y = 0` Simetría

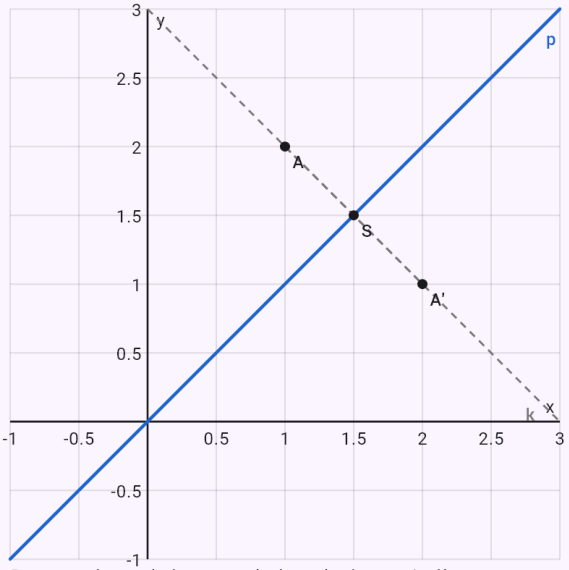
Resultado

$$A'[2;\ 1]$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- La perpendicular por A a la recta p – el director de una es el normal de la otra
  $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- El pie de la perpendicular S es su corte con p – se sustituye y se calcula t
  $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- El punto simétrico: el centro (el pie de la perpendicular) es el punto medio entre el punto y su imagen
  $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

Un triángulo trasladado según un vector.

Enunciado: `A[1; 2]`
`B[4; 2]`
`C[2; 5]`
`u = (3; -1)`
`translation(A, B, C, u)`

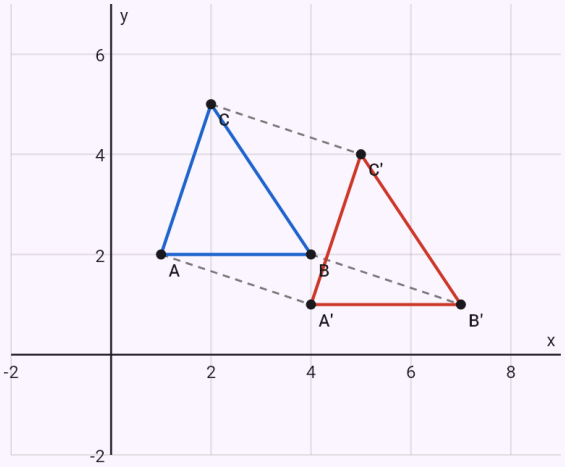
Resultado

$$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$$
$$C'[5;\ 4]$$

Pasos

- Traslación según un vector: cada punto X se desplaza según el mismo vector, X' = X + u:
  $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- La imagen de un punto: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- La imagen de un punto: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- La imagen de un punto: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

Un triángulo girado 90° alrededor de S.

Enunciado: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

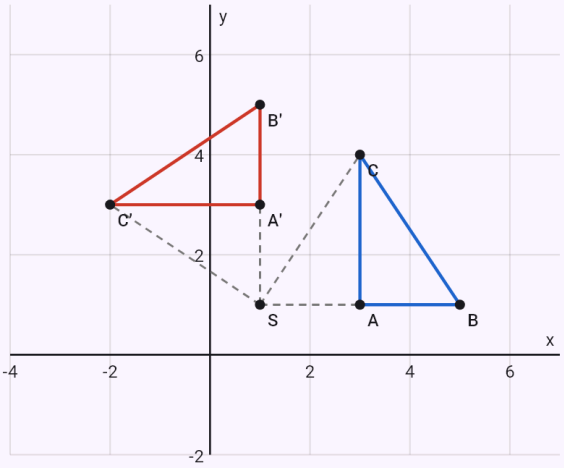
Resultado

$$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$$
$$C'[-2;\ 3]$$

Pasos

- Giro de centro S y ángulo φ (positivo en sentido antihorario): el vector X − S se gira φ y se suma al centro
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- La imagen de un punto
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- La imagen de un punto
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- La imagen de un punto
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

Una recta y una circunferencia por una homotecia de razón 2.

