Mathtrace – manual

I. Ecuaciones, inecuaciones y expresiones

Índice

I. Ecuaciones, inecuaciones y expresiones

1. Ecuaciones e inecuaciones lineales
2. Ecuaciones de segundo grado
3. Ecuaciones de grado superior
4. Ecuaciones racionales
5. Ecuaciones irracionales
6. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas
7. Valor absoluto
8. Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas
9. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones
10. Sistemas de ecuaciones
11. Ecuaciones e inecuaciones con parámetro
12. Despejar una letra de una fórmula
13. Operaciones con expresiones
14. Divisibilidad y números primos
15. Ángulos en grados, minutos y segundos
16. Porcentajes, razones y regla de tres
17. Cambio de unidades
18. Lógica y conjuntos
19. Números complejos

1. Ecuaciones e inecuaciones lineales

La aplicación transforma una ecuación lineal como se hace en clase – quita los paréntesis, pasa la incógnita a un lado y divide. En una inecuación vigila el cambio de sentido al multiplicar por un número negativo y escribe el resultado como intervalo; la gráfica muestra ambos miembros como rectas y marca la solución en el eje x.

Con el chip «Detallado» (o de forma permanente con el interruptor «Procedimiento detallado de ecuaciones» en la pantalla inicial) el procedimiento sigue cómo se enseñan las ecuaciones en primaria: la misma operación en ambos lados (/ −4x, / :2), debajo la línea intermedia y el resultado. La incógnita pasa al lado donde su coeficiente sale positivo.

Ejemplos

Una ecuación con paréntesis.

Enunciado: `3(x - 2) = 2x + 5`

Resultado

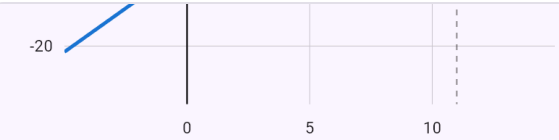
$x = 11$

Pasos

- Pasamos todo a un lado: $x - 11 = 0$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $x = 11$

Gráfica





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Intersecciones de las gráficas:

- $(11; 27)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Una inecuación – dividir por un número negativo cambia el sentido.

Enunciado: `2x - 3 < 5x + 6`

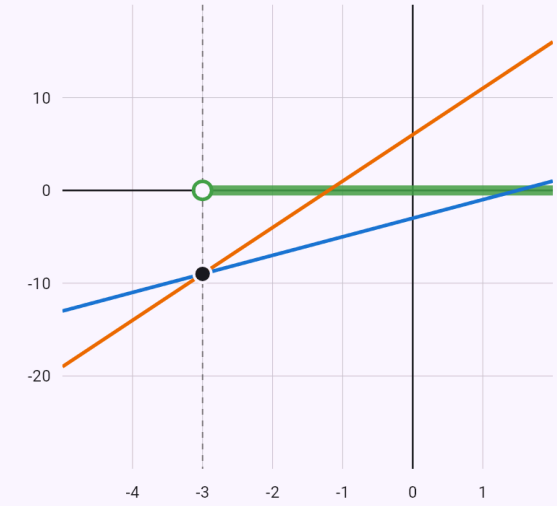
Resultado

$x \in (-3, \infty)$

Pasos

- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-3x < 9$
- Dividimos entre el número negativo -3; el signo de la desigualdad se invierte: $x > -3$

Gráfica



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $(-3; -9)$

Procedimiento detallado – la misma operación en ambos lados, escrita como en la escuela.

Enunciado: `4x + 3 = 6x + 7` Detallado

Resultado

$x = -2$

Pasos

- Restamos $4x$ a ambos lados

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

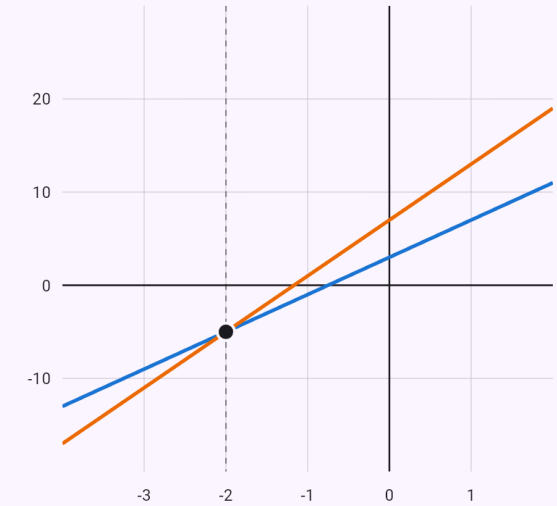
- Restamos 7 a ambos lados

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Dividimos ambos lados entre 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Gráfica



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Intersecciones de las gráficas:

- $(-2; -5)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Fracciones – ambos lados multiplicados por el denominador común.

Enunciado: `x/2 + x/3 = 10` Detallado

Resultado

$$x = 12$$

Pasos

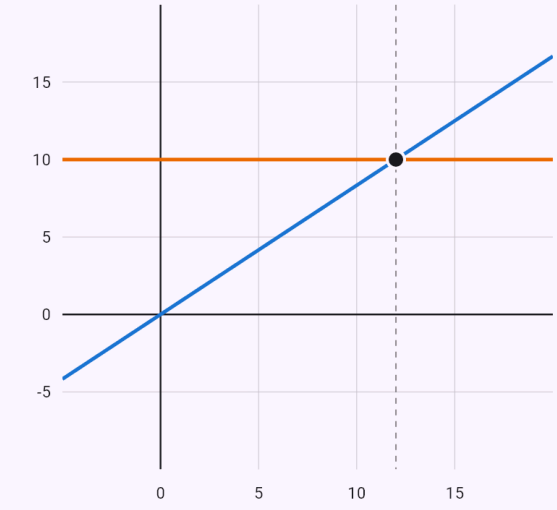
- Multiplicamos ambos lados por 6

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \quad / \cdot 6$$
$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$

- Dividimos ambos lados entre 5

$$5x = 60 \quad / : 5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

Gráfica



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$y = 10$

Intersecciones de las gráficas:

- $(12; 10)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

2. Ecuaciones de segundo grado

La aplicación lleva una ecuación de segundo grado a la forma ax² + bx + c = 0 y la resuelve con el discriminante y la fórmula general; también reconoce una raíz doble. Si la ecuación no tiene solución real, lo dice, y el botón «Mostrar solución compleja» muestra las raíces complejas.

Ejemplos

Dos raíces reales.

Enunciado: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Resultado

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

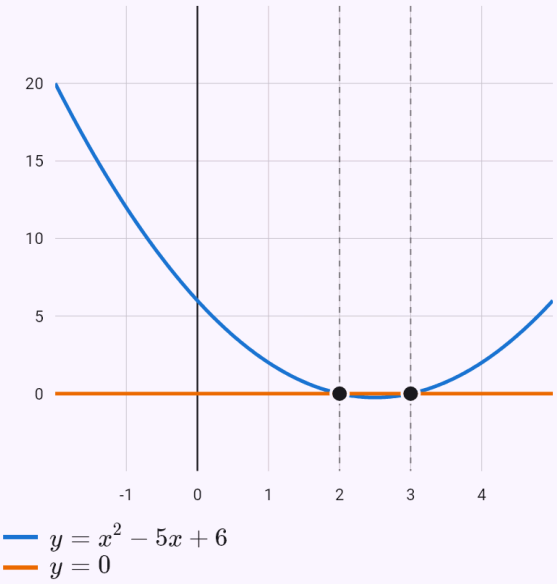
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Gráfica



$y = x^2 - 5x + 6$

$y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

● $(2; 0)$ ● $(3; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Discriminante negativo – raíces complejas.

Enunciado: `x^2 + 2x + 5 = 0` Mostrar solución compleja

Resultado

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

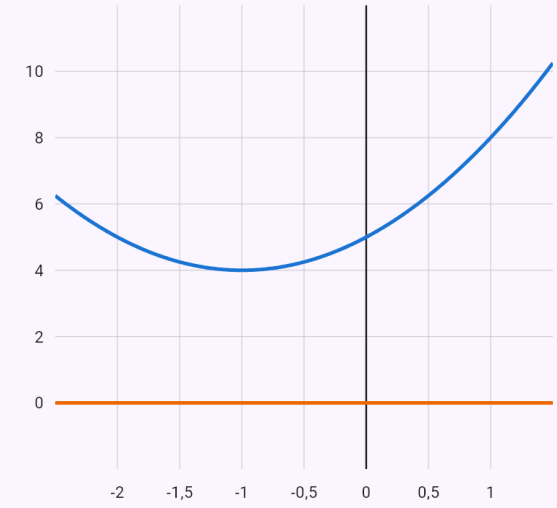
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- El discriminante es negativo; en los números complejos:
  $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Gráfica



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Las gráficas no se cortan: la ecuación no tiene solución real.

3. Ecuaciones de grado superior

Una ecuación bicuadrada la aplicación la convierte en una de segundo grado mediante un cambio de variable. Una ecuación general de grado superior la factoriza con la regla de Ruffini: busca las raíces entre los divisores del término independiente y divide por cada raíz encontrada hasta que queda una ecuación de segundo grado.

Ejemplos

Una ecuación bicuadrada con el cambio y = x².

Enunciado: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Resultado

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

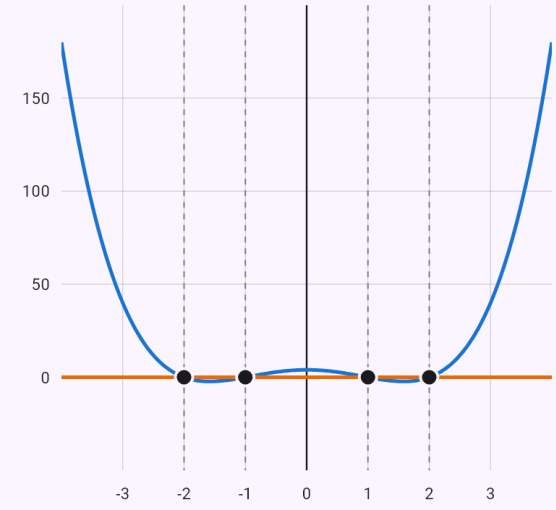
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- El cambio de variable $u = x^2$ la convierte en una ecuación cuadrática: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Sustituimos en la fórmula general: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Deshacemos el cambio de variable: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Deshacemos el cambio de variable: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Gráfica



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

● $(-2; 0)$ ● $(-1; 0)$ ● $(1; 0)$ ● $(2; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Regla de Ruffini – raíces entre los divisores del término independiente.

Enunciado: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Resultado

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

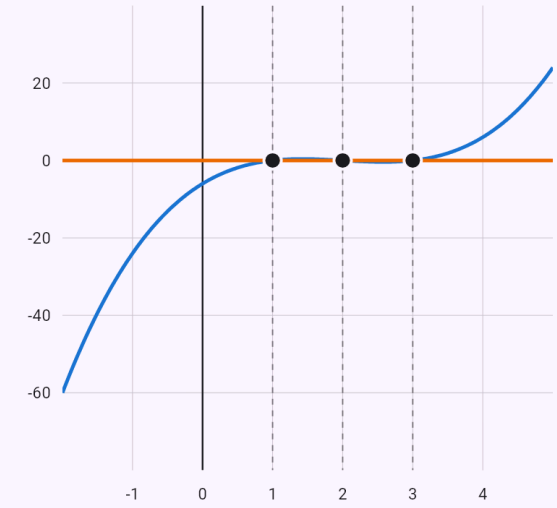
- Las raíces racionales solo pueden ser divisores del término independiente -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 1$ y dividimos el polinomio:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Calculamos el discriminante:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Gráfica



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

● $(1;0)$ ● $(2;0)$ ● $(3;0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

4. Ecuaciones racionales

En una ecuación con la incógnita en un denominador la aplicación establece primero las condiciones, luego multiplica por el denominador común y resuelve. Compara las raíces con las condiciones y descarta las que no las cumplen.

Ejemplos

Condiciones, denominador común, ecuación de segundo grado.

Enunciado: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Resultado

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Condiciones: $x \neq 1$

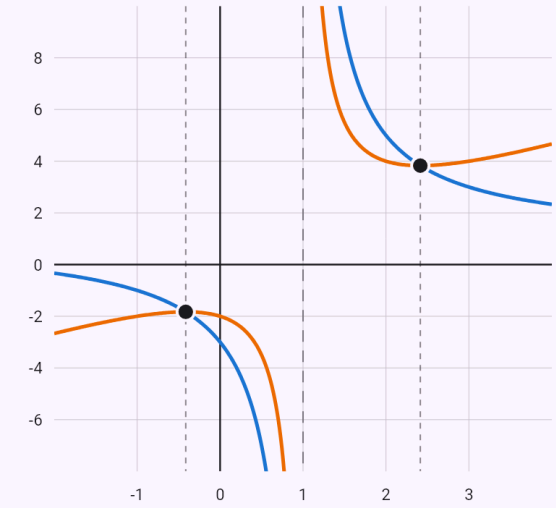
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq 1$
- Multiplicamos ambos lados por el denominador $x - 1$: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- La raíz $x = 1 - \sqrt{2}$ cumple las condiciones.
- La raíz $x = 1 + \sqrt{2}$ cumple las condiciones.

Gráfica



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

5. Ecuaciones irracionales

Una ecuación con la incógnita bajo una raíz la aplicación la resuelve aislando la raíz y elevando al cuadrado. Elevar al cuadrado puede añadir raíces que no cumplen la ecuación – por eso siempre sigue una comprobación y se descartan las raíces que no la superan.

Ejemplos

Elevar al cuadrado y comprobar – una de las raíces no cumple la ecuación.

Enunciado: `sqrt(x+5) = x - 1`

Resultado

$x = 4$

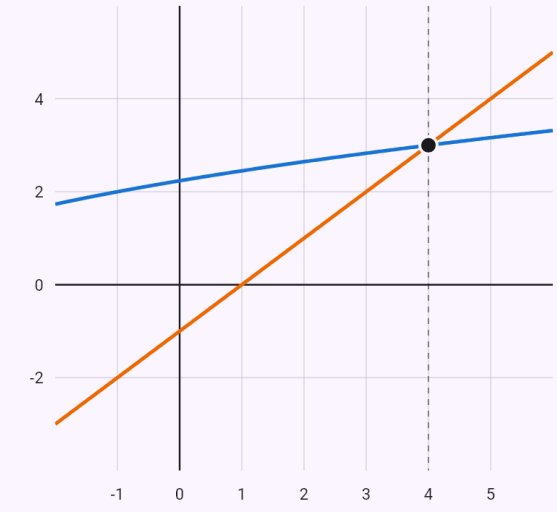
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Elevamos ambos lados al cuadrado (no es una transformación equivalente, así que comprobamos las raíces): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Comprobación para $x = -1$: Izq. = 2, Der. = -2, Izq. ≠ Der.: la raíz no es válida.
- Comprobación para $x = 4$: Izq. = 3, Der. = 3, Izq. = Der.: la raíz es válida.

Gráfica



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Intersecciones de las gráficas:

- $(4; 3)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Limitaciones conocidas

- Las inecuaciones irracionales todavía no se resuelven.

6. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una ecuación exponencial la aplicación la resuelve pasando a la misma base, tomando logaritmos o con un cambio de variable; una logarítmica, juntando los logaritmos según sus propiedades y eliminando el logaritmo, siempre con las condiciones. Las inecuaciones las resuelve mediante la monotonía – con una base menor que 1 el sentido cambia. El logaritmo de un cociente cuyo numerador o denominador no puede ser negativo (una raíz) se escribe como diferencia de logaritmos, como en la escuela.

Ecuaciones con bases distintas: $a^x + b^x = c^x$ con bases de dos primos ($25^x + 10^x = 4^x$) se dividen por una potencia y con $t = (5/2)^x$ pasan a cuadráticas; los logaritmos de bases distintas se pasan a una sola ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Los logaritmos cuyas bases son potencias de un mismo número ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) se pasan a una sola base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), se multiplica la ecuación y se agrupan los logaritmos. Un logaritmo con la incógnita en la base ($\log_x 8 = 3$) se elimina por la definición ($x^3 = 8$) con las condiciones $x > 0$, $x \neq 1$. Una ecuación con la incógnita en la base y en el exponente (x^(log x) = 100) se resuelve tomando logaritmos y con la sustitución t = log x. Las inecuaciones con la sustitución t = log(x + 1) y los sistemas de inecuaciones logarítmicas y exponenciales se resuelven como inecuaciones sueltas, mediante la monotonía.

Las ecuaciones e inecuaciones con funciones hiperbólicas se reescriben según la definición ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) como exponenciales y se resuelven con la sustitución $t = e^x$; arsinh x = c, con la función inversa (x = sinh c).

Ejemplos

El cambio de variable t = 2ˣ.

Enunciado: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Resultado

$x = 2$

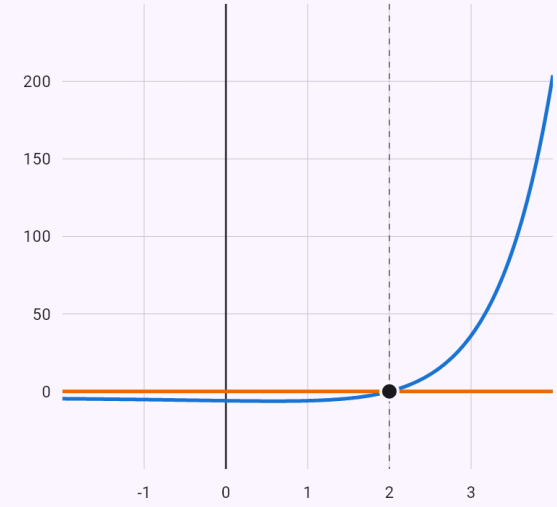
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Hacemos el cambio de variable $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- La ecuación $2^x = -1$ no tiene solución real.
- Deshacemos el cambio de variable: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Gráfica



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

- $(2; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Juntar logaritmos, condiciones.

