Mathtrace – manual

VI. Aplicaciones: física e ingeniería

Índice

VI. Aplicaciones: física e ingeniería

42. Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

43. Física

44. Estática y resistencia de materiales

45. Astronomía y astrofísica

46. Aplicaciones del análisis complejo

42. Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

Las aplicaciones están en la sección «Aplicaciones» de la pantalla de inicio: mosaicos de los campos que elija en los ajustes (el engranaje, «Mis campos») y aplicaciones sueltas fijadas con la chincheta en la lista o en el formulario; «Todas las aplicaciones» las muestra por campos (una aplicación puede pertenecer a varios, un circuito RC a la física y a la ingeniería eléctrica, por ejemplo). Las ecuaciones diferenciales usan un formulario con 23 modelos: radiocarbono, desintegración y periodo, crecimiento exponencial, cadena de desintegración, enfriamiento de Newton (también la hora de la muerte con dos mediciones), cinética química de orden 0–2, fármaco en la sangre, alcoholemia, ahorro y préstamo, circuitos RC, RL y RLC, resorte, caída con resistencia del aire, vaciado de un depósito, mezcla, crecimiento logístico y de Gompertz, población con captura, epidemia SIR, depredador y presa, competencia de dos especies y quimiostato.

Eliges el modelo, la variante y lo que buscas; las constantes vienen rellenadas y se pueden cambiar. Cada magnitud y el resultado tienen su unidad a elegir: la aplicación convierte los valores (la conversión es un paso). El «?» junto al modelo explica de dónde sale su ecuación.

Los pasos plantean el modelo, resuelven la ecuación (separación de variables, factor integrante, ecuación característica), aplican las condiciones, despejan la magnitud buscada y sustituyen los números. Los sistemas se resuelven numéricamente con Runge–Kutta; sus equilibrios y su estabilidad, exactamente. El gráfico muestra las magnitudes en el tiempo y, en los sistemas, el plano de fases.

Ejemplos

Edad de un hallazgo con un 35 % de ¹⁴C restante.

Enunciado: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Resultado

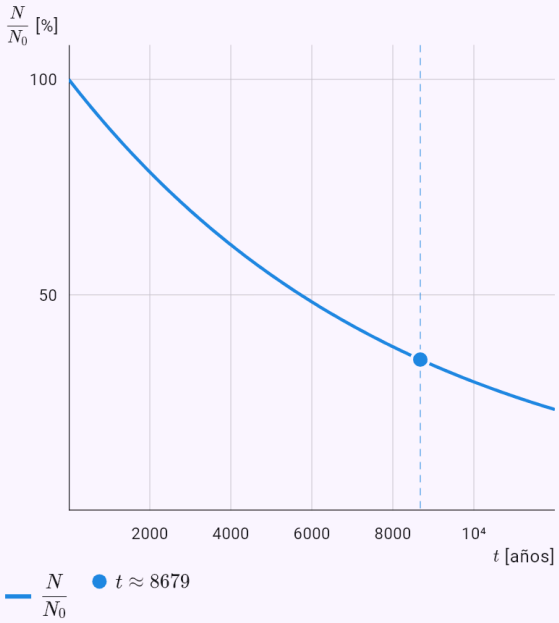
$t \approx 8700\,\text{años}$

Pasos

- Buscamos t; datos: $T_{1/2} = 5730\,\text{años}, \quad \frac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Convertimos las unidades: $\frac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Los seres vivos toman carbono del aire y por eso contienen la misma proporción del isótopo radiactivo ¹⁴C que la atmósfera. Tras la muerte la absorción cesa y el ¹⁴C se desintegra. El número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional al número de núcleos que quedan: dN/dt = −λN, con λ la constante de desintegración. La solución es N = N₀·e^(−λt); tras el periodo T½ = 5730 años queda la mitad, así que λ = ln 2 / T½. De la proporción de ¹⁴C restante (o de la actividad medida frente a la de una muestra viva) se obtiene la edad. Ecuación del modelo: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separamos las variables: $\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$
- Integramos ambos lados: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Sustituimos la condición inicial $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- En un periodo la cantidad se reduce a la mitad – constante de desintegración

  $N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\text{año}^{-}$
- Despejamos la magnitud buscada: $t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$
- Sustituimos: $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\text{años}$
- Los laboratorios dan la «edad radiocarbono» con el periodo de Libby de 5568 años y la convierten con una curva de calibración (el ¹⁴C de la atmósfera no siempre fue el mismo), así que la edad real puede diferir algo.

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Hora de la muerte: 30 °C al encontrarlo, 28 °C una hora después, habitación a 20 °C.

Enunciado: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

Resultado

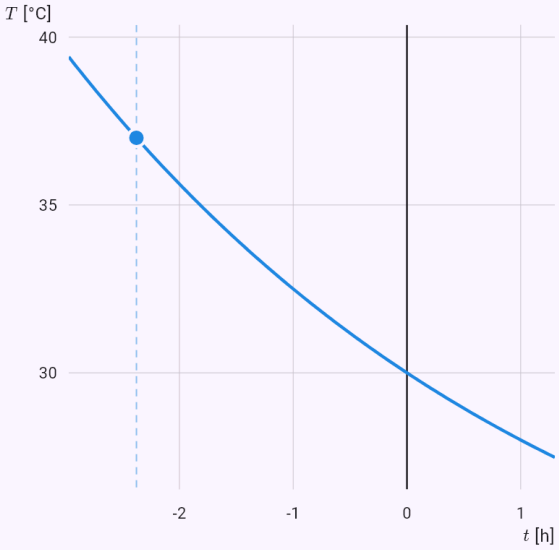
$t \approx -2{,}38\,\text{h}$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $T_0 = 30\,^\circ\text{C}, \quad T_a = 20\,^\circ\text{C}, \quad t_1 = 1\,\text{h}, \quad T_1 = 28\,^\circ\text{C},$
- Un cuerpo cede calor tanto más rápido cuanto mayor es la diferencia de temperaturas: dT/dt = −k(T − T_a), con T_a la temperatura ambiente y k dependiente del cuerpo. La solución es T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt). k se determina con dos mediciones. Así estima la medicina forense la hora de la muerte: mide la temperatura del cuerpo al encontrarlo y un poco después y calcula cuándo tenía 37 °C. Ecuación del modelo: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separamos las variables: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Integramos ambos lados: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Sustituimos la condición inicial $T(0) = T_0$:
  $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
  $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k a partir de la segunda medición
  $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Despejamos la magnitud buscada
  $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Sustituimos: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\text{h}$

- Un tiempo negativo significa antes de la primera medición (en la hora de la muerte, esas horas antes del hallazgo).

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

500 mg cada 8 horas: el nivel estacionario.

Enunciado: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

`mode=repeated)`

Resultado

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

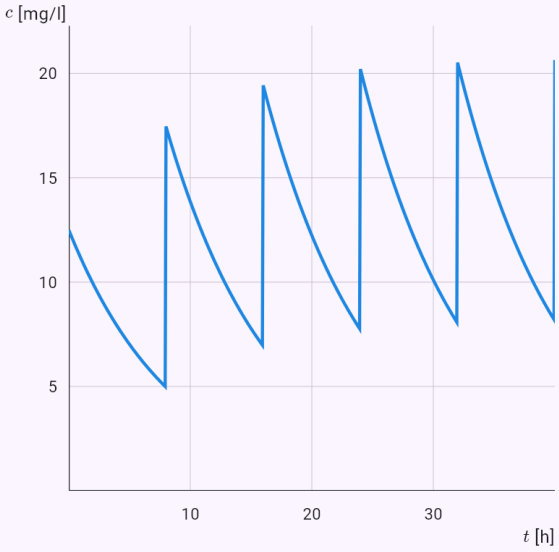
Pasos

- Buscamos c_{max}; datos
  $D = 500\,\mathrm{mg}, \quad V = 40\,\mathrm{l}, \quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}, \quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Un fármaco se reparte en el volumen de distribución V y los riñones y el hígado lo eliminan a una velocidad proporcional a la concentración: dc/dt = −kc con k = ln 2 / T½. Tras una dosis D, c = (D/V)·e^(−kt). Con dosis repetidas cada τ los restos se suman (serie geométrica) y el nivel se estabiliza entre c_min y c_max. Con una infusión de ritmo R, dc/dt = R/V − kc y la concentración tiende a R/(kV). Ecuación del modelo: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Concentración inicial tras la dosis:
  $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Constante de eliminación a partir de la vida media:
  $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h}^{-1}$
- Separamos las variables: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Integramos ambos lados: $\ln|c| = -kt + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $c = Ce^{-kt}$
- Sustituimos la condición inicial $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
  $c = c_0 e^{-kt}$
- Parte del fármaco que queda hasta la siguiente dosis:
  $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Despejamos la magnitud buscada

$$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q}, \quad c_{min} = q\,c_{max}$$

- Sustituimos: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Sustituimos: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Factor de acumulación (cuántas veces supera el nivel estacionario al de una dosis): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Gráfica



Cómo cambian las magnitudes con el tiempo.

Cuota mensual de un préstamo de 1 000 000 CZK a 20 años al 5 %.

Enunciado: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr];`

`B=0[CZK]; kind=loan)`

Resultado

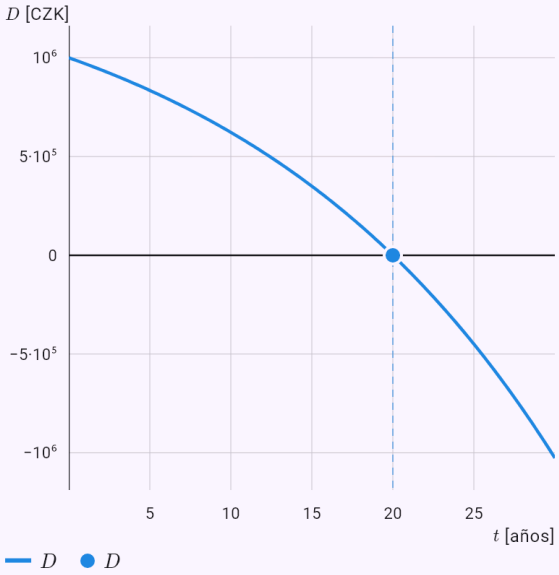
$$a \approx 6592\,\mathrm{CZK/mes}$$

Pasos

- Buscamos a; datos
  $D_0 = 1.000.000\,\mathrm{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \text{anual}, \quad t = 20\,\text{años},$
- Convertimos las unidades: $r = 5\,\%\ \text{anual} = 0{,}05\ \text{año}^{-1}$
- Con interés continuo, el interés se acumula en cada instante en proporción al saldo: dB/dt = rB, con r el tipo anual. Las aportaciones a aumentan el saldo (dB/dt = rB + a), las cuotas de un préstamo reducen la deuda (dD/dt = rD − a). Se resuelve separando variables; de la solución salen el saldo, el plazo o la cuota (anualidad continua).
  Ecuación del modelo: $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Separamos las variables: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Integramos ambos lados: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Aplicamos la exponencial − la constante ±e^C se llama de nuevo C: $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Sustituimos la condición inicial $D(0) = D_0$:
  $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
  $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- El interés continuo es un modelo: los bancos capitalizan mensual o anualmente y la diferencia es pequeña.
- Despejamos la magnitud buscada: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Sustituimos
  $a = \frac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79.100\,\mathrm{CZK/año}$

- Total pagado: $a\,t = 1.582.000\,\mathrm{CZK}$
- Convertimos las unidades:
  $a \approx 79.100\,\mathrm{CZK/año} = 6592\,\mathrm{CZK/mes}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Cuánto tarda un condensador en cargarse a la mitad de la tensión.

Enunciado: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

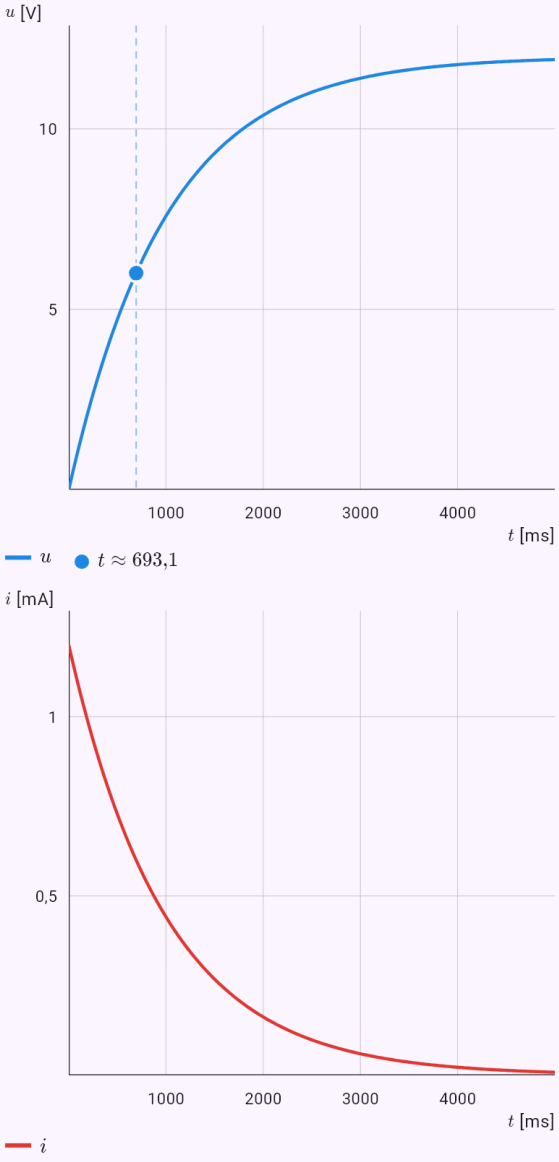
Resultado

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Al cargar un condensador a través de una resistencia, Kirchhoff da U = Ri + u y la corriente carga el condensador: i = C·du/dt. Juntas, RC·du/dt + u = U. La tensión se acerca a la de la fuente: u = U(1 − e^(−t/τ)), con τ = RC la constante de tiempo; la corriente i = (U/R)·e^(−t/τ) disminuye. En la descarga, u = U₀·e^(−t/τ).
  Ecuación del modelo: $RC\dfrac{du}{dt} + u = U$
- Constante de tiempo: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Separamos las variables: $\dfrac{du}{u - U} = -\dfrac{dt}{\tau}$
- Integramos ambos lados: $\ln|u - U| = -\dfrac{t}{\tau} + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Sustituimos la condición inicial $u(0) = 0$:
  $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
  $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Despejamos la magnitud buscada: $t = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{u}{U}\right)$
- Sustituimos: $t = -1000 \ln\left(1 - \dfrac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Resorte amortiguado: elongación en 1 s.

Enunciado: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

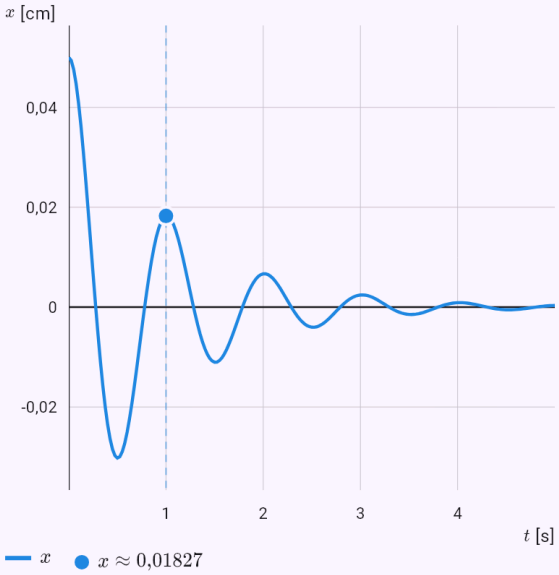
Resultado

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Pasos

- Buscamos x; datos $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Convertimos las unidades: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Sobre un cuerpo en un resorte actúan la fuerza del resorte −kx (Hooke), el amortiguamiento −b·v y quizá una fuerza externa $F_0 \cdot \cos \omega t$. Por la 2.ª ley de Newton $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$, una ecuación lineal de 2.º orden con coeficientes constantes. Las raíces de la ecuación característica indican si el cuerpo oscila o solo vuelve al equilibrio. Excitarlo cerca de la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ produce resonancia. Ecuación del modelo: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Frecuencia angular natural (sin amortiguamiento): $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Coeficiente de amortiguamiento δ: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Buscamos soluciones $x = e^{\lambda t}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica: $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Amortiguamiento subcrítico ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): raíces complejas, oscilaciones amortiguadas.
- Solución de la ecuación homogénea: $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Sustituimos las condiciones en la solución general: $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, de donde $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Sustituimos: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Convertimos las unidades: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Epidemia con R_0 = 2,5: pico y total de infectados.

Enunciado: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Resultado

$$I_{max} \approx 2340\,\text{ind.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{ind.}$$

Pasos

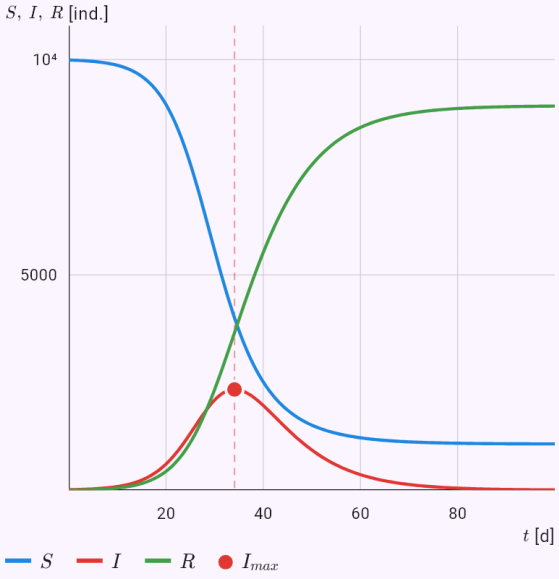
- Buscamos t_{max}; datos
  $N = 10\,000\,\text{ind.}, \quad I_0 = 10\,\text{ind.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7\,\text{c}$
- La población N se divide en susceptibles S, infectados I y recuperados R. Los contagios son proporcionales a los encuentros: β·S·I/N; los infectados se recuperan con tasa γ = 1/D (D, la duración de la enfermedad). El sistema S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI no tiene solución elemental y se resuelve numéricamente. Exactamente se obtienen el número reproductivo básico R_0 = β/γ, el pico, el total de infectados y el umbral de inmunidad de grupo 1 − 1/R_0. Ecuación del modelo
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Tasa de recuperación: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Tasa de transmisión: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- La suma S + I + R = N es constante (las ecuaciones suman cero).
- Umbral de inmunidad de grupo (proporción de inmunes con la que la enfermedad deja de propagarse):
  $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- La epidemia se desata porque al principio se cumple
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- El pico se alcanza con S = N/R_0; de la ecuación para dI/dS
  $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$
- Resolvemos la ecuación numéricamente (bisección)

$$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{ind.}$$

- En total enferman: $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{ind.}\ (89{,}3\,\%)$
- El sistema no se resuelve con funciones elementales: lo resolvemos numéricamente con el método de Runge–Kutta de orden 4, paso $0{,}05$, en $[0,\ 100]$
- › El método: método de Runge–Kutta de 4.º orden, 2000 pasos
- De la solución numérica: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

Gráfica

En el tiempo | Plano de fases



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Depredador y presa: equilibrio, estabilidad y periodo.

Enunciado: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

`c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Resultado

$[x^*,\ y^*] \approx [80,\ 50]$

$T \approx 14{,}9\ \text{meses}$

Pasos

- Buscamos T; datos

  $a = 0{,}5\,\text{mes}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{ind.}\cdot\text{mes})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{mes}$

- Las presas x se multiplican sin depredadores (ax) y los depredadores y mueren sin presas (−cy). Los encuentros, proporcionales a xy, reducen las presas (−bxy) y alimentan a los depredadores (+dxy). El sistema x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) tiene el equilibrio [c/d; a/b], con autovalores imaginarios puros: las poblaciones oscilan periódicamente, los depredadores con retraso. Se resuelve numéricamente; equilibrios e integral primera, exactamente. Ecuación del modelo

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Equilibrios – todas las derivadas son nulas

  $x(a-by)=0,\ y(dx-c)=0 \Rightarrow [0,\ 0],\ \left[\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}\right] \approx [80,$

- Estabilidad por linealización – matriz jacobiana del sistema

  $J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & dx-c \end{pmatrix}$

- En $[0,\ 0]$ autovalores $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – punto de silla (inestable).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- En $[80,\ 50]$ autovalores $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – centro (oscilaciones alrededor del equilibrio).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Dividiendo las ecuaciones y separando se obtiene una integral primera, constante a lo largo de la trayectoria: $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Como V no cambia a lo largo de una trayectoria, las trayectorias son curvas cerradas: las poblaciones oscilan periódicamente.

- Periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio (de los autovalores): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\ \text{meses}$

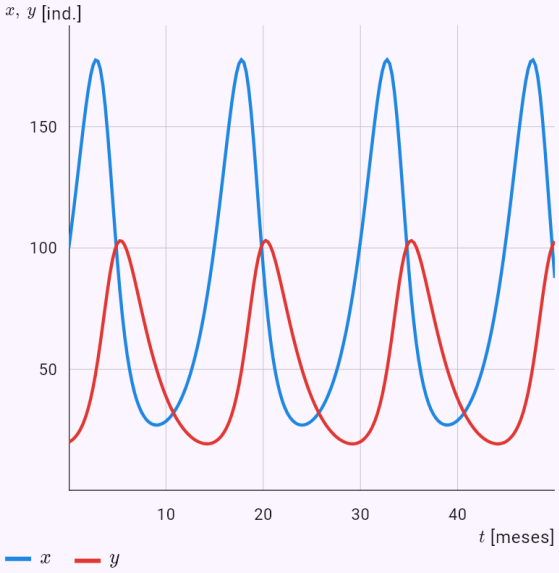
- El sistema no se resuelve con funciones elementales: lo resolvemos numéricamente con el método de Runge–Kutta de orden 4, paso $0{,}0125$, en $[0,\ 50]$

- › El método: método de Runge–Kutta de 4.º orden, 4000 pasos

- De la solución numérica: $T \approx 14{,}95\ \text{meses}$

Gráfica

En el tiempo | Plano de fases



Cómo cambian las magnitudes con el tiempo.

Recipiente cónico: tiempo de vaciado.

Enunciado: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

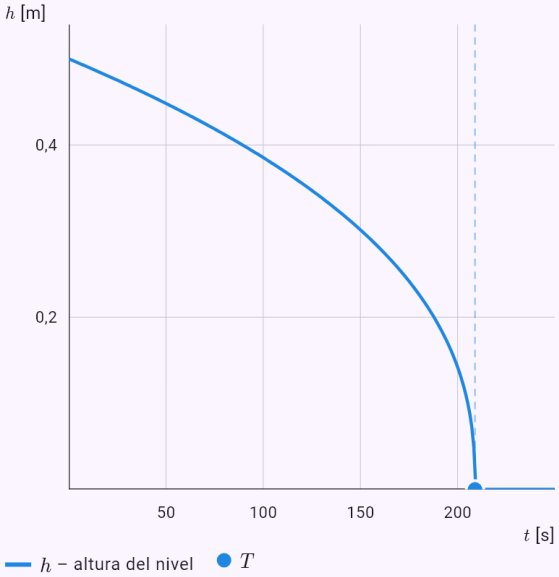
Resultado

$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

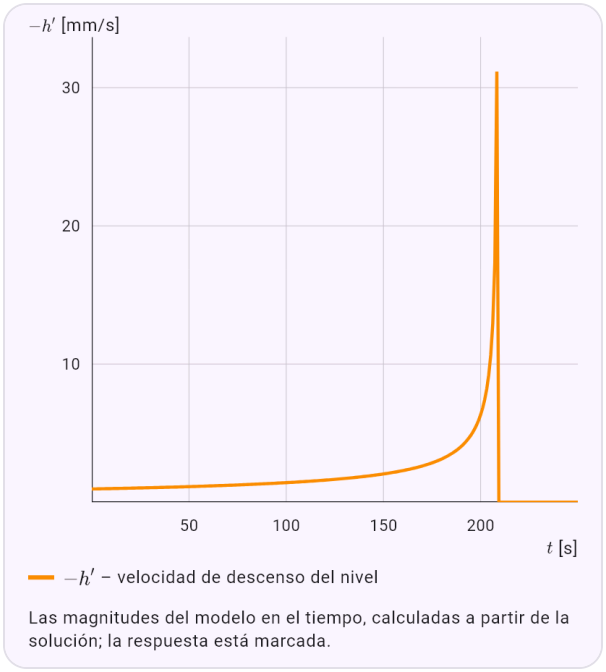
Pasos

- Buscamos T; datos
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Convertimos las unidades
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Un recipiente de revolución de la forma elegida tiene un orificio en el fondo. El líquido sale con la velocidad del balance de energía: la de Torricelli v = μ√(2gh), corregida por un orificio grande (término s²/S²), por un tubo de salida de longitud L (añade la altura L, pero también rozamiento según la viscosidad, laminar o turbulento) y, en un recipiente cerrado, por la depresión del aire sobre el nivel, que frena el caudal hasta detenerlo. En dt sale s·v·dt y el nivel baja dh, así dt = −S(h)/(s·v) dh y el tiempo sale integrando. El gráfico muestra el nivel, la velocidad del chorro y el caudal. Para r = R·(h/H)^p sin tubo ni tapa se muestra también la fórmula. Con r = k·h^(1/4) el nivel baja uniformemente, así funcionaban los relojes de agua. Ecuación del modelo
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Sección del recipiente a la altura h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Agua a 20 °C: $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Líquida a presión normal de 0 a 100 °C.
- Separamos las variables: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La velocidad del chorro depende del nivel de forma complicada, por eso la integral se calcula numéricamente.
- Para comparar, Torricelli sin la corrección por orificio grande: $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Despejamos la magnitud buscada: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Sustituimos: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Convertimos las unidades: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Gráfica







Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Aceite de un recipiente esférico por un tubo: nivel, velocidad de salida por el orificio, caudal y velocidad de descenso del nivel.

Enunciado: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

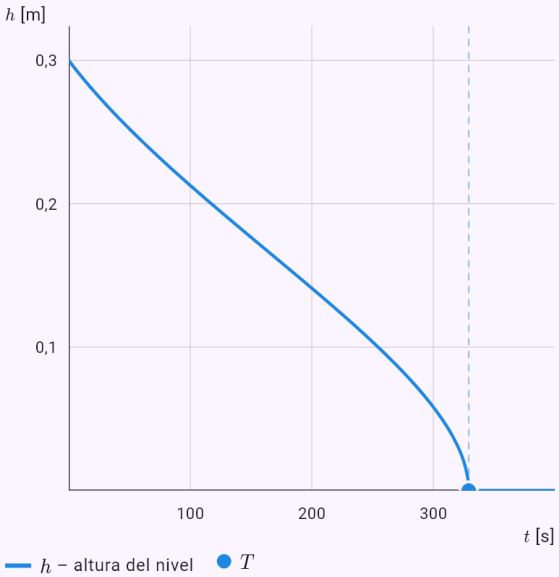
Resultado

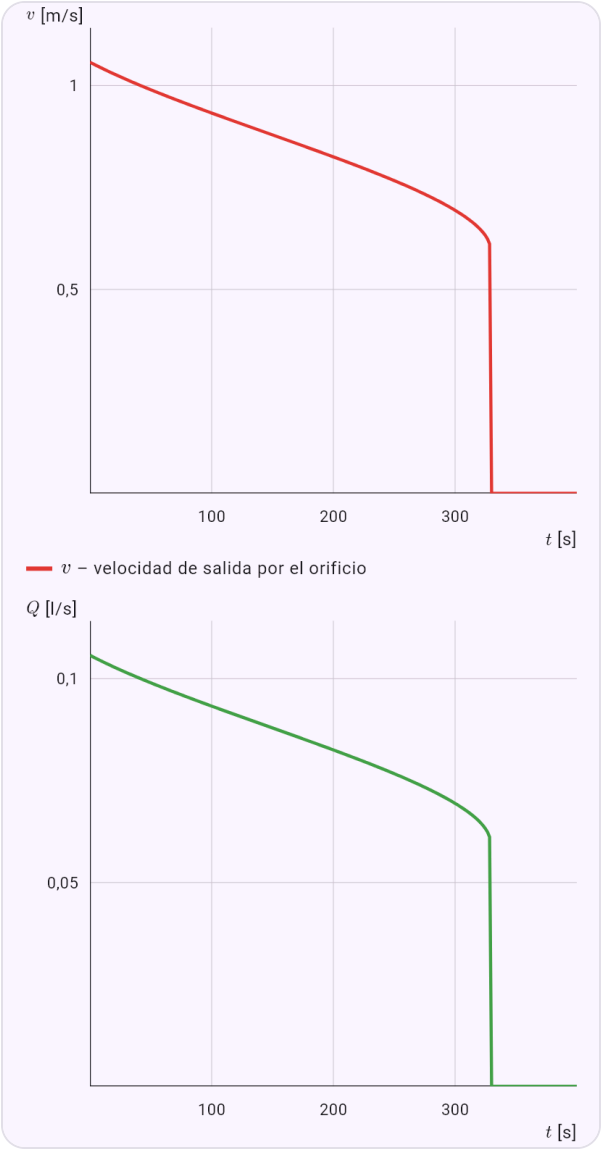
$$T \approx 5{,}48\,\text{min}$$

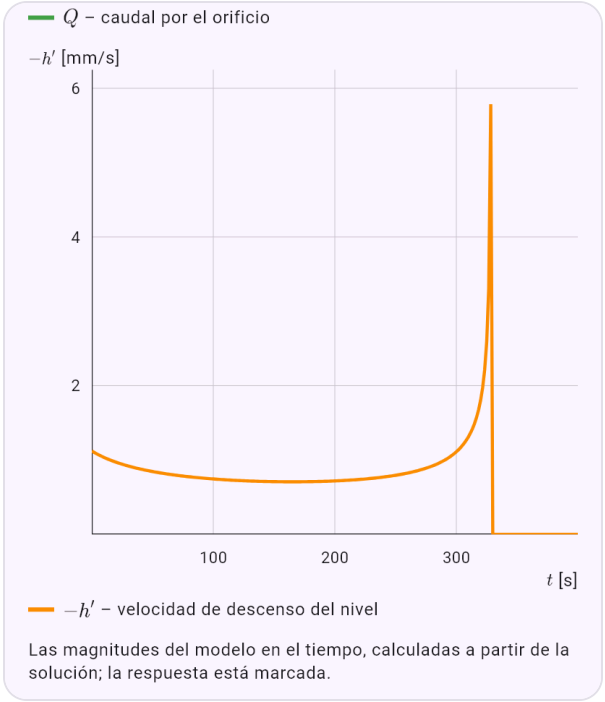
Pasos

- Buscamos T; datos
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Convertimos las unidades
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Un recipiente de revolución de la forma elegida tiene un orificio en el fondo. El líquido sale con la velocidad del balance de energía: la de Torricelli v = μ√(2gh), corregida por un orificio grande (término s²/S²), por un tubo de salida de longitud L (añade la altura L, pero también rozamiento según la viscosidad, laminar o turbulento) y, en un recipiente cerrado, por la depresión del aire sobre el nivel, que frena el caudal hasta detenerlo. En dt sale s·v·dt y el nivel baja dh, así dt = −S(h)/(s·v) dh y el tiempo sale integrando. El gráfico muestra el nivel, la velocidad del chorro y el caudal. Para r = R·(h/H)^p sin tubo ni tapa se muestra también la fórmula. Con r = k·h^(1/4) el nivel baja uniformemente, así funcionaban los relojes de agua. Ecuación del modelo
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Sección del recipiente a la altura h:
  $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Aceite de girasol a 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Solidifica hacia −17 °C y no hierve: por encima de 200 °C se descompone; la viscosidad baja mucho con la temperatura.
- Separamos las variables: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- La velocidad del chorro depende del nivel de forma complicada, por eso la integral se calcula numéricamente.
- Despejamos la magnitud buscada: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Sustituimos: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Convertimos las unidades: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

Gráfica







Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Forma del recipiente en que el nivel baja uniformemente.

Enunciado: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2];`

```
v=0.001[m_s])
```

Resultado

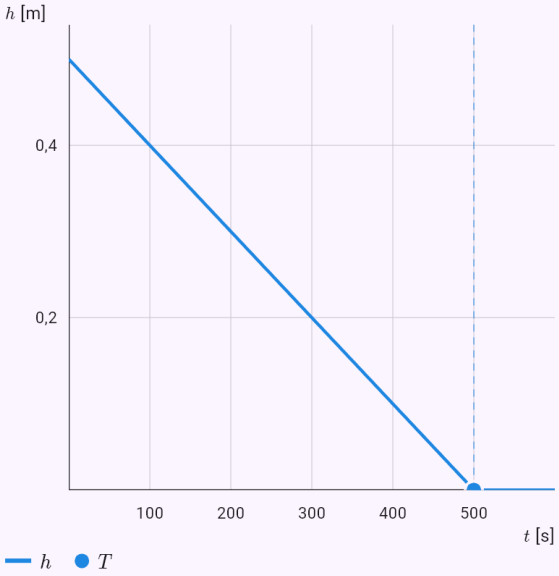
$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\text{cm}$$

Pasos

- Buscamos $r(h_0)$; datos
  $s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\text{cm}, \quad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$
- Convertimos las unidades
  $s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
- Un recipiente de revolución de la forma elegida tiene un orificio en el fondo. El líquido sale con la velocidad del balance de energía: la de Torricelli v = μ√(2gh), corregida por un orificio grande (término s²/S²), por un tubo de salida de longitud L (añade la altura L, pero también rozamiento según la viscosidad, laminar o turbulento) y, en un recipiente cerrado, por la depresión del aire sobre el nivel, que frena el caudal hasta detenerlo. En dt sale s·v·dt y el nivel baja dh, así dt = −S(h)/(s·v) dh y el tiempo sale integrando. El gráfico muestra el nivel, la velocidad del chorro y el caudal. Para r = R·(h/H)^p sin tubo ni tapa se muestra también la fórmula. Con r = k·h^(1/4) el nivel baja uniformemente, así funcionaban los relojes de agua. Ecuación del modelo: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- El nivel baja uniformemente si la sección es proporcional a √h, es decir r = k·h^(1/4). Esa forma tenían los relojes de agua.
- Sustituimos: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\text{m}$
- Convertimos las unidades:

$r(h_0) \approx 0{,}2446\,\text{m} = 24{,}46\,\text{cm}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

43. Física

Los cálculos de física están en la sección «Aplicaciones», área Física. El motor cohete tiene cinco modos: empuje, impulso específico, ecuación de Tsiolkovski, cohete de varias etapas y velocidad de salida a partir de la termodinámica de una tobera ideal.

El empuje se calcula con el caudal másico y la velocidad de salida, opcionalmente con el término de presión; la gráfica muestra entonces cómo crece con la altura en la atmósfera estándar. En la ecuación de Tsiolkovski se puede buscar el incremento de velocidad, el propulsante necesario, la masa inicial o final y la velocidad de salida. Los resultados son ideales, sin pérdidas por gravedad ni resistencia del aire.

Las leyes de Kepler tienen un formulario propio con cinco modos: elipse, áreas, posición en el tiempo, periodo y velocidad según la ecuación vis-viva. El gráfico dibuja la órbita a escala real y el cuerpo se mueve con el control deslizante o el botón de reproducción. En la segunda ley muestra sectores de colores barridos en tiempos iguales.

El formulario de influencia mutua calcula el baricentro, los puntos de Lagrange, las mareas, las resonancias orbitales y la precesión del perihelio. La gráfica del baricentro muestra ambos cuerpos alrededor del [[barycenter|baricentro]] B a escala real. Cuando el círculo del cuerpo mayor es invisible en el conjunto (el Sol alrededor del baricentro del Sol y Júpiter), el selector «Detalle del baricentro» lo muestra ampliado y, con el radio R, también el contorno del cuerpo: el baricentro queda justo sobre la superficie del Sol. Una historia célebre: Urano se apartaba de su trayectoria prevista y en 1846 Le Verrier calculó a partir de esas perturbaciones dónde debía estar un planeta desconocido. Neptuno se encontró casi exactamente allí.