Enunciado: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
homothety(p, k, S, 2)
```

Resultado

$$p' : x + y - 6 = 0$$

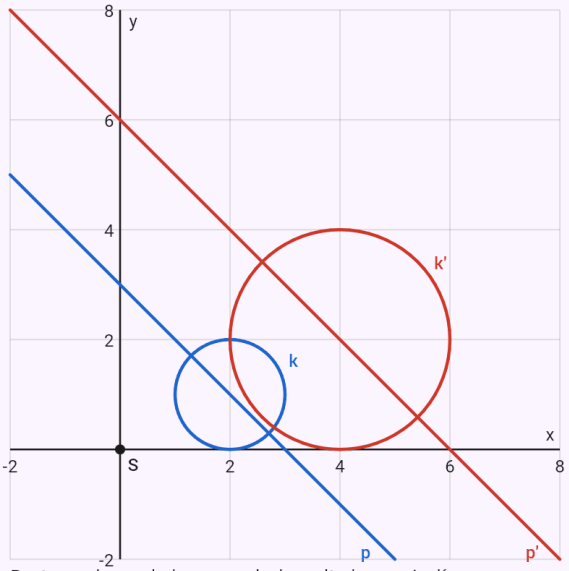
$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\, 1)$
- La circunferencia k – centro y radio de la forma canónica (completando cuadrados)
  $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\, 1],\; r = 1$
- Homotecia de centro S y razón κ: el vector X − S se multiplica por κ (una κ negativa lleva la imagen al otro lado del centro): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- La imagen de la recta p: se transforman dos de sus puntos y la imagen es la recta por sus imágenes – paralela a la original
  $P_1[0;\, 3],\; P_2[1;\, 2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\, 6],\; P_2'[2;\, 4] \in p'$
- El vector normal es perpendicular al director – se intercambian las coordenadas y se cambia un signo:
  $\vec{u}_{p'} = (2;\, -2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\, 1)$
- La ecuación general: los coeficientes son las coordenadas del vector normal, el término independiente sale del punto
  $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\, 6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- La imagen de la circunferencia k: se transforma el centro y el radio se multiplica por |κ|

$S_k[2;\, 1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\, 2],\; r' = |\kappa|\, r = |2| \cdot 1 = 2$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

Una circunferencia simétrica respecto a una recta – el eje elegido con el chip.

Enunciado: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Simetría

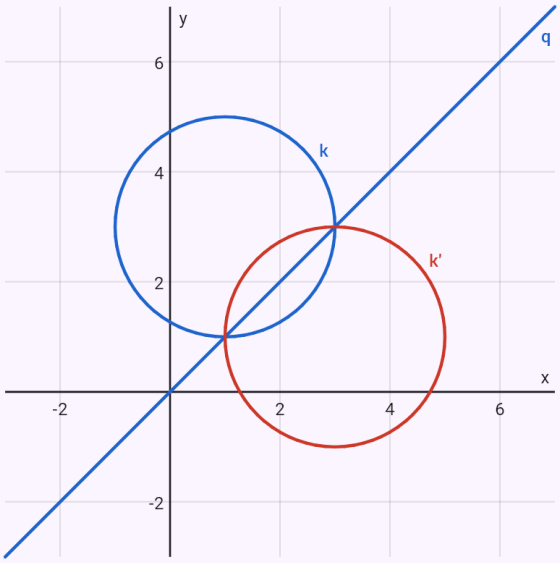
Resultado

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Pasos

- La circunferencia k – centro y radio de la forma canónica (completando cuadrados)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \ \Rightarrow \ S_k[1;\,3],\ r = 2$
- La forma explícita escrita como ecuación general da el vector normal: $q : x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Simetría axial: la imagen está en la perpendicular al eje, que divide XX' por la mitad – el punto se desplaza el doble de su distancia al eje según el vector normal (a; b):
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\ q : x - y = 0$
- La imagen de la circunferencia k: se transforma el centro y el radio se conserva (la transformación es una isometría): $S_k[1;\,3] \ \rightarrow \ S'_k[3;\,1],\ r' = r = 2$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas.

La recta intersección de dos planos.

Enunciado: `ρ: x + y + z = 1`

`σ: 2x - y + z = 3`

Resultado

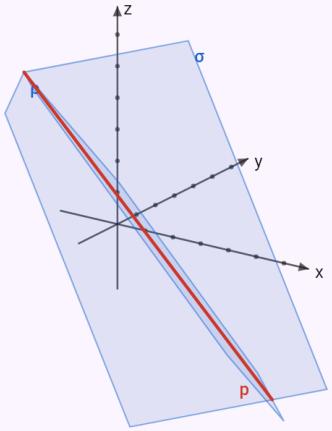
Los planos se cortan en la recta:

$$p: x = \frac{4}{3} + 2t,\ y = -\frac{1}{3} + t,\ z = -3t$$

Pasos

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $\rho: x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $\sigma: 2x - y + z - 3 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\sigma = (2;\ -1;\ 1)$
- Ningún vector es múltiplo del otro – no son paralelos
  $\vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1),\ \vec{n}_\sigma = (2;\ -1;\ 1),\ \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- El director de la recta intersección es perpendicular a ambos normales – su producto vectorial
  $$\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\ 1;\ -3)$$
- Un punto de P: se eligen coordenadas y la restante se calcula con la ecuación
  $$z = 0: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ P_p\left[\frac{4}{3};\right.$$
- La recta intersección – su punto y vector director:
  $p: x = \frac{4}{3} + 2t,\ y = -\frac{1}{3} + t,\ z = -3t,\ t \in \mathbb{R}$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

El ángulo de una recta y un plano.

Enunciado: `p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`
`ρ: x + y + z = 1` Ángulo

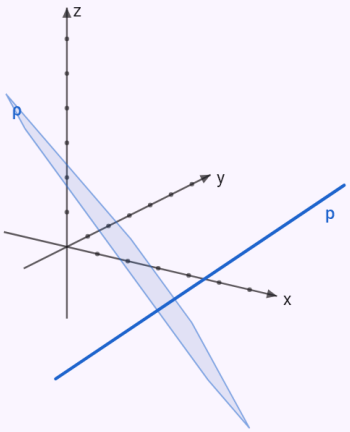
Resultado

$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Pasos

- Las ecuaciones paramétricas dan un punto (los términos independientes) y el vector director (los coeficientes del parámetro): $P_p[1;\ 0;\ -1],\ \vec{u}_p = (1;\ 2;\ 1)$
- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):
  $\rho: x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- El ángulo de recta y plano: el ángulo del director y del normal lo completa a 90°, por eso el seno luego
  $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$
  $$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

La distancia y la perpendicular común de dos rectas que se cruzan.

Enunciado: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`
`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Distancia

Resultado

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o: x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Pasos

- Las ecuaciones paramétricas dan un punto (los términos independientes) y el vector director (los coeficientes del parámetro): $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Las ecuaciones paramétricas dan un punto (los términos independientes) y el vector director (los coeficientes del parámetro): $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- La distancia entre las rectas que se cruzan

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- La perpendicular común: X en la primera recta e Y en la segunda con XY perpendicular a ambos directores – un sistema para t y s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

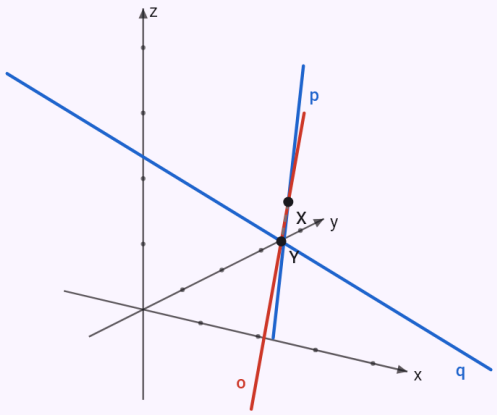
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Las ecuaciones paramétricas – un punto más el parámetro por el vector director:

$$o: x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

Una circunferencia – completar cuadrados, el centro y el radio.

Enunciado: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Resultado

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

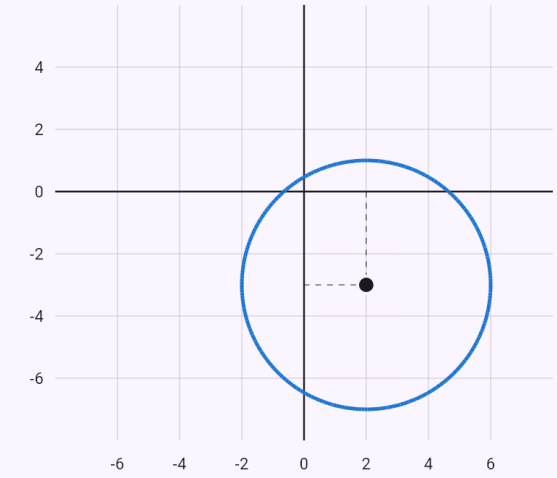
Pasos

- Completamos cuadrados

  $$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$
  $$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- La ecuación canónica de la circunferencia: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Centro $S = [2;\ -3]$, radio $r = 4$

Gráfica



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

La curva dada por la ecuación en el plano x, y.

Una elipse – semiejes, excentricidad y focos.

Enunciado: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

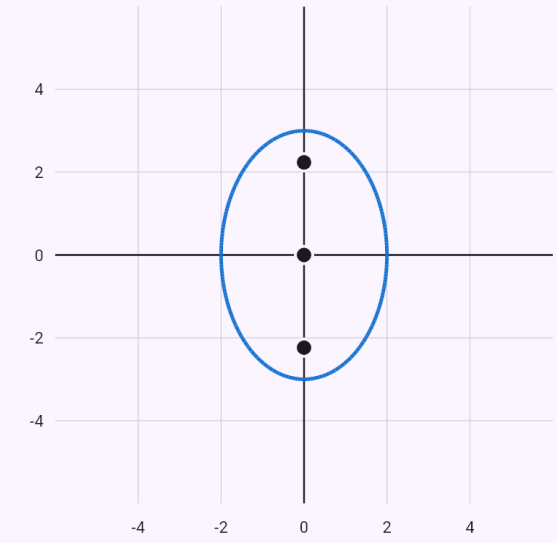
Resultado

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Pasos

- La ecuación canónica de la elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semiejes $a = 3,\ b = 2$ (el eje mayor paralelo al eje y), excentricidad lineal $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, excentricidad $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, focos $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Gráfica



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

La curva dada por la ecuación en el plano x, y.

Una hipérbola – focos y asíntotas.

Enunciado: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

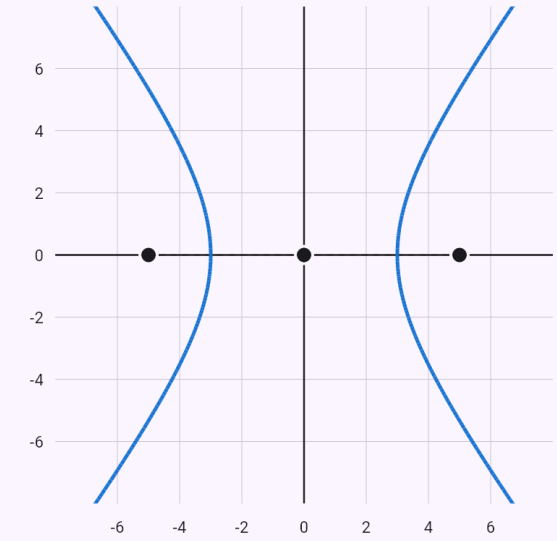
Resultado

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Pasos

- La ecuación canónica de la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Centro $S = [0;\ 0]$, semiejes $a = 3,\ b = 4$ (el eje mayor paralelo al eje x), excentricidad lineal $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, excentricidad $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, focos $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

Gráfica



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

La curva dada por la ecuación en el plano x, y.

Una parábola – vértice, foco y directriz.

Enunciado: `y^2 = 8x`

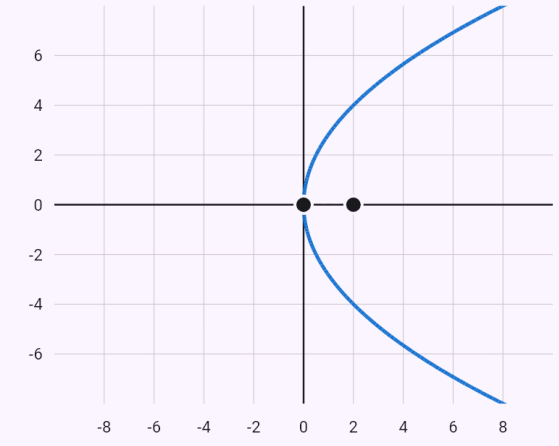
Resultado

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Pasos

- La ecuación de la parábola desde su vértice: $y^2 = 8x$
- Vértice $V = [0;\ 0]$, parámetro $p = 4$, eje paralelo al eje x, foco $F = [2;\ 0]$, directriz $x = -2$

Gráfica



$y^2 = 8x$

La curva dada por la ecuación en el plano x, y.

La tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.

Enunciado: `tangente a la circunferencia x^2 + y^2 = 25 en el punto [3; 4]`

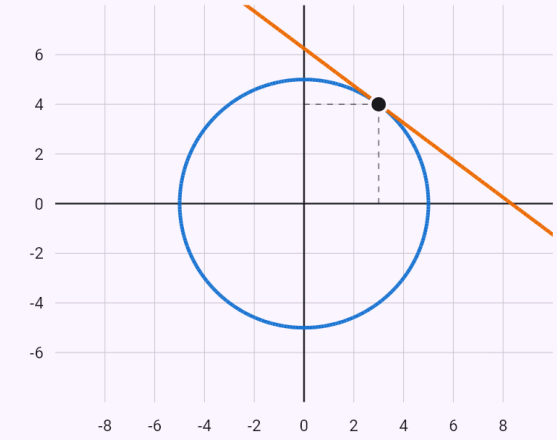
Resultado

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Pasos

- El punto $T = [3;\ 4]$ está en la cónica; al sustituir: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- La tangente en el punto $[x_0; y_0]$ de la cónica por desdoblamiento: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \frac{x + x_0}{2}$, $y \to \frac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- La tangente: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Gráfica



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$

La cónica y las rectas; los puntos marcados son los de tangencia, las intersecciones y el punto dado.

Tangentes desde un punto exterior: discriminante cero para la pendiente k.

Enunciado: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

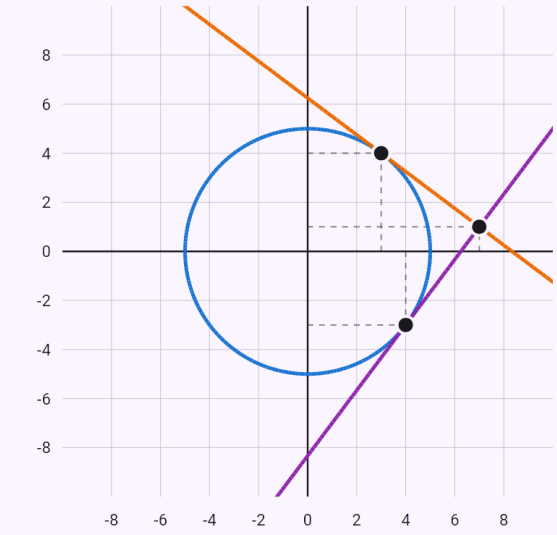
Resultado

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Pasos

- El punto $M = [7;\ 1]$ no está en la cónica; al sustituir: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, no 0.
- Buscamos las tangentes entre las rectas que pasan por M con pendiente k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow \ y = kx + 1 - 7k$
- Sustituimos y en la ecuación de la cónica: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- La recta es tangente exactamente cuando la ecuación tiene una única raíz (doble): el discriminante es cero: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}$
- Las tangentes: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; los puntos de tangencia: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Gráfica



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

La cónica y las rectas; los puntos marcados son los de tangencia, las intersecciones y el punto dado.

Tangentes paralelas a una recta.

Enunciado: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

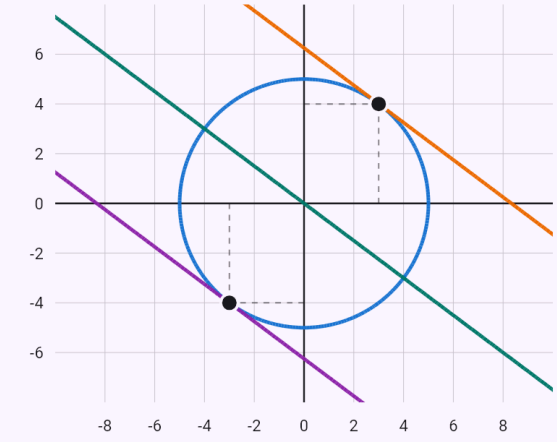
Resultado

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Pasos

- Las tangentes paralelas a la recta tienen su vector normal y solo difieren en el término independiente c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Sustituimos y en la ecuación de la cónica: $y = \dfrac{-3x - c}{4} \;\Rightarrow\; 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- La recta es tangente exactamente cuando la ecuación tiene una única raíz (doble): el discriminante es cero: $D = c^2 - 625 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = -25,\; c_2 = 25$
- Las tangentes: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\; t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; los puntos de tangencia: $T_1 = [3;\; 4],\; T_2 = [-3;\; -4]$

Gráfica



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

La cónica y las rectas; los puntos marcados son los de tangencia, las intersecciones y el punto dado.

La posición de una elipse y una recta.

Enunciado: `posición relativa de x^2/9 + y^2/4 = 1 y y = x + 1`