Enunciado: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Resultado

$$x = 3$$

Condiciones: $x > 1$

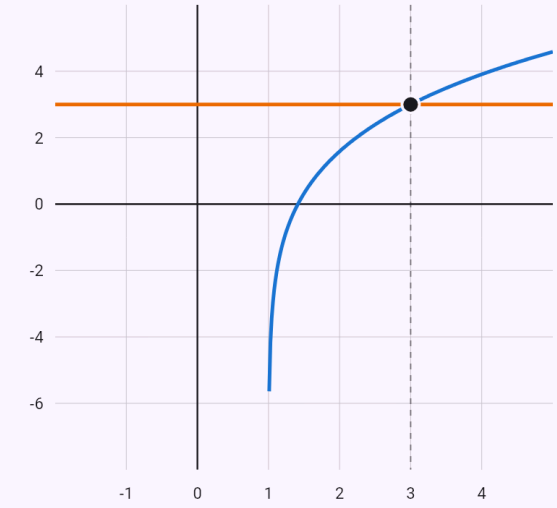
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Dominio – condiciones: $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Juntamos los logaritmos según sus propiedades: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Eliminamos el logaritmo: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 9 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 6}{2}$
- La raíz $x = -3$ no cumple la condición $x > 1$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Gráfica



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Intersecciones de las gráficas:

- $(3; 3)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Bases distintas: dividimos entre 4^d y sustituimos $t = (5/2)^d$.

Enunciado: `25^d + 10^d = 4^d`

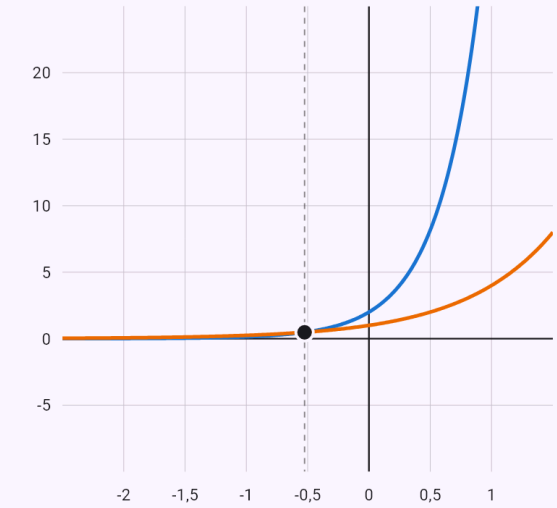
Resultado

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Pasos

- Dividimos la ecuación entre la expresión positiva 4^d:
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Hacemos el cambio de variable $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$:
  $t^2 + t - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- La ecuación $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no tiene solución real.
- Deshacemos el cambio de variable
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Gráfica



$y = 25^d + 10^d$

$y = 4^d$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); 0{,}4829\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de d.

Base menor que 1 – el sentido de la desigualdad cambia.

Enunciado: `(1/2)^x > 8`

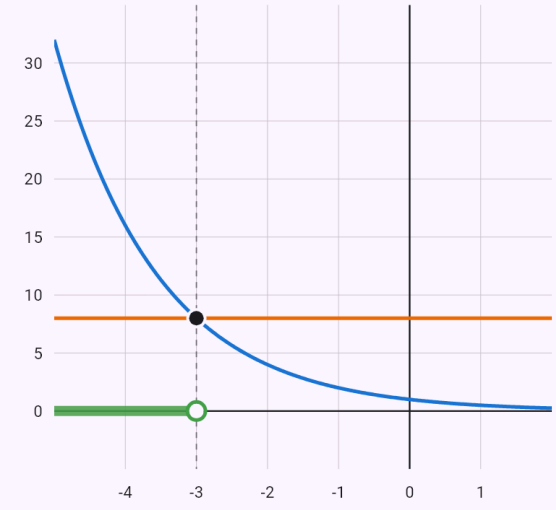
Resultado

$$x \in (-\infty, -3)$$

Pasos

- Escribimos ambos lados como potencias de la misma base: $2^{-x} > 2^3$
- La función exponencial de base 2 es creciente: los exponentes cumplen la desigualdad con el mismo signo: $-x > 3$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-x > 3$
- Dividimos entre el número negativo -1; el signo de la desigualdad se invierte: $x < -3$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty, -3)$

Gráfica



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $(-3; 8)$

Tangente hiperbólica por la definición – sustitución t = e²ˣ.

Enunciado: `tanh x = 1/2`

Resultado

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Sustituimos las definiciones

$$\tanh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Hacemos el cambio de variable $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Resolvemos: $t = 3$
- Deshacemos el cambio de variable:

$$e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$$

La incógnita en la base – por la definición; la raíz −1 no cumple las condiciones.

Enunciado: `log_x (2x+3) = 2`

Resultado

$$x = 3$$

Condiciones: $x > 0,\ x \neq 1$

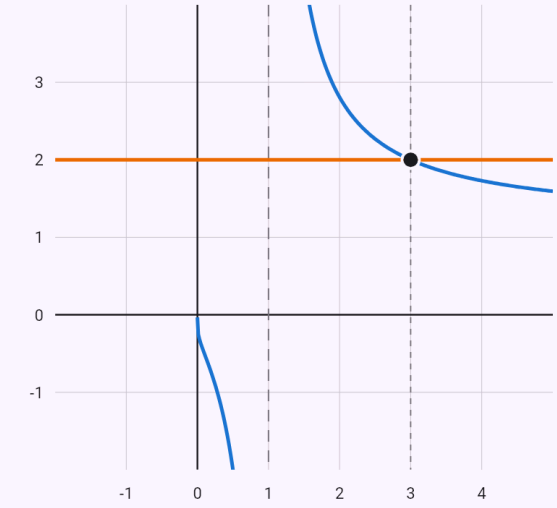
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Dominio – condiciones: $x > 0,\ x \neq 1$
- Eliminamos el logaritmo: $x^2 = 2x + 3$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$
- La raíz $x = -1$ no cumple la condición $x > 0,\ x \neq 1$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Gráfica



$y = \log_x (2x + 3)$
$y = 2$

Intersecciones de las gráficas:

- $(3; 2)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

La incógnita en la base y el exponente – tomamos logaritmos, sustitución t = log x.

Enunciado: `x^(log x) = 100`

Resultado

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Condiciones: $x > 0$

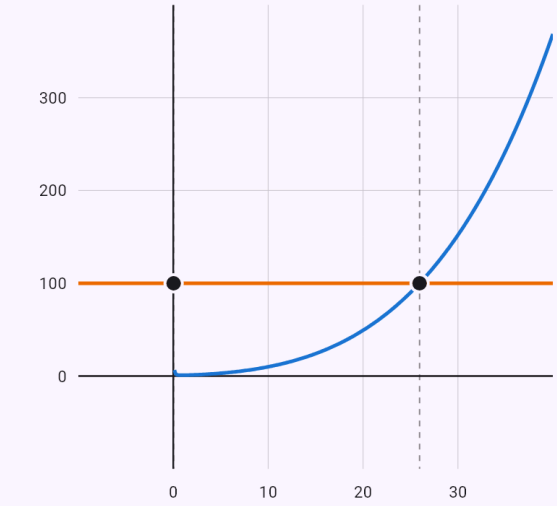
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Tomamos logaritmos en ambos lados:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Dominio – condiciones: $x > 0$
- Hacemos el cambio de variable $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Deshacemos el cambio de variable:
  $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Deshacemos el cambio de variable:
  $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- La raíz $x = 10^{-\sqrt{2}}$ cumple las condiciones.
- La raíz $x = 10^{\sqrt{2}}$ cumple las condiciones.

Gráfica



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Logaritmo de un cociente con raíz – como diferencia de logaritmos.

Enunciado: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Resultado

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

Condiciones: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

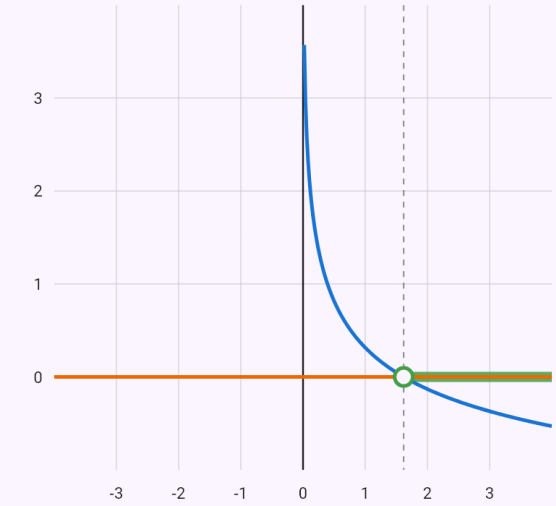
Pasos

- Una parte del cociente no puede ser negativa, así que el cociente es positivo exactamente cuando lo son ambas; por eso escribimos el logaritmo del cociente como diferencia de logaritmos y pasamos el sustraendo al otro lado: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Dominio – condiciones: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- El logaritmo en base 3 es creciente: lo quitamos y el signo de la desigualdad se mantiene: $\sqrt{x+1} < x$
- Pasamos todo a un lado: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Dominio – condiciones: $x \geq -1$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	$\times$	$+$	$-$

- La solución de esta inecuación es $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

Gráfica



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Limitaciones conocidas

- Los logaritmos de bases distintas que no son potencias de un mismo número ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$) se resuelven solo numéricamente.
- Las ecuaciones hiperbólicas que llevan a una ecuación de 4.º grado en e^x ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$) solo se resuelven numéricamente; las inecuaciones con funciones hiperbólicas inversas todavía no se admiten.

7. Valor absoluto

Las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto la aplicación las resuelve de dos maneras, que eliges con un chip: «Por definición» – un atajo que desarrolla |a| = b o |a| < b – y «Puntos críticos» – dividiendo la recta numérica en intervalos en los que cada valor absoluto tiene signo fijo. Si no eliges, escoge ella misma la más adecuada.

Los valores absolutos anidados (||x| − 2| = 1) los resuelve igual: por definición paso a paso de fuera hacia dentro, por puntos críticos de dentro hacia fuera – primero los puntos críticos de los valores absolutos interiores y luego, en cada intervalo, el valor absoluto que queda.

Una inecuación |f| < |g| (solo un valor absoluto en cada lado) también se puede resolver con el chip «Elevando al cuadrado»: ambos lados son no negativos, así que se eleva al cuadrado y se resuelve como cuadrática. Una expresión con valores absolutos sola (|x − 1| + |x + 2|) se simplifica por tramos: puntos críticos, tabla de signos y, en cada intervalo, la expresión sin valores absolutos. Tras una coma se puede indicar un intervalo (|x| − 2, x < 0): la expresión se simplifica entonces solo en él.

Ejemplos

Un valor absoluto – desarrollado por definición.

Enunciado: `|2x - 1| = 5`

Resultado

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

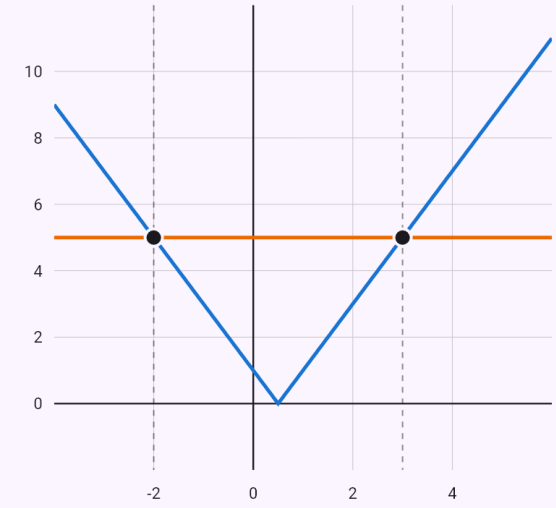
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Hay un solo valor absoluto y al otro lado un número: basta con aplicar la definición.
- Por la definición, $|2x - 1| = 5$ se cumple si y solo si $2x - 1 = 5$ o $2x - 1 = -5$
- Resolvemos: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Resolvemos: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Gráfica



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Intersecciones de las gráficas:

● $(-2; 5)$ ● $(3; 5)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Dos valores absolutos – el método de los puntos críticos.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Resultado

$$x \in (-3,\, 2)$$

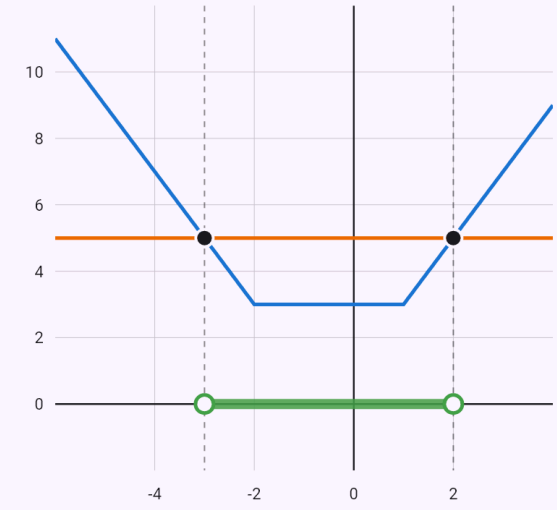
Pasos

- Quitamos los valores absolutos con el método de los puntos críticos: dividen la recta numérica en intervalos y en cada uno las expresiones de dentro mantienen el signo.
- Puntos críticos de las expresiones dentro de los valores absolutos:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty,\, -2)$	$[-2,\, 1)$	$[1,\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- En el intervalo $(-\infty,\, -2)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Resolvemos: $-2x - 1 < 5$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-2x < 6$
- Dividimos entre el número negativo -2; el signo de la desigualdad se invierte: $x > -3$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-3,\, \infty)$
- Intersección con el intervalo $(-\infty,\, -2)$: $x \in (-3,\, -2)$
- En el intervalo $[-2,\, 1)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- La incógnita se ha cancelado y queda la afirmación verdadera $3 < 5$: todo el intervalo $[-2,\, 1)$ es solución.
- En el intervalo $[1,\, \infty)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Resolvemos: $2x + 1 < 5$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $2x < 4$
- Dividimos entre el número positivo 2; el signo de la desigualdad se mantiene: $x < 2$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty,\, 2)$
- Intersección con el intervalo $[1,\, \infty)$: $x \in [1,\, 2)$
- La solución es la unión de los resultados: $x \in (-3,\, 2)$

Gráfica



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

● $(-3; 5)$ ● $(2; 5)$

Valor absoluto anidado – por definición de fuera hacia dentro.

Enunciado: `||x| - 2| = 1`

Resultado

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

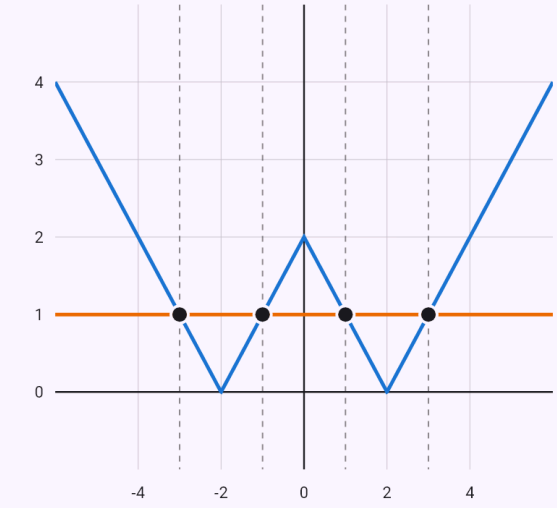
Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

- Hay un solo valor absoluto y al otro lado un número: basta con aplicar la definición.
- Por la definición, $||x| - 2| = 1$ se cumple si y solo si $|x| - 2 = 1$ o $|x| - 2 = -1$
- Despejamos el valor absoluto: $|x| = 3$
- Por la definición, $|x| = 3$ se cumple si y solo si $x = 3$ o $x = -3$
- Despejamos el valor absoluto: $|x| = 1$
- Por la definición, $|x| = 1$ se cumple si y solo si $x = 1$ o $x = -1$

Gráfica



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Intersecciones de las gráficas:

● $(-3; 1)$ ● $(-1; 1)$ ● $(1; 1)$ ● $(3; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Valores absolutos en ambos lados – elevar al cuadrado.

Enunciado: `|x - 1| < |2x + 3|` Elevando al cuadrado

Resultado

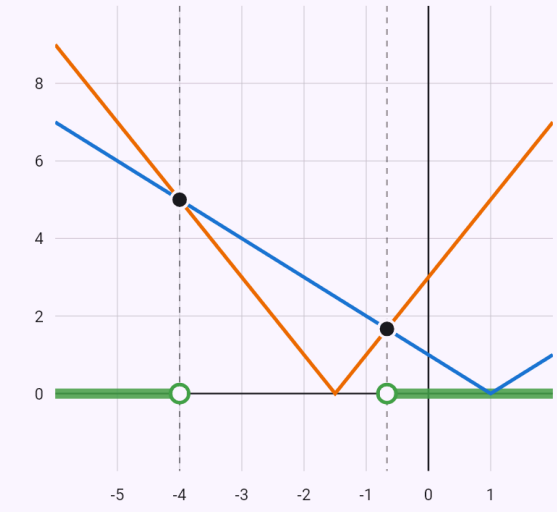
$$x \in (-\infty,\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3},\, \infty\right)$$

Pasos

- En ambos lados hay solo un valor absoluto: ambos son no negativos, así que podemos elevar la desigualdad al cuadrado (es una transformación equivalente).
- Elevamos ambos lados al cuadrado: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Pasamos todo a un lado: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Factorizamos: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty,\, -4)$	$(-4,\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3},\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Gráfica



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $(-4; 5)$
- $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Expresión con valores absolutos – por tramos en los intervalos.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2|`

Resultado

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty,\, -2) \\ 3, & x \in [-2,\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1,\, \infty) \end{cases}$$

Pasos

- Quitamos los valores absolutos con el método de los puntos críticos: dividen la recta numérica en intervalos y en cada uno las expresiones de dentro mantienen el signo.
- Puntos críticos de las expresiones dentro de los valores absolutos:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty,\, -2)$	$[-2,\, 1)$	$[1,\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- En el intervalo $(-\infty,\, -2)$ quitamos los valores absolutos según los signos:
  $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- En el intervalo $[-2,\, 1)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- En el intervalo $[1,\, \infty)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Expresión con valores absolutos en un intervalo dado – por tramos solo allí.

Enunciado: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Resultado

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1,\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1,\, \infty) \end{cases}$$

Pasos

- Simplificamos la expresión solo para valores del intervalo $(-1,\, \infty)$: quitamos los valores absolutos según el signo de las expresiones que contienen.
- Puntos críticos de las expresiones dentro de los valores absolutos:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Signos en cada intervalo:

	$(-1,\, 1)$	$[1,\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- En el intervalo $(-1,\, 1)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- En el intervalo $[1,\, \infty)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Limitaciones conocidas

- Elevar al cuadrado se ofrece solo en una inecuación con un único valor absoluto en cada lado.

8. Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

La aplicación reduce la ecuación a ecuaciones básicas como sin x = a y las resuelve en la circunferencia unitaria: halla los ángulos de una vuelta y les suma múltiplos del periodo ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). La circunferencia aparece dibujada en el procedimiento.