El problema de los tres cuerpos se calcula numéricamente en unidades con G = 1: la solución periódica en forma de ocho, el problema pitagórico caótico, en el que dos ejecuciones casi iguales acaban separándose, y valores propios. La variación de la energía total comprueba la precisión.

La física nuclear en las aplicaciones es solo para uso pacífico: laboratorio, medicina y energía. El formulario Física nuclear calcula la actividad de una muestra, el equilibrio radiactivo, las ecuaciones de Bateman de una serie, la energía de enlace con un gráfico según el número másico, la energía de reacción y la energía del combustible frente al carbón.

El formulario Reactor nuclear muestra las generaciones de neutrones como sucesión geométrica, el periodo del reactor con neutrones retardados y el tamaño del núcleo en el modelo de difusión de un grupo, solo para redes moderadas (grafito, agua ligera).

La balística calcula el tiro parabólico para física escolar, deporte y caza. En el vacío hay fórmulas exactas con los pasos; con resistencia del aire, una solución numérica de Runge-Kutta que incluye viento

de frente y lateral, densidad del aire según la altura y fuerza de Coriolis. El gráfico muestra la vista lateral y la comparación con el vacío, y con deriva lateral también la vista superior. En proyectiles supersónicos el coeficiente de arrastre procede de una curva aproximada según el número de Mach. Solo se calcula el vuelo, no el efecto en el blanco, y no se incluye la deriva por rotación. El problema inverso halla para una distancia dada los dos ángulos de elevación, rasante y elevado.

Avión calcula prestaciones para la aviación civil y la enseñanza: vuelo horizontal con polar parabólica, carrera de despegue y aterrizaje numéricamente con viento y altitud, viraje y planeo. Un efecto suelo opcional reduce la resistencia inducida. El modelo no considera la compresibilidad del aire, así que en aviones de pasajeros a velocidad de crucero el resultado es solo orientativo. Las velocidades y longitudes también pueden darse en nudos y pies.

Reentrada en la atmósfera calcula numéricamente, por el método de Runge-Kutta, el paso de una nave por la atmósfera: la velocidad, el ángulo de trayectoria y la altura sobre una Tierra redonda con la atmósfera estándar. El resultado es un aterrizaje, un rebote al espacio o un límite superado, la aceleración máxima (comprobada con la fórmula de Allen y Eggers), el flujo de calor en el [[stagnationPoint|punto de estancamiento]] y la temperatura del escudo por [[radiativeEquilibrium|equilibrio radiativo]]. El modo Corredor de entrada halla por bisección los límites rasante e inclinado del ángulo de entrada: para el regreso desde la Luna el [[entryCorridor|corredor]] resulta de unos 2° de ancho, con una nota sobre el Apolo 13. Preajustes: Vostok, Apolo, Soyuz y el transbordador (con una nota objetiva sobre la pérdida del Columbia). El único control es un [[bankAngle|ángulo de alabeo]] constante; en el modelo la Tierra no gira. Hay una demostración interactiva, en la que se gira la sustentación durante el vuelo, en mathtrace.app, en «Pruébalo tú mismo».

Cuerpos en el agua es un formulario para la enseñanza y el uso civil: empuje y flotación, incluido un globo, presión y profundidad, ecuación de Bernoulli, hundimiento y ascenso con masa añadida, alcance y caída de un arpón de pesca deportiva, un vehículo sumergido propulsado, lastre y un barco. El coeficiente de resistencia de una esfera depende del número de Reynolds y la burbuja tiene su propia correlación. La resistencia del barco es la fricción según la línea ITTC-57 más un coeficiente residual dado, de modo que fuera del régimen de desplazamiento es solo orientativa. En el barco se puede activar una comparación con el ekranoplano KM: trabajo contra la resistencia por tonelada y kilómetro y gráfica de la potencia según la velocidad.

La fusión termonuclear tiene dos formularios, ambos solo para uso civil (centrales, laboratorios, el Sol y las estrellas). El formulario Fusión termonuclear calcula la energía de una reacción (D-T, D-D, D-^{3}He y la cadena p-p del Sol) con su reparto entre los productos, la energía del combustible comparada con la fisión del uranio y con el carbón, la altura de la [[coulombBarrier|barrera de Coulomb]] y el [[gamowPeak|pico de Gamow]]. Un reactor de fusión no puede descontrolarse como uno de fisión: la fusión no tiene masa crítica y, si algo falla, el plasma se enfría y la reacción se detiene sola.

El formulario Plasma de fusión calcula el [[lawsonCriterion|criterio de Lawson]] con un gráfico del triple producto necesario según la temperatura, la ganancia Q, la tasa de reacción ⟨σv⟩ como integral sobre la distribución de Maxwell con la regla de Simpson (comparada con el ajuste publicado de Bosch y Hale), la densidad de potencia de fusión, la pérdida por radiación de frenado y el radio de Larmor de una partícula cargada en un campo magnético. La app no calcula la dinámica del plasma (magnetohidrodinámica).

Los aceleradores de partículas tienen dos formularios. Cinemática relativista calcula el [[lorentzFactor|factor de Lorentz]], la velocidad, la energía y el momento a partir de la velocidad o de la energía cinética, y la dilatación del tiempo con el alcance de partículas inestables (muon, pion, kaon). El formulario Aceleradores de partículas compara la energía de colisión √s de haces enfrentados y de un blanco fijo, calcula el radio de la órbita y el campo necesario, y la pérdida por radiación sincrotrón. El menú rellena los valores del LHC, LEP o el Tevatron.

Ejemplos

Empuje del motor al nivel del mar y comparación con el vacío.

Enunciado: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa];`

```
pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)
```

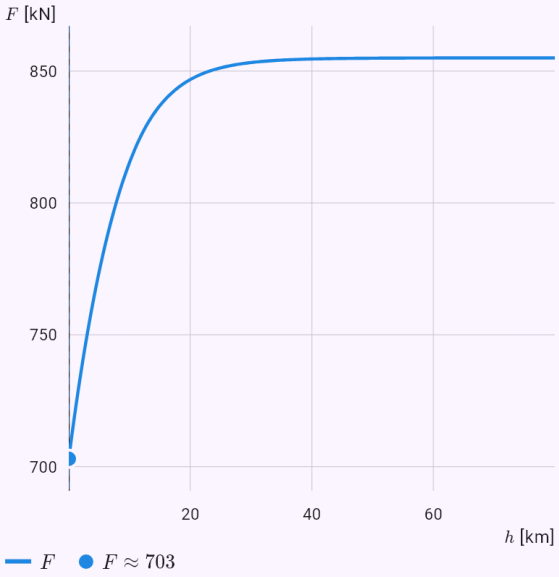
Resultado

$$F \approx 703\,\text{kN}$$

Pasos

- Buscamos F; datos
  $\dot{m} = 250\,\text{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\text{m/s}, \quad p_e = 70\,\text{kPa}, \quad p_a =$
- Convertimos las unidades
  $p_e = 70\,\text{kPa} = 70\,000\,\text{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\text{kPa} = 101\,300$
- Un cohete se impulsa expulsando masa: cada segundo sale una masa Δm/Δt a velocidad v_e y la conservación de la cantidad de movimiento da el empuje F = (Δm/Δt)·v_e. Si la presión del gas a la salida de la tobera p_e difiere de la ambiente p_a, se añade el término (p_e − p_a)·A_e; por eso el empuje crece con la altura. Ecuación del modelo: $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Término de presión del empuje
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\text{N}$
- El gas está sobreexpandido en la tobera (p_e < p_a): la presión ambiente reduce el empuje. Es típico en el despegue de un motor diseñado para gran altura.
- Término de cantidad de movimiento del empuje:
  $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\text{N}$
- Sustituimos: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\text{N}$
- Impulso específico
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\text{s}$$
- Empuje en el vacío: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\text{N}$
- Convertimos las unidades: $F \approx 703\,000\,\text{N} = 703\,\text{kN}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Velocidad de salida a partir del impulso específico de RP-1/LOX.

Enunciado: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Resultado

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos v_e; datos: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- El impulso específico I_sp = v_e/g_0 indica durante cuántos segundos 1 kg de propulsante puede dar un empuje igual al peso de 1 kg, y así compara propulsantes. Ecuación del modelo: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Gravedad estándar: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Despejamos la magnitud buscada: $v_e = I_{sp} g_0$
- Sustituimos: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Cuanto mayor es el impulso específico, menos propulsante gasta el motor para el mismo empuje. Valores típicos en el vacío: sólido ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Incremento de velocidad según la ecuación de Tsiolkovski.

Enunciado: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

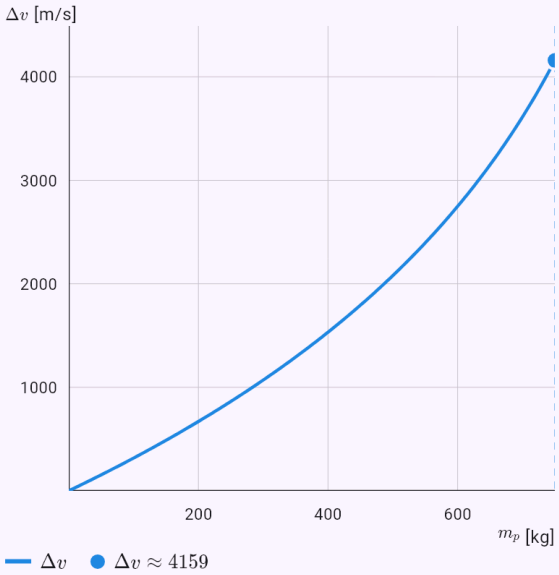
Resultado

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos Δv; datos: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- La cantidad de movimiento del propulsante expulsado acelera el cohete: integrando m·dv = −v_e·dm se obtiene la ecuación de Tsiolkovski Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Ecuación del modelo: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separamos las variables: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integramos ambos lados: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Sustituimos: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Razón de masas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Fracción de propulsante en la masa inicial: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Resultado ideal sin pérdidas por gravedad ni resistencia del aire. Para llegar a una órbita baja se necesitan en realidad unos 9,4 km/s.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Cuánto propulsante necesita 1 t de cohete para llegar a una órbita baja.

Enunciado: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

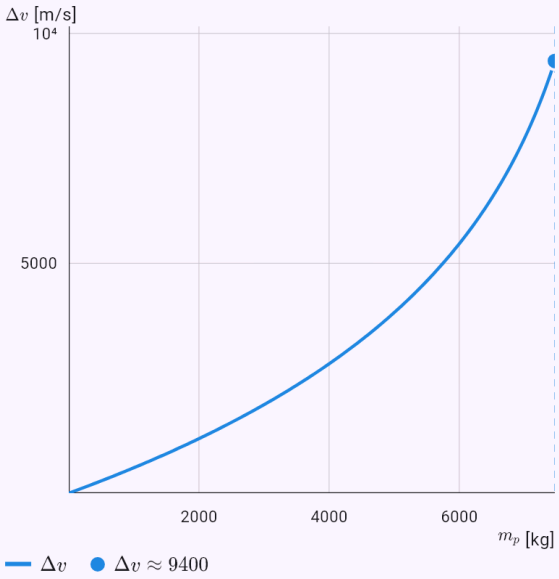
Resultado

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Pasos

- Buscamos m_p; datos: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- La cantidad de movimiento del propulsante expulsado acelera el cohete: integrando m·dv = −v_e·dm se obtiene la ecuación de Tsiolkovski Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Ecuación del modelo: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Separamos las variables: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Integramos ambos lados: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Despejamos la magnitud buscada: $m_p = m_0 - m_f = m_f \left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1 \right)$
- Sustituimos: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1 \right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Razón de masas: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Fracción de propulsante en la masa inicial: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Resultado ideal sin pérdidas por gravedad ni resistencia del aire. Para llegar a una órbita baja se necesitan en realidad unos 9,4 km/s.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Cohete de tres etapas de la clase Saturno V y la ganancia de las etapas.

Enunciado: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

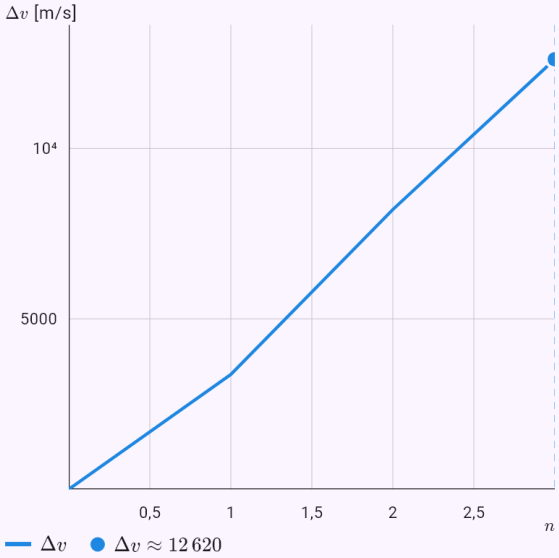
Resultado

$$\Delta v \approx 12\,620\ \mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos Δv; datos
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\ \mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\ \mathrm{t}, \quad I_{sp}$
- Convertimos las unidades
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\ \mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Cada etapa añade velocidad según la ecuación de Tsiolkovski y sus depósitos vacíos se desprenden, de modo que la siguiente ya no lleva masa inútil. Los incrementos de velocidad se suman. Ecuación del modelo: $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Gravedad estándar: $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$
- Incremento de velocidad de la etapa
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\ \mathrm{m/s}$
- Incremento de velocidad de la etapa
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\ \mathrm{m/s}$
- Incremento de velocidad de la etapa
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\ \mathrm{m/s}$
- Para comparar, una etapa con la misma masa y propulsante
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\ \mathrm{m/s}$
- Al desprender las etapas vacías el cohete gana $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\ \mathrm{m/s}$ más que una sola etapa con el mismo propulsante.
- Resultado ideal sin pérdidas por gravedad ni resistencia del aire. Para llegar a una órbita baja se necesitan en realidad unos 9,4 km/s.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Velocidad de salida de un motor de hidrógeno según la termodinámica de la tobera.

Enunciado: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one];`

`pr=1000[one]; mode=nozzle; propellant=hydrogen)`

Resultado

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos v_e; datos

  $$T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$$

- Convertimos las unidades:
  $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- La velocidad de salida viene de la termodinámica de una tobera ideal: crece con la temperatura de la cámara de combustión y disminuye con la masa molar de los gases. Ecuación del modelo

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Constante molar de los gases: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/mol\,K^{-1}}$
- Término de expansión

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Sustituimos

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

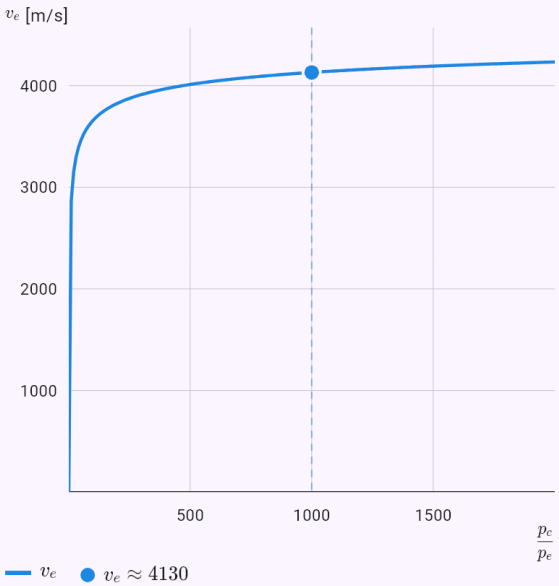
- Impulso específico: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Velocidad límite con expansión al vacío:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- La velocidad de salida crece con √(T/M); por eso el hidrógeno (gases ligeros) tiene el mayor impulso específico.

- Flujo isentrópico ideal; una tobera real alcanza alrededor del 92–98 % de este valor.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El perihelio del cometa Halley a partir del semieje mayor y la excentricidad.

Enunciado: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse;`

`body=halley)`

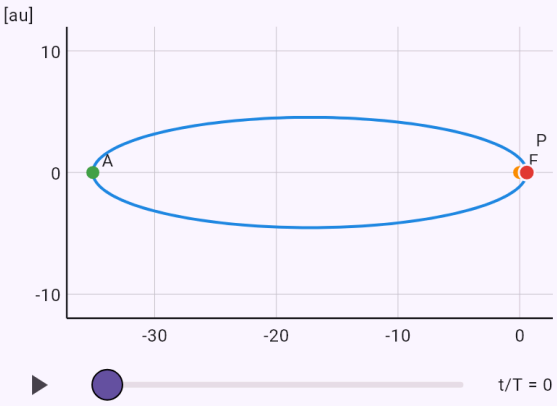
Resultado

$r_p \approx 0{,}586\,\text{au}$

Pasos

- Buscamos r_p; datos: $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671$
- Primera ley de Kepler: un planeta se mueve en una elipse con el cuerpo central en un foco. La distancia r depende del ángulo θ desde el perihelio; es mínima en el perihelio r_p = a(1 − e) y máxima en el afelio r_a = a(1 + e). La excentricidad e indica cuán alargada es la elipse.
  Ecuación del modelo: $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$
- Despejamos la magnitud buscada: $r_p = a(1-e)$
- Sustituimos: $r_p = 17{,}83(1 - 0{,}9671) \approx 0{,}586\,\text{au}$
- Distancia en el afelio: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\text{au}$

Gráfica



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

La velocidad de la Tierra en el afelio según la segunda ley de Kepler; sectores de igual tiempo.

Enunciado: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

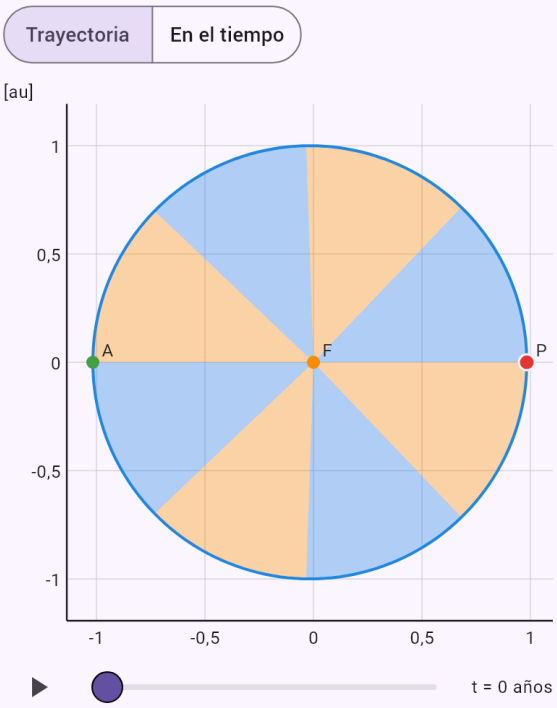
Resultado

$v_a \approx 29{,}29\,\text{km/s}$

Pasos

- Buscamos v_a; datos
  $r_p = 0{,}9833\,\text{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\text{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\text{km/s}$
- Segunda ley de Kepler: el radio vector desde el foco barre áreas iguales en tiempos iguales, porque se conserva el momento angular. La velocidad areolar es constante, de modo que un cuerpo es más rápido en el perihelio: v_p·r_p = v_a·r_a. Los sectores de colores del gráfico se recorrieron en el mismo tiempo y tienen la misma área. Ecuación del modelo:
  $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Despejamos la magnitud buscada: $v_a = v_p \dfrac{r_p}{r_a}$
- Sustituimos: $v_a = 30{,}29 \cdot \dfrac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\text{km/s}$
- Razón de velocidades: $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Un cuerpo es más rápido en el perihelio y más lento en el afelio; por eso la Tierra va más rápido en enero.

Gráfica



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

Dónde está el cometa Halley 10 años después del perihelio (método de Newton).

Enunciado: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr]; mode=position; body=halley)`

Resultado

$\theta \approx 168\,^\circ$

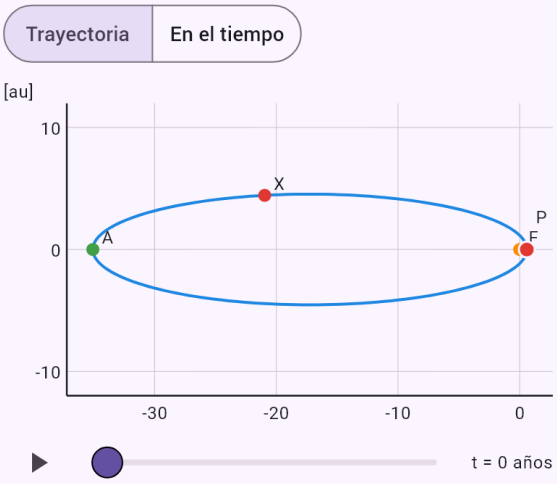
Pasos

- Buscamos θ; datos
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{años}, \quad t = 1$
- Dónde estará un cuerpo en el instante t lo da la ecuación de Kepler M = E − e·sen E. La anomalía media M crece uniformemente con el tiempo; la anomalía excéntrica E no puede expresarse con una fórmula, y se halla por el método de Newton. Ecuación del modelo:
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Anomalía media: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- La ecuación de Kepler no tiene solución en fórmulas; E se halla numéricamente.
- Iteración de Newton: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Paso: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Paso: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Paso: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Paso: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Paso: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Paso: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Paso: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Anomalía excéntrica: $E \approx 1{,}78021$
- Anomalía verdadera

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Distancia al foco: $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Gráfica



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

La altura de la órbita geoestacionaria según la tercera ley de Kepler.

Enunciado: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

Resultado

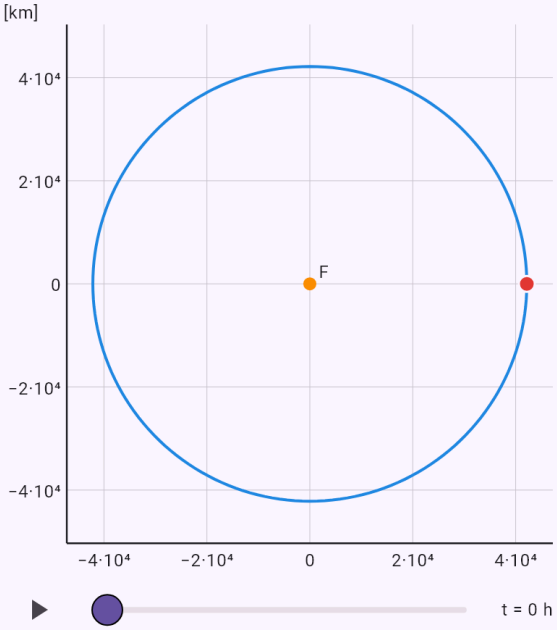
$h \approx 35\,790\,\text{km}$

Pasos

- Buscamos h; datos
  $T = 86\,160\,\text{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R = 6378\,\text{km}$
- Convertimos las unidades: $R = 6378\,\text{km} = 6\,378\,000\,\text{m}$
- Tercera ley de Kepler: la razón T²/a³ depende solo de la masa del cuerpo central. La órbita de una luna da así la masa del planeta, y un periodo requerido da la altura de la órbita, como la geoestacionaria. Ecuación del modelo:
  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Despejamos la magnitud buscada: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Sustituimos
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Despejamos la magnitud buscada: $h = a - R$
- Sustituimos:
  $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Vale para una masa orbitante despreciable frente a M; si no, aparece M + m.
- Convertimos las unidades:
  $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\text{m} = 35\,790\,\text{km}$

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

La velocidad del cometa Halley en el perihelio según la ecuación vis-viva.

Enunciado: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg];`

`mode=visviva; central=sun)`

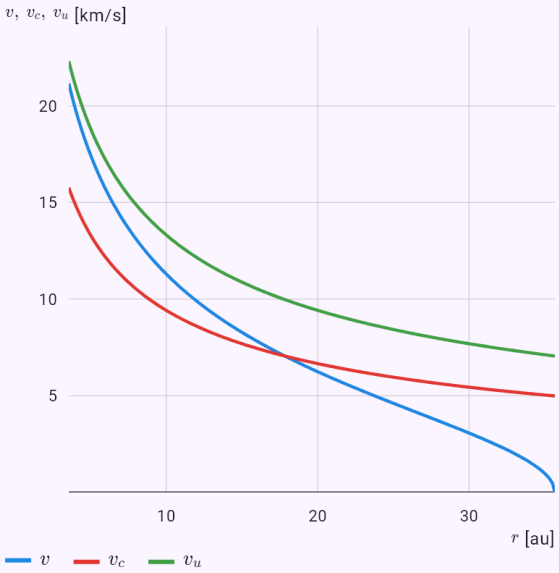
Resultado

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Pasos

- Buscamos v; datos
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Convertimos las unidades
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- La ecuación vis-viva v² = GM(2/r − 1/a) se deduce de la conservación de la energía y da la velocidad en cualquier punto de la órbita. La velocidad circular mantiene un cuerpo en una circunferencia; la de escape es √2 veces mayor y el cuerpo ya no regresa. Ecuación del modelo:
  $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Sustituimos
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Velocidad circular a esta distancia:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Velocidad de escape a esta distancia:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Convertimos las unidades:
  $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El baricentro del Sol y Júpiter está justo sobre la superficie del Sol; «Detalle del baricentro» muestra cómo el Sol gira a su alrededor.

Enunciado: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

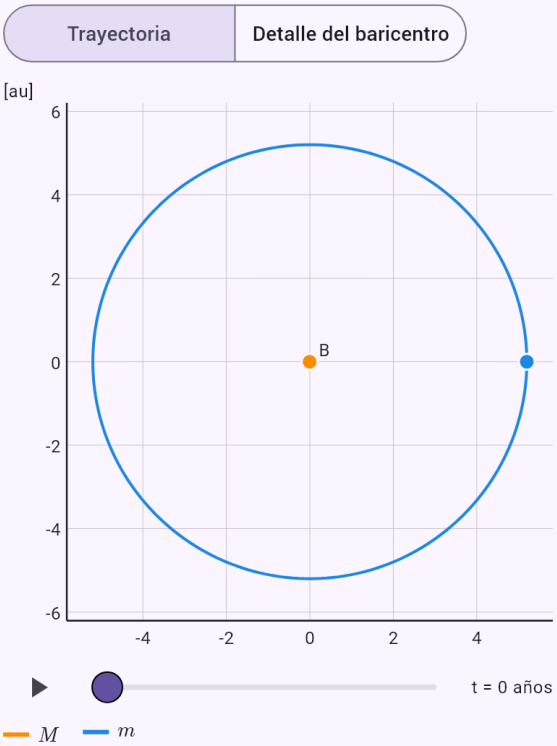
Resultado

$$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$$

Pasos

- Buscamos r_b; datos
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Convertimos las unidades
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- En realidad ambos cuerpos orbitan su centro de masas común (baricentro). El problema de dos cuerpos se reduce al movimiento de uno con la masa reducida, y en la tercera ley de Kepler aparece la suma M + m. El bamboleo de una estrella alrededor del baricentro delata exoplanetas. Ecuación del modelo
  $$r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$$
- Sustituimos
  $$r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$$
- Distancia del otro cuerpo al baricentro:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- El baricentro está fuera del cuerpo: $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. El cuerpo mayor describe un círculo visible.
- Convertimos las unidades:
  $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Gráfica



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

La distancia de L2, donde trabaja el telescopio James Webb.

Enunciado: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

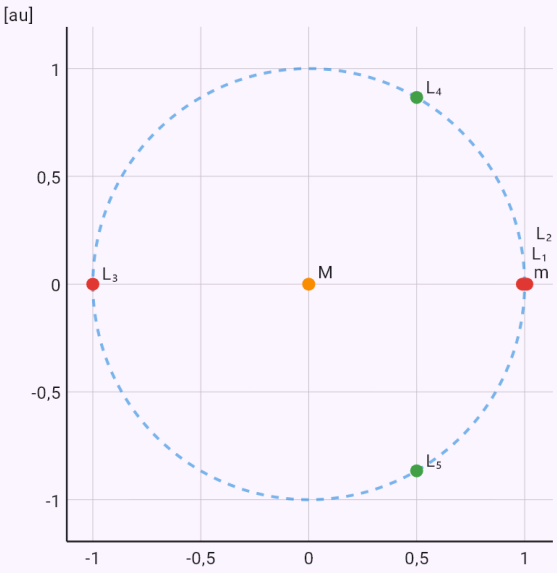
Resultado

$$r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mill. km}$$

Pasos

- Buscamos r_{L_2}; datos
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- En un sistema que gira con el cuerpo m hay cinco lugares donde se equilibran la gravedad de ambos cuerpos y la fuerza centrífuga. L1, L2 y L3 están en la recta que une los cuerpos y se hallan numéricamente; L4 y L5 forman triángulos equiláteros con ellos. Ecuación del modelo
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Razón de masas: $\mu = \dfrac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Aproximadamente para m pequeña:
  $$r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{mill. km}$$
- El punto de Lagrange es raíz de la ecuación sobre la recta que une los cuerpos y se halla por bisección.
- Exactamente de la ecuación: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{mill. km}$
- L1, L2 y L3 son inestables: un cuerpo debe mantener su lugar con correcciones, como el telescopio James Webb en L2.
- L4 y L5 son estables porque M/m > 25; en Júpiter se mantienen allí los troyanos.

Gráfica



Los cuerpos y los puntos notables a escala real.

La aceleración de marea causada por la Luna.

Enunciado: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km];`

`mode=tide; tideSource=moon)`

Resultado

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

Pasos

- Buscamos a_s; datos
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- Convertimos las unidades
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- La cara cercana de un cuerpo es atraída con más fuerza que la lejana. La aceleración de marea 2GMR/d³ disminuye con el cubo de la distancia; por eso la Luna influye más que el Sol, mucho más masivo. Ecuación del modelo: $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- Sustituimos
  $a_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$

- Exactamente, diferencia de gravedad en la cara cercana y en el centro
  $\dfrac{GM}{(d-R)^2} - \dfrac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- El cuerpo que atrae crea dos abultamientos de marea, en la cara cercana y en la opuesta, de ahí las dos pleamares por rotación.
- La fricción de marea frena la rotación: la Luna muestra siempre la misma cara a la Tierra y se aleja unos 3,8 cm al año.

La resonancia de las lunas Ío, Europa y Ganimedes.

Enunciado: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Resultado

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Pasos

- Datos: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Una resonancia orbital se da cuando los periodos están en razón de números enteros pequeños; los cuerpos se encuentran entonces con regularidad y se influyen. Ejemplos: Ío, Europa y Ganimedes 1 : 2 : 4, Neptuno y Plutón 2 : 3. Los huecos de Kirkwood del cinturón de asteroides están en resonancias con Júpiter. Ecuación del modelo: $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Mayor desviación de una razón entera: $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Los periodos están en razón de enteros pequeños: una resonancia orbital.

La precesión del perihelio de Mercurio según la relatividad general.

Enunciado: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km];`

```
e=0.2056[one]; mode=precession)
```

Resultado

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{años}$$

Pasos

- Buscamos $\Delta\varphi$; datos
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- Convertimos las unidades:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Según la relatividad general, el perihelio de una órbita gira lentamente 6πGM/(c²a(1 − e²)) por vuelta. En Mercurio son 43" por siglo, la diferencia que la mecánica newtoniana no pudo explicar. Ecuación del modelo:
  $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Giro por vuelta
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Vueltas en 100 años: $N = \dfrac{100\,\text{años}}{T} \approx 415{,}3$
- Sustituimos: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{años}$
- La mecánica newtoniana predice menos giro para Mercurio; los 43" por siglo restantes los explicó la relatividad general.

La solución periódica en forma de ocho de tres cuerpos iguales.

Enunciado: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Resultado

$$E \approx -1{,}28714$$

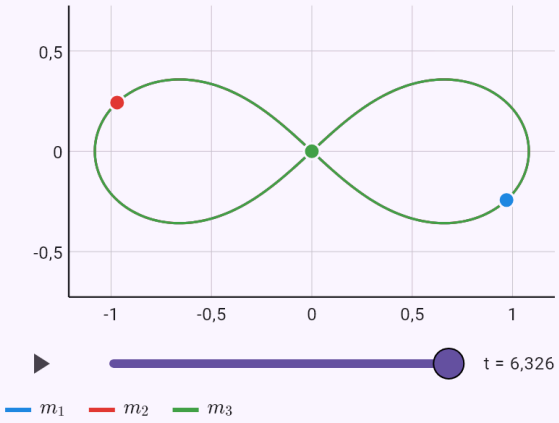
Pasos

- Buscamos E; datos: $t_k = 6{,}326$
- En general, tres cuerpos no tienen solución en fórmulas. Pero hay órbitas periódicas excepcionales: en la solución en forma de ocho (Chenciner y Montgomery, 2000) tres cuerpos iguales recorren una sola curva con forma de 8. Ecuación del modelo

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- En general, tres cuerpos no tienen solución en fórmulas; el movimiento se calcula numéricamente, en unidades con G = 1.
- Número de pasos de cálculo: $N = 2748$
- Energía total: $E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$
- Cambio relativo de energía (control de precisión): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$
- Tres cuerpos iguales recorren una curva con forma de 8 y vuelven a su lugar tras un periodo.
- Mayor distancia al inicio tras un periodo: $\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Gráfica



Los cuerpos a escala real. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el movimiento.

Caos: cuándo se separan dos ejecuciones casi iguales.

Enunciado: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Resultado

$$t_s \approx 42{,}9$$

Pasos

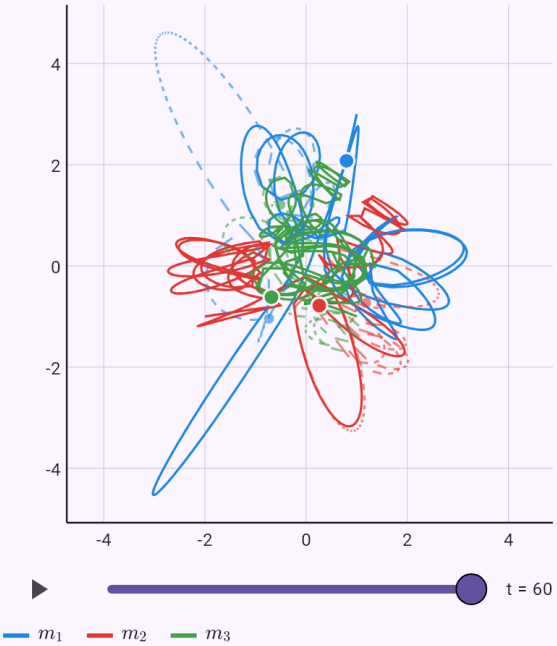
- Buscamos t_s; datos: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- El problema de los tres cuerpos es caótico: un cambio mínimo al principio crece hasta que las trayectorias no tienen nada en común. El problema pitagórico con masas 3, 4 y 5 se calcula dos veces, la segunda con una pequeña desviación δ. Ecuación del modelo

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- En general, tres cuerpos no tienen solución en fórmulas; el movimiento se calcula numéricamente, en unidades con G = 1.
- Número de pasos de cálculo: $N = 52\,307$
- Energía total: $E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$
- Cambio relativo de energía (control de precisión): $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$
- Se calcula también una segunda ejecución desviada $\delta = 0{,}001$. Las líneas discontinuas son esa ejecución; su separación muestra el caos. Una recta del logaritmo en el tiempo indica crecimiento exponencial.
- En el instante t_s la posición de algún cuerpo difiere en más de 1 entre ambas ejecuciones.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Las líneas continuas y discontinuas son dos ejecuciones con un inicio mínimamente distinto.

La actividad de 1 g de radio, aproximadamente un curie.