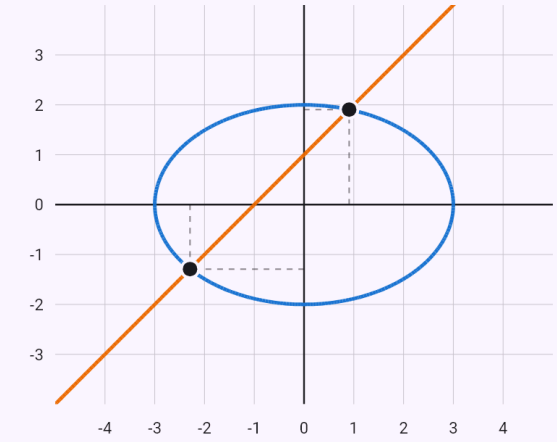
Resultado

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\; \frac{4\left(1 - 3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$
$$P_2 = \left[\frac{3\left(-3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\; \frac{4\left(1 + 3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

Pasos

- De la recta despejamos y y sustituimos en la cónica: $y = x + 1 \;\Rightarrow\; 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- El discriminante $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ es positivo: la recta es secante, con dos puntos comunes.
- Los puntos de intersección $P_1 = \left[-\frac{3\left(3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\; \frac{4\left(1 - 3\sqrt{3}\right)}{13}\right],\; P_2 = \left[\frac{3\left(-3 + 4\right.}{13}\right.$

Gráfica



$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
$y = x + 1$

La cónica y las rectas; los puntos marcados son los de tangencia, las intersecciones y el punto dado.

Una esfera – centro y radio.

Enunciado: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Resultado

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Pasos

- Completamos cuadrados

  $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
  $$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

- La ecuación de la esfera con su centro:
  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Centro $S = [1;\ -2;\ 3]$, radio $r = 4$

Esfera y plano: la circunferencia de la sección.

Enunciado: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`
`ρ: x + y + z = 1`

Resultado

El plano corta la esfera en una circunferencia de centro y radio:

$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Pasos

- Completando cuadrados pasamos la ecuación de la superficie esférica k a la forma canónica: centro y radio

  $$k : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16\ \Rightarrow\ S[1;\ -2;\ 3$$

- La ecuación general da el vector normal – los coeficientes de x, y (z):

  $$\rho : x + y + z - 1 = 0\ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$$

- La distancia del punto al plano

  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

- La distancia del centro al plano ρ es menor que el radio: el plano corta la esfera en una circunferencia:

  $$v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$$

- La perpendicular por S al plano ρ va en la dirección de su normal:

  $$k : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$$

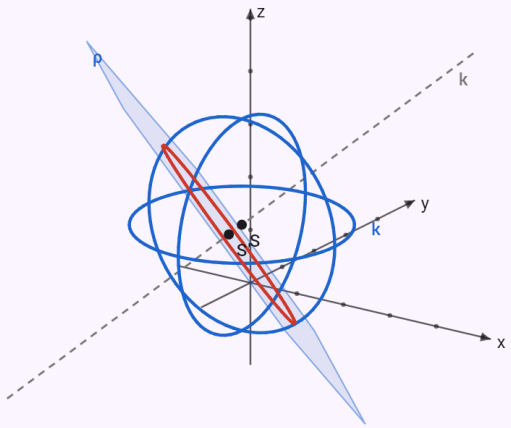
- El pie de la perpendicular S' es su corte con ρ – se sustituye y se calcula t

  $$(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0\ \Rightarrow\ t = -\frac{1}{3},\ S'\Big[$$

- El centro de la circunferencia es el pie de la perpendicular desde el centro, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; el radio por Pitágoras

  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

Esfera y recta: los puntos de intersección.

Enunciado: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`
`p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`

Resultado

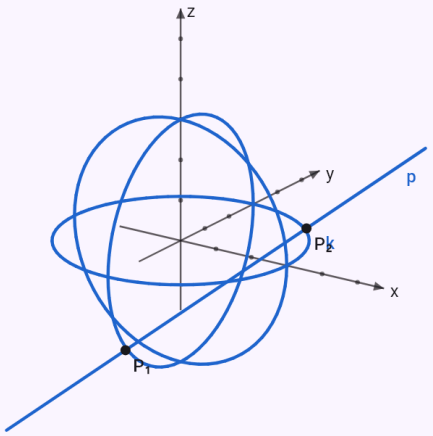
La recta corta la esfera en dos puntos:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Pasos

- Completando cuadrados pasamos la ecuación de la superficie esférica k a la forma canónica: centro y radio: $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- Las ecuaciones paramétricas dan un punto (los términos independientes) y el vector director (los coeficientes del parámetro): $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta p en la ecuación de la esfera
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- El discriminante $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ es positivo: la recta es secante, con dos puntos comunes.
- Los puntos de intersección
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Gráfica



Rectas y planos dados en azul, el resultado en rojo, líneas auxiliares discontinuas. Vectores en el espacio: gira la gráfica arrastrándola con el dedo.

Limitaciones conocidas

- Las coordenadas y los coeficientes son números (sin parámetro); las cónicas solo en posición axial (sin término xy).
- Transformaciones solo en el plano; una circunferencia por ahora solo se transforma (sin distancia, posición ni tangentes).
- Las alturas de un triángulo en el espacio solo por su longitud, sin ecuaciones ni ortocentro.
- El nombre de una recta o un plano es una letra (también con índice): por eso «a: 2x + 3 = 5» se lee como recta, no como ecuación.

24. Problemas de construcción

Los problemas de construcción se introducen en un formulario – en la sección «Aplicaciones» de la pantalla de inicio, campo Geometría (formulario «Problemas de construcción»). La tarea básica es un triángulo ABC a partir de tres elementos: tres lados (LLL), dos lados y el ángulo comprendido (LAL), un lado y dos ángulos (ALA – el tercer ángulo se calcula de la suma de 180°) o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA). Longitudes en centímetros, ángulos en grados.

La solución sigue la práctica escolar: análisis (boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados), pasos de la construcción en notación simbólica (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) y discusión del número de soluciones. La imagen bajo el resultado recorre la construcción paso a paso con las flechas – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados en color. El resultado incluye también los lados y ángulos calculados, para comprobar su dibujo.

La discusión explica por qué un problema no tiene solución (desigualdad triangular, suma de ángulos, una circunferencia que no alcanza la semirrecta) o por qué tiene dos (LLA con el ángulo opuesto al lado menor).

Un triángulo también puede darse con una altura, una mediana, el radio circunscrito o el inscrito. Primero se traza un lado y el tercer vértice está donde se cortan dos lugares geométricos: una paralela a la distancia de la altura, una circunferencia alrededor del punto medio del lado con la mediana como radio, una circunferencia alrededor de un extremo, el lado de un ángulo, el arco capaz sobre el lado o las circunferencias circunscritas. Con dos lados y la altura desde su vértice común se empieza por la altura; con el radio inscrito, un lado y un ángulo en él se construyen la circunferencia inscrita y su tangente.

Cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio (AB ∥ CD) a partir de los lados a, b, c, d, las diagonales e, f, los ángulos α, β y la altura v – los elementos se eligen en filas como en el triángulo. Normalmente se construye primero el triángulo ABC o ABD y se completa el cuarto vértice; si no, ayudan las diagonales que se cortan en su punto medio (en el rombo además perpendiculares), la paralela a la distancia de la altura o, en el trapecio, un triángulo auxiliar al trasladar el lado AD o la diagonal BD según el vector DC.

Los lugares geométricos están en el mismo formulario: la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, la circunferencia de Tales y el arco capaz, desde el que un segmento se ve bajo un ángulo dado (dos arcos simétricos respecto del segmento). Cada uno se construye con compás y regla paso a paso; el análisis explica por qué los puntos están justo ahí.

Circunferencias y tangentes: las tangentes desde un punto a una circunferencia (los puntos de tangencia en una circunferencia de Tales), las tangentes comunes a dos circunferencias (con circunferencias auxiliares de radio la diferencia y la suma de los radios), la circunferencia de radio dado tangente a los lados de un ángulo, las circunferencias por un punto tangentes a una recta y las circunferencias por dos

puntos. La discusión cuenta las soluciones según la posición – dos circunferencias tienen, por ejemplo, cuatro, tres, dos, una o ninguna tangente común.

Problemas con relaciones: una figura dada (un segmento AB, una circunferencia k y un punto A, una recta p y un punto A, una circunferencia k y una recta p, dos rectas secantes p, q) y dos relaciones que debe cumplir el punto buscado – sobre un segmento el vértice C del triángulo ABC, si no un punto X. Las relaciones se eligen en filas: el segmento se ve desde el punto bajo un ángulo (90° = circunferencia de Tales), a igual distancia de dos puntos o dos rectas, distancia a un punto o una recta, razón de las distancias a A y B (circunferencia de Apolonio), está en una recta o circunferencia, la recta AX es tangente a k, centro de una circunferencia de radio ϱ tangente a k, y A es el punto medio de XY con Y en k o p (simetría central). Cada relación se convierte en un lugar geométrico, el punto buscado está en su intersección; la discusión cuenta las soluciones (sobre un segmento en un semiplano, el otro da imágenes simétricas congruentes). Bajo el resultado están las distancias del punto a los puntos y rectas dados como comprobación.

Relaciones generales entre varios puntos (con circunferencia k o sin ella): los puntos A a H se dan con filas de relaciones – punto en k, punto medio, tangente a k, longitud, razón de longitudes, perpendiculares, paralelas, punto en una recta, ángulo y triángulo (solo qué dibujar). Las relaciones se convierten en ecuaciones en coordenadas (el centro S en el origen, el primer punto en el eje x) y se resuelven exactamente, con raíces. El resultado da las longitudes entre los puntos (con circunferencia también como múltiplos de r), la comprobación y el número de soluciones salvo congruencia. Cuando se puede, sigue una construcción escolar: cada punto en dos lugares – la circunferencia dada, una distancia, una recta, una tangente, un punto medio, una simetría central – y las longitudes calculadas construidas como hipotenusa o cateto de un triángulo rectángulo o por el teorema de la altura; la solución muestra también la potencia de un punto y el ángulo semiinscrito cuando se cumplen. Si no, honestamente solo el cálculo y la figura.

Secciones de sólidos: un cubo, un ortoedro, un prisma y una pirámide regulares con base de 3 a 6 lados (vértices ABC… y A'B'C'…, el vértice de la pirámide V) y el tetraedro regular ABCD. El plano de corte lo dan los puntos X, Y, Z, uno por línea: AE=2 es el punto del segmento AE a 2 cm de A – el segmento puede ser una arista, una diagonal de una cara o del cuerpo o el eje SS' (S, S' los centros de las bases), y una distancia mayor que su longitud da un punto en la prolongación; X: AB = 1:2 es el punto X que divide AB en la razón 1 : 2. Los puntos auxiliares se pueden usar en otras líneas. El cuerpo está en perspectiva caballera con las aristas ocultas a trazos; un triángulo, pentágono o hexágono regular en la base se dibuja primero al lado en verdadera magnitud y se lleva a la perspectiva. La sección se construye lado a lado según las reglas escolares: los puntos de una misma cara se unen, las caras paralelas se cortan en paralelas, la recta de un lado corta la recta de una arista en un punto auxiliar T que está también en la cara vecina, y la recta de un punto interior se lleva a la base con un plano vertical auxiliar. Bajo la figura, la sección terminada en el espacio se puede girar con el dedo.

Ejemplos

Triángulo a partir de tres lados (LLL).

