Mathtrace – manual

IV. Ecuaciones diferenciales y análisis avanzado

Índice

IV. Ecuaciones diferenciales y análisis avanzado

34. Análisis funcional

35. Funciones de variable compleja

36. Ecuaciones diferenciales

37. Cálculo de variaciones

38. Ecuaciones en derivadas parciales

39. Recurrencias y funciones generatrices

40. Métodos numéricos

34. Análisis funcional

> *«El análisis funcional lineal es, en realidad, álgebra lineal en dimensión infinita».*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., en la clase inaugural

La parte de cálculo del análisis funcional lineal. La norma de un vector se escribe ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ u otro número; sin índice la aplicación calcula las tres), la norma de una sucesión en el espacio ℓ^p ||1/n||_2: la aplicación suma la serie $\Sigma|a_n|^p$ y, si diverge, la sucesión no pertenece al espacio. La norma L^p de una función es ||x^2||_{L^2(0; 1)}: la aplicación quita el valor absoluto dividiendo la integral en los ceros de la función. La norma del supremo ||f||_{C⟨a; b⟩} es el mayor valor de |f| entre los puntos estacionarios y los extremos. dist(f, g, ⟨a; b⟩) da la distancia entre dos funciones en la norma del supremo y en L^2; holder(...) y minkowski(...) comprueban las desigualdades de Hölder y de Minkowski con funciones o vectores dados.

Una sucesión de funciones convergencia(x^n, ⟨0; 1⟩) (o f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) se estudia en tres pasos: el límite puntual por tramos (una potencia q^n tiende a cero para |q| < 1), la convergencia uniforme mediante $s_n = \sup |f_n - f|$ desde el punto estacionario x_n (un límite discontinuo de funciones continuas no puede ser uniforme) y la convergencia en L^2 mediante $\int (f_n - f)^2$. Donde no sale una fórmula, la aplicación estima el supremo y la integral numéricamente. La gráfica tiene un deslizador sobre los términos f_1 a f_{20}.

El producto escalar en L^2 con peso, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (opcionalmente w = ...), da también las normas y el ángulo de las funciones. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) realiza el proceso de Gram–Schmidt y reconoce los polinomios clásicos: Legendre, Chebyshov con peso $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ o $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerre con e^(−x) en ⟨0; ∞) y Hermite con e^(−x²); funciona también con vectores. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) halla la mejor aproximación por un polinomio de grado n como proyección ortogonal, con el error y la desigualdad de Bessel. La identidad de Parseval (y la deducción de $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) está en el capítulo de series de Fourier.

Las normas de matrices se escriben ||[1 2; 3 4]||_1 (también _2, _oo y _F para la de Frobenius; sin índice la aplicación las calcula todas), el número de condición cond([1 2; 3 4]) (opcionalmente p = 1). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) calcula la norma de un operador integral con el núcleo K(x, t): en C⟨a; b⟩ como el máximo de $\int |K|$ dt, en L^2 exactamente para un núcleo degenerado y, si no, acotada por la norma de Hilbert-Schmidt. fnorm(g, ⟨a; b⟩) da la norma del funcional $\varphi(u) = \int u \cdot g$ en C y en L^2 (teorema de Riesz), con p = ... en L^p.

Escriba una ecuación integral de segunda especie tal como la ve: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholm) o u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterra); también desde una foto o con los comandos fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) y volterra(K; f; λ; a). Un núcleo degenerado se reduce a un sistema lineal; con un parámetro λ la aplicación halla los valores característicos y las funciones propias y decide según la alternativa de Fredholm. Los demás núcleos se resuelven con la serie de Neumann y el método de Nyström, y una ecuación de Volterra con núcleo k(x − t) con la transformada de Laplace.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) comprueba las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach (g lleva el intervalo en sí mismo, q = max |g′| < 1), calcula el número de pasos a priori e itera con la estimación a posteriori del error (opcionalmente eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) hace lo mismo para el sistema x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) da las aproximaciones sucesivas de Picard con el intervalo donde el operador es una contracción y una cota del error. Las ecuaciones funcionales de tipo Cauchy – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), la de Jensen y la de d'Alembert – se resuelven con la deducción.

Cómo introducirlo

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normas de un vector, de una sucesión (ℓ^p) y de una función (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	La distancia entre dos funciones en la norma del supremo y en L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Desigualdades de Hölder y de Minkowski.
`convergencia(f_n, ⟨a; b⟩)`	Convergencia puntual, uniforme y en L^2 de una sucesión de funciones.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Producto escalar, normas y ángulo de funciones.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Proceso de Gram–Schmidt para funciones y vectores.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Mejor aproximación por un polinomio de grado n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Normas de matrices 1, 2, ∞, de Frobenius y el número de condición.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	La norma de un operador integral y del funcional $\int u \cdot g$.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra de segunda especie.
`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	El teorema del punto fijo de Banach y las aproximaciones de Picard.

`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Ecuaciones funcionales de tipo Cauchy.

Ejemplos

Las normas 1, 2 e ∞ de un vector.

Enunciado: `||(1; -2; 3)||`

Resultado

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Pasos

- Las tres normas más habituales del vector $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: la suma de los valores absolutos de las componentes ($\|\cdot\|_1$), la longitud euclídea ($\|\cdot\|_2$) y el mayor valor absoluto de una componente ($\|\cdot\|_\infty$)

  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$

  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$

  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

||1/n||₂ = π/√6: el problema de Basilea.

Enunciado: `||1/n||_2`

Resultado

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Pasos

- La norma de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ en el espacio ℓ^2 para p = 2: sumamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ y sacamos la raíz

  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

La serie armónica diverge: 1/n no pertenece a ℓ^1.

Enunciado: `||1/n||_1`

Resultado

La sucesión (función) no pertenece a este espacio: su norma es infinita.

Pasos

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$: la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ no tiene norma finita, no pertenece al espacio ℓ^p para p = 1

El valor absoluto eliminado dividiendo la integral.

Enunciado: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Resultado

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Pasos

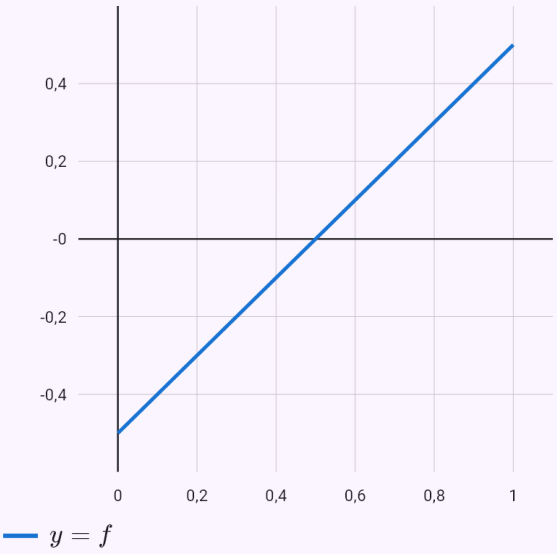
- Quitamos el valor absoluto dividiendo la integral en los ceros de la función $x = \frac{1}{2}$; en cada tramo la función mantiene su signo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- La norma en el espacio L^p para p = 3: la integral $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, y por tanto

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Gráfica



La función en el intervalo dado.

La norma del supremo desde los puntos estacionarios y los extremos.

Enunciado: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Resultado

$$\|f\|_\infty = 18$$

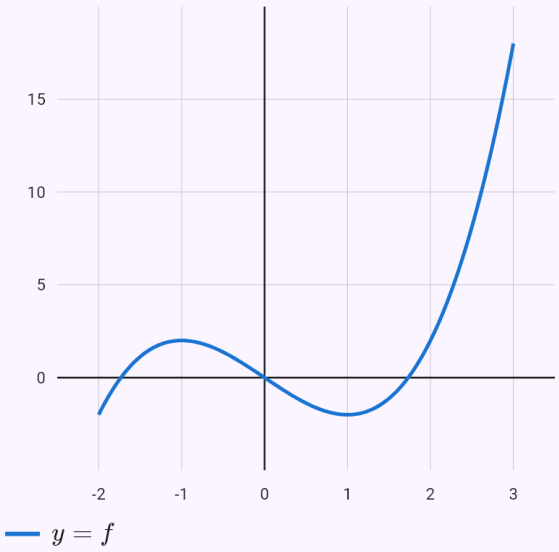
Pasos

- La norma del supremo de una función continua en un intervalo cerrado es el mayor valor de |f|. La buscamos en los extremos y en los puntos estacionarios interiores: la derivada $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, los puntos estacionarios $x = -1,\ x = 1$
- Los valores de |f| en esos puntos

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- El mayor de ellos es la norma del supremo $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle -2;\,3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Gráfica



La función en el intervalo dado.

La distancia en la norma del supremo y en L².

Enunciado: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

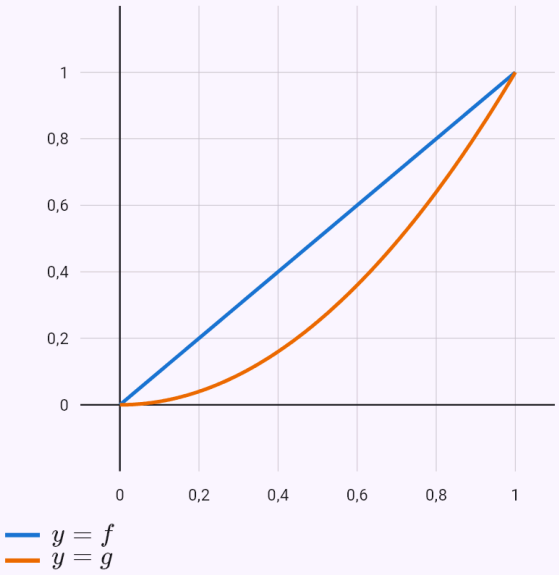
Pasos

- La distancia entre dos funciones es la norma de su diferencia: $f - g = x(1 - x)$
- La norma del supremo de una función continua en un intervalo cerrado es el mayor valor de |f|. La buscamos en los extremos y en los puntos estacionarios interiores: la derivada $(f - g)'(x) = 1 - 2x$, los puntos estacionarios $x = \frac{1}{2}$
- Los valores de |f| en esos puntos

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

- El mayor de ellos es la norma del supremo $\|(f-g)\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$
- La norma en el espacio L² para p = 2: la integral $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, y por tanto $\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$

Gráfica



Ambas funciones en el intervalo dado.

Desigualdad de Hölder con el exponente conjugado q = 3/2.

Enunciado: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Pasos

- La desigualdad de Hölder usa el exponente conjugado q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- La norma en el espacio L³ para p = 3: la integral $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, y por tanto
  $\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$
- La norma en el espacio L³/² para p = $\frac{3}{2}$: la integral $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, y por tanto
  $\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$
- Lado izquierdo $\left|\int_0^1 f g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, lado derecho $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$: la desigualdad de Hölder se cumple.

x^n: puntualmente sí, uniformemente no, en L^2 sí.

Enunciado: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

La sucesión de funciones converge puntualmente, pero no uniformemente.

Pasos

- El límite lo decide la potencia q^n de base $q = x$: para |q| < 1, $q^n \to 0$ (más rápido de lo que crece cualquier potencia de n); para |q| > 1 crece sin límite. Los puntos con |q| = 1 se calculan aparte.
- El límite puntual: para cada x fijo, $f_n(x) = x^n$ es una sucesión de números; calculamos su límite cuando $n \to \infty$

$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

- La función límite

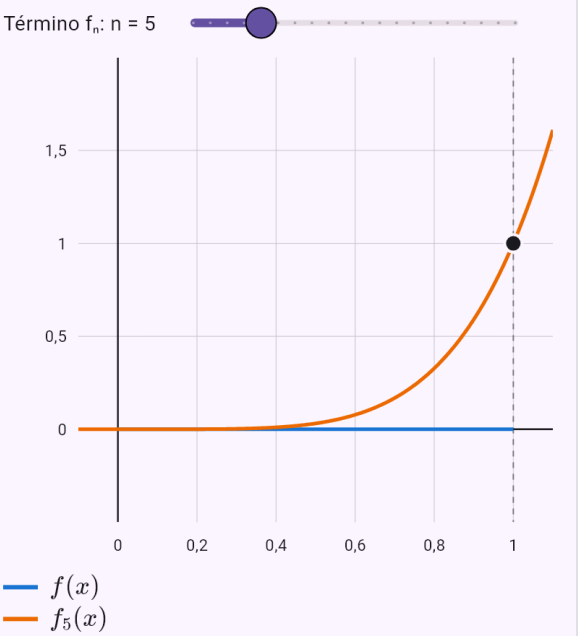
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Todas las funciones f_n son continuas, pero la función límite no es continua en $x = 1$. El límite uniforme de funciones continuas es continuo, así que la convergencia no es uniforme.
- Convergencia en L^2:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1},$$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$; la sucesión converge en L^2.

Gráfica



La función límite f y el término elegido f_n: con el deslizador se ve cómo f_n se acerca a f.

Convergencia uniforme: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Enunciado: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

La sucesión de funciones converge uniformemente.

Pasos

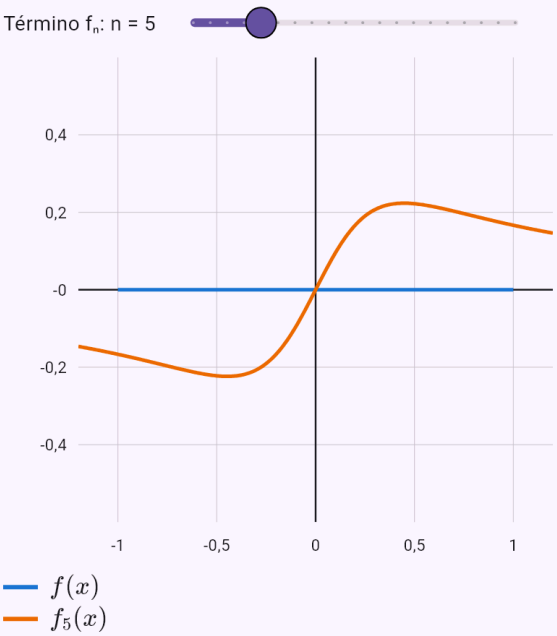
- El límite puntual: para cada x fijo, $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ es una sucesión de números; calculamos su límite cuando n → ∞

  $x \in \langle -1;\ 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

- La función límite: $f(x) = 0$
- La uniformidad se juzga por $s_n = \sup |f_n - f|$. La diferencia $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ tiene la derivada $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; los candidatos al mayor valor son $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, la convergencia es uniforme.
- Convergencia en L²: calculamos la integral $\|f_n - f\|_2^2$ numéricamente. Los valores tienden a cero; la sucesión converge en L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Gráfica



La función límite f y el término elegido f_n: con el deslizador se ve cómo f_n se acerca a f.

La joroba viajera: puntualmente a cero, pero s_n y $\|f_n\|_2$ crecen.

Enunciado: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Resultado

La sucesión de funciones converge puntualmente, pero no uniformemente.

Pasos

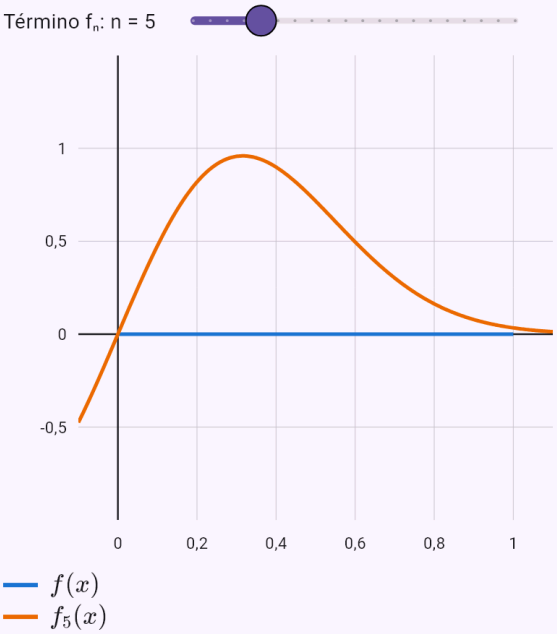
- El límite lo decide la potencia q^n de base $q = e^{-x^2}$: para $|q| < 1$, $q^n \to 0$ (más rápido de lo que crece cualquier potencia de n); para $|q| > 1$ crece sin límite. Los puntos con $|q| = 1$ se calculan aparte.
- El límite puntual: para cada x fijo, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ es una sucesión de números; calculamos su límite cuando $n \to \infty$

  $x \in \langle 0;\ 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- La función límite: $f(x) = 0$
- La uniformidad se juzga por $s_n = \sup |f_n - f|$. La diferencia $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ tiene la derivada $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; los candidatos al mayor valor son $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (no 0), la convergencia no es uniforme.

  $s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$
- Convergencia en L^2: calculamos la integral $\|f_n - f\|_2^2$ numéricamente. Los valores no tienden a cero; la sucesión no converge en L^2.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Gráfica



La función límite f y el término elegido f_n: con el deslizador se ve cómo f_n se acerca a f.

Producto escalar, normas y ángulo de dos funciones.

Enunciado: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

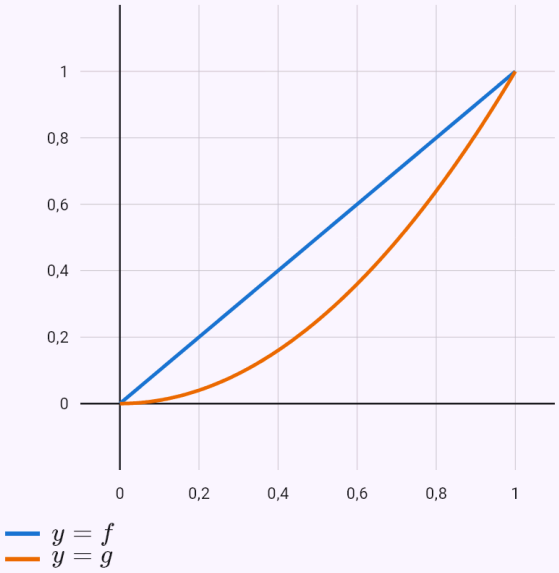
Resultado

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Pasos

- El producto escalar en el espacio L^2:
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- Las normas de ambas funciones dadas por el producto escalar
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- El ángulo entre las funciones (la desigualdad de Cauchy–Schwarz garantiza $|\cos\varphi| \le 1$)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Gráfica



Ambas funciones en el intervalo dado.

Polinomios de Legendre a partir de 1, x, x², x³.

Enunciado: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Pasos

- El proceso de Gram–Schmidt: conservamos la primera función: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Paso 2: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Los productos escalares necesarios: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Paso 3: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Los productos escalares necesarios: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Paso 4: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Los productos escalares necesarios

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5},\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

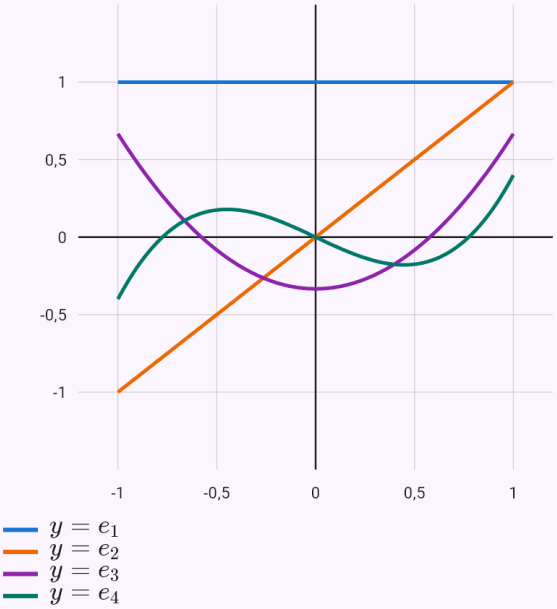
- Dividiendo por las normas obtenemos un sistema ortonormal

  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$

- Son los polinomios de Legendre, en su forma habitual con $P_k(1) = 1$

  $$P_0(x) = 1$$
  $$P_1(x) = x$$
  $$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
  $$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Gráfica



Las funciones ortogonales en el intervalo dado.