Prefiere las fórmulas conocidas – ángulo doble y mitad, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, suma a producto –, después la factorización, el cambio t = sin x, la división de una ecuación homogénea entre $\cos^n x$ y el ángulo auxiliar en $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Además comprueba el resultado numéricamente en un periodo completo.

Una incógnita con letra latina (x, t) está en radianes, con letra griega (alpha, β, …) en grados – igual que una entrada con el signo ° (sin(x + 30°)). Para obtener las raíces en un intervalo, escríbalo después de una coma o en la línea siguiente.

Una inecuación se resuelve con un arco de la circunferencia unitaria, una más compleja con los ceros en un periodo; el resultado son intervalos con el periodo.

Ejemplos

Dos ramas de soluciones, los ángulos en la circunferencia unitaria.

Enunciado: `sin x = 1/2`

Resultado

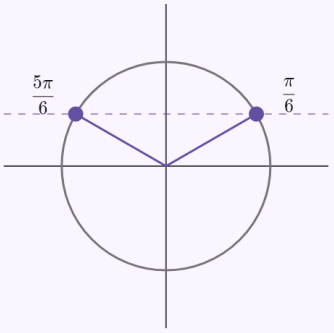
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

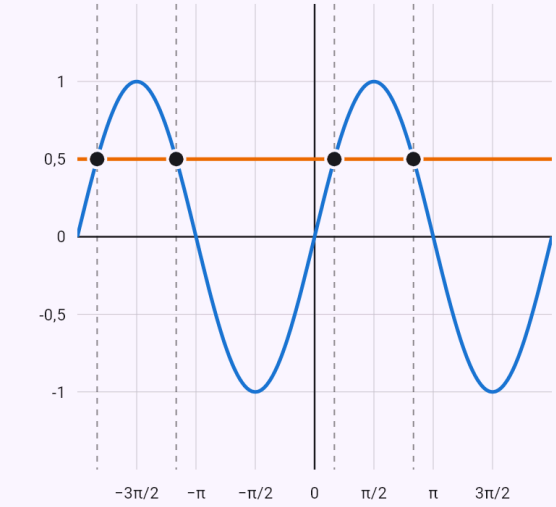
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfica



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

El cambio t = sin x y una ecuación de segundo grado.

Enunciado: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

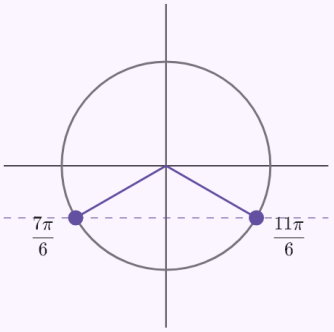
$$k \in \mathbb{Z}$$

No hay forma exacta: de dónde sale el «≈» lo muestra un método numérico:

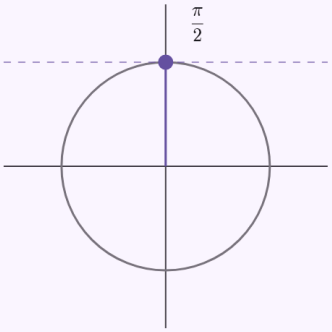
Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

Pasos

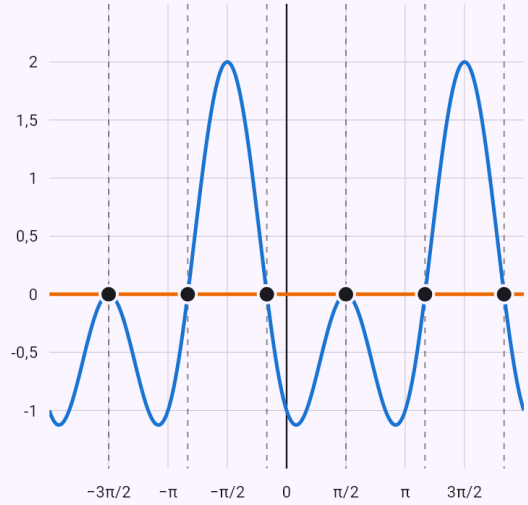
- Hacemos el cambio de variable $t = \sin x$:
  $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Sustituimos en la fórmula general:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Ecuación básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Ecuación básica $\sin x = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Gráfica



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}; 0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

La fórmula de sin 2x y la factorización.

Enunciado: `sin 2x = cos x`

Resultado

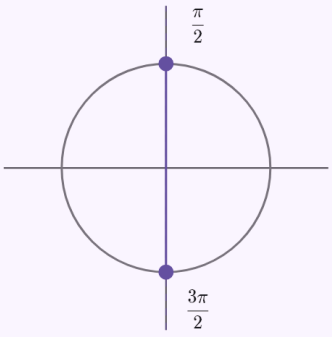
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

No hay forma exacta: de dónde sale el «≈» lo muestra un método numérico:

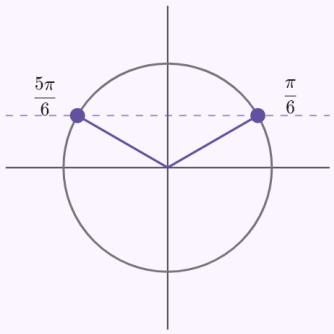
Σ Newton (tangentes) · Σ Bisección · Σ Secante · Σ Regula falsi · Σ Punto fijo

Pasos

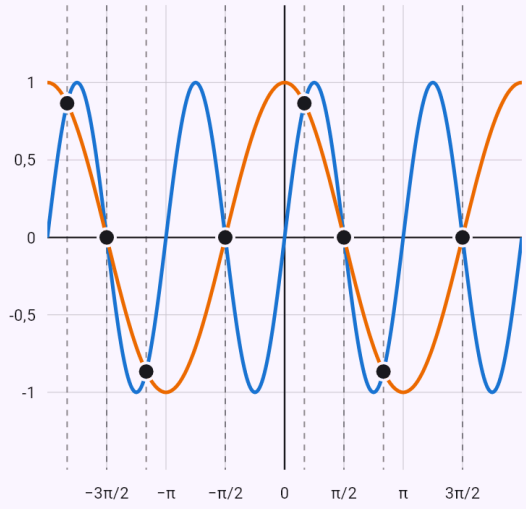
- Pasamos todo a un lado: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Aplicamos la fórmula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Factorizamos: un producto es cero si y solo si lo es alguno de sus factores: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Resolvemos la ecuación $\cos x = 0$
- Ecuación básica $\cos x = 0$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Resolvemos la ecuación $2\sin x - 1 = 0$
- Despejamos la función trigonométrica: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfica



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

El ángulo auxiliar: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

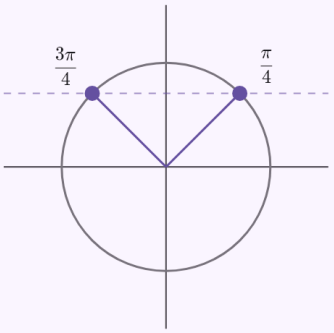
Enunciado: `sin x + cos x = 1`

Resultado

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

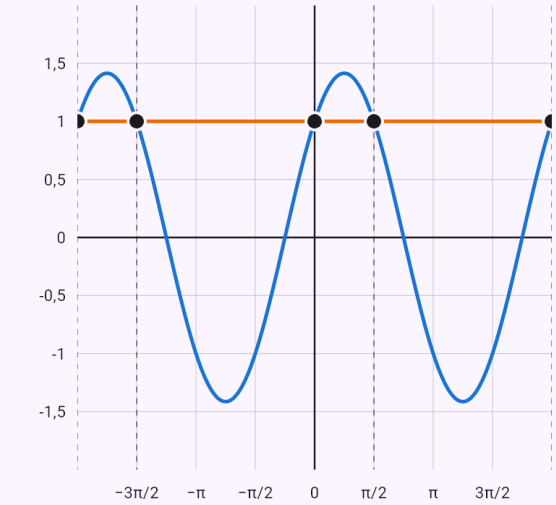
- Pasamos todo a un lado: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Introducimos un ángulo auxiliar φ:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, donde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Despejamos la función trigonométrica:
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Ecuación básica $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Despejamos la incógnita

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Gráfica



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Intersecciones de las gráficas:

- $(-2\pi; 1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$
- $(0; 1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Una letra griega – el resultado en grados.

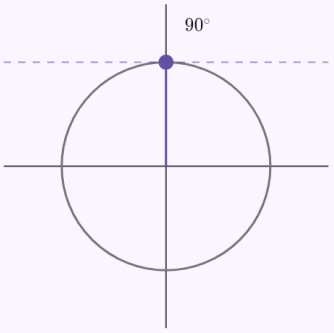
Enunciado: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Resultado

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

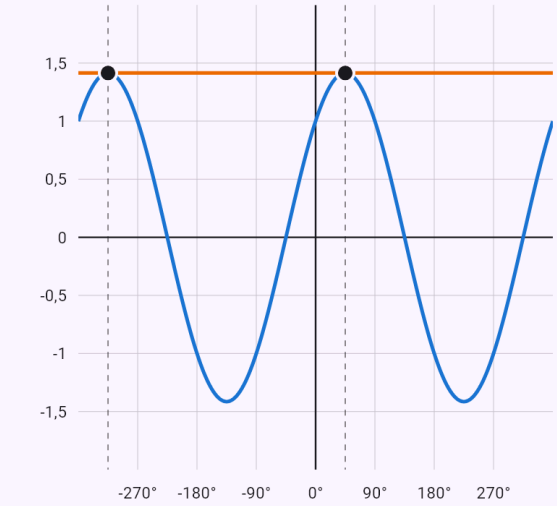
Pasos

- Pasamos todo a un lado: $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Introducimos un ángulo auxiliar φ:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, donde
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Despejamos la función trigonométrica:
  $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Ecuación básica $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos 90°; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Despejamos la incógnita
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Gráfica



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Intersecciones de las gráficas:

- $(-315^\circ; \sqrt{2})$
- $(45^\circ; \sqrt{2})$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Solo las raíces en el intervalo dado.

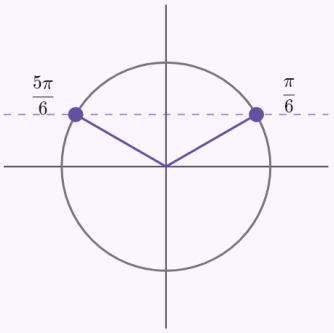
Enunciado: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

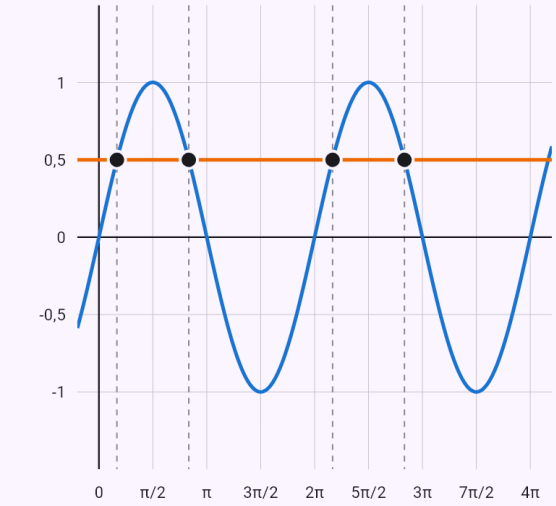
Pasos

- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Las soluciones en el intervalo $x \in [0,\ 4\pi)$ $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Gráfica



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Un arco de la circunferencia unitaria, un intervalo alrededor de cero.

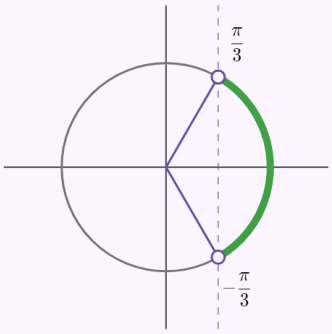
Enunciado: `cos x > 1/2`

Resultado

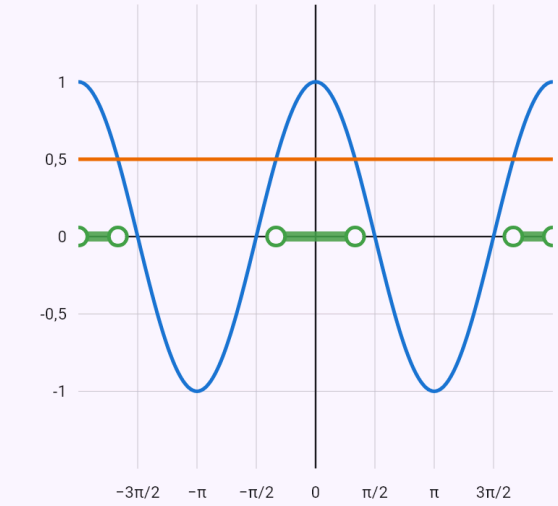
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Inecuación básica $\cos x > \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria se cumple en el arco marcado; con el periodo: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Gráfica



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Los ceros en un periodo y el signo entre ellos.

Enunciado: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

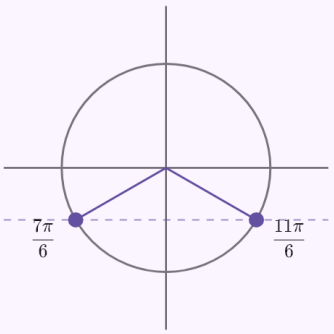
Resultado

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

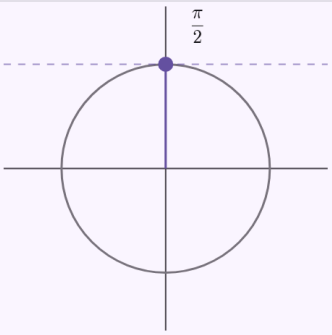
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Primero resolvemos la ecuación $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Hacemos el cambio de variable $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Sustituimos en la fórmula general: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Ecuación básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

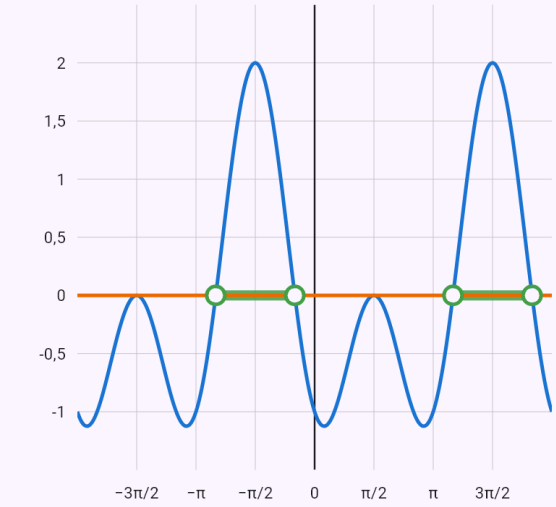


- Ecuación básica $\sin x = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- La función tiene periodo 2π. Sus ceros (y los puntos donde no está definida) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ dividen un periodo en intervalos; según el signo en ellos, la inecuación se cumple para: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Gráfica



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$

$y = 0$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Limitaciones conocidas

- Las ecuaciones con la incógnita también fuera de la función trigonométrica (x = cos x) se resuelven solo numéricamente – por el método de Newton con la tabla de iteraciones (véase Métodos numéricos), sin el período.
- Todavía no se admiten las inecuaciones trigonométricas dobles (−1/2 < sin x < 1/2) ni las funciones trigonométricas dentro de un valor absoluto.

9. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Las inecuaciones de segundo grado y racionales la aplicación las resuelve con los puntos críticos y una tabla de signos. Una inecuación doble y un sistema de inecuaciones los resuelve como la intersección de las soluciones de cada inecuación, que muestra en la recta numérica. Un sistema de inecuaciones con dos incógnitas lo resuelve como una región del plano y la colorea en la gráfica.

En un sistema de inecuaciones con dos incógnitas la aplicación también indica los vértices de la región: las intersecciones de los bordes con coordenadas exactas. Un sistema de una ecuación e inecuaciones con una incógnita se resuelve resolviendo la ecuación y sustituyendo sus raíces en las inecuaciones; con dos incógnitas la solución es la parte de la curva de la ecuación que está en la región de las inecuaciones, resaltada en el gráfico y con sus extremos calculados exactamente. Un sistema también se puede escribir en una línea, separado por punto y coma ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Un sistema de dos o más ecuaciones con inecuaciones se resuelve como sistema de ecuaciones y sus soluciones se sustituyen en las inecuaciones; con dos incógnitas el gráfico muestra las curvas en la región de las inecuaciones y las intersecciones que no las cumplen como círculos vacíos.

Ejemplos

Una inecuación de segundo grado – puntos críticos y signos.

Enunciado: `x^2 - x - 6 > 0`

Resultado

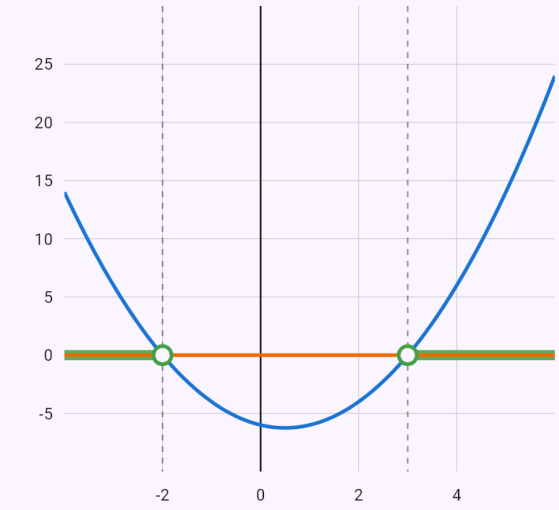
$$x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Pasos

- Factorizamos: $(x-3)(x+2) > 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Gráfica



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

● $(-2; 0)$ ● $(3; 0)$

Una inecuación racional – el denominador no puede ser cero.

Enunciado: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Resultado

$$x \in [-1,\ 3)$$

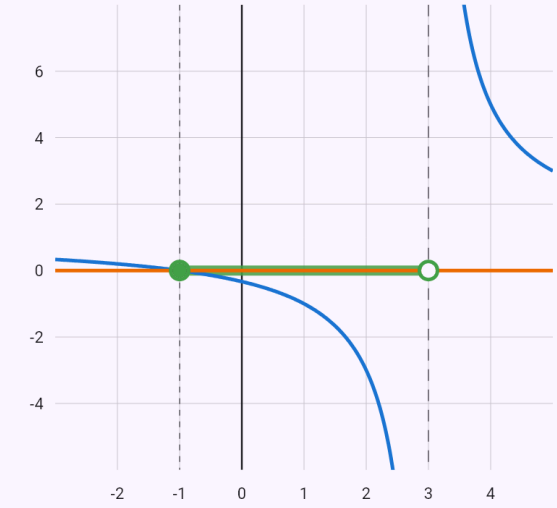
Condiciones: $x \neq 3$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq 3$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Gráfica



$y = \dfrac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $(-1; 0)$

Una inecuación doble.