Enunciado: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

Resultado

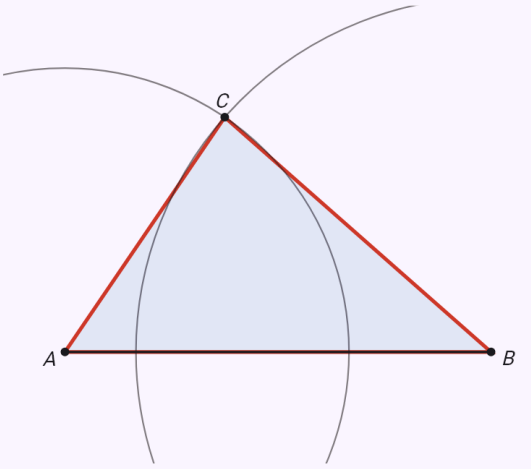
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – la circunferencia l de centro B y radio a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – el tercer vértice es la intersección.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos los vértices.
- Discusión: la desigualdad triangular $a + b > c$ se cumple, las circunferencias se cortan. En un semiplano determinado por el primer lado el problema tiene una solución (en el otro está su imagen simétrica, congruente).

Gráfica



Paso 5 de 5

$5.\ \triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Dos lados y el ángulo comprendido (LAL).

Enunciado: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

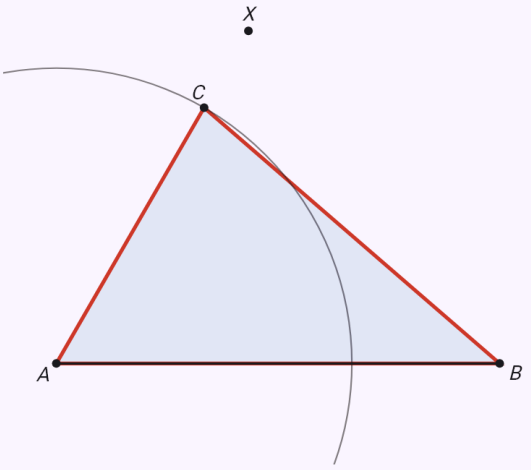
Resultado

$$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – construimos el ángulo α; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – el tercer vértice es la intersección.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos los vértices.
- Discusión: en un semiplano determinado por el primer lado el problema tiene una solución (en el otro semiplano está su imagen simétrica, congruente).

Gráfica



Paso 5 de 5
5. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un lado y dos ángulos, uno de ellos no adyacente al lado – se calcula el tercer ángulo (ALA).

Enunciado: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

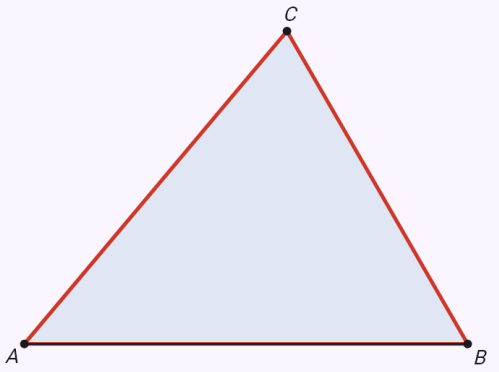
Resultado

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- El tercer ángulo se obtiene de la suma de los ángulos de un triángulo: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 50^\circ$ – construimos el ángulo α; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 60^\circ$ – construimos el ángulo β; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{BY}$
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – el tercer vértice es la intersección.
- 5. $\triangle ABC$ – unimos los vértices.
- Discusión: en un semiplano determinado por el primer lado el problema tiene una solución (en el otro semiplano está su imagen simétrica, congruente).

Gráfica



Paso 5 de 5
5. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

El ángulo opuesto al menor de dos lados – dos soluciones (LLA).

Enunciado: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

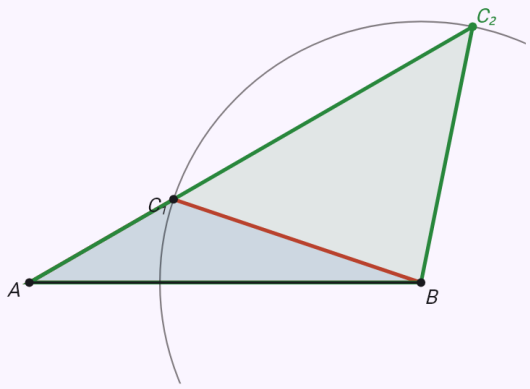
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – construimos el ángulo α; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro B y radio a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – hay dos intersecciones, cada una es el tercer vértice de un triángulo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: la circunferencia corta la semirrecta en dos puntos – en un semiplano determinado por el primer lado el problema tiene dos soluciones, dos triángulos distintos.

Gráfica



Paso 5 de 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Lados que no cumplen la desigualdad triangular.

Enunciado: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

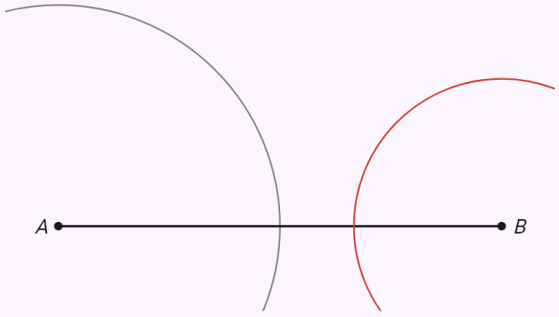
Resultado

No se puede construir una figura con los elementos dados.

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $a = 2\,\text{cm},\ b = 3\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\text{cm})$ – la circunferencia l de centro B y radio a
- Discusión: la desigualdad triangular no se cumple ($a + b = 5\,\text{cm} \leq c = 6\,\text{cm}$) – las circunferencias no se cortan y el triángulo no existe.

Gráfica



Paso 3 de 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\text{cm})$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

El lado c, la altura y la mediana sobre él – dos soluciones.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

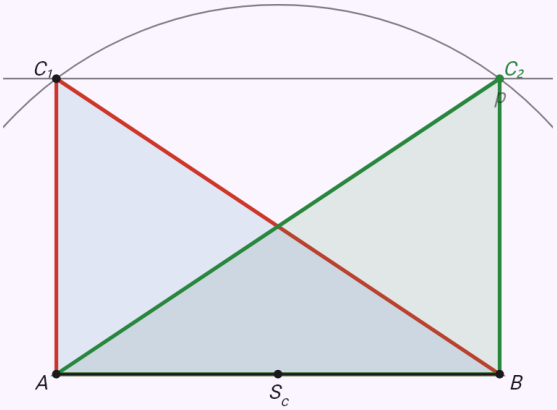
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – la paralela p a AB a la distancia v_c
- 3. S_c; $S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – el punto medio S_c del segmento AB (donde lo corta su mediatriz).
- 4. k; $k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro S_c y radio t_c
- 5. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – hay dos intersecciones, cada una es el tercer vértice de un triángulo.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: en el semiplano sobre el primer lado los lugares geométricos tienen 2 puntos comunes – el problema tiene otras tantas soluciones (en el otro semiplano están sus imágenes simétricas).

Gráfica



Paso 6 de 6

6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

El lado c, la altura sobre él y el ángulo opuesto – el arco capaz.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

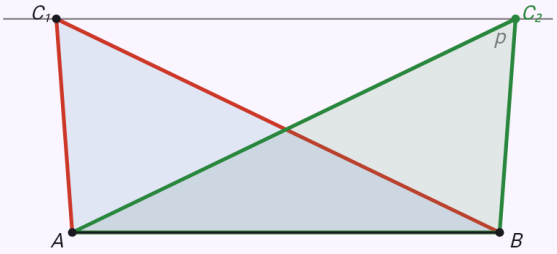
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la paralela p a AB a la distancia v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – el arco k desde el que el segmento AB se ve bajo el ángulo γ (construido como en «Arco capaz»).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – hay dos intersecciones, cada una es el tercer vértice de un triángulo.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: en el semiplano sobre el primer lado los lugares geométricos tienen 2 puntos comunes – el problema tiene otras tantas soluciones (en el otro semiplano están sus imágenes simétricas).

Gráfica



Paso 5 de 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un lado, el radio circunscrito y otro lado – dos circunferencias circunscritas.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

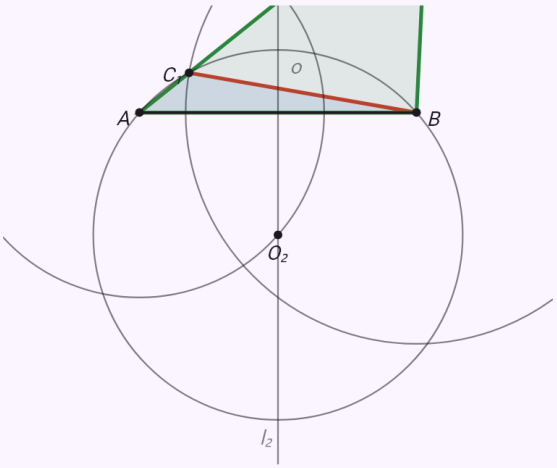
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la mediatriz o del segmento AB, construida como en «Mediatriz».
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio r
- 4. $O_1, O_2;\ O_1, O_2 \in o \cap k$ – las intersecciones O_1, O_2
- 5. $l_1, l_2;\ l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – la circunferencia circunscrita l_1, l_2 de centro O_1, O_2
- 6. $m;\ m(B;\ 5\,\text{cm})$ – la circunferencia m de centro B y radio a
- 7. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – hay dos intersecciones, cada una es el tercer vértice de un triángulo.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: en el semiplano sobre el primer lado los lugares geométricos tienen 2 puntos comunes – el problema tiene otras tantas soluciones (en el otro semiplano están sus imágenes simétricas).

Gráfica



Paso 8 de 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Dos lados y la altura desde su vértice común – primero la altura.

Enunciado: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Resultado

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

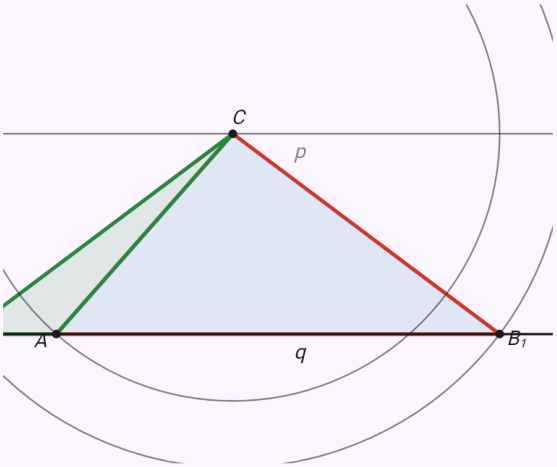
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – una recta cualquiera q sobre la que estará el lado AB
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – la paralela p a q a la distancia v_c
- 3. C; $C \in p$ – un punto cualquiera C de la recta p
- 4. k; $k(C;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro C y radio b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – una de las intersecciones, A (la otra da un triángulo congruente).
- 6. l; $l(C;\ 5\,\text{cm})$ – la circunferencia l de centro C y radio a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – hay dos intersecciones, cada una es el tercer vértice de un triángulo.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – unimos los vértices.
- Discusión: la circunferencia l corta la recta q en dos puntos – el problema tiene dos soluciones, dos triángulos distintos (la otra intersección de la circunferencia k solo da congruentes).

Gráfica



Paso 8 de 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un lado, un ángulo en él y el radio inscrito – la tangente mediante una circunferencia de Tales.

Enunciado: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

Resultado

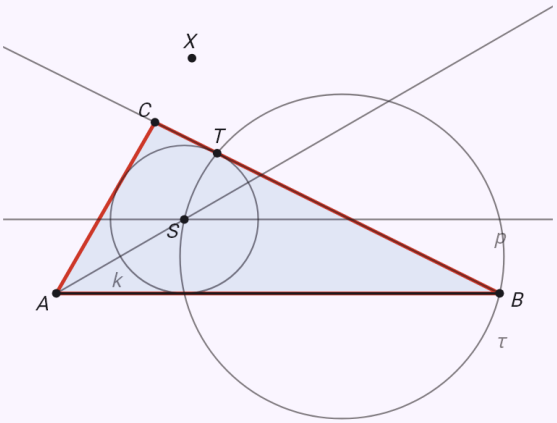
$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Pasos

- Análisis: boceto del triángulo terminado con los elementos dados resaltados – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – construimos el ángulo α; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{AX}$
- 3. o; $o = \overrightarrow{AY}$, $|\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – la bisectriz o del ángulo α (construida como en «Bisectriz»); en ella está el incentro.
- 4. p; $p \parallel AB$, $|p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – la paralela p a AB a la distancia ϱ
- 5. S; $S \in o \cap p$ – la intersección S
- 6. k; $k(S;\ \varrho)$ – la circunferencia inscrita k de centro S
- 7. τ; $\tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – la circunferencia de Tales τ sobre el segmento BS
- 8. T; $T \in \tau \cap k$ – el punto de tangencia T de la tangente desde B (la otra intersección es el punto de tangencia en el primer lado).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – la tangente desde el punto B a la circunferencia inscrita.
- 10. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – el tercer vértice es la intersección.
- 11. $\triangle ABC$ – unimos los vértices.

- Discusión: en un semiplano determinado por el primer lado el problema tiene una solución (en el otro semiplano está su imagen simétrica, congruente).

Gráfica



Paso 11 de 11
11. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un rectángulo a partir de un lado y la diagonal – el ángulo recto en B.

Enunciado: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

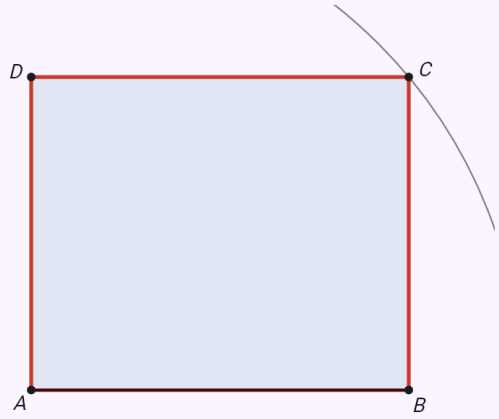
Resultado

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): el lado AB con los demás elementos dados determina el triángulo ABC o ABD, que se construye como un problema de triángulos. El cuarto vértice lo completa – los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y paralelos.
- 1. AB; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – trazamos el lado a
- 2. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 90^\circ$ – construimos el ángulo β; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{BY}$
- 3. k; $k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio e
- 4. C; $C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – la intersección C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – el cuarto vértice D: los lados opuestos son iguales, así que está en las circunferencias de centros C, A y radios $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – unimos los vértices.
- Discusión: el problema tiene una solución – cualquier otro cuadrilátero así es congruente con él.

Gráfica



Paso 6 de 6
6. $ABCD$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un rombo a partir de sus diagonales – los vértices en la mediatriz de AC.

Enunciado: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

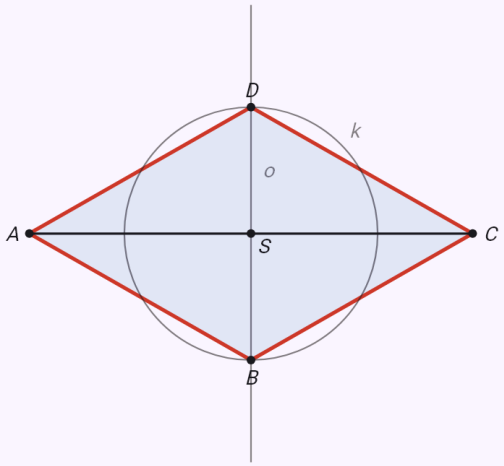
Resultado

$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$
$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$
$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): las diagonales del cuadrado y del rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio. Los vértices B y D están, por tanto, en la mediatriz de AC, a media diagonal de su punto medio S.
