Mathtrace – manual

III. Análisis matemático

Índice

III. Análisis matemático

25. Límites
26. Derivadas
27. Estudio de una función
28. Funciones de varias variables
    - Mapa de los teoremas integrales
    - Aplicaciones físicas de los teoremas integrales
29. Polinomio de Taylor
30. Integrales indefinidas
    - Integrales inmediatas y cambio de variable
    - Integración por partes
    - Funciones racionales
    - Funciones trigonométricas
    - Funciones hiperbólicas
    - Raíces
31. Integrales definidas y sus aplicaciones
    - Integral definida
    - Integrales impropias
    - Área bajo una curva y entre curvas
    - Longitud de una curva
    - Volumen de un sólido de revolución
    - Área lateral de un sólido de revolución
    - Aplicaciones con parámetros
    - Centroide
    - Curvas paramétricas y en coordenadas polares
    - Curvas dadas por una ecuación
32. Series infinitas
    - Series numéricas

- Series de potencias
- Serie de Taylor

33. Series de Fourier

25. Límites

Mathtrace calcula el límite de una función de una variable en un punto, en el infinito y los límites laterales, y procede como en clase: primero intenta sustituir en la función. El límite de una sucesión ($n \to \infty$) se calcula igual – también la forma 1^∞ o una suma de potencias, de la que se saca el término que crece más rápido.

Si al sustituir sale una indeterminación (0/0, ∞/∞, …), elige una transformación según la forma de la función – factorizar y simplificar, multiplicar por el conjugado, dividir por la mayor potencia, un límite notable (sin x / x) o la regla de L'Hôpital, también repetidamente. Una potencia con la variable en la base y en el exponente (las formas 0^0, ∞^0, 1^∞) se escribe como $e^{g \cdot \ln f}$ y el límite se calcula en el exponente; si la función está definida solo a un lado del punto ($x^{\ln(x+1)}$ solo para $x > 0$), calcula el límite por ese lado y lo indica. El chip «Regla de L'Hôpital» elige la regla directamente; si al sustituir no sale una indeterminación, el procedimiento explica por qué no se puede aplicar.

Las demás letras del enunciado (k en $(1 + k/x)^x$) son parámetros: constantes con las que calcula en general; si el resultado vale solo para valores positivos del parámetro, lo indica. La letra puede estar también en el punto del límite: $\lim (x^2 - a^2)/(x - a)$ cuando $x \to a = 2a$. El límite con parámetro no tiene gráfica.

Un límite infinito o un límite que no existe (los límites laterales son distintos) nunca se presenta como un número – lo dice con palabras y muestra los límites laterales. El resultado incluye una gráfica de la función cerca del punto con el valor del límite marcado.

En el límite de una sucesión la gráfica muestra los puntos a_1, a_2, a_3, … en lugar de una curva continua.

Cómo introducirlo

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Un límite escrito: tras la palabra lim, entre paréntesis la variable, la flecha -> y el punto, y luego la función.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Un límite en el infinito: infinito se escribe oo (menos infinito -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Un límite lateral: + (por la derecha) o − (por la izquierda) tras el punto.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Desde una foto, o en LaTeX tal como lo reconoce la cámara.

`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	El límite de una sucesión en el infinito.

Ejemplos

La indeterminación 0/0 – factorizamos el numerador y simplificamos.

Enunciado: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

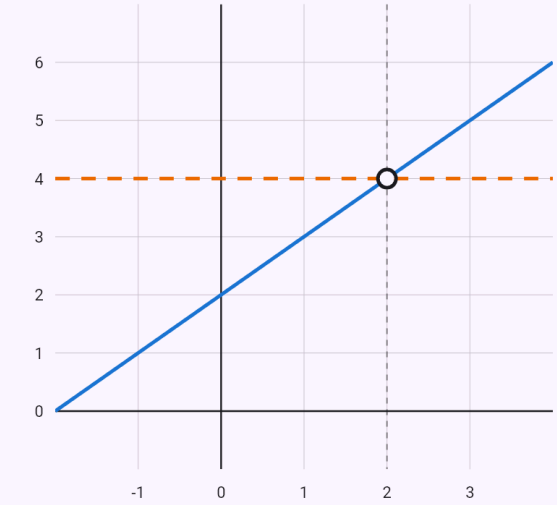
Resultado

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Transformamos y simplificamos $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Sustituimos: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Gráfica



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$y = 4$

Límite:

○ $(2; 4)$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

Un límite en el infinito – numerador y denominador divididos por la mayor potencia.

Enunciado: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Resultado

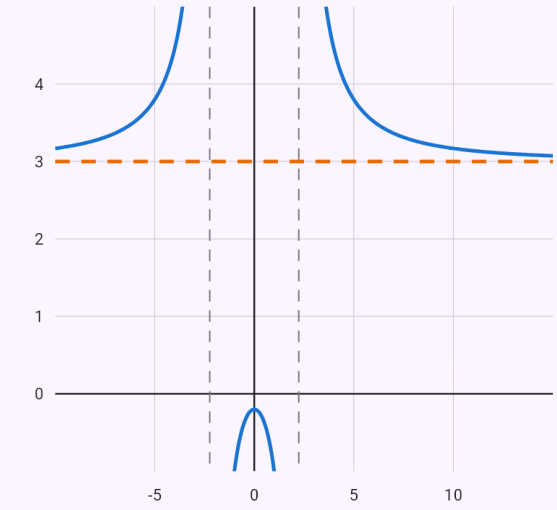
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: hay que transformar la expresión.
- Dividimos numerador y denominador entre x^2: los términos del tipo c/x^n tienden a cero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Gráfica



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

El límite notable sin x / x.

Enunciado: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Resultado

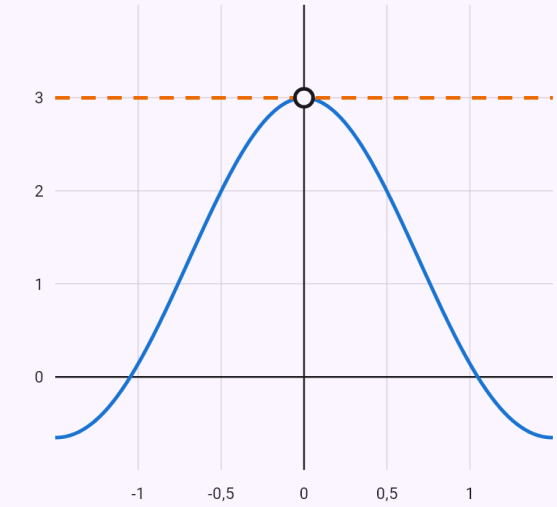
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Usamos el límite conocido $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Gráfica



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Límite:

○ $(0; 3)$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

La regla de L'Hôpital, aplicada dos veces seguidas.

Enunciado: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Resultado

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

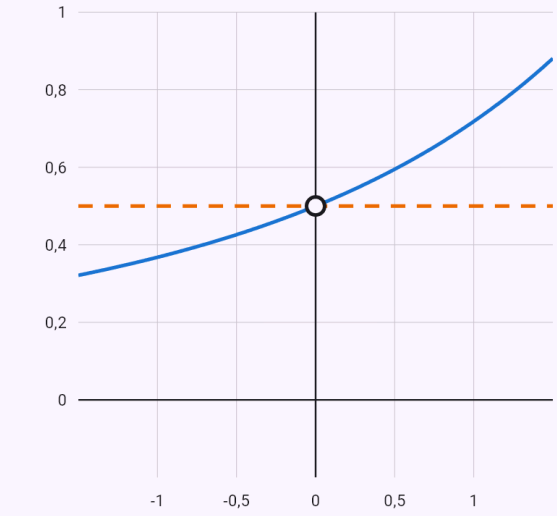
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Sustituimos: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Gráfica



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Límite:

$\circ\ \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

La indeterminación 0^0: escribimos la potencia como e^(g·ln f); la función solo está definida para x > 0,

así que el límite por la derecha.

Enunciado: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Resultado

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Pasos

- La función no está definida a la izquierda de 0, así que calculamos el límite por la derecha.
- Al sustituir sale la indeterminación 0^0: hay que transformar la expresión.
- La base y el exponente contienen la variable: escribimos la potencia como e elevado al exponente por el logaritmo de la base y calculamos el límite en el exponente

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$
- Al sustituir sale la indeterminación $0\cdot\infty$: hay que transformar la expresión.
- Escribimos el producto como cociente

  $$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: hay que transformar la expresión.
- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- El factor $x+1$ vale 1 en el punto − lo sacamos fuera del límite

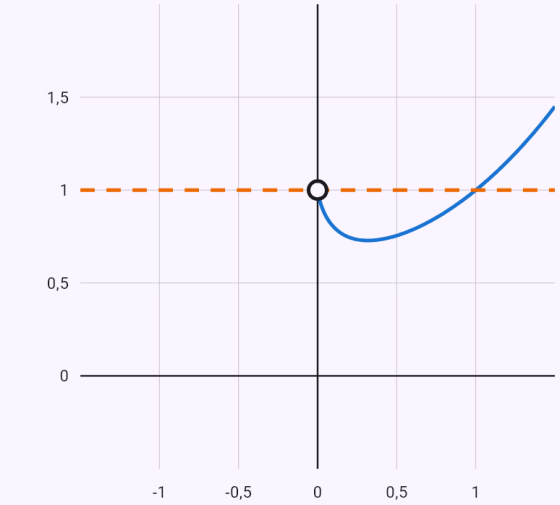
  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1\cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$
- Sustituimos

  $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$
- Sustituimos el límite del exponente:

  $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$$

Gráfica



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Límite:

○ $(0; 1)$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

Los límites laterales son distintos – el límite no existe.

Enunciado: `lim(x->0) 1/x`

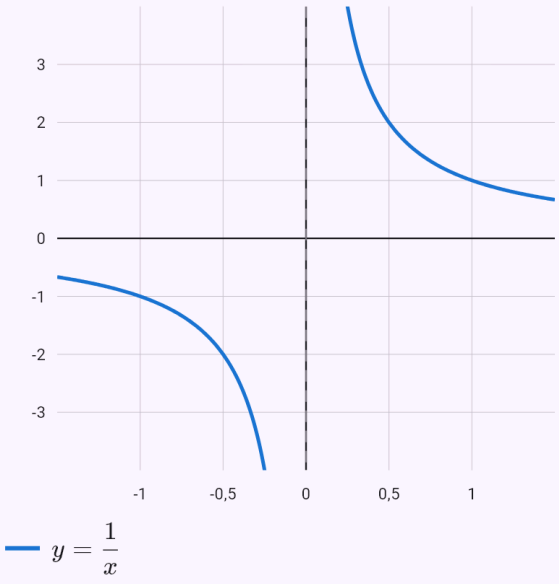
Resultado

El límite no existe: los límites laterales son distintos.

Pasos

- Al sustituir sale un número no nulo entre cero: el límite es infinito, el signo por la izquierda y por la derecha: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Límites laterales: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Gráfica



Límite de una sucesión – sacamos el término que crece más rápido, 9^n.

Enunciado: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Resultado

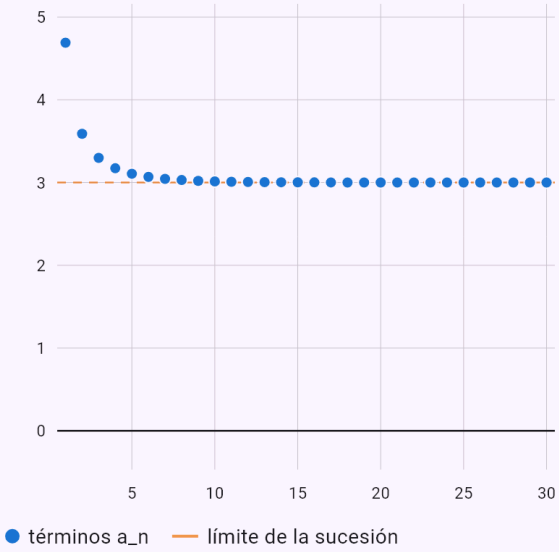
$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Pasos

- Sacamos el término que crece más rápido, 9^n – los demás divididos por él tienden a cero

$$\lim_{n\to\infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n para n = 1, 2, 3, … Si la sucesión tiene límite, los términos se acercan a él (a trazos).

Límite con parámetro k: el límite conocido (1 + 1/x)^x = e da e^k.

Enunciado: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Resultado

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros: números fijos que tratamos como constantes: k
- Al sustituir sale la indeterminación 1^{∞}: hay que transformar la expresión.
- Escribimos la base como $1+\frac{1}{t}$ con t = $\frac{x}{k}$, y la potencia como $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ elevado a k. La expresión entre corchetes tiende a e: es el límite conocido $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Queda el límite del exponente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Derivadas

La aplicación deriva según las reglas – de la suma, de la constante, del producto, del cociente y de la cadena – y dice en cada paso qué regla ha usado. También calcula derivadas sucesivas y el valor de la derivada en un punto. Las funciones elementales (x^2, sin x, e^x, …) también las deriva por definición, como límite del cociente incremental. El resultado incluye una gráfica de la función y de su derivada.

Para una función dada implícitamente por una ecuación en x e y ($x^3 + y^3 = 3xy$) deriva ambos miembros respecto a x (y como función de x) y despeja y′, o usa la fórmula y′ = −F_x / F_y; también calcula y″ y, en un punto dado, la tangente y la normal, y dibuja la curva.

En un punto singular (la curva se corta o tiene un pico) halla las tangentes a partir de los términos de menor grado – en el folium, en el origen, x = 0 e y = 0.

La diferencial df = f′(x) dx, en un punto con un paso («diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1») con el valor aproximado $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$. «aproximadamente √4.1» elige el punto $x_0 = 4$, donde el valor se conoce exactamente, y compara la estimación con el valor real.

Cómo introducirlo

`(x^2 sin x)'`	La derivada con una prima tras el paréntesis.
`d/dx (e^x / x)`	La notación d/dx, también desde una foto (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Derivadas sucesivas con varias primas, o con el orden en el chip «Derivar».
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	La derivada en un punto, o indica el punto en el chip.
`x^2 sin x`	Una expresión con el chip «Derivar» – allí eliges también el orden, el punto y el método (por reglas / por definición).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Una ecuación en x e y – el chip «Derivada implícita» (orden 1 o 2, el método, un punto $[x_0; y_0]$) o «Gráfica de la curva»; escrito diff(x^3+y^3=3xy, x).
`diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1`	La diferencial en un punto con un paso.

`aproximadamente √4.1`	Un valor aproximado mediante la diferencial.

Ejemplos

La regla del producto.

Enunciado: `(x^2 sin x)'`

Resultado

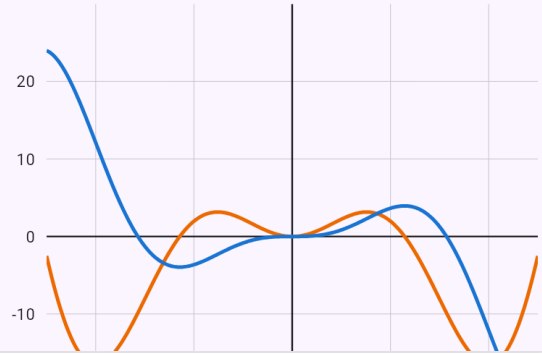
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

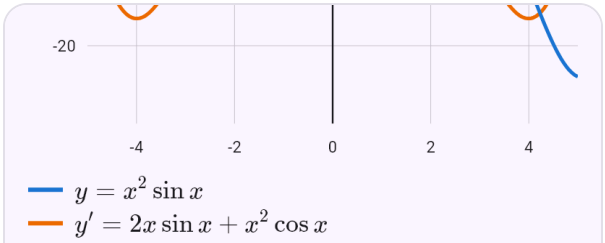
Pasos

- Regla del producto (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Gráfica





$y = x^2 \sin x$

$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

La regla del cociente.

Enunciado: `d/dx (e^x / x)`

Resultado

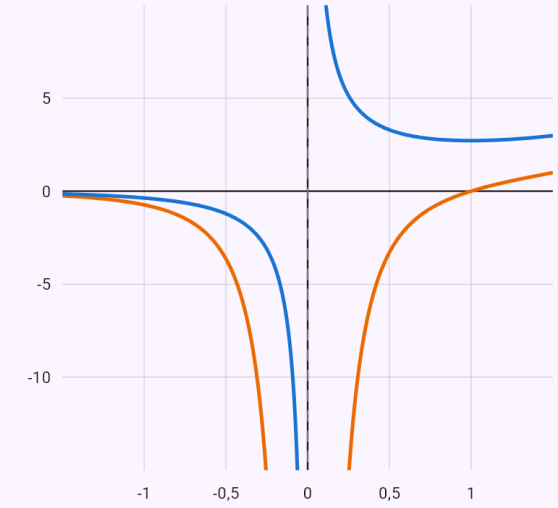
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Pasos

- Regla del cociente (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Gráfica



$y = \frac{e^x}{x}$

$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

La segunda derivada.

Enunciado: `(x^3 ln x)''`

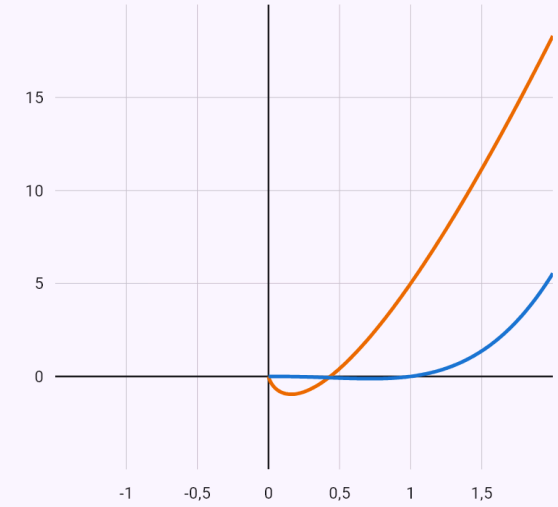
Resultado

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Pasos

- Derivada de orden 1: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Regla del producto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Derivada de orden 2: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- La derivada de una suma es la suma de las derivadas:
  $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Sacamos la constante fuera de la derivada:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Regla del producto (u·v)' = u'·v + u·v'
  $\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Sustituimos:
  $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Sustituimos: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Simplificamos: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Gráfica



$y = x^3 \ln x$

$y'' = 5x + 6x \ln x$

Donde la segunda derivada es positiva, la función es convexa (curvada hacia arriba); donde es negativa, es cóncava (curvada hacia abajo).

La derivada por definición, como límite.

Enunciado: x^2 Derivar → Por definición

Resultado

$$y' = 2x$$

Pasos

- Derivada por definición

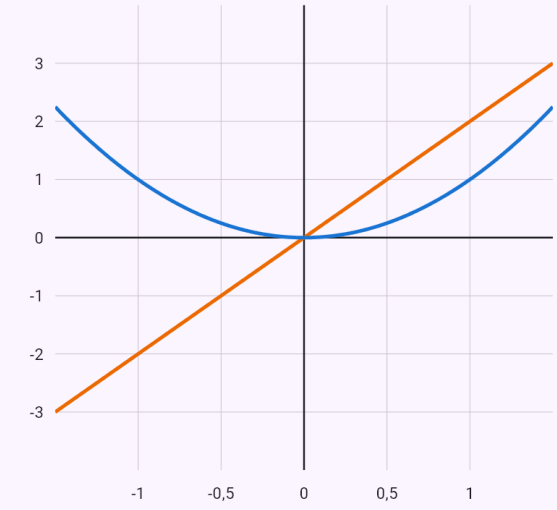
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Transformamos y simplificamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

- Sustituimos: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Gráfica



$y = x^2$
$y' = 2x$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

Derivada implícita – el folium de Descartes, la tangente y la normal en [3/2; 3/2], la segunda derivada.

Enunciado: `x^3 + y^3 = 3xy` Derivada implícita, orden 2, punto [3/2; 3/2]

Resultado

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$\text{t: } y = 3 - x$$

$$\text{n: } y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Condiciones: $y^2 - x \neq 0$

Pasos

- La función y = y(x) viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ – derivamos ambos miembros respecto a x, tomando y como función de x (regla de la cadena: p. ej. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivamos ambos miembros: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Los términos con y' a la izquierda, el resto a la derecha, y sacamos y' factor común: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- Despejamos y': $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- La segunda derivada – derivamos y' otra vez respecto a x (y e y' son funciones de x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

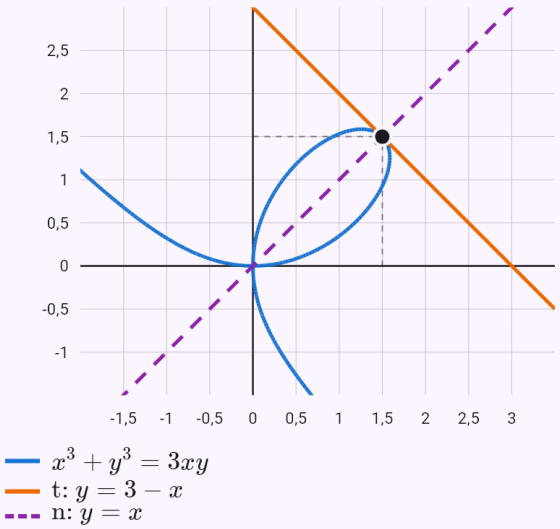
- Sustituimos y'

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Sobre la curva se cumple $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – lo que simplifica la expresión: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- El punto $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ está en la curva: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}} = 0$
- La derivada en el punto $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – la pendiente de la tangente: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- La tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- La normal es perpendicular a la tangente, su pendiente es 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- La segunda derivada en el punto: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Gráfica



La curva dada por la ecuación. En el punto dado, la tangente (continua) y la normal (discontinua).

La diferencial de √x en 4 con el paso 0,1.

Enunciado: `diferencial √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Resultado

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Pasos

- La diferencial – la parte lineal del incremento de la función: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- La diferencial en x_0 para el paso h

  $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\cdot h = \dfrac{1}{4}\cdot 0{,}1 = \dfrac{1}{40} = 0{,}025$
- Sustituimos el incremento por la diferencial. El valor exacto es $2{,}0248457$, el error de la estimación $0{,}00015$

  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \dfrac{1}{40} = \dfrac{81}{40} = 2{,}025$

Un valor aproximado de $\sqrt[3]{}$27,1 mediante la diferencial.

Enunciado: `aproximadamente \sqrt[3]{27.1}`

Resultado

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Pasos

- Escribimos el número como valor de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cerca de $x_0 = 27$, donde lo conocemos exactamente; el paso es $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- La diferencial – la parte lineal del incremento de la función: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- La diferencial en x_0 para el paso h

  $\mathrm{d}f(27) = f'(27)\cdot h = \dfrac{1}{27}\cdot 0{,}1 = \dfrac{1}{270} = 0{,}0037$
- Sustituimos el incremento por la diferencial. El valor exacto es $3{,}0036991$, el error de la estimación $0{,}0000046$

  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \dfrac{1}{270} = \dfrac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Estudio de una función

La aplicación estudia una función en el orden habitual: dominio, simetría (par o impar), cortes con los ejes, signo de la función, límites en los extremos del dominio y asíntotas, primera derivada – monotonía y extremos (también con derivadas de orden superior), segunda derivada – concavidad y puntos de inflexión, y por último el recorrido. Lo resume todo y dibuja una gráfica con los puntos marcados.

En una función trigonométrica la aplicación halla el periodo, estudia la función en un periodo y escribe los resultados con el periodo (un máximo en x = π/2 + 2kπ); si solo la derivada es periódica (x + 2 sin x), los extremos y la monotonía se repiten con el periodo. Los valores absolutos se quitan según los signos en los intervalos y en los picos se comparan las derivadas laterales; donde la derivada es infinita, se muestra una tangente vertical. Los valores absolutos anidados y las sumas de valores absolutos se estudian por tramos; donde la función es constante en un intervalo, se indica con su valor (un mínimo en cada punto del intervalo).

Extremos absolutos (globales) en un intervalo cerrado: «extremos de x^3 - 3x en [-2; 3]» – la app encuentra los puntos estacionarios y los puntos sin derivada dentro del intervalo y compara los valores allí y en los extremos del intervalo. Sin intervalo, «extremos …» estudia la función. La función inversa («función inversa f(x) = …») se obtiene despejando x de y = f(x), con comprobación por composición; la gráfica muestra f, f^{-1} y la recta y = x.

El vértice de una parábola («vértice de la parábola y = x^2 - 4x + 7», basta también y = …) se halla completando el cuadrado – con el eje, el recorrido y la traslación de la gráfica de $y = ax^2$. Una función compuesta se escribe con sus definiciones: «f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))».

Una gráfica por desplazamientos, estiramientos y reflexiones: «posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1» (en inglés «graph transformations …»): la aplicación parte de la función básica (sen, cos, tg, cotg, e^x, a^x, ln, $\log_a$, raíz, potencia, 1/x, |x|) y paso a paso la comprime o estira a lo largo del eje x, la desplaza a la derecha o a la izquierda, la estira a lo largo del eje y, la refleja y la desplaza arriba o abajo; también |f(x)| y f(|x|). En la gráfica están la función básica y la resultante.

Cómo introducirlo

`estudio y = x^3 - 3x`	Con la palabra «estudio» delante de la función.
`x^3 - 3x`	Una función con el chip «Estudio de la función».
`extremos de x^3 - 3x en [-2; 3]`	Extremos absolutos en un intervalo cerrado.
`función inversa f(x) = (2x+1)/(x-3)`	La función inversa (también «f^{-1}, f(x) = …»).

Ejemplos

Un polinomio – extremos y un punto de inflexión.

Enunciado: `x^3 - 3x` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$
Paridad: impar
Cortes con el eje x: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
Creciente: $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$
Decreciente: $[-1,\ 1]$
Máximo local: $[-1;\ 2]$
Mínimo local: $[1;\ -2]$
Convexa: $[0,\ \infty)$
Cóncava: $(-\infty,\ 0]$
Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x:
  $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, es decir
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\ 0)$	$(0,\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  La función es positiva para $x \in \left(-\sqrt{3},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3},\ \infty\right)$ y negativa para $x \in \left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\ \sqrt{3}\right)$
- Límites en los extremos del dominio
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

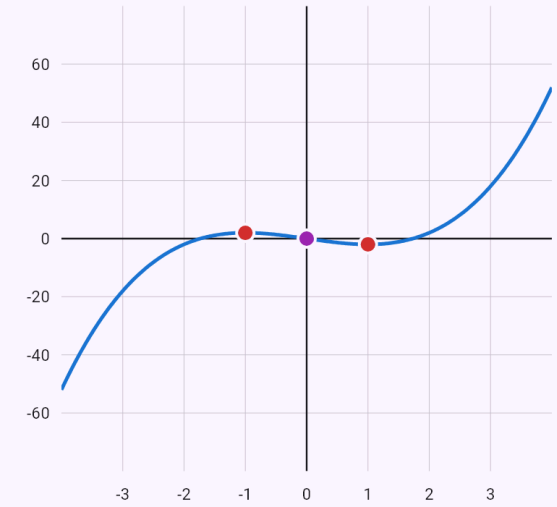
	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  La función es creciente en $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$ y decreciente en $[-1,\ 1]$
- En $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – máximo local.
- En $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – mínimo local.
- Máximo local $[-1;\ 2]$, mínimo local $[1;\ -2]$
- Segunda derivada: $f''(x) = 6x$
- Candidatos a puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  La función es convexa en $[0,\ \infty)$ y cóncava en $(-\infty,\ 0]$
- En $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – la primera derivada no nula (desde la tercera) es de orden impar: punto de inflexión.
- Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



$y = x^3 - 3x$

Puntos notables:

● máximo $(-1;2)$ ● inflexión $(0;0)$ ● mínimo $(1;-2)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Una función racional – asíntotas.