Enunciado: `-1 <= 2x + 1 < 5`

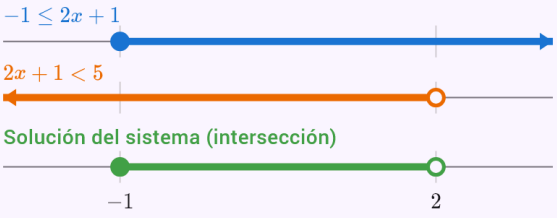
Resultado

$$x \in [-1,\ 2)$$

Pasos

- Inecuación 1: $-1 \leq 2x + 1$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-2x \leq 2$
- Dividimos entre el número negativo -2; el signo de la desigualdad se invierte: $x \geq -1$
- La solución de esta inecuación es $x \in [-1,\ \infty)$
- Inecuación 2: $2x + 1 < 5$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $2x < 4$
- Dividimos entre el número positivo 2; el signo de la desigualdad se mantiene: $x < 2$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty,\ 2)$
- La solución del sistema es la intersección de las soluciones de las inecuaciones: $x \in [-1,\ 2)$

Gráfica



Cada inecuación tiene su propia fila en la recta numérica; su intersección está en verde. Un punto relleno pertenece a la solución, uno vacío no.

Sistema de inecuaciones con dos incógnitas – una región del plano y sus vértices.

Enunciado: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

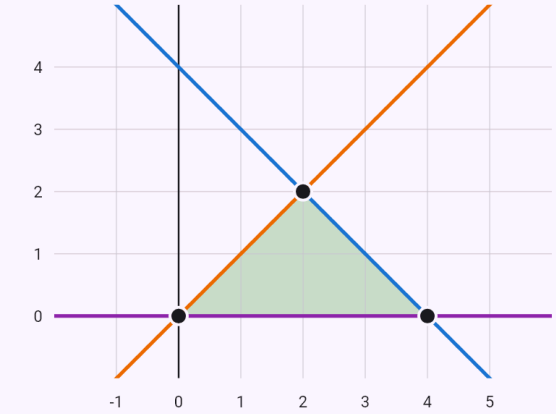
Resultado

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in [0,\, \infty)$$

Pasos

- Inecuación 1: $x + y \leq 4$
- La frontera es la curva $x + y = 4$: se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- Inecuación 2: $x - y \geq 0$
- La frontera es la curva $x - y = 0$: se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[1;\ 0]$: $1 \geq 0$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- Inecuación 3: $y \geq 0$
- La frontera es la curva $y = 0$: se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[0;\ 1]$: $1 \geq 0$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- La solución del sistema es la parte común de estas regiones, sombreada en la gráfica.
- Vértices de la región (intersecciones de los bordes): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Gráfica



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0,\, \infty)$

La solución es la región sombreada. Una frontera continua pertenece a ella, una discontinua no.

Vértices de la región:

● $(0; 0)$ ● $(2; 2)$ ● $(4; 0)$

Una inecuación en los enteros – se enumeran los enteros del intervalo.

Enunciado: `x^2 < 10`

Resultado

$$x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

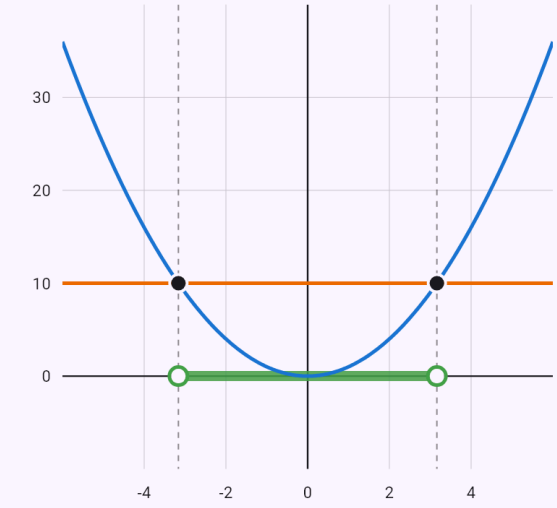
Pasos

- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 10 < 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty,\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10},\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- En los reales $x \in \left(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\right)$; en $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

Gráfica



$y = x^2$
$y = 10$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(-\sqrt{10}; 10\right)$
- $\left(\sqrt{10}; 10\right)$

Ecuación e inecuación – las raíces de la ecuación sustituidas en la inecuación.

Enunciado: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Resultado

$$x = 3$$

Pasos

- Primero resolvemos la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ y luego sustituimos sus raíces en las desigualdades.
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
- La raíz $x = -2$ no cumple la condición $x > 0$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Circunferencia y semiplano – la solución es un arco; sus extremos no pertenecen a ella.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 4`

`y > x`

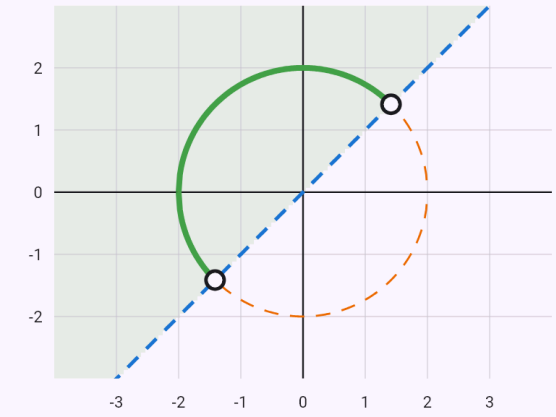
Resultado

$x^2 + y^2 = 4$
$y > x$

Pasos

- La solución son los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4$ que están en la región dada por las desigualdades. Primero hallamos esa región:
- La frontera es la curva $y = x$: se dibuja discontinua, sus puntos no pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[1;\ 0]$: $0 > 1$ no se cumple; la solución es la parte del plano que no contiene el punto.
- Extremos del tramo de la curva: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$; están en un borde discontinuo, no pertenecen a la solución.

Gráfica



$y > x$
$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

La solución es la parte de la curva resaltada en verde: la que está en la región sombreada. Un extremo relleno pertenece a la solución; uno hueco, no.

Extremos:
○ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

Circunferencia y recta con una inecuación – la intersección bajo el eje x no la cumple.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`
`x - y = 1`
`y > 0`

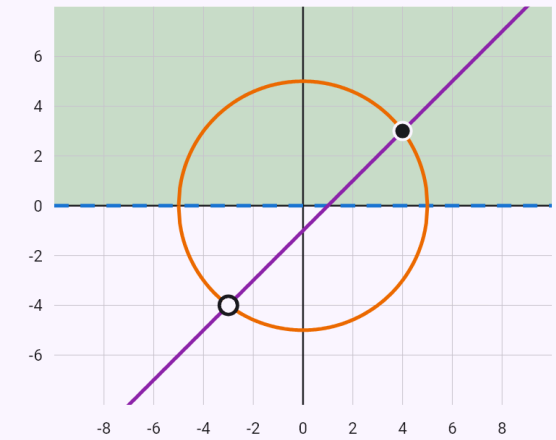
Resultado

$x = 4$
$y = 3$

Pasos

- Primero resolvemos el sistema de ecuaciones y luego sustituimos sus soluciones en las desigualdades.
- La solución $x = -3,\ y = -4$ no cumple la desigualdad $y > 0$, por lo que no es solución del sistema.
- La solución $x = 4,\ y = 3$ cumple las desigualdades.

Gráfica



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0, \infty)$
$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Las soluciones son las intersecciones de las curvas en la región coloreada (punto lleno); un punto vacío no cumple las desigualdades.

Intersecciones de las gráficas:
○ $(-3; -4)$ ● $(4; 3)$

10. Sistemas de ecuaciones

La aplicación resuelve un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por reducción (suma) o por sustitución, y los sistemas mayores por eliminación de Gauss, con ecuaciones o sobre la matriz (la matriz ampliada y operaciones por filas). Un sistema cuadrado también lo resuelve con la regla de Cramer (determinantes). El método se elige con un chip. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene también una gráfica en la que las soluciones son las intersecciones de las rectas o curvas.

El número de ecuaciones no tiene que coincidir con el de incógnitas. La eliminación de Gauss detecta cuándo un sistema no tiene solución (sale una ecuación como 0 = 1) y cuándo tiene infinitas: las incógnitas que las ecuaciones no determinan se toman como parámetros t, s, … (elegidos para que la solución no tenga fracciones), y la solución se escribe también en forma vectorial. En forma matricial decide el número de soluciones el teorema de Rouché–Frobenius: compara el rango de la matriz, el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. En un sistema homogéneo (todos los términos independientes 0) la aplicación muestra una base del espacio de soluciones.

Las incógnitas pueden llevar subíndice: x_1, x_1 o x1. Un sistema también se puede dar con matrices: la matriz ampliada con los términos independientes tras una barra vertical, o una matriz A, un vector de términos independientes b y la ecuación Ax = b; las incógnitas son entonces x_1, x_2, … y el método por defecto es la eliminación de Gauss sobre la matriz.

Un sistema puede contener uno o dos parámetros, letras que no son incógnitas (las incógnitas son x, y, z, u, v, w, t y x_1, x_2, …). La aplicación discute entonces la resolubilidad según los valores de los parámetros: con el chip «Gauss – matriz» (por defecto con tres o más ecuaciones) reduce la matriz ampliada; donde multiplicaría por una expresión del parámetro que puede ser cero, supone que no lo es y resuelve sus ceros aparte sustituyéndolos; en cada caso decide el teorema de Rouché–Frobenius. Con el chip «Regla de Cramer» calcula los determinantes como expresiones del parámetro: fórmulas para D ≠ 0 y los ceros de D sustituidos. Con dos parámetros aparecen casos como «b = 4, a ≠ 2» o «a = b».

Un sistema no lineal (por ejemplo, una circunferencia y una recta) se resuelve y se dibuja, de momento sin el procedimiento.

Cómo introducirlo

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Incógnitas con subíndice: x_1, x_1 y x1.
`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	La matriz ampliada: los términos independientes tras una barra vertical.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	La matriz del sistema, el vector de términos independientes y la ecuación Ax = b.

Ejemplos

El método de reducción.

Enunciado: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Reducción

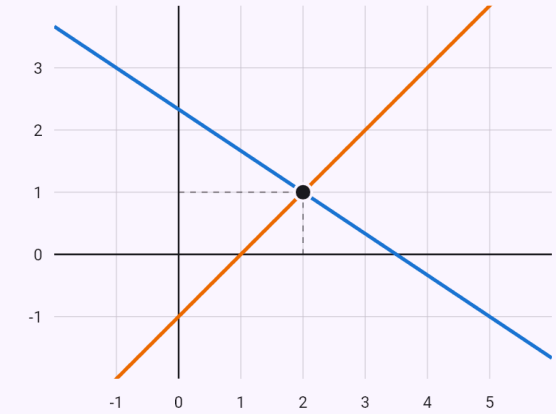
Resultado

$x = 2$
$y = 1$

Pasos

- Multiplicamos la primera ecuación por 1 y la segunda por -2 para que x se anule al sumarlas
  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$
- Sumamos las ecuaciones, x se anula: $5y = 5$
- Resolvemos: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- Sustituimos en la ecuación 2: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Gráfica



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Intersecciones de las gráficas:

- $(2; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución del sistema: sus coordenadas son los valores de x y y.

Tres ecuaciones – eliminación de Gauss.

Enunciado: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Eliminación de Gauss

Resultado

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Pasos

- Eliminamos x de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Eliminamos y de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Resolvemos: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Sustituimos en la ecuación 2: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Sustituimos en la ecuación 1: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Regla de Cramer: los determinantes D, D_x, D_y.

Enunciado: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Regla de Cramer

Resultado

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Pasos

- Calculamos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Calculamos el determinante

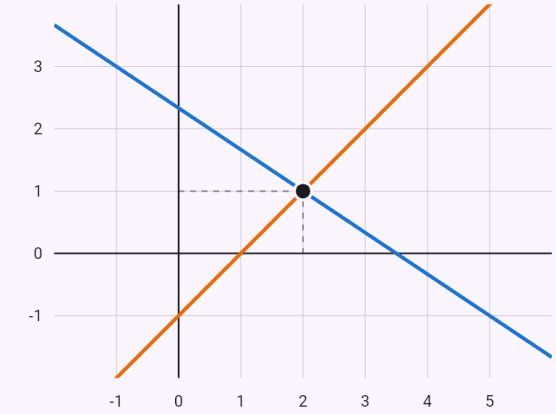
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Calculamos el determinante

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Por la regla de Cramer: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-10}{-5} = 2$
- Por la regla de Cramer: $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

Gráfica



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2x}{3}$

$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Intersecciones de las gráficas:

- $(2; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución del sistema: sus coordenadas son los valores de x y y.

Infinitas soluciones: teorema de Rouché–Frobenius, un parámetro y la forma vectorial.

Enunciado: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`

`3x + 6y + 4z = 10` Gauss – matriz

Resultado

Tiene infinitas soluciones.

$x = 2 - 2t$

$y = t$

$z = 1$

$t \in \mathbb{R}$

Pasos

- La matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas
  $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Operaciones por filas $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- La ecuación 0 = 0 se cumple siempre, la omitimos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Teorema de Rouché–Frobenius:
  $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas, así que el sistema tiene infinitas soluciones.
- Escribimos la matriz escalonada (triangular) de nuevo como ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Las incógnitas que las ecuaciones no determinan se toman como parámetros: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Resolvemos: $z = 1$
- Sustituimos en la ecuación 1:
  $x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- La solución en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema sin solución: sale una ecuación que nunca se cumple.

Enunciado: `x + y + z = 2`

`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Resultado

No tiene solución.

Pasos

- Eliminamos x de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

- Eliminamos y de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Obtenemos la ecuación $0 = 1$, que no tiene solución, así que el sistema no tiene solución.

Un sistema homogéneo: una base del espacio de soluciones.

Enunciado: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauss – matriz

Resultado

Tiene infinitas soluciones.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Pasos

- El sistema es homogéneo (todos los términos independientes son 0): siempre tiene la solución trivial (todo ceros); tiene una solución no trivial exactamente cuando el rango de su matriz es menor que el número de incógnitas.
- La matriz ampliada del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Intercambiamos las ecuaciones 2 y 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- La ecuación 0 = 0 se cumple siempre, la omitimos
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Teorema de Rouché–Frobenius:
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas, así que el sistema tiene infinitas soluciones.
- Escribimos la matriz escalonada (triangular) de nuevo como ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Las incógnitas que las ecuaciones no determinan se toman como parámetros: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- Sustituimos en la ecuación 2: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- Sustituimos en la ecuación 1: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- La solución en forma vectorial
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Una base del espacio de soluciones (dimensión 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Un sistema dado por su matriz ampliada.

Enunciado: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Resultado

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Pasos

- La matriz ampliada del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$
- Teorema de Rouché–Frobenius:

  $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – el rango de la matriz es igual al de la matriz ampliada y al número de incógnitas, así que el sistema tiene exactamente una solución.
- Escribimos la matriz escalonada (triangular) de nuevo como ecuaciones
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Resolvemos: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- Sustituimos en la ecuación 2:
  $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- Sustituimos en la ecuación 1: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Un sistema con parámetro: la matriz ampliada y los casos a = 1 y a = −2.

Enunciado: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauss – matriz

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Pasos

- Las incógnitas son $x,\ y,\ z$, el parámetro a es cualquier número real. La solución depende de su valor, así que analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- La matriz ampliada del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Intercambiamos las ecuaciones 1 y 2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Seguimos con el elemento $1 - a$, que puede ser cero; por eso suponemos $a \neq 1$, y el caso $a = 1$ lo analizamos aparte.
- Intercambiamos las ecuaciones 2 y 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Seguimos con el elemento $-a - 2$, que puede ser cero; por eso suponemos $a \neq -2$, y el caso $a = -2$ lo analizamos aparte.
- Para $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: el sistema tiene una única solución:
$x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Para $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$: el sistema tiene infinitas soluciones:
$x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Para $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: el sistema no tiene solución. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dos parámetros: discusión según a y b.

Enunciado: `x + y + z = 1`
`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Pasos

- Las incógnitas son $x,\ y,\ z$; los parámetros $a,\ b$ son números reales cualesquiera. La solución depende de sus valores, así que analizamos los casos (discusión de la solución).
- La matriz ampliada del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Operaciones por filas $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Seguimos con el elemento $(a-2)(a-1)$, que puede ser cero; por eso suponemos $a \neq 1,\ a \neq 2$, y el caso $a = 2,\ a = 1$ lo analizamos aparte.
- Para $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$: el sistema tiene una única solución $x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Para $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: el sistema no tiene solución. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Para $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: el sistema tiene infinitas soluciones: $x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Para $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$: el sistema no tiene solución. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Para $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$: el sistema tiene infinitas soluciones: $x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. La matriz tras sustituir
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Una circunferencia y una recta.

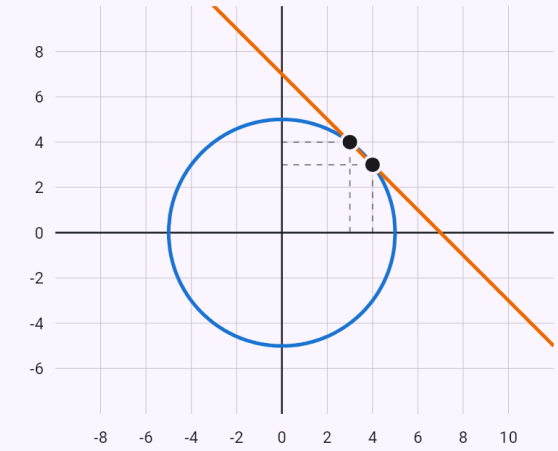
Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Resultado

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Gráfica



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Intersecciones de las gráficas:

● $(3; 4)$ ● $(4; 3)$

Cada intersección corresponde a una solución del sistema: sus coordenadas son los valores de x y y.

Limitaciones conocidas

- Los sistemas no lineales aparecen por ahora sin procedimiento.