- 1. AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$ – trazamos la diagonal AC
- 2. o; $o \perp AC,\ S \in o$ – la mediatriz o del segmento AC, construida como en «Mediatriz».
- 3. k; $k(S;\, 2\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro S y radio $\frac{f}{2}$
- 4. B, D; $B, D \in o \cap k$ – las intersecciones B, D
- 5. $ABCD$ – unimos los vértices.
- Discusión: el problema tiene una solución – cualquier otro cuadrilátero así es congruente con él.

Gráfica



Paso 5 de 5
5. $ABCD$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un paralelogramo a partir de dos lados y una diagonal – primero el triángulo ABC.

Enunciado: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

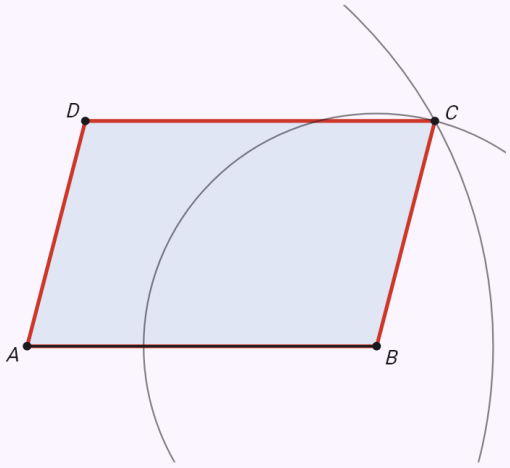
Resultado

$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$
$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$
$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$
$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$
$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): el lado AB con los demás elementos dados determina el triángulo ABC o ABD, que se construye como un problema de triángulos. El cuarto vértice lo completa – los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y paralelos.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el lado a
- 2. $k;\ k(A;\ 8\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro A y radio e
- 3. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia l de centro B y radio b
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – la intersección C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – el cuarto vértice D: los lados opuestos son iguales, así que está en las circunferencias de centros C, A y radios $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – unimos los vértices.
- Discusión: el problema tiene una solución – cualquier otro cuadrilátero así es congruente con él.

Gráfica



Paso 6 de 6
6. $ABCD$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un trapecio a partir de cuatro lados – el triángulo auxiliar EBC.

Enunciado: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

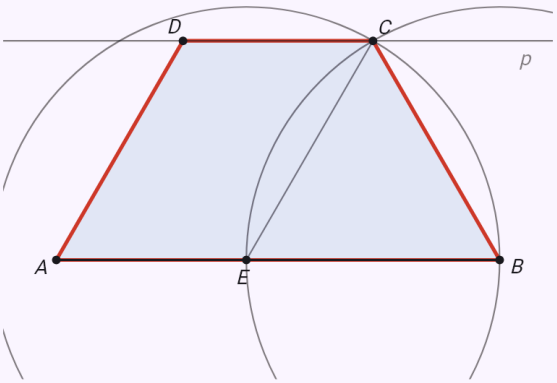
Resultado

$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$
$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$
$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$
$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$
$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): trasladando el lado AD según el vector DC se obtiene el triángulo EBC con E en AB y |AE| = c. Sus lados son |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d y sus ángulos en E y B son α y β. Se construye primero y D se completa en la paralela a AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – trazamos el lado a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – el punto E a la distancia $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro E y radio d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – la circunferencia l de centro B y radio b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – la intersección C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – el vértice D en la paralela a AB por C, a la distancia $3\,\text{cm}$ de él.
- 7. $ABCD$ – unimos los vértices.
- Discusión: el problema tiene una solución – cualquier otro cuadrilátero así es congruente con él.

Gráfica



Paso 7 de 7
7. $ABCD$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Un trapecio a partir de tres lados y un ángulo – dos soluciones.

Enunciado: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Resultado

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

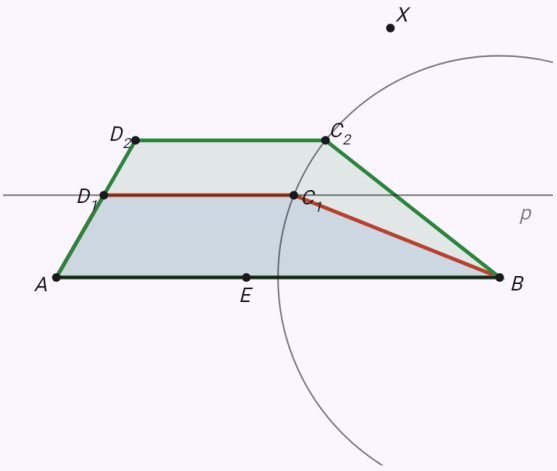
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): trasladando el lado AD según el vector DC se obtiene el triángulo EBC con E en AB y |AE| = c. Sus lados son |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d y sus ángulos en E y B son α y β. Se construye primero y D se completa en la paralela a AB.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – trazamos el lado a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – el punto E a la distancia $3\,\text{cm}$ de A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – construimos el ángulo α; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro B y radio b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – las intersecciones C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – el vértice D_1 en la paralela a AB por C_1, a la distancia $3\,\text{cm}$ de él.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – el vértice D_2 en la paralela a AB por C_2, a la distancia $3\,\text{cm}$ de él.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: hay dos intersecciones – el problema tiene dos soluciones, dos cuadriláteros distintos.

Gráfica



Paso 8 de 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La mediatriz de un segmento AB de 6 cm.

Enunciado: `construction(segment_bisector; d=6)`

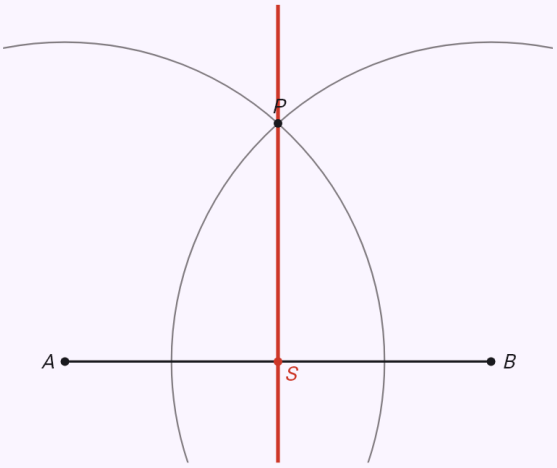
Resultado

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 6\,\text{cm}$): un punto X que equidista de A y B es el vértice de un triángulo isósceles ABX – está en la perpendicular a AB por su punto medio, la mediatriz.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – la circunferencia k de centro A y radio $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – la circunferencia l de centro B y el mismo radio.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – las intersecciones P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – la recta o es la mediatriz: el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B.

Gráfica



Paso 5 de 5

$5.\ o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La bisectriz de un ángulo de 70°.

Enunciado: `construction(angle_bisector; phi=70)`

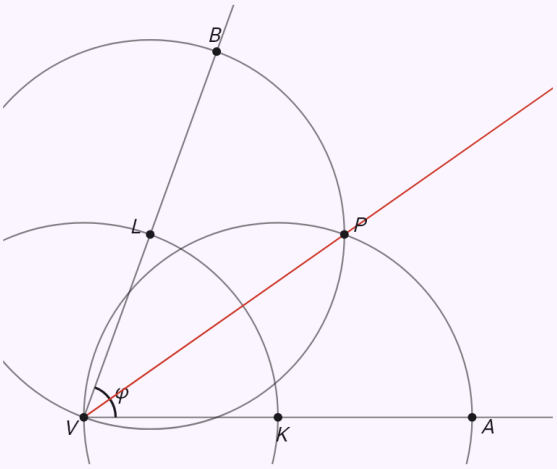
Resultado

$$o = \overrightarrow{VP}$$
$$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$$

Pasos

- Análisis ($|\angle AVB| = 70^\circ$): un punto del interior del ángulo que equidista de ambos lados está en la semirrecta que divide el ángulo en dos – la bisectriz.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – trazamos el ángulo $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro V y radio cualquiera.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – las intersecciones K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\text{cm}$ – la circunferencia m de centro K y radio $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – la circunferencia n de centro L y el mismo radio.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – la intersección P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – la semirrecta o es la bisectriz: divide el ángulo en dos y sus puntos equidistan de ambos lados.

Gráfica



Paso 7 de 7

$7.\ o;\ o = \overrightarrow{VP}$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La circunferencia de Tales sobre un segmento de 5 cm.

Enunciado: `construction(thales; d=5)`

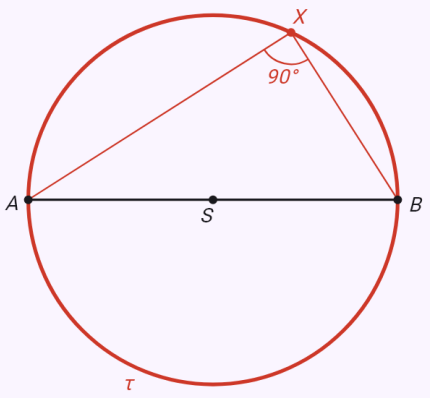
Resultado

$$\tau(S;\ 2{,}5\,\text{cm}) \setminus \{A, B\}$$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 5\,\text{cm}$): por el teorema de Tales, el ángulo AXB es recto exactamente cuando X está en la circunferencia de diámetro AB (salvo A y B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – el punto medio S del segmento AB (donde lo corta su mediatriz).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – la circunferencia de Tales τ de centro S y radio $\dfrac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\text{cm}$; sin A y B es el conjunto buscado.

Gráfica



Paso 3 de 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\text{cm})$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Los puntos desde los que un segmento de 6 cm se ve bajo 60°.

Enunciado: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

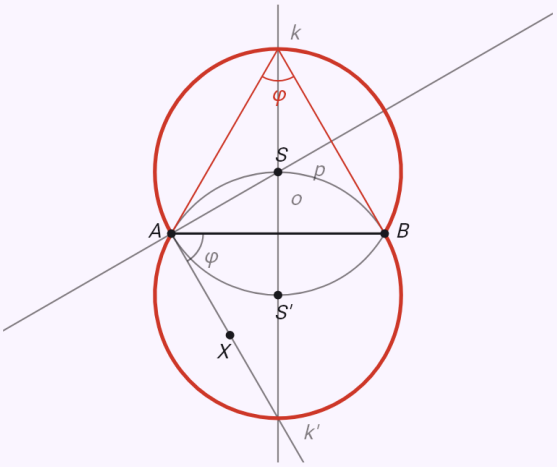
Resultado

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$): los puntos X desde los que AB se ve bajo el ángulo φ están en dos arcos simétricos respecto de AB. El ángulo inscrito sobre la cuerda AB es igual al ángulo semiinscrito entre AB y la tangente en A – el centro del arco está en la mediatriz de AB y en la perpendicular a la tangente en A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la mediatriz o del segmento AB, construida como en «Mediatriz».
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – construimos el ángulo φ; su lado es la semirrecta $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – la perpendicular p a la semirrecta $\overrightarrow{AX}$ en el punto A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – la intersección S
- 6. k; $k(S; |SA|)$ – la circunferencia k de centro S y radio $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – la circunferencia k', simétrica de k respecto de la recta AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – los arcos sobre el segmento AB (sin A y B) son el conjunto buscado: desde cada uno de sus puntos AB se ve bajo el ángulo φ

Gráfica



Paso 8 de 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Las tangentes desde un punto a 5 cm a una circunferencia de radio 3 cm.

Enunciado: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Resultado

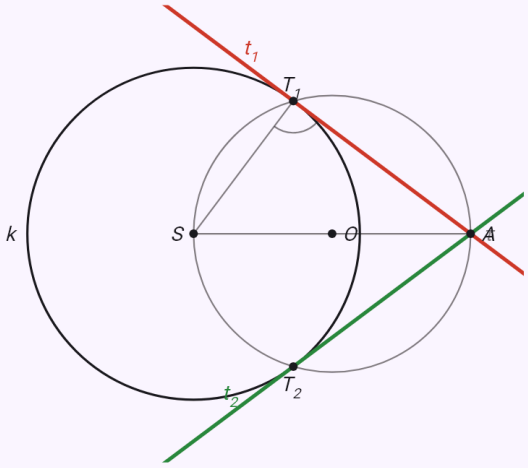
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\text{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Pasos

- Análisis ($r = 3\,\text{cm},\ |SA| = 5\,\text{cm}$): la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia T, así que el ángulo STA es recto. Por eso los puntos de tangencia están en la circunferencia de Tales sobre SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\text{cm})$ – la circunferencia k de centro S y radio $3\,\text{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – el punto A a la distancia $5\,\text{cm}$ de S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – el punto medio O del segmento SA (donde lo corta su mediatriz).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – la circunferencia de Tales τ sobre el segmento SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – los puntos de tangencia T_1, T_2 son las intersecciones de las circunferencias k y τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – las tangentes t_1, t_2 desde el punto A
- Discusión: el punto A está fuera de la circunferencia – pasan por él dos tangentes, simétricas respecto a la recta SA.

Gráfica



Paso 6 de 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Cuatro tangentes comunes a dos circunferencias exteriores.

Enunciado: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

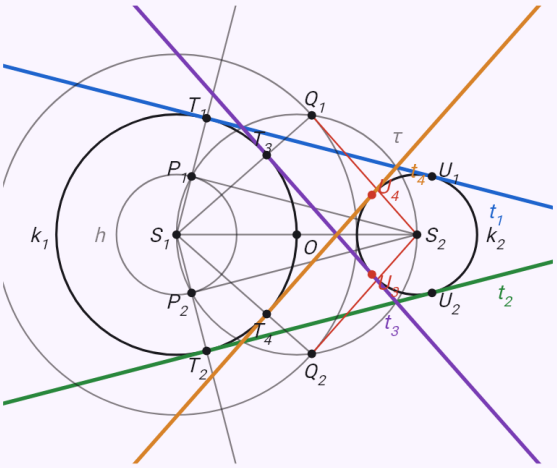
Resultado