Enunciado: `x^2/(x - 1)` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty,\, 0] \cup [4,\, \infty)$
Paridad: ni par ni impar
Cortes con el eje x: $[0;\ 0]$
Creciente: $(-\infty,\, 0],\ [2,\, \infty)$
Decreciente: $[0,\, 1),\ (1,\, 2]$
Máximo local: $[0;\ 0]$
Mínimo local: $[2;\ 4]$
Convexa: $(1,\, \infty)$
Cóncava: $(-\infty,\, 1)$
Asíntotas: $x = 1,\ y = x + 1$

Pasos

- Dominio – condiciones $x \neq 1$: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- El dominio $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ no es simétrico respecto a cero – la función no es par ni impar.
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

  La función es positiva para $x \in (1,\, \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, 1)$
- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Asíntotas verticales (allí el límite es infinito): $x = 1$
- Asíntota en $\pm\infty$: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – la recta $y = x + 1$
- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

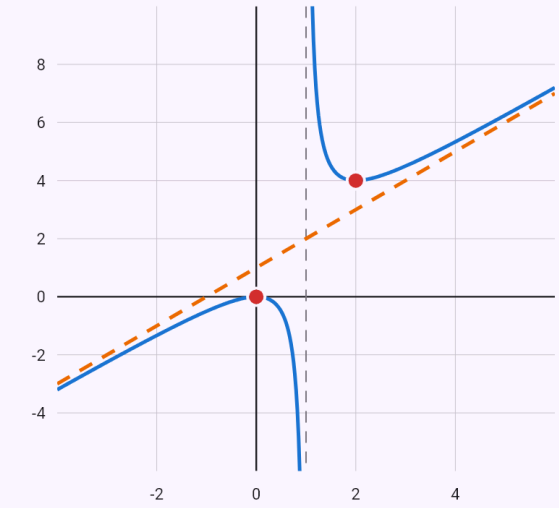
	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, 2)$	$(2,\, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

  La función es creciente en $(-\infty,\, 0],\ [2,\, \infty)$ y decreciente en $[0,\, 1),\ (1,\, 2]$
- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.
- En $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – mínimo local.
- Máximo local $[0;\ 0]$, mínimo local $[2;\ 4]$
- Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  La función es convexa en $(1,\, \infty)$ y cóncava en $(-\infty,\, 1)$
- La función no tiene puntos de inflexión.
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = (-\infty,\, 0] \cup [4,\, \infty)$

Gráfica



$y = \dfrac{x^2}{x-1}$
$y = x + 1$

Puntos notables:

● máximo $(0;0)$ ● mínimo $(2;4)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Función periódica: todo en un periodo, los resultados con el periodo.

Enunciado: `sin 2x + 2cos x` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Paridad: ni par ni impar

Periodo: $p = 2\pi$

Cortes con el eje x: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Creciente: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Decreciente: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexa:
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\right.$

Cóncava:
$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\right.\right.$

Puntos de inflexión:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- La función es periódica de periodo 2π: la estudiamos en un periodo (de 0 a 2π) y repetimos los resultados con el periodo, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – no es f(x) ni –f(x): la función no es par ni impar.
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, es decir $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 2$, es decir $[0;\ 2]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

  La función es positiva para $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ y negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Una función periódica (que no es constante) no tiene límite en ±∞.
- Primera derivada: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Puntos estacionarios
  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(0,\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  La función es creciente en $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ y decreciente en $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$
- Máximo local $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, mínimo local $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Segunda derivada: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Candidatos a puntos de inflexión
  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la

función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right))$	$(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right),\ \frac{3}{2}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

La función es convexa en y cóncava en

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right],\ \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ 2\pi -$$

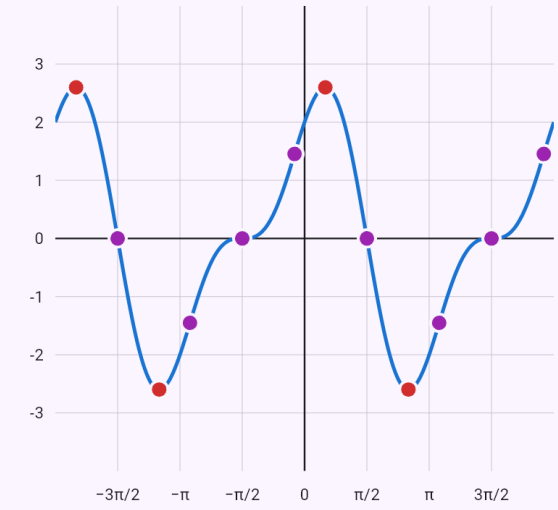
$$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\ \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right.$$

- Puntos de inflexión

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Gráfica



$y = \sin 2x + 2\cos x$

Puntos notables:

- máximo $\left(-\frac{11\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(-\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- mínimo $\left(-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexión $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- inflexión $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- máximo $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$
- mínimo $\left(\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexión $\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$
- inflexión $\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Tangente: asíntotas verticales, imagen $\mathbb{R}$.

Enunciado: `tg x` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Periodo: $p = \pi$

Cortes con el eje x: $[k\pi;\ 0]$

Creciente: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Convexa: $\left[k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Cóncava: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi \right]$

Puntos de inflexión: $[k\pi;\ 0]$

Asíntotas: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pasos

- Dominio – condiciones $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

- La función es periódica de periodo π: la estudiamos en un periodo (de 0 a π) y repetimos los resultados con el periodo, k ∈ $\mathbb{Z}$.

- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, es decir $[k\pi;\ 0]$

- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$

- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  La función es positiva para $x \in \left(k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ y negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi \right)$

- Una función periódica (que no es constante) no tiene límite en ±∞.

- Límites en los extremos del dominio

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$

  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

- Asíntotas verticales (allí el límite es infinito):

  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Primera derivada: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  La función es creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

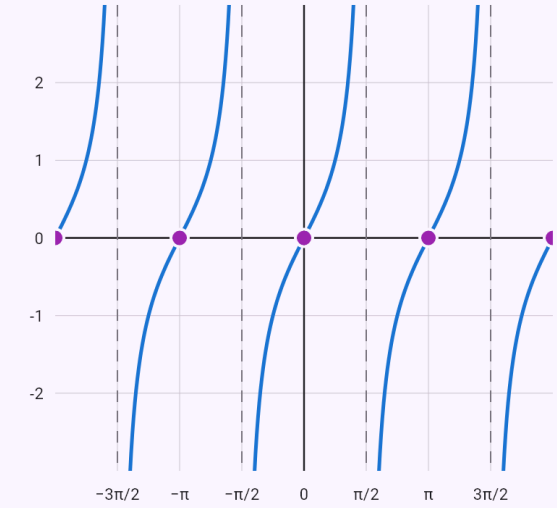
- La función no tiene extremos locales.

- Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$
- Candidatos a puntos de inflexión:
  $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  La función es convexa en $\left[k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi\right]$
- Puntos de inflexión: $[k\pi;\ 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



$y = \mathrm{tg}\,x$

Puntos notables:

- inflexión $(-2\pi; 0)$
- inflexión $(-\pi; 0)$
- inflexión $(0; 0)$
- inflexión $(\pi; 0)$
- inflexión $(2\pi; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Tangente hiperbólica – asíntotas horizontales y = ±1.

Enunciado: `tanh x` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = (-1,\ 1)$

Paridad: impar

Cortes con el eje x: $[0;\ 0]$

Creciente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty,\ 0]$

Cóncava: $[0,\ \infty)$

Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$

Asíntotas: $y = -1,\ y = 1$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  La función es positiva para $x \in (0,\ \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty,\ 0)$
- Límites en los extremos del dominio

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- La función no tiene asíntotas verticales.
- Asíntota en −∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ – la recta $y = -1$
- Asíntota en +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ – la recta $y = 1$
- Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  La función es creciente en $\mathbb{R}$
- La función no tiene extremos locales.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Candidatos a puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  La función es convexa en $(-\infty,\ 0]$ y cóncava en $[0,\ \infty)$
- En $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – la primera derivada no nula (desde la tercera) es de orden impar: punto de inflexión.
- Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = (-1,\ 1)$

Solo la derivada es periódica: los valores de los extremos crecen con k.

Enunciado: `x + 2sin x` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Periodo: $p = 2\pi$

Cortes con el eje x: $[0;\ 0]$

Creciente: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Decreciente: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexa: $[\pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$

Cóncava: $[2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$

Puntos de inflexión:
$[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- La función no es periódica, pero su derivada sí (periodo 2π): la monotonía, los extremos y la concavidad se repiten con este periodo, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- Límites en los extremos del dominio
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Primera derivada: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Puntos estacionarios
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

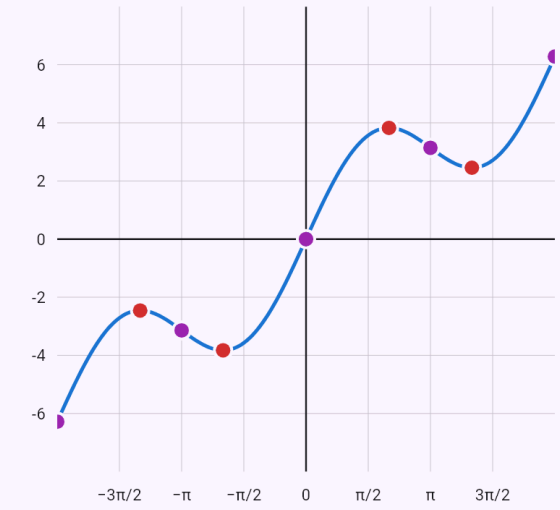
	$(0,\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3},\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  La función es creciente en $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ y decreciente en $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$
- Máximo local $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, mínimo local $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Segunda derivada: $f''(x) = -2\sin x$
- Candidatos a puntos de inflexión:
  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(0,\ \pi)$	$(\pi,\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  La función es convexa en $[\pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$ y cóncava en $[2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$
- Puntos de inflexión: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Gráfica



$y = x + 2\sin x$

Puntos notables:

- inflexión $(-2\pi; -2\pi)$
- máximo $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- inflexión $(-\pi; -\pi)$
- mínimo $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexión $(0; 0)$
- máximo $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexión $(\pi; \pi)$
- mínimo $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexión $(2\pi; 2\pi)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Valor absoluto: picos, derivadas laterales.

Enunciado: `|x^2 - 1|` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\, \infty)$

Paridad: par

Cortes con el eje x: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Creciente: $[-1,\, 0],\ [1,\, \infty)$

Decreciente: $(-\infty,\, -1],\ [0,\, 1]$

Máximo local: $[0;\ 1]$

Mínimo local: $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$

Convexa: $(-\infty,\, -1],\ [1,\, \infty)$

Cóncava: $[-1,\, 1]$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty,\, -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1,\, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1,\, \infty) \end{cases}$$

- – la función es par (su gráfica es simétrica respecto al eje y).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, es decir $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 1$, es decir $[0;\ 1]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\, -1)$	$(-1,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La función es positiva para $x \in (-\infty,\, -1) \cup (-1,\, 1) \cup (1,\, \infty)$ y negativa para $x \in \emptyset$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- No hay asíntota en +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- En $x = -1$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.
- En $x = 1$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty,\, -1)$	$(-1,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

La función es creciente en $[-1,\ 0],\ [1,\ \infty)$ y decreciente en $(-\infty,\ -1],\ [0,\ 1]$

- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[0;\ 1]$, mínimo local $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

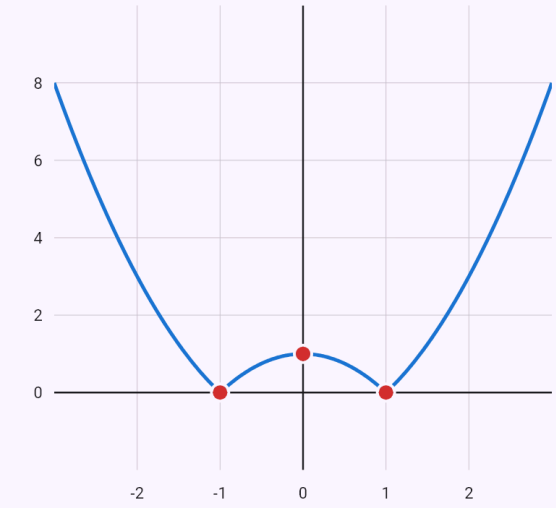
- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

  La función es convexa en $(-\infty,\ -1],\ [1,\ \infty)$ y cóncava en $[-1,\ 1]$

- La función no tiene puntos de inflexión.
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\operatorname{Im}(f) = [0,\ \infty)$

Gráfica



$y = |x^2 - 1|$

Puntos notables:

- mínimo $(-1; 0)$
- máximo $(0; 1)$
- mínimo $(1; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Raíz cúbica: tangente vertical en cero.

Enunciado: `x^(1/3)` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Cortes con el eje x: $[0;\ 0]$

Creciente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty,\ 0]$

Cóncava: $[0,\ \infty)$

Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0;\ 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  La función es positiva para $x \in (0,\ \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty,\ 0)$
- Límites en los extremos del dominio

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, pero $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- No hay asíntota en +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, pero $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.
- En $x = 0$ la derivada es infinita ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$): la gráfica tiene allí una tangente vertical.
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

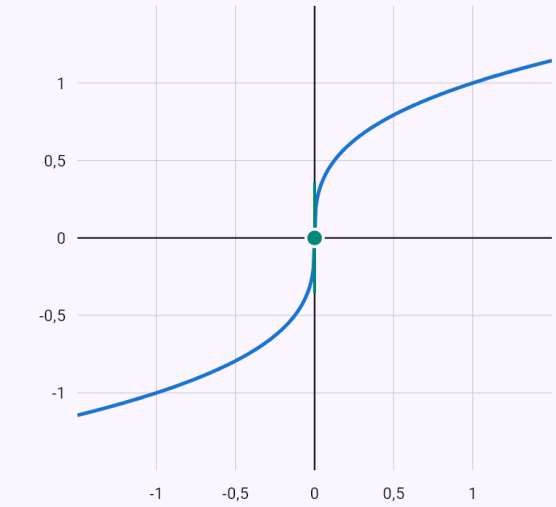
	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  La función es creciente en $\mathbb{R}$
- La función no tiene extremos locales.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  La función es convexa en $(-\infty,\ 0]$ y cóncava en $[0,\ \infty)$
- Puntos de inflexión: $[0;\ 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Puntos notables:

● inflexión $(0;0)$ ● tangente vertical $(0;0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Valor absoluto anidado – por tramos, función par.

Enunciado: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = [0,\,\infty)$

Paridad: par

Cortes con el eje x: $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$

Creciente: $[-3,\,-1],\ [0,\,1],\ [3,\,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,\,-3],\ [-1,\,0],\ [1,\,3]$

Máximo local: $[-1;\ 4],\ [1;\ 4]$

Mínimo local: $[-3;\ 0],\ [0;\ 3],\ [3;\ 0]$

Convexa: $(-\infty,\,-3],\ [3,\,\infty)$

Cóncava: $[-3,\,0],\ [0,\,3]$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty,\,-3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3,\,0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0,\,3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3,\,\infty) \end{cases}$$

- – la función es par (su gráfica es simétrica respecto al eje y).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, es decir $[-3;\ 0],\ [3;\ 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 3$, es decir $[0;\ 3]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\,-3)$	$(-3,\,3)$	$(3,\,\infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

La función es positiva para $x \in (-\infty,\,-3) \cup (-3,\,3) \cup (3,\,\infty)$ y negativa para $x \in \emptyset$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- No hay asíntota en +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+}{|x|\left|-x^2 + \right.}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- En $x = -3$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), la gráfica tiene allí un pico.
- En $x = 0$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.
- En $x = 3$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), la gráfica tiene allí un pico.
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

La función es creciente en $[-3, -1]$, $[0, 1]$, $[3, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -3]$, $[-1, 0]$, $[1, 3]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – máximo local.
- En $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$, mínimo local $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

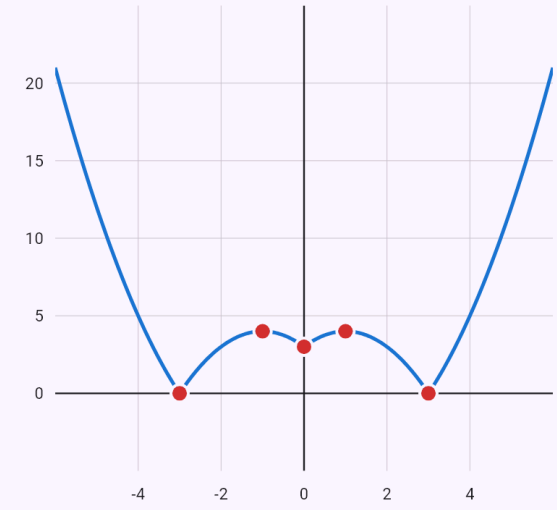
- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

La función es convexa en $(-\infty, -3]$, $[3, \infty)$ y cóncava en $[-3, 0]$, $[0, 3]$

- La función no tiene puntos de inflexión.
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = [0, \infty)$

Gráfica



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Puntos notables:

- mínimo $(-3; 0)$
- máximo $(-1; 4)$
- mínimo $(0; 3)$
- máximo $(1; 4)$
- mínimo $(3; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Suma de valores absolutos – un tramo constante y dos asíntotas oblicuas.

Enunciado: `|x - 2| + |x + 3|` Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}\,(f) = [5,\, \infty)$

Paridad: ni par ni impar

Creciente: $[2,\, \infty)$

Decreciente: $(-\infty,\, -3]$

Constante: $[-3,\, 2]$

Mínimo local: $f(x) = 5,\ x \in [-3,\, 2]$

Asíntotas: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Pasos

- Dominio: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$
- Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty,\, -3) \\ 5, & x \in [-3,\, 2) \\ 2x + 1, & x \in [2,\, \infty) \end{cases}$$

- – no es f(x) ni -f(x): la función no es par ni impar.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- La ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución – la gráfica no corta el eje x.
- Corte con el eje y: $f(0) = 5$, es decir $[0;\ 5]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty,\, \infty)$
$f(x)$	$+$

  La función es positiva para $x \in \mathbb{R}$ y negativa para $x \in \emptyset$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.
- Asíntota en -∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – la recta $y = -2x - 1$
- Asíntota en +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – la recta $y = 2x + 1$
- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

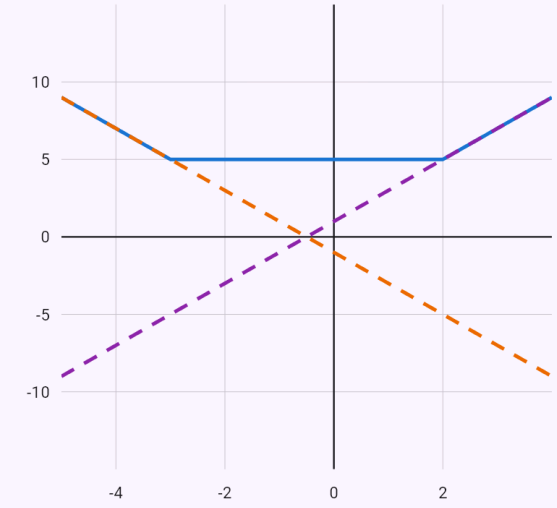
- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.
- En $x = -3$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), la gráfica tiene allí un pico.
- En $x = 2$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty,\, -3)$	$(-3,\, 2)$	$(2,\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

  La función es creciente en $[2,\, \infty)$ y decreciente en $(-\infty,\, -3]$. En $[-3,\, 2]$ es constante (f' = 0).

- Mínimo local $f(x) = 5,\ x \in [-3,\, 2]$, sin máximo local.
- Segunda derivada: $f''(x) = 0$
- La segunda derivada es cero – la gráfica es (parte de) una recta, ni convexa ni cóncava.
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\mathrm{Im}\,(f) = [5,\, \infty)$

Gráfica



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Extremos absolutos en un intervalo – puntos estacionarios y extremos.

Enunciado: `extremos de x^3 - 3x en [-2; 3]`

Resultado

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

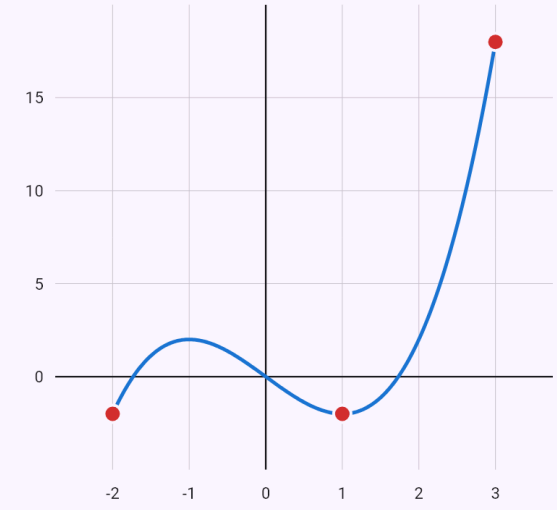
Pasos

- La derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Puntos estacionarios ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; todos están en el intervalo $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Una función continua alcanza en un intervalo cerrado su valor máximo y mínimo (teorema de Weierstrass) – en un punto estacionario, en un punto sin derivada o en un extremo del intervalo. Comparamos los valores

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- El valor máximo en $\langle -2;\ 3 \rangle$ es $f(3) = 18$, el mínimo $f(-2) = f(1) = -2$

Gráfica



$y = x^3 - 3x$

Puntos notables:

- máximo $(3; 18)$
- mínimo $(-2; -2)$
- mínimo $(1; -2)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

La inversa de una función racional lineal, con comprobación.

Enunciado: `función inversa f(x) = (2x+1)/(x-3)`

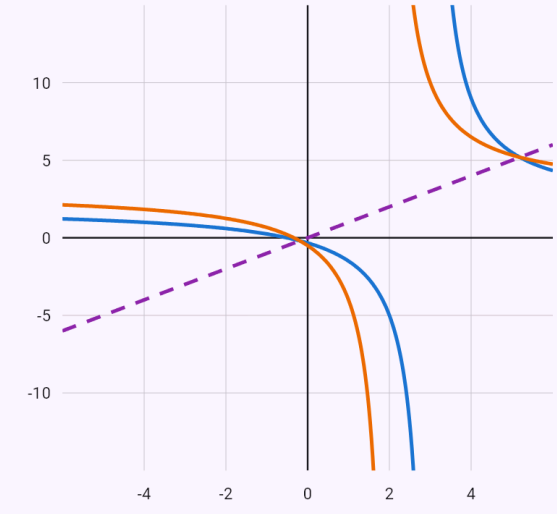
Resultado

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$$

Pasos

- La función $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$, condiciones de su dominio: $x - 3 \neq 0$
- Despejamos x de $y = f(x)$: $y = \dfrac{2x + 1}{x - 3} \ \Rightarrow\ x = \dfrac{3y + 1}{y - 2}$
- Intercambiamos x e y: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$. El dominio de la inversa es el recorrido de f: $x - 2 \neq 0$
- Comprobación por composición: $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{3x + 1}{x - 2}\right) = x$ ✓

Gráfica



$y = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

f^{-1}

$y = x$

La gráfica de la inversa es simétrica a la de f respecto a la recta y = x.

El vértice de una parábola completando el cuadrado.

Enunciado: `vértice de la parábola y = x^2 - 4x + 7`

Resultado

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Pasos

- Completamos el cuadrado:
  $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Vértice $V = [2;\ 3]$, eje $x = 2$; la parábola se abre hacia arriba, recorrido $H(f) = \langle 3; \infty)$
- La gráfica es la de $y = x^2$ trasladada por el vector $(2;\ 3)$

Una sinusoide comprimiendo, desplazando y estirando.

Enunciado: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

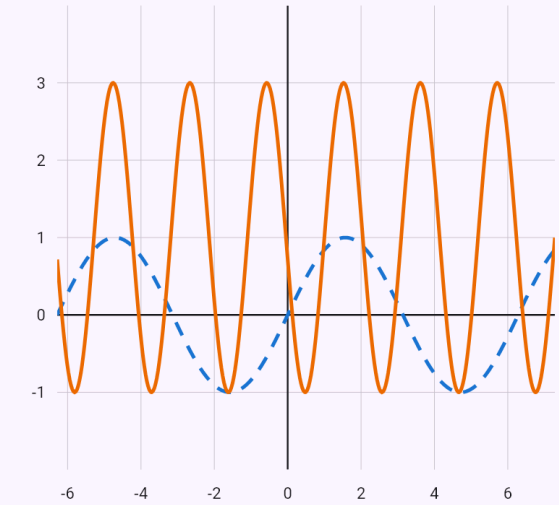
Resultado

$$y = 2\sin(3(x-1)) + 1$$

Pasos

- Partimos de la gráfica de la función básica $y = \sin x$
- Comprimimos la gráfica en la dirección del eje x con el factor 3 (hacia el eje y): $y = \sin(3x)$
- Desplazamos la gráfica 1 a la derecha en la dirección del eje x: $y = \sin(3(x-1))$
- Estiramos la gráfica en la dirección del eje y con el factor 2: $y = 2\sin(3(x-1))$
- Desplazamos la gráfica 1 hacia arriba en la dirección del eje y: $y = 2\sin(3(x-1)) + 1$

Gráfica



En discontinua la gráfica de la función básica, en continua la gráfica resultante.

Una raíz desplazada y reflejada respecto al eje x.

Enunciado: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

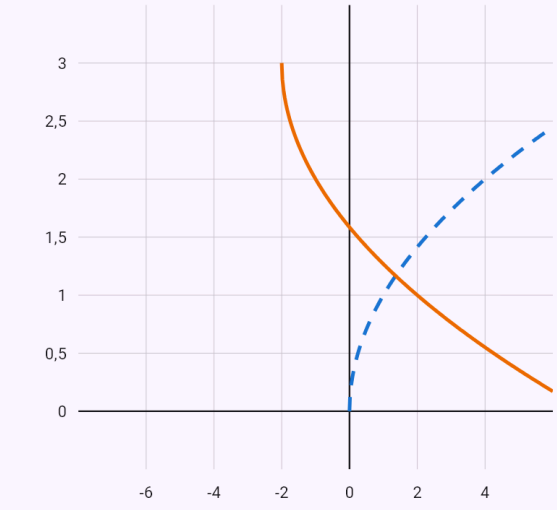
Resultado

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Pasos

- Partimos de la gráfica de la función básica $y = \sqrt{x}$
- Desplazamos la gráfica 2 a la izquierda en la dirección del eje x: $y = \sqrt{x+2}$
- Reflejamos la gráfica respecto al eje x: $y = -\sqrt{x+2}$
- Desplazamos la gráfica 3 hacia arriba en la dirección del eje y: $y = -\sqrt{x+2}+3$

Gráfica



$y = \sqrt{x}$

$y = -\sqrt{x+2}+3$

En discontinua la gráfica de la función básica, en continua la gráfica resultante.