Enunciado: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

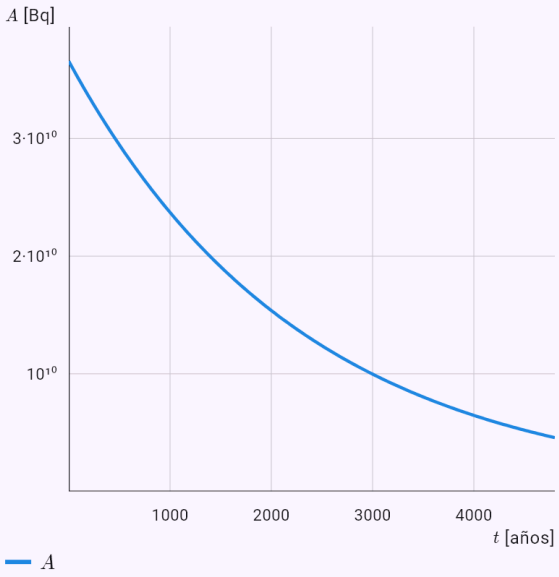
Resultado

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Pasos

- Buscamos A; datos:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{años}$
- Convertimos las unidades:
  $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{años} = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- La actividad A = λN indica cuántos núcleos se desintegran por segundo. El número de núcleos N se obtiene de la masa, la masa molar y la constante de Avogadro; la constante de desintegración λ, del periodo de semidesintegración. Ecuación del modelo:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \dfrac{m}{M} N_A$
- En un periodo la cantidad se reduce a la mitad – constante de desintegración:
  $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Número de núcleos:
  $N = \dfrac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Sustituimos
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Un becquerel es una desintegración por segundo. La unidad histórica curie es aproximadamente la actividad de 1 g de radio, 3,7·10¹⁰ Bq.

Gráfica



Cómo cambian las magnitudes con el tiempo.

La razón de actividades en un generador Mo-99 / Tc-99m de uso hospitalario.

Enunciado: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

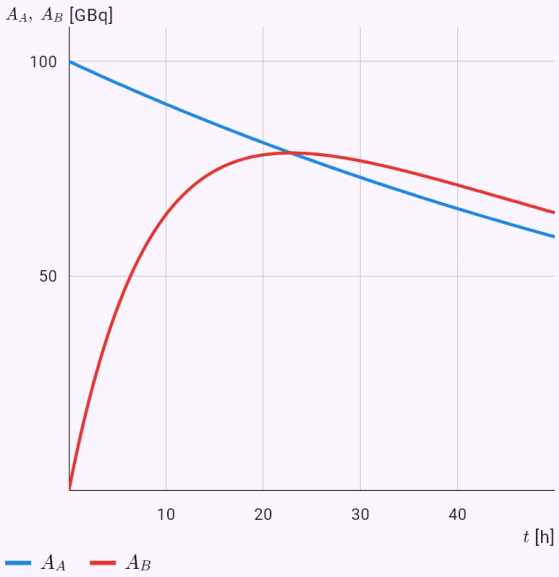
Resultado

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Pasos

- Buscamos $\frac{A_B}{A_A}$; datos:
  $A_{A,0} = 100\,\text{GBq}, \quad T_A = 66\,\text{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\text{h}$
- Cuando un nucleido hijo de vida corta surge de un padre de vida larga, su actividad alcanza a la del padre y luego la sigue en una razón fija. En esto se basan los generadores de radionucleidos de los hospitales.
  Ecuación del modelo
  $$A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$
- En un periodo la cantidad se reduce a la mitad – constante de desintegración:
  $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$$
- Sustituimos: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Equilibrio transitorio: tras varias semividas del hijo, la razón de actividades es constante.

Gráfica



Cómo cambian las magnitudes con el tiempo.

Una serie de desintegración de tres miembros según las ecuaciones de Bateman.

Enunciado: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

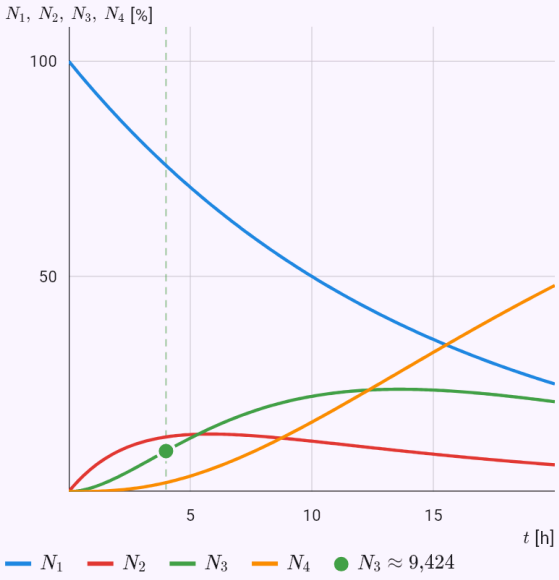
Resultado

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Pasos

- Buscamos N_n; datos:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\mathrm{h}, \quad t = 4\,\mathrm{h}$
- Las ecuaciones de Bateman describen una serie de desintegración: cada miembro surge del anterior y se desintegra en el siguiente. Es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con solución cerrada. Ecuación del modelo: $N_k' = \lambda_{k-1} N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- En un periodo la cantidad se reduce a la mitad – constante de desintegración
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Despejamos la magnitud buscada
  $$N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j} (\lambda_l - \lambda_j)}$$
- Sustituimos: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- El gráfico muestra también el producto final estable; la suma de todos los miembros es constante.

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

La energía de enlace por nucleón del hierro-56.

Enunciado: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

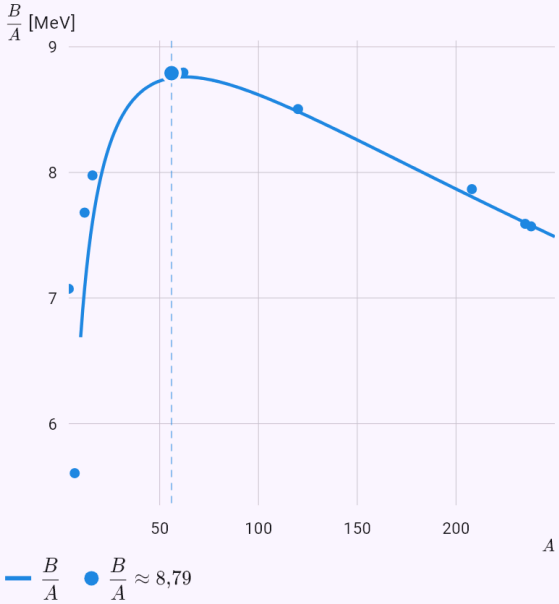
Resultado

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Pasos

- Buscamos $\frac{B}{A}$; datos:
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Un núcleo pesa menos que sus protones y neutrones libres. Por E = mc², la diferencia Δm corresponde a la energía de enlace. Su curva por nucleón tiene el máximo cerca del hierro; por eso liberan energía tanto la fisión de núcleos pesados como la fusión de los ligeros. Ecuación del modelo:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Defecto de masa
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Equivalente energético: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Sustituimos: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Energía de enlace por nucleón: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La energía de la fisión del uranio-235.

Enunciado: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Resultado

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Pasos

- La energía de reacción Q es la diferencia de masas antes y después, convertida con E = mc². Una Q positiva significa que se libera energía. Ecuación del modelo: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reacción: ${}^{235}\mathrm{U} + n \to {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Suma de masas: $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Sustituimos: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Esta energía se libera de inmediato; con las desintegraciones de los productos de fisión son unos 200 MeV por fisión.

Cuánto carbón sustituye 1 g de uranio-235.

Enunciado: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg]; mode=fuel)`

Resultado

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Pasos

- Buscamos m_c; datos $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- La masa del combustible da el número de núcleos y la energía de una fisión da la energía total, que se puede comparar con la combustión de carbón. Ecuación del modelo: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Número de núcleos: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Sustituimos $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Sustituimos $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Cálculo ideal: un reactor real aprovecha solo un pequeño porcentaje del combustible y convierte alrededor de un tercio del calor en electricidad.

El número de neutrones tras 10 generaciones con k = 1,05.

Enunciado: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

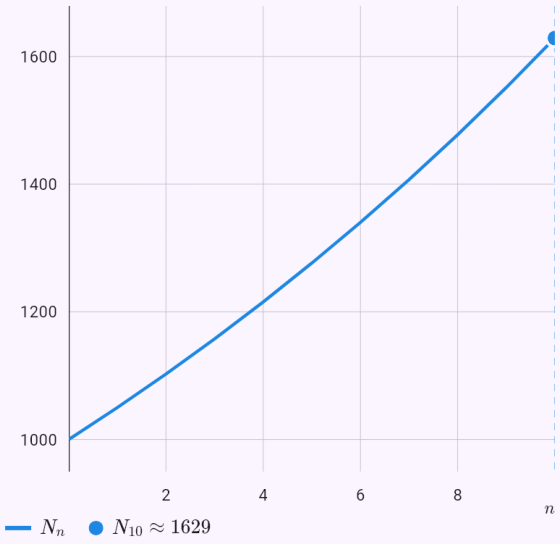
Resultado

$$N_n \approx 1629$$

Pasos

- Buscamos N_n; datos: $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- El factor de multiplicación k indica cuántos neutrones de la generación siguiente causa un neutrón. El número de neutrones es la sucesión geométrica N_0k^n: con k < 1 la reacción se extingue, con k = 1 es estable y con k > 1 crece. Ecuación del modelo: $N_n = N_0k^n$
- Estado supercrítico: k > 1, la potencia crece. Un reactor entra en este estado solo brevemente y de forma mínima, cuando debe aumentar la potencia.
- Sustituimos: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La suma de todas las generaciones en estado subcrítico.

Enunciado: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

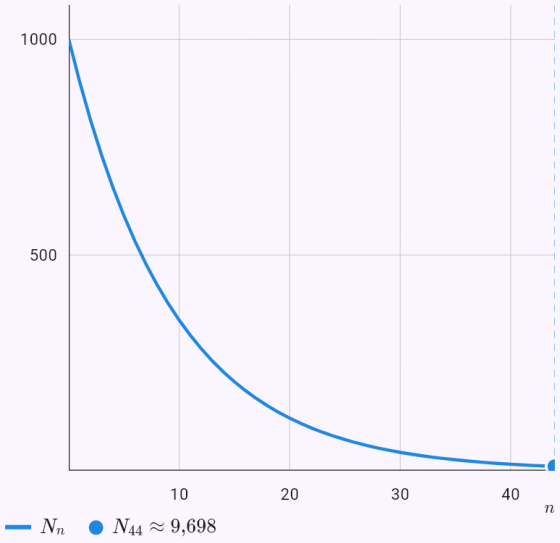
Resultado

$$S \approx 10\,000$$

Pasos

- Buscamos S; datos: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- El factor de multiplicación k indica cuántos neutrones de la generación siguiente causa un neutrón. El número de neutrones es la sucesión geométrica N_0k^n: con k < 1 la reacción se extingue, con k = 1 es estable y con k > 1 crece. Ecuación del modelo: $N_n = N_0k^n$
- Estado subcrítico: k < 1, la reacción se extingue.
- Despejamos la magnitud buscada:
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$$
- Sustituimos: $S = \dfrac{1000}{1 - 0{,}9} \approx 10\,000$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El periodo del reactor con neutrones retardados.

Enunciado: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one];`

`tau=13[s]; mode=kinetics)`

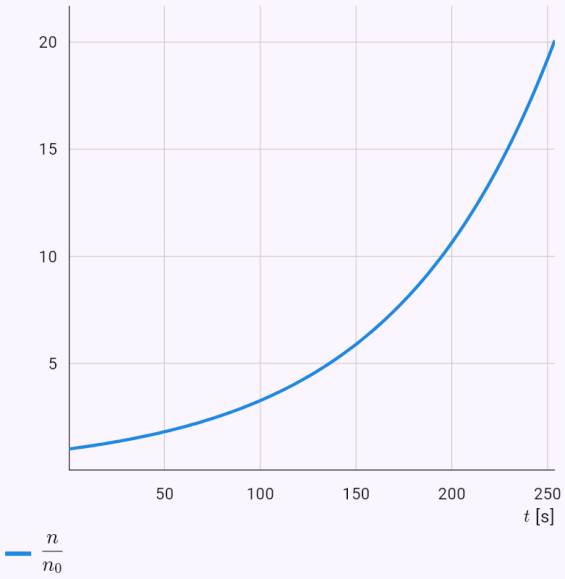
Resultado

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Pasos

- Buscamos T; datos
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- La potencia de un reactor cambia exponencialmente con el periodo T = ℓ/(k − 1). Los neutrones retardados alargan el tiempo medio de generación unas mil veces, y por eso un reactor se puede controlar. Ecuación del modelo: $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \dfrac{\ell}{k-1}$
- Reactividad: $\rho = \dfrac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Sustituimos: $T_p = \dfrac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Tiempo medio de generación con neutrones retardados: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Sustituimos: $T = \dfrac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Sin neutrones retardados el periodo sería una fracción de segundo. Gracias a ellos, las barras de control tienen tiempo de responder.
- La potencia crece con este periodo.

Gráfica



Cómo cambian las magnitudes con el tiempo.

El radio de un núcleo esférico de grafito.

Enunciado: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=sphere)`

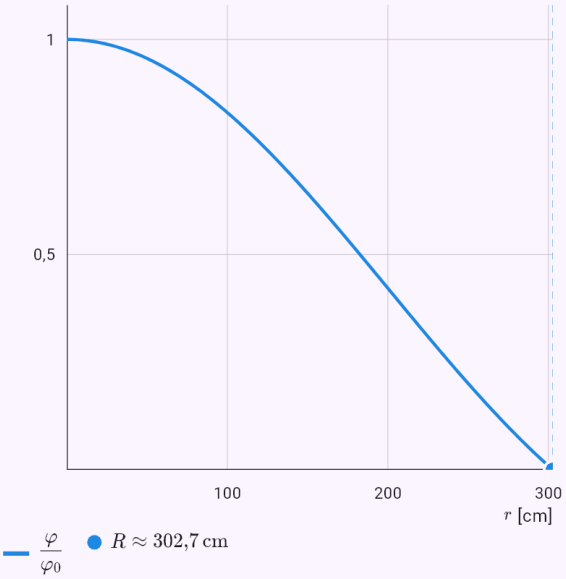
Resultado

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Pasos

- Buscamos R; datos: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- En el modelo de difusión de un grupo, la forma del flujo neutrónico debe cumplir ∇²φ + B²φ = 0. El tamaño del núcleo del reactor resulta de que el flujo se anule en el borde. Es un problema de autovalores, pensado para las redes moderadas de los reactores de potencia. Ecuación del modelo: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Parámetro geométrico: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Ecuación con simetría esférica: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Sustitución: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Condición de contorno: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Sustituimos: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Modelo de difusión de un grupo sin reflector: los reactores reales tienen reflector y por eso son más pequeños. Una forma general lleva a una ecuación en derivadas parciales.
- Convertimos las unidades: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Arista de un núcleo de grafito cúbico.

Enunciado: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

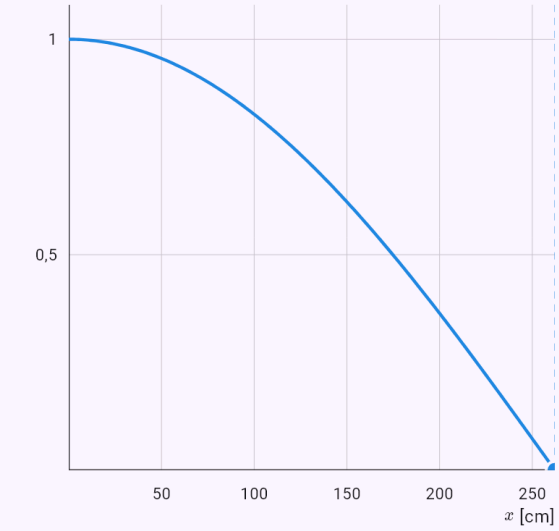
Resultado

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

Pasos

- Buscamos a; datos: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- En el modelo de difusión de un grupo, la forma del flujo neutrónico debe cumplir ∇²φ + B²φ = 0. El tamaño del núcleo del reactor resulta de que el flujo se anule en el borde. Es un problema de autovalores, pensado para las redes moderadas de los reactores de potencia. Ecuación del modelo: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Parámetro geométrico:
  $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Separación de variables en x, y, z
  $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- Sustituimos
  $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$
- Modelo de difusión de un grupo sin reflector: los reactores reales tienen reflector y por eso son más pequeños. Una forma general lleva a una ecuación en derivadas parciales.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Barra de cobre a 100 °C con los extremos a 20 °C: el centro tras 10 minutos.

Enunciado: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Resultado

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

Pasos

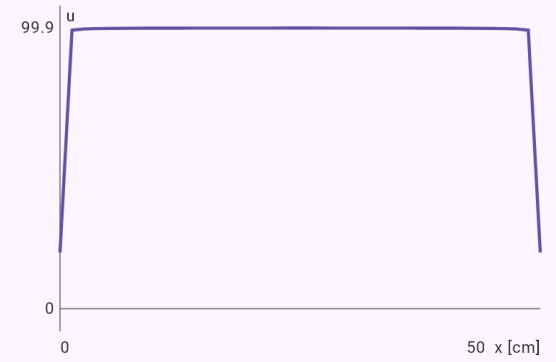
- Buscamos T; datos
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e =$
- Convertimos las unidades
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- La temperatura en una barra sigue la ecuación del calor T_t = α·T_xx; la difusividad térmica α = λ/(ρc) indica lo rápido que se iguala la temperatura. Al principio la barra tiene en todas partes la temperatura T_0; desde t = 0 sus extremos se mantienen a T_e (o un extremo está aislado). La solución por separación de variables es una serie de Fourier; cada término decae exponencialmente, el primero más despacio, con la constante de tiempo τ. Ambos extremos se mantienen a T_e; el centro de la barra conserva su temperatura más tiempo. Ecuación del modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Solución por separación de variables (serie de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Constante de tiempo del término más lento
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Despejamos la magnitud buscada

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$$

- Suma de la serie en el punto: $S \approx 0{,}07967$
- Sustituimos: $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



t = 0 min

La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Barra de acero con un extremo aislado: cuánto tarda en quedar un 5 % de la diferencia de temperatura.

Enunciado: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

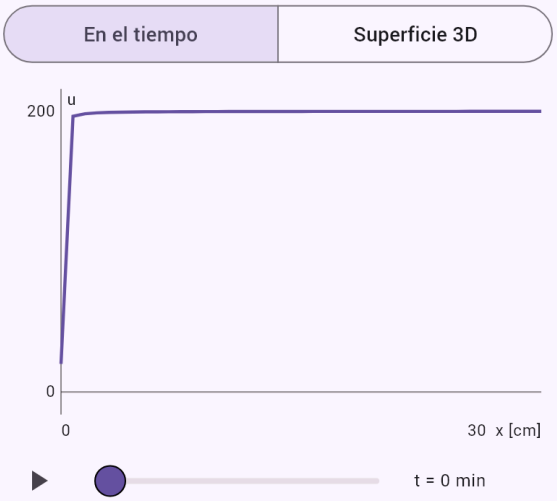
Resultado

$$t \approx 168{,}2\,\text{min}$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Convertimos las unidades
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- La temperatura en una barra sigue la ecuación del calor T_t = α·T_xx; la difusividad térmica α = λ/(ρc) indica lo rápido que se iguala la temperatura. Al principio la barra tiene en todas partes la temperatura T_0; desde t = 0 sus extremos se mantienen a T_e (o un extremo está aislado). La solución por separación de variables es una serie de Fourier; cada término decae exponencialmente, el primero más despacio, con la constante de tiempo τ. El extremo x = 0 se mantiene a T_e y el extremo x = L está aislado (no pasa calor): la barra se comporta como la mitad de una barra el doble de larga; el extremo aislado conserva su temperatura más tiempo. Ecuación del modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Solución por separación de variables (serie de Fourier)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k -}{2}$
- Constante de tiempo del término más lento
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Despejamos la magnitud buscada
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- Sustituimos: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- El extremo aislado es el punto más caliente. Al poco tiempo domina el primer término de la serie, así que basta su decaimiento; el tiempo exacto sale de toda la serie.
- Convertimos las unidades: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Placa de cobre de 30 × 20 cm a 100 °C con los bordes a 20 °C: la temperatura en el centro tras 2 minutos.

Enunciado: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

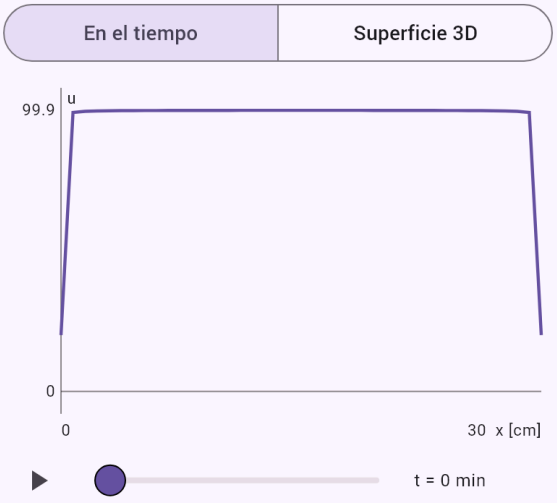
Resultado

$$T \approx 20{,}87\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Pasos

- Buscamos T; datos
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Convertimos las unidades
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- La temperatura en una placa rectangular a × b sigue la ecuación del calor T_t = α(T_xx + T_yy). La placa empieza a T_0 en todas partes y desde t = 0 sus bordes se mantienen a T_e. El problema se separa en dos barras: la fracción restante de la diferencia de temperaturas es el producto de las series de una barra de longitud a y otra de longitud b; por eso una placa se enfría más deprisa que cualquiera de las dos barras. El centro conserva su temperatura más tiempo. Ecuación del modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separación en dos barras: producto de dos series de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Constante de tiempo del término más lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Sumas de ambas series en el punto:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Sustituimos
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^{\circ}\mathrm{C}$
- La gráfica muestra la temperatura a lo largo de la recta:
  $y = 10\,\mathrm{cm}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Losa de hormigón con un borde aislado: cuántas horas hasta que quede el 5 % de la diferencia de temperaturas.

Enunciado: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Resultado

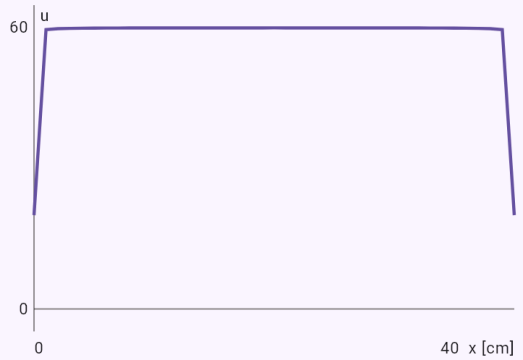
$$t \approx 11{,}35\,\text{h}$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $\alpha = 0{,}69\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad a = 40\,\text{cm}, \quad b = 20\,\text{cm}, \quad T_0 = 60$
- Convertimos las unidades
  $\alpha = 0{,}69\,\text{mm}^2/\text{s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad a = 40\,\text{cm} = 0{,}4$
- La temperatura en una placa rectangular a × b sigue la ecuación del calor T_t = α(T_xx + T_yy). La placa empieza a T_0 en todas partes y desde t = 0 tres bordes se mantienen a T_e, mientras que el borde y = b está aislado (no pasa calor). El problema se separa en dos barras; el borde aislado actúa como eje de simetría de una placa el doble de alta. El punto medio del borde aislado conserva su temperatura más tiempo. Ecuación del modelo
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Separación en dos barras: producto de dos series de Fourier
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Constante de tiempo del término más lento
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)} \approx$
- Despejamos la magnitud buscada
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Sustituimos: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\text{s}$
- Lo más caliente es el punto medio del borde aislado. Al cabo de un rato domina el producto de los primeros términos de ambas series (16/π²)·e^(−t/τ), así que basta su atenuación; el tiempo exacto sale de las series completas.
- La gráfica muestra la temperatura a lo largo de la recta: $y = 20\,\text{cm}$
- Convertimos las unidades: $t \approx 40\,870\,\text{s} = 11{,}35\,\text{h}$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



t = 0 h

La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Cuerda mi aguda de una guitarra: frecuencia fundamental.

Enunciado: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

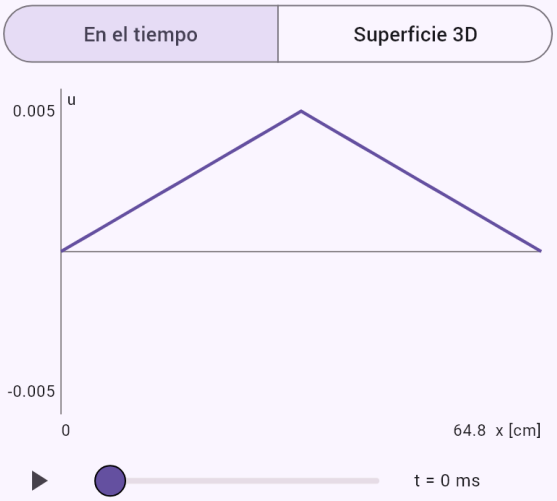
Resultado

$$f_1 \approx 327{,}4\,\text{Hz}$$

Pasos

- Buscamos f_1; datos:
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}$
- Convertimos las unidades
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
- Una cuerda tensa con los extremos fijos obedece la ecuación de ondas u_tt = c²·u_xx; la velocidad de la onda c = √(F/μ) la dan la tensión F y la densidad lineal μ. La separación de variables da ondas estacionarias sin(nπx/L) con frecuencias f_n = n·c/(2L). Una cuerda pulsada tiene forma de triángulo: se desarrolla en serie de Fourier y cada armónico vibra a su propia frecuencia. Ecuación del modelo
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Velocidad de la onda:
  $$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$$
- Modos de la cuerda (ondas estacionarias)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Sustituimos: $f_1 = \dfrac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\text{Hz}$
- Las frecuencias superiores son múltiplos enteros de la fundamental (armónicos); por eso una cuerda tiene una altura de sonido clara.

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Cuerda pulsada: desplazamiento en el centro tras 1 ms.

Enunciado: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

`x=32.4[cm]; t=1[ms])`

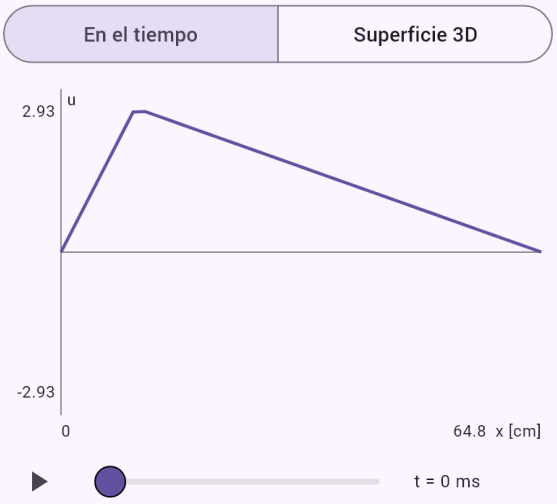
Resultado

$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

Pasos

- Buscamos u; datos
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- Convertimos las unidades
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/}$
- Una cuerda tensa con los extremos fijos obedece la ecuación de ondas u_tt = c²·u_xx; la velocidad de la onda c = √(F/μ) la dan la tensión F y la densidad lineal μ. La separación de variables da ondas estacionarias sin(nπx/L) con frecuencias f_n = n·c/(2L). Una cuerda pulsada tiene forma de triángulo: se desarrolla en serie de Fourier y cada armónico vibra a su propia frecuencia.
  Ecuación del modelo
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Velocidad de la onda:
  $$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$$
- Modos de la cuerda (ondas estacionarias)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Cuerda pulsada: serie de Fourier
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Sustituimos: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$
- Tras un periodo la forma de la cuerda se repite:
  $T = \frac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$
- Convertimos las unidades:
  $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Tambor: frecuencia del modo (1, 1) con un diámetro nodal.

Enunciado: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2];`

```
m=1[one]; n=1[one])
```

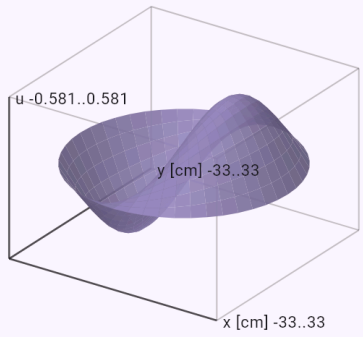
Resultado

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\text{Hz}$$

Pasos

- Buscamos f_{mn}; datos
  $a = 33\,\text{cm}, \quad T = 3000\,\text{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\text{kg/m}^2, \quad m =$
- Convertimos las unidades: $a = 33\,\text{cm} = 0{,}33\,\text{m}$
- Una membrana circular fija en el borde (el parche de un tambor) obedece la ecuación de ondas u_tt = c²·Δu con velocidad c = √(T/σ). En coordenadas polares las variables se separan: la parte angular es cos(mφ) y la radial una función de Bessel J_m(kr). La condición en el borde J_m(ka) = 0 da k = j_mn/a, donde j_mn es la n-ésima raíz de J_m, y las frecuencias f_mn = j_mn·c/(2πa). El modo (m, n) tiene m diámetros nodales y n − 1 círculos nodales. Ecuación del modelo
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a, \varphi, t) = 0$$
- Velocidad de la onda en la membrana:
  $$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\text{m/s}$$
- Separación en coordenadas polares: ecuación de Bessel
  $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- El borde de la membrana está fijo:
  $$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$
- Sustituimos: $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\text{Hz}$
- Los modos superiores no son múltiplos enteros del fundamental. Por eso un tambor no tiene una altura tan clara como una cuerda.
  $$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Alcance de un tiro en el vacío.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Resultado

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

Pasos

- Buscamos R; datos: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Sin resistencia del aire, el movimiento se separa en dos independientes: uniforme en horizontal y uniformemente acelerado en vertical. La trayectoria es una parábola y todos los valores tienen fórmula exacta. Ecuación del modelo: $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Componentes de la velocidad inicial

  $v_{0x} = 20\cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$

- Tiempo de vuelo

$$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$

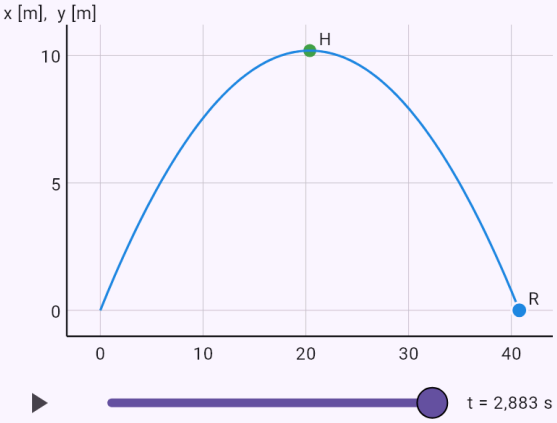
- Despejamos la magnitud buscada: $R = v_{0x} T$
- Sustituimos: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Con igual altura de salida y de llegada valen las fórmulas escolares

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
$$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$
$$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

- El alcance máximo se da a 45°; los ángulos α y 90° − α dan el mismo alcance.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Velocidad de llegada de un tiro desde una altura.

Enunciado: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

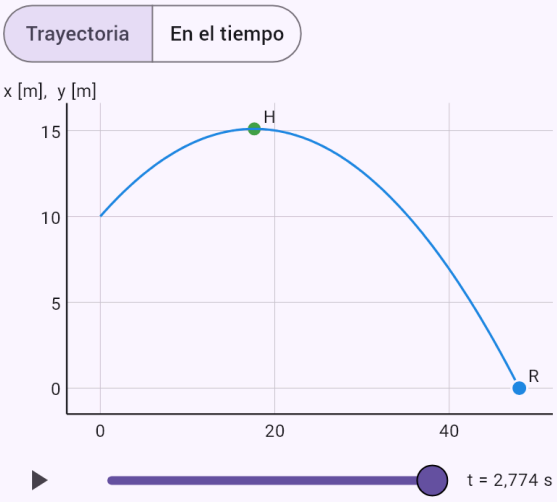
Resultado

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos v_k; datos:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Sin resistencia del aire, el movimiento se separa en dos independientes: uniforme en horizontal y uniformemente acelerado en vertical. La trayectoria es una parábola y todos los valores tienen fórmula exacta. Ecuación del modelo: $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 20\cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20\sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Sustituimos
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Se deduce de la conservación de la energía mecánica y no depende del ángulo.

Gráfica



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Dos ángulos de elevación para una distancia de 200 m.

Enunciado: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

Resultado

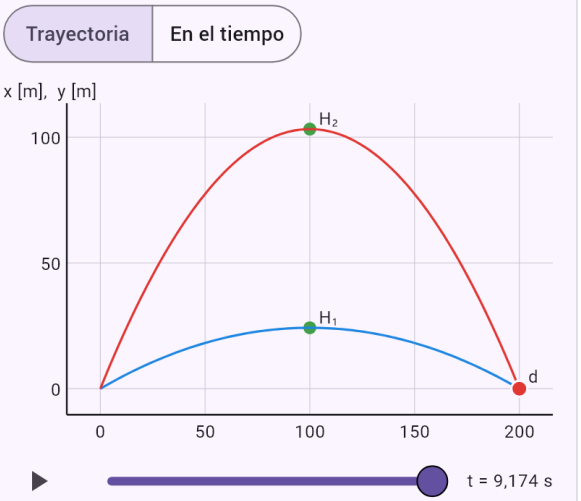
$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$

$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$

Pasos

- Buscamos α; datos: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- La distancia y la altura del blanco se sustituyen en la ecuación de la trayectoria. Con u = tan α resulta una ecuación cuadrática, normalmente con dos raíces: una trayectoria rasante y otra elevada. Ecuación del modelo:
  $h_k = h_0 + d\tan\alpha - \dfrac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$
- Ecuación cuadrática para tan α
  $u = \tan\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$
  $a = \dfrac{gd^2}{2v_0^2} = \dfrac{9{,}81\cdot(200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$
  $c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$
- Discriminante:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4\cdot 78{,}48\cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Raíces: $u_{1,2} = \dfrac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Solución
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Solución
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- En terreno llano ambos ángulos suman 90°.

Gráfica



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Alcance de un balón con resistencia del aire y comparación con el vacío.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Resultado

$$R \approx 38{,}65\,\text{m}$$

Pasos

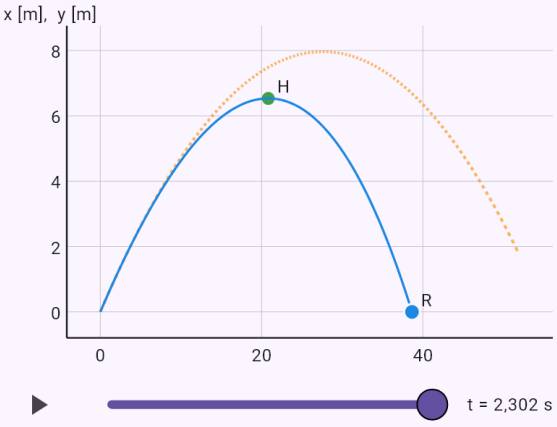
- Buscamos R; datos
  $v_0 = 25\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\text{m}, \quad m = 430\,\text{g}, \quad$ ś
- Convertimos las unidades
  $m = 430\,\text{g} = 0{,}43\,\text{kg}, \quad S = 38\,000\,\text{mm}^2 = 0{,}038\,\text{m}^2$
- Sobre el cuerpo actúan el peso y la resistencia del aire, opuesta a la velocidad respecto al aire, de modo que el viento también entra en las ecuaciones. Las componentes de la velocidad están acopladas y no hay solución exacta, por lo que el sistema se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden. Ecuación del modelo: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\text{m/s}$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\text{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\text{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- El sistema de seis ecuaciones para x, y, z y las componentes de la velocidad se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden; número de pasos: $N = 1807$
- Desarrollo del vuelo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Valores clave
  $H \approx 6{,}534\,\text{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\text{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\text{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- El mismo tiro en el vacío
  $R_v \approx 55{,}17\,\text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\text{s}$
- Alcance en el aire respecto al del vacío: $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



La línea continua es la trayectoria en el aire y la discontinua, en el vacío. Los ejes tienen escalas distintas.

Desviación lateral de un balón con viento, con vista lateral y superior.