Polinomios de Chebyshov: las integrales a partir de los momentos del peso.

Enunciado: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Resultado

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Pasos

- Los productos escalares de polinomios con el peso $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se obtienen de los momentos del peso $\mu_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^k\, w(x)dx$

  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \dfrac{\pi}{2},\ \mu_4 = \dfrac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \dfrac{5\pi}{16}$

- El proceso de Gram–Schmidt: conservamos la primera función: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$

- Paso 2: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \dfrac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Los productos escalares necesarios: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$

- Paso 3: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_3 = x^2 - \dfrac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \dfrac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Los productos escalares necesarios

  $\langle f_3, e_1\rangle = \dfrac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$

- Paso 4: a la función le restamos sus proyecciones sobre las anteriores: $e_4 = x^3 - \dfrac{3}{4}x = x^3 - \dfrac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \dfrac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Los productos escalares necesarios

  $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \dfrac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

- Dividiendo por las normas obtenemos un sistema ortonormal

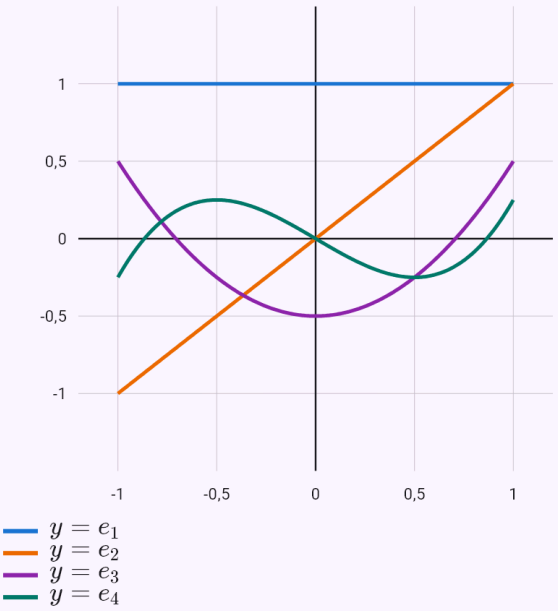
  $\hat{e}_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \dfrac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \dfrac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \dfrac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$

- Son los polinomios de Chebyshov de primera especie,

$T_k(\cos t) = \cos kt$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$$

Gráfica



Las funciones ortogonales en el intervalo dado.

La mejor aproximación cuadrática de e^x en $\langle -1; 1\rangle$.

Enunciado: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Resultado

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Pasos

- La mejor aproximación en L^2 es la proyección ortogonal sobre los polinomios de grado a lo sumo n. El proceso de Gram–Schmidt aplicado a 1, x, x^2, … da una base ortogonal: $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$; $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Los coeficientes de la proyección

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

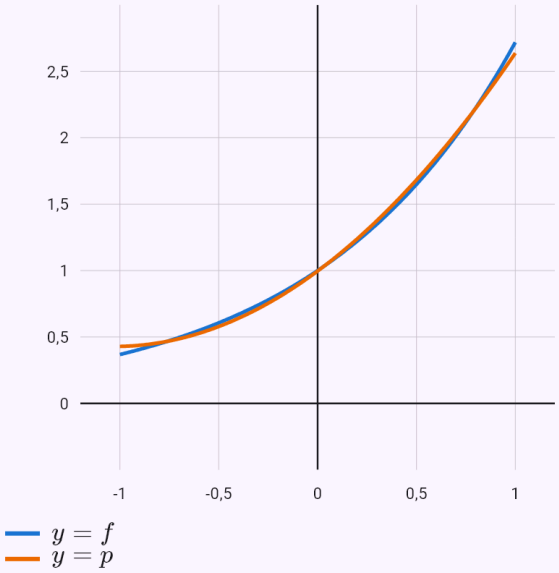
- La mejor aproximación

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11-e^2}{4e}$$

- El error por el teorema de Pitágoras: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Desigualdad de Bessel: $\sum c_k^2\|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Para un sistema completo (n → ∞) se convierte en igualdad: la identidad de Parseval.

$$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2\|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Gráfica



La función f y su mejor aproximación p.

Las normas 1, 2, ∞ y de Frobenius de una matriz.

Enunciado: `|||[1 2; 3 4]||`

Resultado

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Pasos

- La matriz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- La norma de columnas es la mayor suma de valores absolutos de una columna:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, luego
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- La norma espectral es la raíz del mayor valor propio de. Los valores propios luego
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- La norma de filas es la mayor suma de valores absolutos de una fila: $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, luego
  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- La norma de Frobenius es la raíz de la suma de los cuadrados de todos los elementos
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Una matriz casi singular – κ ≈ 4·10⁴.

Enunciado: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Resultado

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Pasos

- La matriz
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- La norma espectral es la raíz del mayor valor propio de. Los valores propios luego
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- El número de condición. Indica cuántas veces puede crecer el error relativo de los datos; al resolver un sistema se pueden perder unas $4{,}6$ cifras significativas – la matriz está mal condicionada.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}{\frac{400020001-20001\sqrt{400}}{200000000}}}$

El núcleo cambia de signo – la integral se divide en t = x.

Enunciado: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Pasos

- La norma de un operador integral en C⟨a; b⟩ es el mayor valor de φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. El núcleo $K(x,t) = x - t$ cambia de signo donde K = 0 – allí dividimos la integral

$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- La norma del supremo de una función continua en un intervalo cerrado es el mayor valor de |f|. La buscamos en los extremos y en los puntos estacionarios interiores: la derivada $\varphi'(x) = 2x - 1$, los puntos estacionarios $x = \frac{1}{2}$
- Los valores de |f| en esos puntos

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- El mayor de ellos es la norma del supremo

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- El núcleo es degenerado, $K(x,t) = -t + x$. Su norma en L² la dan entonces las matrices de Gram de las funciones a⃗(x) y b⃗(t). En comparación, la norma de Hilbert-Schmidt nunca es menor.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G_b G_a)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

La norma de un funcional en C y en L² (teorema de Riesz).

Enunciado: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Pasos

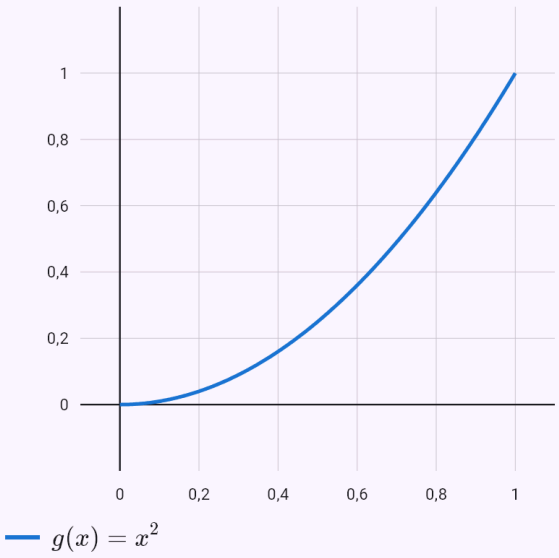
- El funcional φ(u) = ∫u·g en $C\langle 0;\,1\rangle$ con la norma del supremo: su norma es la integral de |g|, a la que se acercan funciones continuas u ≈ sgn g:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_1$$

- La norma en el espacio L⃗ para p = 1: la integral $\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$, y por tanto $\|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$
- En $L^2\langle 0;\,1\rangle$ el funcional φ(u) = ∫u·g es el producto escalar con g (teorema de Riesz). Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz su norma es ‖g‖₂, alcanzada para u = g/‖g‖₂: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1} \left| \int_0^1 u\,g\,dx \right| = \|g\|_2$
- La norma en el espacio L⃗ para p = 2: la integral $\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}$, y por tanto

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Gráfica



La función en el intervalo dado.

Un núcleo degenerado con el parámetro λ.

Enunciado: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Resultado

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Condiciones: $\lambda \neq 3$

Pasos

- Una ecuación integral de Fredholm de segunda especie (límites fijos): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\, u(t)\, dt$, el núcleo $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- El núcleo es degenerado – un producto de una función de x y una función de t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Las integrales con la función desconocida son números – las llamamos constantes desconocidas $c = \int_0^1 t\, u(t)\, dt$. La solución tiene por tanto la forma $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Al sustituir esta forma en las definiciones de las constantes obtenemos un sistema lineal con los coeficientes $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}$

$$c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$$

- El sistema tiene una única solución donde su determinante no es cero: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Sus raíces son los valores característicos del núcleo: $\lambda_1 = 3$
- Para $\lambda \neq 3$ la solución del sistema es $c = \frac{1}{3-\lambda}$, luego $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Para $\lambda_1 = 3$ la ecuación homogénea tiene soluciones no nulas – las funciones propias $\varphi_1(x) = x$
- Alternativa de Fredholm para $\lambda_1 = 3$: el sistema es incompatible ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), la ecuación no tiene solución para este λ (la función propia $\varphi(x) = x$).

Valores característicos y funciones propias.

Enunciado: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Resultado

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Pasos

- Una ecuación integral de Fredholm de segunda especie (límites fijos): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\, u(t)\, dt$, el núcleo $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- El núcleo es degenerado – una suma de 2 productos de una función de x y una función de t: $K(x,t) = t + x$
- Las integrales con la función desconocida son números – las llamamos constantes desconocidas $c_1 = \int_0^1 t\, u(t)\, dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\, dt$. La solución tiene por tanto la forma $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Al sustituir esta forma en las definiciones de las constantes obtenemos un sistema lineal con los coeficientes $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\, dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

$$c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$$
$$c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$$

- El sistema tiene una única solución donde su determinante no es cero: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Sus raíces son los valores característicos del núcleo: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Para $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ la ecuación homogénea tiene soluciones no nulas – las funciones propias $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Para $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ la ecuación homogénea tiene soluciones no nulas – las funciones propias $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Un núcleo no degenerado – serie de Neumann y método de Nyström.

Enunciado: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Resultado

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Pasos

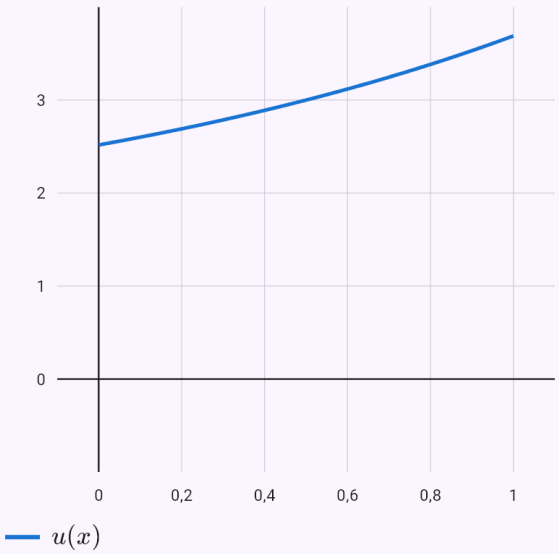
- Una ecuación integral de Fredholm de segunda especie (límites fijos): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\, dt$, el núcleo $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- El núcleo no es degenerado. La serie de Neumann – las aproximaciones sucesivas $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – converge, porque

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Método de Nyström: la integral se sustituye por una cuadratura de Gauss con 32 nodos, la ecuación en los nodos da un sistema lineal y los valores entre ellos salen de la propia ecuación.Comparando con la mitad de nodos, la precisión es de aproximadamente 10^{-8}. Los valores de la solución

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
$u(x)$	$2{,}517$	$2{,}7372$	$2{,}9997$	$3{,}3134$	$3{,}6894$

Gráfica



La solución de la ecuación integral.

Una ecuación de Volterra con la transformada de Laplace – cos x.

Enunciado: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

Resultado

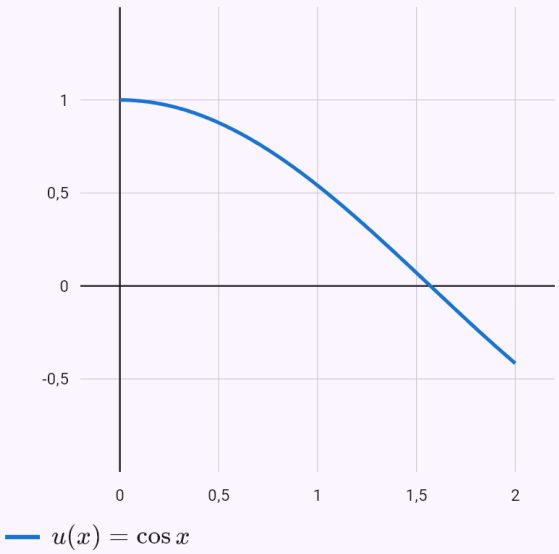
$$u(x) = \cos x$$

Pasos

- Una ecuación integral de Volterra de segunda especie (el límite superior es x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\, u(t)\, dt$, el núcleo $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- El núcleo depende solo de x − t ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – la integral es una convolución, que la transformada de Laplace convierte en un producto. Las transformadas. La ecuación para las transformadas $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\, U(s)$, de donde $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Al invertir, $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

Gráfica



La solución de la ecuación integral.

El punto fijo de cos x con las estimaciones a priori y a posteriori.

Enunciado: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Resultado

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Pasos

- El teorema del punto fijo de Banach requiere que $g(x) = \cos x$ lleve el intervalo $I = \langle 0;\ 1\rangle$ en sí mismo. Su recorrido (de los extremos y los puntos estacionarios) es $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – está dentro de I.
- La norma del supremo de una función continua en un intervalo cerrado es el mayor valor de |f|. La derivada $g''(x) = -\cos x$ no se anula dentro del intervalo; bastan los extremos.
- Los valores de |f| en esos puntos

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- El mayor de ellos es la norma del supremo

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Por el teorema del valor medio |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, con q el mayor valor de |g'|: $q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g es una contracción.
- La estimación a priori: empezamos en $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. De con $\varepsilon = 10^{-6}$ y $q = \sin 1$ se necesitan n ≥ 86 pasos.

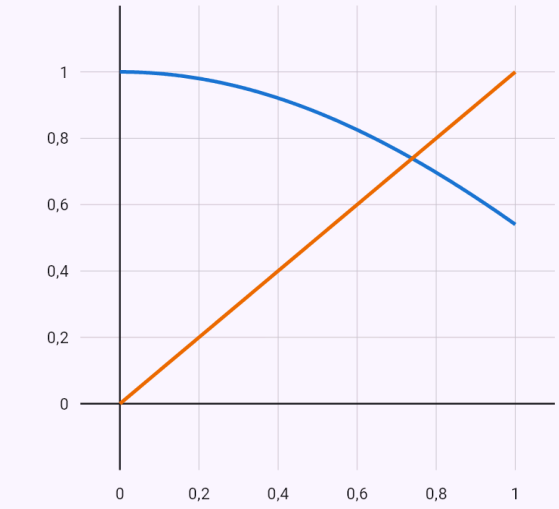
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\ln q}$$

- Iteramos $x_{n+1} = g(x_n)$; la última columna es la estimación a posteriori del error y el cálculo termina cuando baja de ε

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145 \cdot 10^{-6}$	$6{,}075 \cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710 \cdot 10^{-7}$	$4{,}092 \cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193 \cdot 10^{-7}$	$2{,}757 \cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498 \cdot 10^{-7}$	$1{,}857 \cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356 \cdot 10^{-7}$	$1{,}251 \cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587 \cdot 10^{-7}$	$8{,}426 \cdot 10^{-7}$

- El punto fijo: $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426 \cdot 10^{-7}$. Bastaron 38 pasos en lugar de los 86 de la estimación a priori – la estimación a posteriori suele ser mucho más ajustada.

Gráfica



La función g y la recta y = x – el punto fijo es su intersección.

El sistema x = Ax + b, una contracción en la norma ∞.

Enunciado: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Resultado

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Pasos

- El sistema en la forma para iterar

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- La norma de columnas es la mayor suma de valores absolutos de una columna luego

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- La norma de filas es la mayor suma de valores absolutos de una fila luego $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- La aplicación x ↦ Ax + b es una contracción si alguna norma de A es menor que 1. Tomamos la menor:

  $$q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$$

- La estimación a priori: empezamos en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. De con $\varepsilon = 10^{-6}$ y $q = 0{,}6$ se necesitan n ≥ 31 pasos.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Iteramos $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; la última columna es la estimación a posteriori del error y el cálculo termina cuando baja de ε

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- El punto fijo. Bastaron 28 pasos en lugar de los 31 de la estimación a priori – la estimación a posteriori suele ser mucho más ajustada.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Para comparar, el punto fijo exacto del sistema lineal

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Las aproximaciones de Picard y la solución exacta.

Enunciado: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Resultado

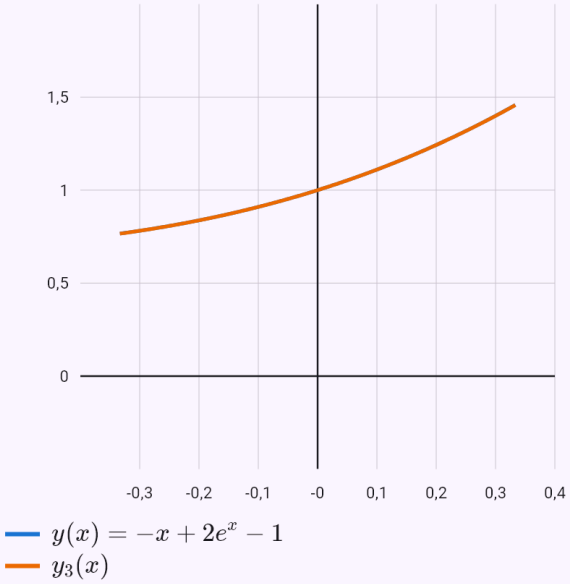
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Pasos

- El problema $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ se convierte en la ecuación integral y = T(y); las aproximaciones sucesivas de Picard iteran el operador T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Aproximación 1:
  $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Aproximación 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Aproximación 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Donde T es una contracción (teorema de Picard-Lindelöf): en el rectángulo $R: \ |x| \le 1, \ |y-1| \le 1$ se tiene $M = \max_R |f| \doteq 3$ y. En el intervalo con $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ las aproximaciones permanecen en el rectángulo y $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- La cota del error de la última aproximación para $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$

- La solución exacta para comparar: $y(x) = -x + 2e^x - 1$; el error real en el extremo del intervalo $|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Gráfica



La aproximación de Picard y la solución exacta (si se conoce).

La ecuación de Cauchy – f(x) = cx.

Enunciado: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Resultado

$$f(x) = c\,x$$

Pasos

- La ecuación funcional de Cauchy de una función aditiva: $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Suponemos que la función f es continua. Sin eso, la ecuación de Cauchy tiene también soluciones discontinuas «patológicas» (construidas con una base de Hamel).
- Sustitución: $x = y = 0:\quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Sustituir y = −x muestra que la función es impar: $y = -x:\quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Por inducción para n natural: $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Para racionales r = m/n $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Los racionales son densos y la función es continua, así que vale para todo x real: $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Todas las soluciones continuas (a, b, c constantes arbitrarias): $f(x) = c\,x$
- Comprobación por sustitución: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

La ecuación de d'Alembert – cos y cosh.