Una función compuesta f(g(x)).

Enunciado: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Resultado

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Pasos

- En la función exterior f sustituimos x por la función interior g: $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Limitaciones conocidas

- Una función que ni siquiera tiene derivada periódica (x·sin x) se estudia solo numéricamente en ⟨−2π; 2π⟩ y sin el periodo; las funciones trigonométricas inversas (arcsin, arctan) aún no se admiten.
- Extremos absolutos solo en un intervalo cerrado y para una función continua; la inversa solo donde una fórmula la expresa – para una función no inyectiva (x²) todavía no se busca la inversa en una parte del dominio.

28. Funciones de varias variables

Derivadas parciales (primeras y segundas, mixtas) y el gradiente de una función de dos o tres variables – al derivar respecto a una variable, las demás son constantes.

Extremos locales de una función de dos variables: los puntos estacionarios de f_x = 0, f_y = 0, cada uno decidido por el determinante de la matriz hessiana D = f_xx·f_yy − f_xy² (mínimo, máximo, silla). Extremos condicionados con una restricción («extremos de xy, x + y = 1») por el método de Lagrange y el hessiano orlado.

La derivada direccional (el gradiente por un vector unitario), la diferencial total con un valor aproximado y el plano tangente a una superficie. Una integral doble se introduce con límites iterados o como región de desigualdades; la aplicación divide la región en partes normales, muestra la integral interior y la exterior y dibuja la región; el selector 3D muestra la superficie del integrando sobre ella. Los chips bajo el resultado cambian el orden de integración y pasan a coordenadas polares.

Análisis vectorial: la divergencia, el rotacional (en un campo plano un solo número ∂Q/∂x − ∂P/∂y), el laplaciano y el potencial de un campo conservativo – la aplicación comprueba primero que el rotacional es cero, luego encuentra φ integrando las componentes una tras otra y comprueba ∇φ = F. Un campo se introduce como vector (P; Q; R) o (P; Q), también con los vectores unitarios i, j, k o con nombre «F = …» en una línea aparte. En un campo plano el gráfico muestra las flechas del campo y las curvas de nivel del potencial. Los chips bajo el resultado cambian entre la divergencia, el rotacional y el potencial del mismo campo.

Integrales de línea: de primera especie ∫_C f ds (longitud de una curva, masa de un alambre) y de segunda especie ∫_C F·dr (trabajo de una fuerza, circulación $\oint$ a lo largo de una curva cerrada). La curva se da por una parametrización r(t) o una plantilla – segmento, circunferencia, gráfica y = f(x), poligonal; los pasos muestran el vector tangente, la sustitución en el campo y la integral en t. Para un campo conservativo la aplicación comprueba el resultado con el potencial φ(B) − φ(A) (independencia del camino), para una curva plana cerrada (circunferencia, elipse, polígono convexo) con el teorema de Green – también calcula la integral doble sobre la región interior. Los chips bajo el resultado eligen el método principal. El formulario «Integral de línea» (sección «Aplicaciones», campo Cálculo multivariable) ofrece plantillas de curva; el gráfico muestra la curva con su orientación sobre las flechas del campo y la región del teorema de Green, una curva del espacio en 3D, que se gira con el dedo.

Integrales triples: con límites iterados, sobre un sólido de desigualdades (∫∫∫_V, también desde una foto) o con el formulario «Integral triple» (sección «Aplicaciones», campo Cálculo multivariable) con las plantillas ortoedro, esfera, cilindro, cono, sólido entre gráficas y desigualdades. La aplicación describe el sólido como una región normal – la variable más interior entre dos superficies sobre la proyección – y calcula tres integrales seguidas (teorema de Fubini). En coordenadas cilíndricas y esféricas muestra la

sustitución con el jacobiano (r, ρ² sin θ) y los límites en las nuevas variables; cuando las coordenadas cartesianas no dan un resultado exacto, pasa a ellas sola, y para una esfera, un cilindro o x² + y² en el enunciado un chip las ofrece. El formulario calcula también el volumen, la masa con una densidad ρ, el centroide y el momento de inercia respecto a un eje. Un gráfico 3D giratorio muestra el sólido.

Las letras distintas de x, y, z (un radio r, una altura h, aristas a, b, c) son parámetros positivos: el resultado es una fórmula, por ejemplo V = 4/3 πr³ para la bola ball(r) – junto al radio r la coordenada cilíndrica se escribe ϱ – o V = abc para un ortoedro. La aplicación comprueba la fórmula numéricamente para varios valores de los parámetros; la imagen 3D del sólido se dibuja para el valor 1.

Integrales de superficie: de primera especie ∬_S f dS (área de una superficie, masa de una lámina) y de segunda especie – el flujo ∬_S F·n dS. La superficie se da por un modelo – una gráfica z = g(x, y) sobre una región D, una esfera, una semiesfera, un cilindro, un cono (toda la superficie con sus discos o solo la superficie lateral) – o por una parametrización r(u, v). Los pasos muestran los vectores tangentes r_u, r_v, el vector normal r_u × r_v con su orientación (hacia fuera en una superficie cerrada, hacia arriba en una gráfica, si no según la parametrización; a elegir outward, inward, up, down), el elemento de superficie y la integral doble sobre los parámetros; una superficie cerrada se suma por partes. El flujo a través de una superficie cerrada se comprueba con el teorema de Gauss (integral triple de la divergencia), el flujo de un rotacional con el teorema de Stokes – la integral de línea a lo largo del borde; los chips bajo el resultado cambian el método principal. El formulario «Integral de superficie» (sección «Aplicaciones», campo Cálculo multivariable) ofrece modelos de superficie; un gráfico 3D giratorio muestra la superficie con sus normales, las flechas del campo y el borde.

Hilos y cáscaras: los formularios de la integral de línea y de superficie (la opción «Qué calcular») y la notación quantity=mass / centroid / inertia calculan la masa de un hilo o de una cáscara con densidad f (vacía = 1), su centroide y su momento de inercia respecto a un eje (axis=x, y, z). El planímetro lineint(area; C) calcula el área dentro de una curva plana cerrada como ½∮ x dy − y dx y la comprueba con el teorema de Green.

Cómo introducirlo

`derivadas parciales x^2 y + y^3`	Todas las primeras derivadas parciales (con «segundas» las segundas).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Una derivada parcial (también \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	El gradiente.
`extremos de x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Extremos locales de una función de dos variables.

`extremos de xy, x + y = 1`	Extremos condicionados – la función y, tras una coma, la restricción.
`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Derivada direccional: la función, el punto, la dirección (también con palabras).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Diferencial total; el punto y los incrementos h son opcionales (también con palabras).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Plano tangente en un punto, para z = f(x, y) o F(x, y, z) = 0 (también con palabras).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Integral doble con límites iterados (también \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Integral doble sobre una región de desigualdades (también \iint_D ..., D: ...); se puede añadir order=dxdy o polar.
`div(x y; y z; z x)`	La divergencia de un campo (también ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, con palabras «divergencia»).
`∇×(y z; x z; x y)`	El rotacional (también rot, curl, \nabla \times); en un campo (P; Q) un solo número.
`Δ(x^2 y + y^3)`	El laplaciano de una función de dos o tres variables (también laplace(...), ∇², \Delta).
`potencial (2x + y; x + 2y)`	El potencial de un campo conservativo (también potential(...)); el campo puede tener nombre: «div F, F = (y; x; 0)».
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Una integral de línea – un campo (P; Q) o una función f, luego la curva: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); también cw (sentido horario), method=green / method=potential (también en palabras «integral de línea … a lo largo de …»). Tras la curva también quantity=mass / centroid / inertia (con axis=…); area en lugar de la función calcula el área dentro de una curva cerrada.

`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	La masa de un hilo con densidad f, quantity=centroid su centroide, quantity=inertia su momento de inercia (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	El planímetro – el área dentro de una curva plana cerrada a partir de la integral a lo largo de su borde (teorema de Green).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	Desde una foto $\oint_C$ o $\int_C$ con P dx + Q dy, F·dr o f ds; la curva tras una coma o en la línea siguiente (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Una integral de primera especie – la curva paramétrica con el rango del parámetro (también t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Una integral triple – la función y luego el sólido con desigualdades o una plantilla ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); coordenadas cart, cyl, sph, el orden order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (con axis=x). En palabras «integral triple de z sobre V: …», «volumen del sólido …», «masa del sólido … con densidad …», «centroide del sólido …», «momento de inercia del sólido … respecto al eje z».
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Desde una foto $\iiint$ (\iiint_V) con dV o dx dy dz; el sólido tras una coma (V: …) o bajo la integral.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Con límites iterados – tres integrales seguidas, los diferenciales al final o justo detrás de su integral.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Una integral de superficie – una función f, un campo (P; Q; R) o curl(P; Q; R), luego la superficie: graph(z = …; desigualdades de D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (solo la superficie lateral), closed (semiesfera con su base), outward / inward / up / down, method=gauss / method=stokes. En palabras «integral de superficie de … sobre …», «flujo de … a través de …». Con una función f también quantity=mass / centroid / inertia (con axis=…).

`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	De una foto ∬_S o ∯_S con f dS, F·dS o F·n dS; la superficie tras una coma o en la línea siguiente: S: x² + y² + z² = R² (con z ≥ 0 una semiesfera), x² + y² = R² con límites de z (superficie lateral de un cilindro), z = g(x, y) con desigualdades, r(u, v) con los intervalos de los parámetros.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	El flujo de un rotacional (∇ × F, rot F, curl F) – el campo nombrado aparte; comprobación con el teorema de Stokes.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	La masa, el centroide o el momento de inercia de una cáscara con densidad superficial f.

Ejemplos

Segundas derivadas parciales, también la mixta.

Enunciado: `segundas derivadas parciales x^2 y + y^3`

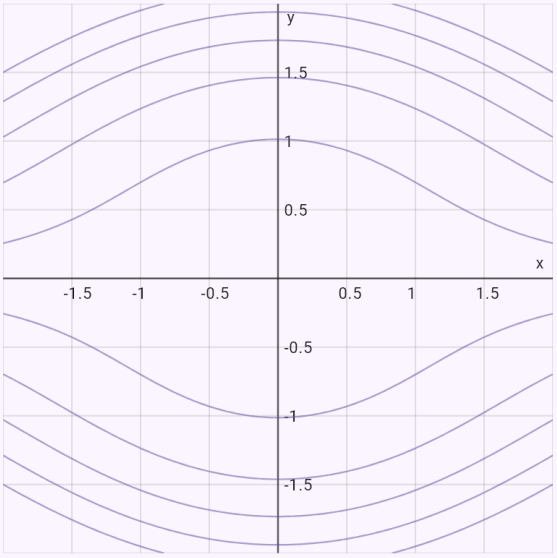
Resultado

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Pasos

- La derivada parcial respecto a x – las demás variables son constantes: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- La derivada parcial respecto a y – las demás variables son constantes: $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- La derivada parcial respecto a xx – las demás variables son constantes: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- La derivada parcial respecto a xy – las demás variables son constantes: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- La derivada parcial respecto a yy – las demás variables son constantes: $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Gráfica



Curvas de nivel de f.

Extremos locales – un punto de silla y un mínimo.

Enunciado: `extremos de x^3 - 3xy + y^3`

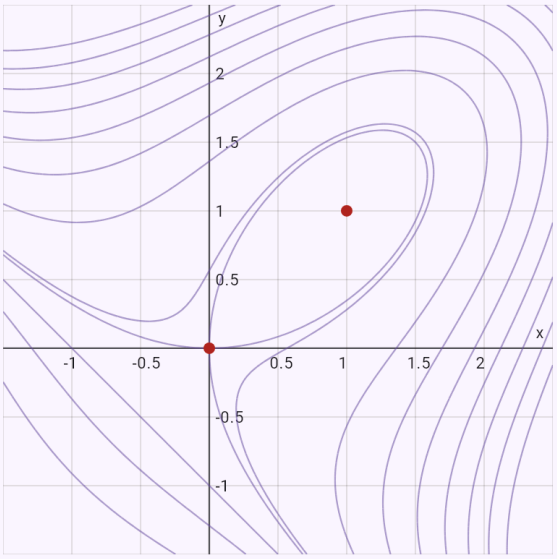
Resultado

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Pasos

- La derivada parcial respecto a x – las demás variables son constantes: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- La derivada parcial respecto a y – las demás variables son constantes: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Los puntos estacionarios $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ resuelven el sistema en el que ambas derivadas parciales son nulas
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Las segundas derivadas parciales $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ y el determinante de la matriz hessiana
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- En $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – un punto de silla, sin extremo ($f(0;\ 0) = 0$).
- En $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$ – un mínimo local $f(1;\ 1) = -1$

Gráfica



Curvas de nivel de f.

Un extremo condicionado por el método de Lagrange.

Enunciado: `extremos de xy, x + y = 1`

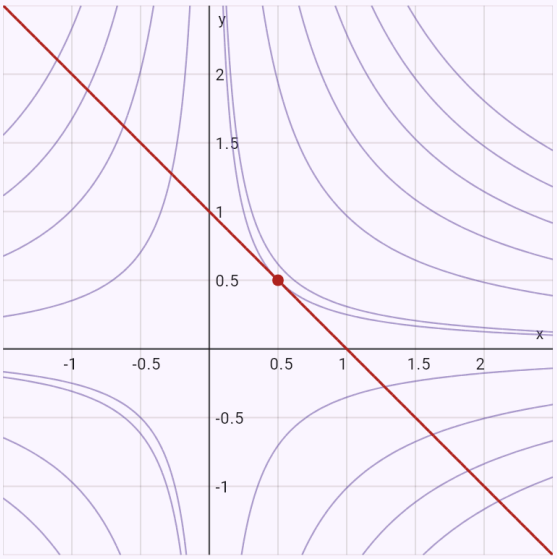
Resultado

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Pasos

- La función de Lagrange con el multiplicador λ: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Sus derivadas parciales son nulas y se cumple la restricción
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Candidatos a extremo condicionado (soluciones del sistema): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- En $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ el hessiano orlado es positivo – un máximo local condicionado $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Gráfica



Curvas de nivel de f.

La derivada direccional y el mayor crecimiento.

Enunciado: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

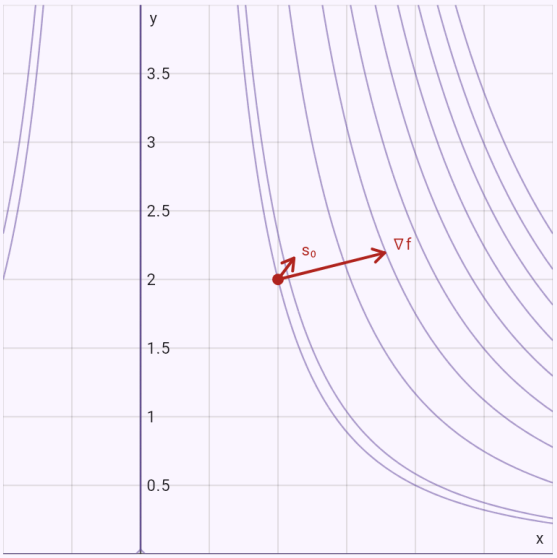
Resultado

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Pasos

- La derivada parcial respecto a x – las demás variables son constantes: $f_x = 2xy$
- La derivada parcial respecto a y – las demás variables son constantes: $f_y = x^2$
- Convertimos la dirección en un vector unitario: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- El gradiente en el punto $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- La derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector unitario $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- El mayor crecimiento sigue el gradiente, con módulo $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Gráfica



Curvas de nivel de f. La flecha ∇f apunta en la dirección de mayor crecimiento.

El plano tangente de un paraboloide.

Enunciado: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

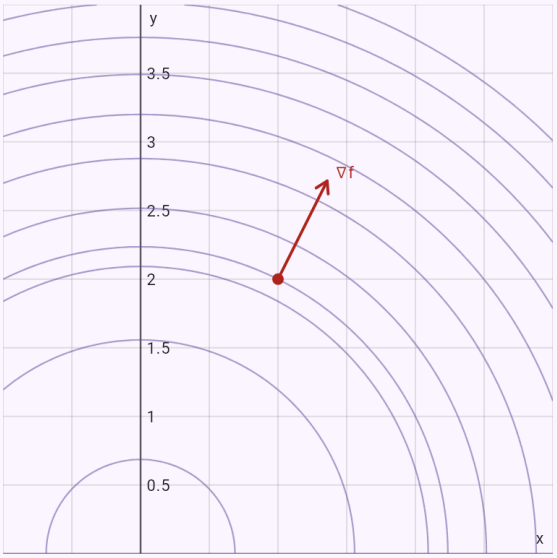
Resultado

$$z = 2x + 4y - 5$$

Pasos

- La derivada parcial respecto a x – las demás variables son constantes: $f_x = 2x$
- La derivada parcial respecto a y – las demás variables son constantes: $f_y = 2y$
- La tercera coordenada del punto de tangencia: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Sustituimos en el plano tangente z − z_0 = f_x·(x − x_0) + f_y·(y − y_0): $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- El vector normal del plano: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Gráfica



Curvas de nivel de f. La flecha ∇f apunta en la dirección de mayor crecimiento.

Una integral doble sobre un triángulo.

Enunciado: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Resultado

$$\frac{1}{8}$$

Orden de integración:

✓ dy dx | dx dy

Coordenadas:

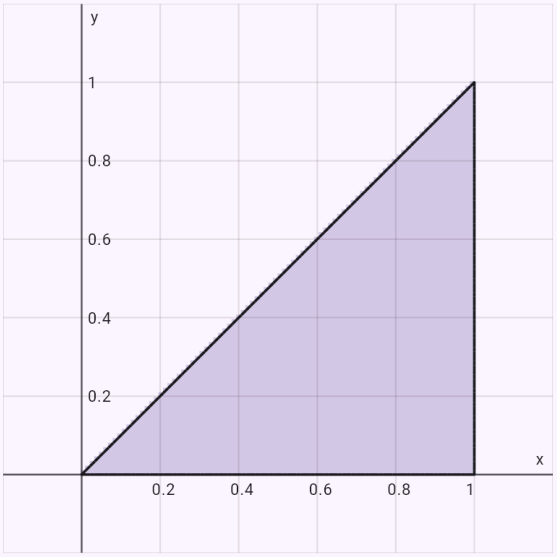
✓ Cartesianas | Polares

Pasos

- Describimos la región como región normal: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- La integral interior respecto de y (la otra variable es constante): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- La integral exterior respecto de x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Gráfica

✓ 2D | 3D



La región de integración.

La integral interior no es elemental: la aplicación cambia el orden por sí sola.

Enunciado: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Resultado

$$\frac{e-1}{2}$$

Orden de integración:

✓ dx dy | dy dx

Coordenadas:

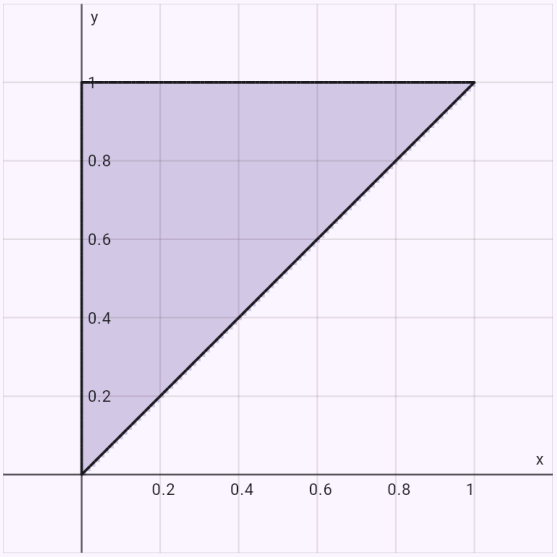
✓ Cartesianas | Polares

Pasos

- La integral interior respecto de y no tiene primitiva elemental, así que cambiamos el orden de integración.
- Describimos la región como región normal: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada: $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$
- La integral interior respecto de x (la otra variable es constante): $\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$
- La integral exterior respecto de y: $\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Gráfica

✓ 2D | 3D



La región de integración.

Un cuarto de círculo en coordenadas polares.

Enunciado: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Resultado

$$\frac{\pi}{8}$$

Coordenadas:

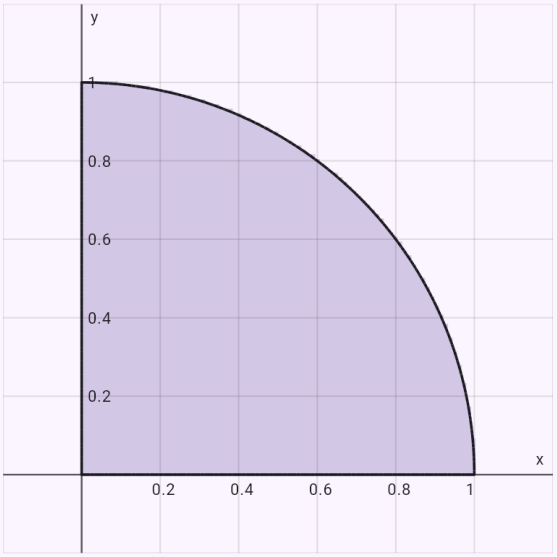
Cartesianas | ✓ Polares

Pasos

- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, donde r es el jacobiano de la transformación. El integrando: $f \cdot r = r^3$
- La región en coordenadas polares: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- La integral interior respecto de r (la otra variable es constante): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- La integral exterior respecto de φ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Gráfica

✓ 2D | 3D



La región de integración.

La divergencia de un campo en el espacio como suma de tres derivadas parciales.

Enunciado: `div(x y; y z; z x)`

Resultado

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Para este campo calcular:

✓ divergencia | rotacional | potencial

Pasos

- El campo vectorial y sus componentes:
  $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- La derivada parcial respecto a x – las demás variables son constantes: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = y$
- La derivada parcial respecto a y – las demás variables son constantes: $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = z$
- La derivada parcial respecto a z – las demás variables son constantes: $\dfrac{\partial R}{\partial z} = x$
- La divergencia es la suma de las derivadas parciales de las componentes, cada una respecto a «su» variable
  $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

El rotacional de un vórtice plano – las flechas giran alrededor del origen.

Enunciado: `rot(-y; x)`

Resultado

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

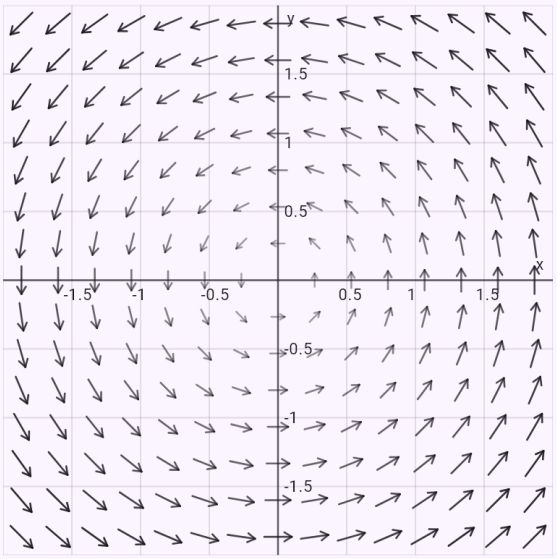
Para este campo calcular:

divergencia | ✓ rotacional | potencial

Pasos

- El campo vectorial y sus componentes:
  $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- En un campo plano el rotacional es un solo número – la componente z, ∂Q/∂x − ∂P/∂y
  $(\nabla \times \vec{F})_z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Gráfica



Las flechas muestran la dirección y la intensidad del campo (más largas y oscuras = más intenso).

Una función armónica – el laplaciano es cero.

Enunciado: `Δ(x^2 - y^2)`

Resultado

$$\Delta f = 0$$

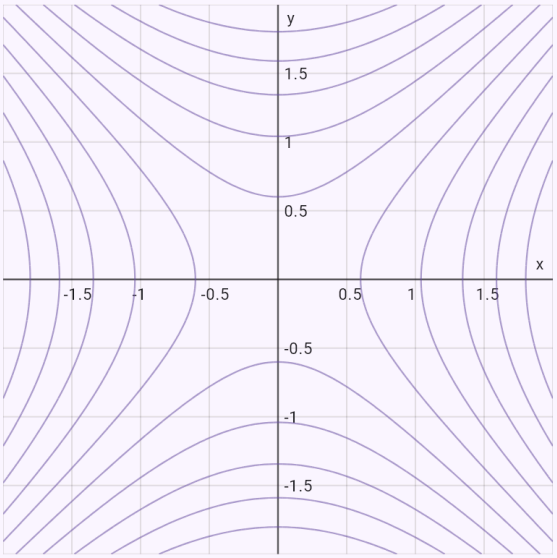
Para esta función calcular:

✓ laplaciano Δf | gradiente ∇f

Pasos

- La primera y la segunda derivada parcial respecto a x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- La primera y la segunda derivada parcial respecto a y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- El laplaciano es la suma de las segundas derivadas parciales: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – la función es armónica.

Gráfica



Curvas de nivel de f.

El potencial al estilo escolar: P integrada respecto a x, comparada con Q, comprobación; gráfico con

equipotenciales.

Enunciado: `potential(2x y; x^2)`

Resultado

$$\varphi = x^2 y + C$$

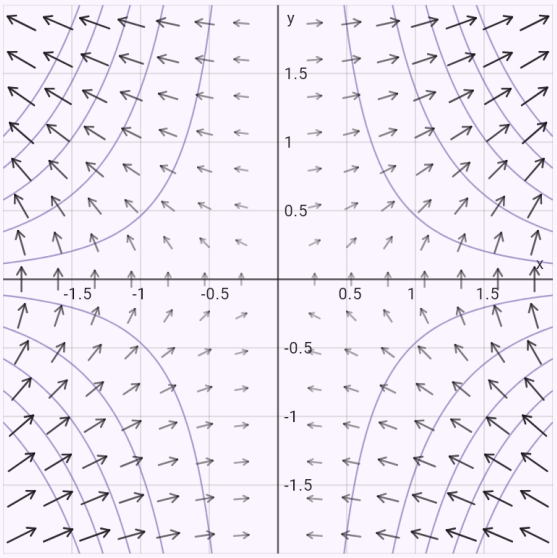
Para este campo calcular:

divergencia | rotacional | ✓ potencial

Pasos

- El campo vectorial y sus componentes: $\vec{F} = (2xy;\ x^2),\quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- El rotacional es cero (en el plano ∂Q/∂x = ∂P/∂y), el campo es conservativo y tiene sentido buscar un potencial: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Buscamos φ con ∇φ = F. Integramos P respecto a x; la constante de integración puede depender de las demás variables: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Derivamos φ respecto a y y comparamos con la componente Q – queda la derivada de la «constante» $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- Integramos la «constante» respecto a y; la nueva solo depende de las variables restantes, al final es un número C: $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Comprobación – el gradiente del potencial es el campo dado: $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Gráfica



Las flechas muestran la dirección y la intensidad del campo (más largas y oscuras = más intenso). Curvas de nivel del potencial φ (equipotenciales) – el campo es perpendicular a ellas en todas partes.