Enunciado: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Resultado

$z \approx 2{,}621\ \text{m}$

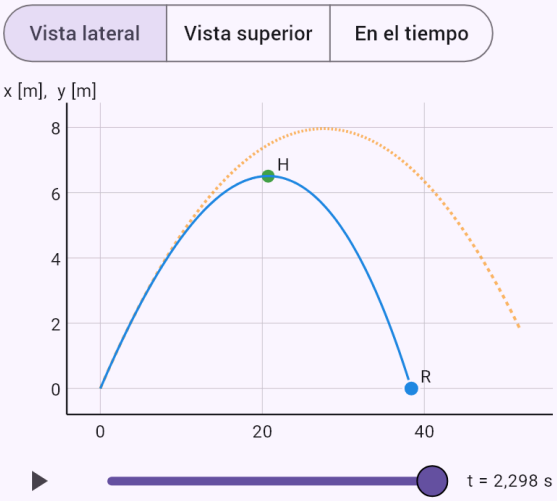
Pasos

- Buscamos z; datos
  $v_0 = 25\ \text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\ \text{m}, \quad m = 430\ \text{g}, \quad$ ſ
- Convertimos las unidades
  $m = 430\ \text{g} = 0{,}43\ \text{kg}, \quad S = 38\,000\ \text{mm}^2 = 0{,}038\ \text{m}^2$
- Sobre el cuerpo actúan el peso y la resistencia del aire, opuesta a la velocidad respecto al aire, de modo que el viento también entra en las ecuaciones. Las componentes de la velocidad están acopladas y no hay solución exacta, por lo que el sistema se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden. Ecuación del modelo: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\ \text{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\ \text{m/s}$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\ \text{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\ \text{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$
- El sistema de seis ecuaciones para x, y, z y las componentes de la velocidad se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden; número de pasos: $N = 1804$
- Desarrollo del vuelo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Valores clave
  $H \approx 6{,}51\ \text{m}$
  $T \approx 2{,}298\ \text{s}$
  $R \approx 38{,}4\ \text{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\ \text{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\ \text{m}$
- El mismo tiro en el vacío
  $R_v \approx 55{,}17\ \text{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\ \text{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\ \text{s}$
- Alcance en el aire respecto al del vacío: $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$
- Efecto del viento: $\Delta R \approx -0{,}2474\ \text{m}, \quad z \approx 2{,}621\ \text{m}$

Gráfica



La línea continua es la trayectoria en el aire y la discontinua, en el vacío. Los ejes tienen escalas distintas.

Carabina deportiva de pequeño calibre: velocidad al final del vuelo, curva G1.

Enunciado: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Resultado

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

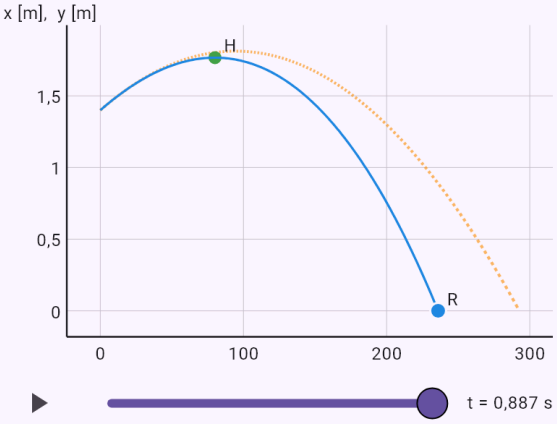
- Buscamos v_k; datos
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Convertimos las unidades
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Sobre el cuerpo actúan el peso y la resistencia del aire, opuesta a la velocidad respecto al aire, de modo que el viento también entra en las ecuaciones. Las componentes de la velocidad están acopladas y no hay solución exacta, por lo que el sistema se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden. Ecuación del modelo: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Número de Mach y coeficiente de arrastre al inicio:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- El sistema de seis ecuaciones para x, y, z y las componentes de la velocidad se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden; número de pasos: $N = 73$
- Desarrollo del vuelo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Valores clave
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- El mismo tiro en el vacío
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Alcance en el aire respecto al del vacío: $\dfrac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- El coeficiente de arrastre procede de una curva aproximada según el número de Mach; en un proyectil, la curva G1 por el factor de forma. Las tablas del fabricante tienen prioridad. No se incluye la deriva por rotación.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



La línea continua es la trayectoria en el aire y la discontinua, en el vacío. Los ejes tienen escalas distintas.

Rifle de caza: alcance con la densidad del aire según la altura.

Enunciado: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)

Resultado

$$R \approx 2365\,\text{m}$$

Pasos

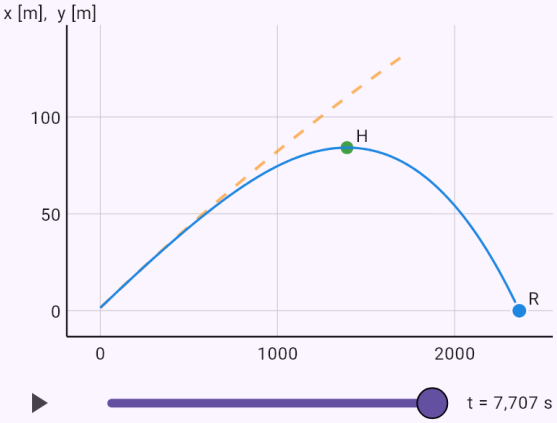
- Buscamos R; datos
  $v_0 = 860\,\text{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\text{m}, \quad m = 9{,}72\,\text{g},$
- Convertimos las unidades
  $m = 9{,}72\,\text{g} = 0{,}00972\,\text{kg}, \quad S = 48{,}1\,\text{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Sobre el cuerpo actúan el peso y la resistencia del aire, opuesta a la velocidad respecto al aire, de modo que el viento también entra en las ecuaciones. Las componentes de la velocidad están acopladas y no hay solución exacta, por lo que el sistema se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden. Ecuación del modelo: $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 860\cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 860\sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\text{m/s}$
- Densidad del aire según la atmósfera estándar: $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\text{kg/m}^3$
- Número de Mach y coeficiente de arrastre al inicio: $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\text{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\text{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- El sistema de seis ecuaciones para x, y, z y las componentes de la velocidad se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden; número de pasos: $N = 335$
- Desarrollo del vuelo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Valores clave
  $H \approx 84{,}15\,\text{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\text{s}$
  $R \approx 2365\,\text{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- El mismo tiro en el vacío
  $R_v \approx 13\,110\,\text{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\text{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\text{s}$
- Alcance en el aire respecto al del vacío: $\dfrac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- El coeficiente de arrastre procede de una curva aproximada según el número de Mach; en un proyectil, la curva G1 por el factor de forma. Las tablas del fabricante tienen prioridad. No se incluye la deriva por rotación.
- Durante el vuelo la velocidad bajó de la del sonido; en esta zona es donde más cambia el coeficiente de arrastre.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



La línea continua es la trayectoria en el aire y la discontinua, en el vacío. Los ejes tienen escalas distintas.

Una bala de cañón de física escolar: desviación por la fuerza de Coriolis.

Enunciado: model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Resultado

$$z \approx 2{,}119\,\text{m}$$

Pasos

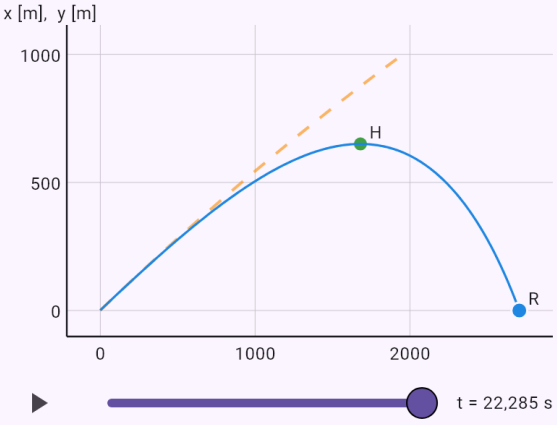
- Buscamos z; datos
  $v_0 = 439\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\text{m}, \quad m = 5580\,\text{g},$
- Convertimos las unidades
  $m = 5580\,\text{g} = 5{,}58\,\text{kg}, \quad S = 10\,200\,\text{mm}^2 = 0{,}0102\,\text{m}^2$
- Sobre el cuerpo actúan el peso y la resistencia del aire, opuesta a la velocidad respecto al aire, de modo que el viento también entra en las ecuaciones. Las componentes de la velocidad están acopladas y no hay solución exacta, por lo que el sistema se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden. Ecuación del modelo
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Componentes de la velocidad inicial
  $v_{0x} = 439\cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\text{m/s}$
  $v_{0y} = 439\sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\text{m/s}$
- Número de Mach y coeficiente de arrastre al inicio:
  $M_0 = \dfrac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \dfrac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\text{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\text{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\dfrac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Velocidad angular de la Tierra (fuerza de Coriolis):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$
- El sistema de seis ecuaciones para x, y, z y las componentes de la velocidad se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden; número de pasos: $N = 1023$
- Desarrollo del vuelo

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Valores clave
  $H \approx 650{,}1\,\text{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\text{s}$
  $R \approx 2706\,\text{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\text{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\text{m}$
- El mismo tiro en el vacío
  $R_v \approx 17\,020\,\text{m}, \quad H_v \approx 2457\,\text{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\text{s}$
- Alcance en el aire respecto al del vacío: $\dfrac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Efecto de la fuerza de Coriolis
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\text{m}$
- El coeficiente de arrastre procede de una curva aproximada según el número de Mach; en un proyectil, la curva G1 por el factor de forma. Las tablas del fabricante tienen prioridad. No se incluye la deriva por rotación.
- Durante el vuelo la velocidad bajó de la del sonido; en esta zona es donde más cambia el coeficiente de arrastre.

Gráfica

Vista lateral | Vista superior | En el tiempo



La línea continua es la trayectoria en el aire y la discontinua, en el vacío. Los ejes tienen escalas distintas.

Ángulo rasante y elevado para un balón con resistencia del aire.

Enunciado: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Resultado

$\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ$

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ$

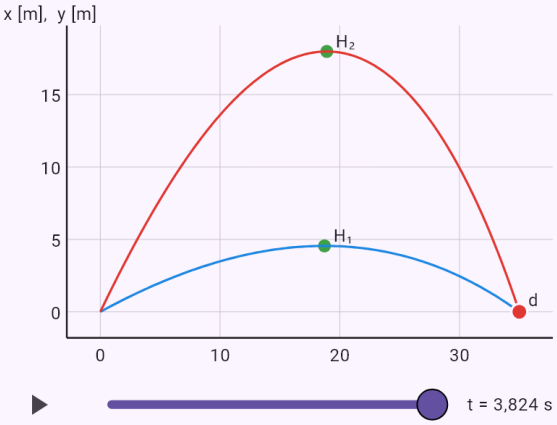
Pasos

- Buscamos α; datos
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Convertimos las unidades
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}038\,\mathrm{m}^2$
- Con resistencia del aire no hay fórmula. El cálculo prueba distintos ángulos y observa a qué altura vuela el cuerpo a la distancia del blanco. Los ángulos con los que pasa exactamente por el blanco se hallan por bisección. Ecuación del modelo:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Constante de resistencia del aire (coeficiente de arrastre): $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Velocidad límite en caída libre: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Resistencia del aire frente al peso al inicio: $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Los ángulos se hallaron por el método de disparo: bisección según la altura a la distancia d, es decir, buscando una raíz de $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Solución
  $\alpha_1 \approx 24{,}3^\circ, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Solución

$\alpha_2 \approx 59{,}84^\circ, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Velocidad de pérdida de una avioneta.

Enunciado: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

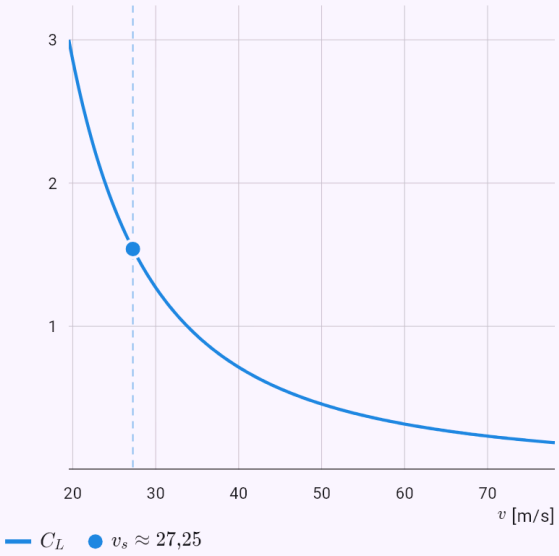
Resultado

$$v_s \approx 98{,}11\,\text{km/h}$$

Pasos

- Buscamos v_s; datos
  $m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- En vuelo horizontal la sustentación iguala al peso y el empuje a la resistencia. La resistencia tiene dos partes: la parásita crece con el cuadrado de la velocidad y la inducida disminuye con ella, por lo que existe una velocidad de resistencia mínima. Ecuación del modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Peso del avión: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Sustituimos
  $v_s = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\text{m/s}$
- Convertimos las unidades:
  $v_s \approx 27{,}25\,\text{m/s} = 98{,}11\,\text{km/h}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Resistencia en vuelo horizontal y gráfica de la resistencia parásita e inducida.

Enunciado: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

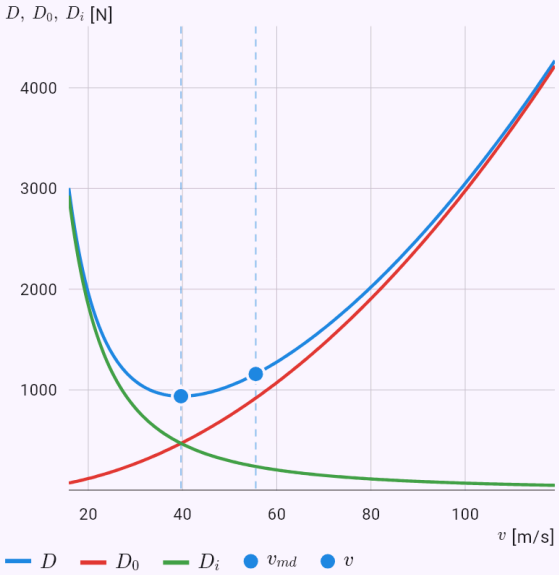
Resultado

$$D \approx 1{,}158\,\text{kN}$$

Pasos

- Buscamos D; datos
  $v = 200\,\text{km/h}, \quad m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad b = 1$
- Convertimos las unidades: $v = 200\,\text{km/h} = 55{,}56\,\text{m/s}$
- En vuelo horizontal la sustentación iguala al peso y el empuje a la resistencia. La resistencia tiene dos partes: la parásita crece con el cuadrado de la velocidad y la inducida disminuye con ella, por lo que existe una velocidad de resistencia mínima. Ecuación del modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Peso del avión: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Alargamiento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Factor de resistencia inducida (factor de Oswald e, polar): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Presión dinámica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\text{Pa}$
- Coeficiente de sustentación necesario:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Resistencia parásita e inducida:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\text{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\text{N}$
- Fineza a esta velocidad: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$
- Despejamos la magnitud buscada: $D = D_0 + D_i$
- Sustituimos: $D \approx 1158\,\text{N}$
- Convertimos las unidades: $D \approx 1158\,\text{N} = 1{,}158\,\text{kN}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Ekranoplano KM: cuánta resistencia ahorra el efecto suelo.

Enunciado: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

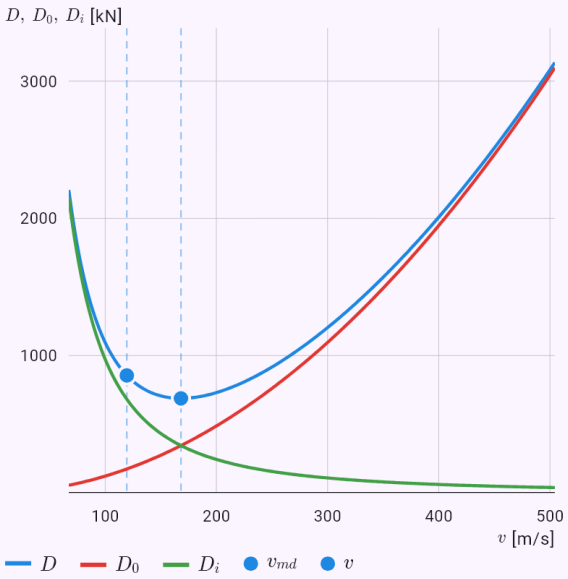
Resultado

$$D \approx 855{,}6\,\text{kN}$$

Pasos

- Buscamos D; datos
  $v = 430\,\text{km/h}, \quad m = 544\,000\,\text{kg}, \quad S = 662{,}5\,\text{m}^2, \quad b$
- Convertimos las unidades: $v = 430\,\text{km/h} = 119{,}4\,\text{m/s}$
- En vuelo horizontal la sustentación iguala al peso y el empuje a la resistencia. La resistencia tiene dos partes: la parásita crece con el cuadrado de la velocidad y la inducida disminuye con ella, por lo que existe una velocidad de resistencia mínima. Ecuación del modelo:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + kC_L^2\right)$
- Peso del avión: $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\text{kN}$
- Alargamiento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Factor de resistencia inducida (factor de Oswald e, polar): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- El efecto suelo reduce la resistencia inducida
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Aumento de sustentación con el mismo ángulo de ataque (estimación por línea sustentadora)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Fórmula empírica de McCormick para alas corrientes. En un ala de poco alargamiento con placas de extremo, como la de un ekranoplano, el efecto real es mayor.
- Presión dinámica
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\text{Pa}$
- Coeficiente de sustentación necesario:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Resistencia parásita e inducida
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\text{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\text{kN}$
- Fineza a esta velocidad: $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Ahorro de resistencia por el efecto suelo:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\text{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Despejamos la magnitud buscada: $D = D_0 + D_i$
- Sustituimos: $D \approx 855{,}6\,\text{kN}$
- Convertimos las unidades: $D \approx 855\,600\,\text{N} = 855{,}6\,\text{kN}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Carrera de despegue de una avioneta con gráfica de velocidad y distancia.

Enunciado: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Resultado

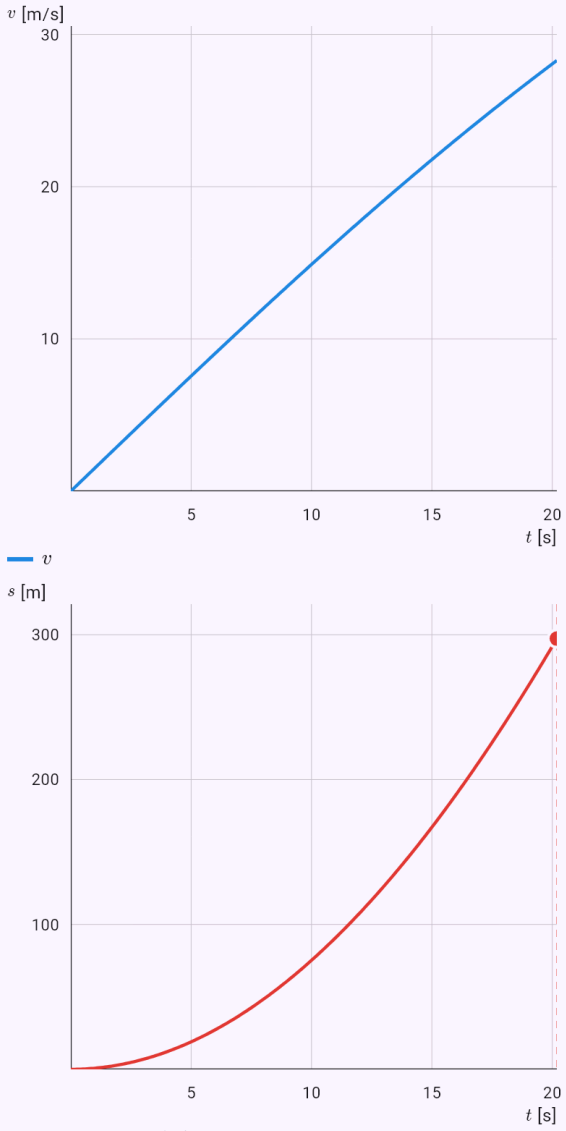
$$s_g \approx 297{,}4\,\text{m}$$

Pasos

- Buscamos s_g; datos
  $m = 1157\,\text{kg}, \quad S = 16{,}2\,\text{m}^2, \quad b = 11\,\text{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Convertimos las unidades: $T = 2{,}1\,\text{kN} = 2100\,\text{N}$
- El avión acelera desde el reposo hasta la velocidad de despegue bajo el empuje, la resistencia del aire y la fricción de rodadura, que disminuye al crecer la sustentación. La ecuación se resuelve numéricamente con Runge-Kutta de 4.º orden; el empuje es un promedio constante. Ecuación del modelo
  $m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = \iota$
- Peso del avión: $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\text{kN}$
- Velocidad de pérdida
  $v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\text{m/s}$
- Velocidad de despegue respecto al aire:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\text{m/s}$
- Alargamiento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Factor de resistencia inducida (factor de Oswald e, polar): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Coeficiente de resistencia en pista:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Aceleración al principio y al final
  $a_0 \approx 1{,}521\,\text{m/s}^2, \quad a_k \approx 1{,}184\,\text{m/s}^2$
- La ecuación se resolvió con Runge-Kutta de 4.º orden, pasos: $N = 2172$
- Desarrollo en pista

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Radio de viraje con 30° de alabeo.

Enunciado: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

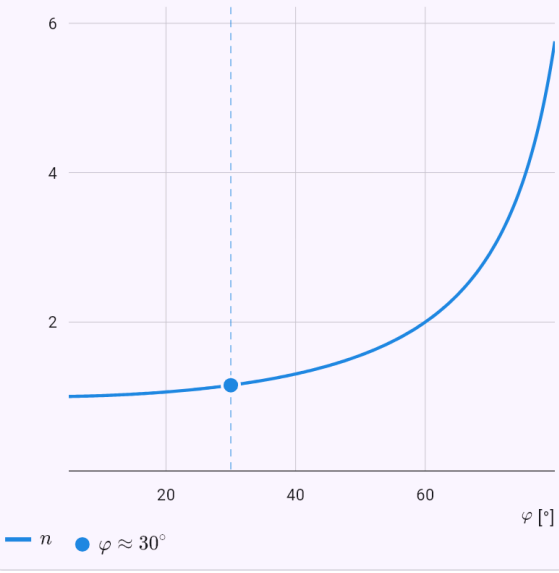
Resultado

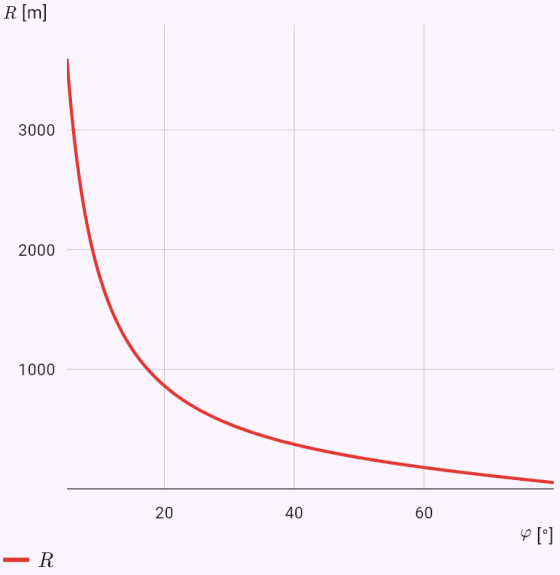
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Pasos

- Buscamos R; datos: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Convertimos las unidades: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- En un viraje coordinado la componente vertical de la sustentación soporta el peso y la horizontal curva la trayectoria. El factor de carga depende solo del alabeo; el radio, también de la velocidad. Ecuación del modelo: $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Despejamos la magnitud buscada: $R = \dfrac{v^2}{g\tan\varphi}$
- Sustituimos: $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81\cdot\tan 30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

Gráfica





El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Alcance de un planeador desde 1000 m de altura.

Enunciado: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Resultado

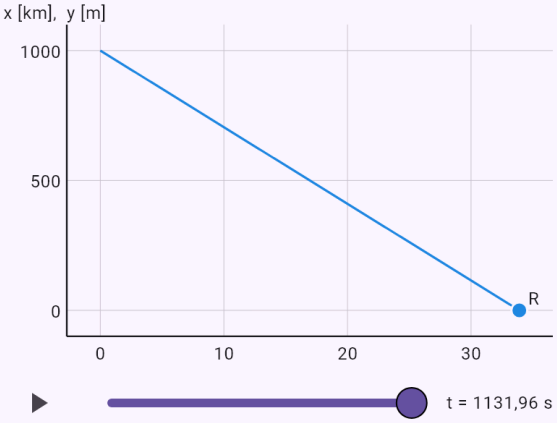
$$R \approx 33{,}91\,\text{km}$$

Pasos

- Buscamos R; datos
  $h = 1000\,\text{m}, \quad m = 600\,\text{kg}, \quad S = 17{,}95\,\text{m}^2, \quad b = 17$
- Sin empuje el avión desciende en línea recta con una pendiente dada por la relación entre sustentación y resistencia. El alcance desde una altura es la altura por la fineza, máximo a la velocidad de mejor planeo. Ecuación del modelo:
  $\tan\gamma = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \frac{v}{E}$
- Peso del avión: $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\text{N}$
- Alargamiento: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Factor de resistencia inducida (factor de Oswald e, polar): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Coeficiente de sustentación en el mejor planeo:
  $C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Velocidad de mejor planeo
  $v = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\text{m/s}$
- Fineza máxima y resistencia mínima
  $E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Ángulo de planeo: $\gamma = \arctan\frac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Se supone un ángulo de planeo pequeño, con la sustentación prácticamente igual al peso, y una densidad del aire constante.
- Despejamos la magnitud buscada: $R = hE$
- Sustituimos: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\text{m}$
- Convertimos las unidades: $R \approx 33\,910\,\text{m} = 33{,}91\,\text{km}$

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Apolo 13: la aceleración de una entrada a −6,20°.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])

Resultado

$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$

Pasos

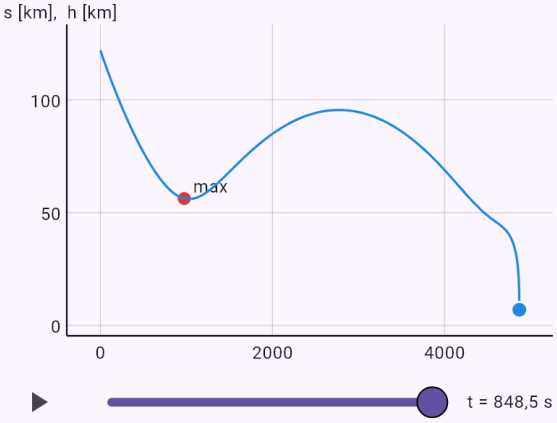
- Buscamos a_{max}; datos
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Un paso por la atmósfera desde la altura de entrada h_0 (122 km por defecto) con el ángulo de trayectoria γ_0 dado y un alabeo σ constante hasta la altura h_k (apertura de los paracaídas, vuelo planeado en el transbordador). La aceleración máxima se compara con la fórmula de Allen y Eggers para una entrada balística. El flujo de calor en el punto de estancamiento lo da la fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, y la temperatura de la superficie del escudo el equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Ecuación del modelo
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Superficie frontal y coeficiente balístico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densidad del aire según la atmósfera estándar (isoterma por encima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Componente vertical de la sustentación con el alabeo σ: $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Captura: la nave descendió hasta la altura h_k: $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Aceleración máxima (numéricamente) $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Una entrada balística sin sustentación daría mucho más según Allen y Eggers: la sustentación reduce la aceleración
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Flujo de calor máximo en el punto de estancamiento (Sutton–Graves) y el calor total por m²

$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$

- Temperatura de la superficie del escudo por equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Simplificaciones: la Tierra es redonda y no gira, C_D y L/D son constantes y el alabeo σ es el mismo durante todo el vuelo (el guiado real lo varía). El flujo de calor es solo convectivo; al regresar de la Luna se suma la radiación de la capa de choque incandescente. Un escudo ablativo se lleva parte del calor al vaporizarse, por lo que la temperatura de equilibrio radiativo es una estimación superior.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

El corredor de entrada de la cápsula Apolo al regresar de la Luna.

Enunciado: model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];

`nlim=10[gn])`

Resultado

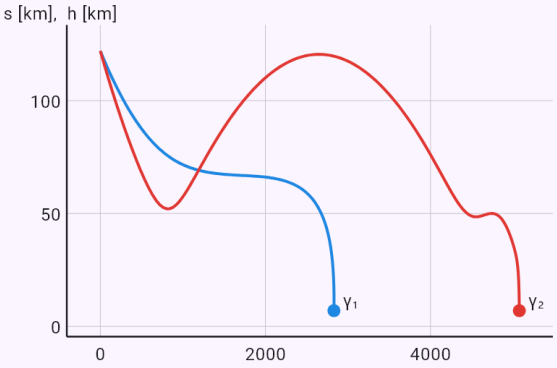
$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$
$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$
$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$

Pasos

- Buscamos $\Delta\gamma$; datos
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Los límites del ángulo de entrada por bisección. El límite rasante es la entrada más rasante que, con la sustentación girada hacia abajo (σ = 180°), no vuelve a subir por encima de la altura de entrada; el límite inclinado, la entrada más inclinada que, con la sustentación hacia arriba (σ = 0°), no supera la aceleración dada (ni el flujo de calor, si se da). Para el regreso desde la Luna el corredor resulta de solo unos 2° de ancho. El Apolo 13 (abril de 1970) regresó tras la explosión del tanque de oxígeno con el módulo de mando apagado para ahorrar energía. La tripulación corrigió la trayectoria con un encendido manual del motor del módulo lunar, apuntado por la Tierra en el visor de la ventana, y la última corrección apuntó al centro del corredor. El ángulo de entrada previsto era −6,20°; el ordenador del módulo de mando no se volvió a encender hasta antes de la entrada. Ecuación del modelo
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Superficie frontal y coeficiente balístico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densidad del aire según la atmósfera estándar (isoterma por encima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Límite rasante del corredor (sustentación hacia abajo):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Límite inclinado del corredor (sustentación hacia arriba):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Anchura del corredor de entrada:
  $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Simplificaciones: la Tierra es redonda y no gira, C_D y L/D son constantes y el alabeo σ es el mismo durante todo el vuelo (el guiado real lo varía). El flujo de calor es solo convectivo; al regresar de la Luna se suma la radiación de la capa de choque incandescente. Un escudo ablativo se lleva parte del calor al vaporizarse, por lo que la temperatura de equilibrio radiativo es una estimación superior.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas.

Vostok: descenso balístico sin sustentación y 8–9 g.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

`sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])`

Resultado

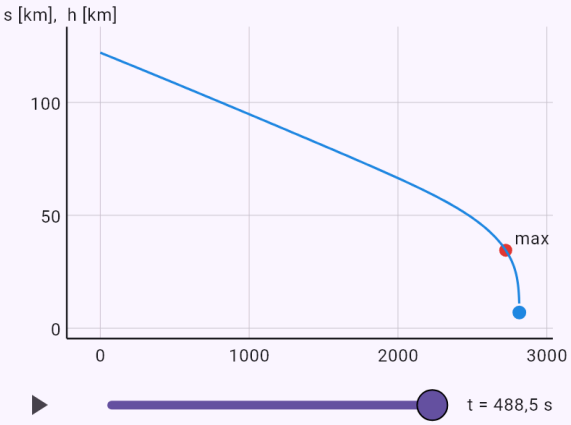
$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$

Pasos

- Buscamos a_{max}; datos
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Un paso por la atmósfera desde la altura de entrada h_0 (122 km por defecto) con el ángulo de trayectoria γ_0 dado y un alabeo σ constante hasta la altura h_k (apertura de los paracaídas, vuelo planeado en el transbordador). La aceleración máxima se compara con la fórmula de Allen y Eggers para una entrada balística. El flujo de calor en el punto de estancamiento lo da la fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, y la temperatura de la superficie del escudo el equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Ecuación del modelo
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Superficie frontal y coeficiente balístico
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Densidad del aire según la atmósfera estándar (isoterma por encima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Captura: la nave descendió hasta la altura h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Aceleración máxima (numéricamente)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Comprobación con la fórmula de Allen y Eggers para una entrada balística (sin gravedad, atmósfera exponencial de altura de escala H)
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$
- Flujo de calor máximo en el punto de estancamiento (Sutton–Graves) y el calor total por m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Temperatura de la superficie del escudo por equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$
- Simplificaciones: la Tierra es redonda y no gira, C_D y L/D son constantes y el alabeo σ es el mismo durante todo el vuelo (el guiado real lo varía). El flujo de calor es solo convectivo; al regresar de la Luna se suma la radiación de la capa de choque incandescente. Un escudo ablativo se lleva parte del calor al vaporizarse, por lo que la temperatura de equilibrio radiativo es una estimación superior.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Transbordador: la temperatura del escudo por equilibrio radiativo.

Enunciado: `model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];`

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Resultado

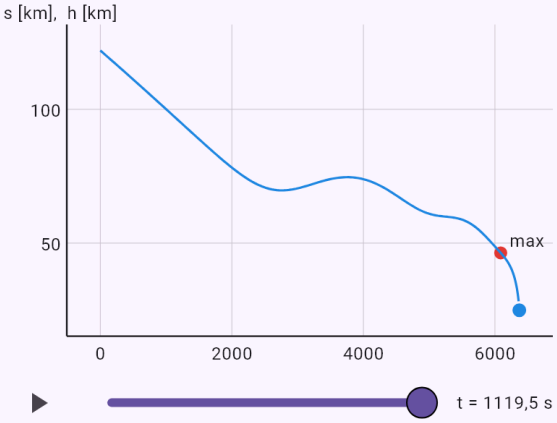
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Pasos

- Buscamos T_{max}; datos
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Un paso por la atmósfera desde la altura de entrada h_0 (122 km por defecto) con el ángulo de trayectoria γ_0 dado y un alabeo σ constante hasta la altura h_k (apertura de los paracaídas, vuelo planeado en el transbordador). La aceleración máxima se compara con la fórmula de Allen y Eggers para una entrada balística. El flujo de calor en el punto de estancamiento lo da la fórmula de Sutton–Graves q = k·√(ρ/R_n)·v³, y la temperatura de la superficie del escudo el equilibrio radiativo εσT⁴ = q. Ecuación del modelo
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- El transbordador espacial entraba con un ángulo de ataque de unos 40° y disipaba la sustentación sobrante alabeando sobre su eje longitudinal (hasta unos 70°); aterrizaba como planeador sin motor. Los valores del preajuste son aproximados. Lo extremo de la carga sobre la protección térmica lo mostró la pérdida del Columbia (misión STS-107). En el lanzamiento, el 16 de enero de 2003, un trozo de espuma aislante del tanque externo perforó un panel de carbono-carbono reforzado (RCC) del borde de ataque del ala izquierda. Los bordes de ataque se calientan durante la reentrada hasta unos 1650 °C (unos 3000 °F). El 1 de febrero de 2003 entró plasma caliente en el ala por la brecha, la estructura se fundió y el orbitador se desintegró sobre Texas; murieron los siete miembros de la tripulación.
- Superficie frontal y coeficiente balístico
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Densidad del aire según la atmósfera estándar (isoterma por encima de 86 km)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot10^{-}$
- Componente vertical de la sustentación con el alabeo σ:
  $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Captura: la nave descendió hasta la altura h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Aceleración máxima (numéricamente)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Una entrada balística sin sustentación daría mucho más según Allen y Eggers: la sustentación reduce la aceleración
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Flujo de calor máximo en el punto de estancamiento (Sutton–Graves) y el calor total por m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Temperatura de la superficie del escudo por equilibrio radiativo (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Simplificaciones: la Tierra es redonda y no gira, C_D y L/D son constantes y el alabeo σ es el mismo durante todo el vuelo (el guiado real lo varía). El flujo de calor es solo convectivo; al regresar de la Luna se suma la radiación de la capa de choque incandescente. Un escudo ablativo se lleva parte del calor al vaporizarse, por lo que la temperatura de equilibrio radiativo es una estimación superior.

Gráfica

Trayectoria | En el tiempo



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

Qué parte de un iceberg queda bajo el agua.

Enunciado: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

Resultado

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Pasos

- Buscamos φ; datos:
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Sobre un cuerpo en un fluido actúa un empuje igual al peso del fluido desalojado. Un cuerpo que flota se sumerge en la proporción de las densidades. La misma ley sostiene un globo en el aire. Ecuación del modelo:
  $F_b = \rho_f V g$
- Despejamos la magnitud buscada: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Sustituimos: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Convertimos las unidades: $\varphi \approx 0{,}8946 \;= 89{,}46\,\%$

Qué puede llevar un globo aerostático.