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): si desplazamos una tangente exterior paralelamente hacia los centros el radio menor, toca una circunferencia auxiliar centrada en el centro de la mayor con radio $|r_1 - r_2|$ y pasa por el centro de la menor. Para una tangente interior el radio auxiliar es $r_1 + r_2$. Las tangentes desde el centro a la circunferencia auxiliar se obtienen con la circunferencia de Tales sobre la línea de los centros.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – la circunferencia k_1 de centro S_1 y radio $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – la circunferencia k_2 de centro S_2 y radio $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – el punto medio O del segmento S_1S_2 (donde lo corta su mediatriz).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – la circunferencia de Tales τ sobre el segmento S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – la circunferencia auxiliar h de centro S_1 y radio igual a la diferencia de los radios, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – las intersecciones P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – los puntos de tangencia T_1, T_2 son las intersecciones de $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ con la circunferencia k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – las tangentes comunes exteriores t_1, t_2 por los puntos T_1, T_2, paralelas a S_2P_1, S_2P_2; también son tangentes a la otra circunferencia.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – la circunferencia auxiliar h' de centro S_1 y radio igual a la suma de los radios, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – las intersecciones Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – los puntos de tangencia T_3, T_4 son las intersecciones de S_1Q_1, S_1Q_2 con la circunferencia k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – las tangentes comunes interiores t_3, t_4 por los puntos T_3, T_4, paralelas a S_2Q_1, S_2Q_2
- Discusión: las circunferencias son exteriores ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – tienen dos tangentes comunes exteriores y dos interiores.

Gráfica



Paso 12 de 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Una circunferencia de radio 2 cm tangente a los lados de un ángulo de 60°.

Enunciado: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Resultado

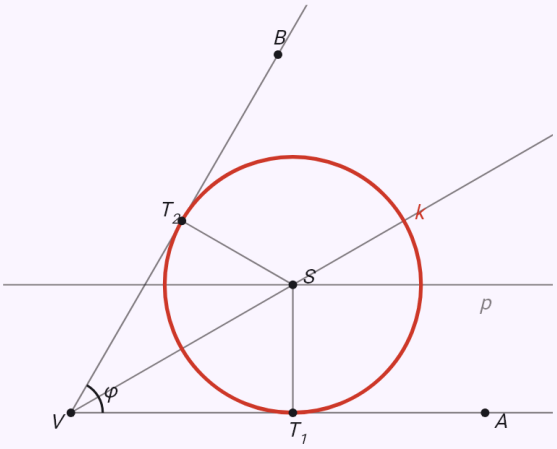
$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\tan\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($\varphi = 60^\circ,\ r = 2\,\text{cm}$): el centro dista r de ambos lados – está en la bisectriz y en la paralela a un lado a distancia r. Los puntos de tangencia son los pies de las perpendiculares desde el centro a los lados.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60^\circ$ – trazamos el ángulo $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – la bisectriz o del ángulo $\angle AVB$ (construida como en «Bisectriz»); sus puntos equidistan de ambos lados.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – la paralela p a VA a la distancia r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – la intersección S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – los puntos de tangencia T_1, T_2 son los pies de las perpendiculares desde el centro S a VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – la circunferencia buscada k de centro S y radio $2\,\text{cm}$
- Discusión: la bisectriz y la paralela se cortan siempre en un único punto – el problema tiene una solución.

Gráfica



Paso 6 de 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Circunferencias por un punto tangentes a una recta – dos soluciones.

Enunciado: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Resultado

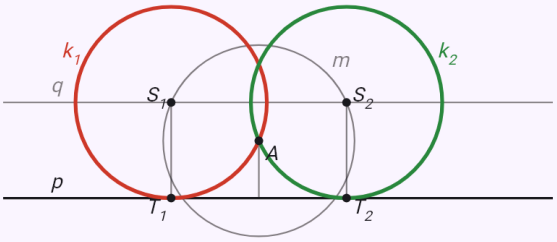
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): el centro dista r de la recta p, así que está en la paralela q a p a distancia r del lado de A. También dista r de A, así que está además en la circunferencia m(A; r).
- 1. p – una recta cualquiera p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – el punto A a la distancia $1{,}5\,\text{cm}$ de p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – la paralela q a p a la distancia r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – la circunferencia m de centro A y radio $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – las intersecciones S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – los puntos de tangencia T_1, T_2 son los pies de las perpendiculares desde el centro S_1, S_2 a p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – las circunferencias buscadas k_1, k_2 de centros S_1, S_2 y radio $2{,}5\,\text{cm}$
- Discusión: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – la circunferencia m corta la paralela q en dos puntos, el problema tiene dos soluciones.

Gráfica



Paso 7 de 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Circunferencias de radio dado por dos puntos – dos soluciones simétricas respecto a AB.

Enunciado: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Resultado

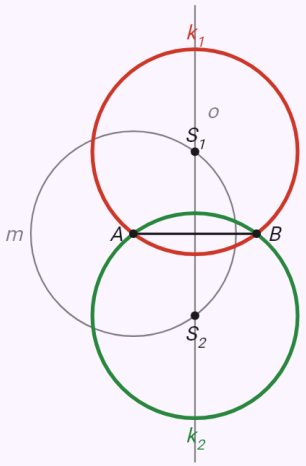
$$k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 6\,\text{cm},\ r = 5\,\text{cm}$): el centro dista r de A y de B – está en la mediatriz de AB y en la circunferencia m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – la mediatriz o del segmento AB, construida como en «Mediatriz».
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\text{cm})$ – la circunferencia m de centro A y radio $5\,\text{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – las intersecciones S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$ – las circunferencias buscadas k_1, k_2 de centros S_1, S_2 y radio $5\,\text{cm}$
- Discusión: $|AB| = 6\,\text{cm} < 2r = 10\,\text{cm}$ – la circunferencia m corta la mediatriz en dos puntos, el problema tiene dos soluciones simétricas respecto a AB.

Gráfica



Paso 5 de 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

El vértice C desde el que AB se ve bajo 60°, a la altura 3 cm – arcos y paralelas.

Enunciado: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Resultado

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

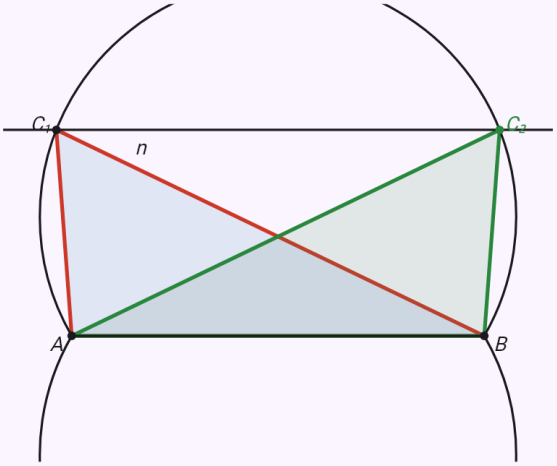
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 6\,\text{cm}$): boceto del triángulo ABC terminado con las relaciones dadas resaltadas. Cada una de las dos relaciones da un lugar geométrico en el que está el vértice C – C está por tanto en su intersección.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB dado.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – los puntos desde los que el segmento AB se ve bajo el ángulo 60° están en dos arcos m, m' simétricos respecto de AB (construidos como en «Arco capaz»).
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – los puntos a la distancia $3\,\text{cm}$ de la recta AB están en dos paralelas n, n' a ella, una a cada lado.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – los puntos buscados son las intersecciones de ambos lugares.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – unimos los vértices.
- Discusión: en el semiplano sobre AB los lugares tienen 2 puntos comunes – el problema tiene 2 soluciones (en el semiplano opuesto sus imágenes simétricas, congruentes).

Gráfica



Paso 5 de 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La razón |AC| : |BC| = 2 y |BC| = 3 cm – la circunferencia de Apolonio.

Enunciado: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

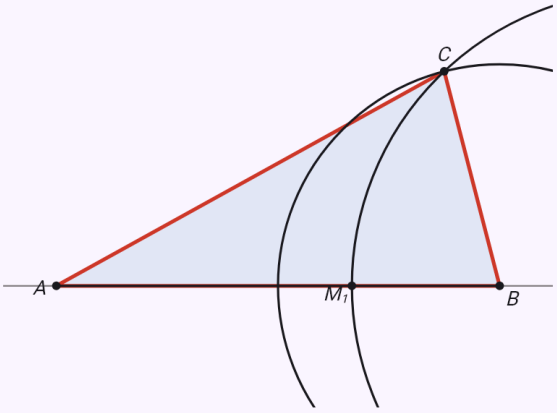
Resultado

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Pasos

- Análisis ($|AB| = 6\,\text{cm}$): boceto del triángulo ABC terminado con las relaciones dadas resaltadas. Cada una de las dos relaciones da un lugar geométrico en el que está el vértice C – C está por tanto en su intersección.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – trazamos el segmento AB dado.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – los puntos cuyas distancias a los extremos del segmento AB están en la razón 2 están en la circunferencia de Apolonio. Primero los puntos M_1 (dentro del segmento) y M_2 (en su prolongación) que dividen AB en esa razón.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – la circunferencia de Apolonio m es la de Tales de diámetro M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – los puntos a la distancia $3\,\text{cm}$ del punto B están en la circunferencia n de centro B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – el punto buscado es la intersección de ambos lugares.
- 6. $\triangle ABC$ – unimos los vértices.
- Discusión: en el semiplano sobre AB los lugares tienen un punto común – el problema tiene una solución (en el semiplano opuesto su imagen simétrica, congruente).

Gráfica



Paso 6 de 6
6. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Los puntos de tangencia de las tangentes desde A – AX tangente y X en la circunferencia.

Enunciado: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

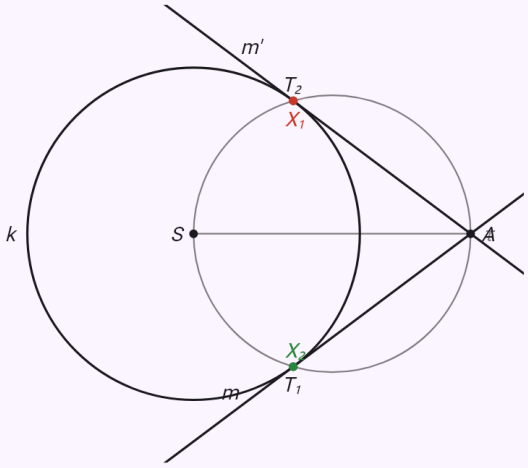
Resultado

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm}, \ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm}, \ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis $(k(S;\,3\,\text{cm}), \ |SA| = 5\,\text{cm})$: boceto con la circunferencia k dada, el punto A y el punto X buscado, las relaciones dadas resaltadas. Cada una de las dos relaciones da un lugar geométrico – X está en su intersección.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}), \ |SA| = 5\,\text{cm}$ – trazamos la circunferencia k dada y el punto A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – la recta AX debe ser tangente a k: los puntos de tangencia están en la circunferencia de Tales τ de diámetro SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1}, \ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ corta k en los puntos de tangencia T_1, T_2, por los que pasan las tangentes m, m'
- El punto X debe estar en la circunferencia k – el lugar es la propia circunferencia k, ya trazada.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – los puntos buscados son las intersecciones de ambos lugares.
- Discusión: los lugares tienen 2 puntos comunes – el problema tiene 2 soluciones.

Gráfica



Paso 4 de 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Los centros de las circunferencias de radio 1 cm tangentes a la circunferencia k y a la recta p.

Enunciado: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

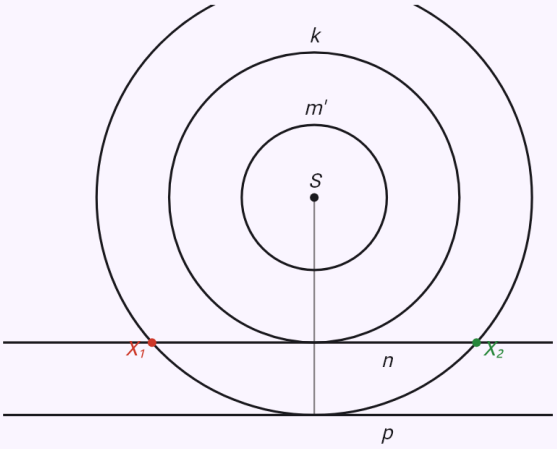
Resultado

$$X_1 : \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2 : \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis $(k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm})$: boceto con la circunferencia k dada, la recta p y el punto X buscado, las relaciones dadas resaltadas. Cada una de las dos relaciones da un lugar geométrico – X está en su intersección.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – trazamos la circunferencia k dada y la recta p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – una circunferencia de radio $1\,\text{cm}$ es tangente exterior a k cuando su centro está a r + ϱ de S, e interior a |r − ϱ|: los centros están en las circunferencias m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – los puntos a la distancia $1\,\text{cm}$ de la recta p están en dos paralelas n, n' a ella, una a cada lado.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – los puntos buscados son las intersecciones de ambos lugares.
- Discusión: los lugares tienen 2 puntos comunes – el problema tiene 2 soluciones.

Gráfica