El trabajo de un campo conservativo – por parametrización, comprobado con el potencial φ = x²y.

Enunciado: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Resultado

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Calcular:

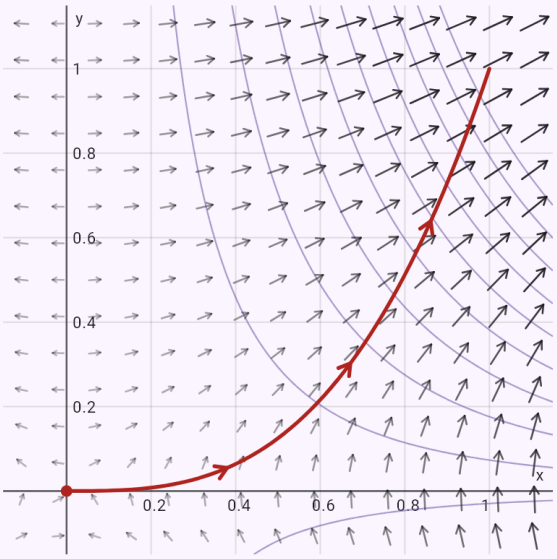
por parametrización | por el potencial

Editar en el formulario

Pasos

- Integral de línea de segunda especie de un campo vectorial a lo largo de la curva orientada C (por ejemplo el trabajo de una fuerza a lo largo de un camino):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametrización de la curva: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización: $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro: $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Comprobación: el campo es conservativo, tiene un potencial φ y la integral es independiente del camino – basta la diferencia φ(B) − φ(A)
  $\varphi = x^2 y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial). Las flechas muestran la dirección y la intensidad del campo (más largas y oscuras = más intenso). Curvas de nivel del potencial φ (equipotenciales) – el campo es perpendicular a ellas en todas partes.

Una circulación a lo largo de la circunferencia unidad desde una foto, comprobada con el teorema de

Green en coordenadas polares.

Enunciado: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Resultado

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Calcular:

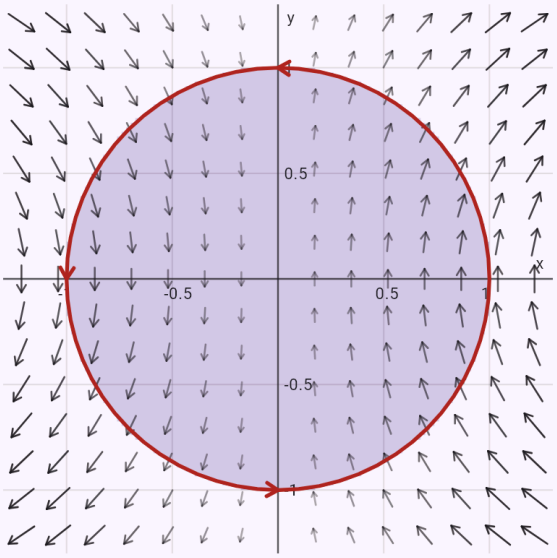
por parametrización | por el teorema de Green

Editar en el formulario

Pasos

- La curva es cerrada – la integral de segunda especie a lo largo de ella es la circulación del campo:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- La circunferencia de centro S y radio r, recorrida una vez (parametrización por el ángulo t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización:
  $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + c$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro: $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Comprobación con el teorema de Green: la curva está orientada positivamente (sentido antihorario), la integral a lo largo de ella es igual a la integral doble sobre la región D interior
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- La región D dentro de la curva – la integral doble sobre ella: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, donde r es el jacobiano de la transformación. El integrando: $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- La región en coordenadas polares:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- La integral interior respecto de r (la otra variable es constante)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$
- La integral exterior respecto de φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Los dos lados del teorema de Green coinciden:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial). Las flechas muestran la dirección y la intensidad del campo (más largas y oscuras = más intenso). Sombreada, la región D dentro de la curva del teorema de Green.

La longitud de una parábola – la integral de primera especie de 1.

Enunciado: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Resultado

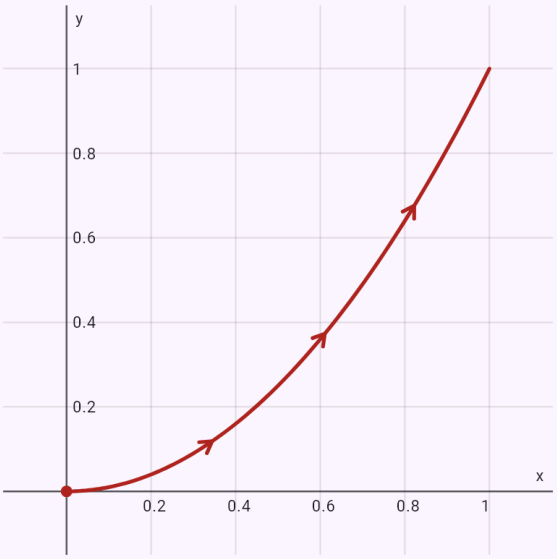
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Editar en el formulario

Pasos

- Integral de línea de primera especie de f a lo largo de la curva C – sumamos f por la longitud ds de pequeños trozos de la curva: $\int_C ds$
- La gráfica de una función – el propio x es el parámetro (parametrización r(x) = (x; f(x))):
  $y = x^2: \quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización:
  $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- Su módulo; el elemento de longitud de arco es ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Sustituimos la parametrización en f y multiplicamos por el módulo del vector tangente:
  $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro
  $$\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$$
- La integral de 1 ds es la longitud de la curva (con una densidad f en lugar de 1 sería la masa de un alambre).

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial).

Una hélice en el espacio – un gráfico 3D giratorio con las flechas del campo.

Enunciado: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Resultado

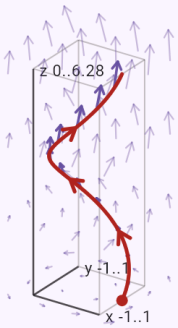
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Editar en el formulario

Pasos

- Integral de línea de segunda especie de un campo vectorial a lo largo de la curva orientada C (por ejemplo el trabajo de una fuerza a lo largo de un camino):
  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametrización de la curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización:
  $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro: $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial). Las flechas muestran el campo, más intensas sobre la curva. Gírelo arrastrando el dedo.

El centroide de una semicircunferencia – la masa y dos momentos estáticos.

Enunciado: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Resultado

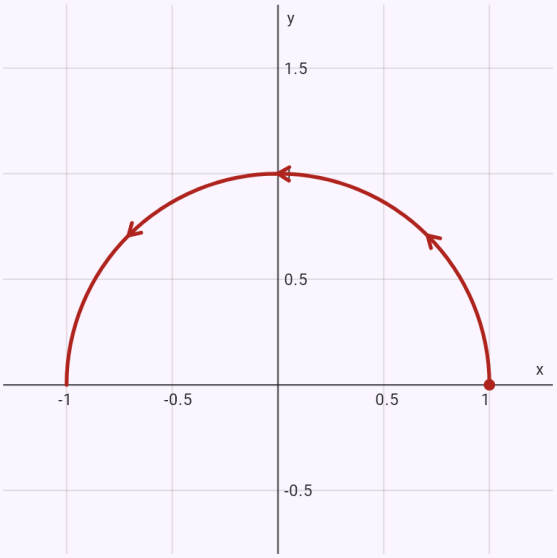
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Editar en el formulario

Pasos

- Integral de línea de primera especie de f a lo largo de la curva C – sumamos f por la longitud ds de pequeños trozos de la curva: $\int_C ds$
- El centro de masa del alambre: los momentos estáticos (integral de una coordenada por la densidad) entre la masa, igual para y (y z)
  $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametrización de la curva:
  $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización:
  $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Su módulo; el elemento de longitud de arco es ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Sustituimos la parametrización en f y multiplicamos por el módulo del vector tangente: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- El momento estático para la coordenada x – el mismo cálculo con el integrando $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- El momento estático para la coordenada y – el mismo cálculo con el integrando $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Las coordenadas del centro de masa son los momentos entre la masa: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial).

El área de una elipse con el planímetro: ½∮ x dy − y dx = πab.

Enunciado: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Resultado

$$A = 6\pi$$

Calcular:

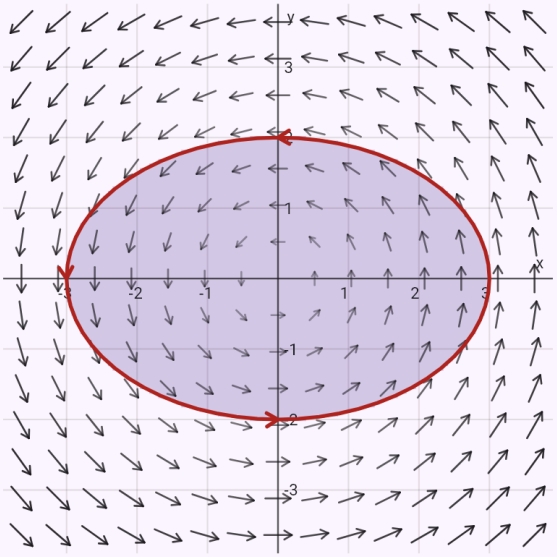
✓ por parametrización | por el teorema de Green

Editar en el formulario

Pasos

- La curva es cerrada – la integral de segunda especie a lo largo de ella es la circulación del campo:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$
- El área dentro de una curva cerrada como integral de línea a lo largo del borde (el planímetro) – por el teorema de Green con Q_x − P_y = 1: $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$
- Parametrización de la curva:
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- El vector tangente – la derivada de la parametrización:
  $\vec{r}\,'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector tangente
  $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \dots$
- Queda una integral definida ordinaria sobre el intervalo del parámetro: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Comprobación con el teorema de Green: la curva está orientada positivamente (sentido antihorario), la integral a lo largo de ella es igual a la integral doble sobre la región D interior
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- La región D dentro de la curva – la integral doble sobre ella: $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Describimos la región como región normal:
  $-3 \le x \le 3,\ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada
  $$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$
- La integral interior respecto de y (la otra variable es constante)
  $$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- La integral exterior respecto de x
  $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$
- Los dos lados del teorema de Green coinciden:
  $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$

Gráfica



La curva C con flechas en el sentido de su orientación (el punto = el punto inicial). Las flechas muestran la dirección y la intensidad del campo (más largas y oscuras = más intenso). Sombreada, la región D dentro de la curva del teorema de Green.

La semiesfera superior en coordenadas esféricas – el jacobiano ρ² sin θ, los límites de ρ, θ, φ.

Enunciado: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Resultado

$4\pi \approx 12{,}566$

Calcular en coordenadas:

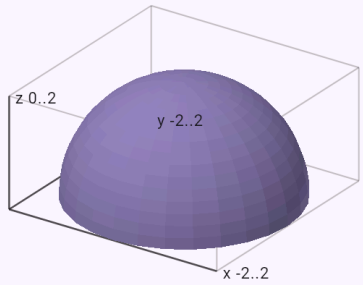
cartesianas | cilíndricas | ✓ esféricas

Editar en el formulario

Pasos

- La integral triple de la función sobre el sólido V:
$$\iiint_V z\,dV$$
- Coordenadas esféricas – J = ρ² sin θ es el jacobiano de la transformación (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); sustitución e integrando
$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$$
$$f \cdot \rho^2\sin\theta = \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta$$
- El sólido en coordenadas esféricas:
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$
- La integral más interior respecto a ρ (las demás variables son constantes)
$$\int_0^{2}\rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\rho = \left[\frac{\rho^4\cos\theta\cdot\sin\theta}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\cos\theta\cdot s$$
- La integral intermedia respecto a θ
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \left[2\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$$
- La integral exterior respecto a φ:
$$\int_0^{2\pi}2\,d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Gráfica



El sólido V sobre el que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

Un tetraedro con límites iterados – tres integrales seguidas.

Enunciado: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Resultado

$$\frac{1}{24}$$

Calcular en coordenadas:

✓ cartesianas | cilíndricas | esféricas

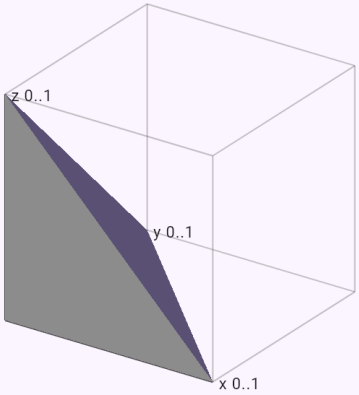
Editar en el formulario

Pasos

- La integral triple de la función sobre el sólido V:
  $$\iiint_V x \, dV$$
- Describimos el sólido como una región normal – z está entre dos superficies sobre la proyección del sólido:
  $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le -x - y + 1$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes):
  $$\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x - y + 1)$$
- La integral intermedia respecto a y
  $$\int_0^{1-x} (x(-x - y + 1)) \, dy = \left[-\frac{x(x + y - 1)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$
- La integral exterior respecto a x

$$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Gráfica



El sólido V sobre el que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El volumen de un cono en coordenadas cilíndricas.

Enunciado: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Resultado

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

Calcular en coordenadas:

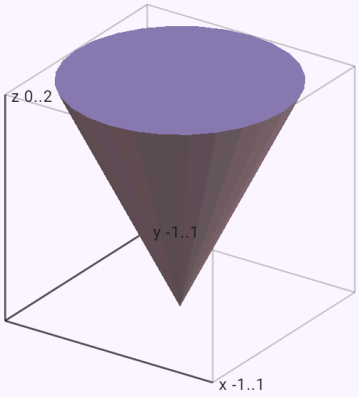
cartesianas | ✓ cilíndricas

Editar en el formulario

Pasos

- El volumen del sólido es la integral triple de uno:
  $V = \iiint_V dV$
- Coordenadas cilíndricas – J = r es el jacobiano de la transformación (dV = r dr dφ dz); sustitución e integrando
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r$
- El sólido en coordenadas cilíndricas:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 r\,dz\,dr\,d\varphi$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes):
  $\int_{2r}^2 r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- La integral intermedia respecto a r
  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$
- La integral exterior respecto a φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Gráfica



El sólido V sobre el que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El centroide de una semiesfera – la masa y tres momentos estáticos.

Enunciado: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Resultado

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

El sólido o la función contiene x² + y² + z² – las coordenadas esféricas suelen ser más sencillas:

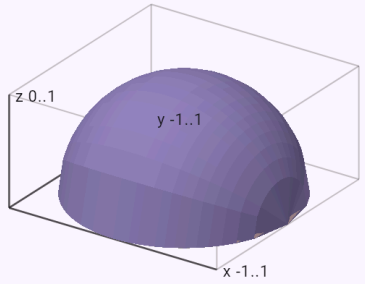
✓ cartesianas | cilíndricas | esféricas

Editar en el formulario

Pasos

- El centroide del sólido: cada coordenada es un momento estático (la integral de la coordenada por la densidad) dividido entre la masa m, igual para y y z:
$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$$
- Describimos el sólido como una región normal – z está entre dos superficies sobre la proyección del sólido
$$-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-}$$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes)
$$\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$$
- La integral intermedia respecto a y
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right)dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\frac{\sqrt{}}{2}\right.\right.$$
- La integral exterior respecto a x
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$$
- El momento estático para la coordenada x – los mismos pasos con el integrando $x \cdot \rho$
$$\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$$
- El momento estático para la coordenada y – los mismos pasos con el integrando $y \cdot \rho$
$$\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$$
- El momento estático para la coordenada z – los mismos pasos con el integrando $z \cdot \rho$
$$\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$
- Las coordenadas del centroide son los momentos divididos entre la masa
$$x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$$
$$z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

Gráfica



El sólido V sobre el que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El momento de inercia de un cilindro respecto a su eje.

Enunciado: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Resultado

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

Calcular en coordenadas:

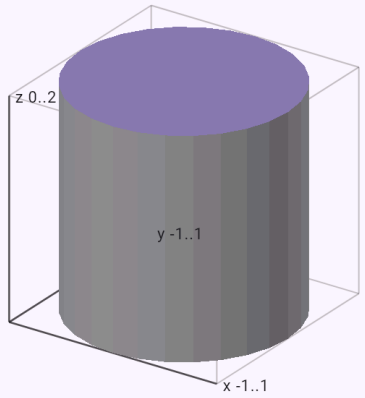
cartesianas | ✓ cilíndricas

Editar en el formulario

Pasos

- El momento de inercia respecto al eje z – la densidad por el cuadrado de la distancia d al eje:
  $$I_z = \iiint_V d^2\, dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$
- Coordenadas cilíndricas – J = r es el jacobiano de la transformación (dV = r dr dφ dz); sustitución e integrando
  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
  $$f \cdot r = r^3$$
- El sólido en coordenadas cilíndricas:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 r^3\, dz\, dr\, d\varphi$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes): $\int_0^2 r^3\, dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- La integral intermedia respecto a r:
  $$\int_0^1 2r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$$
- La integral exterior respecto a φ
  $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Gráfica



El sólido V sobre el que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El flujo saliente por una esfera – parametrización por los ángulos θ, φ y comprobación con el teorema

de Gauss.

Enunciado: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Resultado

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$$

Calcular:

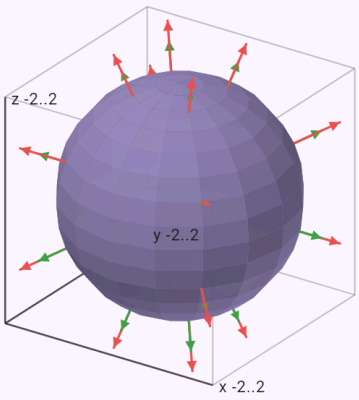
- ✓ por parametrización
- con el teorema de Gauss

Editar en el formulario

Pasos

- El flujo del campo vectorial a través de la superficie S – una integral de superficie de segunda especie:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametrización de la esfera por los ángulos θ (desde el eje z positivo) y φ (alrededor del eje z)
  $\vec{r}(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Las derivadas parciales respecto a los parámetros – los vectores tangentes de la superficie
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi\cdot\cos\theta;\ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- El vector normal (producto vectorial de los vectores tangentes) orientado hacia fuera del sólido
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta\cdot\text{si}\right.$
- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector normal (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{N} = 8\sin\theta$
- La integral doble sobre el rectángulo de los parámetros
  $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\,d\theta = 32\pi$$
- Comprobación con el teorema de Gauss: el flujo saliente por la superficie cerrada es la integral triple de la divergencia sobre el sólido interior
- La integral triple de la función sobre el sólido V:
  $\iiint_V 3\,dV$
- Describimos el sólido como una región normal – z está entre dos superficies sobre la proyección del sólido
  $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple
  $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz\,dy\,dx$$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes)
  $$\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\,dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2-}$$
- La integral intermedia respecto a y
  $$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right)dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right($$
- La integral exterior respecto a x
  $$\int_{-2}^{2}\left(\pi\left(12-3x^2\right)\right)dx = \left[-\pi x^3+12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$$
- El teorema de Gauss da el mismo valor:
  $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 32\pi$

Gráfica



La superficie S con sus normales (verde) y las flechas del campo (rojo). Gírelo arrastrando el dedo.

El área de un paraboloide – el elemento de superficie de la gráfica, una integral doble en coordenadas

polares.

Enunciado: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Resultado

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Editar en el formulario

Pasos

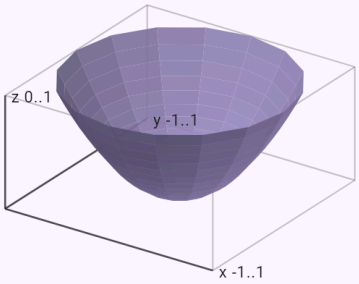
- El área de la superficie S es la integral de superficie de uno: $\iint_S dS$
- La superficie es la gráfica de z = g(x, y) sobre la región D del plano xy: $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \ x^2 + y^2 \le 1$
- Las derivadas parciales de g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- El elemento de superficie de la gráfica: $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Sustituimos la parametrización en f y multiplicamos por el elemento de superficie: $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- La integral de superficie sobre una gráfica es una integral doble sobre su proyección D: $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Coordenadas polares: $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \ J = r$, donde r es el jacobiano de la transformación. El integrando: $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- La región en coordenadas polares: $0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como integral iterada: $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr \right) d\varphi$
- La integral interior respecto de r (la otra variable es constante)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} \right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2 + 1\right)^3}}{12} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1 + 5\sqrt{}}{12}$$

- La integral exterior respecto de φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1 + 5\sqrt{5}}{12} \right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1 + 5\sqrt{5}\right)\varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{\left(-1 + \right.}{}$$

Gráfica



La superficie S sobre la que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El flujo por un cilindro cerrado con el teorema de Gauss, comprobado por partes – superficie lateral y

dos discos.

Enunciado: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Resultado

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$$

Calcular:

por parametrización

✓ con el teorema de Gauss

Editar en el formulario

Pasos

- El flujo del campo vectorial a través de la superficie S – una integral de superficie de segunda especie: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Por el teorema de Gauss (de la divergencia), el flujo saliente por una superficie cerrada es igual a la integral triple de la divergencia sobre el sólido V interior
- La integral triple de la función sobre el sólido V: $\iiint_V 3\,dV$
- Describimos el sólido como una región normal – z está entre dos superficies sobre la proyección del sólido: $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Por el teorema de Fubini, la escribimos como una integral iterada triple: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} 3\,dz\,dy\,dx$
- La integral más interior respecto a z (las demás variables son constantes): $\int_0^2 3\,dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- La integral intermedia respecto a y

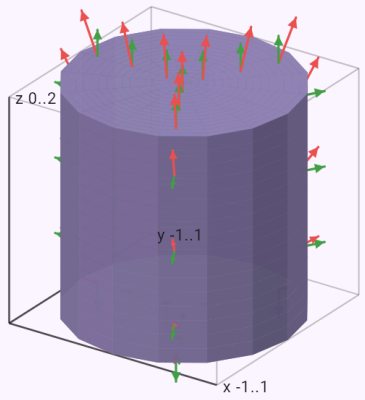
$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\,dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$$

- La integral exterior respecto a x

$$\int_{-1}^{1}\left(12\sqrt{1-x^2}\right)dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$$

- La comprobación con la parametrización de la superficie da el mismo valor: $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$

Gráfica



La superficie S con sus normales (verde) y las flechas del campo (rojo). Gírelo arrastrando el dedo.

El flujo de un rotacional por una semiesfera – comprobado con el teorema de Stokes a lo largo del

ecuador.

Enunciado: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Resultado

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Calcular:

- ✓ por parametrización
- con el teorema de Stokes

Editar en el formulario

Pasos

- El flujo del rotacional a través de S – una integral de superficie de segunda especie, calculable también con el teorema de Stokes

  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$

- El rotacional del campo

  $$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$

- Parametrización de la semiesfera superior – θ solo hasta π/2

  $$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$

- Las derivadas parciales respecto a los parámetros – los vectores tangentes de la superficie

  $$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$

- El vector normal (producto vectorial de los vectores tangentes) orientado hacia fuera del sólido

  $$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$

- Sustituimos la parametrización en el campo y hacemos el producto escalar con el vector normal (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$

- La integral doble sobre el rectángulo de los parámetros

  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$

- Comprobación con el teorema de Stokes: el flujo del rotacional es igual a la circulación del campo a lo largo del borde (regla de la mano derecha)

  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Los lados del rectángulo de los parámetros que se transforman en un punto o se recorren dos veces en sentidos opuestos (una costura) se cancelan – queda el borde real de la superficie.

- Una parte del borde

  $$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$

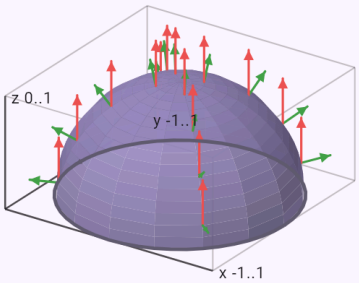
- La integral de línea a lo largo de ella:

  $$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$

- El teorema de Stokes da el mismo valor:

  $$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Gráfica



La superficie S con sus normales (verde) y las flechas del campo (rojo). El borde con una flecha de su sentido. Gírelo arrastrando el dedo.

Una integral de superficie de primera especie sobre una semiesfera dada por su ecuación.

Enunciado: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Resultado

$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

Editar en el formulario

Pasos

- La integral de superficie de primera especie de f sobre la superficie S: $\iint_S z \, dS$
- Parametrización de la semiesfera superior – θ solo hasta π/2

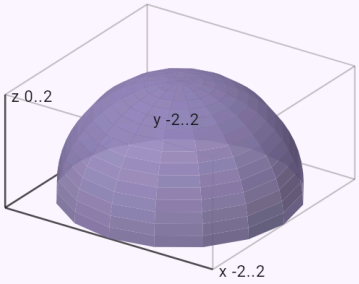
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Las derivadas parciales respecto a los parámetros – los vectores tangentes de la superficie

  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- El producto vectorial de los vectores tangentes es un vector normal, su módulo da el elemento de superficie dS = |r_u × r_v| du dv

  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Sustituimos la parametrización en f y multiplicamos por el elemento de superficie: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- La integral doble sobre el rectángulo de los parámetros

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$$

Gráfica



La superficie S sobre la que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

El momento de inercia de una cáscara esférica respecto al eje z.

Enunciado: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Resultado

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

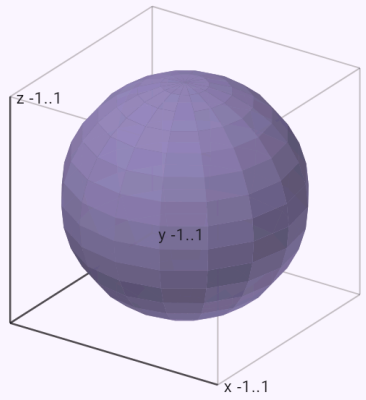
Editar en el formulario

Pasos

- La integral de superficie de primera especie de f sobre la superficie S: $\oiint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- El momento de inercia de la lámina respecto al eje z – la densidad por el cuadrado de la distancia d al eje: $I_z = \oiint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Parametrización de la esfera por los ángulos θ (desde el eje z positivo) y φ (alrededor del eje z) $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Las derivadas parciales respecto a los parámetros – los vectores tangentes de la superficie $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- El producto vectorial de los vectores tangentes es un vector normal, su módulo da el elemento de superficie dS = |r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Sustituimos la parametrización en f y multiplicamos por el elemento de superficie: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- La integral doble sobre el rectángulo de los parámetros

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Gráfica



La superficie S sobre la que se integra. Gírelo arrastrando el dedo.

Mapa de los teoremas integrales

Todos los teoremas integrales dicen lo mismo: la integral de una derivada sobre una región es igual a una integral sobre su borde. El borde de un segmento son dos puntos, el de una superficie una curva, el de un sólido una superficie cerrada; el teorema de Stokes generalizado ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω lo dice todo a la vez. La aplicación usa los teoremas como segundo cálculo y como comprobación (los chips bajo el resultado); el glosario muestra el mismo mapa bajo «Teoremas integrales».