Enunciado: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Resultado

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Pasos

- Buscamos m_p; datos
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Sobre un cuerpo en un fluido actúa un empuje igual al peso del fluido desalojado. Un cuerpo que flota se sumerge en la proporción de las densidades. La misma ley sostiene un globo en el aire. Ecuación del modelo:
  $F_b = \rho_f V g$
- Masa que el gas puede sostener
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Despejamos la magnitud buscada: $m_p = m_v - m_0$
- Sustituimos: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

La presión en el fondo de la fosa de las Marianas.

Enunciado: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure;`

`water=sea)`

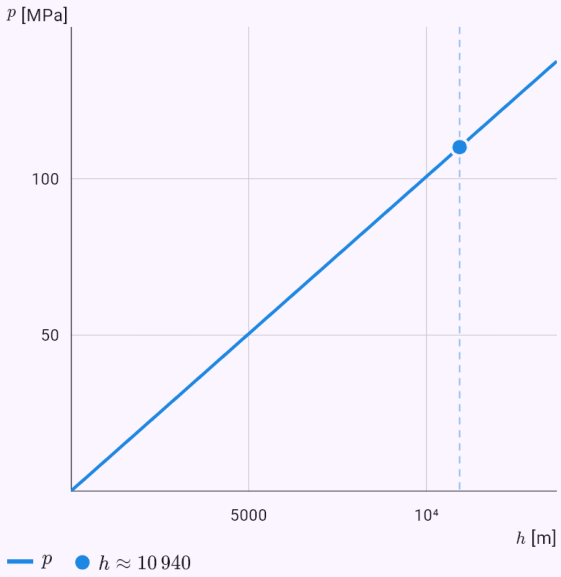
Resultado

$p \approx 1101 \text{ bar}$

Pasos

- Buscamos p; datos: $h = 10\,940 \text{ m}, \quad \rho_f = 1025 \text{ kg/m}^3$
- La presión crece linealmente con la profundidad, en densidad por g por profundidad. En la superficie se suma la presión del aire. El agua se considera incompresible. Ecuación del modelo: $p = p_0 + \rho_f g h$
- A gran profundidad el agua se comprime ligeramente y la densidad cambia con la temperatura y la salinidad; el resultado puede diferir cerca de un 2 %.
- Despejamos la magnitud buscada: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Sustituimos:
  $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1 \text{ MPa}$
- Cuántas veces la presión atmosférica: $\dfrac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Convertimos las unidades:
  $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 1101 \text{ bar}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La presión en un estrechamiento de la tubería.

Enunciado: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa]; rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Resultado

$p_2 \approx 170{,}1 \text{ kPa}$

Pasos

- Buscamos p_2; datos
  $A_1 = 20 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 5 \text{ cm}^2, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad p_1 = 200$
- Convertimos las unidades
  $A_1 = 20 \text{ cm}^2 = 0{,}002 \text{ m}^2, \quad A_2 = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$
- A lo largo de una línea de corriente de un líquido ideal se conserva la suma de la presión y las energías cinética y potencial de un volumen. En un estrechamiento la velocidad sube y la presión baja; si llega a la presión de vapor, aparece la cavitación. Ecuación del modelo:
  $p + \dfrac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \text{const}$
- Ecuación de continuidad:
  $v_2 = v_1 \dfrac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \dfrac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8 \text{ m/s}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $p_2 = p_1 + \dfrac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Sustituimos
  $p_2 = 200\,000 + \dfrac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - ($
- Convertimos las unidades:
  $p_2 \approx 170\,100 \text{ Pa} = 170{,}1 \text{ kPa}$

Velocidad límite de una piedra en el agua y gráfica del arranque.

Enunciado: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

`nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)`

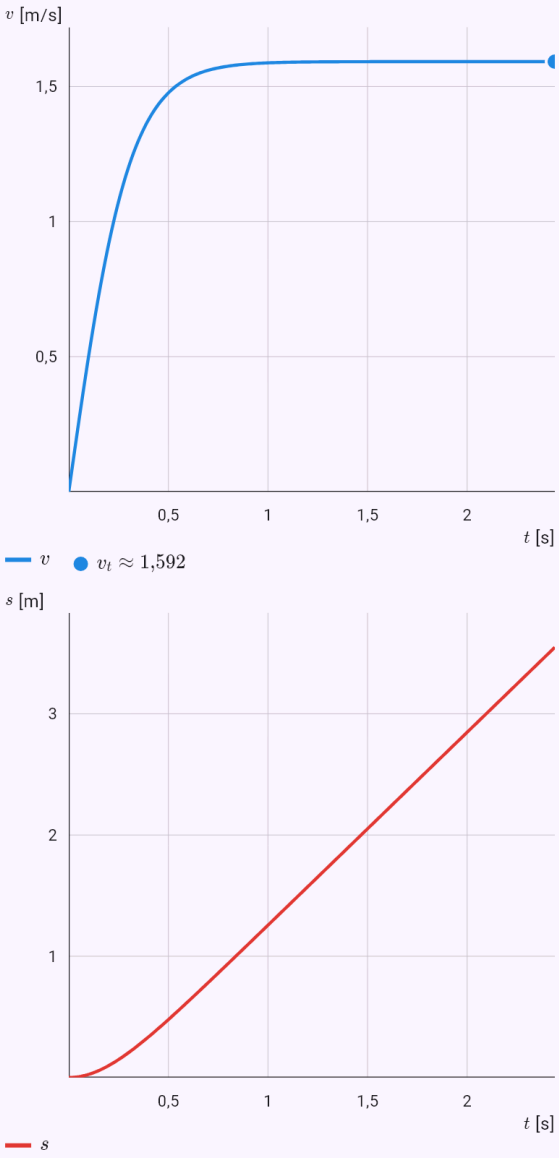
Resultado

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Pasos

- Buscamos v_t; datos
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Convertimos las unidades: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un cuerpo baja o sube hasta que la resistencia iguala la diferencia entre peso y empuje y alcanza su velocidad límite. Al arrancar también debe mover el agua de alrededor, lo que describe la masa añadida. La ecuación se resuelve numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Ecuación del modelo:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volumen, sección y masa de la esfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- La fuerza neta apunta hacia abajo, el cuerpo baja:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Masa con la masa añadida:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Número de Reynolds y coeficiente de resistencia a la velocidad límite: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Velocidad límite: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Constante de tiempo del arranque con y sin masa añadida
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- La masa añadida solo cambia el arranque. La velocidad límite no depende de ella, porque en movimiento estable nada se acelera.
- Sustituimos: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Cuánto tarda una burbuja en subir desde 10 m.

Enunciado: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)

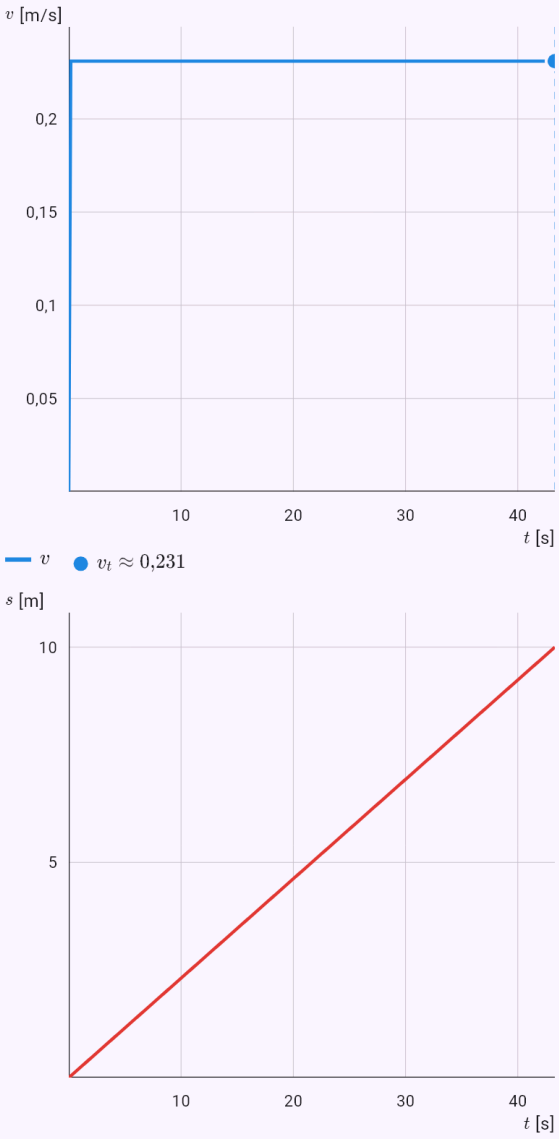
Resultado

$$t \approx 43{,}3\,\text{s}$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $H = 10\,\text{m}, \quad d = 5\,\text{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \rho_f = 998$
- Convertimos las unidades: $d = 5\,\text{mm} = 0{,}005\,\text{m}$
- Un cuerpo baja o sube hasta que la resistencia iguala la diferencia entre peso y empuje y alcanza su velocidad límite. Al arrancar también debe mover el agua de alrededor, lo que describe la masa añadida. La ecuación se resuelve numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Ecuación del modelo:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volumen, sección y masa de la esfera
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^3, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- La fuerza neta apunta hacia arriba, el cuerpo sube:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$
- Masa con la masa añadida:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\text{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- El número de Eötvös indica cuánto se deforma la burbuja: $Eo = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Número de Reynolds y coeficiente de resistencia a la velocidad límite: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Velocidad límite: $v_t \approx 0{,}231\,\text{m/s}$
- Constante de tiempo del arranque con y sin masa añadida
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\text{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$
- La masa añadida solo cambia el arranque. La velocidad límite no depende de ella, porque en movimiento estable nada se acelera.
- La correlación de Tomiyama vale para agua corriente algo contaminada. En agua limpia las burbujas pequeñas suben más rápido y las grandes se rompen u oscilan.
- La ecuación se resolvió con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, número de pasos: $N = 3363$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

La caída de la varilla de un arpón a 5 m.

Enunciado: model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];

rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)

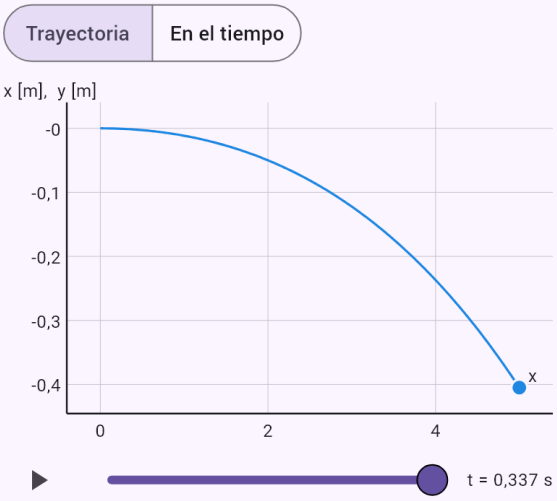
Resultado

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\text{cm}$$

Pasos

- Buscamos Δy; datos
  $x = 5\,\text{m}, \quad v_0 = 20\,\text{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\text{kg}, \quad d = 7\,\text{mm},$
- Convertimos las unidades: $d = 7\,\text{mm} = 0{,}007\,\text{m}$
- Arpón de pesca deportiva: la varilla esbelta se frena sobre todo por el rozamiento en su superficie, por lo que pierde velocidad en pocos metros. La caída la determina el peso menos el empuje. Las ecuaciones se resuelven numéricamente. Ecuación del modelo
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Coeficiente de fricción según la línea ITTC-57
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Coeficiente de resistencia de la varilla: punta y fricción a lo largo: $C_d = C_n + 4C_f \frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Recorrido en que la velocidad cae a cerca del 37 %, y aceleración hacia abajo en el agua
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\text{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\text{m/}$
- La ecuación se resolvió con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, número de pasos: $N = 1538$
- El modelo no incluye la resistencia del cabo, que acorta aún más el alcance real. La masa añadida de la varilla en sentido longitudinal es despreciable.
- Convertimos las unidades: $\Delta y \approx 0{,}405\,\text{m} = 40{,}5\,\text{cm}$

Gráfica



Los ejes tienen escalas distintas. Con el control deslizante o el botón de reproducción puede seguir el vuelo en el tiempo.

El alcance de un dron submarino con batería.

Enunciado: model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

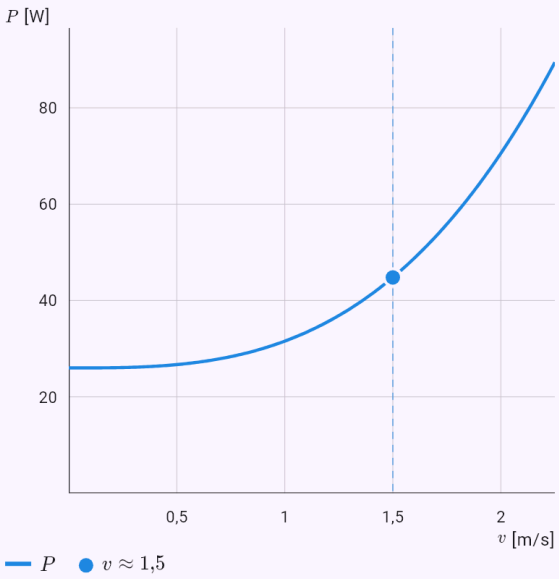
Resultado

$$R \approx 120{,}5\,\text{km}$$

Pasos

- Buscamos R; datos
  $v = 1{,}5\,\text{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\text{m}^2, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Convertimos las unidades: $E = 1\,\text{kWh} = 3\,600\,000\,\text{J}$
- En marcha estable el empuje iguala la resistencia. La resistencia crece con el cuadrado de la velocidad y la potencia con el cubo. Con batería cuenta además el consumo constante de los equipos, por lo que existe una velocidad de máximo alcance. Ecuación del modelo:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Factor K de la resistencia D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\text{kg/n}$
- Potencia necesaria: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\text{W}$
- Velocidad de máximo alcance:
  $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\text{m/s}$
- Autonomía de la batería: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\text{h}$
- Despejamos la magnitud buscada: $R = vt_E$
- Sustituimos: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\text{km}$
- Convertimos las unidades: $R \approx 120\,500\,\text{m} = 120{,}5\,\text{km}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Un submarino histórico: la potencia crece con el cubo de la velocidad.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

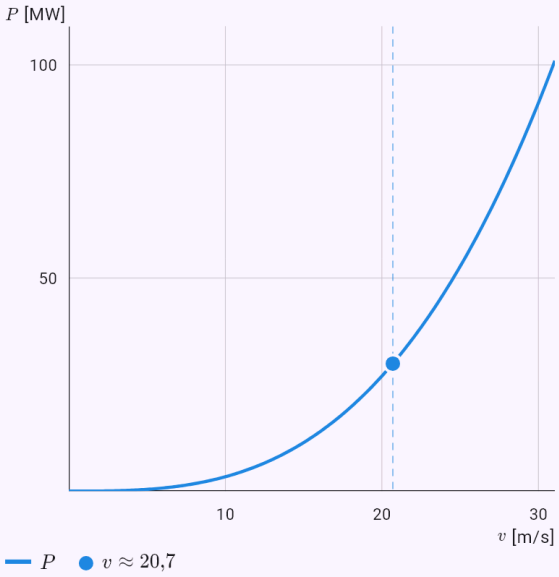
Resultado

$$P \approx 29\,930\,\text{kW}$$

Pasos

- Buscamos P; datos
  $v = 20{,}7\,\text{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\text{m}^2, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- En marcha estable el empuje iguala la resistencia. La resistencia crece con el cuadrado de la velocidad y la potencia con el cubo. Con batería cuenta además el consumo constante de los equipos, por lo que existe una velocidad de máximo alcance. Ecuación del modelo:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Factor K de la resistencia D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\text{kg/m}$
- Despejamos la magnitud buscada: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h$
- Sustituimos: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\text{MW}$
- La potencia crece con el cubo de la velocidad: el doble de velocidad exige ocho veces más potencia:
  $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Convertimos las unidades:
  $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\text{W} = 29\,930\,\text{kW}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Cuánta agua debe tomar un submarino para mantenerse.

Enunciado: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Resultado

$$m_b \approx 849{,}8\,\text{t}$$

Pasos

- Buscamos m_b; datos
  $V = 3073\,\text{m}^3, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\text{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}$
- Un vehículo sumergido flota entre aguas cuando su masa con el lastre iguala la del agua desalojada. Soltando o tomando agua sube o baja. Vaciar un tanque en profundidad requiere más aire, pues debe vencer la presión exterior. Ecuación del modelo: $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Despejamos la magnitud buscada: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Sustituimos:
  $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\text{kg}$
- Volumen del agua de lastre: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\text{m}^3$
- Convertimos las unidades: $m_b \approx 849\,800\,\text{kg} = 849{,}8\,\text{t}$

Potencia de un portacontenedores con el reparto de la resistencia.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

Resultado

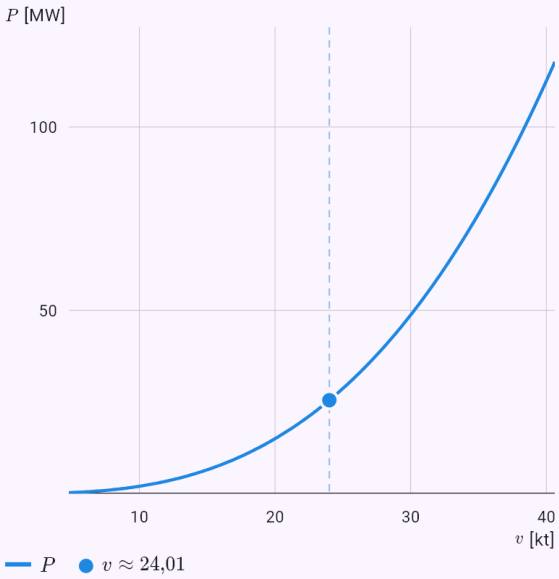
$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Pasos

- Buscamos P; datos
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- El calado se deduce del desplazamiento y la estabilidad transversal del metacentro. La resistencia tiene una parte de fricción según la línea ITTC-57 y una parte residual de un coeficiente dado. El número de Froude y la velocidad de casco indican cuándo las olas del casco empiezan a aumentar mucho la resistencia. Ecuación del modelo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Números de Froude y de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Coeficiente de fricción según la línea ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Resistencia de fricción y residual
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- El coeficiente residual se toma constante. En realidad cambia con la velocidad y procede de ensayos con modelos.
- Resistencia total: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Despejamos la magnitud buscada: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Sustituimos: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$

- Convertimos las unidades:
  $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Altura metacéntrica: la estabilidad de un barco.

Enunciado: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Resultado

$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$

Pasos

- Buscamos GM; datos
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- El calado se deduce del desplazamiento y la estabilidad transversal del metacentro. La resistencia tiene una parte de fricción según la línea ITTC-57 y una parte residual de un coeficiente dado. El número de Froude y la velocidad de casco indican cuándo las olas del casco empiezan a aumentar mucho la resistencia. Ecuación del modelo
  $Fn = \dfrac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \dfrac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Volumen desplazado y área de flotación (coeficiente de bloque)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Altura del centro de carena sobre la quilla (fórmula de Morrish)
  $KB = T - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Altura del metacentro sobre el centro de carena:
  $BM = \dfrac{I}{\nabla} = \dfrac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $GM = KB + BM - KG$
- Sustituimos: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- El metacentro está por encima del centro de gravedad: el barco es estable transversalmente.
- Vale para escoras pequeñas. El momento de la flotación se estima por su coeficiente y es exacto para un rectángulo; en un barco real el resultado es solo una primera estimación.

Navegación de un barco de 544 t y vuelo del ekranoplano KM a ras del agua.

Enunciado: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

Resultado

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

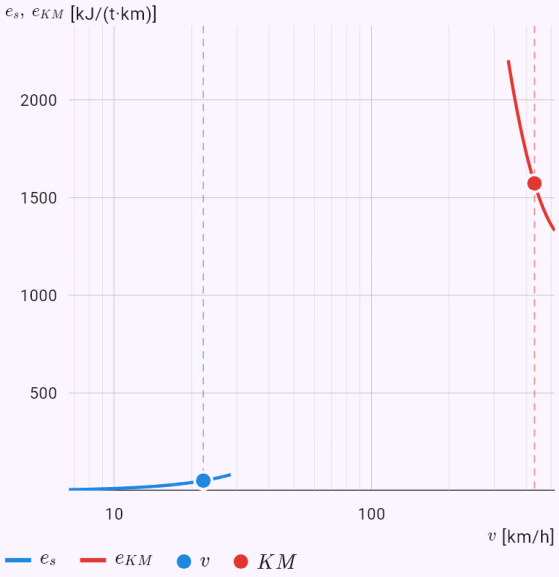
Pasos

- Buscamos P; datos
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- El calado se deduce del desplazamiento y la estabilidad transversal del metacentro. La resistencia tiene una parte de fricción según la línea ITTC-57 y una parte residual de un coeficiente dado. El número de Froude y la velocidad de casco indican cuándo las olas del casco empiezan a aumentar mucho la resistencia. Ecuación del modelo
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Números de Froude y de Reynolds
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Coeficiente de fricción según la línea ITTC-57:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Resistencia de fricción y residual
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- El coeficiente residual se toma constante. En realidad cambia con la velocidad y procede de ensayos con modelos.
- Ekranoplano KM a velocidad de crucero (el mismo cálculo que en el formulario Avión)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Trabajo contra la resistencia por tonelada y kilómetro: barco y KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Cuántas veces más energía necesita KM y cuántas veces es más rápido: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM se calcula en efecto suelo con el factor de

McCormick. La comparación es del trabajo contra la resistencia; no incluye el rendimiento de los motores, las olas ni el tiempo.

- Resistencia total: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Despejamos la magnitud buscada: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Sustituimos: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Convertimos las unidades: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Gráfica



El eje horizontal es logarítmico porque las velocidades difieren muchas veces. Los puntos son la velocidad dada del barco y la de crucero del ekranoplano.

La energía del neutrón de la reacción D-T – repartida por la conservación del momento.

Enunciado: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Resultado

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Pasos

- La energía de una reacción a partir de las masas atómicas. Con dos productos, la energía se reparte según la conservación del momento: la partícula más ligera se lleva la mayor parte. Ecuación del modelo: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reacción: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Masas antes y después: $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Sustituimos: $Q = \Delta m\, c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Los productos salen con momentos opuestos e iguales, así que sus energías cinéticas están en razón inversa a sus masas.
- Despejamos la magnitud buscada: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Sustituimos: $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energía del núcleo de helio: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Cuánto carbón sustituye 1 g de combustible D-T.

Enunciado: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Resultado

$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$

Pasos

- Buscamos m_c; datos: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Convertimos las unidades: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Cuánta energía libera una cantidad de combustible, comparada con la fisión del uranio-235 (unos 200 MeV por núcleo) y con el carbón. Ecuación del modelo: $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reacción: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energía de una reacción: $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Sustituimos $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Sustituimos: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Sustituimos: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- La fusión no tiene masa crítica. Si algo falla, el plasma se enfría y la reacción se detiene sola; el reactor no puede descontrolarse como uno de fisión.
- Convertimos las unidades: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

El pico de Gamow de la cadena p-p en el centro del Sol.

Enunciado: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one];`

`T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Resultado

$$E_0 \approx 6{,}035\,\text{keV}$$

Pasos

- Buscamos E_0; datos:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\text{keV}$
- En realidad los núcleos atraviesan la barrera por efecto túnel. La probabilidad de túnel e^(−√(E_G/E)) crece rápidamente con la energía, mientras los núcleos rápidos de la distribución de Maxwell escasean rápidamente. Su producto tiene un pico de Gamow estrecho E_0, donde ocurren de verdad las reacciones. El factor de Gamow se usa como fórmula dada; su deducción es de la mecánica cuántica. Ecuación del modelo

$$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2(\pi\alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$

- Masa reducida

$$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\text{keV} \approx 465\,700\,\text{keV}$$

- Sustituimos

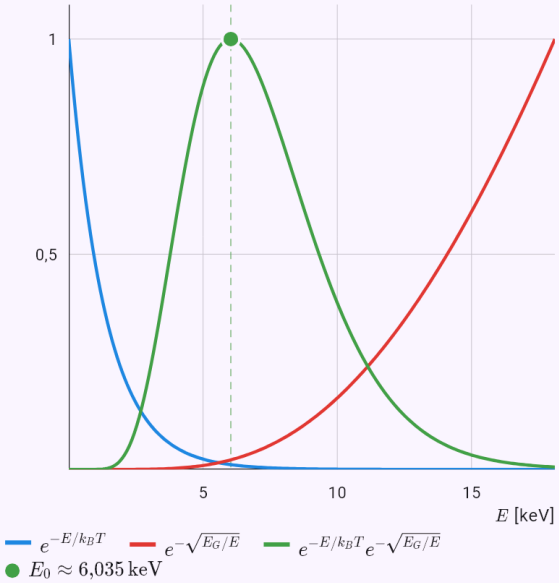
$$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\text{keV}$$

- Sustituimos

$$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4}\right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\text{keV}$$

- Anchura del pico: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\text{keV}$
- Posición del pico en múltiplos de k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- Las reacciones ocurren sobre todo en una banda estrecha de energías alrededor de E_0, varias veces la energía media k_BT. El gráfico muestra ambas funciones y su producto, cada una dividida por su máximo.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El triple producto con los parámetros de ITER comparado con la condición de ignición.

Enunciado: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

mode=lawson)

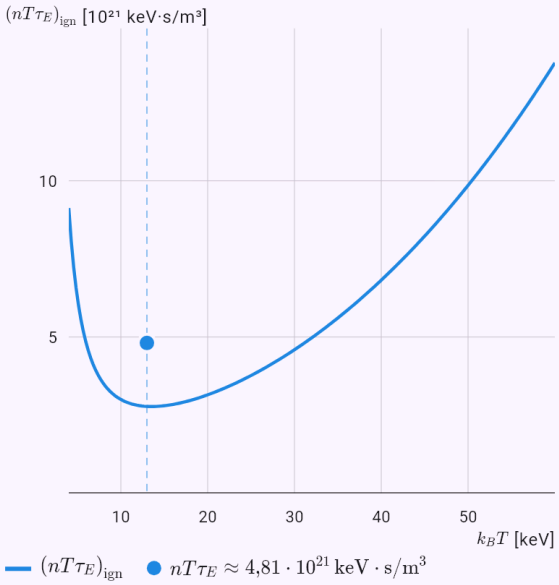
Resultado

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$$

Pasos

- Buscamos $nT\tau_E$; datos
  $n = 10^{20}\ \mathrm{m^{-3}}, \quad k_B T = 13\ \mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\ \mathrm{s}$
- El criterio de Lawson: el plasma se mantiene caliente por sí solo (ignición) cuando el calentamiento por las partículas alfa de las reacciones D-T compensa las pérdidas de calor 3nk_BT/τ_E. Decide el triple producto de la densidad n, la temperatura T y el tiempo de confinamiento de la energía τ_E. Su mínimo, unos 3·10²¹ keV·s/m³, está cerca de 14 keV. Ecuación del modelo
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Tasa de reacción D-T (ajuste)
  $\langle\sigma v\rangle(13\ \mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m^3/s}$
- Sustituimos
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12 \cdot (13)^2}{3520 \cdot 2{,}073 \cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s},$$
- Sustituimos
  $nT\tau_E = 10^{20} \cdot 13 \cdot 3{,}7 \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\ \mathrm{keV \cdot s/m^3}$
- El triple producto basta para la ignición: el calentamiento alfa cubre las pérdidas – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- El menor triple producto necesario, unos 3·10²¹ keV·s/m³, está cerca de 14 keV. Aquí se desprecian las pérdidas por radiación de frenado.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La tasa de reacción D-T a 10 keV como integral con la regla de Simpson.

Enunciado: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Resultado

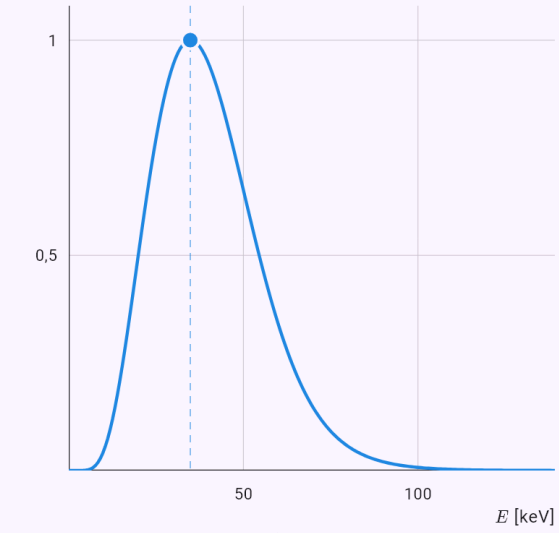
$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Pasos

- Buscamos $\langle \sigma v \rangle$; datos: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- La tasa de reacción ⟨σv⟩ es la sección eficaz σ(E) promediada sobre la distribución de Maxwell de velocidades. Se calcula como integral con la regla de Simpson y se compara con un ajuste publicado. Las secciones eficaces son de Bosch y Hale (Nuclear Fusion, 1992). Ecuación del modelo
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$
- Reacción: ${}^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} + n$
- Sección eficaz (Bosch-Hale):
  $\sigma(E) = \dfrac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$
- Regla de Simpson: $n = 100, \quad h = \dfrac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Integral
  $I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$
- Valores en el SI
  $\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2.$
- Sustituimos
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$
- Comparación con el ajuste
  $\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$

- El integrando importa sobre todo cerca del pico de Gamow, así que basta integrar hasta 40 k_BT. La diferencia con el ajuste es del orden del uno por ciento.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El radio de Larmor de una partícula alfa de fusión en 5 T.

Enunciado: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

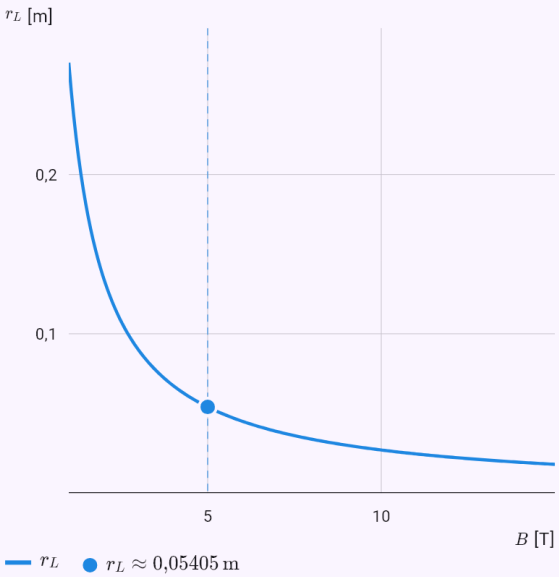
Resultado

$$r_L \approx 5{,}405\,\text{cm}$$

Pasos

- Buscamos r_L; datos:
  $m = 4{,}002\,\text{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\text{keV}, \quad B = 5\,\text{T}$
- Una partícula cargada en un campo magnético gira alrededor de una línea de campo (radio de Larmor); por eso el campo magnético mantiene el plasma caliente lejos de las paredes. El cálculo es relativista; para iones lentos γ ≈ 1. Ecuación del modelo:
  $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Masa: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- Factor de Lorentz y velocidad
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\text{m/s} \approx 0{,}04$
- Momento
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
- Sustituimos
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\text{m}$
- Los iones de un tokamak giran en radios de milímetros a centímetros; por eso el campo magnético los mantiene lejos de las paredes.
- Convertimos las unidades: $r_L \approx 0{,}05405\,\text{m} = 5{,}405\,\text{cm}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El factor de Lorentz de un protón en el LHC.

Enunciado: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV];`

`mode=lorentz; given=kinetic; particle=proton)`

Resultado

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

Pasos

- Buscamos γ; datos:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Convertimos las unidades:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- A partir de la velocidad (como fracción de c) o de la energía cinética calcula γ, la velocidad, la energía total y el momento. Un protón del LHC (6,8 TeV) es más lento que la luz solo en unos metros por segundo. Ecuación del modelo
  $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma mc^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Energía en reposo: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Sustituimos: $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} = 1 + \dfrac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Velocidad: $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- Cuánto más lenta que la luz:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Una partícula ultrarrelativista: casi toda su energía es cinética y su velocidad difiere de c solo un poco.

Cuántos muones creados a 15 km llegan al suelo gracias a la dilatación del tiempo.

Enunciado: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

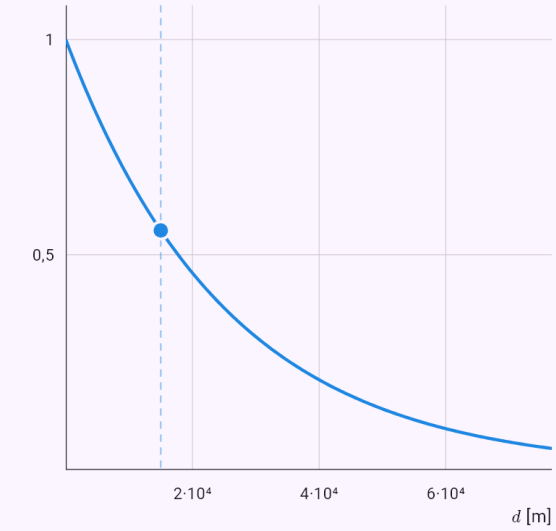
Resultado

$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Pasos

- Buscamos $\frac{N}{N_0}$; datos
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Convertimos las unidades
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Una partícula inestable se desintegra con su vida media propia τ_0. En el laboratorio su tiempo pasa γ veces más despacio, así que llega γ veces más lejos. Sin la dilatación del tiempo, los muones creados a 15 km de altura apenas llegarían al suelo. Ecuación del modelo:
  $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Sustituimos: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Velocidad: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Sustituimos
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{m}$
- Sustituimos: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Sin dilatación del tiempo llegaría la fracción:
  $\frac{N}{N_0}\big|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- En el sistema propio de la partícula el tiempo no se ralentiza, pero la distancia se acorta (contracción de longitudes). Ambos puntos de vista dan el mismo número de desintegraciones.
- Convertimos las unidades: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 \; = 55{,}64\,\%$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La energía de colisión de un haz del LHC contra un blanco fijo.

Enunciado: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

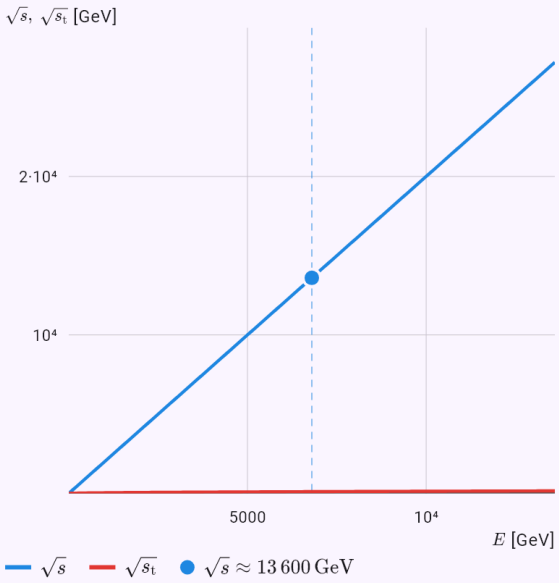
Resultado

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Pasos

- Buscamos $\sqrt{s_t}$; datos:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- En haces que chocan de frente, toda la energía de ambas partículas va a la colisión: √s = 2E. Un haz contra un blanco fijo gasta la mayor parte de su energía en mover el centro de masas, y √s solo crece con la raíz de E. Por eso se construyen colisionadores. Ecuación del modelo: $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s es la masa invariante del sistema: la energía disponible para crear partículas nuevas.
- Sustituimos
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Haces que chocan de frente: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La pérdida de energía de un electrón por vuelta en LEP.