11. Ecuaciones e inecuaciones con parámetro

Una letra de la ecuación además de la incógnita es un parámetro: cualquier número real del que depende la solución. La aplicación pasa la ecuación a la forma A·x = B (una cuadrática a A·x² + B·x + C = 0) y discute la solución según los valores del parámetro: dónde el coeficiente de la incógnita es cero, dónde el discriminante es positivo, cero o negativo, dónde las condiciones excluyen una raíz y para qué valores el problema no tiene sentido. El resultado resume los casos.

La aplicación toma la incógnita en el orden x, y, z, u, v, w, t; las demás letras son parámetros. Puedes elegir otra incógnita con la etiqueta «Incógnita» o escribirla tras una coma. La gráfica muestra todas las soluciones como una curva (una región en una inecuación) en el plano parámetro–incógnita; elige el valor del parámetro con el deslizador y lee las soluciones en la recta vertical.

Tras una coma también puedes preguntar por las raíces: «x^2 + px + 4 = 0, x > 0»: para qué p todas las raíces son positivas (la etiqueta «La condición se cumple para» cambia a al menos una raíz); «…, x = 3»: para qué p 3 es raíz. En una ecuación lineal la raíz se sustituye en la condición; en una cuadrática se usan las fórmulas de Vieta. Un sistema de dos ecuaciones lineales con parámetro se resuelve con determinantes (regla de Cramer), con los casos de una, ninguna e infinitas soluciones. Una inecuación cuadrática o racional se discute según el orden de sus ceros. El deslizador de la gráfica se detiene exactamente en los valores críticos del parámetro, que también aparecen bajo la gráfica. Un sistema con parámetro de más ecuaciones, con dos parámetros o por el método matricial está en el capítulo Sistemas de ecuaciones.

En una integral indefinida las demás letras son constantes; la aplicación indica cuáles no pueden ser cero (∫ dx/(a − bx)³ para b ≠ 0). En un límite y en una integral definida las letras también son parámetros; véanse los capítulos Límites e Integral definida.

Cómo introducirlo

`2ax + a = 4x`	Cada letra adicional es un parámetro; la incógnita es x (o y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, incógnita q`	Puedes indicar la incógnita o el parámetro tras una coma («a es parámetro», «incógnita q»).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Una pregunta sobre las raíces tras una coma: para qué p todas las raíces (o al menos una) tienen la propiedad.

Ejemplos

Ecuación lineal: para a = 2 no tiene solución.

Enunciado: `2ax + a = 4x`

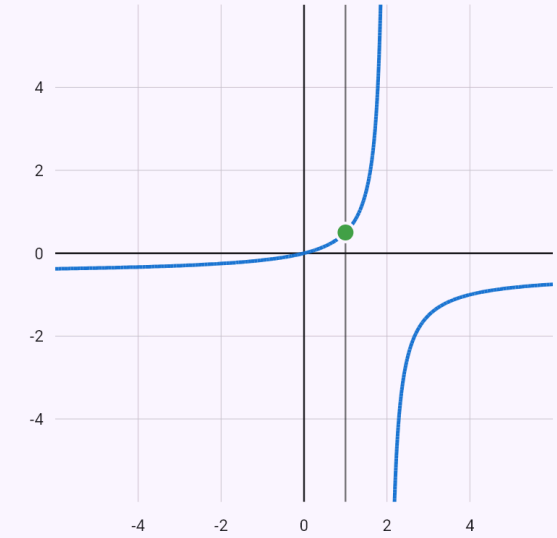
Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x, el parámetro a es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $2(a-2)x = -a$
- Para $a \neq 2$, $2(a-2)$ es distinto de cero y podemos dividir: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Para $a = 2$, el coeficiente de la incógnita es cero: $0 \cdot x = -2$, por tanto $x \in \emptyset$

Gráfica



$2ax + a = 4x$

Cada punto [a; x] de la curva es una solución. Para un valor elegido de a, las soluciones están en la recta vertical; muévela con el deslizador.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Ecuación cuadrática: discusión según el discriminante.

Enunciado: `x^2 + 6x + p = 0`

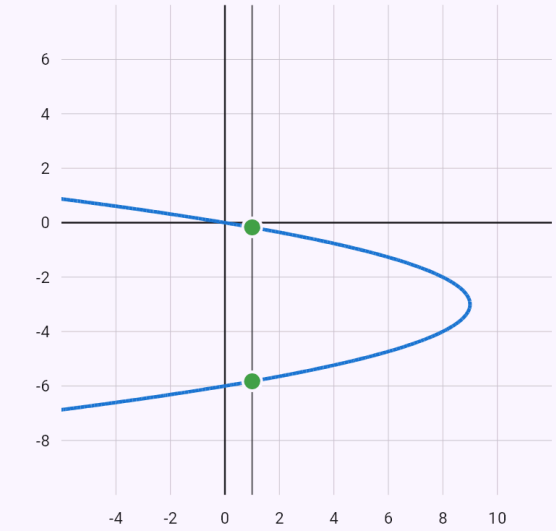
Resultado

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x, el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $x^2 + 6x + p = 0$
- El discriminante en función del parámetro: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Para $p < 9$, D > 0 y la ecuación tiene dos raíces distintas: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Para $p > 9$, D < 0 y la ecuación no tiene solución real.
- Para $p = 9$, D = 0 y la ecuación tiene una raíz doble: $x = -3$

Gráfica



$x^2 + 6x + p = 0$

Cada punto [p; x] de la curva es una solución. Para un valor elegido de p, las soluciones están en la recta vertical; muévela con el deslizador.

p = 9

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Inecuación: el signo del coeficiente decide el sentido.

Enunciado: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

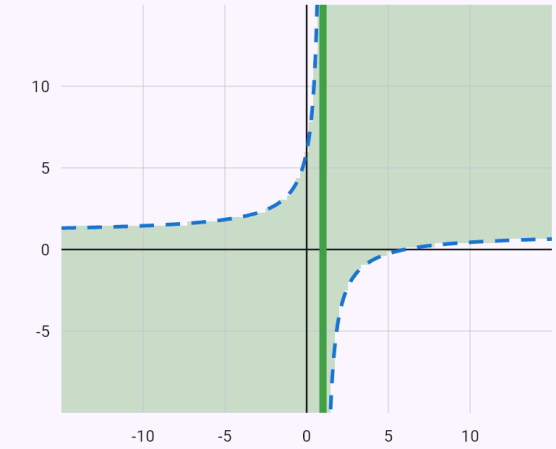
Resultado

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x, el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Para $p < 1$, $2(1-p)$ es positivo: al dividir el signo de la desigualdad se mantiene: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Para $p > 1$, $2(1-p)$ es negativo: al dividir el signo de la desigualdad se invierte: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Para $p = 1$, el coeficiente de la incógnita es cero: $0 \cdot x < 10$, por tanto $x \in \mathbb{R}$

Gráfica



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{p-6}{p-1}$

La región sombreada contiene todas las soluciones [p; x]. Para un valor elegido de p, la solución es la parte resaltada de la recta vertical; muévela con el deslizador.

p = 1

$p = 1$

Las dos raíces mayores que 1: discriminante y fórmulas de Vieta.

Enunciado: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

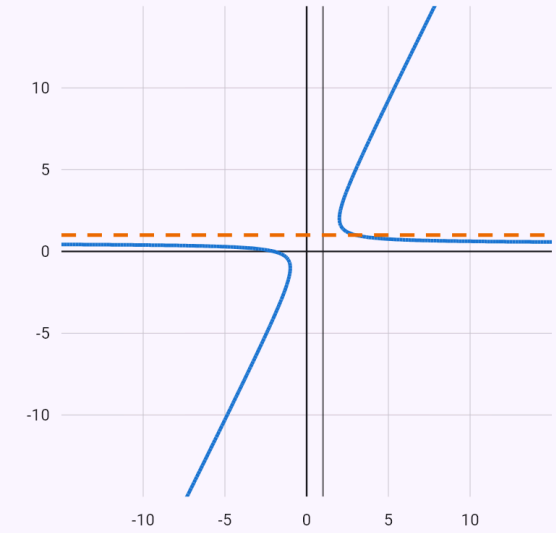
Resultado

$$2 \leq p < 3$$

Pasos

- La incógnita es x, el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- El discriminante en función del parámetro $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p - 2$
- Para $p \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, D > 0 y la ecuación tiene dos raíces distintas: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Para $-1 < p < 2$, D < 0 y la ecuación no tiene solución real.
- Para $p = -1$, D = 0 y la ecuación tiene una raíz doble: $x = -1$
- Para $p = 2$, D = 0 y la ecuación tiene una raíz doble: $x = 2$
- Buscamos los valores del parámetro para los que todas las raíces de la ecuación cumplen $x > 1$ (y existe alguna raíz).
- Por las fórmulas de Vieta: $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- La ecuación debe tener raíces reales: $D \geq 0$, por tanto $p \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$
- La condición sobre la suma: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p - 1) > 0$, por tanto $p > 1$
- La condición sobre el producto: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, por tanto $p < 3$
- La condición se cumple para $2 \leq p < 3$

Gráfica



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Cada punto [p; x] de la curva es una solución. Para un valor elegido de p, las soluciones están en la recta vertical; muévela con el deslizador.

$p = -1$ | $p = 2$ | $p = 3$

$p = 1: \quad x \in \emptyset$

Un sistema con parámetro: determinantes; las rectas se cortan, son paralelas o coinciden.

Enunciado: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Pasos

- Las incógnitas son $x,\ y$, el parámetro a es cualquier número real. La solución depende de su valor, así que analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Resolvemos el sistema con determinantes (regla de Cramer)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Para $a \neq -1,\ a \neq 1$, D ≠ 0: el sistema tiene una única solución (las rectas se cortan): $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$
- Para $a = -1$, D = 0 y el sistema no tiene solución (las rectas son paralelas).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Para $a = 1$, D = 0 y las dos ecuaciones de describen la misma recta: infinitas soluciones: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Una inecuación racional: según el orden del cero p y el punto 1.

Enunciado: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Resultado

$$\begin{cases} x \in (-\infty, p) \cup (1, \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty, 1) \cup (p, \infty), & p > 1 \end{cases}$$

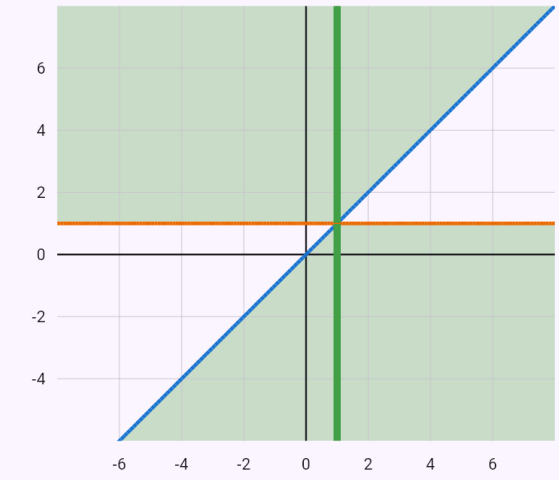
Condiciones: $x \neq 1$

Pasos

- La incógnita es x, el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq 1$
- Pasamos a la forma básica: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Los ceros del numerador: p; el denominador se anula en 1
- Para $p < 1$: según el orden de los ceros y los signos en los intervalos: $x \in (-\infty, p) \cup (1, \infty)$
- Para $p > 1$: según el orden de los ceros y los signos en los intervalos: $x \in (-\infty, 1) \cup (p, \infty)$
- Para $p = 1$ resolvemos $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$:

  $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

La región sombreada contiene todas las soluciones [p; x]. Para un valor elegido de p, la solución es la parte resaltada de la recta vertical; muévela con el deslizador.

p = 1

$p = 1$

Limitaciones conocidas

- La discusión completa por intervalos solo con un parámetro, con varios los casos generales.
- Preguntas sobre las raíces solo en ecuaciones lineales y cuadráticas; sistemas con parámetro solo de dos ecuaciones lineales; un parámetro dentro de una raíz o un logaritmo, aún no.

12. Despejar una letra de una fórmula

Una fórmula de matemáticas, física o química (m = ρV, S = πr², v = s/t) se transforma para que la letra elegida quede sola en un lado. Las demás letras son magnitudes dadas: la aplicación trabaja con ellas como con números conocidos. Los pasos son transformaciones equivalentes como en la escuela: pasar términos al otro lado, multiplicar por un denominador, dividir, sacar factor común, sacar la raíz, inversos.

La letra que se despeja se elige con el chip «Despejar»; sin elección la aplicación despeja la primera letra del lado de la fórmula. El resultado es la fórmula con sus condiciones: aquello entre lo que se divide no puede ser cero (V = m/ρ para ρ ≠ 0). Las magnitudes de una fórmula son positivas, por eso una raíz tiene solo su valor positivo: r = √(S/π).

Una ecuación en x e y se despeja para y (la recta 2x + y = x + 2y es y = x); las demás ecuaciones en x e y tienen «Despejar y» y «Despejar x» entre los chips de la derivada, la integral y la gráfica. Aquí la raíz da ambos signos: x² + y² = 25 es y = ±√(25 − x²).

Las ecuaciones con parámetro (2ax + a = 4x, incógnita x) no se despejan como fórmula, sino que se resuelven con la discusión: véase el capítulo anterior.

Cómo introducirlo

`m = ρV`	Una fórmula: en un lado una magnitud sola, letras mayúsculas y minúsculas (E, I, V son magnitudes).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Subíndices con guion bajo (R_1, v_0), letras griegas (ρ, rho, \rho), π es la constante.
`2x + y = x + 2y`	Una ecuación en x e y: se despeja y.

Ejemplos

Densidad: dividir entre una magnitud con la condición ρ ≠ 0.

Enunciado: `m = ρV`

Resultado

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Condiciones: $\rho \neq 0$

Pasos

- Despejamos V. Con las demás letras ($m,\ \rho$) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que V quede sola en un lado.
- Intercambiamos los lados de la ecuación: $\rho V = m$
- Dividimos ambos lados entre ρ, que no puede ser cero ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Área de un trapecio: multiplicar por dos, dividir entre la altura y pasar a.

Enunciado: `S = (a + c)/2 · v`

Resultado

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Condiciones: $v \neq 0$

Pasos

- Despejamos c. Con las demás letras ($S,\ a,\ v$) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que c quede sola en un lado.
- Intercambiamos los lados de la ecuación: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Multiplicamos ambos lados por 2: $v(a+c) = 2S$
- Dividimos ambos lados entre v, que no puede ser cero ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Restamos a a ambos lados: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Pasamos a denominador común: $c = \frac{2S - av}{v}$

Área de un círculo: sacar la raíz, el radio es positivo.

Enunciado: `S = πr^2`

Resultado

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Pasos

- Despejamos r. Con las demás letras (S) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que r quede sola en un lado.
- Intercambiamos los lados de la ecuación: $\pi r^2 = S$
- Dividimos ambos lados entre π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Sacamos la raíz de ambos lados. r es una magnitud, y las magnitudes son positivas: solo vale la raíz positiva: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Resistencias en paralelo: denominador común e inversos.

Enunciado: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Resultado

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Condiciones: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Pasos

- Despejamos R_1. Con las demás letras ($R,\ R_2$) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que R_1 quede sola en un lado.
- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Intercambiamos los lados de la ecuación: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Restamos $\frac{1}{R_2}$ a ambos lados: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Pasamos a denominador común: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Si dos expresiones son iguales, también lo son sus inversos: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Una recta: los términos con y a la izquierda, los demás a la derecha.

Enunciado: `2x + y = x + 2y`

Resultado

$$y = x$$

Pasos

- Despejamos y. Con las demás letras (x) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que y quede sola en un lado.
- Pasamos los términos con y al lado izquierdo y los demás al derecho (con el signo contrario) y sumamos

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Multiplicamos ambos lados por (-1): $y = x$

Una circunferencia despejada para y: la raíz con ±.

Enunciado: `x^2 + y^2 = 25`

Resultado

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Pasos

- Despejamos y. Con las demás letras (x) trabajamos como con números conocidos y transformamos la ecuación mediante transformaciones equivalentes hasta que y quede sola en un lado.
- Restamos x^2 a ambos lados: $y^2 = 25 - x^2$
- Sacamos la raíz cuadrada de ambos lados; un número y su opuesto tienen el mismo cuadrado, de ahí el ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Limitaciones conocidas

- La letra solo en potencias, fracciones y raíces; todavía no en funciones (sin, log, un exponente) ni al cuadrado junto consigo misma (s = v_0t + ½at^2 para t).

13. Operaciones con expresiones

Una expresión sin signo igual la aplicación la transforma según el chip elegido: la simplifica (una fracción algebraica con denominador común y simplificada, con condiciones), la desarrolla, la factoriza (sacando factor común, con identidades notables y con la regla de Ruffini) o la descompone en fracciones parciales – como en papel, con ecuaciones para los coeficientes desconocidos. La factorización es en los enteros; si la expresión se puede factorizar más en los reales (con raíces irracionales), lo muestra el paso siguiente. La raíz de un monomio se extrae en parte – con raíz par como valor absoluto donde la base puede ser negativa. También funcionan los números complejos – la división multiplicando por el conjugado.

Las expresiones numéricas con fracciones se calculan paso a paso como en la escuela: primero los paréntesis más interiores (redondos, corchetes y llaves), en una fracción compuesta el numerador y el denominador por separado, luego potencias, multiplicaciones y divisiones (entre una fracción multiplicando por su inversa, también con dos puntos o ÷) y al final la suma con denominador común. Un número mixto se escribe con un espacio – 2 1/3 (desde una foto también 2⅓) – y la aplicación primero lo pasa a fracción; el producto de dos números escríbalo siempre con un punto. Un resultado mayor que 1 se muestra también como número mixto.

Un polinomio dividido entre otro se escribe con dos puntos: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). La aplicación hace la división larga como en papel – divide los términos de mayor grado, multiplica el divisor por el resultado y resta – y muestra el cociente, el resto y la comprobación; con un divisor x − a ofrece también la regla de Ruffini. Una fracción p/q se simplifica como antes; la división se elige con el chip «División de polinomios».

El binomio de Newton: el término k-ésimo de un desarrollo («5. término (2x - 1/x)^8») y el término sin x («término sin x de (x + 1/x)^10») a partir del término general. Las permutaciones P(5) y con repetición P′(2, 3, 1) se calculan como factoriales.

La combinatoria también se puede preguntar con una frase corta: «¿De cuántas maneras se pueden elegir 2 de 6?» (con «importa el orden», «con repetición»), «¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 personas?» (también alrededor de una mesa redonda), números de tres cifras pares con cifras dadas y palabras con las letras de una palabra. Y dos problemas clásicos de probabilidad: el de los cumpleaños (al menos dos de n personas cumplen años el mismo día) y el del guardarropa que pierde los resguardos (nadie recibe su abrigo – también cartas en sobres).