Cómo introducirlo

`∫ f'(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Regla de Newton–Leibniz – dentro: la derivada en [a, b], en el borde: los valores en los extremos.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Teorema del gradiente (potencial, independencia del camino) – dentro: el gradiente a lo largo de una curva,

	en el borde: el potencial en los extremos.
`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Teorema de Green – dentro: ∂Q/∂x − ∂P/∂y sobre una región plana, en el borde: la circulación a lo largo de la curva cerrada.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Teorema de Stokes – dentro: el flujo del rotacional por una superficie, en el borde: la circulación a lo largo de su contorno.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Teorema de Gauss – dentro: la divergencia sobre un sólido, en el borde: el flujo saliente por la superficie cerrada.

Aplicaciones físicas de los teoremas integrales

La sección «Aplicaciones» (campos Física y Cálculo multivariable, la electricidad también en Ingeniería eléctrica, el flujo y el calor en Ingeniería) tiene modelos con unidades: la ley de Gauss (esfera, recta, plano), la ley de Ampère y la de Biot-Savart (hilo, solenoide, toroide, espira), la inducción electromagnética (flujo magnético, campo variable, generador), el condensador (de placas, esférico, cilíndrico), la energía de un campo, el trabajo en un campo de fuerzas (gravedad, resorte, fuerza de Coulomb), el flujo de un fluido (caudal, perfil parabólico, ecuación de continuidad, circulación y rotacional), la conducción del calor (pared plana y cilíndrica) y el campo gravitatorio por la ley de Gauss.

Los pasos empiezan con la ley integral, luego justifican la simetría (en la superficie o curva elegida el campo es constante y apunta según la normal o la tangente), muestran la integral evaluada, la carga, corriente o masa encerrada y la fórmula en la que se sustituye. Las leyes electromagnéticas incluyen su forma diferencial – el término del glosario «Ecuaciones de Maxwell» tiene ambas formas lado a lado. El gráfico muestra el campo según la distancia (E(r), B(r), g(r)), un perfil de velocidades, la temperatura en una pared o el voltaje de un generador.

Ejemplos

El campo dentro de una bola cargada uniformemente – la carga encerrada Q r³/R³, el campo crece

linealmente.

Enunciado: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Resultado

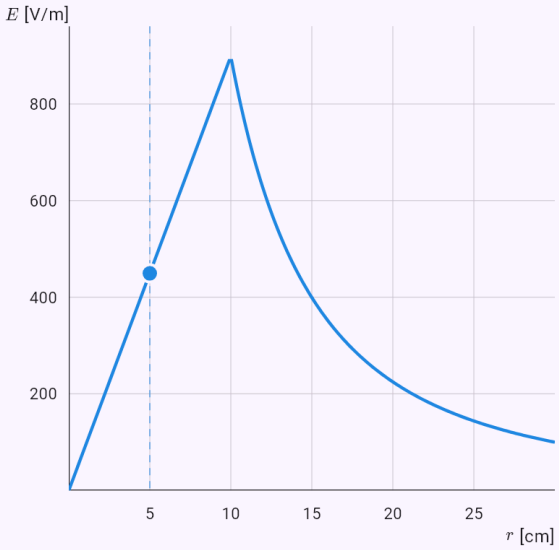
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Pasos

- Buscamos E; datos:
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertimos las unidades
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Una carga Q distribuida simétricamente alrededor del centro – en la superficie de una esfera (esfera conductora, cáscara) o uniformemente en todo su volumen. La superficie gaussiana es una esfera concéntrica de radio r; fuera, la carga actúa como una carga puntual. Ecuación del modelo: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Simetría: el campo es radial y tiene la misma magnitud en cada esfera concéntrica. Tomamos como superficie gaussiana una esfera de radio r – en ella el campo es paralelo a la normal y constante.
- La integral evaluada: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- La carga encerrada
  $$Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$$
- Despejamos la magnitud buscada
  $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
- Sustituimos
  $$E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

- La misma ley en forma diferencial (ecuaciones de Maxwell): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El campo magnético de un hilo recto por la ley de Ampère a lo largo de una circunferencia alrededor del

eje.

Enunciado: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

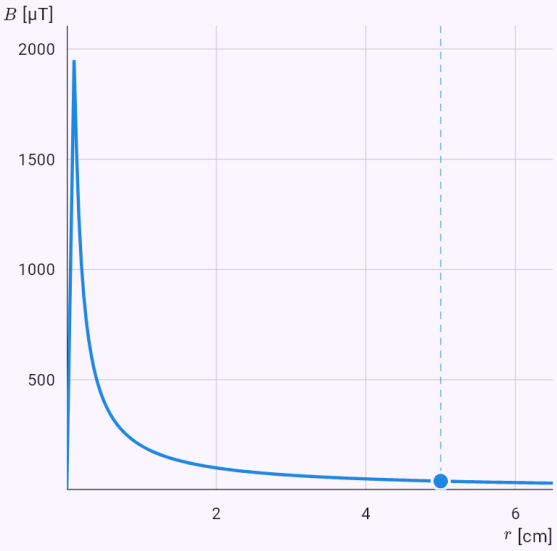
Resultado

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Pasos

- Buscamos B; datos:
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Convertimos las unidades:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Un hilo recto y largo de radio R con una corriente I repartida uniformemente en su sección. La curva es una circunferencia alrededor del eje del hilo; dentro del hilo encierra solo parte de la corriente. Ecuación del modelo:
  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Simetría: las líneas de campo son circunferencias alrededor del eje del hilo; B es tangente a ellas y constante en una circunferencia de radio r.
- La integral evaluada: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- La corriente encerrada: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Sustituimos
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- La misma ley en forma diferencial (ecuaciones de Maxwell): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Convertimos las unidades: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El campo en el eje de una espira por la ley de Biot-Savart.

Enunciado: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

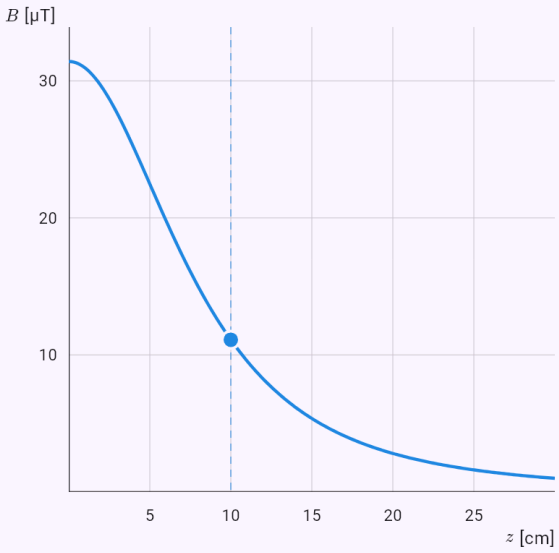
Resultado

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Pasos

- Buscamos B; datos:
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Convertimos las unidades:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Una espira circular de radio R con corriente I. El campo en su eje a una distancia z del centro lo da la ley de Biot-Savart – las componentes perpendiculares se anulan, las axiales se suman. Ecuación del modelo:
  $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$$
- Cada trozo dl de la espira está a la misma distancia de un punto del eje, ρ = √(R² + z²), y es perpendicular a la recta que los une. Las componentes perpendiculares al eje se anulan alrededor de la espira; solo se suman las axiales, dB · R/ρ.
- La integral evaluada
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- Despejamos la magnitud buscada: $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Sustituimos
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- En el centro de la espira (z = 0):
  $$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- Convertimos las unidades:
  $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La amplitud de la fem de un generador ε = NBAω y su curso sinusoidal en el gráfico.

Enunciado: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

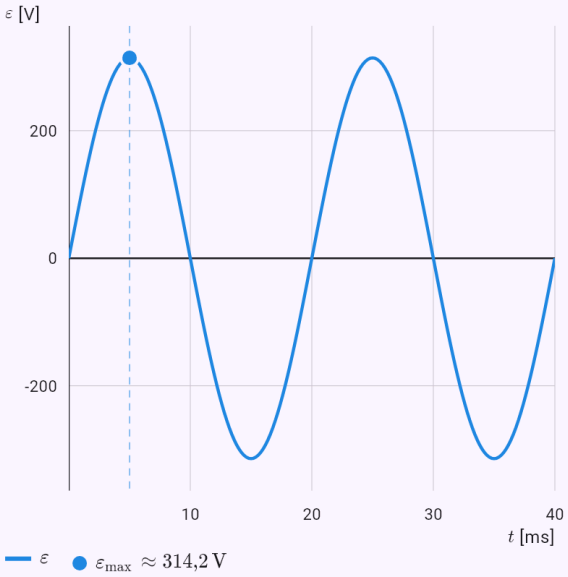
Resultado

$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\ \mathrm{V}$

Pasos

- Buscamos $\varepsilon_{\max}$; datos
  $N = 200, \quad B = 0{,}1\ \mathrm{T}, \quad A = 500\ \mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\ \mathrm{ra}$
- Convertimos las unidades: $A = 500\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}05\ \mathrm{m}^2$
- Una espira de N vueltas gira con velocidad angular ω en un campo uniforme B – el principio del generador de corriente alterna. La fem es sinusoidal con amplitud NBAω. Ecuación del modelo:
  $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$
- El flujo magnético por una espira:
  $\Phi(t) = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- La integral evaluada: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Despejamos la magnitud buscada: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Sustituimos: $\varepsilon_{\max} = 200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\ \mathrm{V}$
- La frecuencia: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\ \mathrm{Hz}$
- La misma ley en forma diferencial (ecuaciones de Maxwell): $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

La capacidad de un metro de cable coaxial – el campo por la ley de Gauss, el voltaje como integral del campo.

Enunciado: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m]; mode=cylindrical)`

Resultado

$C \approx 102{,}1\ \mathrm{pF}$

Pasos

- Buscamos C; datos
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\ \mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\ \mathrm{mm}, \quad L = 1\ \mathrm{m}$
- Convertimos las unidades
  $R_1 = 1\ \mathrm{mm} = 0{,}001\ \mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\ \mathrm{mm} = 0{,}0035\ \mathrm{m}$
- Dos electrodos cilíndricos coaxiales de radios $R_1 < R_2$ y longitud L – por ejemplo, un cable coaxial. Ecuación del modelo
  $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$
- La superficie gaussiana es un cilindro coaxial de radio r y longitud L entre los electrodos; encierra la carga Q del electrodo interior y por sus bases no pasa campo.
- El campo entre los electrodos por la ley de Gauss
  $E\cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$
- El voltaje como integral de línea del campo
  $U = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$
- La capacidad
  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$
- Convertimos las unidades:
  $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\ \mathrm{F} = 102{,}1\ \mathrm{pF}$

La energía de un campo magnético de 1 T en un litro de volumen.

Enunciado: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Resultado

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Pasos

- Buscamos W; datos: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Convertimos las unidades: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- La densidad de energía de un campo magnético en el vacío, w = B²/(2μ₀) – por ejemplo, el campo dentro de una bobina. Ecuación del modelo:
  $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Sustituimos
  $w = \frac{(1)^2}{2 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m}^3$
- En un campo uniforme la densidad de energía es la misma en todas partes; la integral de volumen es la densidad por el volumen.
- Despejamos la magnitud buscada:
  $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Sustituimos: $W = 397\,900 \cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- Así almacena su energía una bobina con corriente:
  $W = \frac{1}{2}LI^2$

El trabajo de la gravedad al elevar 1 kg desde la superficie de la Tierra a una altura de un radio.

Enunciado: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km];`

mode=gravity)

Resultado

$$W \approx -31{,}28\,\text{MJ}$$

Pasos

- Buscamos W; datos
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad m = 1\,\text{kg}, \quad r_1 = 6371\,\text{km}, \quad r_2$
- Convertimos las unidades
  $r_1 = 6371\,\text{km} = 6\,371\,000\,\text{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\text{km} = 1{,}27$
- La fuerza es conservativa (tiene potencial): el trabajo es independiente del camino, depende solo del inicio y del fin. Por eso lo calculamos por el camino más sencillo – la recta que los une.
- La gravedad de un cuerpo de masa M actúa sobre un cuerpo m que se lleva de la distancia r_1 a r_2 del centro. Un trabajo negativo del campo significa que hubo que elevar el cuerpo. Ecuación del modelo:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- La integral evaluada
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- Sustituimos
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- La energía potencial
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\text{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- El trabajo de una fuerza conservativa es igual a la disminución de la energía potencial:
  $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J}$
- Convertimos las unidades:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\text{J} = -31{,}28\,\text{MJ}$

El caudal de un flujo laminar – la integral del perfil parabólico en coordenadas polares.

Enunciado: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

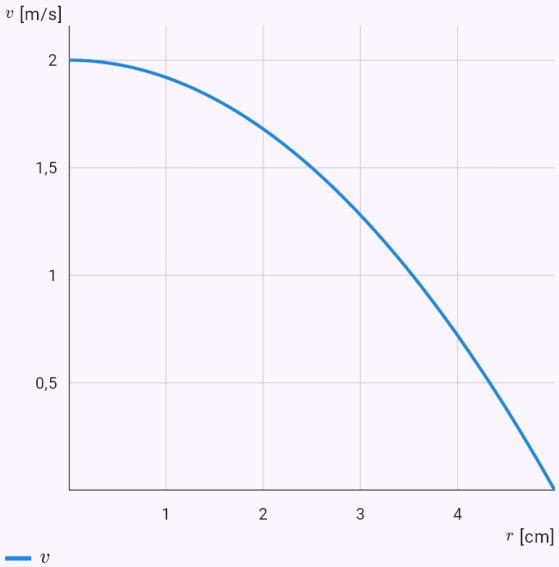
Resultado

$$Q \approx 7{,}854\,\text{l/s}$$

Pasos

- Buscamos Q; datos: $v_{\max} = 2\,\text{m/s}, \quad R = 5\,\text{cm}$
- Convertimos las unidades: $R = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Flujo laminar (de Poiseuille): el fluido está en reposo en la pared y es más rápido en el eje; el perfil de velocidades es la parábola v = v_max(1 − r²/R²). Ecuación del modelo
  $Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
- La velocidad depende solo de la distancia r al eje, así que la sección se integra en coordenadas polares (dS = r dr dφ).
- La integral evaluada
  $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$
- Sustituimos
  $Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s}$
- La velocidad media en la sección: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\text{m/s}$
- Convertimos las unidades:
  $Q \approx 0{,}007854\,\text{m}^3/\text{s} = 7{,}854\,\text{l/s}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Las pérdidas de calor de un tubo aislado – la temperatura baja logarítmicamente en la pared.

Enunciado: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC]; T2=20[degC]; mode=cylinder)`

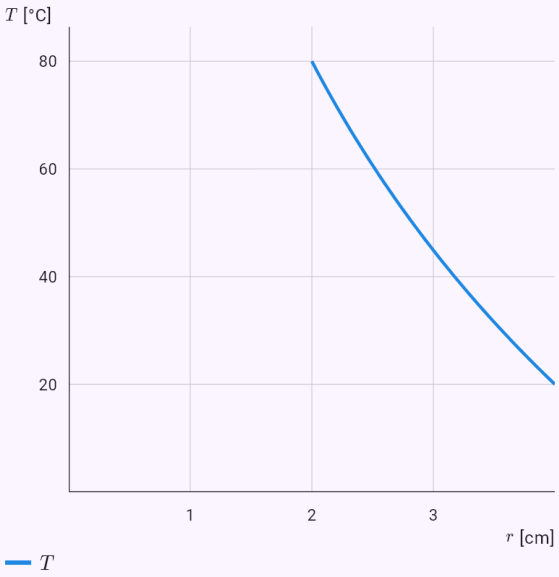
Resultado

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Pasos

- Buscamos P; datos
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m\cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Convertimos las unidades:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Una pared cilíndrica – el aislamiento de un tubo de radio interior r_1, exterior r_2 y longitud L. El calor atraviesa cilindros de área creciente, por eso la temperatura baja logarítmicamente. Ecuación del modelo:
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S}$
- Estado estacionario sin fuentes de calor – por cada capa pasa la misma potencia: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- La integral evaluada
  $P = \iint_S \vec{q}\cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- Despejamos la magnitud buscada
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- Sustituimos
  $P = \frac{2\pi\cdot 0{,}04\cdot 1\cdot(80-20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La aceleración de la gravedad a medio camino del centro de la Tierra.

Enunciado: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

```
mode=ball)
```

Resultado

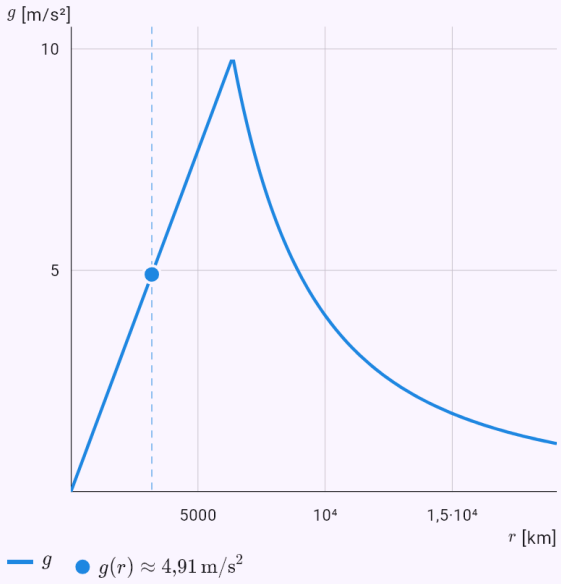
$$g \approx 4{,}91\ \text{m/s}^2$$

Pasos

- Buscamos g; datos
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}, \quad R = 6371\ \text{km}, \quad r = 3186\ \text{km}$
- Convertimos las unidades
  $R = 6371\ \text{km} = 6\,371\,000\ \text{m}, \quad r = 3186\ \text{km} = 3\,186\,0($
- Una bola homogénea (un planeta de densidad constante). Dentro, la aceleración de la gravedad crece linealmente con la distancia al centro. Ecuación del modelo: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{in}}$
- Simetría: el campo es radial y tiene la misma magnitud en cada esfera concéntrica. Tomamos como superficie gaussiana una esfera de radio r – en ella el campo es paralelo a la normal y constante.
- La integral evaluada: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- La masa encerrada
  $M_{\text{in}} = M\dfrac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \dfrac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Despejamos la magnitud buscada:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\text{in}} \Rightarrow g = \dfrac{G M_{\text{in}}}{r^2}$
- Sustituimos
  $g = \dfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\ \text{m/s}^2$

- La misma ley en forma diferencial (por el teorema de Gauss): $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Limitaciones conocidas

- Extremos solo para funciones de dos variables, condicionados con una sola restricción. Integral doble solo sobre una región acotada cuyo borde es como mucho cuadrático en una variable; la superficie z = f(x, y) en 3D por ahora solo se dibuja para la integral doble. Campos vectoriales solo en x, y (z), las demás letras son constantes; las flechas solo para un campo plano. El potencial se busca integrando las componentes – si una integral no es elemental, no se encuentra. Integrales de línea: el teorema de Green solo se comprueba para una circunferencia, una elipse y un polígono convexo; una curva cerrada formada por una gráfica y un segmento solo se introduce como poligonal o paramétrica por tramos. La integral triple solo sobre un sólido acotado que sea normal respecto a una variable (una superficie inferior y una superior sobre toda la proyección) y cuyas desigualdades sean como mucho cuadráticas en ella; coordenadas esféricas solo para un sólido cuyos ángulos θ y φ formen un rectángulo.

- Integrales de superficie: el teorema de Gauss se comprueba solo para los modelos (esfera, semiesfera cerrada, cilindro, cono), el de Stokes solo para el flujo de un rotacional escrito como curl o $\nabla \times F$; una gráfica $z = g(x, y)$ solo sobre una región que maneja la integral doble; introduzca una esfera con otro límite que $z \geq 0$ como gráfica o por parametrización.
- Las aplicaciones físicas de los teoremas integrales calculan solo casos simétricos (esfera, recta y plano infinitos, bobina larga, campo uniforme) en los que la integral se convierte en un producto; una distribución general de carga o corriente se introduce como integral de línea o de superficie. Desprecian la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell y consideran los materiales solo mediante la permitividad relativa de un condensador.

29. Polinomio de Taylor

La aplicación construye el polinomio de Taylor (en 0, el de Maclaurin) del grado indicado: una tabla de las derivadas en el punto, la sustitución en la fórmula y el resto en forma de Lagrange. También puede hallar el grado por sí misma – el menor para el que el error en un punto o en un intervalo no supera una cota dada. La gráfica muestra la función y el polinomio; con un deslizador cambias el grado y ves cómo mejora la aproximación.

Los grados altos (hasta unos 1000) se calculan con exactitud y se abrevian en la solución y el gráfico; el control del grado es entonces logarítmico. Las funciones cuyas derivadas crecen rápido (tan x) se calculan dividiendo series, y el error con la estimación de Cauchy en el plano complejo o la de la serie alternada. Si tampoco es posible, la aplicación explica el motivo y da consejos.

Cómo introducirlo

`taylor(sin x, 0, 5)`	La función, el punto y el grado.
`maclaurin(e^x, 4)`	El polinomio de Maclaurin – el punto es 0.
`taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`	El grado según el error en el punto x (en un intervalo, escribe r=… en lugar de x).
`ln(1 + x)`	Una función con el chip «Polinomio de Taylor» – allí indicas el punto, el grado o la precisión.

Ejemplos

Un polinomio de grado 4 con el resto.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Resultado

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

  $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Las derivadas y sus valores en a

  $$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
  $$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
  $$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
  $$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
  $$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

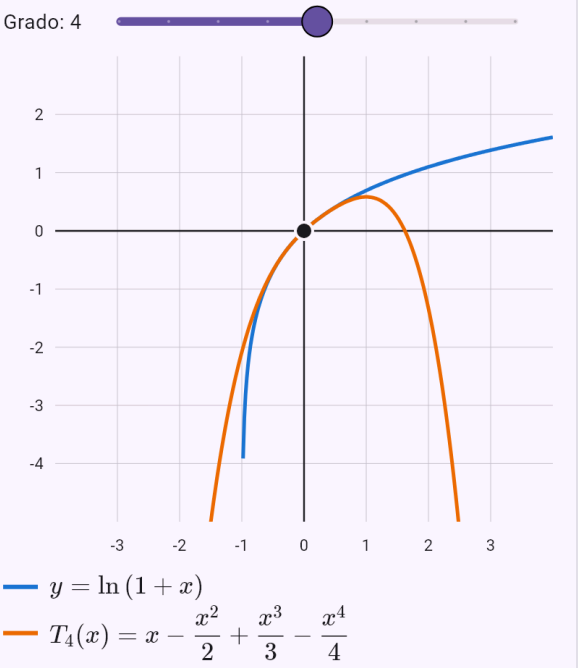
- Sustituimos los valores de las derivadas

  $$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
  $$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- El resto (el error) en la forma de Lagrange, ξ entre a y x:

  $$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$$

Gráfica



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

El punto en cuyo entorno el polinomio aproxima la función:

- $(0; 0)$

Con el control deslizante sobre la gráfica eliges el grado: con un grado mayor el polinomio aproxima la función mejor y más lejos del punto.

El grado según la precisión pedida – un valor aproximado de e^0,5.

Enunciado: `taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`

Resultado

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Las derivadas y sus valores en a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Sustituimos los valores de las derivadas

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- El resto (el error) en la forma de Lagrange, ξ entre a y x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5$$

- Buscamos el menor grado n cuya estimación del resto en x no supere el error

$$M_k = \max_{t \in [0,\, 0{,}5]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

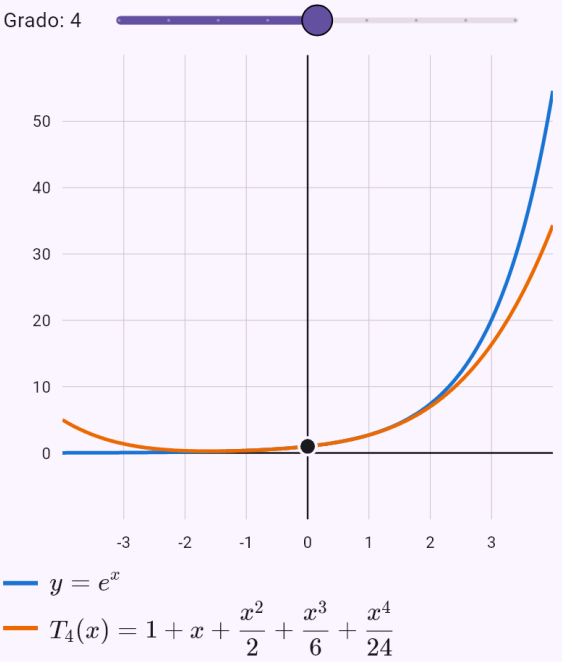
$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- El valor aproximado: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

Gráfica



El punto en cuyo entorno el polinomio aproxima la función:

- $(0; 1)$

Con el control deslizante sobre la gráfica eliges el grado: con un grado mayor el polinomio aproxima la función mejor y más lejos del punto.

Grado 999: un grado alto se abrevia en la solución.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Resultado

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \\ f(1) \approx 0{,}6936$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$$

- Las derivadas y sus valores en a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \\ f^{(998)}(x) &= -\frac{997!}{(x+1)^{998}} & f^{(998)}(0) &= -997! \\ f^{(999)}(x) &= \frac{998!}{(x+1)^{999}} & f^{(999)}(0) &= 998! \end{aligned}$$

- El resto (el error) en la forma de Lagrange, ξ entre a y x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

- Buscamos el menor grado n cuya estimación del resto en x no supere el error

$$M_k = \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$

$$n = 0: \quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3}$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3}$$

$$\dots$$

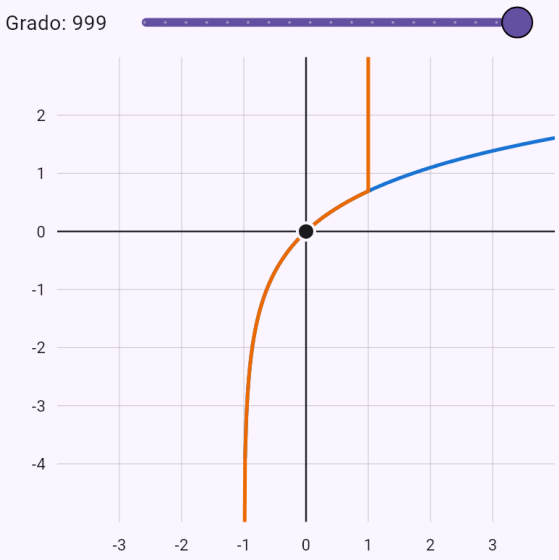
$$n = 998: \quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 999: \quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}$$

- El valor aproximado: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Gráfica

Grado: 999



$y = \ln(1+x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} +$

El punto en cuyo entorno el polinomio aproxima la función:

- $(0; 0)$

Con el control deslizante sobre la gráfica eliges el grado: con un grado mayor el polinomio aproxima la función mejor y más lejos del punto.