Enunciado: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

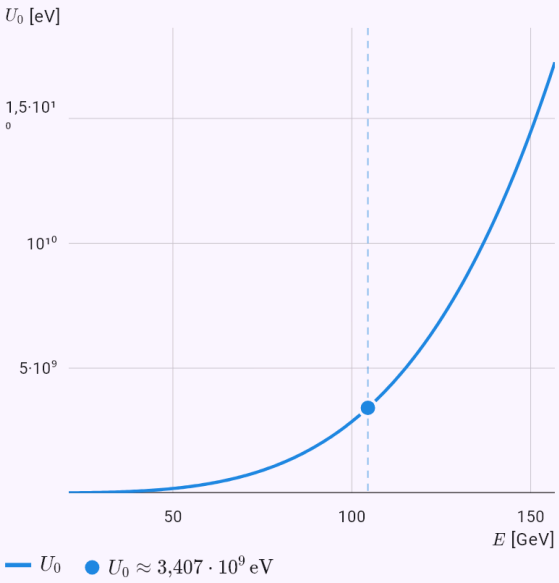
Resultado

$$U_0 \approx 3{,}407\,\text{GeV}$$

Pasos

- Buscamos U_0; datos
  $E = 104{,}5\,\text{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\text{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Convertimos las unidades: $R = 3{,}096\,\text{km} = 3096\,\text{m}$
- Una partícula cargada en una trayectoria curva radia (radiación sincrotrón). La pérdida por vuelta crece con γ⁴, es decir, a igual energía con 1/m⁴. Un electrón pierde 10¹³ veces más que un protón; por eso LEP se quedó en 104 GeV y el LHC acelera protones. Ecuación del modelo: $U_0 = \dfrac{e^2\beta^3\gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Factor de Lorentz: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Sustituimos
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- En electronvoltios: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^9\,\text{eV}$
- Los electrones radian 10¹³ veces más que los protones de la misma energía: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- La otra clase de partícula con igual energía y órbita: $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\text{eV}$
- Convertimos las unidades:
  $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\text{J} = 3{,}407\,\text{GeV}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

44. Estática y resistencia de materiales

El formulario Estática (Aplicaciones, campo Ingeniería) tiene tres modos. Una viga está sobre el eje x de 0 a L y la sostiene una articulación, un apoyo móvil o un empotramiento; puede cargarla con fuerzas verticales e inclinadas, momentos y una carga repartida: uniforme, triangular o trapezoidal. Varias fuerzas van en un campo separadas por espacios, sus posiciones y ángulos en el mismo orden. Las rótulas interiores forman una [[gerberBeam|viga Gerber]].

El procedimiento empieza con el [[freeBody|diagrama de cuerpo libre]]: las reacciones sustituyen a los apoyos y el rango de las ecuaciones de equilibrio muestra la [[staticDeterminacy|determinación estática]]. Si la viga es hiperestática o la sustentación es crítica, la app lo dice con el grado de indeterminación. Las ecuaciones se resuelven una a una, siempre la que tiene una sola incógnita (un momento respecto a un apoyo; en una viga Gerber primero la parte tras la rótula), y una ecuación no usada sirve de comprobación.

La app da los esfuerzos N, T y M por tramos entre los puntos notables y encuentra el momento flector máximo con el [[schwedlerTheorem|teorema de Schwedler]]: donde el cortante es nulo o donde salta. Bajo el dibujo de la viga con cargas y reacciones están los diagramas de N, T y M a la misma escala de longitud.

El modo Cuerpo en el plano calcula las reacciones de un cuerpo dado por los puntos de los apoyos y los puntos de aplicación de las fuerzas, por ejemplo una escalera apoyada en una pared. En un apoyo móvil elige la dirección de la reacción con el ángulo β.

Las propiedades de la sección son el área, el [[centroid|centroide]], los momentos de inercia por el [[parallelAxisTheorem|teorema de Steiner]], los [[sectionModulus|módulos resistentes]] y, en secciones asimétricas, los [[principalAxes|ejes principales]], para rectángulo, tubo, perfiles T, I, U, L y una sección compuesta de rectángulos y círculos con huecos. El dibujo muestra la sección a escala con su centroide y ejes. Se desprecian los redondeos de los perfiles laminados.

El formulario Cisterna con líquido calcula una cisterna parcialmente llena al frenar, arrancar y en curva. La superficie se inclina perpendicular a la resultante del peso y la fuerza de inercia (tan θ = a/g), el centro de gravedad del líquido se mueve y con él el del conjunto. Las cargas por eje son las reacciones de una viga sobre dos apoyos; en curva la app calcula la [[loadTransferRatio|transferencia de carga]] a las ruedas exteriores y la velocidad crítica de vuelco, comparadas con una carga rígida, y la frecuencia propia del [[sloshing|oleaje]]. Hay una demo interactiva en mathtrace.app, en «Pruébalo».

El formulario Diseño de vigas compara tres variantes de una viga a flexión: el perfil normalizado más ligero de las tablas (IPE, HEB, tubos circulares y rectangulares), la sección constante óptima de una forma elegida (rectángulo, círculo, tubo con esbeltez de pared limitada) y una [[uniformStrengthBeam|viga de igual resistencia]]. Vigila la resistencia, la flecha admisible L/n y el

cortante en el extremo libre; el procedimiento muestra qué condición está [[activeConstraint|activa]] y el gráfico la sección, el momento y la flecha a lo largo. La inspiración fue un trabajo de fin de máster de optimización: un brazo diseñado por optimización salió bastante más ligero que uno según tablas.

Ejemplos

Una viga simplemente apoyada con una fuerza y una carga repartida en parte: reacciones, tramos y momento máximo.

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

Resultado

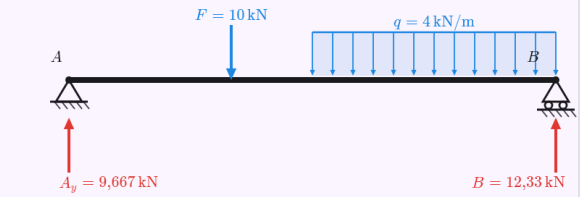
$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$

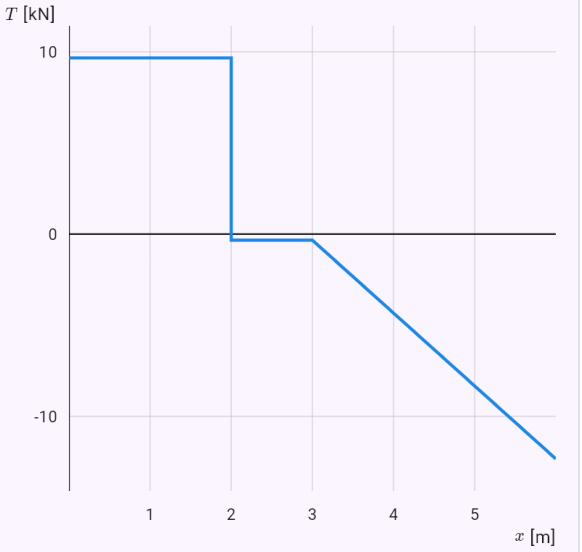
$x \approx 2\,\mathrm{m}$

Pasos

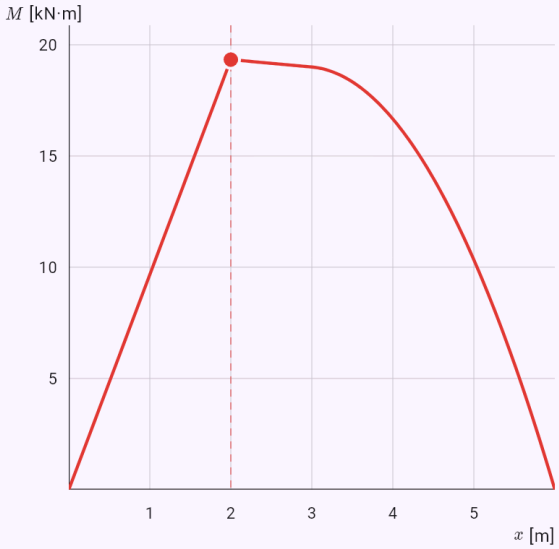
- Buscamos M_{max}; datos
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- La viga está sobre el eje x de 0 a L. Una articulación transmite una fuerza horizontal y una vertical, un apoyo móvil solo la fuerza perpendicular a su base, un empotramiento además un momento. Una fuerza forma con la viga el ángulo α (90° = vertical hacia abajo), un momento es positivo en sentido antihorario, una carga repartida positiva hacia abajo. Las rótulas interiores forman una viga Gerber: en la rótula el momento flector es nulo, lo que da una ecuación más. Los diagramas de N, T y M se construyen por tramos con el teorema de Schwedler. Ecuación del modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultante de la carga repartida (en el centroide del área de carga):
  $Q = q\,l = 4\cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Reacciones desconocidas: $A_x,\ A_y,\ B$
- Estáticamente determinado: tantas incógnitas como ecuaciones independientes (n incógnitas, e ecuaciones, h el rango): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 - 10\cdot 2 - 12\cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y\cdot 6 + 10\cdot 4 + 12\cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Suma de las fuerzas horizontales:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Comprobación con una ecuación no utilizada:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Teorema de Schwedler: la derivada del momento flector es el cortante y la derivada del cortante es la carga repartida cambiada de signo. Donde T es nulo, M tiene un extremo.
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [0,\ 2]: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [2,\ 3]: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [3,\ 6]: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2x^2$
- El momento flector máximo está donde el cortante salta:
  $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Un momento flector positivo curva la viga hacia abajo (las fibras inferiores traccionadas), uno negativo hacia arriba, típicamente sobre un apoyo o en el empotramiento.

Gráfica





T – esfuerzo cortante



M – momento flector $M_{max} = 19{,}33\,\text{kN}\cdot\text{m}$

La viga liberada con las cargas (azul) y las reacciones (rojo); debajo, los diagramas de esfuerzos a la misma escala de longitud. Las flechas no están a escala de fuerzas.

Un voladizo con fuerza inclinada en el extremo y carga uniforme: reacciones horizontal y vertical y momento de empotramiento.

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

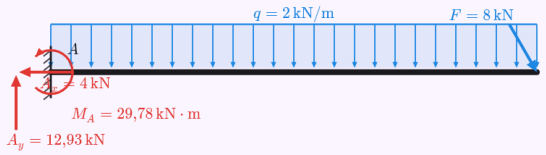
Resultado

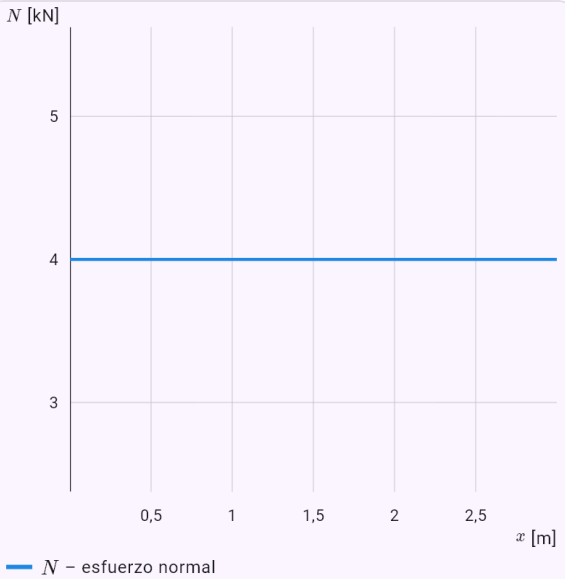
$$A_x = -4\,\text{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\text{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

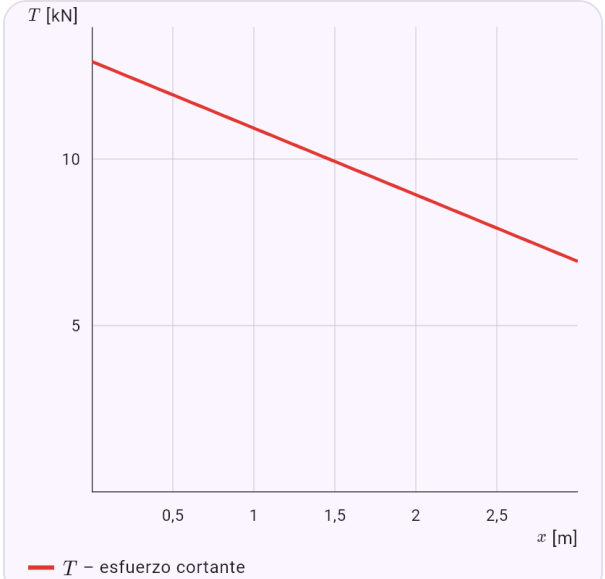
Pasos

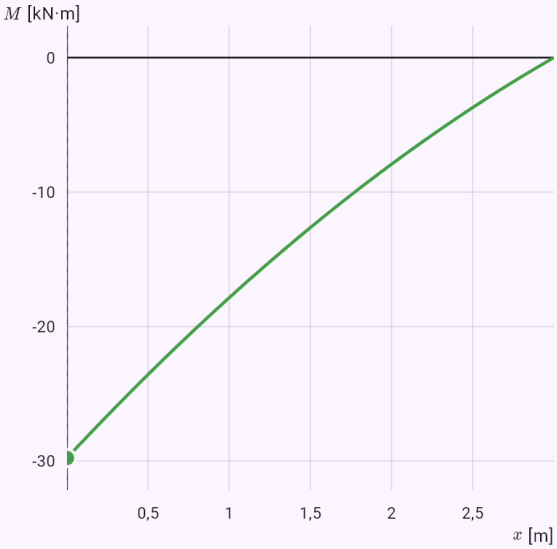
- Buscamos R; datos
  $L = 3\,\text{m}, \quad F = 8\,\text{kN}, \quad x_F = 3\,\text{m}, \quad \alpha = 60\,^\circ, \quad q_a =$
- La viga está sobre el eje x de 0 a L. Una articulación transmite una fuerza horizontal y una vertical, un apoyo móvil solo la fuerza perpendicular a su base, un empotramiento además un momento. Una fuerza forma con la viga el ángulo α (90° = vertical hacia abajo), un momento es positivo en sentido antihorario, una carga repartida positiva hacia abajo. Las rótulas interiores forman una viga Gerber: en la rótula el momento flector es nulo, lo que da una ecuación más. Los diagramas de N, T y M se construyen por tramos con el teorema de Schwedler. Ecuación del modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultante de la carga repartida (en el centroide del área de carga):
  $Q = q\,l = 2 \cdot 3 = 6\,\text{kN}, \quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\text{m}$
- Componentes de la fuerza inclinada:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\text{kN}, \quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\text{kN}$
- Reacciones desconocidas: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Estáticamente determinado: tantas incógnitas como ecuaciones independientes (n incógnitas, e ecuaciones, h el rango): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad M_A - 6{,}928 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M$
- Suma de las fuerzas horizontales:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -4\,\text{kN}$
- Suma de las fuerzas verticales
  $\sum F_y = 0: \quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12{,}93$

Gráfica









La viga liberada con las cargas (azul) y las reacciones (rojo); debajo, los diagramas de esfuerzos a la misma escala de longitud. Las flechas no están a escala de fuerzas.

Una viga Gerber sobre tres apoyos con rótula: el cálculo empieza por la parte tras la rótula.

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller;`

```
xB=6[m]; xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

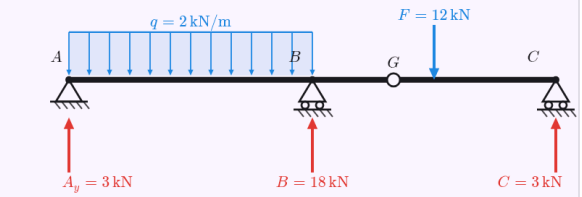
Resultado

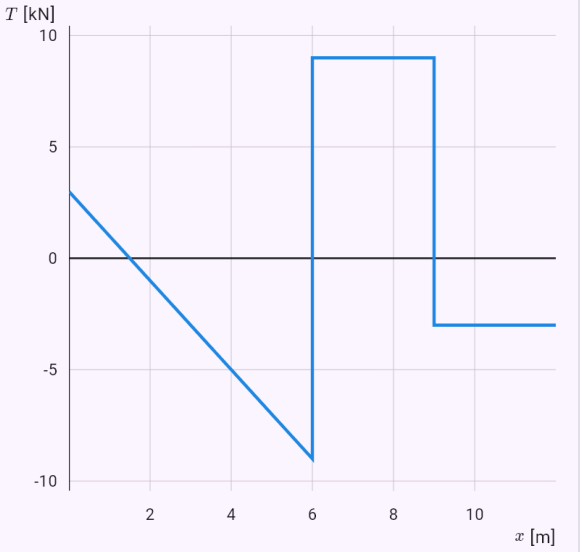
$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

Pasos

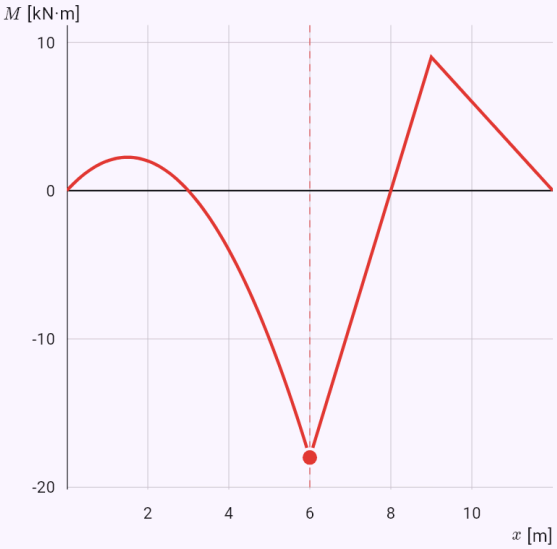
- Buscamos M_{max}; datos
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- La viga está sobre el eje x de 0 a L. Una articulación transmite una fuerza horizontal y una vertical, un apoyo móvil solo la fuerza perpendicular a su base, un empotramiento además un momento. Una fuerza forma con la viga el ángulo α (90° = vertical hacia abajo), un momento es positivo en sentido antihorario, una carga repartida positiva hacia abajo. Las rótulas interiores forman una viga Gerber: en la rótula el momento flector es nulo, lo que da una ecuación más. Los diagramas de N, T y M se construyen por tramos con el teorema de Schwedler. Ecuación del modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultante de la carga repartida (en el centroide del área de carga):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Reacciones desconocidas: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Estáticamente determinado: tantas incógnitas como ecuaciones independientes (n incógnitas, e ecuaciones, h el rango): $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- El momento de la parte a la derecha de la rótula respecto a ella es nulo:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- El momento de la parte a la izquierda de la rótula respecto a ella es nulo
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Suma de las fuerzas horizontales:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Comprobación con una ecuación no utilizada:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Teorema de Schwedler: la derivada del momento flector es el cortante y la derivada del cortante es la carga repartida cambiada de signo. Donde T es nulo, M tiene un extremo.
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [0,\ 6]: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [6,\ 9]: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Esfuerzos internos en el tramo (x en m, fuerzas en kN, momentos en kN·m):
  $x \in [9,\ 12]: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- El momento flector máximo está donde el cortante salta:
  $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Un momento flector positivo curva la viga hacia abajo (las fibras inferiores traccionadas), uno negativo hacia arriba, típicamente sobre un apoyo o en el empotramiento.

Gráfica





T – esfuerzo cortante



M – momento flector $M_{max} = -18\,\mathrm{kN \cdot m}$

La viga liberada con las cargas (azul) y las reacciones (rojo); debajo, los diagramas de esfuerzos a la misma escala de longitud. Las flechas no están a escala de fuerzas.

Una escalera apoyada en una pared lisa con el peso de la escalera y de una persona: reacciones en el suelo y en la pared.

Enunciado: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

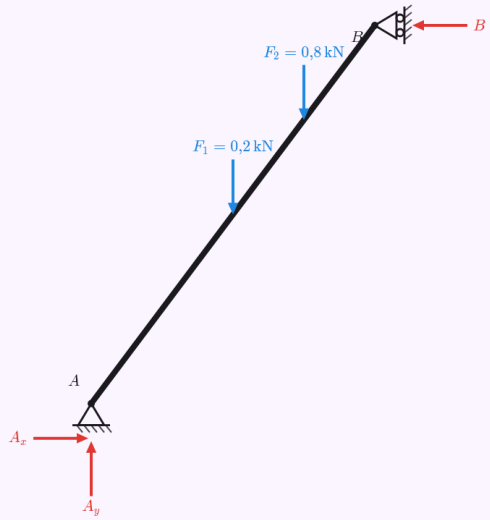
Resultado

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Pasos

- Buscamos R; datos
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Un cuerpo en el plano dado por los puntos de sus apoyos y los puntos de aplicación de las fuerzas (x a la derecha, y hacia arriba). En un apoyo móvil, el ángulo β da la dirección de la reacción: 90° desde abajo, 0° desde una pared a la izquierda hacia la derecha, 180° desde una pared a la derecha hacia la izquierda. Ejemplo: una escalera apoyada en una pared lisa: el pie sujeto al suelo por rozamiento (articulación) y el extremo superior deslizando por la pared (apoyo móvil). Ecuación del modelo: $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Reacciones desconocidas: $A_x,\ A_y,\ B$
- Estáticamente determinado: tantas incógnitas como ecuaciones independientes (n incógnitas, e ecuaciones, h el rango): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Suma de las fuerzas horizontales
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Suma de momentos respecto a un apoyo: una ecuación con una sola incógnita
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Comprobación con una ecuación no utilizada:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Gráfica



El cuerpo liberado: cargas en azul, reacciones de los apoyos en rojo. Las flechas no están a escala de fuerzas. Los valores de las reacciones están en el resultado.

Un empotramiento con un apoyo móvil es hiperestático de grado 1.

Enunciado: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

`xF=2[m])`

Resultado

$$s = n - h = 1$$

Pasos

- Buscamos R; datos:
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- La viga está sobre el eje x de 0 a L. Una articulación transmite una fuerza horizontal y una vertical, un apoyo móvil solo la fuerza perpendicular a su base, un empotramiento además un momento. Una fuerza forma con la viga el ángulo α (90° = vertical hacia abajo), un momento es positivo en sentido antihorario, una carga repartida positiva hacia abajo. Las rótulas interiores forman una viga Gerber: en la rótula el momento flector es nulo, lo que da una ecuación más. Los diagramas de N, T y M se construyen por tramos con el teorema de Schwedler. Ecuación del modelo:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Reacciones desconocidas: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Estáticamente indeterminado: más incógnitas que ecuaciones independientes:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Hay más reacciones desconocidas de las que dan las ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones que faltan salen de la deformación (p. ej. flecha nula sobre un apoyo); la app aún no resuelve vigas hiperestáticas. El grado s indica cuántos apoyos sobran.

Gráfica



La viga liberada con las cargas (azul) y las reacciones (rojo); debajo, los diagramas de esfuerzos a la misma escala de longitud. Las flechas no están a escala de fuerzas.

Sección en T: centroide, momento de inercia y módulo resistente.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

`tf=20[mm]; tw=20[mm])`

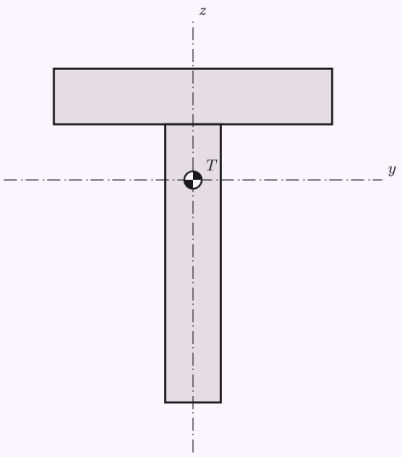
Resultado

$$W_y \approx 66\,670\,\text{mm}^3$$

Pasos

- Buscamos W_y; datos
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 120\,\text{mm}, \quad t_f = 20\,\text{mm}, \quad t_w = 20$
- Dividimos la sección en rectángulos y círculos y restamos los huecos. El centroide es la media ponderada de los centroides de las partes, los momentos de inercia respecto a los ejes que pasan por él salen del teorema de Steiner. El eje y es horizontal y z vertical, así que I_y decide la flexión en el plano vertical. Del momento y la distancia de las fibras extremas sale el módulo resistente W y, en una sección asimétrica (L), también los ejes principales. Despreciamos los redondeos de los perfiles laminados, por eso los valores difieren un poco de las tablas. Ecuación del modelo
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Parte de la sección
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\text{mm}, \quad z_1 =$
- Parte de la sección
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\text{mm}, \quad z_2 =$
- Área de la sección: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\text{mm}^2$
- Centroide como media ponderada de los centroides de las partes
  $y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\text{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\text{mm}^4,$
- Momentos de inercia de toda la sección
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Módulos resistentes (e = distancia de las fibras extremas al centroide)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$
- Radios de giro
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\text{mm}$

Gráfica



La sección a escala real con su centroide T y los ejes y, z que pasan por él; en una sección asimétrica también los ejes principales 1, 2.

Angular de alas iguales L: producto de inercia y ejes principales a 45°.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm];`

`t=10[mm])`

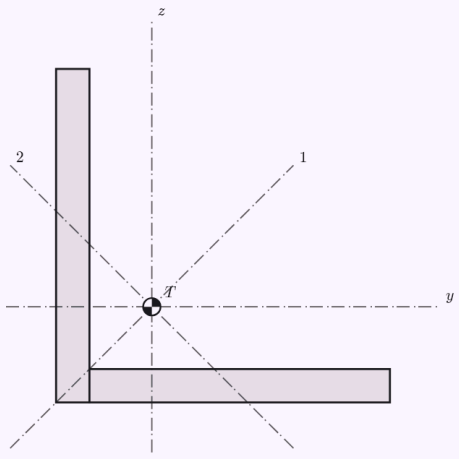
Resultado

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\text{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\text{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Pasos

- Buscamos I_1; datos:
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad t = 10\,\text{mm}$
- Dividimos la sección en rectángulos y círculos y restamos los huecos. El centroide es la media ponderada de los centroides de las partes, los momentos de inercia respecto a los ejes que pasan por él salen del teorema de Steiner. El eje y es horizontal y z vertical, así que I_y decide la flexión en el plano vertical. Del momento y la distancia de las fibras extremas sale el módulo resistente W y, en una sección asimétrica (L), también los ejes principales. Despreciamos los redondeos de los perfiles laminados, por eso los valores difieren un poco de las tablas. Ecuación del modelo
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$$
- Parte de la sección
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\text{mm}, \quad z_1 =$$
- Parte de la sección
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\text{mm}, \quad z_2 =$$
- Área de la sección: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\text{mm}^2$
- Centroide como media ponderada de los centroides de las partes
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\text{mm}, \quad z_T =$$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\text{mm}^4,$$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\text{mm}^4,$$
- Momentos de inercia de toda la sección
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$$
- Producto de inercia
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\text{mm}^4$$
- Momentos de inercia principales
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Giro del eje principal 1 respecto al eje y:
  $$\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Módulos resistentes (e = distancia de las fibras extremas al centroide)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$$
- Radios de giro
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}$$

Gráfica



La sección a escala real con su centroide T y los ejes y, z que pasan por él; en una sección asimétrica también los ejes principales 1, 2.

Una placa con un hueco circular descentrado: sección compuesta y centroide desplazado.

Enunciado: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm];`

`rh=100[mm]; ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])`

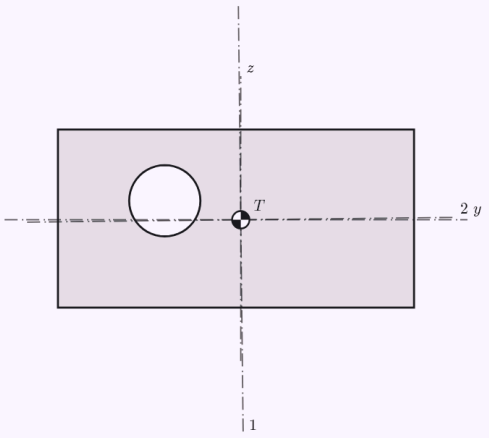
Resultado

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\text{mm}^4$$

Pasos

- Buscamos I_y; datos
  $b = 200\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad y = 0\,\text{mm}, \quad z = 0\,\text{mm}$
- Dividimos la sección en rectángulos y círculos y restamos los huecos. El centroide es la media ponderada de los centroides de las partes, los momentos de inercia respecto a los ejes que pasan por él salen del teorema de Steiner. El eje y es horizontal y z vertical, así que I_y decide la flexión en el plano vertical. Del momento y la distancia de las fibras extremas sale el módulo resistente W y, en una sección asimétrica (L), también los ejes principales. Despreciamos los redondeos de los perfiles laminados, por eso los valores difieren un poco de las tablas. Ecuación del modelo
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y =$
- Parte de la sección
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\text{mm},$
- Hueco (se resta)
  $2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\text{mm},$
- Área de la sección: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\text{mm}^2$
- Centroide como media ponderada de los centroides de las partes
  $y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\text{mm}, \quad z_T =$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\text{m}$
- Teorema de Steiner: momento propio de la parte + área × cuadrado de la distancia entre ejes
  $I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\text{mm}^4,$
- Momentos de inercia de toda la sección
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Producto de inercia
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\text{mm}^4$
- Momentos de inercia principales
  $I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$
- Giro del eje principal 1 respecto al eje y
  $\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$
- Módulos resistentes (e = distancia de las fibras extremas al centroide)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$
- Radios de giro
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\text{mm}$

Gráfica



La sección a escala real con su centroide T y los ejes y, z que pasan por él; en una sección asimétrica también los ejes principales 1, 2.

Una cisterna medio llena de agua frena a 5 m/s²: el eje delantero lleva decenas de por ciento más.

Enunciado: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

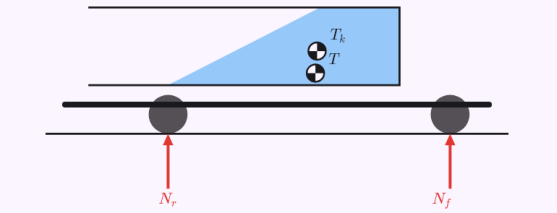
Resultado

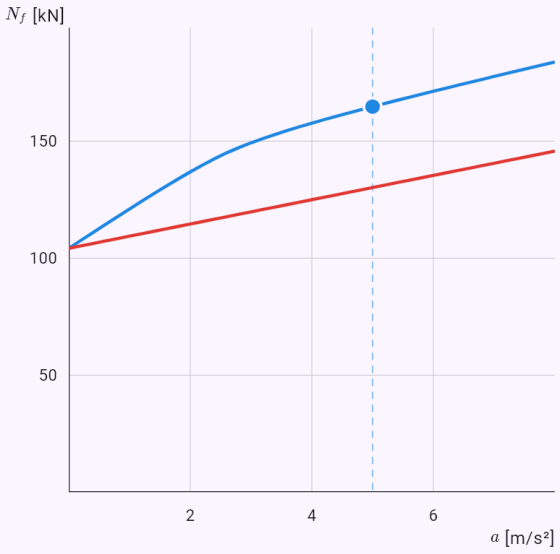
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Pasos

- Buscamos N_f; datos
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Frenado con la deceleración a: el líquido se va hacia delante, la superficie se inclina el ángulo θ y el centro de gravedad avanza y sube. Las cargas por eje son las reacciones de una viga sobre dos apoyos con la fuerza de inercia m·a en el centro de gravedad. Ecuación del modelo: $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$
- Volumen del tanque y del líquido
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Inclinación de la superficie: perpendicular a la resultante del peso y la fuerza de inercia
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- El centro de gravedad del líquido avanza y sube
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Centro de gravedad de todo el vehículo
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Cargas por eje de los momentos respecto al eje trasero (fuerza de inercia en el centro de gravedad)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Eje delantero en reposo y en marcha; con carga rígida
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Frecuencia propia de la primera ola (oleaje)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- El modelo cuasiestático vale para un frenado sostenido. Tras un frenazo el líquido oscila con el periodo T y sus golpes contra la pared pueden aumentar la carga por un momento aún más; por eso las cisternas tienen mamparas.

Gráfica





Vista lateral con la superficie inclinada, el centro de gravedad del líquido T_k, el del conjunto T y las cargas por eje; el gráfico muestra la carga del eje delantero según la deceleración para el líquido y una carga rígida.

La misma cisterna en una curva de R = 60 m: la velocidad crítica con el líquido y con una carga rígida.

Enunciado: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];`