Ejemplos

Una expresión numérica con fracciones: primero la multiplicación, luego el denominador común.

Enunciado: `2/3 - 1/6*2` Simplificar

Resultado

$$\frac{1}{3}$$

Pasos

- Primero la multiplicación y la división: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Paréntesis anidados desde el más interior.

Enunciado: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Resultado

$$7$$

Pasos

- Primero el paréntesis más interior: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Sustituimos: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Primero el paréntesis más interior: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Sustituimos: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Primero el paréntesis más interior: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Sustituimos: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Multiplicamos – numerador por numerador, denominador por denominador – y simplificamos: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Una fracción compuesta: numerador y denominador por separado y luego por la inversa.

Enunciado: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Resultado

$$\frac{10}{21}$$

Pasos

- Primero el numerador y el denominador de la fracción compuesta por separado: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Primero el numerador y el denominador de la fracción compuesta por separado: $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Sustituimos: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Una fracción compuesta: el numerador por la inversa del denominador

  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Números mixtos: a fracciones y el resultado también como número mixto.

Enunciado: `2 1/3 + 1 1/2`

Resultado

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Pasos

- Pasamos los números mixtos a fracciones: la parte entera por el denominador más el numerador

  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Sustituimos: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Pasamos a denominador común: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- El resultado como número mixto: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Simplificar una fracción algebraica.

Enunciado: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Simplificar

Resultado

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Condiciones: $x \neq -1$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq -1$
- Factorizamos el numerador y el denominador: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Simplificamos el factor común $x+1$: $\frac{x-1}{x+1}$

Desarrollar.

Enunciado: `(x + 2)^3` Desarrollar

Resultado

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Pasos

- Desarrollamos los paréntesis y agrupamos términos semejantes: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Factorizar con la regla de Ruffini.

Enunciado: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Factorizar

Resultado

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Pasos

- Las raíces racionales solo pueden ser divisores del término independiente -6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 1$ y dividimos el polinomio:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Sustituyendo comprobamos que estos candidatos no son raíces: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 2$ y dividimos el polinomio:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Descomposición en fracciones parciales.

Enunciado: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Fracciones parciales

Resultado

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Condiciones: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Factorizamos el denominador: $(x-1)(x+2)$
- Buscamos una descomposición de la forma: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Multiplicamos ambos lados por el denominador $(x-1)(x+2)$: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Sustituimos $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Sustituimos $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Extracción parcial de la raíz con valor absoluto.

Enunciado: `sqrt(8a^5 b^2)` Simplificar

Resultado

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Pasos

- Extraemos de la raíz lo que se puede – las potencias salen delante (con raíz par como valor absoluto donde la base puede ser negativa): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

División de números complejos.

Enunciado: `(3+4i)/(1-2i)` Forma binómica

Resultado

$$-1+2i$$

Pasos

- Multiplicamos la fracción por el conjugado del denominador, $1+2i$
  $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$

Una ecuación con factoriales – condiciones, simplificación y comprobación de las raíces.

Enunciado: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Resultado

$$x = 5$$

Pasos

- Condiciones: factoriales y números combinatorios existen solo para enteros no negativos – cada argumento (en un número combinatorio n, k y n − k) debe ser entero ≥ 0:
  $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Los factoriales se expresan con el menor, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), y se simplifican; un número combinatorio como producto: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2+x = 30$
- Queda una ecuación sin factoriales, todo a un lado:
  $x^2+x-30 = 0$
- Las raíces de la ecuación son $x = -6,\ x = 5$; cumple las condiciones $x = 5$

División larga – cociente, resto y comprobación.

Enunciado: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Resultado

$$\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$$
$$=2x+3-\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Pasos

- Paso 1 – dividimos los términos de mayor grado $2x^3:x^2=2x$, multiplicamos el divisor por el resultado $2x\cdot\left(x^2+1\right)=2x^3+2x$ y restamos, queda $3x^2-3x+5$
- Paso 2 – dividimos los términos de mayor grado $3x^2:x^2=3$, multiplicamos el divisor por el resultado $3\cdot\left(x^2+1\right)=3x^2+3$ y restamos, queda $-3x+2$
- División larga $\left(2x^3+3x^2-x+5\right):\left(x^2+1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- El cociente es $2x+3$, el resto $-3x+2$
- Comprobación – el cociente por el divisor más el resto da el dividendo: $(2x+3)\left(x^2+1\right)+(-3x+2)=2x^3+3x^2-x+5$

División entre x − 1 con la regla de Ruffini.

Enunciado: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Regla de Ruffini

Resultado

$$\left(x^3-2x+1\right):(x-1)$$
$$=x^2+x-1$$

Pasos

- Regla de Ruffini para $x=1$ – arriba los coeficientes del dividendo, abajo sus sumas sucesivas; el último número es el resto

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

- El cociente es x^2+x-1, el resto 0
- Comprobación – el cociente por el divisor más el resto da el dividendo: $\left(x^2+x-1\right)(x-1)=x^3-2x+1$

Una ecuación con un número combinatorio C(n, 2) – también V(n, k), C', V' con repetición.

Enunciado: `C(n, 2) = 45`

Resultado

$$n = 10$$

Pasos

- Condiciones: factoriales y números combinatorios existen solo para enteros no negativos – cada argumento (en un número combinatorio n, k y n − k) debe ser entero ≥ 0:
  $n \geq 0,\ n-2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Los factoriales se expresan con el menor, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), y se simplifican; un número combinatorio como producto: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Queda una ecuación sin factoriales, todo a un lado:
  $n^2 - n - 90 = 0$
- Las raíces de la ecuación son $n = -9,\ n = 10$; cumple las condiciones $n = 10$

Elegir k de n con una frase: combinaciones.

Enunciado: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Resultado

$$120$$

Pasos

- Elegimos 3 de 10, no importa el orden y no se repiten – el número de combinaciones:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Números pares de tres cifras: dos casos según la última cifra.

Enunciado: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí`

`opakovat?`

Resultado

52

Pasos

- Los números tienen 3 cifras tomadas de $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. El cero no puede ir primero. Las cifras no se pueden repetir. Un número es par exactamente cuando su última cifra es par.
- La última cifra es 0: para los demás lugares quedan todas las otras cifras: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- La última cifra es otra adecuada distinta de 0: entonces no pueden ir primero ni el cero ni ella: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Sumamos los dos casos: $20 + 32 = 52$

Palabras con las letras de una palabra: permutaciones con repetición.

Enunciado: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Resultado

151200

Pasos

- La palabra tiene 10 letras; contamos cuántas veces aparece cada una:
  $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Las palabras son permutaciones con repetición: intercambiar letras iguales da la misma palabra:
  $P'(2,3,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{3628800}{24} = 151200$

El problema de los cumpleaños mediante el suceso contrario.

Enunciado: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Resultado

$P(A) \approx 0{,}5073$

Pasos

- Es más fácil el suceso contrario A': las 23 personas cumplen años en días distintos (365 días, todos igual de probables).
- La probabilidad de que todos los cumpleaños sean distintos
  $P(A') = \dfrac{V(365,23)}{365^{23}} = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$
- La probabilidad buscada es el complemento a uno:
  $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Los resguardos perdidos del guardarropa: desarreglos.

Enunciado: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Resultado

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Pasos

- Los repartos en que nadie recibe lo suyo son los desarreglos; su número por inclusión-exclusión
  $D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$
- Hay n! repartos en total; la probabilidad es el cociente:
  $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Con más personas la probabilidad apenas cambia:
  $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

El término sin x de un desarrollo del binomio.

Enunciado: `término sin x de (x + 1/x)^10`

Resultado

$$T_6 = 252$$

Pasos

- El término general $(k+1)$-ésimo del desarrollo del binomio: $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- El término sin x tiene el exponente de x igual a cero:
  $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- El término buscado, número 6:
  $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Divisibilidad y números primos

Un número entero solo lo descompone la aplicación en factores primos – lo divide sucesivamente entre los primos más pequeños y escribe 360 = 2³·3²·5; en un primo muestra que ningún primo hasta su raíz lo divide. El test también se puede escribir como isprime(97).

El máximo común divisor mcd(60, 90) y el mínimo común múltiplo mcm(18, 30) se calculan a partir de las descomposiciones en primos o, con el chip «Algoritmo de Euclides», por divisiones con resto. El algoritmo de Euclides extendido con su tabla da la identidad de Bézout bezout(240, 46): mcd(240, 46) = 240·u + 46·v.

Los divisores de un número divisores(36) se buscan por parejas 1·36, 2·18, … hasta la raíz y su número se comprueba con la factorización. Los criterios de divisibilidad divisibilidad(1236) forman una tabla para 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 25 (la última cifra, la suma de cifras, la suma alternada…); un divisor se escribe divisibilidad(1236, 7), como la frase «es 1236 divisible entre 7» o 7 | 1236; sin criterio escolar se divide con resto. Los primos hasta 200 salen de la criba de Eratóstenes («primos hasta 50»). Una ecuación lineal ax + by = c en los enteros («3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ» o el chip ℤ) se resuelve con la identidad de Bézout: todas las soluciones $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Aritmética modular: el resto 17 mod 5, el inverso 3^(-1) mod 11 (del algoritmo de Euclides extendido, con comprobación) y la potencia 7^13 mod 13 por cuadrados sucesivos. Sobre ellos se construye RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) calcula n, φ(n), la clave privada d y cifra y descifra el mensaje; e y m se pueden omitir.

Cómo introducirlo

`360, factor(360), isprime(97)`	Descomposición en primos, test de primalidad.
`mcd(60, 90), mcm(18, 30)`	Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
`divisores(36), divisibilidad(1236), divisibilidad(1236, 7)`	Divisores de un número y criterios de divisibilidad: todos o un divisor (también la frase «es 1236 divisible entre 7», 7 | 1236).
`primos hasta 50`	Los primos hasta n (como mucho 200) con la criba de Eratóstenes; también primos(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Una ecuación lineal en los enteros (diofántica); también diofantica(3, 5, 1).

`bezout(240, 46)`	Identidad de Bézout.
`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Resto, inverso y potencia módulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA con números pequeños.

Ejemplos

Descomposición en primos por divisiones sucesivas.

Enunciado: `360`

Resultado

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Pasos

- Dividimos 360 sucesivamente entre los primos más pequeños hasta que queda 1

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Descomposición en factores primos: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Un primo – ningún divisor hasta la raíz.

Enunciado: `97`

Resultado

El número es primo.

Pasos

- Basta probar los primos hasta $\sqrt{97} \approx 9{,}85$: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – ninguno divide a 97, así que es primo.

El mcd a partir de las descomposiciones en primos.

Enunciado: `mcd(60, 90)`

Resultado

$$\text{mcd}\,(60, 90) = 30$$

Pasos

- Descomposición en factores primos: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Descomposición en factores primos: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- El máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes con los menores exponentes: $\text{mcd}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

El mcm a través del mcd por el algoritmo de Euclides.

Enunciado: `mcm(60, 90)` Algoritmo de Euclides

Resultado

$$\text{mcm}\,(60, 90) = 180$$

Pasos

- Algoritmo de Euclides – dividimos el número mayor entre el menor con resto, luego el divisor entre el resto, hasta que el resto es 0; el último resto no nulo es el máximo común divisor

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{mcd}\,(60, 90) = 30$$

- El mínimo común múltiplo es el producto de los números dividido entre su máximo común divisor

$$\text{mcm}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\text{mcd}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Divisores por parejas, su número a partir de la factorización.

Enunciado: `dělitelé(36)`

Resultado

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Pasos

- Buscamos los divisores por parejas d · 36/d: basta probar d hasta 6, el otro divisor de la pareja se deduce

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Comprobación del número de divisores con la factorización: los exponentes aumentados en 1 multiplicados: $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

La tabla de criterios de divisibilidad.

Enunciado: `dělitelnost(1236)`

Resultado

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Pasos

- Criterios de divisibilidad: 2, 5, 10 – la última cifra; 4, 25 – las dos últimas; 8 – las tres últimas; 3, 9 – la suma de cifras; 6 = 2 · 3 y 12 = 3 · 4 – ambos a la vez; 7 – separar la última cifra y restar su doble del resto; 11 – la suma alternada de cifras

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Divisibilidad entre siete: separar la última cifra.

Enunciado: `dělitelnost(1309, 7)`

Resultado

$$7 \mid 1309$$

Pasos

- Divisibilidad entre 7: separamos la última cifra, restamos su doble del resto y repetimos hasta que queden como mucho dos cifras; ese número es divisible entre 7 justo cuando lo es el original (con números grandes suele ser más rápido dividir): $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

La criba de Eratóstenes.

Enunciado: `prvočísla do 50`

Resultado

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Pasos

- 2 es primo: tachamos todos sus múltiplos; los menores ya están tachados, empezamos en $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 es primo: tachamos todos sus múltiplos; los menores ya están tachados, empezamos en $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 es primo: tachamos todos sus múltiplos; los menores ya están tachados, empezamos en $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 es primo: tachamos todos sus múltiplos; los menores ya están tachados, empezamos en $7^2 = 49$: 49
- La criba de Eratóstenes: basta tachar los múltiplos de los primos hasta la raíz de 50. Los números que quedan son los primos, 15 en total

1	[2]	[3]	4	[5]	6	[7]	8	9	10
[11]	12	[13]	14	15	16	[17]	18	[19]	20
21	22	[23]	24	25	26	27	28	[29]	30
[31]	32	33	34	35	36	[37]	38	39	40
[41]	42	[43]	44	45	46	[47]	48	49	50

Identidad de Bézout por el algoritmo de Euclides extendido.

Enunciado: `bezout(240, 46)`

Resultado

$$\mathrm{mcd}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot$$

Pasos

- Algoritmo de Euclides extendido – cada resto r se escribe como r = 240·u + 46·v; una fila nueva es la penúltima menos q veces la última

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- De la última fila no nula de la tabla sale la identidad de Bézout: $\mathrm{mcd}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Una ecuación diofántica con la identidad de Bézout.

Enunciado: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Resultado

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Resolvemos $3x + 5y = 1$ en los enteros. Tiene solución justo cuando el máximo común divisor de 3 y 5 divide el lado derecho.
- Algoritmo de Euclides extendido – cada resto r se escribe como r = 5·u + 3·v; una fila nueva es la penúltima menos q veces la última

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- De la última fila no nula de la tabla sale la identidad de Bézout: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- La identidad de Bézout multiplicada por 1 da una solución: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, es decir, $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Todas las soluciones: sumamos a x múltiplos de 5 y a la vez a y múltiplos de -3 (el lado izquierdo no cambia); desplazado al menor no negativo $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Comprobación: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Una potencia módulo n por cuadrados sucesivos.

Enunciado: `7^13 mod 13`

Resultado

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Pasos

- Escribimos el exponente como suma de potencias de 2:
  $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Elevamos al cuadrado repetidamente tomando los restos módulo 13
  $7^1 \equiv 7$
  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$
  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$
  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$
- Multiplicamos las potencias necesarias tomando los restos módulo 13 sobre la marcha
  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$
  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$
  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$
  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – claves, cifrado y descifrado.

Enunciado: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Resultado

$$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$$
$$c = 48$$
$$m = 9$$

Pasos

- El módulo: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- La función φ de Euler:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Algoritmo de Euclides – dividimos el número mayor entre el menor con resto, luego el divisor entre el resto, hasta que el resto es 0; el último resto no nulo es el máximo común divisor
  $$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
  $$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
  $$\Rightarrow \ \mathrm{mcd}\,(120, 7) = 1$$
- El exponente público e debe ser coprimo con φ(n):
  $\mathrm{mcd}\,(7, 120) = 1$ – lo es.
- Algoritmo de Euclides extendido – cada resto r se escribe como r = 120·u + 7·v; una fila nueva es la penúltima menos q veces la última

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	-17
0			

- El exponente privado d es el inverso de e módulo φ(n):
  $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Clave pública $(n, e) = (143, 7)$, clave privada $(n, d) = (143, 103)$
- Cifrado del mensaje m: $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Escribimos el exponente como suma de potencias de 2:
  $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Elevamos al cuadrado repetidamente tomando los restos módulo 143
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Multiplicamos las potencias necesarias tomando los restos módulo 143 sobre la marcha
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Descifrado – sale el mensaje original:
  $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Escribimos el exponente como suma de potencias de 2:
  $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Elevamos al cuadrado repetidamente tomando los restos módulo 143
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Multiplicamos las potencias necesarias tomando los restos módulo 143 sobre la marcha
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Limitaciones conocidas

- La descomposición en primos funciona para números hasta 10^{18}; un primo mayor solo se confirma con un test.
- RSA es un ejemplo escolar con números pequeños (n = p·q hasta un billón aproximadamente), no un cifrado real.

15. Ángulos en grados, minutos y segundos

Un ángulo solo se convierte a todas sus formas: grados, minutos y segundos (5,5° = 5°30′), grados decimales, minutos, segundos y radianes; 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Una sola forma se obtiene con «= ?′», «= ?°», «= ?″» o «= ? rad». De radianes a grados: «π/6 rad».

Los ángulos se suman y se restan como en la escuela: grados, minutos y segundos por separado; 60′ pasan a 1°, y si no hay minutos suficientes, un grado se cambia por 60′. Se multiplican y dividen por un número: 100° : 3 se divide por partes, el resto de los grados pasa a minutos y el de los minutos a segundos.

Los minutos y segundos se escriben con ′ y ″ (en el teclado de la aplicación) o con apóstrofo y comillas: 25°30'15". Los grados dentro de una función (sin 30°) están en el capítulo Ecuaciones trigonométricas.

Cómo introducirlo

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Un ángulo: grados, minutos, segundos, también grados decimales.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Suma, resta, múltiplo y cociente por un número.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Una forma de la conversión, de radianes a grados.

Ejemplos

Grados decimales en todas las formas.

Enunciado: `5,5°`

Resultado

$$
\begin{aligned}
&5^\circ 30' \\
&= 330' \\
&= 19800'' \\
&= \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}
\end{aligned}
$$

Pasos

- La parte decimal del grado pasa a minutos (1° = 60'), la del minuto a segundos (1' = 60"):
  $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- A minutos: los grados por 60 (1° = 60') más los minutos:
  $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- A segundos: los minutos por 60 (1' = 60"):
  $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- A radianes: 180° = π rad, así que los grados por π/180
  $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\text{rad} \approx 0{,}09599\,\text{rad}$

Suma: 60' pasan a 1°.