Enunciado: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Resultado

$$f(x) = 0,\quad f(x) = \cos(cx),\quad f(x) =$$

Pasos

- La ecuación funcional de d'Alembert: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Suponemos que la función f es continua. Sin eso, la ecuación de Cauchy tiene también soluciones discontinuas «patológicas» (construidas con una base de Hamel).
- Sustitución $x = y = 0:\quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\};\quad f($
- Sustituir x = 0 muestra que la función es par: $x = 0:\quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- Las soluciones continuas son suaves; derivar dos veces respecto de y en y = 0 da una ecuación diferencial $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}:\quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Según el signo de la constante k: $k = -c^2:\ \cos(cx),\qquad k = 0:\ 1,\qquad k = c^2:\ \cosh(cx)$
- Todas las soluciones continuas (a, b, c constantes arbitrarias): $f(x) = 0,\quad f(x) = \cos(cx),\quad f(x) = \cosh(cx)$
- Comprobación por sustitución: $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Limitaciones conocidas

- La aplicación halla el límite puntual de sucesiones cuyo límite decide una potencia q^n o una expresión racional en n; las más complicadas (sin nx sin dividir por n) puede rechazarlas.
- La convergencia se estudia en un intervalo cerrado y acotado; un intervalo infinito todavía no.
- El proceso de Gram–Schmidt para 6 funciones como máximo, la aproximación por un polinomio de grado 5 como máximo.
- Un núcleo degenerado de 4 términos como mucho; con un parámetro λ solo núcleos degenerados, los demás se resuelven numéricamente para un λ numérico. Una ecuación de Volterra exactamente solo con un núcleo k(x − t) desde cero o a(x)·b(t); si no, por aproximaciones sucesivas y numéricamente.
- Matrices de hasta 6 × 6, como mucho 6 aproximaciones de Picard. Ecuaciones funcionales solo de los tipos indicados (y la de Cauchy con un término polinómico adicional), siempre con soluciones continuas.

35. Funciones de variable compleja

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann de f(z) se comprueban con cr(z^2 + 3z); la función puede escribirse en z, $\bar{z}$ (conj(z)), |z|, Re z, Im z o directamente en x e y. La app descompone f = u + iv, calcula las derivadas parciales y sustituye en u_x = v_y, u_y = −v_x. Si se cumplen en todas partes, la función es analítica y el resultado es la derivada f'(z) escrita en z; si no, la app indica dónde se cumplen (puntos o una curva) y la función no es analítica. Para una función armónica harmonic(u = x^2 - y^2) halla la conjugada armónica integrando las ecuaciones y toda la función f(z) poniendo x = z, y = 0; también puede darse la parte imaginaria, harmonic(v = 2xy).

Valores de las funciones elementales en $\mathbb{C}$: el valor principal del logaritmo ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w con todos los valores que difieren en 2kπi, una potencia de exponente complejo i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh y cosh de un número complejo con las fórmulas de la suma. El argumento está en el mismo intervalo que en los números complejos (chip «Argumento principal»). Las ecuaciones sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 se resuelven con la sustitución w = e^(iz) (e^z) y una ecuación de segundo grado, e^z = 1 + i tomando logaritmos; el resultado es la solución general con k ∈ $\mathbb{Z}$ y varias soluciones en el plano complejo. Una ecuación en x sin solución real (sin x = 2) ofrece el botón de la solución compleja.

Singularidades y residuos: singularities(f) halla las raíces del denominador y las singularidades esenciales (e^(1/z), sin(1/z)), determina su tipo – evitable, polo de orden m, esencial – y calcula los residuos: en un polo simple g(a)/q'(a), en un polo de orden mayor con la derivada de (z − a)^m f(z), en una singularidad esencial con la serie de Laurent. Res(f, z = a) calcula un residuo. La serie de Laurent de una función racional en una corona laurent(f, 1 < |z| < 2) (o |z| > 1, 0 < |z − a| < r, alrededor de un punto laurent(f, z = a)) se construye con las fracciones simples sobre $\mathbb{C}$ y la serie geométrica de cada una – según su polo esté dentro o fuera de la corona. La integral sobre una circunferencia oint(f, |z − a| = r) (desde una foto \oint_{|z−a|=r}) se calcula con el teorema de los residuos; sin singularidades dentro es cero, una singularidad sobre la circunferencia se notifica.

Residuos en el análisis real: una integral impropia de una función racional sobre todo el eje, con cos ax o sin ax (lema de Jordan) y de 0 a ∞ de una función par; una integral de una función racional de cos t y sin t sobre ⟨0; 2π⟩ con z = e^(it). Las integrales con coseno o seno y sobre ⟨0; 2π⟩ van directamente por residuos, para las demás elija el chip «Por residuos» (vuelta con «Método habitual»). El mismo chip en una serie suma Σ R(n) desde 1 (desde 0 u otro entero) con el núcleo π cot πz, una serie alternada con π/sin πz; la suma sobre todos los enteros desde −∞ va directamente. La transformada inversa de Laplace de una función racional invlaplace(F) (desde una foto \mathcal{L}^{-1}\{F\}) se calcula como suma de los residuos de F(s)e^(st).

El teorema de Rouché rouche(p, |z| < r) cuenta las raíces de un polinomio en un disco por el término que domina la suma de los demás en la circunferencia, en una corona r < |z| < R como diferencia de dos discos; las raíces se muestran en el plano complejo. Una aplicación conforme w = f(z) se descompone

en u y v, la app indica dónde es conforme (f' ≠ 0) y en una transformación de Möbius (αz + β)/(γz + δ) halla los puntos fijos y las imágenes de los ejes real e imaginario y de la circunferencia unidad. El gráfico muestra la imagen de la cuadrícula de rectas x = c e y = c.

La transformada de Fourier de una función racional ftransform(1/(1 + t^2)) (desde una foto \mathcal{F}\{f\}) se calcula por residuos - para ω > 0 se cierra el camino en el semiplano inferior, para ω < 0 en el superior - y para una función par (impar) el resultado se escribe con |ω|. Para una densidad en x da la función característica de la distribución salvo el signo de ω, para la distribución de Cauchy simétrica directamente e^(−|t|). La transformada Z inversa invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) es la suma de los residuos de $F(z)z^{n-1}$ con el valor inicial x[0] = lim F(z) para z → ∞. Su uso en filtros, control y óptica está en el capítulo Aplicaciones del análisis complejo.

Cómo introducirlo

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la derivada.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	La conjugada armónica de una parte real (imaginaria).
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logaritmo, potencias, funciones trigonométricas y ecuaciones en $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Un residuo en un punto, todas las singularidades.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Una serie de Laurent en una corona o alrededor de un punto.
`oint(f, |z - a| = r)`	Una integral sobre una circunferencia con el teorema de los residuos.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Integrales reales por residuos.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	La suma de una serie por residuos.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	El número de raíces de un polinomio en un disco o una corona.
`w = (z - i)/(z + i)`	Una aplicación conforme, una transformación de Möbius.

`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	La transformada inversa de Laplace por residuos.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Transformada de Fourier por residuos.
`invz(z/(z - 1/2))`	Transformada Z inversa por residuos.

Ejemplos

Una función analítica – las ecuaciones se cumplen en todas partes, la derivada en z.

Enunciado: `cr(z^2 + 3z)`

Resultado

$$f'(z) = 2z + 3$$

Pasos

- Descomponemos la función en parte real e imaginaria, f = u + iv con z = x + iy:
  $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Las derivadas parciales de u y v respecto a x e y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Sustituimos en las ecuaciones de Cauchy-Riemann
  $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Ambas ecuaciones se cumplen en todo el plano y las derivadas parciales son continuas – la función es analítica en todo $\mathbb{C}$.
- La derivada de la función analítica, escrita en z:
  $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

Las ecuaciones solo se cumplen en la recta y = x – la función no es analítica.

Enunciado: `cr(x^2 + i y^2)`

Resultado

La función no es analítica – las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ninguna región.

Pasos

- Descomponemos la función en parte real e imaginaria, f = u + iv con z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Las derivadas parciales de u y v respecto a x e y

  $u_x = 2x,\ u_y = 0$

  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Sustituimos en las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y, u_y = -v_x$

  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$

  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Ambas ecuaciones se cumplen solo donde $2(x - y) = 0$. Allí la función es derivable, pero ningún entorno de un punto las cumple – la función no es analítica en ninguna parte.

La conjugada armónica y f(z) = z² + z.

Enunciado: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Resultado

$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$

Pasos

- Se da la parte real u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Comprobamos que es armónica – su laplaciano es cero: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- La primera ecuación de Cauchy-Riemann $v_y = u_x$ da v integrando respecto a y – la «constante» puede depender de x:

  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- Hallamos C(x) con la segunda ecuación $v_x = -u_y$:

  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- La conjugada armónica: $v = 2xy + y + C$
- Escribimos f(z) = u + iv en z – basta poner x = z e y = 0:

  $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

El valor principal del logaritmo y todos sus valores.

Enunciado: `ln(1 + i)`

Resultado

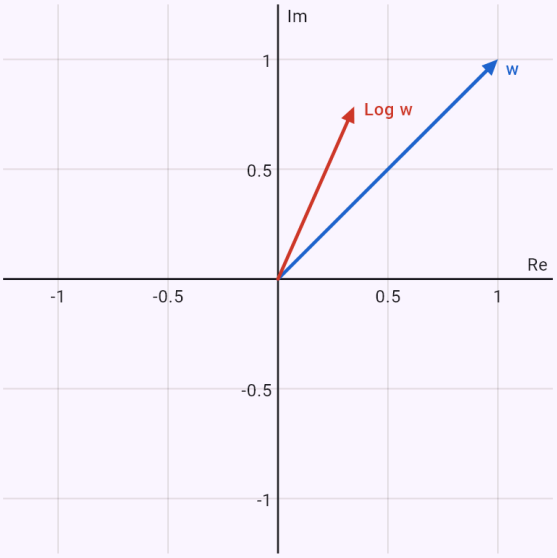
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Pasos

- El valor principal del logaritmo es $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, el argumento en $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- El módulo y el argumento principal del número: $|1+i| = \sqrt{2},\ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- La exponencial es periódica de periodo 2πi, por eso el logaritmo tiene infinitos valores – difieren en múltiplos de 2πi

  $$\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

i^i es el número real e^(−π/2).

Enunciado: `i^i`

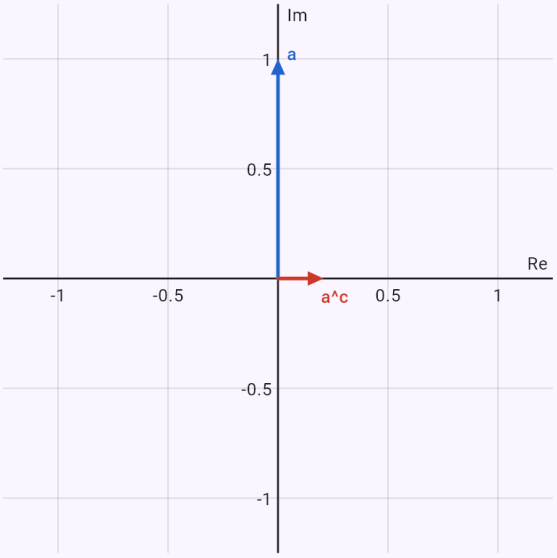
Resultado

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

Pasos

- Una potencia de exponente complejo se define mediante el valor principal del logaritmo (argumento en $\langle 0; 2\pi)$) $a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$
- Descomponemos el exponente en parte real e imaginaria: $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- El valor principal de la potencia, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Con los demás valores del logaritmo obtenemos todos los valores de la potencia: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

Gráfica



El plano complejo: los números dados en azul, el resultado en rojo, el argumento φ como arco desde el semieje real positivo.

La ecuación sin z = 2 – la sustitución w = e^(iz) y una ecuación de segundo grado.

Enunciado: `sin z = 2`

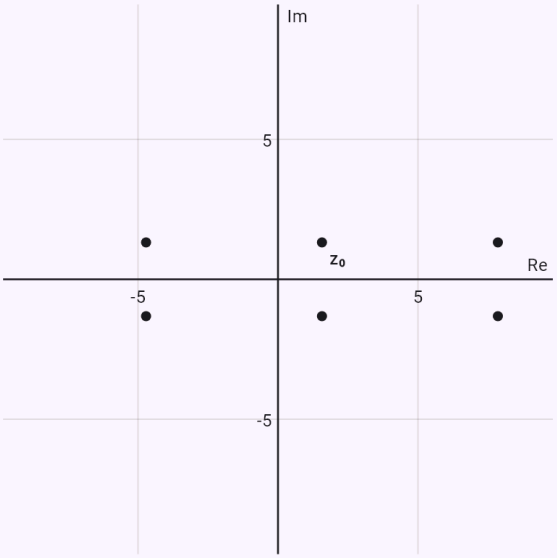
Resultado

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Escribimos la función con exponenciales y sustituimos: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Multiplicando por w obtenemos una ecuación de segundo grado: $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Sus raíces: $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Volvemos a z: $iz = \log w$, así que $z = -i \log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i \ln|w|$ (argumento en $\langle 0; 2\pi)$): $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Gráfica



Plano complejo (de Gauss) – las soluciones como puntos: en el eje horizontal la parte real, en el vertical la imaginaria.

Un polo de orden menor gracias a un cero del numerador, y un polo simple.

Enunciado: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

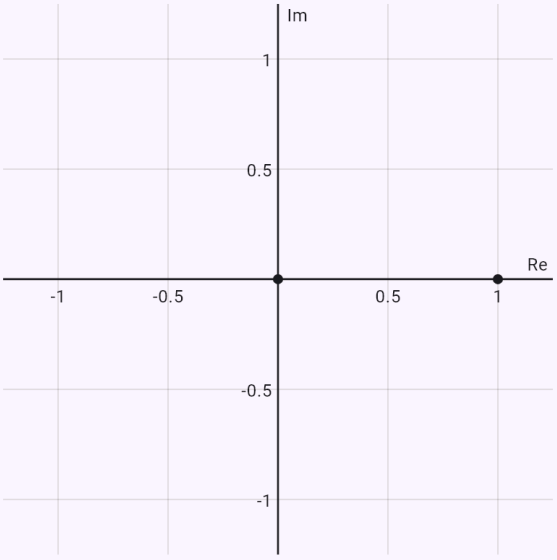
Resultado

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Pasos

- Los puntos singulares – las raíces del denominador: $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- En 0 el denominador tiene una raíz de multiplicidad 3 y el numerador de multiplicidad 1 – es un polo de orden 2
- El residuo en un polo de orden 2 $\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},$ I
- En 1 el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q $\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z^$

Gráfica



Plano complejo – los puntos singulares de la función.

Una singularidad esencial – el residuo de la serie de Laurent.

Enunciado: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Resultado

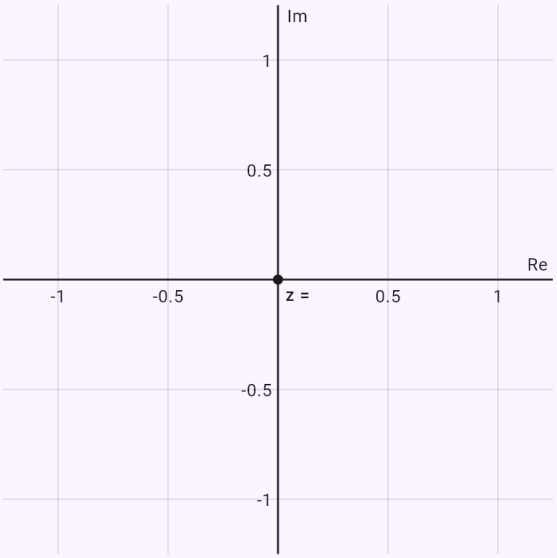
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Pasos

- En 0 hay una singularidad esencial – el exponente (argumento) tiene allí un polo y la parte principal de la serie de Laurent es infinita.
- El residuo es el coeficiente c_{-1} de $\frac{1}{z-a}$ en la serie de Laurent alrededor de 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Gráfica



Plano complejo – los puntos singulares de la función.

La serie de Laurent en la corona 1 < |z| < 2 – una fracción en potencias de 1/z, la otra en potencias de z.

Enunciado: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

Resultado

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Pasos

- Puntos singulares: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Buscamos la serie de Laurent en la corona $1 < |z| < 2$ – no contiene ningún punto singular.
- Descomponemos la función en fracciones simples (sobre $\mathbb{C}$): $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- El polo de la fracción está dentro de la circunferencia interior – sacamos $\frac{1}{z-c}$ y usamos la serie geométrica en potencias de $\frac{1}{z-c}$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

- El polo de la fracción está fuera de la corona – sacamos una constante y usamos la serie geométrica en potencias de z - c

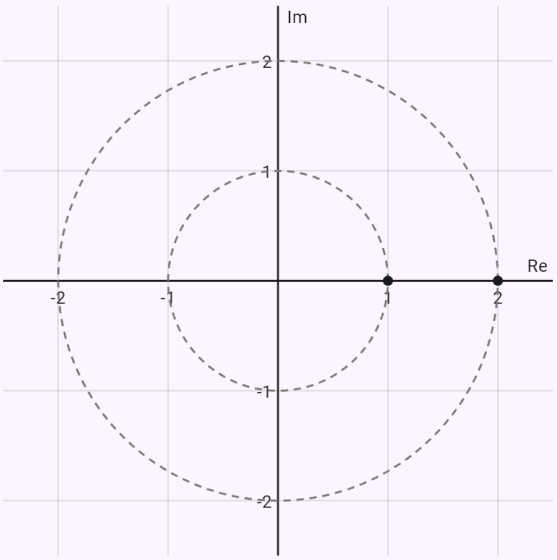
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

- Sumamos las series término a término

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$$

- El término general: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

Gráfica



Plano complejo – la corona de la serie de Laurent (a trazos) y los puntos singulares.

El teorema de los residuos en un polo de orden 2.

Enunciado: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Resultado

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^{i}$$

Pasos

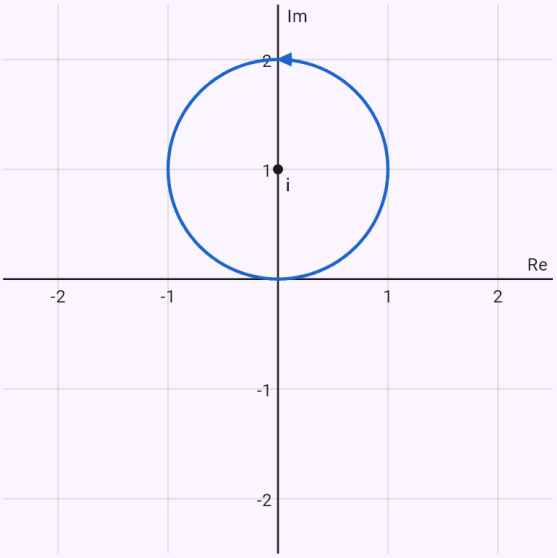
- Integramos sobre la circunferencia de centro i y radio 1, en sentido antihorario: $|z-i|=1$
- Dentro de la circunferencia están los puntos singulares $z_0 = i$, fuera $\emptyset$
- En i el denominador tiene una raíz de multiplicidad 2 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 2
- El residuo en un polo de orden 2

$$\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2 f(z)\Big], \quad (z-i)^2 f(z) = \,$$

- Por el teorema de los residuos

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i\big(e^{i}\big) = 2\pi i\, e^{i}$$

Gráfica



Plano complejo – la circunferencia de integración (la flecha indica el sentido) y los puntos singulares.

Una integral impropia con coseno – lema de Jordan.