Tangente: coeficientes de series, error por la estimación de Cauchy.

Enunciado: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Resultado

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$$

- Las derivadas y sus valores en a

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\tan x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\tan^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Los coeficientes salen de la aritmética de series; las derivadas altas serían enormes

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Las derivadas son demasiado grandes; usamos la estimación de Cauchy en una circunferencia del plano complejo

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- El valor aproximado: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Limitaciones conocidas

- No se calculan grados superiores a 1000; un punto en el borde de la convergencia o más allá no admite la estimación de Cauchy.

30. Integrales indefinidas

La aplicación integra con los métodos que se enseñan en clase y dice en cada paso qué hace. Comprueba el resultado –lo deriva término a término con las reglas y transforma la suma en el integrando (denominador común, identidades como sen²x + cos²x = 1)– y dibuja el integrando y la primitiva.

Las raíces de potencias de la variable (∛(x⁴), √(x³)) se escriben como potencias de exponente racional; un valor absoluto (|cos x|, √(1 − sin²x)), con la función signo sgn.

Si una integral no tiene primitiva elemental (como e^(−x²)), la aplicación lo dice y la expresa mediante una función especial (erf, Si, …).

Cómo introducirlo

`int(x e^x, x)`	Una integral con la variable: los límites o una aplicación (área, volumen, …) se pueden añadir en los campos bajo el enunciado.
`int(x^2 sin x)`	Sin la variable cuando solo hay una.
`∫ x^2 dx`	Con el signo de integral, también desde una foto.
`x e^x`	Una función con el chip «Integrar».

Integrales inmediatas y cambio de variable

La integral de una suma término a término, las constantes fuera de la integral, las integrales de la tabla (también con una función interior lineal) y el cambio de variable cuando el integrando contiene una función junto con la derivada de su interior.

Ejemplos

Término a término según la tabla.

Enunciado: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

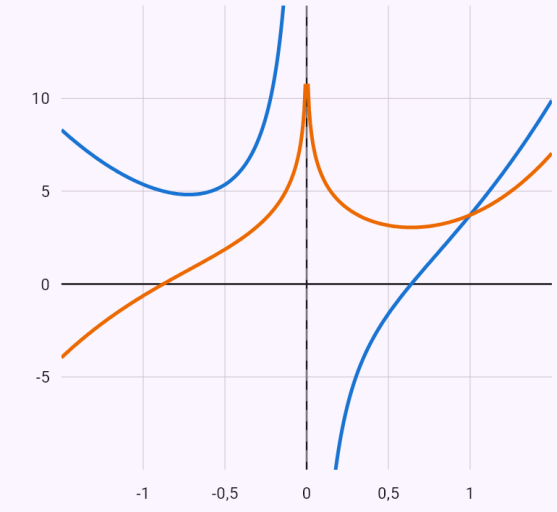
Resultado

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Pasos

- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int e^x\,dx = e^x$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando: $\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

Gráfica



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

El cambio de variable t = x².

Enunciado: `int(2x cos(x^2))`

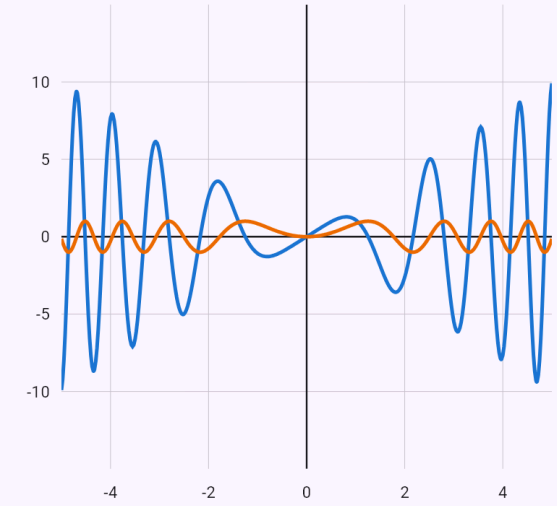
Resultado

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Pasos

- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Sustitución $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$:
  $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Volvemos a la variable original: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando
  $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Gráfica



$f(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$

$F(x) = \sin\left(x^2\right)$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Integral con constantes a, b.

Enunciado: `int(1/(a - bx)^3)`

Resultado

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Condiciones: $b \neq 0$

Pasos

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando
  $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Integración por partes

El producto de un polinomio por una exponencial, una función trigonométrica o un logaritmo la aplicación lo integra por partes, varias veces si hace falta; integrales como e^x sin x por partes cíclicamente.

Ejemplos

Por partes dos veces seguidas.

Enunciado: `int(x^2 e^x)`

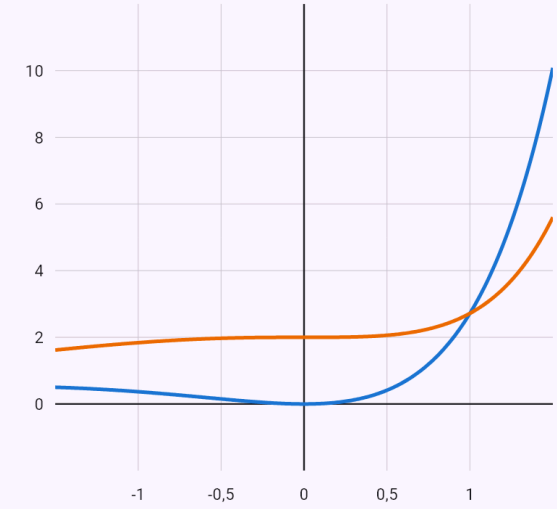
Resultado

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Pasos

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = e^x, luego u' = $2x$, v = e^x: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = e^x, luego u' = 1, v = e^x: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int e^x \, dx = e^x$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando: $\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2 e^x$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente: $\left(x^2 e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2 e^x + 2xe^x$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente: $(-2xe^x)' = -2 \cdot (e^x \cdot x + e^x) = -2xe^x - 2e^x$
- Sumamos y simplificamos $\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2 e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Gráfica



El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Funciones racionales

Una función racional la aplicación la divide si es necesario, factoriza el denominador y la descompone en fracciones simples, que integra en logaritmos y arcotangentes.

Un denominador que no se puede factorizar en los racionales ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) lo factoriza en los reales: cada par de raíces complejas conjugadas da un factor cuadrático sin raíces reales.

Ejemplos

Descomposición en fracciones simples.

Enunciado: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

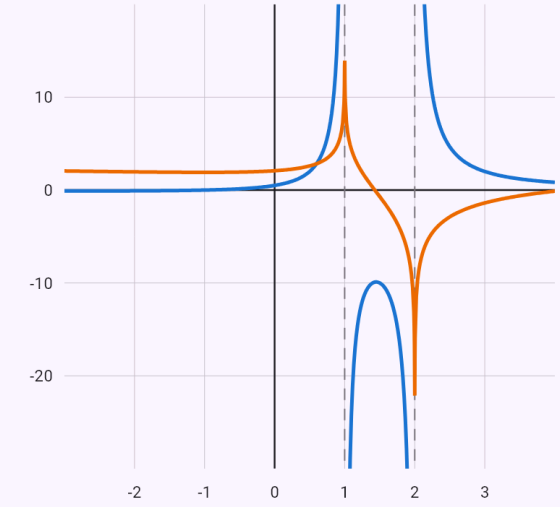
Resultado

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Pasos

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales:
  $$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando:
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente:
  $$(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente:
  $$(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$
- Sumamos y simplificamos
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Gráfica



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Factorización del denominador x⁴ + 1 en los reales.

Enunciado: `int(1/(x^4 + 1))`

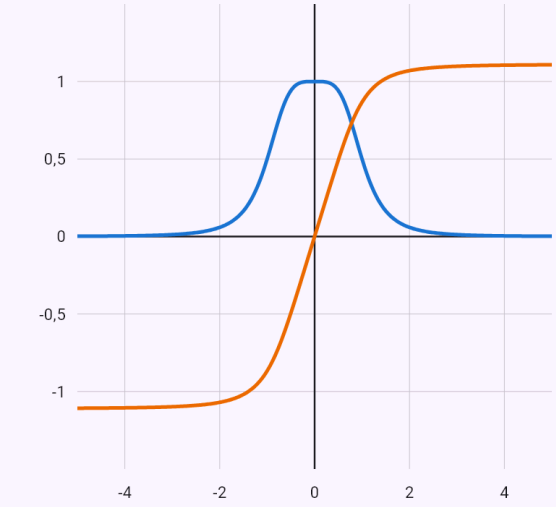
Resultado

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x -\right.\right.$$

Pasos

- Factorizamos el denominador en $\mathbb{R}$: sus raíces complejas forman pares conjugados r, $\bar{r}$ y cada par da un factor cuadrático $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2\cdot\mathrm{Re}\, r\cdot x + |r|^2$ sin raíces reales:
  $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$
- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales
  $$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$$
- El denominador no tiene raíces reales: un múltiplo de su derivada separado del numerador da ln, el resto, completando el cuadrado, da arctan
  $$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$$
- El denominador no tiene raíces reales: un múltiplo de su derivada separado del numerador da ln, el resto, completando el cuadrado, da arctan
  $$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Gráfica



$f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{ar}}{}$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Comprobación de las fracciones simples con denominador común.

Enunciado: `int(1/(x^3 + 1))`

Resultado

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-$$

Pasos

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\right)dx = \int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

- El denominador no tiene raíces reales: un múltiplo de su derivada separado del numerador da ln, el resto, completando el cuadrado, da arctan

$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x}{}\right.$$

- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2}{}$$

- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(-\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$

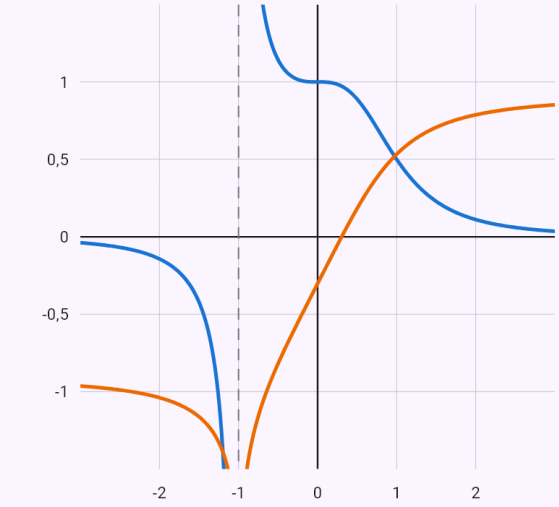
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$

- Sumamos y simplificamos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{6} + \frac{\ln|x}{}\right.$$

Gráfica



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln\left(x^2-\right.}{6}$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Funciones trigonométricas

Primero las fórmulas (sin²x = (1 − cos 2x)/2, productos en sumas), con una potencia impar el cambio t = sin x o t = cos x, con una función racional de seno y coseno un cambio según la paridad, y el cambio universal t = tan(x/2) solo al final.

Ejemplos

Una potencia impar del seno – el cambio t = cos x.

Enunciado: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

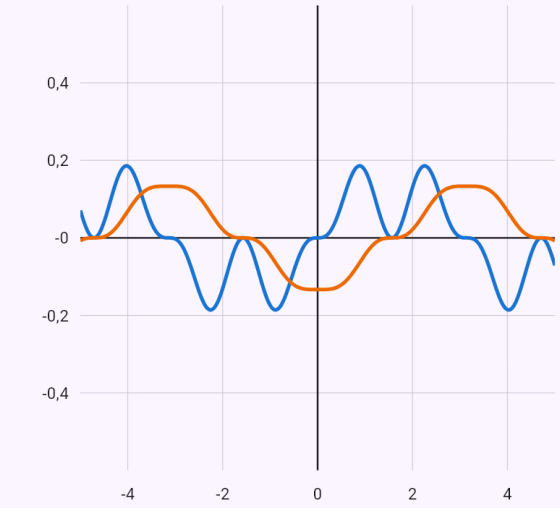
Resultado

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \cdot$$

Pasos

- Una potencia impar: sustitución $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- La integral de una suma es la suma de las integrales:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Volvemos a la variable original:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando: $\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- Sumamos y simplificamos con la identidad
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Gráfica



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

La comprobación: derivada término a término, transformada con la identidad 1 + tg²x = 1/cos²x.

Enunciado: `int(1/cos(x)^4)`

Resultado

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

Pasos

- La función no cambia al cambiar a la vez el signo del seno y del coseno: sustitución $t = \tan x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales: $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1\,dt = t$
- Volvemos a la variable original: $t = \tan x:\quad \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$

- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando: $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

  $$\left(\frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

- Sumamos y simplificamos con la identidad $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $$\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$

Funciones hiperbólicas

Integrales de la tabla (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx por el logaritmo de la derivada, por partes (x sinh x, arsinh x), cuadrados por las fórmulas sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x; el resto por la definición mediante exponenciales.

Ejemplos

La fórmula sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Enunciado: `int(sinh(x)^2)`

Resultado

$$\int \sinh^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Pasos

- Usamos la fórmula $\sinh^2\alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $$\int \sinh^2 x\,dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2}\,dx$$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = \int -\frac{1}{2}\,dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2}\,dx$$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $$\int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2}$$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int \frac{\cosh(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx$$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $$\int \cosh(2x)\,dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$
- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando: $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = \sinh^2 x$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente
  $$\left(\frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = \frac{1}{4}\cdot\cosh(2x)\cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$$
- Sumamos y simplificamos con la identidad $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
  $$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}\right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$$

Raíces

Integrales con la raíz de una función lineal fraccionaria por cambio de variable, con la raíz de un trinomio de segundo grado por un cambio de Euler, e integrales binomias según las condiciones de Chebyshov – si no se cumple ninguna, la aplicación dice que la integral no es elemental.

Ejemplos

Un cambio de Euler.

Enunciado: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Resultado

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}$$

Pasos

- Sustitución de Euler (tipo 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$: la integral pasa a ser la de una función racional de t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$$

- Volvemos a la variable original

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Comprobación: la derivada del resultado (la primitiva) es el integrando

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

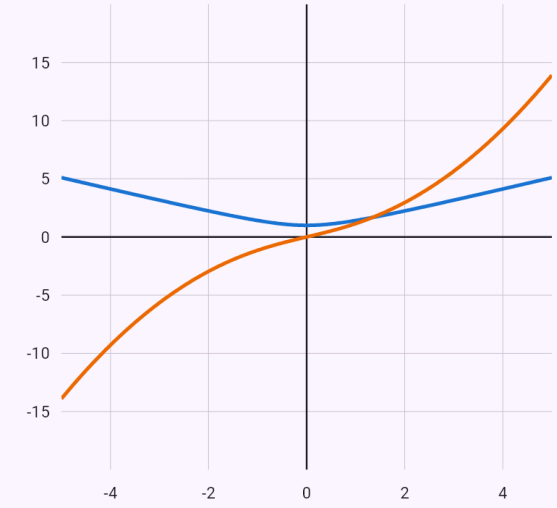
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Sumamos y simplificamos

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Gráfica



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

El integrando f y la primitiva F para C = 0 (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Limitaciones conocidas

- Para algunas integrales encontramos el resultado sin procedimiento – la aplicación lo indica en los pasos.
- Un cálculo sin pasos que tarda demasiado se detiene – la aplicación lo indica.
- En resultados largos, donde la transformación en el integrando no sería legible (varios términos con raíces de números, p. ej. $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), la aplicación omite la comprobación.

31. Integrales definidas y sus aplicaciones

La aplicación calcula una integral definida con la regla de Barrow y dibuja el área bajo la gráfica – la parte sobre el eje x de otro color que la de debajo. También resuelve integrales impropias y aplicaciones: área, longitud de curva, volumen y área lateral de un sólido de revolución, también para curvas en forma paramétrica y en coordenadas polares.

Integral definida

La aplicación encuentra la primitiva igual que en la integral indefinida y sustituye los límites. Con un cambio de variable recalcula los límites directamente. En un intervalo simétrico respecto a cero aprovecha la simetría: la integral de la parte impar es cero sin buscar primitiva y reconoce $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ como el área de un semicírculo. Si la integral no tiene primitiva elemental, da la forma exacta con una función superior (por ejemplo 2 Si(π)) y calcula su número con una serie de potencias y una estimación del error; si no encuentra forma exacta, calcula el valor numéricamente e indica con qué método.

Las letras del enunciado ($\int \sqrt{(r^2 - x^2)}\, dx$ de $-r$ a r) son parámetros positivos: el resultado es una fórmula ($\pi r^2/2$), comprobada numéricamente para varios valores de los parámetros, y la gráfica tiene un deslizador para cada letra.

Cómo introducirlo

`int(x^2, x, 0, 3)`	Una integral con la variable y los límites.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Desde una foto o en LaTeX.
`x^2`	Una función con el chip «Integrar» – escribe los límites en los campos.

Ejemplos

Un cambio de variable con los límites transformados.

Enunciado: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Resultado

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

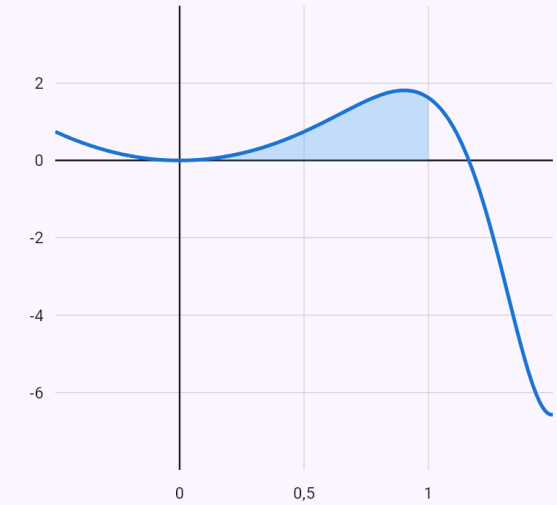
Resolver con un método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapecio | Σ Romberg

Pasos

- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Sustitución $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Gráfica



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

La parte impar en un intervalo simétrico es cero, el resto es el área de un semicírculo: el resultado es π.

Enunciado: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Resultado

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx =$$

Resolver con un método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapecio | Σ Romberg

Pasos

- El intervalo es simétrico respecto a cero, dividimos la integral en la parte impar y el resto

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

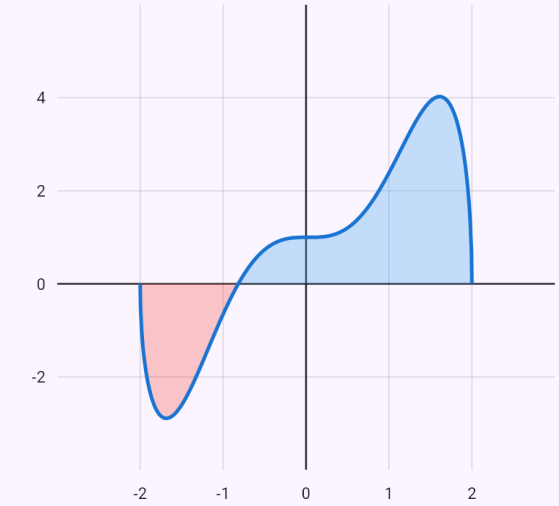
- La función $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ es impar (f(−x) = −f(x)): en ⟨−2; 2⟩ las áreas sobre y bajo el eje se anulan, la integral es cero sin buscar primitiva:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$$

- La gráfica de √(r² − x²) es la semicircunferencia superior de radio r = 2, la integral es el área del semicírculo πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Gráfica



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

La primitiva no es elemental: exactamente 2 Si(π), el valor con una serie de potencias.

Enunciado: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Resultado

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

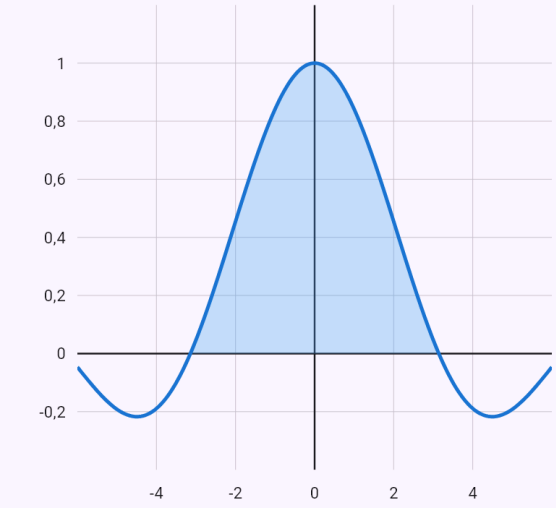
El número de la forma exacta también lo calcula un método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapecio | Σ Romberg

Pasos

- La función $\frac{\sin x}{x}$ es par (f(−x) = f(x)), su gráfica es simétrica respecto al eje y, así que la integral sobre ⟨−π; π⟩ es el doble de la integral sobre ⟨0; π⟩: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$
- La primitiva no es elemental, es una función superior: el resultado exacto se escribe con ella $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$
- El número de la forma exacta lo calculamos con la serie de potencias de la función superior: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Para t = π sumamos 6 términos. La serie es alternada, el error es menor que el primer término omitido, $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ (estimación de la serie alternada): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Gráfica



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Integral con parámetro r: el área de un semicírculo, πr²/2; el deslizador de la gráfica cambia r.

Enunciado: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Resultado

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros positivos: $r > 0$
- Una raíz de una diferencia de cuadrados: la sustitución trigonométrica $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, la raíz $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Usamos la fórmula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- La integral de una suma es la suma de las integrales $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

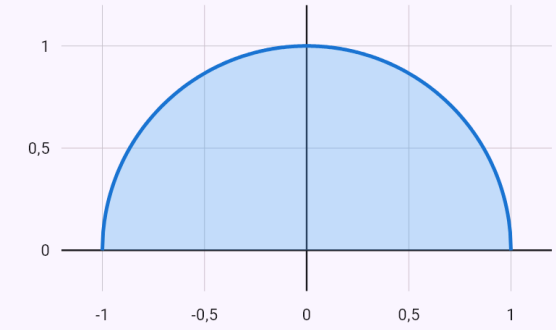
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Valores de los parámetros

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Gráfica



La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Integrales impropias

Un límite infinito o una función no acotada la aplicación los trata con un límite de la primitiva y dice si la integral converge o diverge. Si ese límite no se puede calcular, decide con un criterio de comparación.

Las integrales ∫₀^∞ x^(s − 1) lnᵏx/(xⁿ + aⁿ)^m dx (0 < s < mn, k = 0 a 3) la aplicación las calcula de forma exacta incluso sin primitiva: como la k-ésima derivada respecto a s de la integral con parámetro I(s). Encuentra I(s) con la sustitución t = xⁿ/(xⁿ + aⁿ) mediante la función beta y la fórmula de reflexión (chip «Función beta») o sobre un contorno de ojo de cerradura alrededor del semieje positivo mediante residuos (chip «Residuos»). Donde existe una primitiva, la fórmula de Newton-Leibniz sigue siendo la predeterminada (chip «Primitiva»). El valor siempre se comprueba numéricamente.

Otra integral impropia sin primitiva se compara en cada extremo (un límite infinito o un punto donde la función crece sin cota) con 1/x^α mediante el criterio de comparación por paso al límite. Solo cuando converge en todos los extremos, la aplicación calcula el valor numéricamente (≈); una integral divergente se indica como divergente.

Ejemplos

Un límite superior infinito.

Enunciado: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Resultado

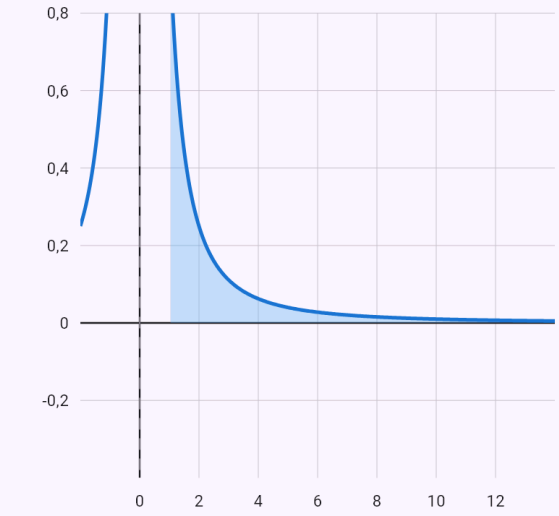
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Pasos

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Gráfica



La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Una función no acotada en el límite inferior.

Enunciado: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Resultado

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

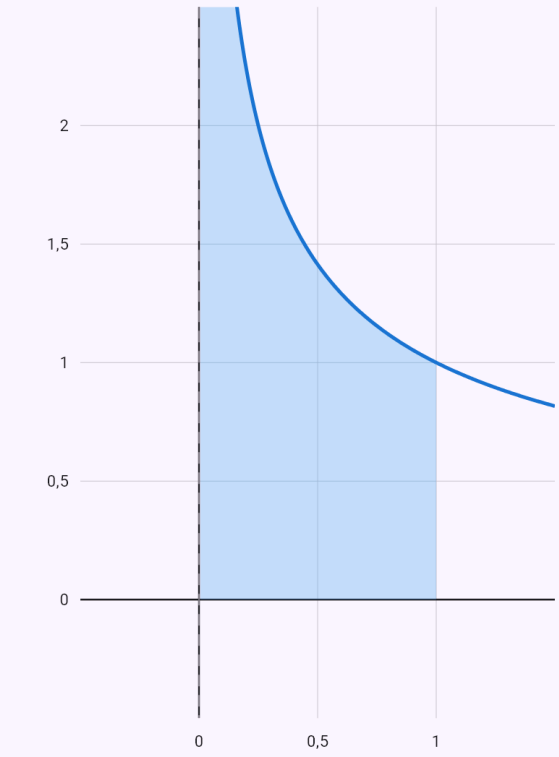
Resolver con un método numérico:

Σ Simpson | Σ Trapecio | Σ Romberg

Pasos

- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge
  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$

Gráfica



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I″(4) mediante la función beta – 5√3π³/972.

Enunciado: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Resultado

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Pasos

- El logaritmo aparece al derivar respecto al parámetro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Así, la integral es una derivada de la integral con parámetro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, que converge para $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calculamos I(s) para un s general, derivamos y sustituimos.

- La sustitución lleva la integral a ⟨0; 1⟩ y da la función beta de Euler B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}\,dt$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Expresamos la función beta con la función gamma, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), y usamos la fórmula de reflexión Γ(p)Γ(1 − p) = π/sen πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\,\sin\frac{\pi s}{6}}$$

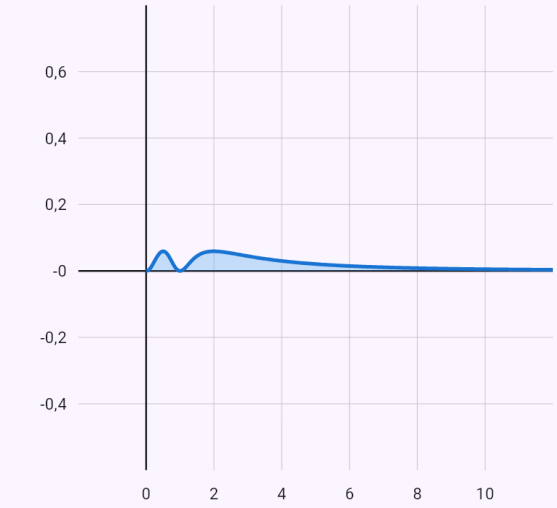
- La derivada respecto al parámetro s (de orden 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Sustituimos s_0

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Gráfica



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

La misma integral sobre un contorno de ojo de cerradura mediante residuos.