Paso 4 de 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Los centros de las circunferencias de radio 1,5 cm tangentes a dos rectas secantes – cuatro

soluciones.

Enunciado: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

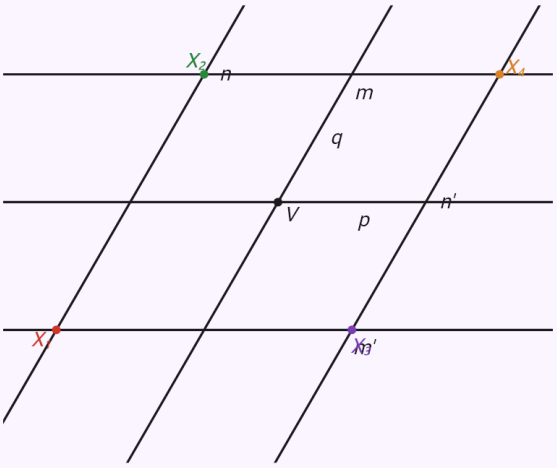
Resultado

$$X_1:\ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2:\ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3:\ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4:\ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($|\angle(p,q)| = 60^\circ$): boceto con las rectas p, q dadas y el punto X buscado, las relaciones dadas resaltadas. Cada una de las dos relaciones da un lugar geométrico – X está en su intersección.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60^\circ$ – trazamos las rectas p, q dadas, que se cortan en V.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – los puntos a la distancia $1{,}5\,\text{cm}$ de la recta p están en dos paralelas m, m' a ella, una a cada lado.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – los puntos a la distancia $1{,}5\,\text{cm}$ de la recta q están en dos paralelas n, n' a ella, una a cada lado.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – los puntos buscados son las intersecciones de ambos lugares.
- Discusión: los lugares tienen 4 puntos comunes – el problema tiene 4 soluciones.

Gráfica



Paso 4 de 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Circunferencia k(S; 2 cm), AC tangente, k circunscrita a ABD, D punto medio de BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Enunciado: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1;`

`tangent_AC=1; ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)`

Resultado

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

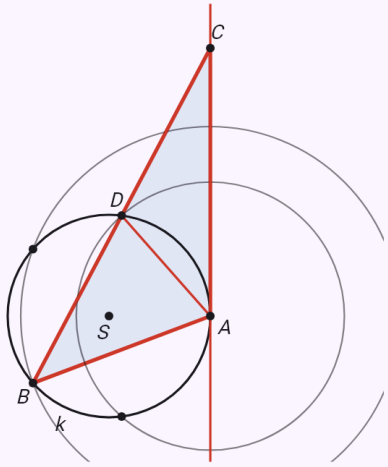
$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Pasos

- Análisis ($k(S;\,2\,\text{cm})$): escribimos las relaciones en coordenadas. El centro S en el origen y el punto A en el semieje x positivo, A = [r; 0] – cualquier solución puede girarse a esta posición. Las incógnitas son las coordenadas de los demás puntos.
- El punto está en la circunferencia k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- El punto está en la circunferencia k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- El punto está en la circunferencia k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- El punto medio ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B+x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B+y_C}{2}$
- La recta $\overleftrightarrow{AC}$ es tangente a k – su distancia al centro S es r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- La razón de longitudes ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ es la figura buscada – sus vértices no deben estar alineados.
- Resolvemos el sistema exactamente (sin redondear). Tiene 2 posiciones distintas de los puntos (ninguno coincidente), 1 salvo congruencia.
- Comprobación: sustituyendo la solución se cumplen todas las relaciones.
- De la solución: la potencia del punto C respecto de k – el cuadrado de la tangente es igual al producto de los segmentos de la secante: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- De la solución: el ángulo semiinscrito de la cuerda AD es igual al ángulo inscrito sobre ella: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41^\circ$

- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – trazamos la circunferencia k dada.
- 2. A; $A \in k$ – un punto cualquiera A de la circunferencia k.
- La longitud $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ se construye como cateto de un triángulo rectángulo con hipotenusa dada: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – el punto B es una de las intersecciones de ambos lugares (su número: 2).
- La longitud $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ se construye como cateto de un triángulo rectángulo con hipotenusa dada: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – el punto D es una de las intersecciones de ambos lugares (su número: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – el punto C simétrico de B respecto del centro D (simetría central).
- 6. $\triangle ABC$ – la figura terminada.
- Discusión: 2 posiciones de los puntos cumplen las relaciones, todas congruentes (simétricas) – salvo congruencia el problema tiene una solución.

Gráfica



Paso 6 de 6
6. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

Triángulo rectángulo sin circunferencia: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, ángulo recto en C.

Enunciado: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

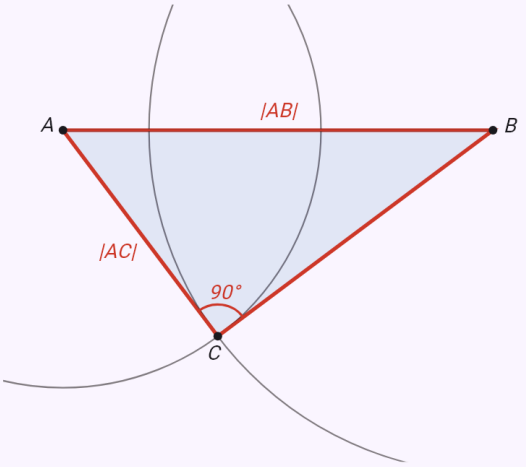
Resultado

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis: escribimos las relaciones en coordenadas. El punto A en el origen y el punto B en el semieje x positivo – cualquier solución puede trasladarse y girarse a esta posición. Las incógnitas son las coordenadas de los demás puntos.
- La longitud ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- La longitud ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- El ángulo ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ es la figura buscada – sus vértices no deben estar alineados.
- Resolvemos el sistema exactamente (sin redondear). Tiene 2 posiciones distintas de los puntos (ninguno coincidente), 1 salvo congruencia.
- Comprobación: sustituyendo la solución se cumplen todas las relaciones.
- 1. A – un punto cualquiera A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – el punto B a la distancia calculada de A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – el punto C es una de las intersecciones de ambos lugares (su número: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – la figura terminada.
- Discusión: 2 posiciones de los puntos cumplen las relaciones, todas congruentes (simétricas) – salvo congruencia el problema tiene una solución.

Gráfica



Paso 4 de 4
4. $\triangle ABC$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección de un cubo – las caras opuestas en paralelas.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

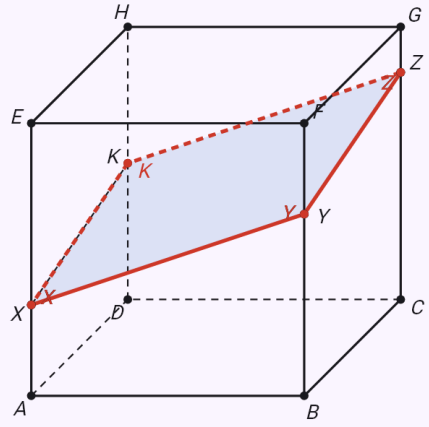
Resultado

$$XYZK$$
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$
$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado con tres reglas: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; las caras paralelas se cortan en segmentos paralelos; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – dibujamos el cubo $ABCDEFGH$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AE a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista BF a la distancia $4\,\text{cm}$ del vértice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista CG a la distancia $5\,\text{cm}$ del vértice C
- 5. XY – los puntos X, Y están en la cara $ABFE$, los unimos.
- 6. YZ – los puntos Y, Z están en la cara $BCGF$, los unimos.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – la cara $CDHG$ es paralela a la cara $ABFE$, así que la sección la corta en la paralela a YX por Z; esta corta la arista DH en K
- 8. XK – los puntos X, K están en la cara $ADHE$, los unimos.
- 9. $XYZK$ – la sección es el cuadrilátero $XYZK$

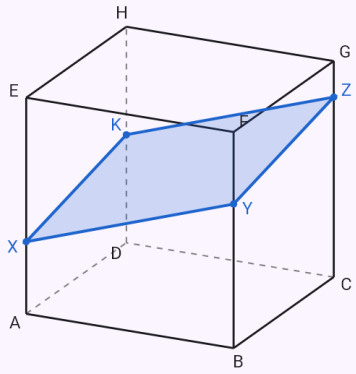
Gráfica



Paso 9 de 9
9. $XYZK$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



El hexágono regular por los puntos medios de aristas – el punto auxiliar T_1.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Resultado

$XYMZKL$

$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$

$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$

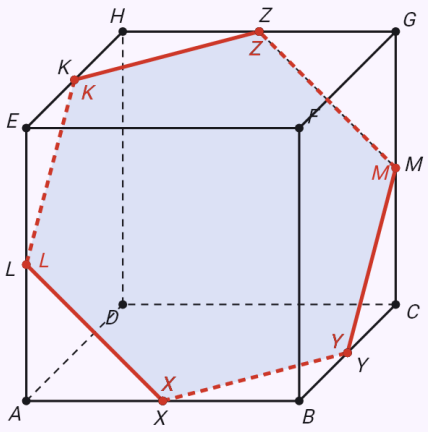
$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado con tres reglas: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; las caras paralelas se cortan en segmentos paralelos; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – dibujamos el cubo $ABCDEFGH$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AB a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista BC a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista GH a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice G
- 5. XY – los puntos X, Y están en la cara $ABCD$, los unimos.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – la cara $EFGH$ es paralela a la cara $ABCD$, así que la sección la corta en la paralela a XY por Z; esta corta la arista EH en K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – prolongamos el lado ZK y la arista EF; su punto común T_1 está en el plano de la cara $EFGH$ y de la cara $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – la recta XT_1 está en el plano de la cara $ABFE$; corta la arista AE en L
- 9. KL – los puntos K, L están en la cara $ADHE$, los unimos.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – la cara $CDHG$ es paralela a la cara $ABFE$, así que la sección la corta en la paralela a XL por Z; esta corta la arista CG en M
- 11. YM – los puntos Y, M están en la cara $BCGF$, los unimos.

- 12. $XYMZKL$ – la sección es el hexágono $XYMZKL$

Gráfica

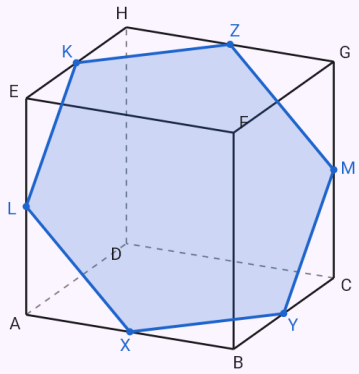


Paso 12 de 12

12. $XYMZKL$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



La sección de una pirámide por los puntos medios de dos aristas laterales y una de la base.

Enunciado: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Resultado

$XYKZL$

$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

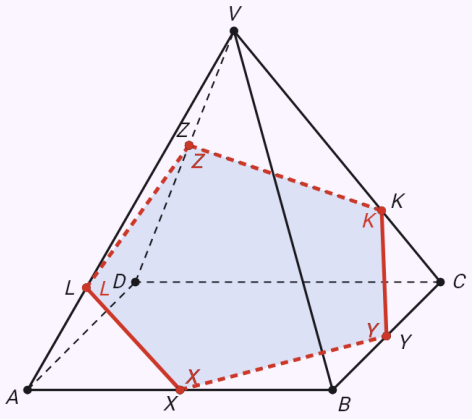
$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$

$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; si un lado es paralelo a una arista de otra cara, el plano corta esa cara en una paralela a ella; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDV;\ a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – dibujamos la pirámide cuadrangular regular $ABCDV$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AB a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista BC a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice B
- 4. $Z;\ Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista DV a la distancia $4\,\text{cm}$ del vértice D
- 5. XY – los puntos X, Y están en la cara $ABCD$, los unimos.
- 6. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – prolongamos el lado XY y la arista CD; su punto común T_1 está en el plano de la cara $ABCD$ y de la cara CDV
- 7. $ZK;\ K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – la recta ZT_1 está en el plano de la cara CDV; corta la arista CV en K
- 8. YK – los puntos Y, K están en la cara BCV, los unimos.
- 9. $T_2;\ T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – prolongamos el lado YK y la arista BV; su punto común T_2 está en el plano de la cara BCV y de la cara ABV
- 10. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – la recta XT_2 está en el plano de la cara ABV; corta la arista AV en L
- 11. ZL – los puntos Z, L están en la cara DAV, los unimos.
- 12. $XYKZL$ – la sección es el pentágono $XYKZL$

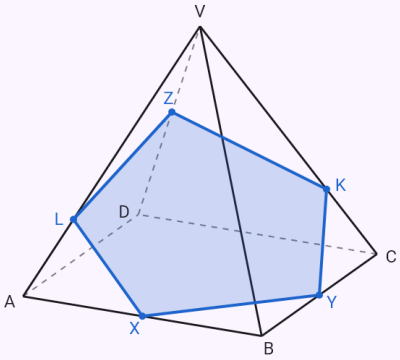
Gráfica



Paso 12 de 12
12. $XYKZL$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



Un punto en la prolongación de una arista – Y a 2 cm más allá del vértice B.