Enunciado: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

Pasos

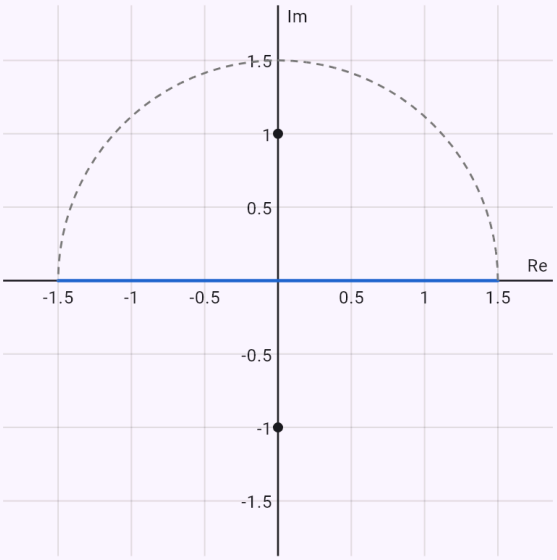
- Con un coseno o un seno basta $\deg Q \geq \deg P + 1$ y Q sin raíces reales – la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero por el lema de Jordan:
  $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- El coseno es la parte real de e^{iax}
- Cerramos el eje real con una gran semicircunferencia en el semiplano superior. Dentro están los polos $z_0 = i$, la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero.
- En i el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$$

- Por el teorema de los residuos la integral es 2πi por la suma de los residuos del semiplano superior:

$$2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$$

Gráfica



Plano complejo – el eje real cerrado por una semicircunferencia en el semiplano superior (a trazos) y los polos del integrando.

Una integral sobre ⟨0; 2π⟩ como integral sobre la circunferencia unidad.

Enunciado: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

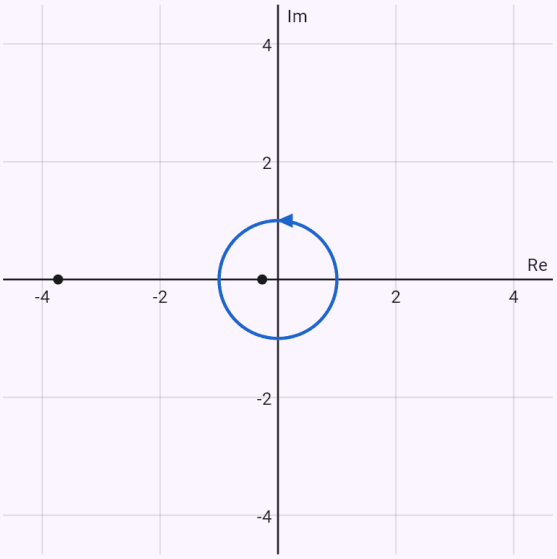
Resultado

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Pasos

- Convertimos la integral sobre ⟨0; 2π⟩ en una integral sobre la circunferencia unidad con la sustitución
  $z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$
- Tras sustituir y simplificar obtenemos la integral de una función racional sobre |z| = 1: $\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$
- Dentro de la circunferencia están los puntos singulares $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, fuera $z_0 = -2 - \sqrt{3}$
- En $-2 + \sqrt{3}$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q
  $\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3},\quad g =$
- Por el teorema de los residuos
  $\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i\left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Gráfica



Plano complejo – la circunferencia unidad z = e^(it) y los polos del integrando.

Σ 1/n² = π²/6 – el residuo en cero, donde también el núcleo tiene un polo.

Enunciado: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Por residuos

Resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Cálculo de la integral o la suma

Método habitual ✓ Por residuos

Pasos

- La función π cot πz tiene en cada entero n un polo simple de residuo 1. La integral sobre un cuadrado grande tiende a cero, así que la suma de la serie es menos la suma de los residuos en los polos de R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \cot \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- La condición $\deg Q \geq \deg P + 2$ se cumple: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Los puntos singulares – las raíces del denominador: $z^2 = 0:\ z_0 = 0$
- En 0 tienen polo tanto R como el núcleo – el residuo es el coeficiente de 1/z de su producto

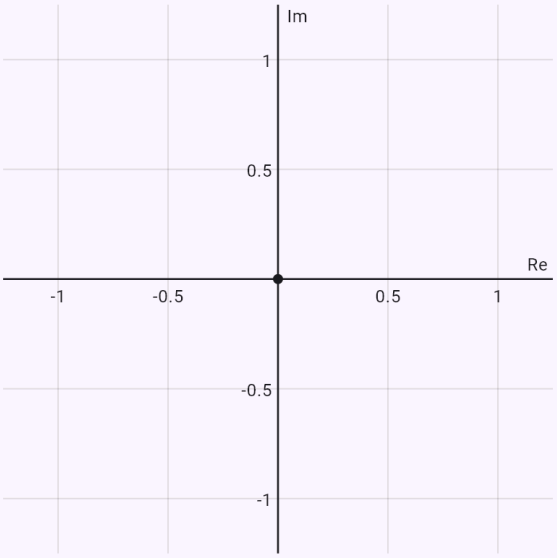
$$\pi \cot \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- La suma sobre todos los enteros:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R es par, R(−n) = R(n), así que la suma desde 1 es la mitad (sin el término n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Gráfica



Plano complejo – los polos de R(z); el núcleo π cot πz tiene además polos en todos los enteros.

Teorema de Rouché – cuatro raíces en la corona 1 < |z| < 2.

Enunciado: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

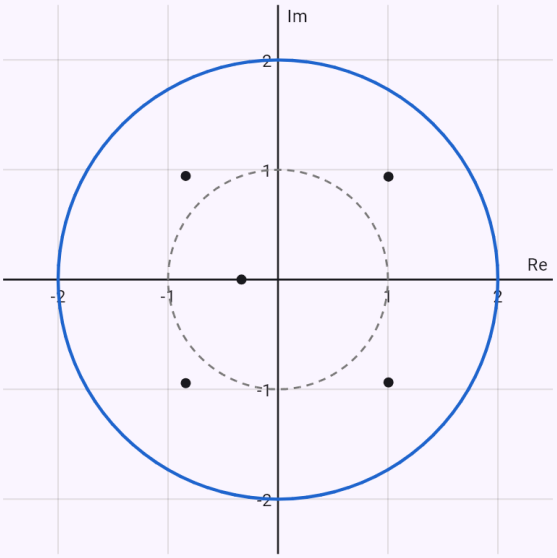
Resultado

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Pasos

- En la circunferencia |z| = 2 el término z^5 domina la suma de los demás – por el teorema de Rouché el polinomio tiene en el disco tantas raíces como z^5, es decir 5:
  $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32,\quad 32 > 7$
- En la circunferencia |z| = 1 el término $3z$ domina la suma de los demás – por el teorema de Rouché el polinomio tiene en el disco tantas raíces como $3z$, es decir 1:
  $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1,\quad 3 > 2$
- En la corona es la diferencia de los números en el disco mayor y en el menor: $5 - 1 = 4$
- Las raíces numéricamente, como comprobación
  $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Gráfica



Plano complejo – las circunferencias y las raíces del polinomio (calculadas numéricamente).

Una transformación de Möbius – el semiplano superior en el disco unidad.

Enunciado: `w = (z - i)/(z + i)`

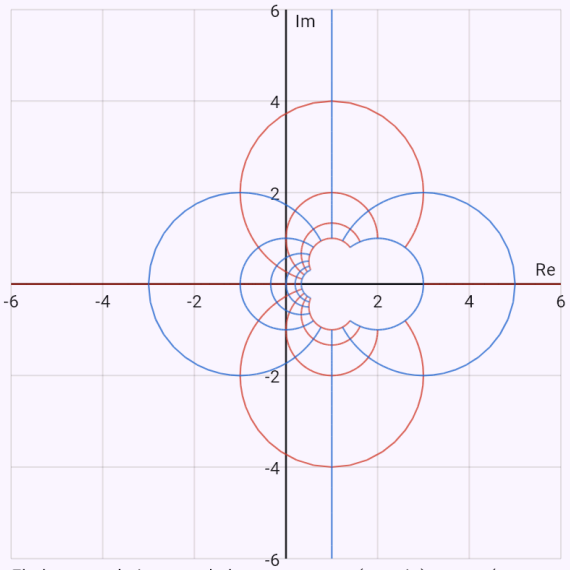
Resultado

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Pasos

- Escribimos la aplicación por componentes
  $w = u + iv,\quad u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- La aplicación es conforme en todas partes salvo en el polo $z_0 = -i$: $f'(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- Es una transformación de Möbius $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
  $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Los puntos fijos resuelven la ecuación f(z) = z
  $z^2 + (-1 + i)z + i = 0:\ z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- El eje real se transforma en $|w| = 1$
- El eje imaginario se transforma en $\operatorname{Im} w = 0$
- La circunferencia unidad se transforma en $\operatorname{Re} w = 0$
- El gráfico muestra la imagen de una cuadrícula – las rectas x = c (en rojo) e y = c (en azul) para |c| ≤ 2 con paso $0{,}5$

Gráfica



El plano w – la imagen de las rectas x = c (en rojo) e y = c (en azul) por w = f(z).

La transformada inversa de Laplace como suma de residuos.

Enunciado: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Resultado

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Pasos

- La transformada inversa de Laplace de una función racional es la suma de los residuos de $F(s)\,e^{st}$ en todos los polos de F

  $$f(t) = \sum \operatorname{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Los puntos singulares – las raíces del denominador: $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0:\ s_1 = -1,\ s_2 = -2i,\ s_3 = 2i$
- En -1 el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- En $-2i$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

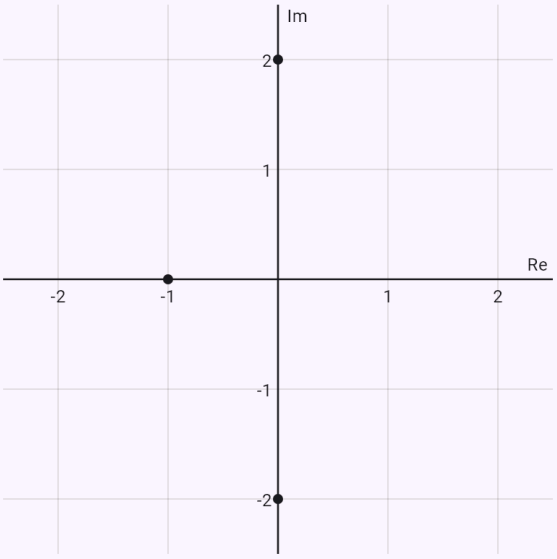
  $$\operatorname{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- En $2i$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Sumamos los residuos y escribimos el resultado en forma real: $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Gráfica



Plano complejo – los polos de F(s).

Transformada de Fourier de la función de Lorentz: π·e^(−|ω|).

Enunciado: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Resultado

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Pasos

- Transformada de Fourier de una función racional: cerramos la integral con una semicircunferencia grande (lema de Jordan) y sumamos los residuos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Los puntos singulares – las raíces del denominador: $t^2 + 1 = 0:\ t_1 = -i,\ t_2 = i$
- En $-i$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw},\ q' =$$

- En i el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw},\ q' = 2t$$

- Para ω > 0 cerramos el camino en el semiplano inferior (sentido negativo, −2πi)

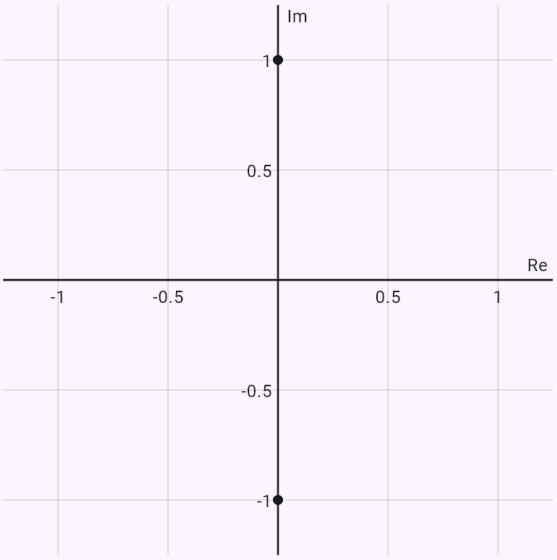
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Para ω < 0 cerramos el camino en el semiplano superior (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Resultado - la transformada de Fourier: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Gráfica



Plano complejo – los polos de F(s).

Función característica de la distribución de Cauchy e^(−|t|).

Enunciado: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Resultado

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Pasos

- Transformada de Fourier de una función racional: cerramos la integral con una semicircunferencia grande (lema de Jordan) y sumamos los residuos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Los puntos singulares – las raíces del denominador: $\pi x^2 + \pi = 0:\ x_1 = -i,\ x_2 = i$
- En $-i$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx},\ q$$

- En i el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 – es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx},\ q' = 2$$

- Para ω > 0 cerramos el camino en el semiplano inferior (sentido negativo, −2πi)

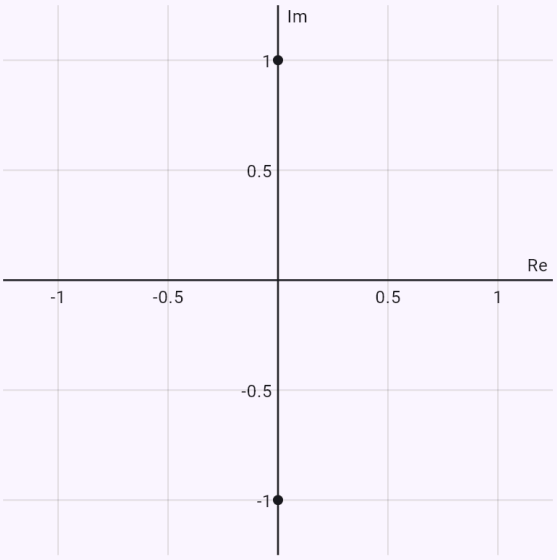
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k < 0} \operatorname{Res} = e^{-\omega}$$

- Para ω < 0 cerramos el camino en el semiplano superior (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} x_k > 0} \operatorname{Res} = e^{\omega}$$

- Resultado - la transformada de Fourier: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Gráfica



Plano complejo – los polos de F(s).

Transformada Z inversa con dos polos: x[n] = 2 − 2^{-n}.

Enunciado: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Resultado

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Pasos

- La transformada Z inversa es la suma de los residuos de $F(z)z^{n-1}$ en los polos de F

$$x[n] = \sum \operatorname{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Los puntos singulares − las raíces del denominador: $2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- En $\frac{1}{2}$ el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 − es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

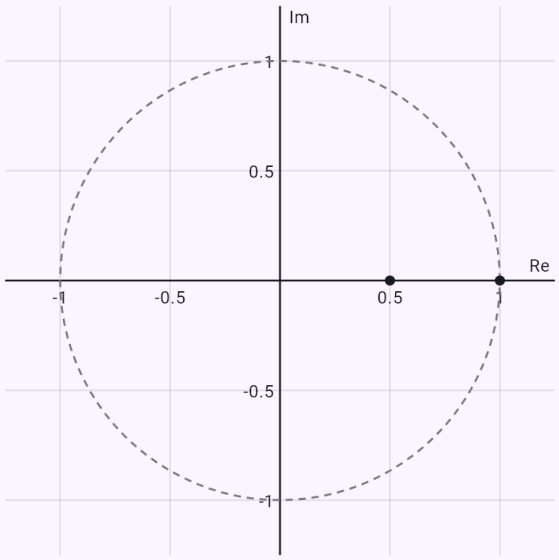
$$\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- En 1 el denominador tiene una raíz de multiplicidad 1 y el numerador de multiplicidad 0 − es un polo de orden 1
- El residuo en un polo simple, f = g/q

$$\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- El valor inicial es el límite para z → ∞: $x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Sumamos los residuos: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Gráfica



Plano complejo − los polos de F(s).

Limitaciones conocidas

- Las singularidades se hallan en funciones con un polinomio en el denominador (y las singularidades esenciales de e^h, sin h, cos h); un denominador como sin z (infinitos polos) aún no se admite.
- La serie de Laurent en una corona funciona con funciones racionales, en una singularidad esencial solo alrededor del punto si la función no tiene otra singularidad.
- Las integrales sobre otras curvas que una circunferencia (cuadrado, elipse), el valor principal de una integral con un polo en el eje y el principio del argumento general aún no se admiten.
- La suma de una serie desde 1 por residuos requiere una función racional R par; no se admiten polos de R en enteros distintos de cero.
- Una aplicación conforme muestra la imagen de una cuadrícula; la imagen de una región dada (semiplano, banda) solo para los ejes y la circunferencia unidad de una transformación de Möbius.
- La transformada de Fourier funciona con funciones racionales sin polos en el eje real, la transformada Z inversa con funciones racionales sin polo en cero.

36. Ecuaciones diferenciales

La aplicación resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: de variables separables, lineales, exactas, homogéneas ($y' = f(y/x)$), de Bernoulli y ecuaciones $y' = f(ax + by + c)$. Reconoce el tipo por sí misma y muestra el procedimiento como en la escuela – separación de variables, variación de la constante o factor integrante, sustitución, función potencial de una ecuación exacta. Las integrales del procedimiento tienen sus propios pasos. Comprueba la solución: sustituye la solución y su derivada en la ecuación y lleva ambos lados a la misma forma.

Órdenes superiores: ecuaciones lineales con coeficientes constantes de cualquier orden mediante la ecuación característica (también raíces múltiples y complejas), una solución particular según el lado derecho especial (también resonancia y suma de lados derechos) o por variación de constantes, un problema de valor inicial en cero también con la transformada de Laplace (chip «Método»). Además la ecuación de Euler con $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ integrando sucesivamente y la reducción del orden – cuando falta y ($p = y'$) o x ($y' = p(y)$).

La ecuación $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ se vuelve lineal con la sustitución $z = \ln y$. Una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables se resuelve si se puede adivinar una solución (x^k, e^{cx}, …): la segunda, reduciendo el orden (d'Alembert), y el lado derecho por variación de constantes. El orden se reduce también en más de uno ($p = y^{(m)}$ con una ecuación de segundo orden para p). Con parámetros se distinguen casos: un oscilador amortiguado según el signo de $\delta^2 - \omega^2$ (sobreamortiguado, crítico, subamortiguado), una resonancia ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ para $\omega = 2$) y el signo de una constante del que depende la integral ($y'' = 2yy'$). La transformada de Laplace resuelve también un problema de valor inicial en un punto distinto de 0 (desplazando $\tau = t - t_0$) y con parámetros.

Una ecuación de Riccati $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ se resuelve cuando se conoce una solución particular y_1: dada en la línea siguiente (y1 = 1/x) o adivinada de forma sencilla (una constante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a). La sustitución $y = y_1 + 1/z$ la convierte entonces en lineal. Ecuaciones no lineales en y': la de Clairaut $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – las rectas $y = Cx + \psi(C)$ y la solución singular (su envolvente) – y la de Lagrange $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ con una solución paramétrica (el parámetro $p = y'$).

El resultado es la solución general con una constante C, en órdenes superiores con constantes C_1, C_2, … (explícita, o implícita donde no puede ser explícita); con condiciones, la solución que las cumple – iniciales y de contorno, incluidos los casos «sin solución» e «infinitas soluciones». También encuentra las soluciones constantes perdidas al dividir. Cada solución se comprueba sustituyéndola en la ecuación. En primer orden la gráfica muestra el campo de direcciones y soluciones para distintos C, en órdenes superiores soluciones para distintas constantes; en una ecuación autónoma de segundo orden (sin x) un selector muestra también el plano de fases (y, y'). Debajo del gráfico puede introducir valores propios de las constantes y añadir su curva; el interruptor «Curvas predeterminadas» oculta las que eligió la aplicación. Al tocar el gráfico se dibuja la solución que pasa por ese punto; en una ecuación

lineal de segundo orden, además, ajusta con un control deslizante la pendiente de la tangente en el punto.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, también dx/dt) mediante los valores y vectores propios de la matriz – reales, complejos y dobles – con las condiciones iniciales x(0), y(0). El punto estacionario [0; 0] se clasifica (nodo, silla, foco, centro) y se muestra el plano de fases.