Enunciado: `25°30′ + 18°45′`

Resultado

$$44^\circ 15'$$

Pasos

- Sumamos por separado grados, minutos y segundos:
  $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Cada 60" son 1' y cada 60' son 1°: lo pasamos:
  $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Resta: un grado se cambia por 60′.

Enunciado: `25°15′ - 18°45′`

Resultado

$$6^\circ 30'$$

Pasos

- Hay menos minutos (segundos) de los que se restan: un grado (minuto) se cambia por 60' (60"): $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Restamos por separado grados, minutos y segundos: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

División por un número, el resto en minutos.

Enunciado: `100° : 3`

Resultado

$$33^\circ 20'$$

Pasos

- Dividimos por partes: los grados, el resto a minutos y se suma; los minutos, el resto a segundos; los segundos

$$100^\circ : 3 = 33^\circ,\ 1^\circ = 60'$$
$$60' : 3 = 20'$$
$$\Rightarrow\ 100^\circ : 3 = 33^\circ 20'$$

De radianes a grados.

Enunciado: `π/6 rad`

Resultado

$$30^\circ$$
$$= 1800'$$
$$= 108000''$$

Pasos

- De radianes a grados: π rad = 180°, así que por 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\text{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- A minutos: los grados por 60 (1° = 60') más los minutos: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- A segundos: los minutos por 60 (1' = 60"): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Limitaciones conocidas

- Ecuaciones con ángulos en minutos (x + 25°30′ = 90°), todavía no.

16. Porcentajes, razones y regla de tres

Los porcentajes se introducen de forma breve, sin problema de texto: la parte «20 % de 480», la base «15 % = 45», el porcentaje «96 de 480 = ? %», un aumento y una rebaja «480 + 15 %», «480 − 20 %» y el valor original «x − 20 % = 384». La aplicación calcula con el 1 % como hoy en la escuela (1 % = 480 : 100 = 4,8); el chip «Fórmula» cambia a parte = base · tanto por uno con el porcentaje como decimal (480 · 0,2).

Una razón «12 : 18» se simplifica a 2 : 3, un todo se reparte en una razón («300 en la razón 2 : 3 : 5»: la suma de partes, una parte, cada parte) y una proporción «3 : 4 = x : 20» se resuelve con el producto de extremos y medios. Una razón de fracciones («2/3 : 4/9») se multiplica primero por el mínimo común múltiplo de los denominadores; dentro de una expresión más larga los dos puntos dividen.

La regla de tres se escribe como en la escuela: dos filas con tres puntos (o …, →): «10 kg … 250 €, 12 kg … x», las unidades son opcionales. Por defecto es directa; con el chip «Inversa» (o la palabra «inversa» tras una coma), inversa. Interés simple: interes(capital, tasa %, años, impuesto %); el impuesto es opcional. Interés compuesto: interés compuesto(capital, tasa %, años, impuesto %, frecuencia) – el impuesto y la frecuencia (anual, semestral, trimestral, mensual, continuamente) son opcionales; más tareas (ahorro, préstamos, interés por días) están en Aplicaciones, capítulo Economía.

Cómo introducirlo

`20 % de 480, 15 % = 45, 96 de 480 = ? %, 480 − 20 %, x − 20 % = 384`	Porcentajes: parte, base, porcentaje, cambio, valor original.
`12 : 18, 300 en la razón 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Simplificar una razón, repartir en una razón, una proporción.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	La regla de tres: proporcionalidad directa e inversa.
`interes(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Interés simple con impuesto.
`interés compuesto(10000, 3 %, 5, 15 %, mensual)`	Interés compuesto con impuesto y frecuencia de abono.

Ejemplos

Una parte con el 1 %.

Enunciado: `20 % z 480`

Resultado

96

Pasos

- Primero el 1 %: la base (el todo, 100 %) entre 100:
  $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Los por cientos buscados son tantas veces el 1 %:
  $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Una rebaja con la fórmula.

Enunciado: `480 - 20 %` Fórmula parte = base · tanto por uno

Resultado

384

Pasos

- Valor reducido = base · (1 − tanto por uno), $20\,\% = 0{,}2$:
  $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

El precio original antes del descuento.

Enunciado: `x - 20 % = 384`

Resultado

$x = 480$

Pasos

- El valor original es el 100 %; tras la reducción quedan menos por cientos: el valor conocido:
  $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- El 1 % es el valor conocido entre su número de por cientos: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- La base es el 100 %, cien veces el 1 %:
  $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Reparto en una razón.

Enunciado: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Resultado

$$60,\ 90,\ 150$$

Pasos

- El todo se divide en tantas partes como suman los términos: $2 + 3 + 5 = 10$
- Una parte es: $300 : 10 = 30$
- Cada parte tiene tantas partes como dice su término: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; comprobación $60 + 90 + 150 = 300$

Una razón de fracciones.

Enunciado: `2/3 : 4/9`

Resultado

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Pasos

- Quitamos las fracciones: todos los términos de la razón por el mínimo común múltiplo de los denominadores, 9
  $$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$$
- Simplificamos la razón: todos los términos entre su máximo común divisor 2: $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Proporcionalidad inversa.

Enunciado: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Inversa

Resultado

$$x = 8\,\text{dní}$$

Pasos

- La regla de tres. Proporcionalidad inversa: cuantas veces más de una, tantas menos de la otra, las flechas opuestas
  $$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$
- Según las flechas, una proporción: la segunda razón invertida: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Interés simple con un impuesto del 15 %.

Enunciado: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Resultado

$$10000 + 510 = 10510$$

Pasos

- Interés = capital · p/100 · tiempo en años: $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Del interés se paga el impuesto $15\,\%$, queda el interés neto: $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Al final, el capital con el interés: $10000 + 510 = 10510$

Interés compuesto con un impuesto del 15 % y abono mensual.

Enunciado: `interés compuesto(10000, 3 %, 5, 15 %, mensual)`

Resultado

$$K_n \approx 11.358{,}31$$

Pasos

- Datos: $K_0 = 10.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Convertimos las unidades: $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Con interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial: K_n = K₀(1 + pn). Con interés compuesto se abonan y generan intereses: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), donde m es el número de abonos al año (anual, semestral, trimestral, mensual). La capitalización continua es el límite m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Un impuesto d sobre los intereses reduce el tipo a p(1 − d). La tasa anual equivalente compara las frecuencias. Descontar es lo contrario: cuánto depositar hoy. Con inflación π, el valor real es K_n/(1 + π)^n. El interés mixto (como los bancos abonan los intereses una vez al año) capitaliza los años enteros y aplica interés simple al resto del último: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Ecuación del modelo: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Abonos de intereses al año: $m = 12$
- Tipo después del impuesto: $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Tasa anual efectiva: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Sustituimos: $K_n = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11.358{,}31$
- Intereses en total: $K_n - K_0 \approx 1358{,}31$

Limitaciones conocidas

- Todavía no hay problemas de texto: hay que escribir el enunciado de forma breve; el interés compuesto con depósitos periódicos y más tareas financieras están en los formularios de Aplicaciones.

17. Cambio de unidades

Un cambio se escribe como «5 m² = ? cm²» (o «5 m2 en cm2»). La aplicación escribe la equivalencia y multiplica (a una unidad menor) o divide (a una mayor); en las unidades decimales añade cuántos lugares se corre la coma. En áreas y volúmenes explica por qué el número es una potencia: 1 m = 100 cm, así que 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Longitud de mm a km, área de mm² a km² y área y hectárea, volumen de mm³ a m³ y ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), masa de mg a t, tiempo s, min, h, d (también compuesto «1 h 30 min» y el resultado en horas y minutos), velocidad km/h y m/s (1 m/s = 3,6 km/h) y temperatura °C, K, °F con sus fórmulas.

Cómo introducirlo

`5 m² = ? cm², 3,5 l en m³, 1 h 30 min = ? min`	Un valor con su unidad, «= ?» (o «en») y la unidad de destino.

Ejemplos

Un área: el número es un cuadrado.

Enunciado: `5 m² = ? cm²`

Resultado

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Pasos

- En áreas y volúmenes se convierten las dos (las tres) dimensiones: el número de las longitudes se eleva a la potencia
  $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- A una unidad menor: salen más, así que multiplicamos:
  $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Multiplicar por un uno con ceros (aquí 4) corre la coma a la derecha tantos lugares como ceros tiene; los que faltan, con ceros.

Litros a metros cúbicos.

Enunciado: `3,5 l = ? m³`

Resultado

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Pasos

- La equivalencia: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- A una unidad mayor: salen menos, así que dividimos: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Dividir por un uno con ceros (aquí 3) corre la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tiene; los que faltan, con ceros.

Minutos a horas, también en horas y minutos.

Enunciado: `150 min = ? h`

Resultado

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Pasos

- La equivalencia: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- A una unidad mayor: salen menos, así que dividimos: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- En horas y minutos: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Velocidad: entre 3,6.

Enunciado: `72 km/h = ? m/s`

Resultado

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- La equivalencia: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- A una unidad mayor: salen menos, así que dividimos: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Temperatura con su fórmula.

Enunciado: `20 °C = ? K`

Resultado

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Pasos

- Las temperaturas no se convierten con un factor sino con una fórmula (las escalas tienen distinto cero): $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Lógica y conjuntos

Una proposición con las conectivas ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ se evalúa con una tabla de verdad – una columna para cada conectiva, unos para verdadero – y la aplicación dice si es una tautología, una contradicción o solo satisfacible; para una satisfacible añade las formas normales disyuntiva y conjuntiva y una forma simplificada.

Con el chip «Negación» la aplicación niega la proposición paso a paso según las leyes de De Morgan y las negaciones de la implicación y la equivalencia. Una proposición con cuantificadores (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) se niega directamente – el cuantificador universal pasa a existencial y una desigualdad a la opuesta. Para una implicación ofrece también la contrarrecíproca y la recíproca.

Los conjuntos dados por sus elementos ({1, 2, 3}) o como intervalos ((1; 5), ⟨3; 7)) y su unión, intersección, diferencia, complemento en el universo U y diferencia simétrica se calculan operación por operación. Los conjuntos enumerados tienen un diagrama de Venn con los elementos en sus regiones, los intervalos el resultado en la recta numérica.

Sin elementos (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) la aplicación comprueba una igualdad de expresiones de conjuntos con una tabla de pertenencia y diagramas de Venn de ambos lados; una expresión sola, (A \ B) ∪ (B \ C), se sombrea en un diagrama de Venn. También decide si se cumple 3 ∈ A o A ⊆ B.

Cómo introducirlo

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Las conectivas del teclado de la aplicación (pestaña ∧∪) o de una foto (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	La implicación y la equivalencia como flechas de un teclado normal. &, | y ! no se leen como conectivas – son el valor absoluto y el factorial.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Cuantificadores con un dominio (∈ ℝ) o una condición (> 0), la proposición tras dos puntos.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	La tarea como palabra – la negación, la contrarrecíproca y la recíproca (negation, contrapositive, converse).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Un conjunto por sus elementos (separados por comas, por punto y coma con coma decimal), un intervalo, el

	universo U; cada definición en su línea o tras una coma.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	La unión, intersección, diferencia (también \), complemento A', diferencia simétrica; la intersección va antes.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Un elemento de un conjunto y un subconjunto – se cumple o no.

Ejemplos

Una tautología – una implicación es equivalente a su contrarrecíproca.

Enunciado: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Resultado

La proposición es una tautología – verdadera para toda valoración.

Pasos

- La tabla de verdad (1 – verdadero, 0 – falso), una columna para cada conectiva

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- En la última columna solo hay unos – la proposición es verdadera para toda valoración, una tautología.

Una proposición satisfacible con sus formas normales.

Enunciado: `(p ∨ q) ⇒ r`

Resultado

La proposición es satisfacible – verdadera solo para algunas valoraciones. Una forma equivalente simplificada:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Pasos

- La tabla de verdad (1 – verdadero, 0 – falso), una columna para cada conectiva

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- En la última columna hay unos y ceros – la proposición es satisfacible, pero no es una tautología.
- Una forma simplificada: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; la forma normal disyuntiva completa – la disyunción de las filas donde es verdadera
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- La forma normal conjuntiva – a partir de las filas donde es falsa
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Una negación por las leyes de De Morgan paso a paso.

Enunciado: `p ∧ (q ⇒ r)` Negación

Resultado

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Pasos

- La negación: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Ley de De Morgan, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$:
  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- La negación de una implicación, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$:
  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

La negación de una proposición con cuantificador.

Enunciado: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Resultado

$$\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$$

Pasos

- La negación: $\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 > 0\right)$
- «Para todo … se cumple» pasa a «existe uno para el que no se cumple»: $\exists x \in \mathbb{R}:\ \neg\left(x^2 + 1 > 0\right)$
- La negación de una igualdad o desigualdad es la relación opuesta ($<$ a $\geq$, $=$ a $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 + 1 \leq 0$

La contrarrecíproca.

Enunciado: `p ⇒ ¬q` Contrarrecíproca

Resultado

$$q \Rightarrow \neg p$$

Pasos

- La contrarrecíproca de $A \Rightarrow B$ es $\neg B \Rightarrow \neg A$ – equivalente a ella: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, con las negaciones simplificadas $q \Rightarrow \neg p$

El complemento de una unión con diagrama de Venn.

Enunciado: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

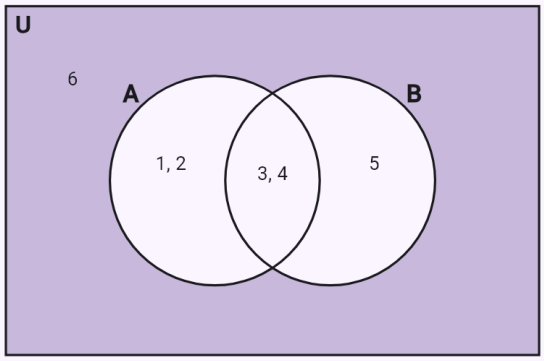
Resultado

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Pasos

- Dado: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Dado: $B = \{3, 4, 5\}$
- Dado: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- La unión – los elementos que están en al menos uno de los conjuntos: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- El complemento – los elementos del universo que no están en el conjunto: $(A \cup B)' = \{6\}$

Gráfica



La intersección de intervalos en la recta numérica.

Enunciado: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

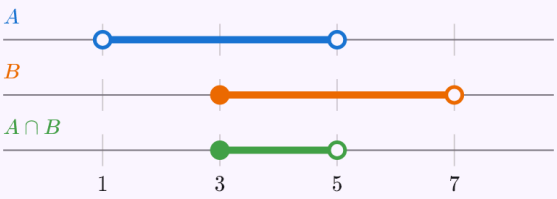
Resultado

$$A \cap B = [3,\ 5)$$

Pasos

- Dado: $A = (1,\ 5)$
- Dado: $B = [3,\ 7)$
- La intersección – los elementos que están en ambos conjuntos: $A \cap B = [3,\ 5)$

Gráfica



Cada conjunto dado tiene su propia fila en el eje, el resultado está en verde. Un punto lleno pertenece al conjunto, uno hueco no.

La ley distributiva con una tabla de pertenencia.

Enunciado: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Resultado

La igualdad se cumple – ambos lados son el mismo conjunto.

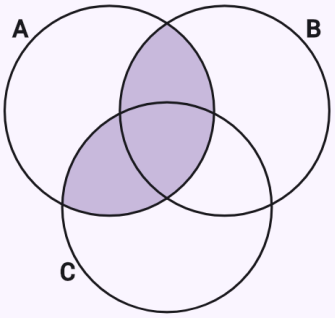
Pasos

- La tabla de pertenencia – para cada forma en que un elemento puede pertenecer a los conjuntos (1 – pertenece), se comparan ambos lados

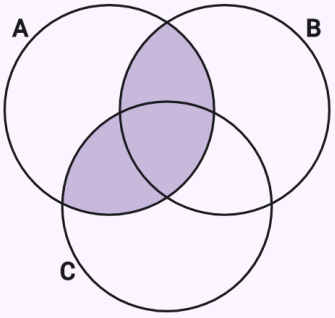
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Gráfica

$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



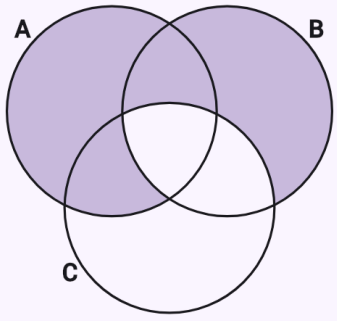
Una expresión de conjuntos en un diagrama de Venn.

Enunciado: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Resultado

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

Gráfica



Limitaciones conocidas

- Una tabla de verdad para 5 variables como máximo (32 filas), un diagrama de Venn para 4 conjuntos como máximo.
- Los conjuntos dados por una propiedad ({x ∈ ℝ: x² < 4}) aún no se leen – escríbalos como intervalos.

19. Números complejos

Escriba un número complejo con la unidad imaginaria i: 1 - i√3 (o 1 - i*sqrt(3)), en forma trigonométrica 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) o cis(pi/3), en forma exponencial 3e^(i pi/4); los ángulos también en grados (cos 60° + i sin 60°). Los números se pueden nombrar, cada uno en su propia línea (z_1 = 1 + i), con una expresión en sus nombres en la última línea (z_1/z_2, z^8).

Para un solo número la aplicación calcula el módulo $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ y el argumento φ – a partir de los valores de la tabla del coseno y del seno o, si no, del ángulo agudo de $\operatorname{tg} \alpha = |b/a|$ y el cuadrante (exacto con arctg y aproximado en radianes y en grados) – y escribe las formas trigonométrica y exponencial. Un número en forma trigonométrica se pasa a la forma binómica. El argumento está en $\langle 0; 2\pi)$; el chip «Argumento principal» lo cambia a $(-\pi; \pi\rangle$. El gráfico muestra el número en el plano complejo como un vector con el arco del argumento.

Una potencia como (1 + i)^10 se calcula con la fórmula de De Moivre, reduciendo el argumento en múltiplos de 2π; el producto y el cociente, con los módulos y los argumentos. Los chips eligen «Forma trigonométrica» (en una potencia «Fórmula de De Moivre») o «Forma binómica»; la división de números en forma binómica multiplicando por el conjugado está en el capítulo Operaciones con expresiones. Una raíz root(3, 8i) y una ecuación binómica $z^3 = 8i$ dan las n raíces con $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\ \mathrm{sen}((\varphi + 2k\pi)/n))$; en el gráfico son los vértices de un polígono regular de n lados. Una ecuación con la incógnita z se resuelve directamente en los complejos; el chip «Resolver en:» la cambia a $\mathbb{R}$. Una ecuación de segundo grado con coeficientes complejos ($z^2 + i = 2z$) se resuelve completando el cuadrado, $(z - 1)^2 = 1 - i$, y la raíz cuadrada compleja se busca como a + bi comparando las partes real e imaginaria.