Enunciado: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Residuos

Resultado

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Pasos

- El logaritmo aparece al derivar respecto al parámetro s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2} x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Así, la integral es una derivada de la integral con parámetro $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, que converge para $0 < s < 6$: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Calculamos I(s) para un s general, derivamos y sustituimos.
- Tomamos la potencia z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) con el argumento de z en (0; 2π) e integramos sobre el contorno de ojo de cerradura C alrededor del semieje real positivo. En el borde superior z^(s − 1) = x^(s − 1), en el inferior x^(s − 1)·e^(2πis); la circunferencia grande y la pequeña no aportan nada en el límite, porque $0 < s < 6$. Dentro están los polos $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ de orden 1 y, por el teorema de los residuos (para s no entero)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Los polos son simples; el residuo es el numerador entre la derivada del denominador en el polo, con z$_j^n$ = −a^n

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Sustituimos las potencias de los polos, sumamos la serie geométrica y simplificamos. La fórmula se dedujo para s no entero (si no, 1 − e^(2πis) = 0). Pero ambos lados son continuos en s, así que vale también para s = 4 , por el límite s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

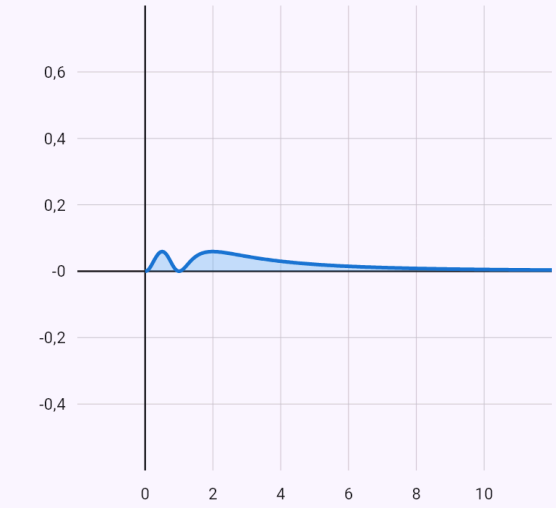
- La derivada respecto al parámetro s (de orden 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Sustituimos s$_0$

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Gráfica



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Sin primitiva: convergencia por comparación con 1/x³ y luego el valor numérico.

Enunciado: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

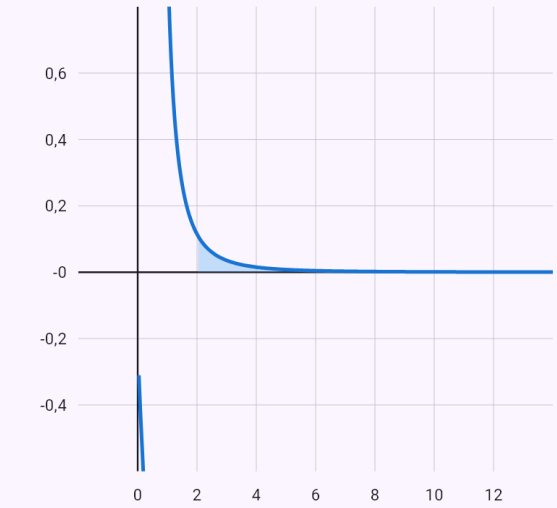
Resultado

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$$

Pasos

- Para $x \to \infty$ comparamos el integrando con $\frac{1}{x^3}$ (criterio de comparación por paso al límite): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. El límite es un número positivo, así que allí la integral se comporta como la integral de $\frac{1}{x^3}$, que converge para $\alpha = 3 > 1$
- La integral converge en todos los extremos; su valor: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + \ln x}\, dx \approx 0{,}1197$
- No se encontró una forma exacta; el valor de la integral impropia se calculó numéricamente con la cuadratura adaptativa de Gauss-Kronrod.

Gráfica



$f(x) = \frac{1}{x^3 + \ln x}$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (−)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Área bajo una curva y entre curvas

El área entre una gráfica y el eje x, o entre dos curvas, la aplicación la calcula como la integral del valor absoluto de la diferencia – las partes de arriba y de abajo cuentan ambas en positivo. No hace falta dar los límites: los encuentra como los puntos de corte de las curvas.

Cómo introducirlo

`área(x^2, x)`	El área entre dos curvas, límites a partir de los puntos de corte.
`área(sin x, 0, pi)`	El área entre una curva y el eje x en un intervalo.
`x^2`	Una función con el chip «Integrar» → «Área entre curvas»; escribe la segunda curva y los límites en los campos.

Ejemplos

El área entre una parábola y una recta.

Enunciado: `x^2` Área entre curvas, segunda curva x

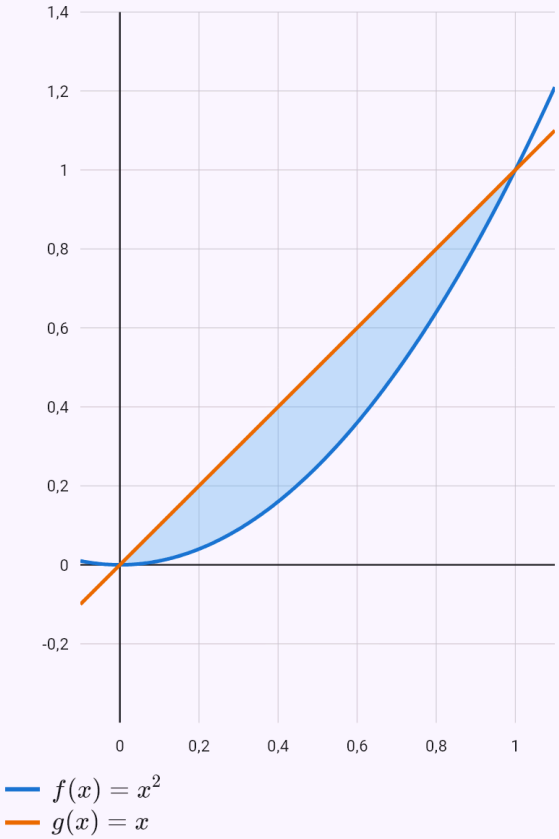
Resultado

$$S = \frac{1}{6}$$

Pasos

- Los límites son las intersecciones de las curvas: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- El área entre las curvas (las partes por encima y por debajo cuentan positivas), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- La expresión en valor absoluto no cambia de signo en el intervalo: quitamos el valor absoluto según él: $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- La integral de una suma es la suma de las integrales: $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Gráfica



La región sombreada: su área es el resultado (las partes por encima y por debajo del eje cuentan positivas).

Longitud de una curva

La longitud de una gráfica en un intervalo la aplicación la calcula con la fórmula l = ∫√(1 + f′²) dx. Intenta simplificar la raíz (en una semicircunferencia sale el arcoseno); cuando la integral no tiene primitiva elemental, el resultado es numérico.

Cómo introducirlo

`longitud(x^(3/2), 0, 4)`	La longitud de la curva en un intervalo.

Ejemplos

La longitud de una semicircunferencia.

Enunciado: `sqrt(1 - x^2)` Longitud de curva, límites −1 y 1

Resultado

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Pasos

- La longitud de la curva

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

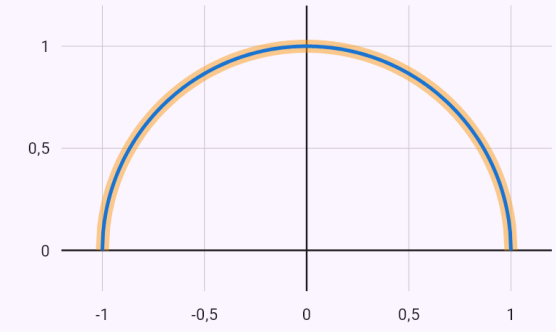
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Gráfica



$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

El arco resaltado: su longitud es el resultado.

Volumen de un sólido de revolución

El volumen de un sólido de revolución alrededor del eje x la aplicación lo calcula con la fórmula V = π∫f² dx (entre dos curvas, por arandelas), alrededor del eje y por el método de las capas cilíndricas. También muestra el sólido en 3D – gíralo con el dedo.

Cómo introducirlo

`volumen(sqrt(x), 0, 4)`	El volumen del sólido al girar alrededor del eje x.
`volumen(x^2, 0, 2, y)`	Giro alrededor del eje y.

Ejemplos

Un paraboloide de revolución.

Enunciado: `sqrt(x)` Volumen de un sólido, límites 0 y 4

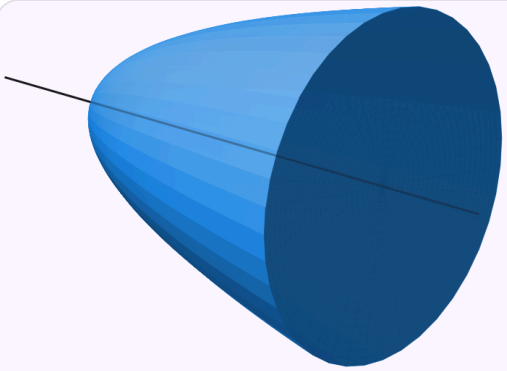
Resultado

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Pasos

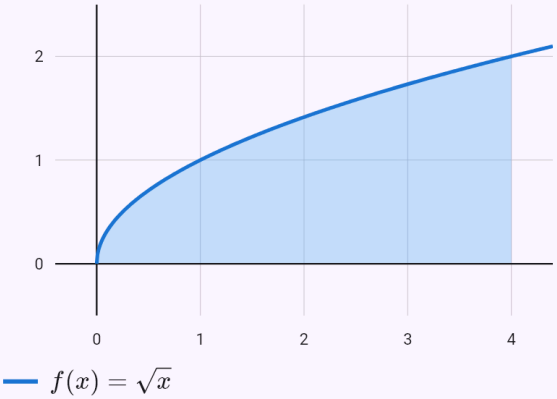
- El volumen del sólido de revolución alrededor del eje x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- El valor de la integral por la constante delante: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



Área lateral de un sólido de revolución

El área lateral la aplicación la calcula con la fórmula S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; el producto bajo la raíz a menudo se simplifica (en una esfera sale una constante).

Cómo introducirlo

`superficie(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	El área lateral al girar alrededor del eje x.

Ejemplos

La superficie de una esfera de radio 2.

Enunciado: `sqrt(4 - x^2)` Superficie de un sólido, límites −2 y 2

Resultado

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Pasos

- La superficie lateral del sólido de revolución alrededor del eje x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

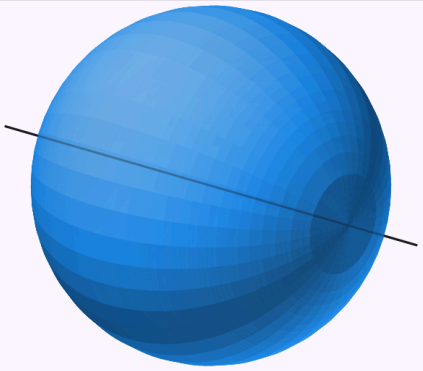
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2\,dx = 2x$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a):

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

- El valor de la integral por la constante delante:

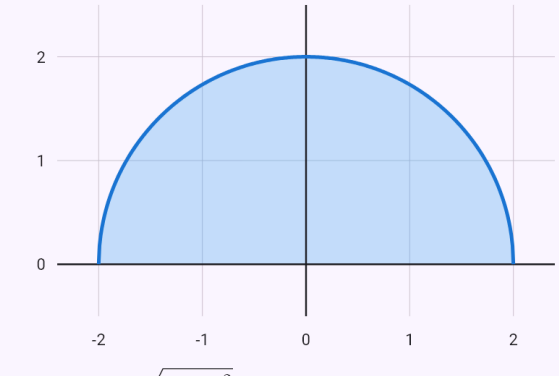
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



Aplicaciones con parámetros

Cada letra salvo x es un parámetro positivo y el resultado es una fórmula, como el volumen de la esfera 4πr³/3. Las comprobaciones numéricas usan valores sustituidos. El gráfico y el sólido 3D tienen un control por parámetro.

Cómo introducirlo

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Volumen de la esfera de radio r.

Ejemplos

Volumen de la esfera de radio r.

Enunciado: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Resultado

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros positivos: $r > 0$
- El volumen del sólido de revolución alrededor del eje x,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$$

- El valor de la integral por la constante delante:

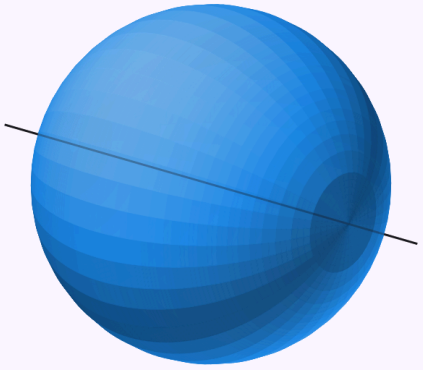
$$V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Valores de los parámetros

$r = 1$

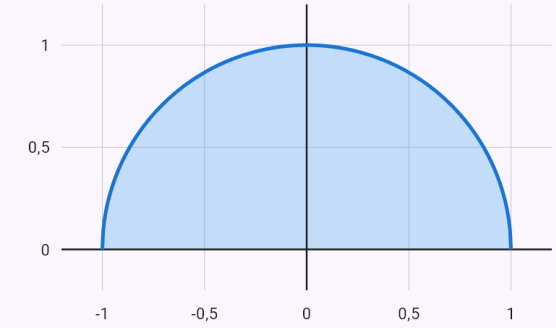
$V \approx 4{,}189$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Tronco de cono de radios a, b y altura h.

Enunciado: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Resultado

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros positivos: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- El volumen del sólido de revolución alrededor del eje x, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- El valor de la integral por la constante delante

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Valores de los parámetros

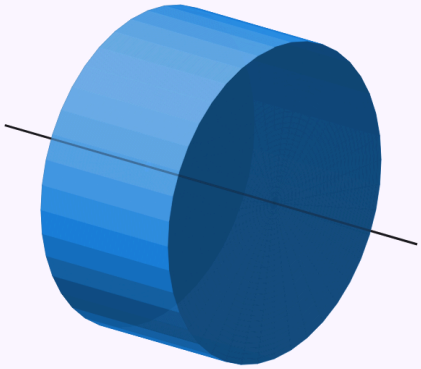
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

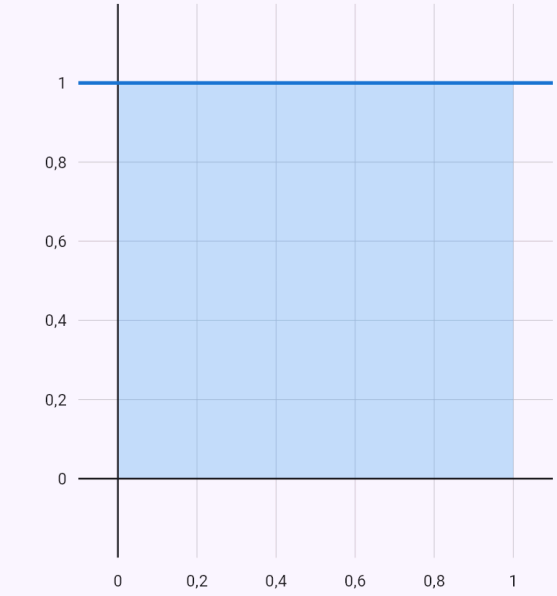
$V \approx 3{,}142$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



Centroide

El centroide de una región bajo o entre curvas, de un arco y de un sólido de revolución se obtiene con integrales y todos los pasos, y se marca en el gráfico. Las letras actúan como parámetros.

Cómo introducirlo

`teziste(x^2, 0, 1)`	Región bajo la curva; una segunda función da la región entre curvas.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	La última palabra oblouk o teleso elige arco o sólido de revolución.

Ejemplos

Centroide del semicírculo, 4r/(3π).

Enunciado: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Resultado

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros positivos: $r > 0$
- El centroide se obtiene de integrales

  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$

  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$

- Calculamos la integral: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Una raíz de una diferencia de cuadrados: la sustitución trigonométrica $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, la raíz $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$: $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Usamos la fórmula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$: $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt$
- La integral de una suma es la suma de las integrales $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original: $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Calculamos la integral: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Sustitución $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$: $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original: $x = -r \Rightarrow t = 0, \quad x = r \Rightarrow t = 0$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_{0}^{0} = 0-0=0$$

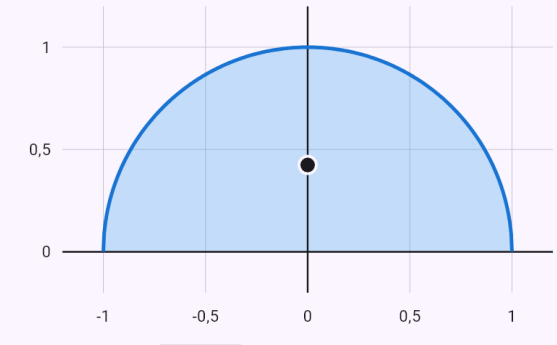
- Calculamos la integral: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- La integral de una suma es la suma de las integrales: $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int r^2\,dx = r^2x$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) - F(a) $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3}-\left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Las coordenadas del centroide son cocientes de las integrales
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

Valores de los parámetros

$r = 1$

$T \approx [0;\,0{,}424]$

Gráfica



$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

El punto T es el centroide.

Centroide del cono a 3/4 de la altura desde el vértice.

Enunciado: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Resultado

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Pasos

- Las letras distintas de la variable son parámetros positivos: $h > 0,\ r > 0$
- El centroide se obtiene de integrales

  $x_T = \dfrac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$

  $y_T = 0$

- Calculamos la integral: $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$
- Calculamos la integral: $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$
- Las coordenadas del centroide son cocientes de las integrales

  $x_T = \dfrac{M_y}{J} = \dfrac{3h}{4}$

  $y_T = 0$

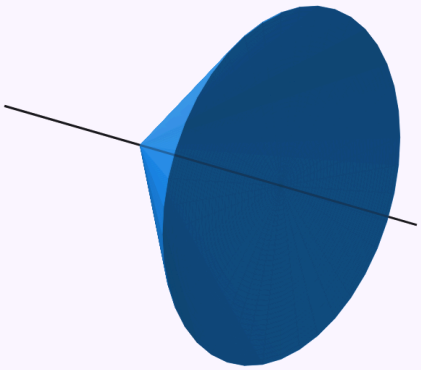
Valores de los parámetros

$h = 1$

$r = 1$

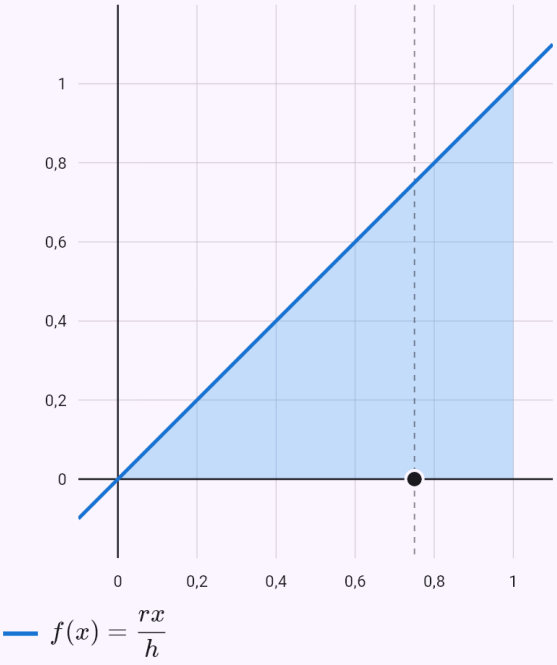
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



$f(x) = \dfrac{rx}{h}$

El punto T es el centroide.

Curvas paramétricas y en coordenadas polares

Escribe una curva x = φ(t), y = ψ(t) en dos líneas, y una curva en coordenadas polares como r = ρ(φ). El chip «Integrar» ofrece entonces el área, la longitud, el volumen y la superficie; los límites del parámetro son opcionales (sin ellos, de 0 a 2π). El gráfico colorea la región; volumen y superficie aparecen como sólido 3D. Se gira en torno al eje x o y; para el eje y añada y como último argumento.

Cómo introducirlo

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Una curva paramétrica en dos líneas.
`r = 1 + cos(phi)`	Una curva en coordenadas polares (también r^2 = … para una lemniscata).
`longitud(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	La forma escrita con el parámetro y los límites.

Ejemplos

El área bajo un arco de cicloide.

Enunciado: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Área

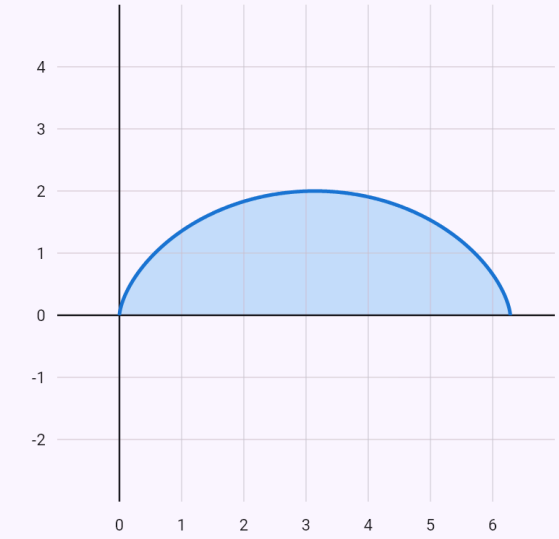
Resultado

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Pasos

- Las derivadas respecto al parámetro:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- El área bajo una curva paramétrica (dentro de una curva cerrada) para $t \in [0,\ 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$:
  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt\right|$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1\, dt = t$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int -2\cos t\, dt = -2\int \cos t\, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas:
  $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Usamos la fórmula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4}\right.$

Gráfica



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

La curva dada paramétricamente (o en coordenadas polares), dibujada para los límites elegidos del parámetro.

La longitud de una cardioide.

Enunciado: `r = 1 + cos(phi)` Longitud de curva

Resultado

$$l = 8$$

Pasos

- Las derivadas respecto al parámetro: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- La longitud de una curva en coordenadas polares para $\varphi \in [0,\ 2\pi]$, $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$

  $$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(
- Dividimos el intervalo en los ceros de las expresiones en valor absoluto (π) y en cada parte quitamos el valor absoluto según el signo

  $$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos
- Sacamos la constante fuera de la integral

  $$\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $$\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$
- Sacamos la constante fuera de la integral

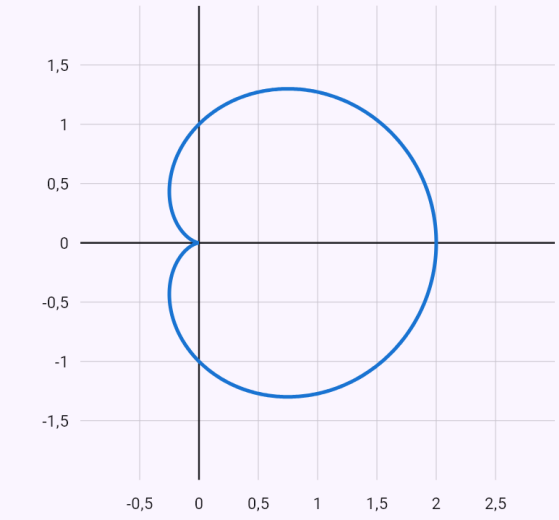
  $$\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

  $$\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $$\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =
- Sumamos los valores de las partes:

  $$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Gráfica



La curva dada paramétricamente (o en coordenadas polares), dibujada para los límites elegidos del parámetro.

Astroide girada en torno al eje y.

Enunciado: `x = cos(t)^3`

`y = sin(t)^3`

Resultado

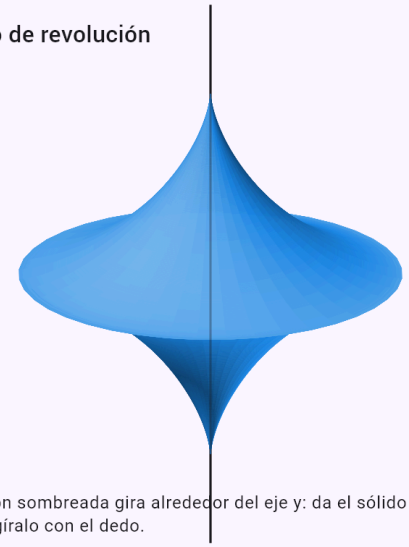
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Pasos

- Las derivadas respecto al parámetro:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- El sólido lo genera la parte de la curva a la derecha del eje y (x ≥ 0): $t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$
- Volumen del sólido en torno al eje y para $t \in [0,\ 2\pi]$,
  $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Una potencia impar: sustitución $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Una potencia impar: sustitución $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$

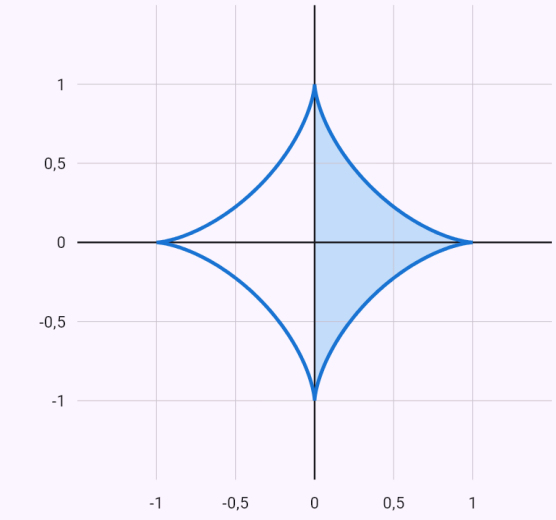
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original: $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- El valor de la integral por la constante delante: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje y: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

La curva dada paramétricamente (o en coordenadas polares), dibujada para los límites elegidos del parámetro.

Curvas dadas por una ecuación

Para una ecuación en x e y (x³ + y³ = 3xy) el chip «Integrar» ofrece el área, la longitud, el volumen y la superficie. Sin límites toma toda la curva cerrada: la circunferencia y la elipse en forma paramétrica con cos y sin, un lazo que pasa por el origen (el folium de Descartes) mediante las rectas y = tx – el área del lazo entonces de forma exacta a partir de los sectores, la longitud, el volumen y la superficie numéricamente. Con límites en x usa la rama superior y = f(x).

Cómo introducirlo

`x^3 + y^3 = 3xy`	Una curva cerrada – el chip «Integrar» sin límites.

`y^2 = x^3`	Una curva no cerrada – el chip «Integrar» con límites en x (la rama superior y = x^(3/2)).