La oscilación de una ecuación lineal de 2.º orden (toda solución tiene infinitos ceros) la estudia el comando oscillation(y" + x y = 0), también para una ecuación en forma autoadjunta (x y')' + y/x = 0 o con y′ (la aplicación la lleva a esa forma). El procedimiento: de forma exacta para q constante y la ecuación de Euler y″ + (k/x²)y = 0 con la frontera k = 1/4, los criterios de Leighton–Wintner y Kneser (en el caso crítico también la comparación con la ecuación de Riemann-Weber), la sustitución de Riccati w = r y′/y, la transformación de Prüfer y el recuento numérico de ceros en un intervalo (después de un punto y coma: ; ⟨1; 50⟩) con la estimación de Sturm de su distancia. Una ecuación semilineal (|y'| y')' + q |y| y = 0 (en general el exponente |y'|^(p−2)) se juzga con la constante crítica ((p − 1)/p)^p, el análogo discreto Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (también Δ(r_n Δy_n)) por sus ceros generalizados. La gráfica muestra la solución con sus ceros y el ángulo de Prüfer φ.

La asintótica de las soluciones de una ecuación no lineal con p-laplaciano (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y con a, b positivas la estudia la orden asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (en checo también asymptotika(...)); |y'|^k y' y |y|^k y se pueden escribir también con sgn, como potencia impar (y')³, y³, y para α = 1 como (a y')' o y". Las soluciones se dividen en las clases M^+ (|y| crece) y M^- (|y| decrece) según los límites de y y de la cuasiderivada y^[1] = a|y′|^α sgn y′. En una ecuación semilineal (β = α) la aplicación calcula las integrales J_1, J_2, Y_1, Y_2 (con Symja o, si no, comparando el comportamiento potencial y logarítmico), determina uno de los casos C1–C8 y las clases no vacías según el teorema 3.1 de Z. Došlá y M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), y muestra la ecuación recíproca. En una ecuación de tipo Emden-Fowler con β ≠ α usa los teoremas de M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): caso superlineal y sublineal, soluciones fuerte y débilmente crecientes y regularmente decrecientes. El gráfico muestra soluciones numéricas de las clases no vacías (M^- por disparo) y debajo sus cuasiderivadas. El inicio del intervalo se indica tras un punto y coma (; x ≥ 1). En una ecuación con q negativo, la oscilación ofrece el chip Asintótica de las soluciones y la asintótica, a su vez, el chip Oscilación de la ecuación.

Cómo introducirlo

`y' = x*y`	La derivada con prima.

`dy/dx = x y^2`	Notación de Leibniz – indica también la variable (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Notación de una foto.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	La forma M dx + N dy = 0 (ecuación exacta).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Una condición inicial tras una coma o en la línea siguiente.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	La función y la variable pueden ser cualquier letra.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Una solución particular conocida de una ecuación de Riccati en la línea siguiente (o tras un punto y coma).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Una ecuación de orden superior – las derivadas con más primas.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Derivadas superiores como y^{(4)} (también desde una foto).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Condiciones iniciales y(0), y′(0) – o de contorno en distintos puntos.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Los puntos de Newton (derivadas respecto al tiempo t) y parámetros griegos.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Un sistema de dos ecuaciones lineales – tras una coma o en líneas, con las condiciones x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oscilación de una ecuación de 2.º orden, opcionalmente con un intervalo para los ceros.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Una ecuación semilineal (aquí p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	El análogo discreto – una recurrencia lineal de 2.º orden.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asintótica de las soluciones de una ecuación con p-laplaciano, opcionalmente con el inicio del intervalo.

Ejemplos

Variables separables – la solución general y el campo de direcciones.

Enunciado: `y' = x*y`

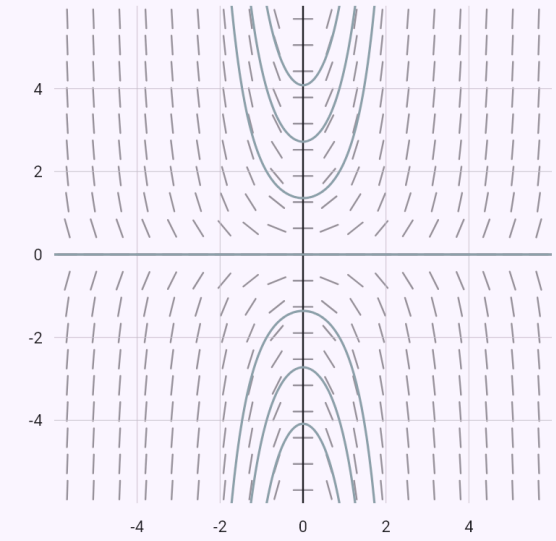
Resultado

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = xy$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Integramos ambos lados: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La solución general en forma implícita: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- La solución constante $y = 0$, excluida al dividir, está en la solución general para C = 0
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Gráfica



soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

La condición inicial determina la constante C.

Enunciado: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Resultado

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolver con un método numérico:

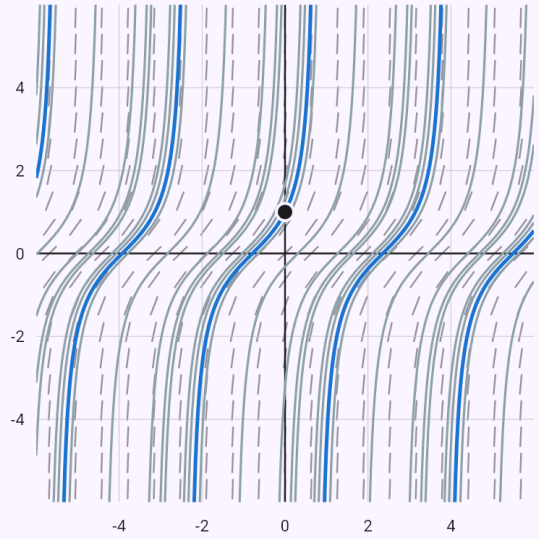
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Pasos

- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = y^2 + 1$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Integramos ambos lados: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1\,dx = x$
- La solución general en forma implícita: $\arctan y = x + C$
- Despejamos la solución: $y = \tan(x + C)$
- Sustituimos la condición inicial $y(0) = 1$: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente $\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación y simplificamos con la identidad $1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; ambos lados son iguales

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes. Resaltada está la solución de la condición inicial; el punto es la condición inicial.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C | + Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

Una ecuación lineal por variación de la constante.

Enunciado: `y' + 2y = e^x` Variación de la constante

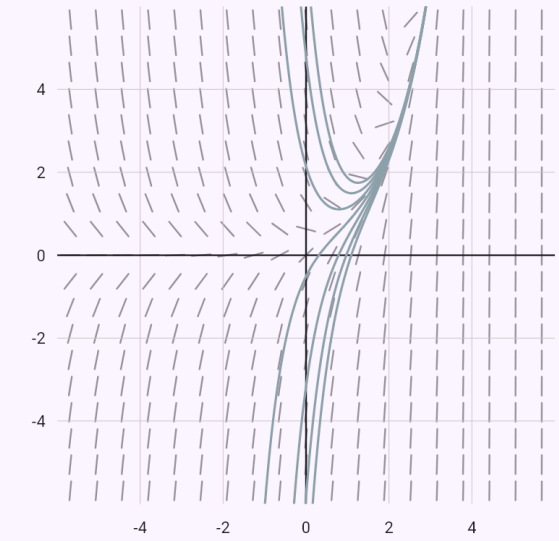
Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación lineal de primer orden y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y' + 2y = 0$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2\,dx = 2x$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $y = C(x)\,e^{-2x}$; sustituida en la ecuación: $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- De ahí $C'(x) = e^{3x}$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solución general: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Gráfica



soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

La misma ecuación con factor integrante.

Enunciado: `y' + 2y = e^x` Factor integrante

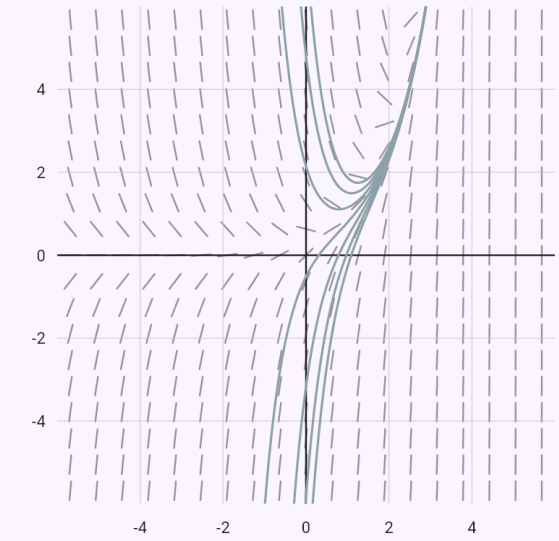
Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación lineal de primer orden y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2\,dx = 2x$
- El factor integrante: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Multiplicamos por el factor integrante – el lado izquierdo es la derivada de un producto: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos ambos lados: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solución general: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Gráfica



soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

Una ecuación homogénea – la sustitución u = y/x.

Enunciado: `y' = (x - y)/(x + y)`

Resultado

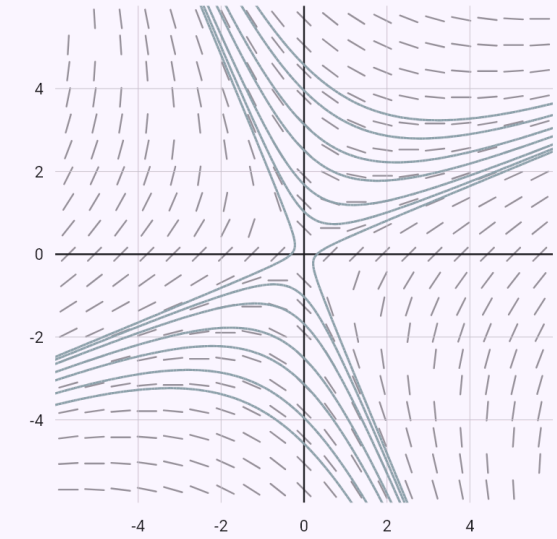
$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación homogénea – el lado derecho depende solo del cociente y/x: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- La sustitución $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ transforma la ecuación en $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Integramos ambos lados: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- El numerador es la derivada del denominador (o un múltiplo), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, por la fórmula $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$

  $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- La solución general en forma implícita: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Aplicamos la exponencial – la constante ±e^C se llama de nuevo C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- La solución constante $u = -1 - \sqrt{2}$, excluida al dividir, está en la solución general para C = 0
- La solución constante $u = -1 + \sqrt{2}$, excluida al dividir, está en la solución general para C = 0
- Volvemos a la incógnita original: $\dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- La solución general en forma implícita: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Gráfica



soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

Una ecuación de Bernoulli – la sustitución z = y^(1−n) y la solución constante y = 0.

Enunciado: `xy' - y = -xy^2`

Resultado

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Pasos

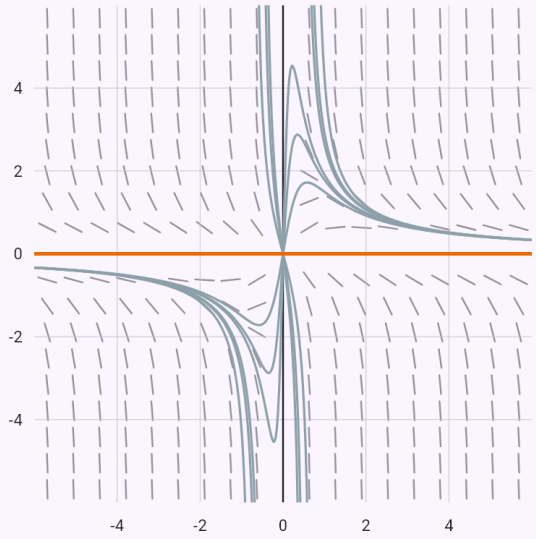
- Una ecuación de Bernoulli y' + p(x)·y = q(x)·yⁿ: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- La sustitución $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ transforma la ecuación en $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solución de la ecuación homogénea: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; sustituida en la ecuación: $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$
- De ahí $C'(x) = x$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Integramos: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- La solución general: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Volvemos a la incógnita original: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Despejamos la solución: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Al dividir excluimos la solución constante $y = 0$ – es otra solución de la ecuación.
- Renombramos la constante (un múltiplo de una constante arbitraria es de nuevo una constante arbitraria): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2 + C - x \cdot 2x}{\left(x^2 + C\right)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = 0$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

Una ecuación exacta – la función potencial F(x, y) = C.

Enunciado: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

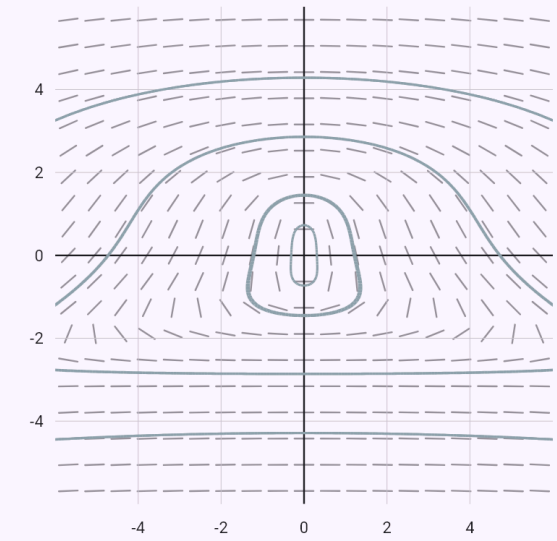
Resultado

$$y^4 + x^2 y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación M dx + N dy = 0 – comprobamos si es exacta (el lado izquierdo es una diferencial total): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; la ecuación es exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- La integral de una suma es la suma de las integrales: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- La función potencial F integrando M respecto a x: $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2 y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- De ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- La solución general en forma implícita: $y^4 + x^2 y + 3x^2 = C$

Gráfica



soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

La sustitución z = x − y; Symja perdería aquí un factor 2, la app comprueba el resultado.

Enunciado: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Resultado

$$y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$$

Resolver con un método numérico:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Pasos

- El lado derecho es función de ax + by + c − lo tomamos como nueva incógnita: $y' = \cos(x-y)$
- La sustitución $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ transforma la ecuación en $z' = 1 - \cos z$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $1 - \cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Integramos ambos lados: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- No sirve ninguna sustitución más sencilla: sustitución universal $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Volvemos a la variable original: $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right):\quad -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- La solución general en forma implícita: $-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Despejamos la solución: $z = 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- Al dividir excluimos la solución constante $z = 0$ − es otra solución de la ecuación.
- Volvemos a la incógnita original: $y = x - 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- Renombramos la constante (un múltiplo de una constante arbitraria es de nuevo una constante arbitraria): $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x + C)$
- Sustituimos la condición inicial $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$
- Comprobación − la derivada de la solución $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente

  $$(2\,\operatorname{arccot}(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{2}{x^2+2}$$
- Sumamos y simplificamos

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos(x - (x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)))$$

Una ecuación de Riccati: la solución particular $y_1 = -2/x$ adivinada, la sustitución $y = y_1 + 1/z$.

Enunciado: `y' = y^2 - 2/x^2`

Resultado

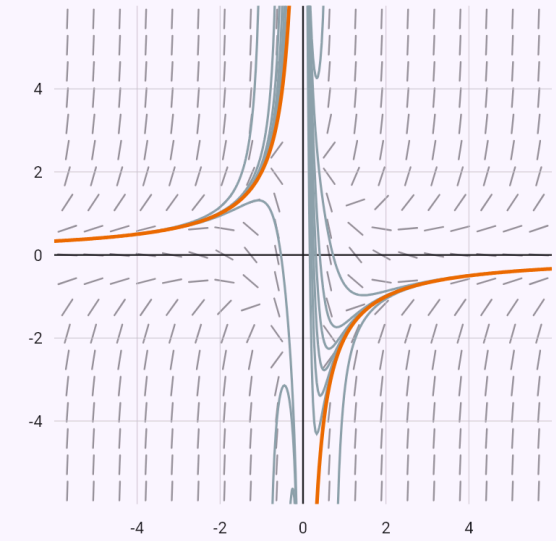
$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Pasos

- Una ecuación de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Sin una solución particular, una ecuación de Riccati no se puede resolver. Intentamos adivinar una de forma sencilla (una constante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a): $y_1 = -\frac{2}{x}$ satisface la ecuación: $y_1' = \frac{2}{x^2}$, y al sustituirla en el lado derecho se obtiene lo mismo.
- La sustitución $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ transforma la ecuación en $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solución de la ecuación homogénea: $z_h = Cx^4$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $z = C(x)\cdot x^4$; sustituida en la ecuación: $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- De ahí $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Integramos: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- La solución general: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Volvemos a la incógnita original: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- La propia solución $y = -\frac{2}{x}$ se pierde con la sustitución y = y₁ + 1/z (corresponde a z → ∞); la añadimos al resultado.

- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente $\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales $\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = -\frac{2}{x}$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

La misma ecuación con la solución particular dada $y_1 = 1/x$.

Enunciado: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Resultado

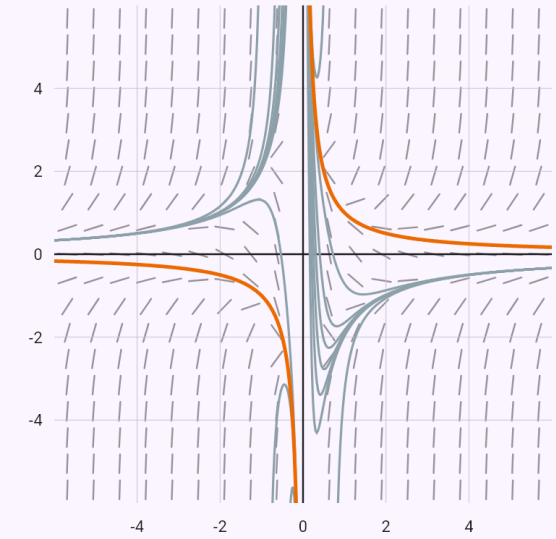
$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Pasos

- Una ecuación de Riccati y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- La solución particular dada $y_1 = \frac{1}{x}$ satisface la ecuación: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, y al sustituirla en el lado derecho se obtiene lo mismo.
- La sustitución $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ transforma la ecuación en $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Solución de la ecuación homogénea: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; sustituida en la ecuación: $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- De ahí $C'(x) = -x^2$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Integramos: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- La solución general: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Volvemos a la incógnita original: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- La propia solución $y = \frac{1}{x}$ se pierde con la sustitución y = y_1 + 1/z (corresponde a z → ∞); la añadimos al resultado.

- Comprobación – la derivada de la solución $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = \frac{1}{x}$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C

+ Añadir curva

Toque el gráfico: se dibuja la solución que pasa por ese punto.

Una ecuación de Clairaut: las rectas y = Cx + C² y su envolvente y = −x²/4.

Enunciado: `y = xy' + y'^2`

Resultado

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Pasos

- Una ecuación de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Sea $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Derivamos la ecuación respecto de x (p = y' depende de x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Si p' = 0, p es constante y la solución general son rectas: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- El otro factor x + ψ'(p) = 0 da la solución singular, la envolvente de todas esas rectas. En forma paramétrica $x = -2p,\ y = -p^2$; eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Las rectas grises son las soluciones para distintos valores de C; en color, la solución singular: su envolvente, a la que toca cada recta.