Una ecuación con el conjugado $\bar{z}$ (la tecla $\bar{z}$ escribe conj(z), una foto da \bar{z}), con |z|, Re z e Im z se resuelve sustituyendo z = x + yi: la aplicación escribe ambos miembros en la forma a + bi, iguala las partes reales y las imaginarias y resuelve el sistema de dos ecuaciones en x e y que resulta – despeja una variable de una ecuación y la sustituye en la otra, y si se puede factorizar (y(2x + 1) = 0), separa la solución en casos. Las soluciones se muestran como puntos del plano complejo. Si las partes imaginarias coinciden por sí solas ($|z - 1| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $|z - i| < |z + 1|$), el resultado es un conjunto de puntos: la aplicación eleva los módulos al cuadrado, completa cuadrados y describe la circunferencia (el círculo, el exterior de una circunferencia), la recta, el semiplano o la mediatriz. Varias condiciones, cada una en su propia línea o separadas por comas ($|z| \leq 2$, $\operatorname{Re} z > 0$), y una doble desigualdad ($1 < |z - 1| \leq 2$) se dibujan como su intersección – una región sombreada; el borde continuo pertenece al conjunto, el discontinuo no.

Cómo introducirlo

`1 - i*sqrt(3)`	La forma binómica con la unidad imaginaria i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	La forma trigonométrica, abreviada cis φ.
`3e^(i pi/4)`	La forma exponencial.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Números con nombre, cada uno en su línea, y una expresión con ellos.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Todas las raíces n-ésimas, una ecuación binómica.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	El conjugado, la parte real y la imaginaria.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Un conjunto de puntos del plano complejo, varias condiciones línea por línea.

Ejemplos

Módulo, argumento a partir de valores de la tabla, formas trigonométrica y exponencial.

Enunciado: `1 - i*sqrt(3)`

Resultado

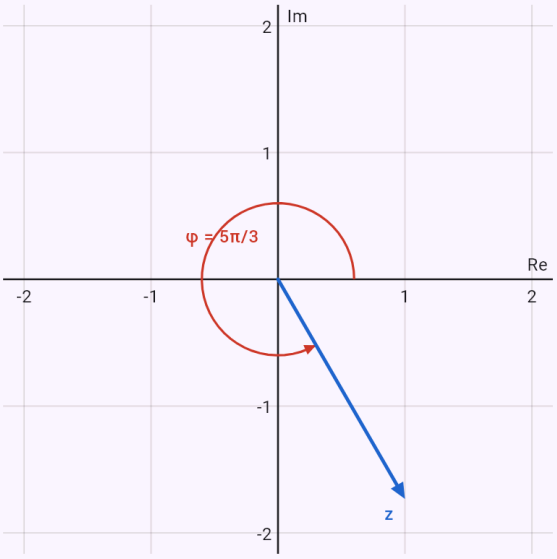
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Pasos

- El módulo |z| = √(a² + b²):
$$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- El argumento φ a partir de cos φ = a/|z| y sen φ = b/|z|, valores de la tabla
$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- La forma trigonométrica (polar) z = |z|(cos φ + i sen φ):
$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- La forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

Un argumento fuera de la tabla: ángulo agudo y cuadrante.

Enunciado: `-3 + 4i`

Resultado

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$$

$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

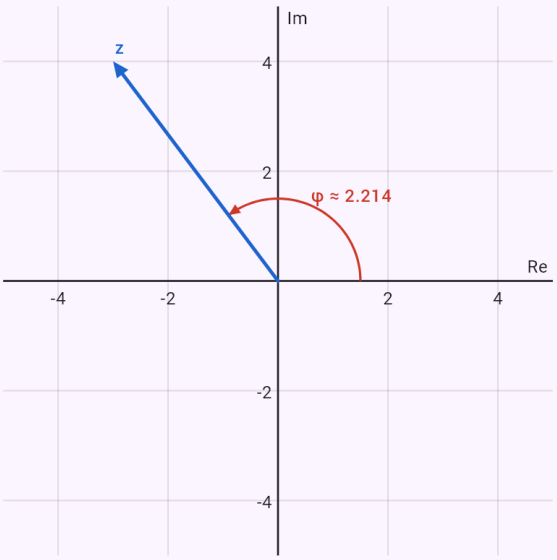
$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Pasos

- El módulo |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- El ángulo agudo α a partir de tg α = |b/a|. El número está en el 2.º cuadrante, por tanto el argumento es
  $\tan\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$

  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- La forma trigonométrica (polar) z = |z|(cos φ + i sen φ):
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$
- La forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

De la forma trigonométrica a la binómica.

Enunciado: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Resultado

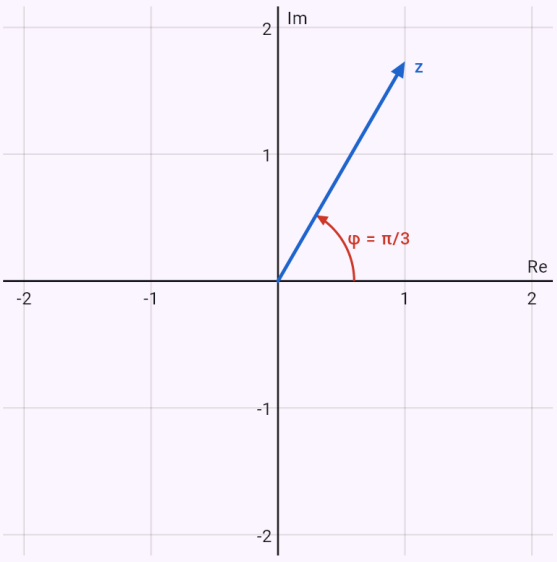
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Pasos

- El número está dado en forma trigonométrica (exponencial); su módulo y su argumento se leen directamente
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- La forma binómica: se sustituyen los valores del coseno y del seno y se multiplica
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- La forma exponencial $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

La fórmula de De Moivre.

Enunciado: `(1 + i)^10` Fórmula de De Moivre

Resultado

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

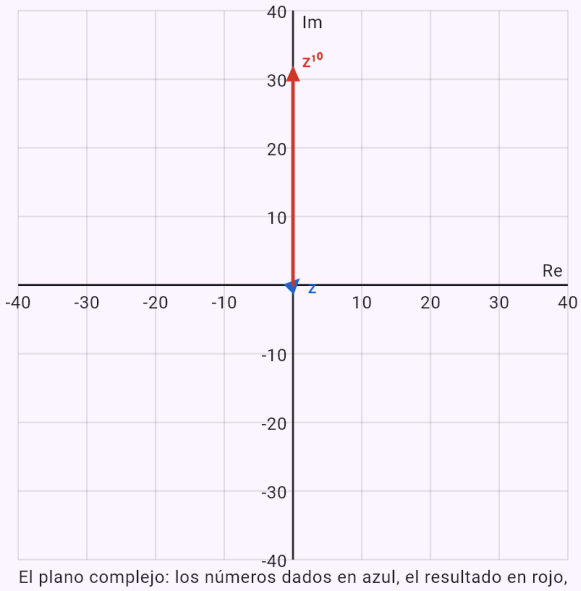
Pasos

- El módulo |z| = √(a² + b²): $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- El argumento φ a partir de cos φ = a/|z| y sen φ = b/|z|, valores de la tabla

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- La fórmula de De Moivre $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- El argumento se lleva al intervalo $\langle 0; 2\pi)$ con un múltiplo del ángulo completo: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- La forma binómica: se sustituyen los valores del coseno y del seno y se multiplica:
  $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

Un cociente en forma trigonométrica.

Enunciado: `z_1 = 1 + i`

`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Forma trigonométrica

Resultado

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Pasos

- El módulo |z| = √(a² + b²): $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- El argumento φ a partir de cos φ = a/|z| y sen φ = b/|z|, valores de la tabla

  $$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

- El módulo |z| = √(a² + b²):

  $$|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- El argumento φ a partir de cos φ = a/|z| y sen φ = b/|z|, valores de la tabla

  $$\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$$

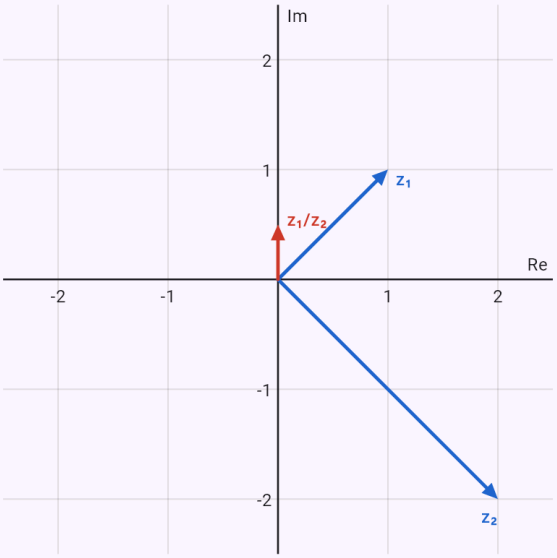
- Al dividir, los módulos se dividen y los argumentos se restan

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left($$

- El argumento se lleva al intervalo $\langle 0; 2\pi)$ con un múltiplo del ángulo completo: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- La forma binómica: se sustituyen los valores del coseno y del seno y se multiplica

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

Una ecuación binómica: tres raíces en los vértices de un triángulo.

Enunciado: `z^3 = 8i`

Resultado

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

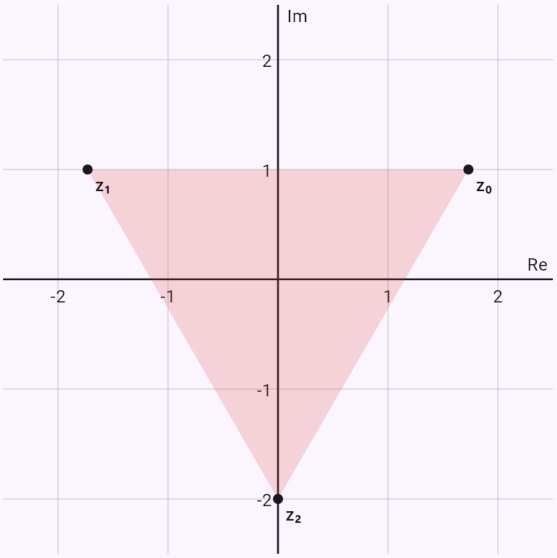
Pasos

- Una ecuación binómica $z^n = a$: sus raíces son todas las raíces n-ésimas de a: $z^3 = 8i$
- El módulo |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- El número está sobre un eje, su argumento directamente: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Las 3 raíces por la fórmula $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\,\mathrm{sen}((\varphi + 2k\pi)/n))$

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$

- Para k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Para k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Para k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- En el plano complejo las raíces son los vértices de un polígono regular de 3 lados inscrito en la circunferencia de centro 0 y radio 2

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

Ecuación con el conjugado – se igualan las partes reales y las imaginarias.

Enunciado: `z + 2conj(z) = 3 - i`

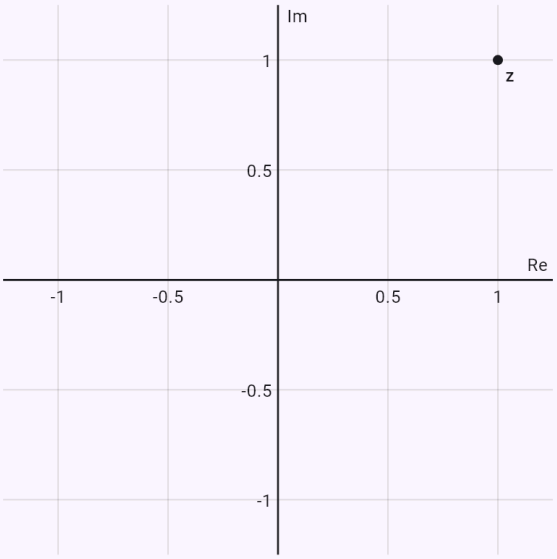
Resultado

$$z = 1 + i$$

Pasos

- Sustituimos z = x + yi con x e y reales: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Escribimos ambos miembros en la forma a + bi: $3x - yi = 3 - i$
- Dos números complejos son iguales si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias: $3x = 3$ y $-y = -1$
- Sustituimos $y = 1$ en la otra ecuación: $3x = 3$
- Pasamos todo a un lado: $3x - 3 = 0$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $3x = 3$
- Dividimos entre el coeficiente 3: $x = 1$

Gráfica



Plano complejo (de Gauss) – las soluciones como puntos: en el eje horizontal la parte real, en el vertical la imaginaria.

La ecuación z² = z̄ – factorización y casos, cuatro puntos.

Enunciado: `z^2 = conj(z)`

Resultado

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

Resolver con un método numérico:

Σ Newton (tangentes) | Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

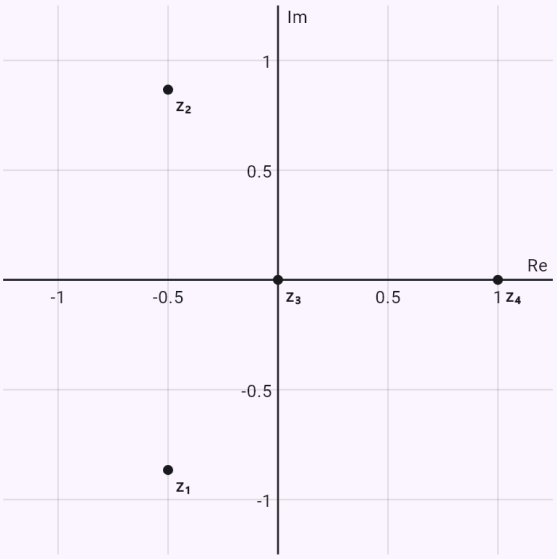
Pasos

- Sustituimos z = x + yi con x e y reales: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Escribimos ambos miembros en la forma a + bi: $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Dos números complejos son iguales si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias: $x^2 - y^2 = x$ y $2xy = -y$
- Factorizamos la ecuación – un producto es cero si alguno de sus factores es cero

$$2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$$

- Sustituimos $x = -\frac{1}{2}$ en la otra ecuación: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Pasamos todo a un lado: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- Sustituimos en la fórmula general: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Sustituimos $y = 0$ en la otra ecuación: $x^2 = x$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - x = 0$
- Calculamos el discriminante: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- Sustituimos en la fórmula general: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Gráfica



Plano complejo (de Gauss) – las soluciones como puntos: en el eje horizontal la parte real, en el vertical la imaginaria.

Intersección de un círculo y un semiplano – región sombreada, el borde discontinuo no pertenece a ella.

Enunciado: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

Resultado

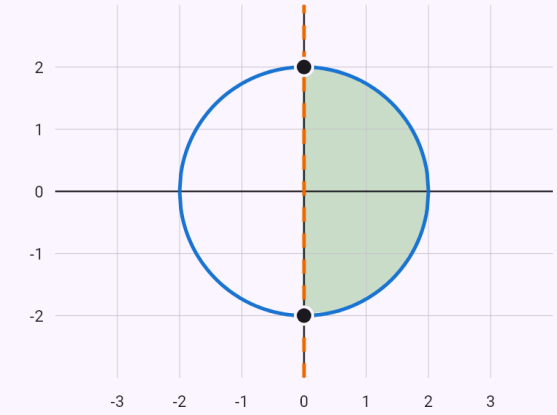
$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Pasos

- Sustituimos z = x + yi con x e y reales: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- Condición 1 para x e y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Ambos miembros son no negativos, los elevamos al cuadrado: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Es el círculo de centro 0 y radio 2, con la circunferencia.
- Condición 2 para x e y: $x > 0$
- Es el semiplano a la derecha de la recta $x = 0$, sin la recta frontera.
- Inecuación 1: $x^2 + y^2 \leq 4$
- La frontera es la curva $x^2 + y^2 = 4$: se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[0;\ 0]$: $0 \leq 4$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- Inecuación 2: $x > 0$
- La frontera es la curva $x = 0$: se dibuja discontinua, sus puntos no pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[1;\ 0]$: $1 > 0$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- La solución del sistema es la parte común de estas regiones, sombreada en la gráfica.

- Vértices de la región (intersecciones de los bordes): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Gráfica



$|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Plano complejo (de Gauss) – en el eje horizontal x = Re z, en el vertical y = Im z. El conjunto de puntos es la región sombreada. El borde continuo pertenece a ella, el discontinuo no.

Los puntos que equidistan de i y de −1 – una mediatriz.

Enunciado: `|z - i| = |z + 1|`

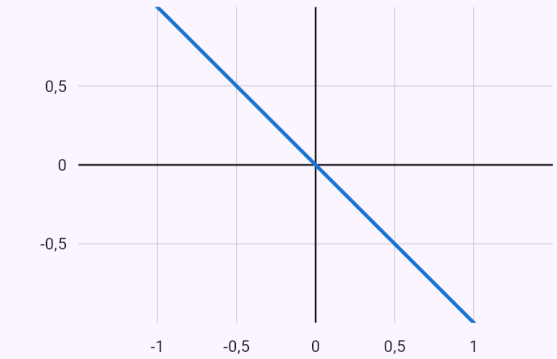
Resultado

$$y = -x$$

Pasos

- Sustituimos z = x + yi con x e y reales: $z = x + yi$
- La condición para x e y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Ambos miembros son no negativos, los elevamos al cuadrado: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Son los puntos que equidistan de i y -1 – la mediatriz del segmento de extremos i y -1: $y = -x$

Gráfica



$|z - i| = |z + 1|$

Plano complejo (de Gauss) – en el eje horizontal x = Re z, en el vertical y = Im z. El conjunto de puntos es la línea dibujada.

Limitaciones conocidas

- Las raíces cuyo argumento no es un valor de la tabla se dan en forma trigonométrica y aproximadamente en forma binómica.
- Un conjunto de puntos se describe si es una circunferencia (círculo), una recta (semiplano) o una mediatriz; otras cónicas (Im $z^2 = 2$) solo se dibujan y una suma de módulos ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, una elipse) todavía no se admite.
- Un sistema en x e y que no se puede resolver despejando una incógnita se resuelve sin pasos.

Generado a partir de la aplicación Mathtrace