Ejemplos

El área del lazo del folium – mediante las rectas y = tx y los sectores, S = 3/2.

Enunciado: `x^3 + y^3 = 3xy` Integrar → Área

Resultado

$$S = \frac{3}{2}$$

Pasos

- El lazo que pasa por el origen en forma paramétrica mediante las rectas y = tx – sustituimos en la ecuación y despejamos x

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- El área del lazo sumando los sectores desde el origen: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, y sobre la recta y = tx, x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Sustitución $u = t^3+1$, $du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

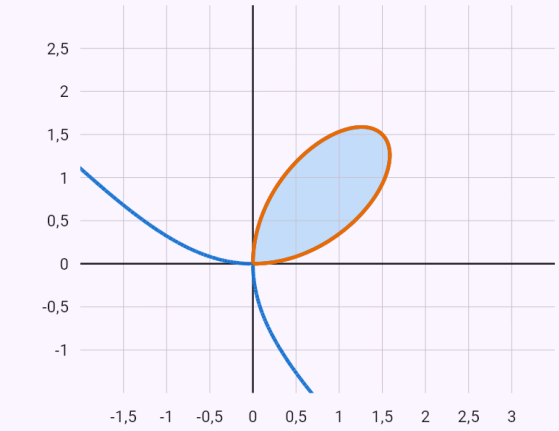
- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Volvemos a la variable original: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$
- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_0^{\infty} \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Gráfica



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\; y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Toda la curva dada por la ecuación; resaltada la parte con la que se calcula.

Área de la lemniscata, por coordenadas polares.

Enunciado: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

Resultado

$$S = 1$$

Pasos

- Escribimos la curva en coordenadas polares

  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$

- El área limitada por una curva en coordenadas polares (sumando los sectores desde el origen) para

  $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

  $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$

- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

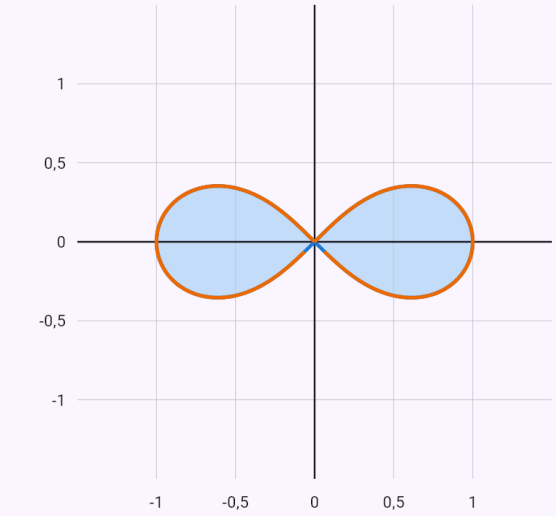
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

- La curva tiene lazos iguales (2); el valor de uno se multiplica por su número: $2 \cdot 1$

- El valor de la integral por la constante delante:

  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Gráfica



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Toda la curva dada por la ecuación; resaltada la parte con la que se calcula.

Elipse girada con término xy.

Enunciado: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Resultado

$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Pasos

- La curva es una elipse girada; sus ejes salen del ángulo de giro y la escribimos paramétricamente

  $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos$

- Las derivadas respecto al parámetro:

  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$

- El área bajo una curva paramétrica (dentro de una curva cerrada) para $t \in [0,\, 2\pi]$, $S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt\right|$

  $S = \left|\int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) d$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \int -$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \cos^2 t\, dt$

- Usamos la fórmula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:

  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

  $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3}\int \cos t \cdot \sin t\, dt$

- Usamos la fórmula $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(2t)\, dt$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

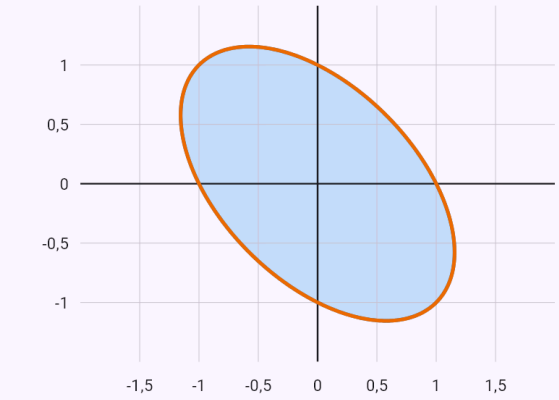
  $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \sin^2 t\, dt$

- Usamos la fórmula $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $$\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$$
- La integral de una suma es la suma de las integrales
  $$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $$\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$
- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$$
- La integral salió negativa (la curva se recorre de derecha a izquierda) – tomamos su valor absoluto:
  $$S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Gráfica



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Toda la curva dada por la ecuación; resaltada la parte con la que se calcula.

Limitaciones conocidas

- La longitud de y = $\sqrt[3]{x}$ (y de curvas parecidas) solo se calcula numéricamente – lleva a una integral elíptica, que no tiene primitiva elemental.
- El giro alrededor del eje y solo para una región a un lado del eje.
- La fórmula con parámetros solo se da si el resultado no depende de la relación entre ellos; si el signo cambia según sus valores, no se da.
- En curvas implícitas sin límites: cónicas (también con término xy), un lazo por el origen y curvas de dos partes homogéneas (lemniscata).
- La integral definida con parámetro, por ahora solo con límites finitos.
- Cuando el criterio de comparación por paso al límite no decide (el integrando oscila en el infinito, por ejemplo cos x/(x + ln x)), la aplicación no da un valor sin probar la convergencia e indica que la integral aún no se resuelve.

32. Series infinitas

En una serie numérica la aplicación comprueba primero la condición necesaria de convergencia y luego elige un criterio según la forma de la serie – serie geométrica, $\Sigma\, 1/n^p$, criterio del cociente, de la raíz, de comparación por paso al límite, de la integral o de Leibniz; en una serie alternada distingue la convergencia absoluta de la condicional. Cuando es posible, suma la serie. La gráfica muestra los términos y las sumas parciales.

Series numéricas

La aplicación halla la suma de series geométricas y telescópicas, de series $\Sigma\, P(n)q^n$ y de series conocidas ($\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$); en otro caso la calcula numéricamente. Una suma finita se calcula como en el colegio – telescópica, aritmética, geométrica, si no término a término. También se resuelve una ecuación con la suma de una serie geométrica, comprobando la condición de convergencia $|q| < 1$.

Una suma hasta una letra (sum(k^2, k, 1, n)) con las fórmulas de las sumas de potencias, una geométrica con su fórmula y un término racional con fracciones parciales (telescópica); el resultado se comprueba en los primeros términos.

Cómo introducirlo

`suma(1/n^2)`	El término general; el índice n desde 1 (también sum).
`suma(1/n^2, n, 1, oo)`	Con el índice y el valor inicial.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Desde una foto o en LaTeX.
`1/n^2`	El término general con el chip «Serie» – escribe el índice inicial en el campo.
`suma(2k+1, k, 1, 100)`	Una suma finita – con el índice, el límite inferior y el superior.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Una suma hasta n – la fórmula de la suma.

Ejemplos

La serie Σ 1/n² – converge, la suma es π²/6.

Enunciado: `sum(1/n^2)`

Resultado

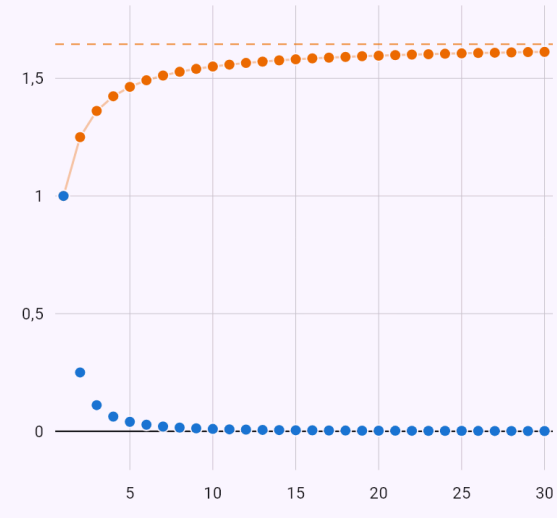
La serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es del tipo Σ 1/n^p con p = 2 > 1: converge.
- La suma de una serie conocida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales s_n = a_1 + … + a_n. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

El criterio de Leibniz – convergencia condicional.

Enunciado: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Resultado

La serie converge, pero no absolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Los términos tienen ambos signos: primero la convergencia absoluta

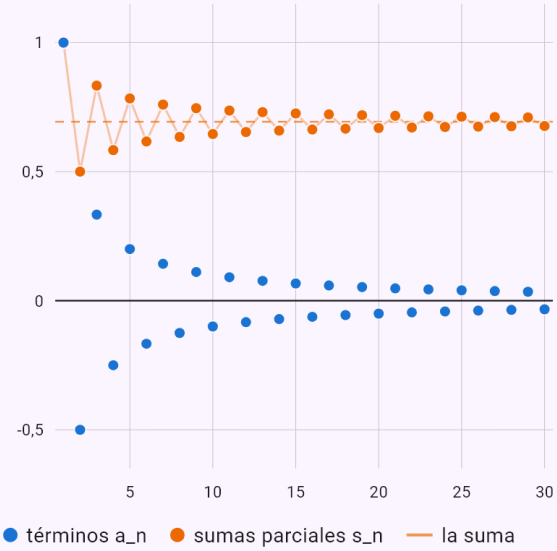
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- La serie armónica diverge: los términos agrupados por potencias de dos, cada grupo es al menos 1/2

  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Criterio de Leibniz: |a_n| = $\frac{1}{n}$ decrece y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: la serie converge.
- Conclusión: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).
- La suma de una serie conocida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales s_n = a_1 + … + a_n. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

El criterio del cociente y la suma.

Enunciado: `sum(n/2^n)`

Resultado

La serie converge.

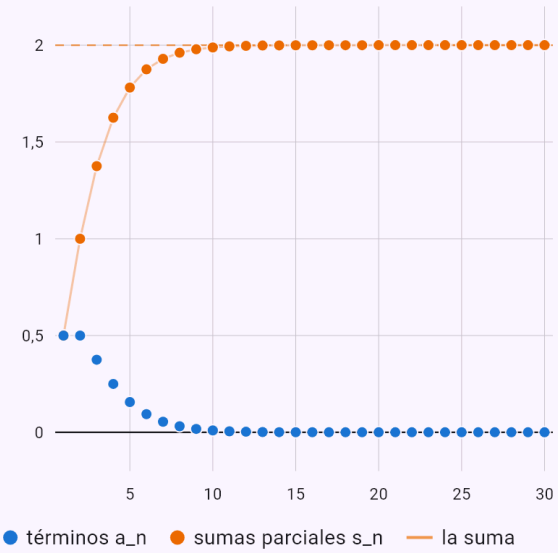
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Criterio del cociente (d'Alembert) la serie converge.

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$
- Una serie Σ P(n)·qⁿ sumada derivando la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales s_n = a_1 + … + a_n. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

No se cumple la condición necesaria – la serie diverge.

Enunciado: `sum(n/(n+1))`

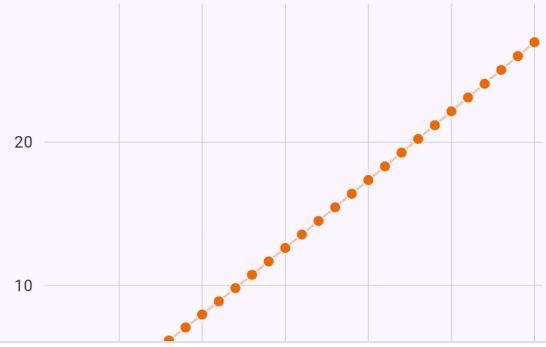
Resultado

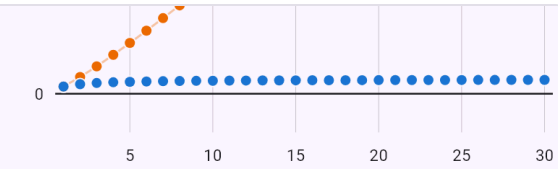
La serie diverge.

Pasos

- No se cumple la condición necesaria de convergencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Gráfica





Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales s_n = a_1 + … + a_n. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

Suma telescópica – quedan el primer y el último término.

Enunciado: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Resultado

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Pasos

- Suma telescópica – los términos vecinos se cancelan, solo quedan el primero y el último:
  $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Ecuación con la suma de una serie geométrica.

Enunciado: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Resultado

$$x = -1$$

Pasos

- La serie es geométrica de razón q = 2^x y converge para $|2^x| < 1$; su suma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Resolvemos: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ cumple la condición de convergencia: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

La suma de los cuadrados por la fórmula.

Enunciado: `sum(k^2, k, 1, n)`

Resultado

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pasos

- Usamos las fórmulas de las sumas de potencias:
  $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- La suma: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Una suma telescópica hasta n – fracciones parciales.

Enunciado: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Resultado

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Pasos

- Descomponemos el término en fracciones parciales – sus partes se cancelan una tras otra en la suma (suma telescópica): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- La suma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Series de potencias

En una serie de potencias la aplicación halla el radio de convergencia con el criterio del cociente, estudia los extremos como series numéricas e indica el intervalo de convergencia; cuando es posible, también la suma. La gráfica muestra las sumas parciales con un deslizador para el número de términos.

Ejemplos

El intervalo de convergencia [−1, 1).

Enunciado: `sum(x^n/n)`

Resultado

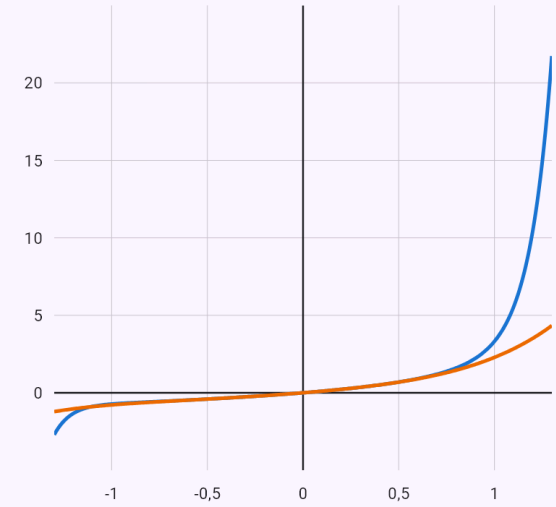
$$x \in [-1,\ 1)$$

Pasos

- El radio de convergencia R = 1 por el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- El extremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).
- El extremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge según la agrupación de los términos de la serie armónica.
- El intervalo de convergencia: $x \in [-1,\ 1)$

Gráfica

Términos: 5



$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

Elige con el control el número de términos: las sumas parciales se acercan a la suma solo dentro del intervalo de convergencia.

Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función la aplicación la deduce de desarrollos conocidos (e^x, sin x, ln(1 + x), …) por sustitución y determina su intervalo de convergencia.

Cómo introducirlo

`taylor(e^x, 0, oo)`	La función, el punto y oo en lugar del grado; o el chip «Polinomio de Taylor» → «Serie».

Ejemplos

La serie de ln(1 + x) y su intervalo de convergencia.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Resultado

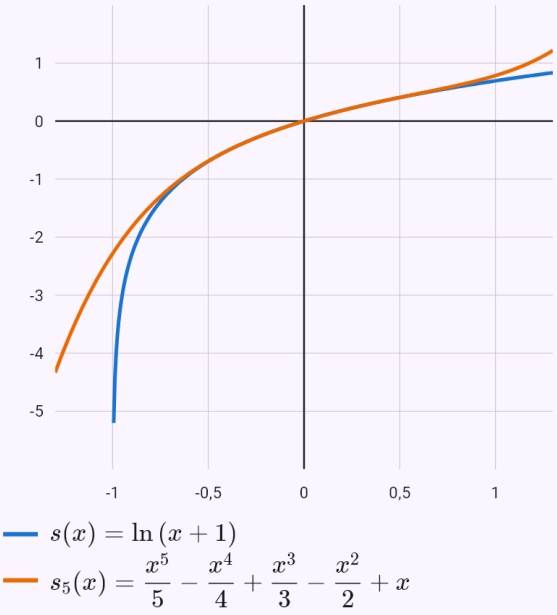
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Pasos

- Del desarrollo conocido $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ con $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- El radio de convergencia R = 1 por el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- El extremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge según la agrupación de los términos de la serie armónica.
- El extremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).
- El intervalo de convergencia: $x \in (-1, 1]$

Gráfica

Términos: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Elige con el control el número de términos: las sumas parciales se acercan a la suma solo dentro del intervalo de convergencia.

33. Series de Fourier

La aplicación construye la serie de Fourier de una función en un intervalo tomado como un periodo (sin indicarlo, en [−π, π]), o la serie de senos o de cosenos de una función en [0, L]. La función también puede darse a trozos.

Calcula los coeficientes mediante integrales con todo el procedimiento (por partes con el parámetro n), sustituye sin nπ = 0 y cos nπ = $(-1)^n$ y aprovecha la simetría de las funciones pares e impares. En los puntos de discontinuidad determina la suma de la serie por el teorema de Dirichlet y, sustituyendo un punto y con la identidad de Parseval, deduce sumas de series numéricas (como $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$). La gráfica muestra la extensión periódica de la función y las sumas parciales con un deslizador.

El chip «Compleja» (o fourierc) muestra también la forma compleja: los coeficientes c_n, su relación con a_n y b_n y los espectros de amplitud y fase.

Cómo introducirlo

`fourier(x^2, -pi, pi)`	La función y el intervalo.
`fouriersin(x, 0, pi)`	La serie de senos (fouriercos – la de cosenos).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Una función a trozos, línea por línea, con el chip «Serie de Fourier».
`x^2`	Una función con el chip «Serie de Fourier» – allí eliges el tipo de serie y el intervalo.

Ejemplos

Una función par – solo cosenos; las sumas Σ 1/n² y Σ 1/n⁴.

Enunciado: `fourier(x^2)`

Resultado

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad$$

Pasos

- El intervalo $[-\pi,\ \pi]$ es un periodo: $T = 2\pi$, medio periodo $l = \pi$. Buscamos la serie con los coeficientes

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- La función es par, $f(-x) = x^2 = f(x)$, así que los coeficientes de los senos son nulos y los demás basta calcularlos sobre la mitad del intervalo

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- El coeficiente a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$

- Sustituimos los límites: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

- El coeficiente a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, luego u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, luego u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $$\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Sustituimos los límites

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- La extensión periódica de la función es continua, así que por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es f(x) para $x \in [-\pi, \pi]$
- Sustituyendo $x = 0$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Sustituyendo $x = \pi$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

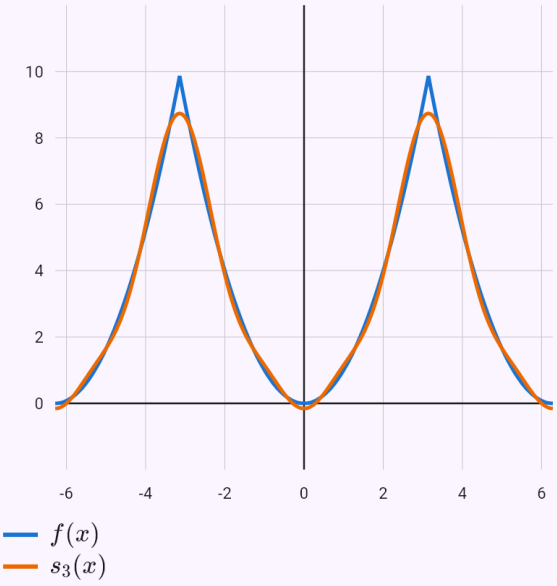
- De la identidad de Parseval obtenemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Gráfica

Términos hasta n = 3



La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Una función a trozos – saltos y el fenómeno de Gibbs.

Enunciado: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Serie de Fourier

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Pasos

- El intervalo $[-\pi,\, \pi]$ es un periodo: $T = 2\pi$, medio periodo $l = \pi$. Buscamos la serie con los coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La función es impar, $f(-x) = -f(x)$, así que el término constante y los coeficientes de los cosenos son nulos y los de los senos basta calcularlos sobre la mitad del intervalo

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- El coeficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

$$\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Sustituimos los límites

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Los términos con n par son nulos – quedan solo los n impares, n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es f(x) para $x \in (-\pi,\, 0) \cup (0,\, \pi)$; en un punto de discontinuidad es el promedio de los límites laterales

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Sustituyendo $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

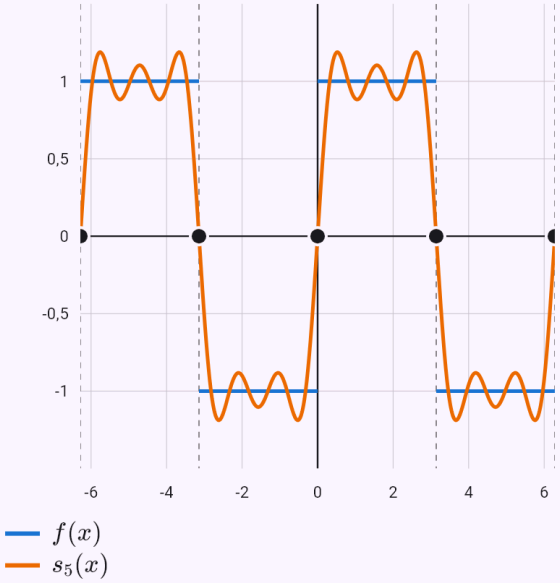
- De la identidad de Parseval obtenemos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Gráfica

Términos hasta n = 5



La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Una serie de senos y la suma 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Enunciado: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

Pasos

- Extendemos la función de $[0,\ \pi]$ de forma impar y luego periódica ($T = 2\pi$) − resulta la serie de senos

  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, donde

  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

- El coeficiente b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, luego u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $\int x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$

- Sacamos la constante fuera de la integral

  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, luego u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n}\int \sin(nx)\,dx$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:

  $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Sustituimos los límites

  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$

- Sustituimos los coeficientes en la serie:

  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi}\sin(nx)$

- Los términos con n par son nulos − quedan solo los n impares, n = 2k − 1

  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$

- La extensión periódica de la función es continua, así que por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es f(x) para $x \in [0,\ \pi]$

- Sustituyendo $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la suma de una serie numérica

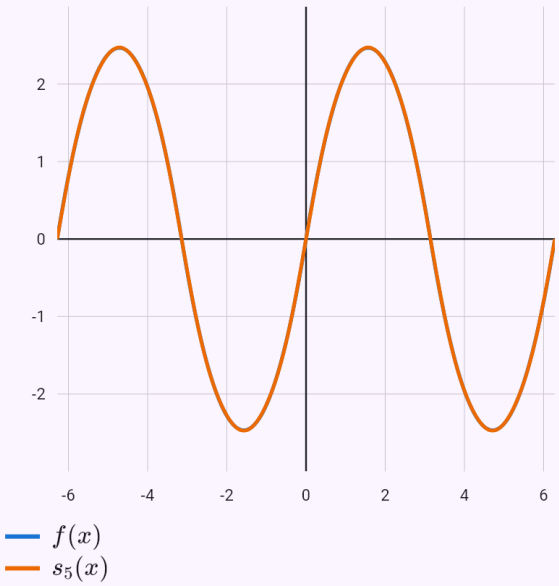
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

- De la identidad de Parseval $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ obtenemos

  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Gráfica

Términos hasta n = 5



La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie − las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Forma compleja con su espectro.

Enunciado: `fourierc(x, -pi, pi)`

Resultado

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Pasos

- El intervalo $[-\pi,\ \pi]$ es un periodo: $T = 2\pi$, medio periodo $l = \pi$. Buscamos la serie con los coeficientes

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- La función es impar, $f(-x) = -x = -f(x)$, así que el término constante y los coeficientes de los cosenos son nulos y los de los senos basta calcularlos sobre la mitad del intervalo

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- El coeficiente b_n: $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

- Por partes (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, luego u' = 1, v = $-\dfrac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:
  $\displaystyle\int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$

- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable:
  $\displaystyle\int \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Sustituimos los límites

  $$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie:

  $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

- Por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es f(x) para $x \in (-\pi,\ \pi)$; en un punto de discontinuidad es el promedio de los límites laterales:

  $$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

- Sustituyendo $x = \dfrac{\pi}{2}$ obtenemos la suma de una serie numérica

  $$s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- De la identidad de Parseval obtenemos

  $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Forma compleja de la serie: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$, donde $c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-inx}\,dx$. Relación con la forma real

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Sustituimos los coeficientes de la forma real

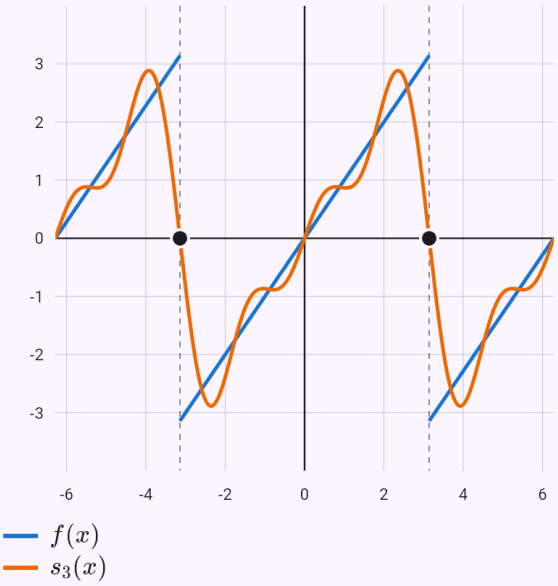
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

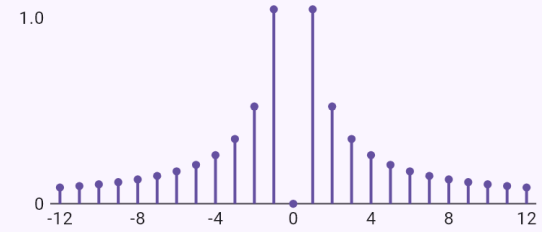
Gráfica

Términos hasta n = 3

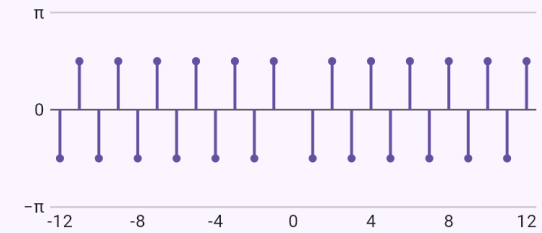


La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Espectro de amplitud $|c_n|$



Espectro de fase $\arg c_n$



El eje horizontal es n. La altura muestra el módulo o el ángulo de c_n; los coeficientes nulos no tienen fase.

Limitaciones conocidas

- Una función no acotada en un extremo del intervalo (ln x en [0, 2π]) se desarrolla con coeficientes calculados numéricamente; en el punto donde crece sin límite no se cumple el teorema de Dirichlet. Una función con un polo (1/x) no se desarrolla: no es integrable.
- Cuando los coeficientes llevan a una integral sin primitiva elemental (ln x en [1, 3]), se expresan con el seno y el coseno integral.

Generado a partir de la aplicación Mathtrace