Por el punto [2; −1] de la envolvente pasa una sola recta, y = 1 − x, y la propia envolvente.

Enunciado: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Resultado

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Pasos

- Una ecuación de Clairaut y = x·y' + ψ(y'). Sea $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Derivamos la ecuación respecto de x (p = y' depende de x, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Si p' = 0, p es constante y la solución general son rectas: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- El otro factor x + ψ'(p) = 0 da la solución singular, la envolvente de todas esas rectas. En forma paramétrica $x = -2p,\ y = -p^2$; eliminando p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Sustituimos la condición inicial $y(2) = -1$: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Gráfica



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

En color, las soluciones que pasan por el punto dado: rectas y, en su caso, la envolvente.

Una ecuación de Lagrange: la solución en forma paramétrica y la recta y = 0.

Enunciado: `y = 2xy' + y'^2`

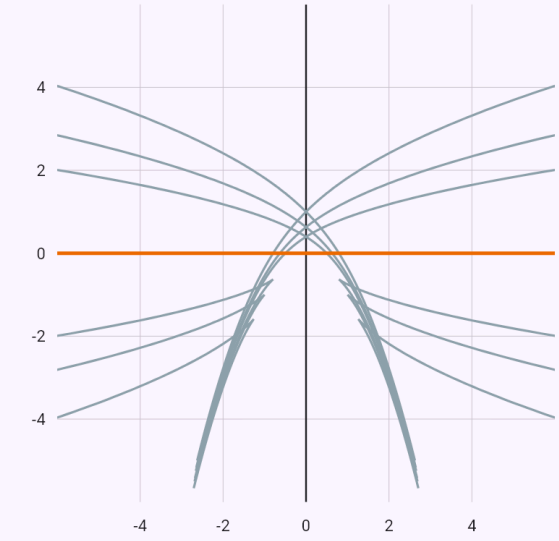
Resultado

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p},\quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación de Lagrange y = x·φ(y') + ψ(y'). Sea $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Derivamos la ecuación respecto de x (p = y' depende de x): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Buscamos x como función de p: despejamos dx/dp, y la ecuación es lineal en la incógnita x: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Una ecuación lineal de primer orden y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Solución de la ecuación homogénea: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $x = C(p)\cdot\frac{1}{p^2}$; sustituida en la ecuación: $C'(p)\cdot\frac{1}{p^2} = -2$
- De ahí $C'(p) = -2p^2$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Integramos: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- La solución general: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Renombramos la constante (un múltiplo de una constante arbitraria es de nuevo una constante arbitraria): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Sustituyendo x en la ecuación dada obtenemos la solución general en forma paramétrica (parámetro p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Hemos dividido entre p − φ(p), dejando fuera los valores para los que $p = 2p$. Cada uno de ellos da una recta que también satisface la ecuación: $y = 0$

Gráfica



soluciones para distintos C

$y = 0$

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

La ecuación característica con raíces complejas −2 ± 3i.

Enunciado: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Resultado

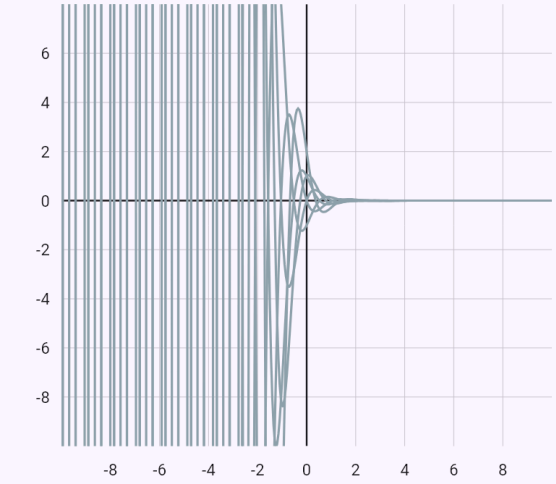
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- El discriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; las raíces: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- La solución general: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Gráfica

Soluciones | Plano de fases



soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C_1 | C_2 | + Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

Lado derecho especial con resonancia – 2 es raíz de la ecuación característica.

Enunciado: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Lado derecho especial

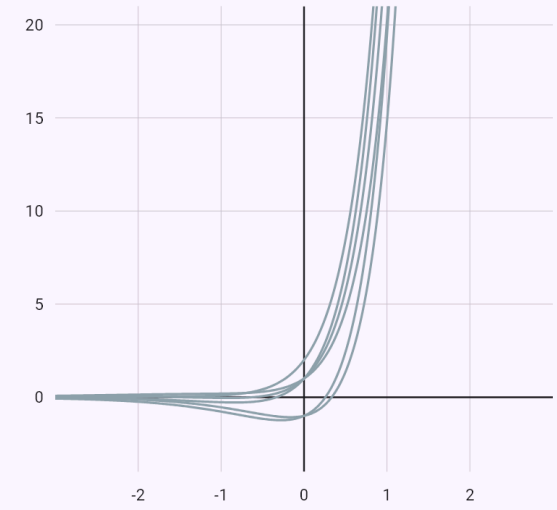
Resultado

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; las raíces: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- El lado derecho $3e^{2x}$ tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por x: $y_p = Axe^{2x}$
- Las derivadas: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $A = 3$
- Una solución particular: $y_p = 3xe^{2x}$
- La solución general: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Gráfica



soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C₁ | C₂ | + Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

El lado derecho tan x no es especial – variación de constantes y el wronskiano.

Enunciado: `y'' + y = tan x`

Resultado

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + y = \tan x$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' + y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variación de constantes – buscamos la solución como $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, las derivadas de las funciones C_k cumplen el sistema

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$

- El determinante del sistema (el wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- De ahí $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- De ahí $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = -\int \sin x \cdot \tan x \, dx$
- La función es impar respecto al coseno: sustitución $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{}$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int -1 \, dt = -t$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\dfrac{1}{2(t-1)} \, dt = -\dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t-1} \, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \dfrac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$
- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int \dfrac{1}{2(t+1)} \, dt = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t+1} \, dt$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \dfrac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$
- Volvemos a la variable original

$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea):

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Una solución particular:

$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- La solución general

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrales de la variación de constantes que no se expresan con funciones elementales: una solución

con integral.

Enunciado: `y'' + y' + y = tan x`

Resultado

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + y' + y = \tan x$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' + y' + y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- El discriminante $D = 1^2 - 4 = -3$; las raíces: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

- Solución de la ecuación homogénea

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

- Variación de constantes – buscamos la solución como las derivadas de las funciones C_k cumplen el sistema

$$y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- El determinante del sistema (el wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- De ahí

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- De ahí

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea)

$$C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\, dx$$

- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea)

$$C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\, dx$$

- Estas integrales no se pueden expresar con funciones elementales (llevan a funciones superiores, no elementales), así que la solución las deja como integrales

$$\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\, dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$$

- La solución general

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Un problema de valor inicial – un sistema para las constantes C_1, C_2.

Enunciado: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Resultado

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

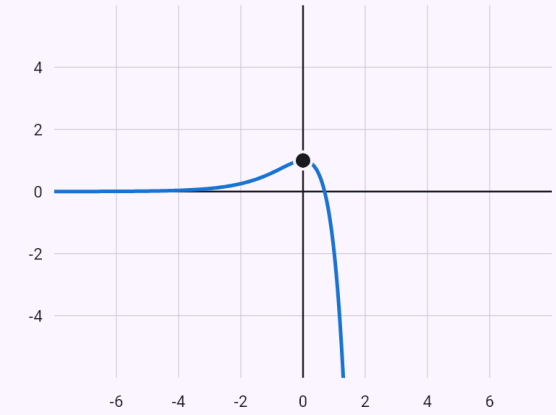
Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- El discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; las raíces: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{3x}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
- El lado derecho e^{2x} tiene forma especial; el número 2 no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $y_p = Ae^{2x}$
- Las derivadas: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $-A = 1$
- De donde $A = -1$
- Una solución particular: $y_p = -e^{2x}$
- La solución general: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Las derivadas de la solución general: $y' = C_1 e^{x} - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Las condiciones dan el sistema de donde $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- La solución que cumple las condiciones dadas: $y = 2e^{x} - e^{2x}$

Gráfica



$y = 2e^{x} - e^{2x}$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Valores propios de las constantes

C_1	C_2	+ Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

El mismo problema con la transformada de Laplace.

Enunciado: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Transformada de Laplace

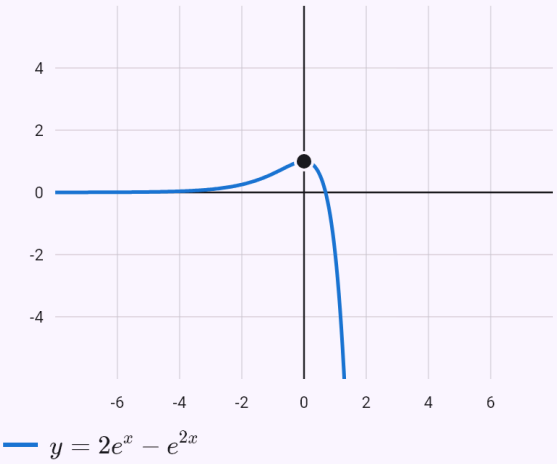
Resultado

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformada de Laplace de ambos lados: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)$; con las condiciones iniciales: $(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Despejamos la imagen Y: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Fracciones parciales: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- La transformada inversa (según la tabla de imágenes) da la solución: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Gráfica



La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Un problema de contorno con infinitas soluciones.

Enunciado: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Resultado

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- La solución general: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- La constante C_2 queda arbitraria – el problema tiene infinitas soluciones.
- La solución que cumple las condiciones dadas: $y = C_2 \sin x$

Ecuación de Euler – la sustitución x = eᵗ.

Enunciado: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

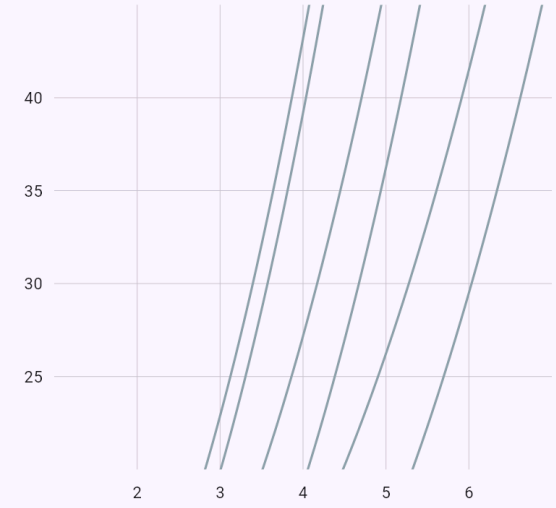
Resultado

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Pasos

- Ecuación de Euler – cada derivada y^(k) va con x^k; la sustitución x = e^t la convierte en una de coeficientes constantes: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- La sustitución $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ transforma la ecuación en $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λt); al sustituir y dividir entre e^(λt) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; las raíces: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Dividimos el lado derecho en partes de forma especial – una solución particular para cada una, luego las sumamos: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- El lado derecho 2 tiene forma especial; el número 0 no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $y_{p_1} = A$
- Las derivadas: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $2A = 2$
- De donde $A = 1$
- Una solución particular: $y_{p_1} = 1$
- El lado derecho e^{2t} tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por x: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Las derivadas: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $A = 1$
- Una solución particular: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Una solución particular: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- La solución general: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Volvemos a la variable original (t = ln x, para $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Gráfica



soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C₁ | C₂ | + Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

La reducción y' = p(y), las constantes de las condiciones iniciales paso a paso.

Enunciado: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Resultado

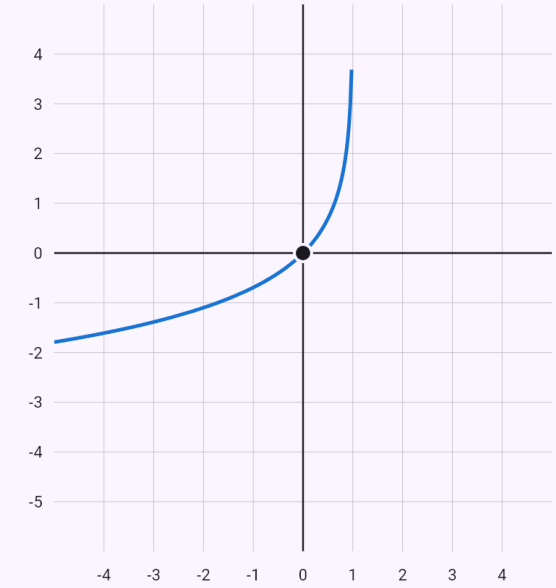
$$y = -\ln(1 - x)$$

Pasos

- Falta la variable independiente – tomamos y' como función de y: $y'' = e^{2y}$
- La sustitución $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ convierte la ecuación en $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; de las condiciones iniciales se sigue $p(0) = 1$
- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Separamos las variables: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Integramos ambos lados: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- La solución general en forma implícita: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Despejamos la solución: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Sustituimos la condición inicial $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $p = e^y$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Volvemos a la incógnita original: $y' = e^y$
- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = e^y$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Integramos ambos lados: $\int \dfrac{dy}{e^y} = \int dx$
- Según la tabla: la función interior es lineal, por eso dividimos el resultado entre su coeficiente de la variable: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1\,dx = x$
- La solución general en forma implícita: $-e^{-y} = x + C_2$
- Despejamos la solución: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Sustituimos la condición inicial $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- La solución de la condición inicial (solución particular): $y = -\ln(1 - x)$
- Derivamos el término con las reglas de la función compuesta, del producto y del cociente: $(-\ln(1 - x))' = -\dfrac{1}{1 - x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{1 - x}$
- Sustituimos la solución y su derivada en la ecuación; ambos lados son iguales: $\dfrac{1}{1 - x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Gráfica

Soluciones | Plano de fases



$y = -\ln(1 - x)$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Un oscilador amortiguado: tres casos según δ y ω.

Enunciado: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Resultado

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Para $\delta > \omega$ luego

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta)x}$
- Para $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, luego $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Para $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, i$, luego

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, x\right)\right.$

Resonancia: para ω = 2 la solución tiene otra forma.

Enunciado: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Resultado

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λt); al sustituir y dividir entre e^(λt) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- El lado derecho $\cos(2t)$ tiene forma especial; el número $2i$ no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Las derivadas

$$y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$$

- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados $\left(A\omega^2 - 4A\right)\cos(2t) + \left(B\omega^2 - 4B\right)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Comparamos los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de donde $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$

- Una solución particular: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- La solución general

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$

- Para $\omega = 2$ el número del lado derecho es raíz de la ecuación característica (resonancia): la solución tiene otra forma: $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Una solución adivinada $y_1 = x$ y reducción del orden (d'Alembert).

Enunciado: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Resultado

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Pasos

- Una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables: $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$
- Adivinamos una solución y la comprobamos sustituyendo: $y_1 = x$. La segunda, reduciendo el orden (d'Alembert, y = y_1·u)

  $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

  $$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

  $$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $$\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

  $$\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

  $$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

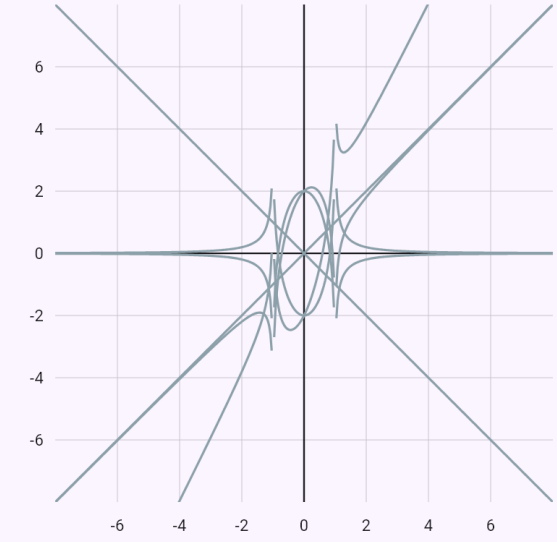
  $$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$

- La solución general:

  $$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$$

Gráfica



soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Curvas predeterminadas

Valores propios de las constantes

C_1 C_2 + Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

Un sistema – valores propios de signos opuestos, una silla.

Enunciado: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Resultado

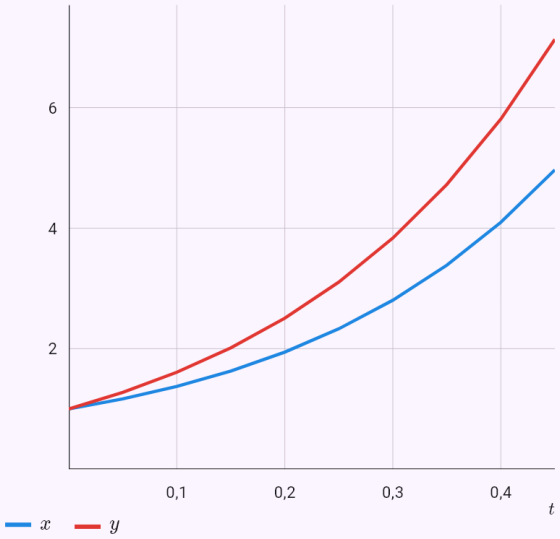
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Pasos

- El sistema en forma matricial
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Los valores propios de la matriz por la ecuación característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – dos reales distintos.
- Vectores propios, $(A - \lambda E)v = 0$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- La solución general
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$$
$$y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$$
- El punto estacionario $[0;\ 0]$ es un punto de silla – los valores propios tienen signos opuestos, es inestable.

Gráfica

En el tiempo | Plano de fases



La solución del sistema en el tiempo para las condiciones iniciales dadas (sin ellas, para x(0) = y(0) = 1).

Valores propios complejos – un foco inestable.

Enunciado: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Resultado

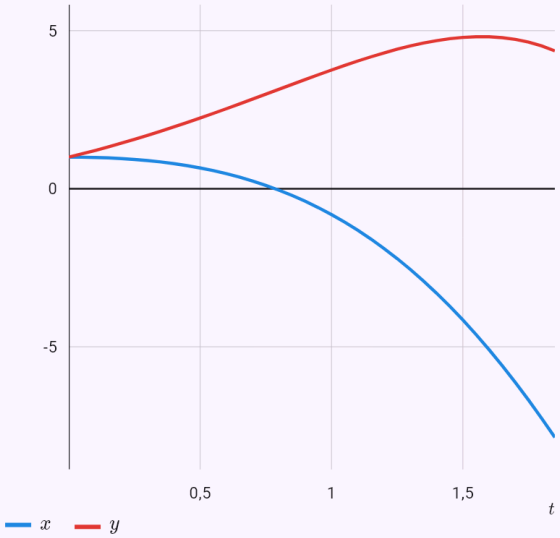
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Pasos

- El sistema en forma matricial
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Los valores propios de la matriz por la ecuación característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – complejos conjugados.
- Vectores propios, $(A - \lambda E)v = 0$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La solución general
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$$
$$y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$$
- El punto estacionario $[0;\ 0]$ es un foco inestable – la parte real de los valores propios es positiva, las trayectorias salen en espiral.

Gráfica

En el tiempo | Plano de fases



La solución del sistema en el tiempo para las condiciones iniciales dadas (sin ellas, para x(0) = y(0) = 1).

Un sistema con condiciones iniciales – un centro.