Enunciado: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Resultado

$XLKZM$

$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$

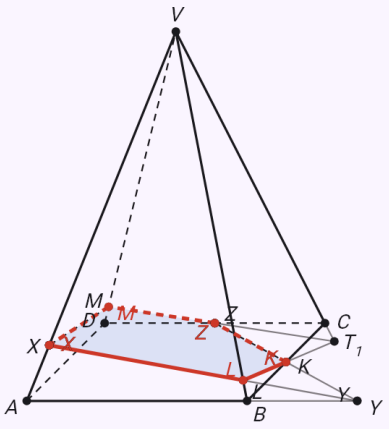
$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; si un lado es paralelo a una arista de otra cara, el plano corta esa cara en una paralela a ella; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDV;\ a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – dibujamos la pirámide cuadrangular regular $ABCDV$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AV a la distancia $1\,\text{cm}$ del vértice A
- 3. $Y;\ Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – el punto Y en la semirrecta AB a la distancia $6\,\text{cm}$ del vértice A, más allá del vértice B – fuera del cuerpo.
- 4. $Z;\ Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista CD a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice C
- 5. $ZK;\ ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – los puntos YZ están en el plano de la cara $ABCD$; su recta corta la cara en el segmento ZK
- 6. $XL;\ XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – los puntos XY están en el plano de la cara ABV; su recta corta la cara en el segmento XL
- 7. KL – los puntos K, L están en la cara BCV, los unimos.
- 8. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – prolongamos el lado KL y la arista CV; su punto común T_1 está en el plano de la cara BCV y de la cara CDV
- 9. $ZM;\ M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – la recta ZT_1 está en el plano de la cara CDV; corta la arista DV en M
- 10. XM – los puntos X, M están en la cara DAV, los unimos.

- 11. $XLKZM$ – la sección es el pentágono $XLKZM$

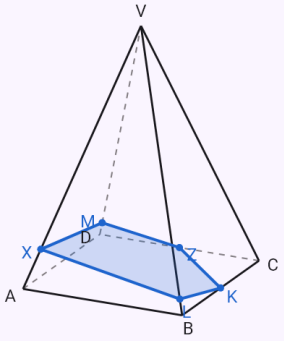
Gráfica



Paso 11 de 11
11. $XLKZM$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



Un punto interior en la diagonal del cuerpo – un plano vertical auxiliar.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Resultado

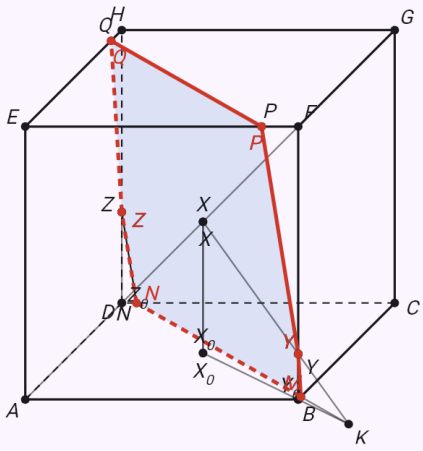
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado con tres reglas: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; las caras paralelas se cortan en segmentos paralelos; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – dibujamos el cubo $ABCDEFGH$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – el punto X en el segmento AG a la distancia $5\,\text{cm}$ del punto A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista BF a la distancia $1\,\text{cm}$ del vértice B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista DH a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – el punto X está dentro del cuerpo, así que usamos el plano vertical auxiliar de la recta XY: proyectamos los puntos en la base (X_0Y_0) y las rectas XY y X_0Y_0 se cortan en K, donde la recta XY atraviesa el plano de la base $ABCD$
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – el punto X está dentro del cuerpo, así que usamos el plano vertical auxiliar de la recta XZ: proyectamos los puntos en la base (X_0Z_0) y las rectas XZ y X_0Z_0 se cortan en L, donde la recta XZ atraviesa el plano de la base $ABCD$
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – los puntos KL están en el plano de la cara $ABCD$; su recta corta la cara en el segmento MN
- 8. ZN – los puntos Z, N están en la cara $CDHG$, los unimos.
- 9. YM – los puntos Y, M están en la cara $BCGF$, los unimos.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – la cara $ABFE$ es paralela a la cara $CDHG$, así que la sección la corta en la paralela a NZ por Y; esta corta la arista EF en P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – la cara $EFGH$ es paralela a la cara $ABCD$, así que la sección la corta en la paralela a MN por P; esta corta la arista EH en Q
- 12. ZQ – los puntos Z, Q están en la cara $ADHE$, los unimos.
- 13. $QPYMNZ$ – la sección es el hexágono $QPYMNZ$

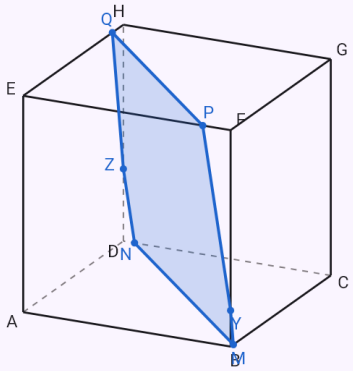
Gráfica



Paso 13 de 13
13. $QPYMNZ$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



El punto X divide la arista AB en la razón 1 : 2.

Enunciado: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

Resultado

$XYZK$

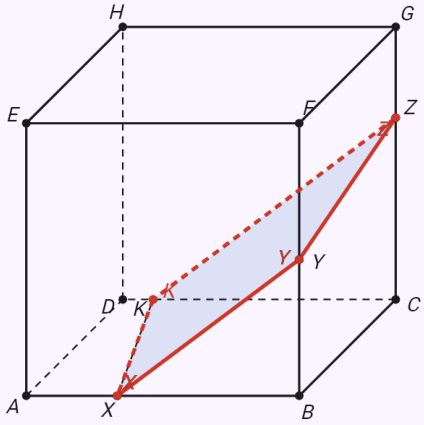
$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$

$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 6\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado con tres reglas: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; las caras paralelas se cortan en segmentos paralelos; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – dibujamos el cubo $ABCDEFGH$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 2. $X;\ |AX| : |XB| = 1 : 2$ – el punto X divide el segmento AB en la razón $1 : 2$; así queda dado el punto X
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista BF a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 4\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista CG a la distancia $4\,\text{cm}$ del vértice C
- 5. XY – los puntos X, Y están en la cara $ABFE$, los unimos.
- 6. YZ – los puntos Y, Z están en la cara $BCGF$, los unimos.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in CD$ – la cara $CDHG$ es paralela a la cara $ABFE$, así que la sección la corta en la paralela a XY por Z; esta corta la arista CD en K
- 8. XK – los puntos X, K están en la cara $ABCD$, los unimos.
- 9. $XYZK$ – la sección es el cuadrilátero $XYZK$

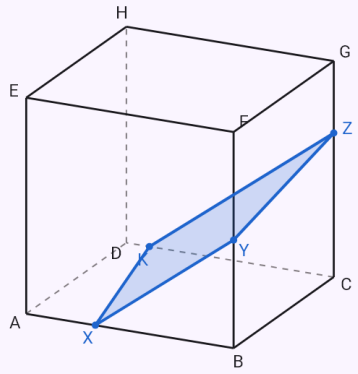
Gráfica



Paso 9 de 9
9. $XYZK$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



Sección de un prisma hexagonal regular – la base primero en verdadera magnitud.

Enunciado: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

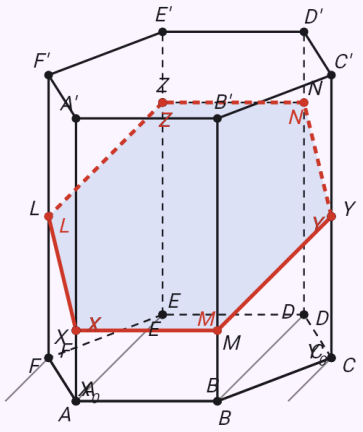
Resultado

$$XMYNZL$$
$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$
$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Pasos

- Análisis ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado con tres reglas: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; las caras paralelas se cortan en segmentos paralelos; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – al lado dibujamos la base $ABCDEF$ en verdadera magnitud: el hexágono regular de lado a, con el lado AB sobre el eje x (puntos A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – desde los vértices C, D, E, F trazamos las perpendiculares a la recta AB; llevamos sus pies al eje x sin cambio y desde ellos trazamos a 45° la mitad de la longitud de la perpendicular (la profundidad) – la base $ABCDEF$ en perspectiva caballera.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – dibujamos el prisma hexagonal regular $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AA' a la distancia $1\,\text{cm}$ del vértice A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista CC' a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista EE' a la distancia $3\,\text{cm}$ del vértice E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – los puntos XY no están en la misma cara, así que usamos el plano vertical auxiliar de la recta XY: proyectamos los puntos en la base (X_0Y_0) y las rectas XY y X_0Y_0 se cortan en K, donde la recta XY atraviesa el plano de la base $ABCDEF$
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – los puntos ZK están en el plano de la cara $EFF'E'$; su recta corta la cara en el segmento ZL
- 9. XL – los puntos X, L están en la cara $FAA'F'$, los unimos.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – la cara $BCC'B'$ es paralela a la cara $EFF'E'$, así que la sección la corta en la paralela a LZ por Y; esta corta la arista BB' en M
- 11. XM – los puntos X, M están en la cara $ABB'A'$, los unimos.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – la cara $CDD'C'$ es paralela a la cara $FAA'F'$, así que la sección la corta en la paralela a XL por Y; esta corta la arista DD' en N
- 13. ZN – los puntos Z, N están en la cara $DEE'D'$, los unimos.
- 14. $XMYNZL$ – la sección es el hexágono $XMYNZL$

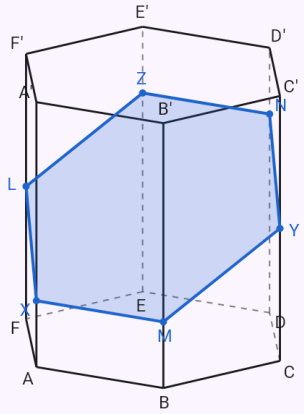
Gráfica



Paso 14 de 14
14. $XMYNZL$

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



Sección del tetraedro regular por los puntos medios de tres aristas.

Enunciado: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Resultado

XYZ

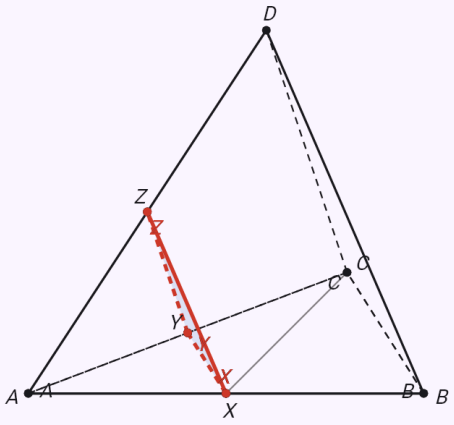
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Pasos

- Análisis ($a = 4\,\text{cm}$): el plano de corte está determinado por los puntos X, Y, Z. La sección se construye lado a lado: dos puntos de la sección en una misma cara se unen; si un lado es paralelo a una arista de otra cara, el plano corta esa cara en una paralela a ella; la recta de un lado prolongada corta la recta de una arista en un punto que está en los planos de las dos caras de esa arista.
- 1. ABC; $a = 4\,\text{cm}$ – al lado dibujamos la base ABC en verdadera magnitud: el triángulo regular de lado a, con el lado AB sobre el eje x (puntos A_0, B_0, …).
- 2. ABC; $y' = \frac{1}{2}\,y$ – desde los vértices C trazamos las perpendiculares a la recta AB; llevamos sus pies al eje x sin cambio y desde ellos trazamos a 45° la mitad de la longitud de la perpendicular (la profundidad) – la base ABC en perspectiva caballera.
- 3. $ABCD$; $a = 4\,\text{cm}$ – dibujamos el tetraedro regular $ABCD$ en perspectiva caballera (profundidad a 45°, reducida a la mitad), las aristas ocultas a trazos.
- 4. X; $X \in AB$, $|AX| = 2\,\text{cm}$ – el punto X en la arista AB a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice A
- 5. Y; $Y \in AC$, $|AY| = 2\,\text{cm}$ – el punto Y en la arista AC a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice A
- 6. Z; $Z \in AD$, $|AZ| = 2\,\text{cm}$ – el punto Z en la arista AD a la distancia $2\,\text{cm}$ del vértice A
- 7. XY – los puntos X, Y están en la cara ABC, los unimos.
- 8. XZ – los puntos X, Z están en la cara ABD, los unimos.
- 9. YZ – los puntos Y, Z están en la cara CAD, los unimos.
- 10. XYZ – la sección es el triángulo XYZ

Gráfica

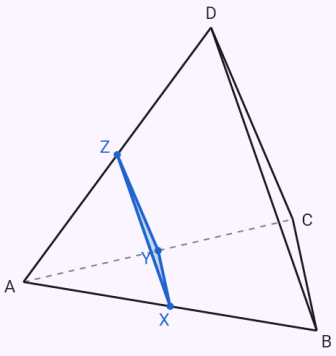


Paso 10 de 10

10. XYZ

El análisis muestra un boceto de la construcción terminada con los elementos dados. Con las flechas recorrerá la construcción paso a paso – los elementos añadidos en cada paso aparecen resaltados.

La sección en el espacio – gírala con el dedo



Limitaciones conocidas

- Por ahora un triángulo (lados, ángulos, la altura y la mediana sobre el lado dado, los radios r y ϱ en las combinaciones indicadas), cuatro lugares geométricos básicos, cinco problemas de circunferencias y tangentes, cuadriláteros en las combinaciones de la ayuda del formulario y secciones de un cubo, un ortoedro, prismas y pirámides regulares (base de 3 a 6 lados) y el tetraedro regular; el cuadrilátero general, alturas y medianas sobre otros lados y otros cuerpos llegarán más adelante.

- Los problemas con relaciones toman exactamente dos relaciones con una de las cinco figuras dadas; las relaciones entre varios puntos se dan como relaciones generales.
- Relaciones generales: como máximo 8 puntos y 10 relaciones, una construcción solo a partir del catálogo de procedimientos; un análisis del tipo «triángulos semejantes» no está automatizado.
- Solo mediante el formulario – no con palabras ni desde una foto.