```
W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])
```

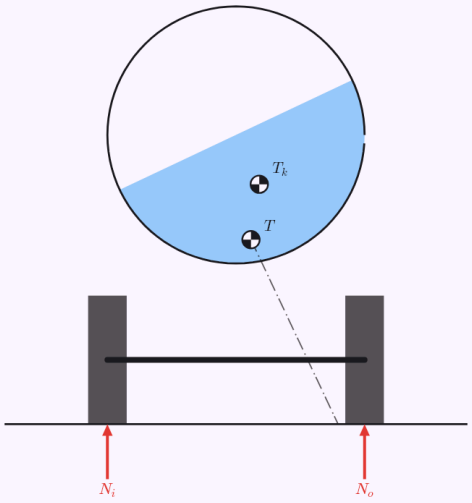
Resultado

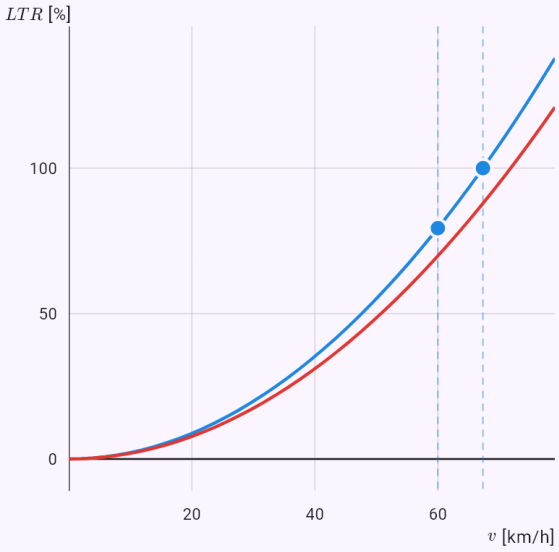
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Pasos

- Buscamos v_{krit}; datos
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Una curva de radio R a la velocidad v: la aceleración centrípeta a = v²/R, el líquido se desplaza hacia fuera y con él el centro de gravedad. El vehículo vuelca cuando la resultante del peso y la fuerza centrífuga pasa por las ruedas exteriores (LTR = 100 %). El balanceo de la carrocería sobre la suspensión (k_r grados por g) lleva el centro de gravedad aún más afuera. Ecuación del modelo: $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Volumen del tanque y del líquido
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m}^3, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m}^3, \quad m_k = \rho V_k =$
- Aceleración centrípeta en la curva
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Inclinación de la superficie: perpendicular a la resultante del peso y la fuerza de inercia:
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Centro del líquido en la sección (y hacia fuera de la curva): $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- El balanceo de la carrocería lleva el centro de gravedad aún más afuera
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Transferencia de carga a las ruedas exteriores
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Límite de vuelco: la resultante pasa por las ruedas exteriores
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Carga rígida para comparar:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Frecuencia propia de la primera ola (oleaje)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Las cisternas reales vuelcan ya hacia 0,35–0,45 g: además del balanceo en la suspensión se deforman los neumáticos y el líquido oscila en la curva. El límite cuasiestático es una estimación superior.

Gráfica





LTR – líquido LTR – carga rígida
$v_{krit} = 67{,}33\,\mathrm{km/h}$ $LTR = 79{,}39\,\%$

Vista trasera en la curva (hacia fuera a la derecha) con la superficie inclinada, el centro de gravedad y la resultante; el gráfico muestra la transferencia de carga a las ruedas exteriores según la velocidad: al 100 % se levantan las ruedas interiores.

Un voladizo de 2 m con 10 kN: IPE 200 de las tablas, el tubo óptimo y un tubo de igual resistencia.

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

Resultado

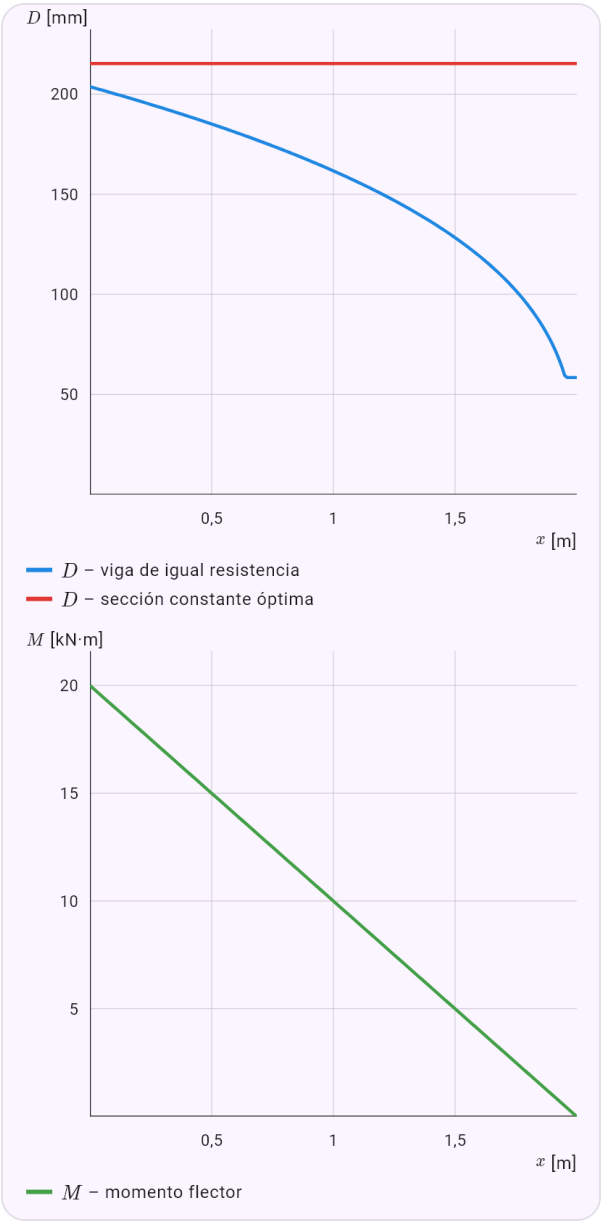
$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\text{kg}$$

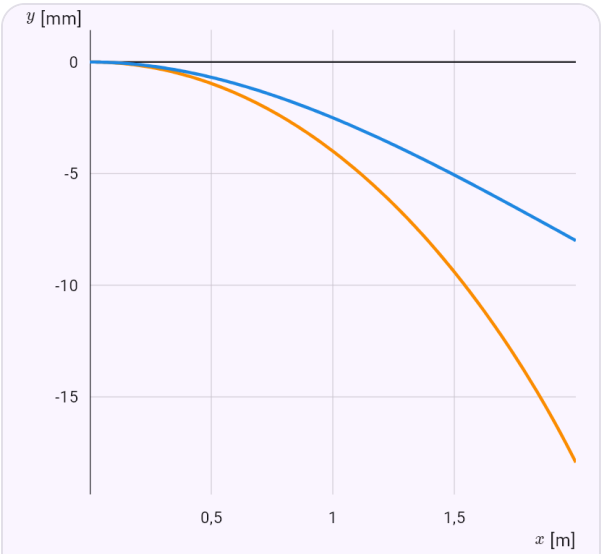
Pasos

- Buscamos m; datos
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Un voladizo de longitud L con una fuerza F en el extremo libre o una carga repartida q en toda su longitud. El momento máximo está en el empotramiento. Ecuación del modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento flector máximo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condición de resistencia: el módulo resistente mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condición de flecha (integrando E·I·y'' = −M): el momento de inercia mínimo
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\text{cm}^4$$
- El perfil adecuado más ligero de cada serie
  $\text{IPE}\,200: \ W = 194\,\text{cm}^3,\ I = 1943\,\text{cm}^4,\ 22{,}37\,\text{kg/m},$
- 1. Según tablas: el más ligero de todos
  $\text{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Una pared más delgada da menos área con el mismo W, así que el óptimo está en el límite de esbeltez:
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 50$$
- 2. Sección constante óptima: el tamaño mínimo que cumple ambas condiciones
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\text{mm}$$
- Está activa la condición de flecha (la tensión queda por debajo de la admisible): $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Área y masa de la sección óptima:
  $A = 28{,}53\,\text{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistencia: σ(x) = σ_adm en todas partes, en el extremo libre la sección mínima por cortante
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\text{mm}$$
- Masa y flecha de la viga de igual resistencia
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\text{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\text{mm}$$
- La viga de igual resistencia solo vigila la tensión, por eso es más flexible y supera la flecha admisible. En la práctica se aumenta su sección o se usa donde decide la resistencia.
- Masa de las variantes frente al perfil de las tablas:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$$
- Se desprecia el peso propio de la viga; en vigas largas y pesadas se suma a la carga repartida.

Gráfica







La viga con su carga; debajo, la altura (diámetro) de la sección a lo largo, el momento flector y la flecha, para la sección constante óptima y la viga de igual resistencia.

Un rectángulo de igual resistencia de anchura constante: la altura es una parábola, un tercio menos de material.

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Resultado

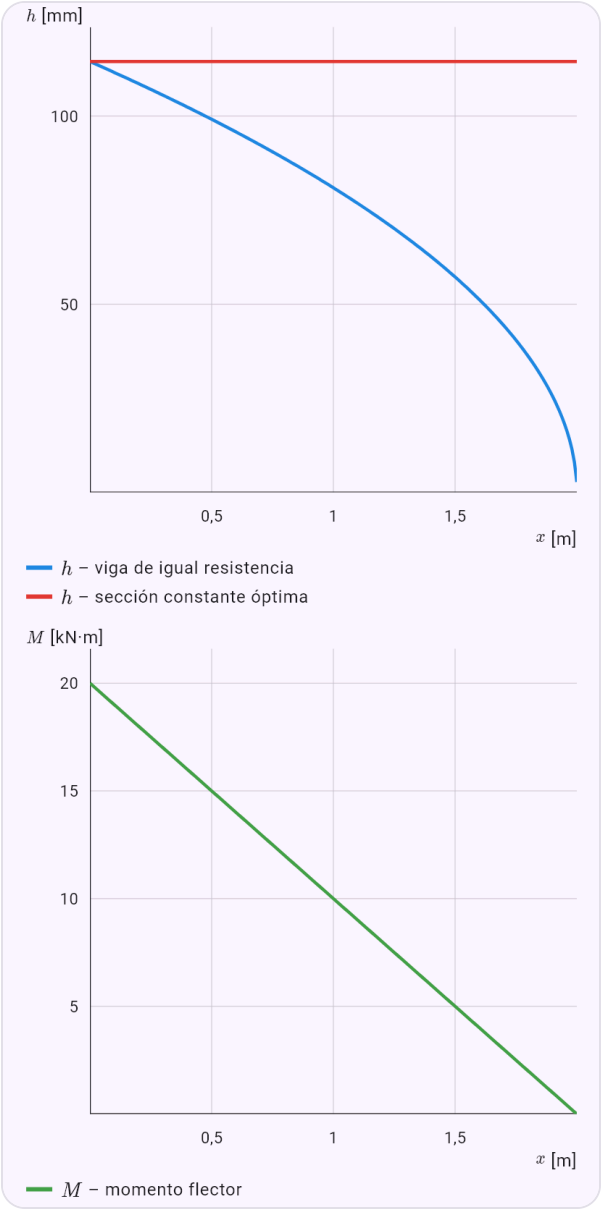
$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$
$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

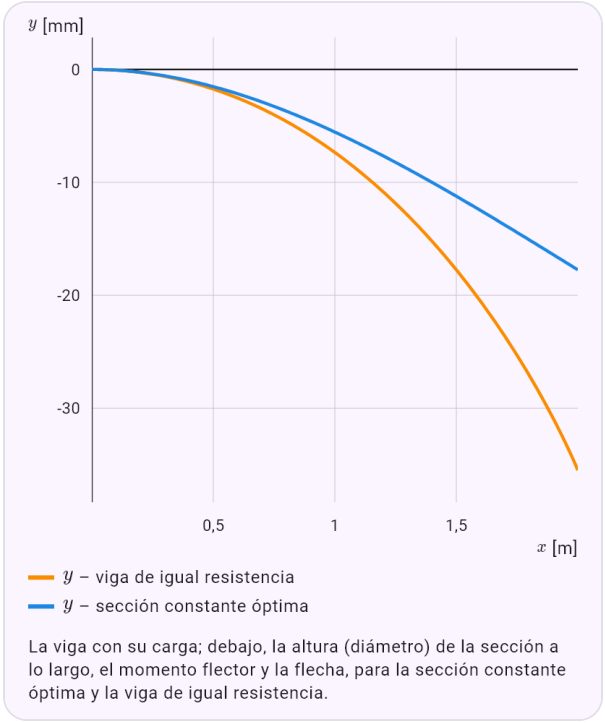
Pasos

- Buscamos m; datos
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Un voladizo de longitud L con una fuerza F en el extremo libre o una carga repartida q en toda su longitud. El momento máximo está en el empotramiento. Ecuación del modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento flector máximo: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condición de resistencia: el módulo resistente mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Condición de flecha (integrando E·I·y'' = −M): el momento de inercia mínimo
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- El perfil adecuado más ligero de cada serie
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Según tablas: el más ligero de todos
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Sección constante óptima: el tamaño mínimo que cumple ambas condiciones
  $b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm}$ =
- Está activa la condición de resistencia (la flecha queda por debajo de la admisible): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Área y masa de la sección óptima:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistencia: σ(x) = σ_adm en todas partes, en el extremo libre la sección mínima por cortante
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Masa y flecha de la viga de igual resistencia
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Masa de las variantes frente al perfil de las tablas:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$
- Se desprecia el peso propio de la viga; en vigas largas y pesadas se suma a la carga repartida.

Gráfica







La viga con su carga; debajo, la altura (diámetro) de la sección a lo largo, el momento flector y la flecha, para la sección constante óptima y la viga de igual resistencia.

Una viga simplemente apoyada de 6 m con carga repartida: decide la flecha.

Enunciado: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

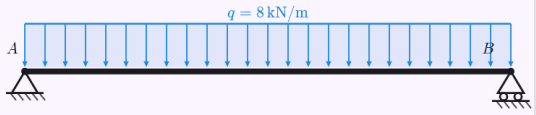
Resultado

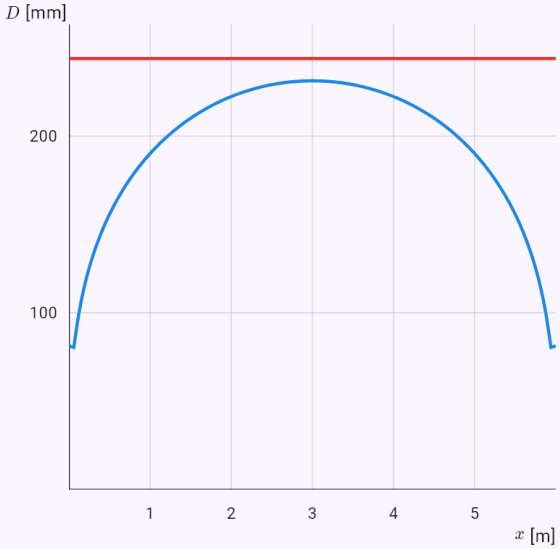
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\text{kg}$$

Pasos

- Buscamos m; datos
  $L = 6\,\text{m}, \quad q = 8\,\text{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Una viga simplemente apoyada de longitud L con una fuerza F en el centro o una carga repartida q en toda su longitud. El momento máximo está en el centro.
  Ecuación del modelo
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Momento flector máximo: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Condición de resistencia: el módulo resistente mínimo
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\text{cm}^3$$
- Condición de flecha (integrando E·I·y'' = −M): el momento de inercia mínimo
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\text{cm}^4$$
- El perfil adecuado más ligero de cada serie
  $\text{IPE}\,240:\ W = 324\,\text{cm}^3,\ I = 3892\,\text{cm}^4,\ 30{,}69\,\text{kg/m},$
- 1. Según tablas: el más ligero de todos
  $\text{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Una pared más delgada da menos área con el mismo W, así que el óptimo está en el límite de esbeltez:
  $$\frac{D}{t} = \lambda = 40$$
- 2. Sección constante óptima: el tamaño mínimo que cumple ambas condiciones
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\text{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\text{mm}$$
- Está activa la condición de flecha (la tensión queda por debajo de la admisible): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Área y masa de la sección óptima:
  $A = 45{,}5\,\text{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\text{kg}$
- 3. Viga de igual resistencia: σ(x) = σ_adm en todas partes, en el extremo libre la sección mínima por cortante
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\text{mm}$$
- Masa y flecha de la viga de igual resistencia
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\text{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\text{mm}$$
- La viga de igual resistencia solo vigila la tensión, por eso es más flexible y supera la flecha admisible. En la práctica se aumenta su sección o se usa donde decide la resistencia.
- Masa de las variantes frente al perfil de las tablas:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$$
- Se desprecia el peso propio de la viga; en vigas largas y pesadas se suma a la carga repartida.

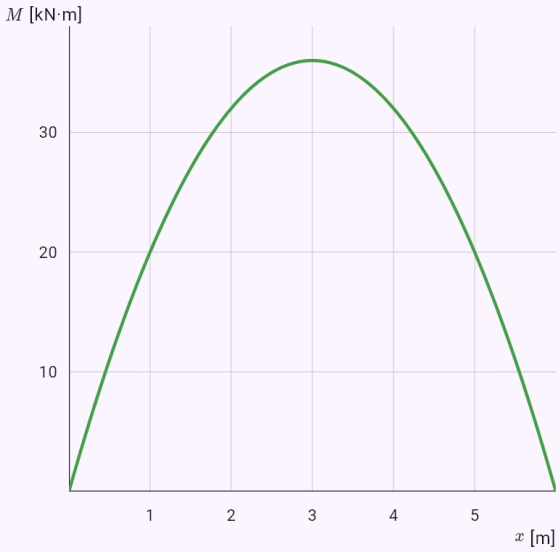
Gráfica



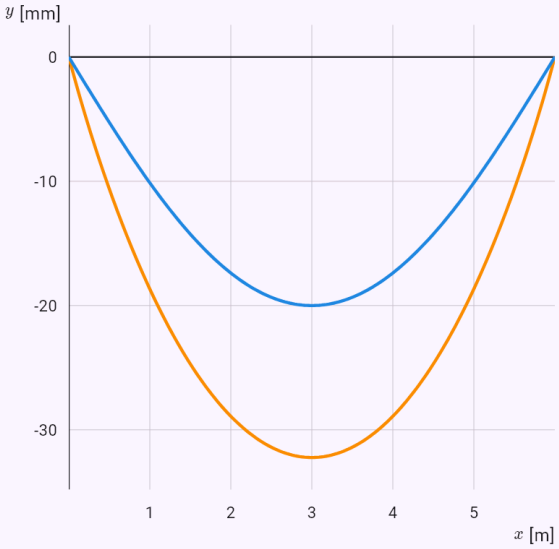


D – viga de igual resistencia

D – sección constante óptima



M – momento flector



y – viga de igual resistencia

y – sección constante óptima

La viga con su carga; debajo, la altura (diámetro) de la sección a lo largo, el momento flector y la flecha, para la sección constante óptima y la viga de igual resistencia.

45. Astronomía y astrofísica

El campo Astronomía y astrofísica está en la sección «Aplicaciones». Además de las leyes de Kepler, la influencia mutua de los cuerpos y el problema de los tres cuerpos (descritos en el capítulo Física), tiene los formularios Agujeros negros, Estrellas de neutrones, Ondas gravitacionales, Magnitudes y distancias, Radiación de las estrellas, Corrimiento al rojo y ley de Hubble, y Exoplanetas. Las fórmulas son dadas y los pasos muestran la sustitución. La app no resuelve las ecuaciones de la relatividad general; usa solo sus resultados para un agujero negro sin rotación.

El formulario Agujeros negros calcula el [[schwarzschildRadius|radio de Schwarzschild]], la esfera de fotones y la órbita estable más interna, la «densidad» de un agujero negro con un gráfico según la masa en escala logarítmica, la velocidad de escape, la dilatación gravitacional del tiempo y el corrimiento al rojo (también para dos relojes, como el GPS), la fuerza de marea, la temperatura de Hawking con el tiempo de evaporación y la masa de Sgr A* a partir de la órbita de la estrella S2. El menú de objetos rellena el Sol, la Tierra, una estrella de neutrones, un agujero negro estelar, Sgr A* o M87*.

Las estrellas de neutrones tienen la densidad, la gravedad en la superficie, la aceleración del giro en el colapso por la conservación del momento angular y el periodo de rotación más corto posible. Las ondas gravitacionales dan la frecuencia a partir de la separación de un par en órbita (y viceversa) y la energía radiada en una fusión como GW150914.

Lo básico de un curso de introducción a la astronomía: la ecuación de Pogson, el módulo de distancia con la [[absoluteMagnitude|magnitud absoluta]] y el paralaje; las leyes de Wien y de Stefan-Boltzmann de un [[blackBody|cuerpo negro]], la constante solar y la temperatura de equilibrio de un planeta; el [[redshift|corrimiento al rojo]] Doppler y la ley de Hubble con el tiempo de Hubble; en exoplanetas la profundidad del tránsito, el método de la velocidad radial y la [[habitableZone|zona habitable]].

A las leyes de Kepler se ha añadido la transferencia de Hohmann entre dos órbitas circulares (Δv y duración del vuelo), y a la influencia mutua de los cuerpos el [[rocheLimit|límite de Roche]] y la esfera de Hill.

Ejemplos

En qué bola tan pequeña habría que comprimir la Tierra para convertirla en agujero negro.

Enunciado: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Resultado

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

Pasos

- Buscamos r_s; datos: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Convertimos las unidades:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- El radio de Schwarzschild r_s = 2GM/c² es el radio del horizonte de sucesos. La Tierra tendría que comprimirse en una bola de unos 18 mm de diámetro, el Sol en una de 3 km de radio. La luz puede orbitar en la esfera de fotones a 1,5 r_s, y la órbita estable más interna de la materia (ISCO) está a 3 r_s. Ecuación del modelo
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Sustituimos
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Para un agujero negro sin rotación. Alrededor de uno en rotación (Kerr), la ISCO y la esfera de fotones están más cerca.
- Convertimos las unidades: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

La «densidad» del agujero negro M87* – menor que la del aire.

Enunciado: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

Resultado

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

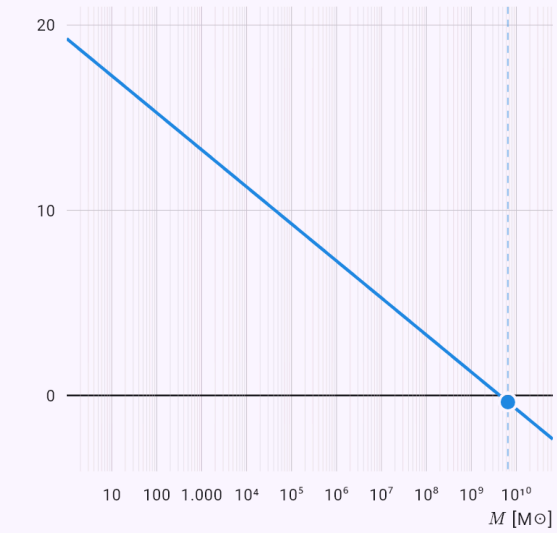
Pasos

- Buscamos ρ; datos: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Convertimos las unidades:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- La «densidad» media dentro del horizonte: la masa dividida por el volumen de una esfera de radio r_s. Cae como 1/M². Un agujero negro estelar es más denso que un núcleo atómico, uno de 10^8 masas solares tiene la densidad del agua y M87* es menos denso que el aire. El gráfico muestra la masa en escala logarítmica. Ecuación del modelo: $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Sustituimos

$$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$$

- Para comparar: un núcleo atómico, el agua y el aire (unos 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Menos denso que el aire – la «densidad» es solo una media sobre el volumen del horizonte.

Gráfica



El eje horizontal es logarítmico: cada marca es diez veces la anterior. El punto es el valor dado o la respuesta.

Cuánto adelantan cada día los relojes de los satélites GPS por la gravedad.

Enunciado: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km];`

`t=1[d]; mode=gravdilation; astro=earth)`

Resultado

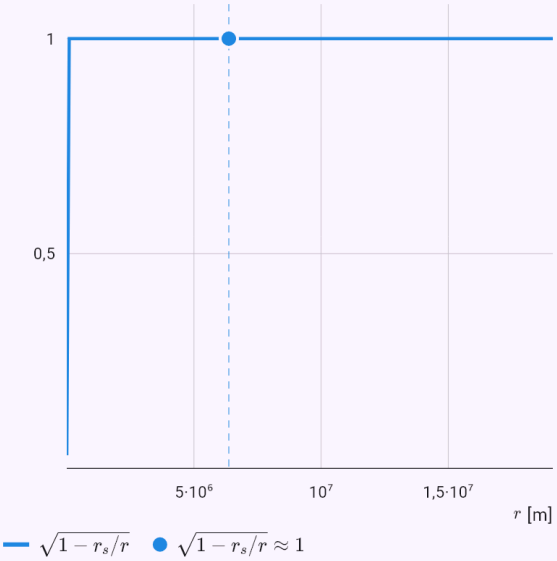
$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Pasos

- Buscamos Δt; datos
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Convertimos las unidades
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Los relojes cerca de un cuerpo masivo van más despacio: dτ/dt = √(1 − r_s/r). La luz de allí llega desplazada al rojo. Con una segunda distancia r_2 se comparan dos relojes. Los satélites GPS (r_2 = 26 571 km) adelantan unos 45,7 µs al día respecto al suelo. Ecuación del modelo
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Sustituimos
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Retraso por unidad de tiempo: $1 - \dfrac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Sustituimos
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Comparación de dos relojes a distintas distancias; una diferencia positiva significa que el reloj más cercano va más despacio.
- Convertimos las unidades:

$$\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La fuerza de marea sobre una persona en el horizonte de un agujero negro estelar.

Enunciado: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

astro=stellar)

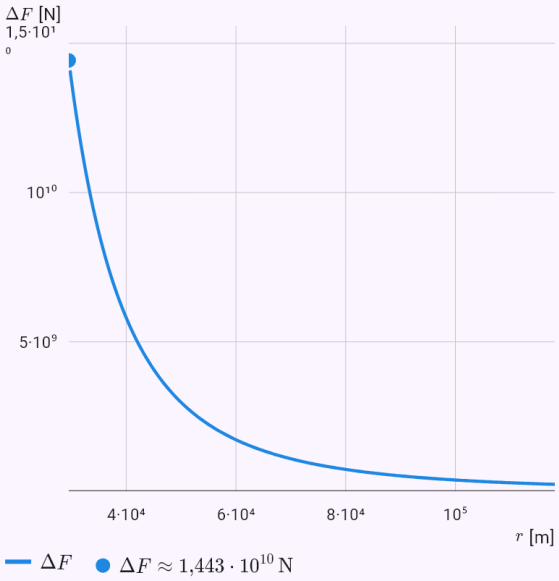
Resultado

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\ \text{N}$$

Pasos

- Buscamos ΔF_s; datos:
  $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\text{kg}, \quad L = 2\,\text{m}$
- Convertimos las unidades:
  $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\text{kg}$
- La fuerza de marea es la diferencia de gravedad entre la cabeza y los pies. Un agujero negro estelar despedaza a una persona mucho antes del horizonte («espaguetización»); en el horizonte de uno grande (Sgr A*) es minúscula. Ecuación del modelo:
  $\Delta F \approx \dfrac{2GMm\,L}{r^3}$
- Sustituimos
  $r_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\text{m}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $\Delta F_s = \dfrac{2GMm\,L}{r_s^3} = \dfrac{mLc^6}{4G^2M^2}$
- Sustituimos
  $\Delta F_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$
- En múltiplos del peso del cuerpo: $\dfrac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- La fuerza de marea es muy superior a la que soporta un cuerpo – «espaguetización».

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La masa de Sgr A* a partir de la órbita de la estrella S2.

Enunciado: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Resultado

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Pasos

- Buscamos M; datos: $a = 1019\,\text{au}, \quad T = 16{,}05\,\text{años}$
- Convertimos las unidades
  $a = 1019\,\text{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\text{m}, \quad T = 16{,}05\,\text{años} = 5{,}0$
- La estrella S2 orbita el centro de la Galaxia en una elipse de semieje mayor de unas 1 019 ua en 16,05 años. La tercera ley de Kepler da la masa de Sgr A*: unos 4 millones de soles en una región menor que el sistema solar. Esta medida recibió el Premio Nobel de Física 2020. Ecuación del modelo: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$
- Sustituimos
  $$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot (5{,}065 \cdot 10^8)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\text{kg}$$
- En masas solares: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizonte de Sgr A*
  $r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\text{m}, \quad \frac{a}{r_s} \approx 12\,570$
- Premio Nobel de Física 2020 (Genzel, Ghez) por descubrir un objeto compacto supermasivo en el centro de la Galaxia.
- Convertimos las unidades:
  $M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\text{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

El periodo de rotación del núcleo tras colapsar en estrella de neutrones.

Enunciado: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Resultado

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\text{ms}$$

Pasos

- Buscamos T_2; datos:
  $T_1 = 25{,}4\,\text{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km}, \quad R_2 = 12\,\text{km}$
- Convertimos las unidades
  $T_1 = 25{,}4\,\text{d} = 2\,195\,000\,\text{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\text{km} = 6{,}96 \cdot$
- Conservación del momento angular: cuando el núcleo se encoge, gira más deprisa y el periodo cae con el cuadrado del radio (como una patinadora que recoge los brazos). Así nacen los púlsares con periodos de milisegundos a segundos. Ecuación del modelo
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- La estrella se toma como una esfera homogénea que no pierde masa.
- Sustituimos
  $$T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$$
- Cuántas veces más deprisa gira:
  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Los púlsares reales giran más despacio (de milisegundos a segundos): el núcleo gira más lento antes del colapso y la envoltura expulsada se lleva momento angular.
- Convertimos las unidades:
  $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}6524\,\text{ms}$

La energía radiada en ondas gravitacionales en la fusión GW150914.

Enunciado: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Resultado

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Pasos

- Buscamos E; datos:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Convertimos las unidades
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- La fusión forma un agujero negro más ligero que los dos juntos. La diferencia de masa se la llevan las ondas gravitacionales como energía E = Δm·c². Ecuación del modelo: $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\, c^2$
- Sustituimos
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Fracción de masa radiada:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- Sustituimos
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$
- Comparada con toda la vida del Sol:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\mathrm{años}} \approx 4438$
- LIGO captó las ondas de GW150914 desde 1300 millones de años luz; movieron sus espejos una milésima del diámetro de un protón.

La distancia de Sirio por el módulo de distancia.

Enunciado: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod; star=sirius)`

Resultado

$$d \approx 2{,}655\,\mathrm{pc}$$

Pasos

- Buscamos d; datos: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- La magnitud absoluta M es la que tendría la estrella a 10 pc. El módulo de distancia m − M da la distancia cuando se conoce la luminosidad real de la estrella (cefeidas, supernovas Ia). Ecuación del modelo:
  $m - M = 5 \log \frac{d}{10\,\mathrm{pc}}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $d = 10\,\mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Sustituimos: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\,\mathrm{pc}$
- En años luz: $d \approx 8{,}658\,\mathrm{a.\,l.}$
- Se desprecia la absorción de la luz por el polvo interestelar; con ella la estrella parece más lejana.

La longitud de onda del máximo de radiación del Sol.

Enunciado: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

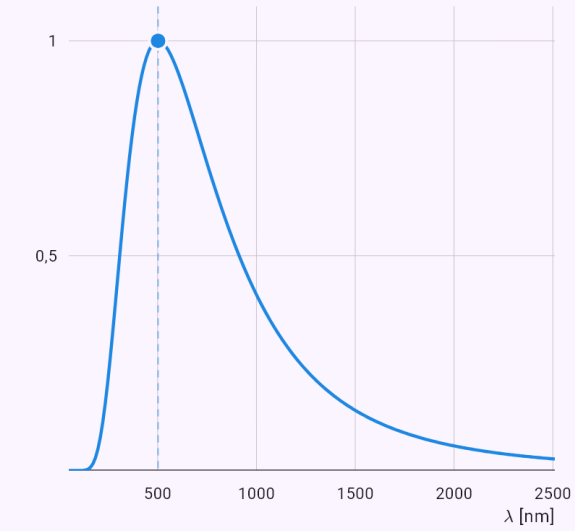
Resultado

$$\lambda_{\max} \approx 502\,\text{nm}$$

Pasos

- Buscamos $\lambda_{\max}$; datos: $T = 5772\,\text{K}$
- La ley de desplazamiento de Wien: la longitud de onda a la que un cuerpo más radia es inversamente proporcional a su temperatura. El Sol tiene su máximo en el verde (unos 500 nm), la fría Betelgeuse en el infrarrojo, la caliente Vega en el azul. Ecuación del modelo: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}$
- Constante de Wien en nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\,\text{nm}\cdot\text{K}$
- Sustituimos: $\lambda_{\max} = \dfrac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\,\text{nm}$
- El máximo está en la luz visible.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La temperatura de equilibrio de la Tierra sin efecto invernadero.

Enunciado: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium; planet=earth)`

Resultado

$$T_{\text{eq}} \approx 254\,\text{K}$$

Pasos

- Buscamos T_{eq}; datos: $L = 1\,L_\odot, \quad a = 1\,\text{au}, \quad A = 0{,}306$
- Convertimos las unidades $L = 1\,L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\text{W}, \quad a = 1\,\text{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- La constante solar S es la potencia que cae sobre 1 m² a la distancia a de la estrella. Un planeta absorbe S(1 − A) en su sección πR² y radia σT⁴ desde toda su superficie 4πR². El equilibrio da su temperatura sin efecto invernadero. Ecuación del modelo: $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eq}}^4$
- Sustituimos

$$S = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \approx 1361\,\text{W/m}^2$$

- Despejamos la magnitud buscada: $T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Sustituimos

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{1361 \cdot (1-0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\text{K}$$

- Sin efecto invernadero. La temperatura media real de la Tierra es mayor: $T_\oplus \approx 288\,\text{K}$

El tiempo de Hubble como estimación de la edad del universo.

Enunciado: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Resultado

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$$

Pasos

- Buscamos t_H; datos: $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$
- La ley de Hubble v = H_0·d. El inverso de la constante de Hubble (tiempo de Hubble) estima la edad del universo en unos 14 mil millones de años; la edad exacta de 13 800 millones de años sale de un modelo de la expansión. Ecuación del modelo: $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Constante de Hubble en s^{-1}

  $$H_0 = \frac{70}{3{,}086\cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$$
- Sustituimos: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269\cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- En miles de millones de años: $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Ga}$
- El tiempo de Hubble es solo una estimación de la edad; la expansión se frenó y ahora se acelera.
- Convertimos las unidades: $t_H \approx 4{,}408\cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{Ga}$

La profundidad del tránsito de la Tierra ante el Sol.

Enunciado: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

Resultado

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$$

Pasos

- Buscamos $\frac{\Delta F}{F}$; datos: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Convertimos las unidades:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\text{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\text{km}$
- Cuando un planeta pasa por delante de su estrella, tapa parte de su disco y el brillo baja según la razón de áreas (R_p/R_*)². Júpiter atenuaría el Sol un 1 %, la Tierra solo 84 millonésimas (ppm). Ecuación del modelo:
  $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Sustituimos: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- En millonésimas (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\text{ppm}$
- Un tránsito solo se ve cuando miramos la órbita del planeta casi de canto.
- Convertimos las unidades:
  $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\text{ppm}$

La duración de una transferencia de Hohmann de la Tierra a Marte.

Enunciado: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

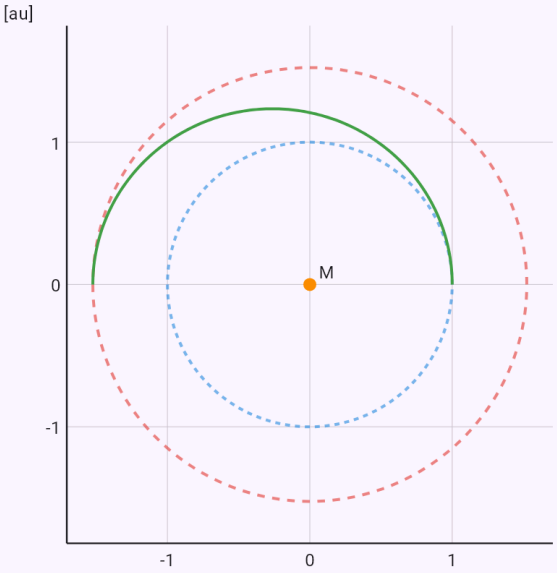
Resultado

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

Pasos

- Buscamos t; datos
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Convertimos las unidades
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- La órbita de transferencia de Hohmann es media elipse que toca la órbita circular de partida y la de destino. Con dos encendidos (Δv) se pasa de una a otra con el mínimo combustible. Un viaje de la Tierra a Marte así dura unos 259 días. Ecuación del modelo
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Sustituimos
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Sustituimos
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- En días: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Hacia fuera: acelerar en el sentido del vuelo y volver a acelerar en la órbita de destino.
- Convertimos las unidades: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

Gráfica



Los cuerpos y los puntos notables a escala real.

El límite de Roche de Saturno para una luna helada – por qué allí hay anillos.

Enunciado: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Resultado

$$d_R \approx 129\,000\,\text{km}$$

Pasos

- Buscamos d_R; datos
  $R = 58\,230\,\text{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3, \quad \rho_m = 0{,}917\,\text{g/}$
- Convertimos las unidades
  $R = 58\,230\,\text{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\text{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\text{g/cm}^3 =$
- El límite de Roche: más cerca del planeta, las fuerzas de marea despedazan una luna que solo se mantiene unida por su propia gravedad. Por eso los anillos de Saturno están dentro de su límite de Roche. Una luna rígida resiste más cerca que una fluida. Ecuación del modelo:
  $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Sustituimos
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\frac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m}$
- En radios del planeta: $\frac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Dentro del límite de Roche no se forma una luna grande; en su lugar hay anillos (Saturno).
- Convertimos las unidades:
  $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\text{m} = 129\,000\,\text{km}$

46. Aplicaciones del análisis complejo

Los formularios de Aplicaciones (campos Física, Electrotecnia, Ingeniería, Geometría y Análisis) usan las funciones de variable compleja del capítulo anterior. Cada uno tiene pasos con un potencial complejo, una transformación o polos y un gráfico en el plano de Gauss.

Flujo ideal y perfil alar: el [[complexPotential|potencial complejo]] w(z), las [[streamline|líneas de corriente]] como curvas de nivel de Im w y la presión por la ecuación de Bernoulli. Flujo alrededor de un cilindro, también con circulación (puntos de remanso, efecto Magnus, sustentación $L' = \rho U \Gamma$), cuerpo de Rankine, flujo hacia una esquina y torbellino. El perfil de Joukowski nace de la transformación conforme $z = \zeta + b^2/\zeta$, la [[kuttaCondition|condición de Kutta]] fija la circulación y el teorema de Kutta–Joukowski la sustentación; el gráfico muestra las líneas de corriente alrededor del perfil y C_L según el ángulo de ataque.

Campos por transformación conforme: cable coaxial ($w = \ln z$ lo convierte en un condensador plano - capacidad, inductancia e impedancia característica), línea bifilar con una transformación de Möbius, potencial en una cuña entre placas y temperatura estacionaria en un semiplano; líneas de campo y equipotenciales en el gráfico. La tensión alrededor de un agujero circular según Kirsch, con los potenciales de Kolósov y Musjelishvili, da una [[stressConcentration|concentración de tensiones]] de 3 a tracción, 2 con igual tracción en dos direcciones y 4 a cortante. El mapa de Mercator es el logaritmo complejo de la proyección estereográfica: escala $1/\cos\varphi$, círculos de Tissot y la [[loxodrome|loxodrómica]] como recta frente a la ortodrómica.

Control y señales: estabilidad de un lazo $K \cdot e^{(-s\tau)}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ por el [[nyquistCriterion|criterio de Nyquist]] (principio del argumento, márgenes de ganancia y fase, diagrama de Bode) y por el [[rootLocus|lugar de las raíces]] (asíntotas, punto de ruptura, ganancia crítica). Diseño de un filtro de [[butterworthFilter|Butterworth]] y de Chebyshov con polos en una circunferencia y una elipse, filtro digital de segundo orden con polos y ceros en el plano z, respuesta al impulso por residuos y respuesta en frecuencia sobre la circunferencia unidad. Curva de resonancia de un oscilador mecánico o un circuito RLC por las distancias de $i\omega$ a los polos, [[qualityFactor|factor de calidad]] y ancho de banda. Los circuitos de corriente alterna con fasores están en el capítulo Electrotecnia.

Respuesta y líneas: el oscilador de Lorentz da el índice de refracción y la absorción de un medio; polos en el semiplano inferior significan causalidad y las [[kramersKronig|relaciones de Kramers–Kronig]], que la aplicación comprueba con una integral numérica en valor principal. La anchura natural de una línea espectral sale de la transformada de Fourier de una onda amortiguada. La [[smithChart|carta de Smith]]: coeficiente de reflexión como transformación de Möbius, ROE, impedancia de entrada de una línea, transformador de cuarto de onda y adaptación con stub.

Juegos en mathtrace.app en «Pruébalo tú»: los conjuntos de Mandelbrot y de Julia y las cuencas de Newton - una iteración en el plano complejo que se puede desplazar y ampliar.

Ejemplos

Cilindro que gira: la circulación baja los puntos de remanso bajo el eje horizontal.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Resultado

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

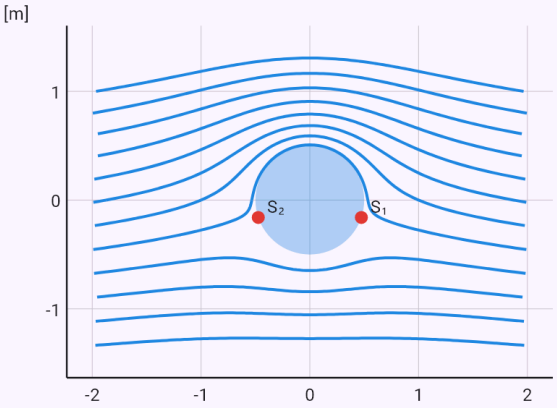
Pasos

- Buscamos θ_s; datos
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Flujo alrededor de un cilindro: la corriente U(z + R²/z), opcionalmente con un torbellino de circulación Γ (cilindro que gira). En la superficie la velocidad es 2U·sin θ, el doble en los costados. La circulación baja los puntos de remanso y crea sustentación según el teorema de Kutta–Joukowski, L' = ρUΓ por metro de longitud. Ecuación del modelo:
  $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- La velocidad conjugada es la derivada del potencial
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- En la superficie del cilindro la velocidad es tangente
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Velocidad máxima en la superficie:
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Puntos de remanso (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Coeficiente de presión por la ecuación de Bernoulli
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Sustentación por metro de longitud (teorema de Kutta–Joukowski): $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Un cilindro o un balón que gira con circulación recibe sustentación perpendicular a la corriente - el efecto Magnus que curva un balón con efecto. Los barcos Flettner lo usan para propulsarse.

Gráfica

Líneas de corriente | Gráfico



Las líneas continuas son líneas de corriente, las discontinuas equipotenciales (solo sin circulación). Donde las líneas de corriente se juntan, el fluido va más rápido.

Perfil de Joukowski del 12 % con curvatura del 2 % a 4° de ataque.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

`tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])`

Resultado

$$C_L \approx 0{,}7243$$

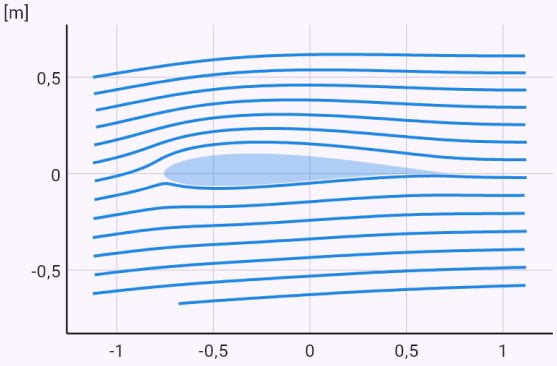
Pasos

- Buscamos C_L; datos
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- El perfil de Joukowski nace de la transformación conforme z = ζ + b²/ζ de una circunferencia que pasa por ζ = b. Desplazar el centro a la izquierda da espesor, hacia arriba curvatura. El flujo alrededor del círculo se traslada al perfil, la circulación la fija la condición de Kutta (el flujo abandona suavemente el borde de salida agudo) y la sustentación el teorema de Kutta–Joukowski. Sale el conocido C_L ≈ 2π(α + β), como en un perfil delgado. Las prestaciones de un avión están en el formulario Avión. Ecuación del modelo
  $z = \zeta + \dfrac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \dfrac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \dfrac{i\Gamma}{2\pi}$
- La circunferencia del plano ζ de la que nace el perfil
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Circulación por la condición de Kutta en el borde de salida
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Sustentación por metro de longitud (teorema de Kutta–Joukowski): $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Coeficiente de sustentación, entre paréntesis la teoría del perfil delgado
  $C_L = \dfrac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \dfrac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$

- Fluido ideal: válido para ángulos de ataque pequeños sin desprendimiento (hasta unos 10–15° en perfiles corrientes). Un ala real de envergadura finita sustenta menos por la resistencia inducida (formulario Avión).

Gráfica

Líneas de corriente | Gráfico



Líneas de corriente alrededor del perfil a escala real. El borde de salida está a la derecha - el flujo lo abandona suavemente (condición de Kutta); sobre el perfil las líneas se juntan y la presión es menor.

Cuerpo de Rankine - la anchura lejos aguas abajo es Q/U.

Enunciado: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

Resultado

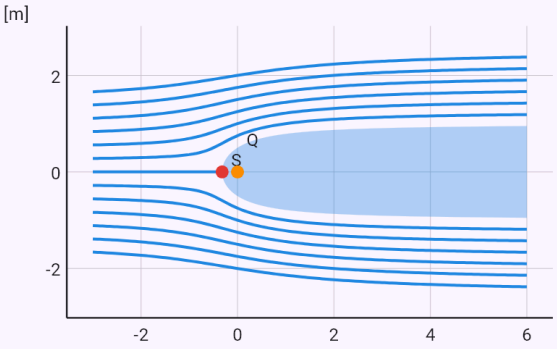
$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Pasos

- Buscamos d; datos: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Una fuente de caudal Q (m²/s por metro de profundidad) en una corriente de velocidad U. La línea de corriente divisoria ψ = Q/2 envuelve el semicuerpo de Rankine, parecido a la parte delantera de una pila de puente o a una proa. Delante hay un punto de remanso; lejos, aguas abajo, el cuerpo mide Q/U de ancho. Ecuación del modelo: $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- La velocidad conjugada es la derivada del potencial: $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Punto de remanso delante de la fuente: $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Línea de corriente divisoria - el contorno del cuerpo: $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Anchura del cuerpo lejos aguas abajo: $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Velocidad máxima en la superficie del cuerpo (numéricamente) $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$

- El cuerpo de Rankine es una primera estimación del flujo alrededor de una parte delantera redondeada (pila, casco, borde de ataque). En un fluido ideal no hay estela detrás del cuerpo.

Gráfica



Las líneas continuas son líneas de corriente, las discontinuas equipotenciales (solo sin circulación). Donde las líneas de corriente se juntan, el fluido va más rápido.

Cable coaxial RG-58: impedancia característica de unos 50 Ω.

Enunciado: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

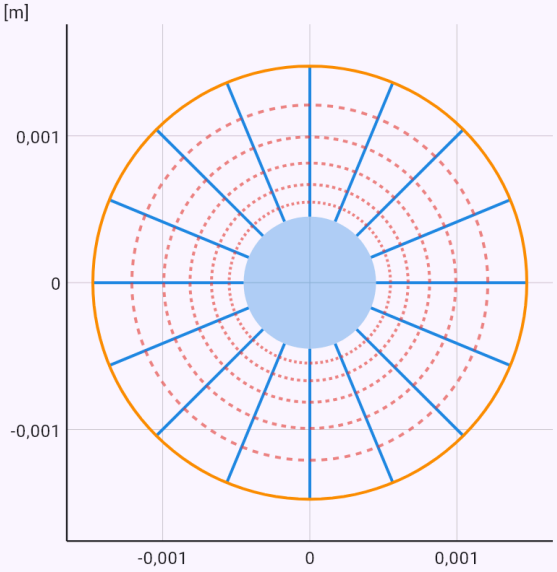
Resultado

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Pasos

- Buscamos Z_0; datos:
  $a = 0{,}45\,\text{mm}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Convertimos las unidades
  $a = 0{,}45\,\text{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}, \quad b = 1{,}475\,\text{mm} = 0{,}0014$
- Cable coaxial: el logaritmo w = ln z desenrolla la corona a < |z| < b en un rectángulo de ancho 2π y alto ln(b/a). El cable se convierte en un condensador plano y la capacidad, la inductancia y la impedancia característica salen enseguida. Ecuación del modelo:
  $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Imagen de la corona en el plano w = ln z - un rectángulo
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- El potencial es lineal en Re w
- Capacidad como la de un condensador plano:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\text{pF/m}$
- Inductancia e impedancia característica de la línea
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\text{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- El cable RG-58 (conductor de 0,9 mm, polietileno de 2,95 mm) tiene unos 50 Ω y 100 pF/m. La impedancia característica solo depende de la razón b/a, por eso cables finos y gruesos tienen los mismos 50 o 75 Ω.

Gráfica



Las líneas continuas son líneas de campo, las discontinuas equipotenciales; se cortan en ángulo recto. Los conductores están rellenos o gruesos.

Capacidad de una línea bifilar mediante la transformación de Möbius.

Enunciado: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

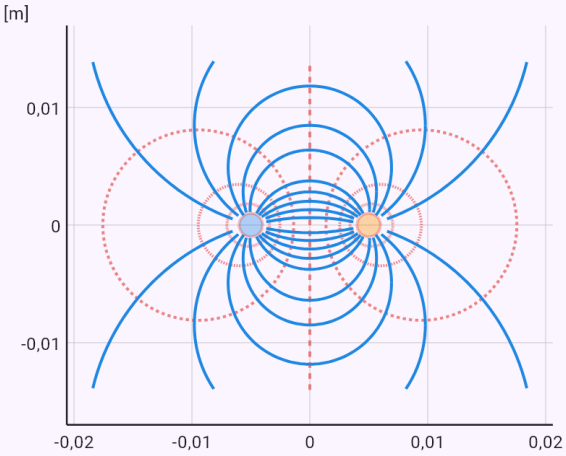
Resultado

$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Pasos

- Buscamos C'; datos: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Convertimos las unidades:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Línea bifilar (dos hilos paralelos): la transformación de Möbius w = (z − h)/(z + h) convierte las circunferencias de los hilos en circunferencias concéntricas - un cable coaxial. Las equipotenciales son circunferencias de Apolonio, las líneas de campo circunferencias que pasan por ±h. Ecuación del modelo
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Las imágenes de los hilos son circunferencias concéntricas
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Capacidad de la línea bifilar
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Inductancia e impedancia característica de la línea
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$
- La cinta bifilar de antena tenía 300 Ω, un par trenzado de cable de datos unos 100 Ω. La fórmula vale para hilos alejados de otros conductores.

Gráfica



Las líneas continuas son líneas de campo, las discontinuas equipotenciales; se cortan en ángulo recto. Los conductores están rellenos o gruesos.

Temperatura estacionaria en un semiplano con una parte del borde caliente y otra fría.

Enunciado: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC];`

x=0.5[m]; y=1[m])

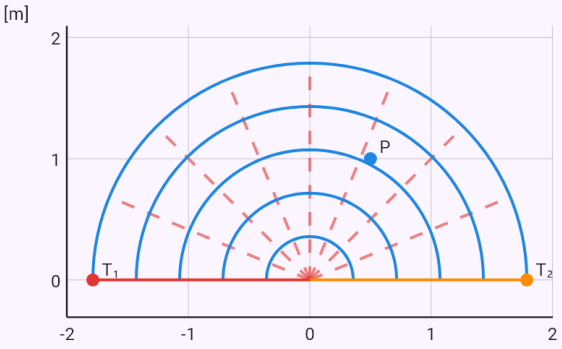
Resultado

$$T \approx 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$$

Pasos

- Buscamos T; datos
  $T_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Conducción estacionaria del calor en el semiplano y > 0 cuyo borde está a T_1 a la izquierda y a T_2 a la derecha. La temperatura es armónica, como el potencial en una cuña de 180°: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Las isotermas son rayos desde el origen, el calor fluye por semicircunferencias. Ecuación del modelo
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Función armónica con los valores dados en el borde
- Ángulo del punto: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^\circ$
- Temperatura en el punto:
  $$T = 20 + \frac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$$
- Por ejemplo el suelo bajo el límite de dos superficies a distinta temperatura. En el origen la temperatura del borde salta de T_1 a T_2, por eso allí el flujo crece sin límite.

Gráfica



Los rayos discontinuos son isotermas, las semicircunferencias continuas líneas de flujo de calor.

Agujero circular en una placa traccionada: factor de concentración 3.

Enunciado: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

Resultado

$$K_t \approx 3$$

Pasos

- Buscamos K_t; datos: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Tracción σ_x en una dirección: en el borde del agujero 3σ_x transversal a la carga, −σ_x (compresión) en su dirección. Ecuación del modelo

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$$

- Potenciales complejos de Kolósov–Musjelishvili para la tracción σ

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$

- En el borde del agujero la tensión radial es nula, la circunferencial

$$r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$

- Tensión circunferencial alrededor del agujero (Kirsch)

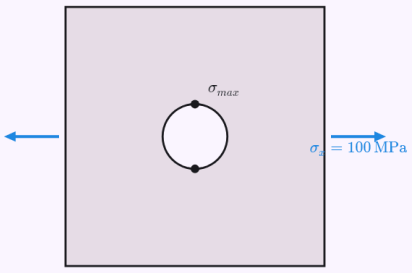
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

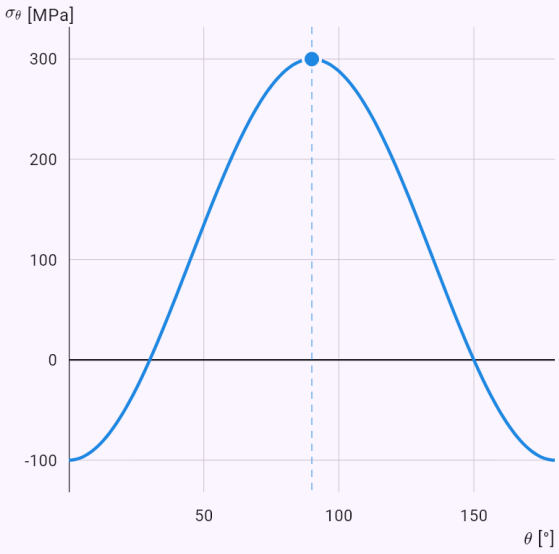
- Tensión máxima y factor de concentración

$$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$

- A dos radios del centro la tensión solo supera en un 22 % a la de la placa - la concentración es local.
- Válido para material elástico y un agujero pequeño frente a la placa (ancho al menos cinco veces el diámetro). En una banda estrecha K_t es menor, pero la tensión en la sección debilitada mayor.

Gráfica





σ_θ – tensión circunferencial en el borde del agujero

$\sigma_{max} = 300\,\mathrm{MPa}$

La placa con el agujero y la tensión que la carga (las flechas no están a escala). El gráfico muestra la tensión circunferencial en el borde del agujero según el ángulo θ desde el eje x; los puntos del agujero marcan la tensión máxima.

A 60° de latitud las longitudes en el mapa se duplican.

Enunciado: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

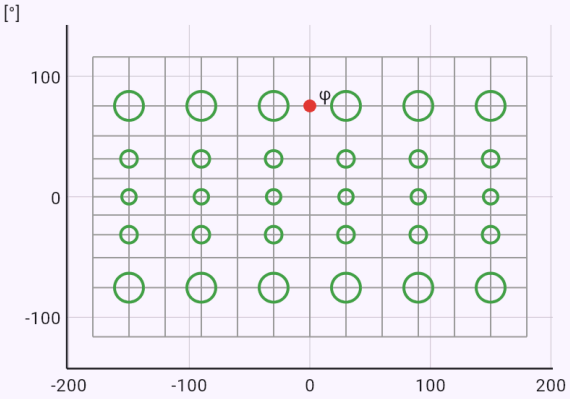
Resultado

$$k \approx 2$$

Pasos

- Buscamos k; datos: $\varphi = 60\,^\circ$
- Distancia del paralelo φ al ecuador en un mapa de ancho W y escala k = 1/cos φ. Los círculos de Tissot del gráfico son iguales en el globo. Ecuación del modelo
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$$
- La proyección es conforme, las longitudes crecen igual en todas las direcciones: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Escala en el paralelo φ: $k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$
- Las áreas crecen como k², cuatro veces a 60°. Los polos no están en el mapa, quedan en el infinito.

Gráfica



Meridianos cada 30° y paralelos cada 15°. Los círculos de Tissot son iguales en el globo y en el mapa crecen como 1/cos φ - la forma se conserva, el área no.

Praga – Nueva York: la ortodrómica y la loxodrómica, más larga.

Enunciado: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg]; lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

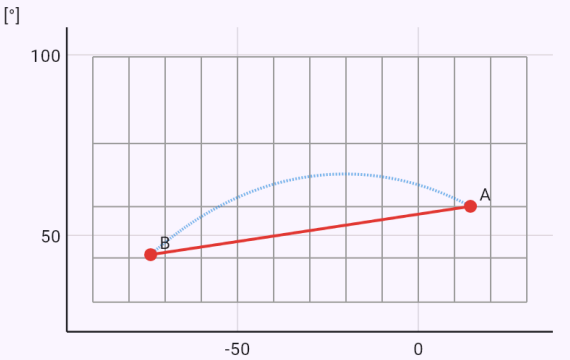
Resultado

$$d \approx 6572\,\text{km}$$

Pasos

- Buscamos d; datos
$$\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$$
- Loxodrómica entre dos lugares (latitud y longitud, oeste negativo): rumbo, longitud y comparación con la ortodrómica - el camino más corto por el círculo máximo. Ecuación del modelo
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$$
- La proyección es conforme, las longitudes crecen igual en todas las direcciones: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- En el mapa la loxodrómica es una recta - el rumbo por las diferencias de coordenadas
$$\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$$
- Longitud de la loxodrómica: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\text{km}$
- Ortodrómica (camino más corto sobre la esfera)
$$d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$$
- La loxodrómica es más larga que la ortodrómica, pero se navega con rumbo fijo. Los aviones de largo recorrido siguen la ortodrómica y cambian de rumbo continuamente.

Gráfica



La recta continua es la loxodrómica (rumbo constante), la curva discontinua la ortodrómica (camino más corto), ambas en proyección de Mercator.

Margen de fase de un lazo con tres retardos de primer orden.

Enunciado: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s]; T2=1[s]; T3=1[s])`

Resultado

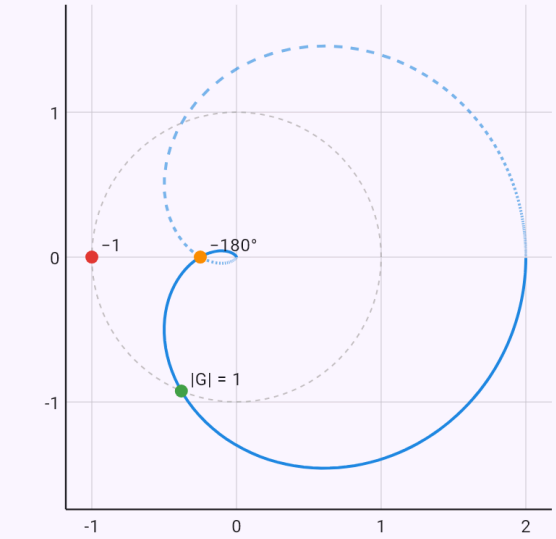
$$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$$

Pasos

- Buscamos φ_m; datos:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- El criterio de Nyquist se deduce del principio del argumento: el número de vueltas de la curva G(iω) alrededor de −1 es la diferencia de polos inestables del lazo cerrado y del abierto. Con un lazo abierto estable, la curva no debe rodear −1. Lo lejos que queda lo indican los márgenes de ganancia y de fase. Ecuación del modelo
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Principio del argumento: N vueltas alrededor de −1, Z polos inestables del lazo cerrado, P del abierto:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frecuencia donde la fase llega a −180°
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Margen de ganancia y ganancia crítica
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frecuencia donde |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Margen de fase: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- La curva no rodea −1 - el lazo cerrado es estable:
  $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Requisito habitual: margen de ganancia de al menos 6 dB y de fase de 30–60°. Un tiempo muerto resta fase sin cesar, por eso un proceso con retardo es más difícil de controlar.

Gráfica

Diagrama de Nyquist | Gráfico



La curva continua es G(iω) para ω > 0, la discontinua su imagen especular para ω negativa, la circunferencia discontinua |G| = 1. El lazo cerrado es estable si la curva no rodea −1.

Lugar de las raíces con integrador: ganancia crítica 3.

Enunciado: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one];`

`T1=1[s]; T2=0.5[s])`

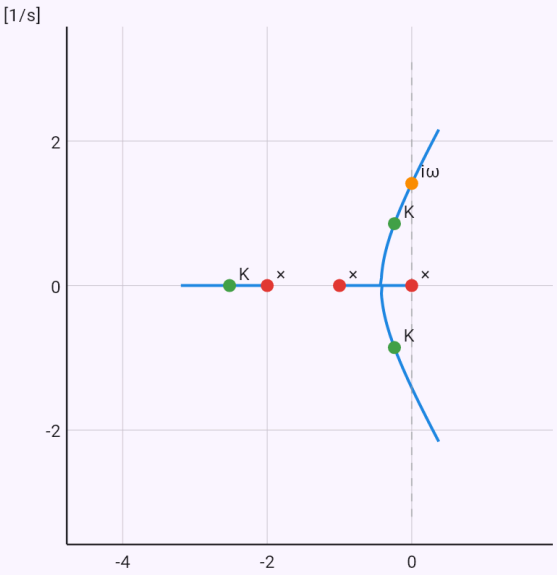
Resultado

$$K_{krit} \approx 3$$

Pasos

- Buscamos K_{krit}; datos: $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- El lugar de las raíces: cómo se mueven los polos del lazo cerrado al crecer la ganancia K desde cero. Las ramas parten de los polos del lazo abierto, se alejan por asíntotas y en el eje imaginario el sistema se vuelve inestable (ganancia crítica por la condición de Routh–Hurwitz). Ecuación del modelo:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Polos del lazo abierto (comienzos de las ramas):
  $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asíntotas de las ramas: centroide y ángulos
  $\sigma_a = \dfrac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Punto de ruptura en el eje real:
  $\dfrac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Cruce con el eje imaginario - el límite de estabilidad
  $s = i\omega: \quad \operatorname{Im} D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- La ganancia dada está por debajo de la crítica - estable:
  $K = 1 < K_{krit}$
- Polos del lazo cerrado para el K dado:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Gráfica



Las ramas muestran los polos del lazo cerrado al crecer K: parten de los polos del lazo abierto (×), los puntos K son los polos para la ganancia dada, iω el cruce con el eje imaginario.

Orden necesario de un filtro de Chebyshov para 40 dB una octava más arriba.

Enunciado: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

Resultado

$$n \approx 5$$

Pasos

- Buscamos n; datos

  $f_c = 1000\,\text{Hz}, \quad A_p = 1\,\text{dB}, \quad f_s = 2000\,\text{Hz}, \quad A_s = 4($

- Chebyshov: un rizado A_p en la banda de paso, a cambio una transición más abrupta a la banda de rechazo que un Butterworth del mismo orden. Ecuación del modelo

  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

- Parámetro de rizado: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0{,}5088$
- Orden necesario (redondeado hacia arriba)

- Polos sobre una semielipse

  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i \cosh v \cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$$

- Polos (relativos a ω_c)

  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28$$

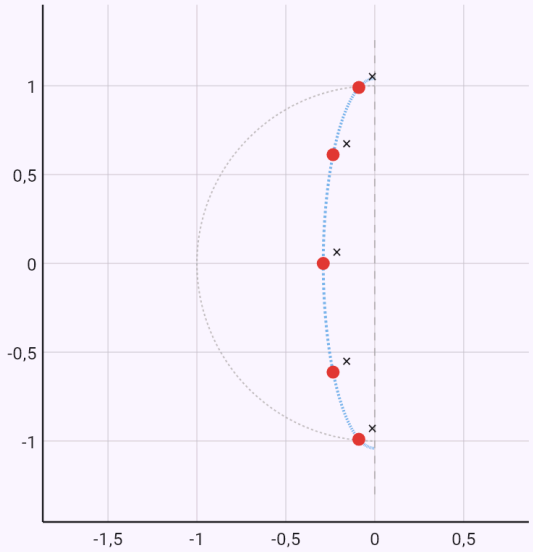
- Función de transferencia - todos los polos a la izquierda, el filtro es estable

  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s - s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$

- Chebyshov paga la pendiente con rizado y peor retardo de grupo - conserva peor la forma de los pulsos.

Gráfica

Polos | Gráfico



Polos en el plano complejo s (×); un sistema estable los tiene a la izquierda del eje imaginario.

Respuesta al impulso de un filtro digital con polos complejos por residuos.

Enunciado: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Resultado

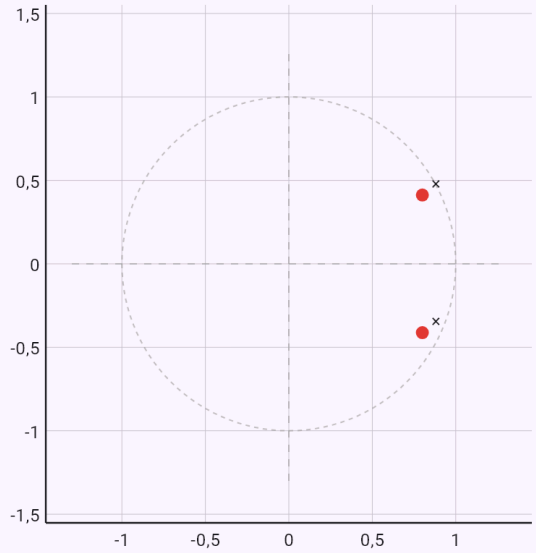
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Pasos

- Buscamos $h[n]$; datos:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Un filtro digital calcula la salida a partir de las últimas muestras: y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. Su función de transferencia es una función racional H(z) (transformada Z). El filtro es estable si todos los polos están dentro de la circunferencia unidad. La respuesta al impulso sale de la transformada Z inversa por residuos: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n-1}]. La respuesta en frecuencia es H sobre la circunferencia unidad, z = e^(iΩ). Ecuación del modelo
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Ecuación en diferencias del filtro:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Polos de la función de transferencia
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Polos dentro de la circunferencia unidad - el filtro es estable: $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Transformada Z inversa por residuos:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Polos complejos conjugados dan una oscilación amortiguada
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \vartheta$
- Valor de la respuesta: $h[10] = -0{,}6596$

Gráfica

Polos y ceros | Gráfico



Polos (×) y ceros (○) de la función de transferencia en el plano z con la circunferencia unidad. El filtro es estable si todos los polos están dentro.

Factor de calidad de un oscilador a partir de la posición de los polos.

Enunciado: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

`b=2[kg_s])`

Resultado

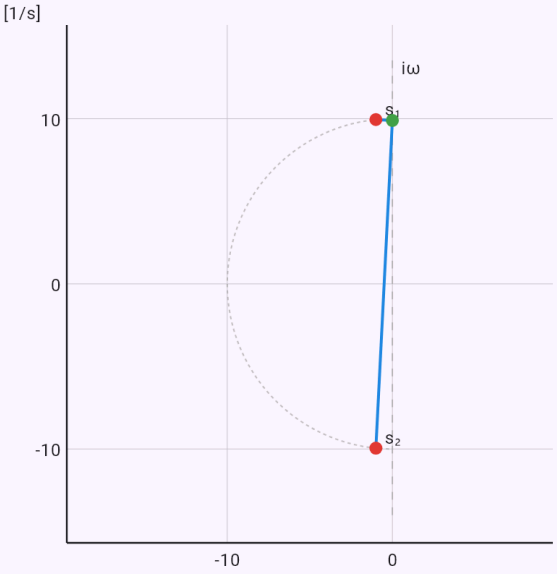
$$Q \approx 5$$

Pasos

- Buscamos Q; datos:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Una masa en un resorte amortiguado, excitada por una fuerza armónica. X/X_0 es la amplitud frente a la deformación estática bajo la misma fuerza. Ecuación del modelo: $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Polos de la función de transferencia
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplitud a partir de las distancias a los polos
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Pico de la curva de resonancia
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Factor de calidad y ancho de banda
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Cerca de la resonancia la curva tiene forma de lorentziana
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Por eso una máquina no debe girar mucho tiempo a la frecuencia propia de su bastidor y los puentes se comprueban frente a la excitación de peatones y viento.

Gráfica

Polos | Gráfico



Polos en el plano complejo s (×); un sistema estable los tiene a la izquierda del eje imaginario.

Índice de refracción por debajo de la resonancia de un oscilador de Lorentz, comprobado con la relación de Kramers–Kronig.

Enunciado: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV];`