Enunciado: `x' = y`

`y' = -x`

`x(0) = 1`

`y(0) = 0`

Resultado

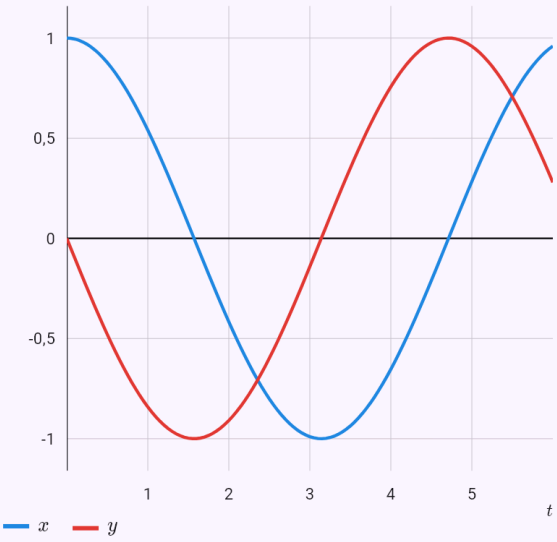
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Pasos

- El sistema en forma matricial
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Los valores propios de la matriz por la ecuación característica $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – complejos conjugados.
- Vectores propios, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- La solución general
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Las constantes por las condiciones iniciales de donde $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $$C_1 = 1$$
  $$C_2 = 0$$
- El punto estacionario $[0;\ 0]$ es un centro – los valores propios son imaginarios puros, las trayectorias son curvas cerradas a su alrededor.

Gráfica

En el tiempo | Plano de fases



La solución del sistema en el tiempo para las condiciones iniciales dadas (sin ellas, para x(0) = y(0) = 1).

La ecuación de Airy – criterio de Leighton–Wintner y 12 ceros.

Enunciado: `oscillation(y'' + x y = 0)`

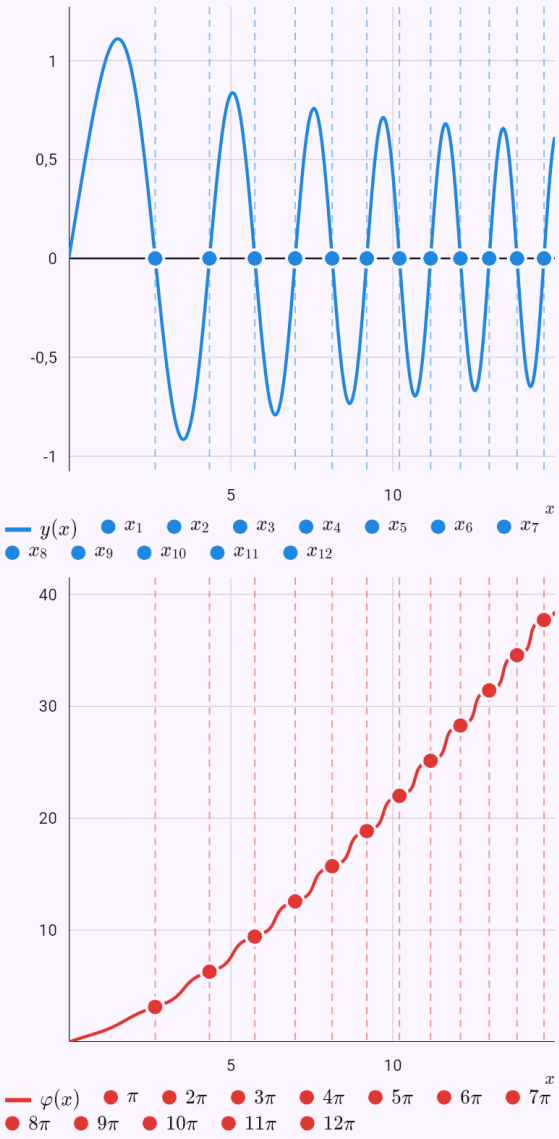
Resultado

La ecuación es oscilatoria.

Pasos

- Estudiamos la ecuación $y'' + xy = 0$ en el intervalo $[0,\ \infty)$, es decir, y" + q(x)y = 0 con q = x
- La ecuación es oscilatoria si toda solución no trivial tiene infinitos ceros en el intervalo. Por el teorema de separación de Sturm los ceros de dos soluciones independientes se alternan, así que basta una solución: o oscilan todas las soluciones o ninguna.
- El criterio de Leighton y Wintner: si ∫ 1/r = ∞ y ∫ q = ∞, la ecuación es oscilatoria. Aquí $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$ y $\int_0^\infty x\,dx = \infty$, así que la ecuación es oscilatoria.
- El criterio de Kneser con la constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, la ecuación es oscilatoria.
- La técnica de Riccati: la sustitución $w = \frac{y'}{y}$ convierte la ecuación en la ecuación de Riccati $w' + w^2 + x = 0$. La ecuación es no oscilatoria exactamente cuando la ecuación de Riccati tiene una solución en todo un intervalo ⟨T; ∞) para algún T. Para una ecuación oscilatoria no la hay: w «se escapa» a −∞ en cada cero de y.
- La transformación de Prüfer $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ convierte la ecuación en una ecuación para el ángulo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. En un cero de y el ángulo φ es múltiplo de π y φ' > 0, así que φ solo crece al pasar por los múltiplos de π. El número de ceros en (a; b⟩ es por tanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numéricamente con el método de Runge-Kutta (RK4) desde los valores iniciales $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- En el intervalo $(0,\ 15]$ la solución tiene esta cantidad de ceros: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Los ceros vecinos distan entre $0{,}8322$ y $1{,}6761$. Los ceros $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,\ $
- El teorema de comparación de Sturm: en el intervalo $[0,\ 15]$ es $q \in [0,\ 15]$. Allí q no es positivo en todas partes, así que solo obtenemos una cota inferior de la distancia entre ceros vecinos: $0{,}8112 \le \Delta$
- Conclusión: la ecuación es oscilatoria – toda solución no trivial tiene infinitos ceros.

Gráfica



La solución con sus ceros marcados; debajo, el ángulo de Prüfer φ, que en los ceros pasa por múltiplos de π.

La ecuación de Euler en la frontera k = 1/4 – todavía no oscila.

Enunciado: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

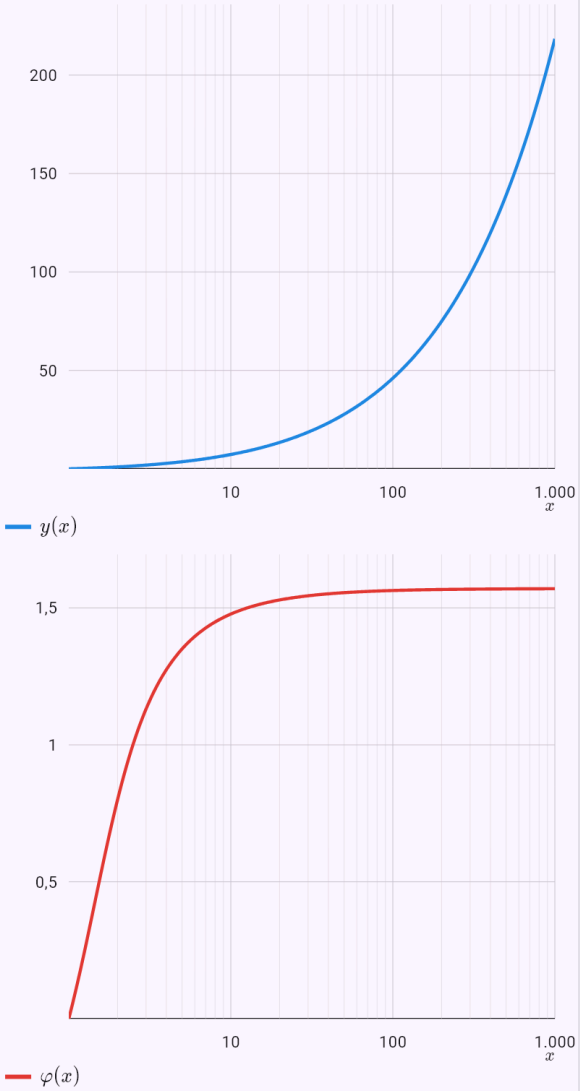
Resultado

La ecuación no es oscilatoria.

Pasos

- Estudiamos la ecuación $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ en el intervalo $[1,\ \infty)$, es decir, y" + q(x)y = 0 con q = $\frac{1}{4x^2}$
- La ecuación es oscilatoria si toda solución no trivial tiene infinitos ceros en el intervalo. Por el teorema de separación de Sturm los ceros de dos soluciones independientes se alternan, así que basta una solución: o oscilan todas las soluciones o ninguna.
- Es la ecuación de Euler y" + (k/x²)y = 0 con el valor límite k = $\frac{1}{4}$. La ecuación característica $\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{4} = 0$ tiene la raíz doble $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$, la solución $y = \sqrt{x}(C_1 + C_2 \ln x)$ tiene a lo sumo un cero. La ecuación todavía no es oscilatoria.
- El criterio de Leighton y Wintner: si ∫ 1/r = ∞ y ∫ q = ∞, la ecuación es oscilatoria. Aquí $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, pero $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, así que el criterio no decide.
- El criterio de Kneser: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$ es igual a la constante crítica $\frac{1}{4}$, así que por sí solo no decide. Decide el término siguiente.
- En el caso crítico comparamos con la ecuación de Riemann-Weber y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, que oscila exactamente para μ > 1/4: $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4}\right) \ln^2 x = 0 < \frac{1}{4}$, la ecuación no es oscilatoria.
- La técnica de Riccati: la sustitución $w = \frac{y'}{y}$ convierte la ecuación en la ecuación de Riccati $w' + w^2 + \frac{1}{4x^2} = 0$. Esta tiene la solución $w = \frac{1}{2x}$ en todo el intervalo – corresponde a una solución y sin ceros, así que la ecuación no es oscilatoria.
- La transformación de Prüfer $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ convierte la ecuación en una ecuación para el ángulo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. En un cero de y el ángulo φ es múltiplo de π y φ' > 0, así que φ solo crece al pasar por los múltiplos de π. El número de ceros en (a; b⟩ es por tanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numéricamente con el método de Runge-Kutta (RK4) desde los valores iniciales $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- En el intervalo $(1,\ 1000]$ la solución no tiene ningún cero: $\varphi(1000) \doteq 1{,}5702 \doteq 0{,}4998\pi$, el ángulo no llegó a π.
- Conclusión: la ecuación no es oscilatoria – toda solución no trivial tiene solo un número finito de ceros.

Gráfica



La solución no tiene ningún cero en el intervalo elegido; el ángulo de Prüfer φ, debajo, no llega a π.

Criterio de Kneser: x²q → 1 > 1/4, los ceros crecen geométricamente.

Enunciado: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

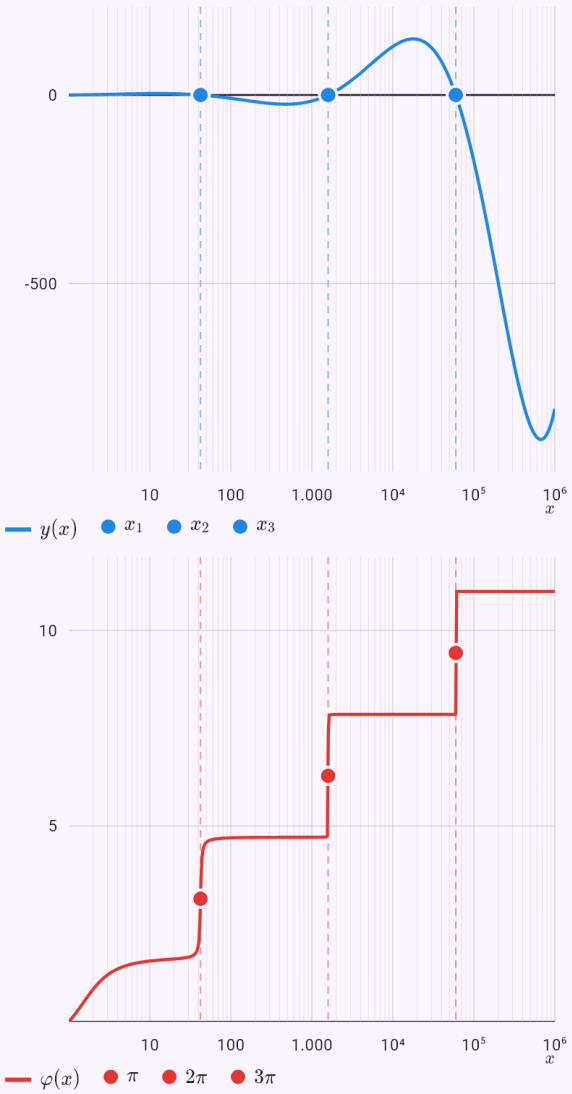
Resultado

La ecuación es oscilatoria.

Pasos

- Estudiamos la ecuación $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ en el intervalo $[0,\ \infty)$, es decir, y" + q(x)y = 0 con q = $\frac{1}{x^2+1}$
- La ecuación es oscilatoria si toda solución no trivial tiene infinitos ceros en el intervalo. Por el teorema de separación de Sturm los ceros de dos soluciones independientes se alternan, así que basta una solución: o oscilan todas las soluciones o ninguna.
- El criterio de Leighton y Wintner: si ∫ 1/r = ∞ y ∫ q = ∞, la ecuación es oscilatoria. Aquí $\int_0^\infty 1\,dx = \infty$, pero $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, así que el criterio no decide.
- El criterio de Kneser con la constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, la ecuación es oscilatoria.
- La técnica de Riccati: la sustitución $w = \frac{y'}{y}$ convierte la ecuación en la ecuación de Riccati $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$. La ecuación es no oscilatoria exactamente cuando la ecuación de Riccati tiene una solución en todo un intervalo ⟨T; ∞) para algún T. Para una ecuación oscilatoria no la hay: w «se escapa» a −∞ en cada cero de y.
- La transformación de Prüfer $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ convierte la ecuación en una ecuación para el ángulo φ: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. En un cero de y el ángulo φ es múltiplo de π y φ' > 0, así que φ solo crece al pasar por los múltiplos de π. El número de ceros en (a; b⟩ es por tanto ⌊φ(b)/π⌋. Calculamos numéricamente con el método de Runge-Kutta (RK4) desde los valores iniciales $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- En el intervalo $(1,\ 1\,000\,000]$ la solución tiene esta cantidad de ceros: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Los ceros vecinos distan entre $1548{,}7974$ y $58269{,}3046$. Los ceros: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Conclusión: la ecuación es oscilatoria – toda solución no trivial tiene infinitos ceros.

Gráfica



La solución con sus ceros marcados; debajo, el ángulo de Prüfer φ, que en los ceros pasa por múltiplos de π.

La ecuación de Euler semilineal, k = 1 > (2/3)³.

Enunciado: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

Resultado

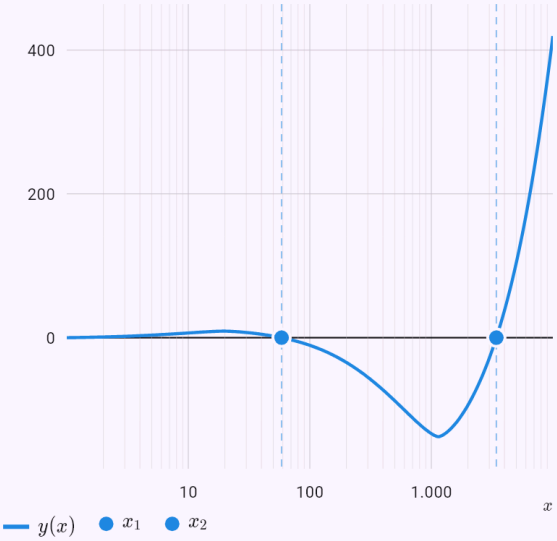
La ecuación es oscilatoria.

Pasos

- Estudiamos la ecuación semilineal $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ con p = 3 en el intervalo $[1, \infty)$, donde $\Phi(s) = |s|^1 s$. Un múltiplo de una solución vuelve a ser solución, pero la suma de dos soluciones en general no. Para p = 2 es la ecuación lineal y" + q(x)y = 0.
- La ecuación es oscilatoria si toda solución no trivial tiene infinitos ceros en el intervalo. El teorema de separación de Sturm vale también para ecuaciones semilineales: o oscilan todas las soluciones o ninguna.
- Es la ecuación de Euler semilineal con k = 1. Sustituyendo y = x^λ con 0 < λ < 1 obtenemos k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ para p = 3. La función G alcanza su máximo, la constante crítica $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, en λ = (p − 1)/p. Aquí k es mayor, no hay solución x^λ y la ecuación es oscilatoria.
- El criterio de Leighton y Wintner (si ∫ q = ∞, la ecuación es oscilatoria) aquí no decide: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- El criterio de Kneser para ecuaciones semilineales con la constante crítica $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ es mayor, la ecuación es oscilatoria.
- La técnica de Riccati para una ecuación semilineal: la sustitución $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ lleva a la ecuación de Riccati $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. La ecuación es no oscilatoria exactamente cuando esta tiene una solución en todo un intervalo ⟨T; ∞).

- Numéricamente (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) la solución tiene en el intervalo $(1,\ 10\,000]$ esta cantidad de ceros: 2, a distancia $3369{,}2413$. Los ceros: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Conclusión: la ecuación es oscilatoria – toda solución no trivial tiene infinitos ceros.

Gráfica



La solución con sus ceros marcados.

El criterio de Kneser discreto: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Enunciado: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

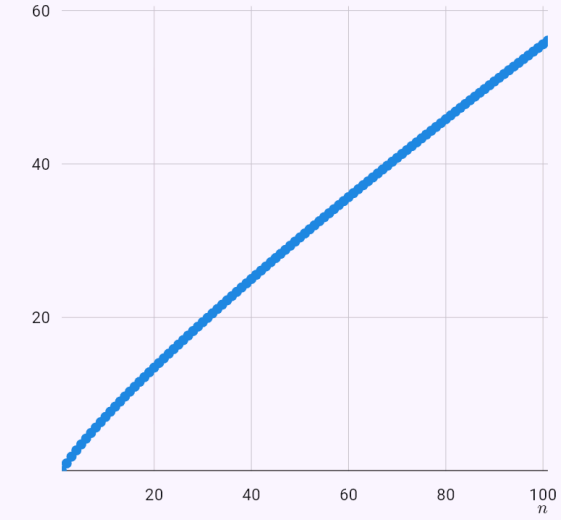
Resultado

La ecuación no es oscilatoria.

Pasos

- Estudiamos el análogo discreto de (r y')' + q y = 0, la recurrencia lineal $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ para $n \geq 1$, donde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Como recurrencia: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- En una sucesión contamos ceros generalizados: $y_n = 0$, o un cambio de signo entre y_n e y_{n+1}. La ecuación es oscilatoria si toda solución no trivial tiene infinitos ceros generalizados. También aquí vale el teorema de separación de Sturm.
- El criterio de Leighton y Wintner discreto: si $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ y $\Sigma\, q_n = \infty$, la ecuación es oscilatoria. Aquí $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, así que el criterio no decide.
- El criterio de Kneser discreto con la constante crítica $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, la ecuación no es oscilatoria.
- La técnica de Riccati discreta: la sustitución $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ lleva a $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. La ecuación es no oscilatoria exactamente cuando esta ecuación tiene, a partir de cierto n, una solución con $w_n + r_n > 0$.
- La solución con $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ no tiene ningún cero generalizado para n en $(1,\ 101]$
- Conclusión: la ecuación no es oscilatoria – toda solución no trivial tiene solo un número finito de ceros.

Gráfica



La solución no tiene ningún cero en el intervalo elegido.

Ejemplo 4.2 de Došlá y Marini – el caso C5: soluciones regularmente crecientes y fuertemente

decrecientes.