```
E=1.5[eV])
```

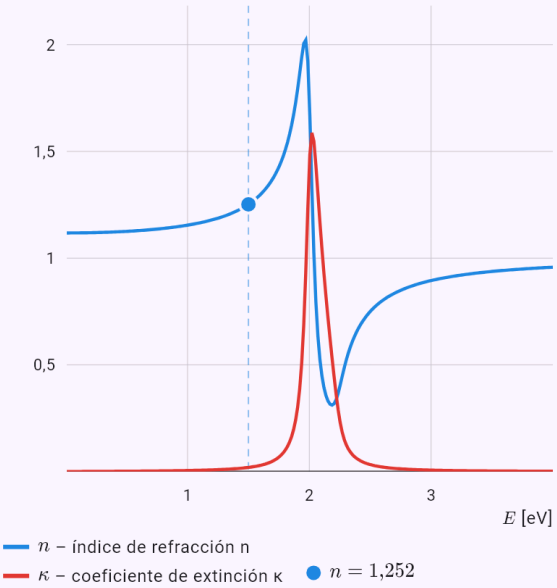
Resultado

$$n \approx 1{,}252$$

Pasos

- Buscamos n; datos
  $E_0 = 2\,\text{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\text{eV}, \quad E_p = 1\,\text{eV}, \quad E = 1{,}5\,\text{eV}$
- Índice de refracción n y coeficiente de extinción κ a partir de n + iκ = √(1 + χ). Energía del fotón E, resonancia E_0, anchura Γ y fuerza del oscilador E_p en electronvoltios. Ecuación del modelo:
  $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Los polos de la susceptibilidad están en el semiplano inferior
  $E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \dfrac{\Gamma^2}{4}} - \dfrac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$
- Causalidad: la relación de Kramers–Kronig
  $\operatorname{Im} E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty \dfrac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$
- Susceptibilidad a la energía dada:
  $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Comprobación: χ' por la integral sobre χ" (numéricamente) y directamente:
  $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Índice de refracción complejo:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Longitud de onda y coeficiente de absorción
  $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 826{,}6\,\text{nm}, \quad \alpha = \dfrac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\text{m}^{-1}$
- Por debajo de la resonancia el índice crece con la energía - la dispersión normal, con la que un prisma descompone la luz en colores.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Anchura natural de la línea D del sodio - unos 10 MHz.

Enunciado: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

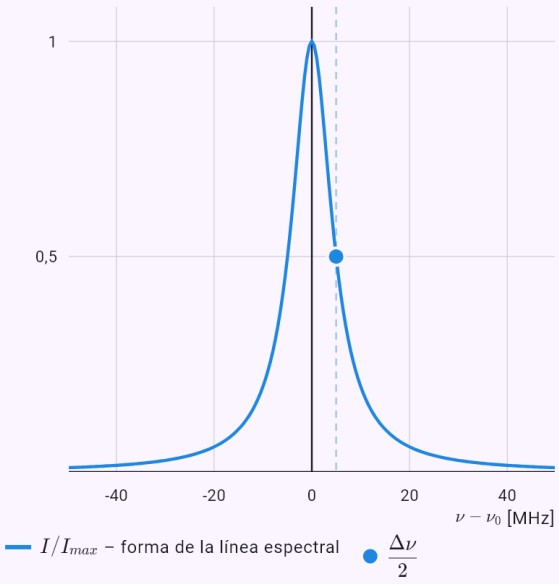
Resultado

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\text{MHz}$$

Pasos

- Buscamos $\Delta\nu$; datos: $\tau = 16\,\text{ns}$
- Un átomo excitado emite una onda que decae exponencialmente con la vida media τ. Su transformada de Fourier (un residuo en un polo) da la línea lorentziana de anchura Δν = 1/(2πτ) - la anchura natural de una línea espectral. Ecuación del modelo:
  $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Transformada de Fourier de la onda amortiguada
  $$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$
- Forma lorentziana de la línea y su anchura
  $$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$
- Anchura natural de la línea:
  $$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot 16\,\text{ns}} = 9{,}947\,\text{MHz}$$
- La línea D del sodio (τ ≈ 16 ns) tiene una anchura natural de unos 10 MHz. En un gas, el efecto Doppler y las colisiones ensanchan aún más las líneas.

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Adaptación de una carga de 100 Ω a una línea de 50 Ω con un stub en cortocircuito.

Enunciado: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

Resultado

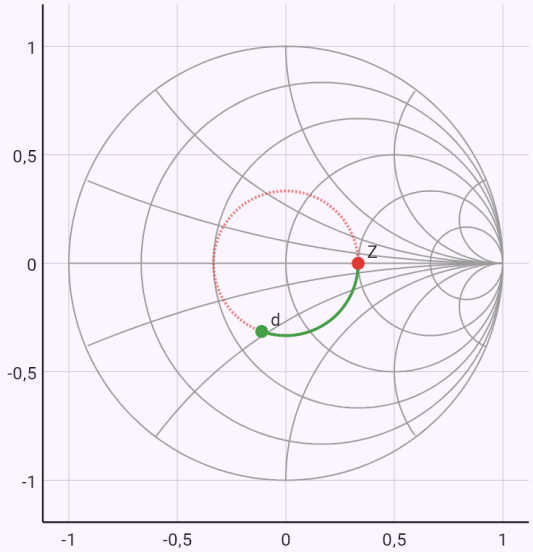
$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$

Pasos

- Buscamos d; datos
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- El coeficiente de reflexión Γ = (Z − Z₀)/(Z + Z₀) en una línea de impedancia característica Z_0 es una transformación de Möbius. Lleva el semiplano derecho de impedancias al disco unidad - la carta de Smith. Avanzar por la línea hacia el generador es girar en sentido horario sobre la circunferencia |Γ| = const.; media longitud de onda es una vuelta completa. De ahí la relación de ondas estacionarias, la impedancia de entrada, el transformador de cuarto de onda y la adaptación con stub. Ecuación del modelo
  $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{z-1}{z+1}, \quad z = \dfrac{Z_L}{Z_0}$
- Impedancia de carga normalizada: $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Coeficiente de reflexión:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Relación de ondas estacionarias y pérdida de retorno
  $PSV = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$
- Longitud de onda en la línea: $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Admitancia de carga normalizada: $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Punto donde la parte real de la admitancia vale 1
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Longitud del stub en cortocircuito que anula la susceptancia
  $y_s = -j\cot\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccot}\,(0{,}707$
- Un stub es un trozo de línea terminado en cortocircuito y conectado en paralelo. A la frecuencia elegida la línea anterior no ve entonces ninguna reflexión.

Gráfica



Circunferencias de resistencia constante y arcos de reactancia constante (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). La circunferencia discontinua tiene radio |Γ| (ROE constante), el arco de color es el avance por la línea hacia el generador.

Limitaciones conocidas

- El flujo es ideal: sin viscosidad, desprendimiento ni estela. El modelo no da la resistencia ni el comportamiento a grandes ángulos de ataque.
- Las transformaciones conformes son solo para las formas indicadas; una forma general de conductores o de perfil (transformación de Schwarz–Christoffel) aún no.
- La función de transferencia del lazo tiene una forma fija con tres retardos y como mucho dos integradores; ceros en el numerador y un lazo abierto inestable aún no.
- El filtro digital es de segundo orden, los analógicos solo paso bajo.