Enunciado: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Resultado

$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

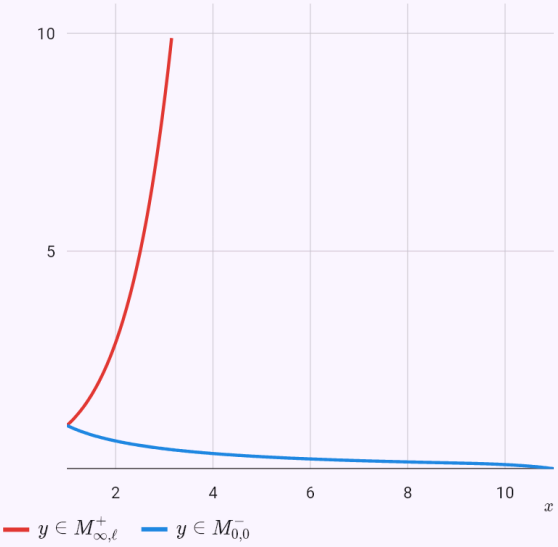
Pasos

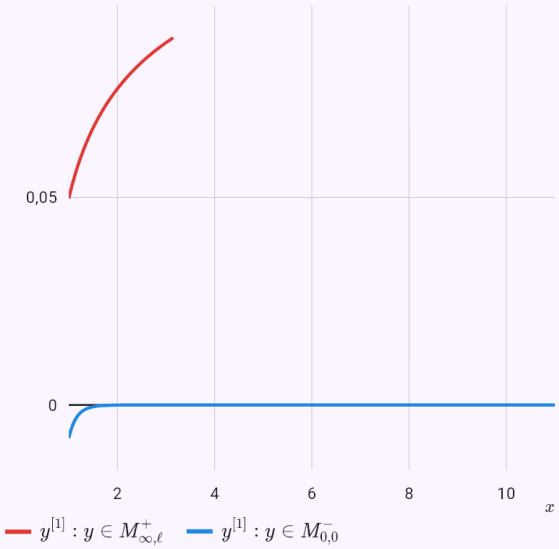
- Estudiamos la ecuación semilineal $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ en el intervalo $[1,\ \infty)$ con α = 3, a = e^{-3x} > 0 y b = $\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. Es una ecuación con p-laplaciano para p = α + 1 y «potencial negativo»: no oscila. La forma general de la ecuación es $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- El comportamiento de una solución lo describe, junto con y, su cuasiderivada $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3\operatorname{sgn} y'$. Toda solución no trivial pertenece a una de dos clases: M^+ –desde cierto x es y·y' > 0 y |y| crece– o M^- –y·y' < 0 en todo el intervalo y |y| decrece–. Las clases se dividen según los límites de |y| y $|y^{[1]}|$ cuando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito no nulo) o 0 (nulo), por ejemplo $M^+_{\infty,\ell}$
- Por el teorema 2.1 (Došlá–Marini) toda solución está definida en todo el intervalo y ambas clases M^+ y M^- son no vacías. A M^+ pertenecen, por ejemplo, las soluciones con y(x₀) > 0 e y'(x₀) ≥ 0.
- La integral A: cuando x → ∞ el integrando se comporta como e^x (salvo una constante positiva). Decide la exponencial, por tanto $\displaystyle\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- La integral B $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- La integral J_1: cuando x → ∞ el integrando se comporta como e^x (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Decide la exponencial, por tanto $\displaystyle\int_1^\infty e^x\left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- La integral J_2: cuando x → ∞ el integrando se comporta como $x^{-\frac{2}{3}}$ (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\displaystyle\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty e^x\left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- La integral Y_1 diverge, porque ya diverge la integral interior $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x = \infty$
- La integral Y_2: cuando x → ∞ el integrando se comporta como x^{-2} (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\displaystyle\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x < \infty$
- Lema 2.1 (una generalización del teorema de Fubini): para α = 3 ≥ 1, de $Y_2 = \infty$ se sigue $J_2 = \infty$ y de $Y_1 = \infty$ se sigue $J_1 = \infty$.
- Las integrales dieron $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$: es el caso C_5 de la clasificación (teorema 3.1).
- La ecuación recíproca $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a y b intercambian sus papeles y α pasa a 1/α) tiene por soluciones las cuasiderivadas de las soluciones de la

ecuación dada. Sus integrales J_1, J_2 se leen como Y_2, Y_1, así que se da el caso C_8. Las clases se corresponden con los índices intercambiados: $M^{+}_{\infty,\ell}$ de la ecuación dada corresponde a $M^{+}_{\ell,\infty}$ de la recíproca.

- $M^{+}_{\infty,\ell} \neq \varnothing$: soluciones regularmente crecientes: $|y| \to \infty$, pero la cuasiderivada tiene límite finito no nulo; y crece como $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (teorema 3.1).
- $M^{-}_{0,0} \neq \varnothing$: soluciones fuertemente decrecientes: $y \to 0$ e $y^{[1]} \to 0$ (teorema 3.1).
- La solución de M^{-} del gráfico se halla numéricamente por disparo: buscamos el valor inicial de la cuasiderivada para el que la solución con $y(1) = 1$ en un intervalo largo ni llega a cero ni empieza a crecer: $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Ese valor es único, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (teorema 4).

Gráfica





Arriba, soluciones numéricas y(x) de las clases no vacías (M^{+} desde $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} por disparo); abajo, sus cuasiderivadas y^[1](x). Una curva termina donde |y| supera 10.

El caso C4 – soluciones crecientes acotadas y todo un intervalo de decrecientes.

Enunciado: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Resultado

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oscilación de la ecuación

Pasos

- Estudiamos la ecuación lineal $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ en el intervalo $[1,\ \infty)$, es decir (a(x)y')' = b(x)y con a = x^4 > 0 y b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. Escrita como (a y')' + q y = 0 tiene q = −b negativo, así que la ecuación no es oscilatoria: cada solución tiene a lo sumo un cero.
- El comportamiento de una solución lo describe, junto con y, su cuasiderivada $y^{[1]} = x^4 y'$. Toda solución no trivial pertenece a una de dos clases: M^+ –desde cierto x es y·y' > 0 y |y| crece– o M^- –y·y' < 0 en todo el intervalo y |y| decrece–. Las clases se dividen según los límites de |y| y $|y^{[1]}|$ cuando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito no nulo) o 0 (nulo), por ejemplo $M^+_{\infty,\ell}$
- Por el teorema 2.1 (Došlá–Marini) toda solución está definida en todo el intervalo y ambas clases M^+ y M^- son no vacías. A M^+ pertenecen, por ejemplo, las soluciones con y(x₀) > 0 e y'(x₀) ≥ 0.
- La integral A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- La integral B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- La integral J_1: cuando x → ∞ el integrando se comporta como x^{-4} (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

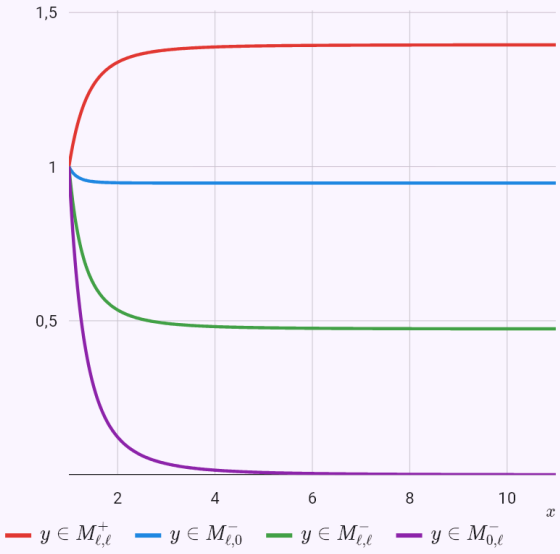
- La integral J_2: cuando x → ∞ el integrando se comporta como x^{-7} (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1

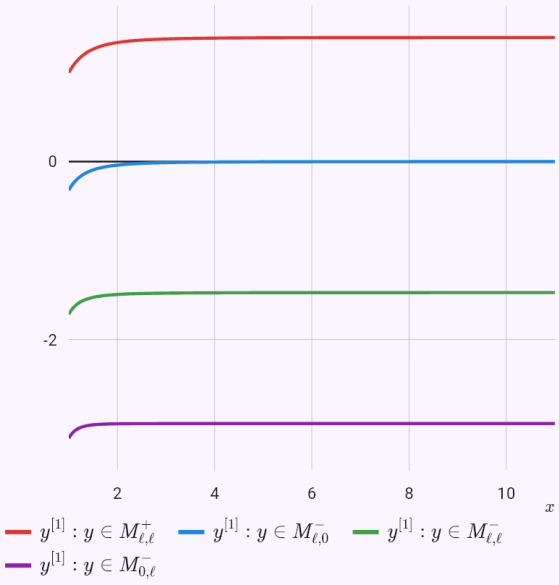
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Las integrales dieron $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$: es el caso C_4 de la clasificación (teorema 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluciones crecientes con límites finitos de y y de la cuasiderivada (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset$: soluciones decrecientes en las que y y la cuasiderivada tienen límites no nulos (teorema 3.1).
- $M^-_{\ell,0} \neq \emptyset$: soluciones que decrecen hacia un límite no nulo, la cuasiderivada → 0 (teorema 3.1).
- $M^-_{0,\ell} \neq \emptyset$: soluciones regularmente decrecientes: y → 0, pero la cuasiderivada tiene límite no nulo; y decrece como $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (teorema 3.1).
- $M^-_{0,0} = \emptyset$: ninguna solución de este tipo (teorema 3.1).
- Las soluciones de M^- del gráfico se hallan numéricamente por disparo: con $y(1) = 1$ siguen positivas y decrecientes para todo un intervalo de

valores iniciales de la cuasiderivada $y^{[1]}(1) \in [-3{,}1103,\ -0{,}3215]$, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (teorema 4). Los extremos y el punto medio del intervalo dan soluciones de clases distintas.

Gráfica





Arriba, soluciones numéricas y(x) de las clases no vacías (M^{+} desde $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} por disparo); abajo, sus cuasiderivadas y^[1](x). Una curva termina donde |y| supera 10.

Una ecuación superlineal – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (la solución $\sqrt{2}/(x + \sqrt{2})$).

Enunciado: `asymptotics(y'' = y^3)`

Resultado

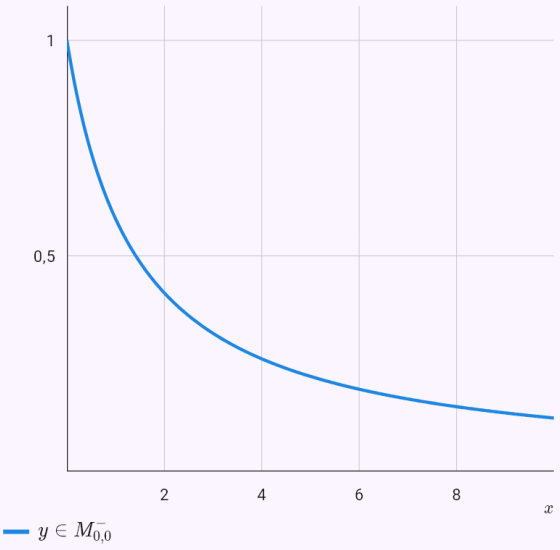
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

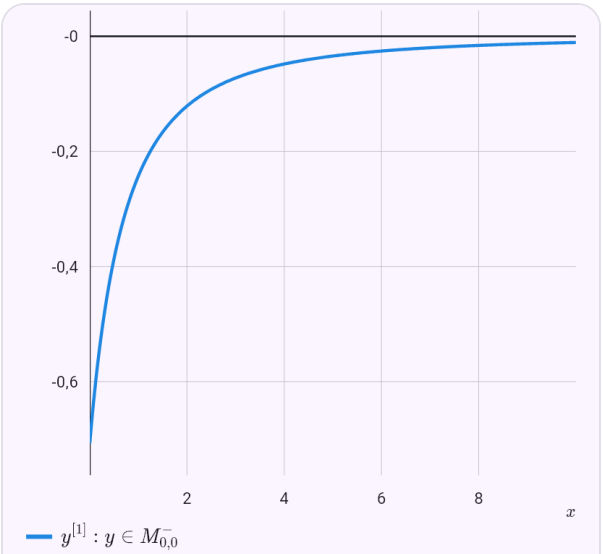
Pasos

- Estudiamos la ecuación de tipo Emden-Fowler $y'' = |y|^2 y$ en el intervalo $[0, \infty)$ con α = 1, β = 3, a = 1 > 0 y b = 1 > 0. Como β > α, la ecuación es superlineal. La forma general de la ecuación es $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- El comportamiento de una solución lo describe, junto con y, su cuasiderivada $y^{[1]} = y'$. Toda solución no trivial definida hasta el infinito pertenece a una de dos clases: M^+ –desde cierto x es y·y' > 0 y |y| crece– o M^- –y·y' < 0 y |y| decrece–. Las clases se dividen según los límites de |y| y $|y^{[1]}|$ cuando x → ∞: índice ∞ (infinito), ℓ (finito no nulo) o 0 (nulo).
- Por el teorema 1 (Cecchi–Došlá–Marini), para β > α la clase M^- es no vacía. Pero algunas soluciones «explotan»: |y| → ∞ ya en un punto finito, así que no están definidas hasta el infinito. La clase M^+ puede ser vacía.
- La integral A: cuando x → ∞ el integrando se comporta como 1 (salvo una constante positiva). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- La integral B: cuando x → ∞ el integrando se comporta como 1 (salvo una constante positiva). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1, $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- La integral J_1: cuando x → ∞ el integrando se comporta como x (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- La integral $Y_2^{(\beta)}$: cuando x → ∞ el integrando se comporta como x^3 (salvo una constante positiva, con la integral interior sustituida por su comportamiento asintótico). Por el criterio de comparación con $\int x^\mu\,dx$, que converge exactamente para μ < −1, $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- La integral $Y_1^{(\beta)}$ diverge, porque ya diverge la integral interior: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \emptyset$: ninguna solución de este tipo (Kiguradze, citado en Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \emptyset$: ninguna solución de este tipo (lema 1).
- $M^-_{\ell,0} = \emptyset$: ninguna solución de este tipo (lema 2).
- $M^-_{0,\ell} = \emptyset$: ninguna solución de este tipo (lema 1).
- $M^-_{0,0} \neq \emptyset$: soluciones fuertemente decrecientes: y → 0 e $y^{[1]} \to 0$ (teorema 1).

- La solución de M^{-} del gráfico se halla numéricamente por disparo: buscamos el valor inicial de la cuasiderivada para el que la solución con $y(0) = 1$ en un intervalo largo ni llega a cero ni empieza a crecer: $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Ese valor es único, porque $\int (a^{-1/\alpha} + b)\, dx = \infty$ (teorema 4).

Gráfica





Arriba, soluciones numéricas y(x) de las clases no vacías (M^{+} desde $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} por disparo); abajo, sus cuasiderivadas y^[1](x). Una curva termina donde |y| supera 10.

Limitaciones conocidas

- Una ecuación que necesita una pista del enunciado (distinta de z = ln y) aún no se resuelve.
- En una ecuación con parámetro (k, λ, ω) la aplicación no dibuja gráfica y toma los parámetros como positivos.
- Donde la solución no se puede expresar explícitamente, queda en forma implícita.
- La transformada de Laplace aún no conoce la función de Heaviside, los desplazamientos ni los lados derechos periódicos.
- Si las integrales de la variación de constantes no se pueden expresar con funciones elementales (y″ + y′ + y = tan x), la solución las deja como integrales; entonces no hay gráfica ni se aplican condiciones iniciales.
- Sistemas solo de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes sin término independiente; sistemas no lineales solo en las aplicaciones (modelos).
- Una ecuación de Riccati sin solución particular dada se resuelve solo si se adivina una de forma sencilla; si no, la aplicación indica que hace falta.
- La ecuación de Lagrange solo sin condición inicial; en la de Clairaut, la condición elige las rectas (y la envolvente) que pasan por el punto.
- La oscilación solo para ecuaciones con coeficientes numéricos (k debe ser un número); una ecuación semilineal solo con r = 1. Los ceros se cuentan numéricamente en un intervalo finito: sobre el infinito

deciden solo los criterios.

- La asintótica de una ecuación de tipo Emden-Fowler ($\beta \neq \alpha$) solo se decide donde lo dicen los teoremas citados; las demás clases se marcan como no decididas. Los coeficientes a, b deben ser positivos; su comportamiento en el infinito se reconoce en productos de potencias, logaritmos y exponenciales; si no, solo integrales exactas con Symja.

37. Cálculo de variaciones

La aplicación busca una extremal de un funcional J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx con las condiciones de contorno y(a), y(b): plantea la ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 (con las derivadas parciales en la solución), muestra la integral primera de un integrando sin y y resuelve la ecuación diferencial resultante con el resolutor de EDO, con las condiciones de contorno y la comprobación. El problema está también como formulario en las áreas Análisis y Física (Aplicaciones).

Si la ecuación no tiene solución en forma cerrada y F no depende de x, usa la identidad de Beltrami y reconoce las extremales conocidas: la braquistócrona (una cicloide, comparada con la recta, con el tiempo de deslizamiento), la catenaria y la superficie de revolución mínima (dos, una o ninguna catenaria: solución de Goldschmidt) y un problema isoperimétrico con multiplicador de Lagrange (un arco de circunferencia de longitud dada, una cadena colgante). Las constantes se calculan numéricamente. El principio de mínima acción convierte un lagrangiano en la ecuación del movimiento; en el péndulo, con sen θ ≈ θ. Hay una demostración interactiva –una carrera de bolas por la braquistócrona– en mathtrace.app, en «Pruébalo».

Cómo introducirlo

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	El integrando y las condiciones de contorno, separados por punto y coma.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	La restricción ∫ G dx = L como último elemento.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Un lagrangiano L = T − V y la palabra action: la ecuación del movimiento.

Ejemplos

El camino más corto entre dos puntos es un segmento.

Enunciado: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Resultado

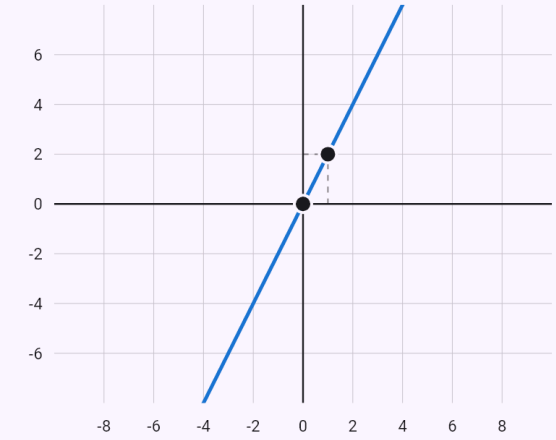
$$y = 2x$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- El integrando no depende de y: la ecuación de Euler-Lagrange tiene una integral primera:
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$$
- Resolvemos la ecuación diferencial:
- El lado derecho depende solo de la variable independiente – integramos la ecuación paso a paso: $y'' = 0$
- Integramos ambos lados: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Integramos ambos lados: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 2, \; C_2 = 0$
$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $y = 2x$

Gráfica

Soluciones | Plano de fases



$y = 2x$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Valores propios de las constantes

C_1 | C_2 | + Añadir curva

Toque el gráfico y ajuste la pendiente con el control deslizante: se dibuja la solución que pasa por ese punto con esa pendiente de la tangente.

La ecuación de Euler-Lagrange y'' = y con condiciones de contorno.

Enunciado: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Resultado

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Resolvemos la ecuación diferencial:
- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $y'' - y = 0$
- Buscamos soluciones y = e^(λx); al sustituir y dividir entre e^(λx) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^x$
- La solución general: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

La braquistócrona: una cicloide de A [0; 0] a B [2; 1], deslizamiento de 0,806 s frente a 1,010 s por la

recta.

Enunciado: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

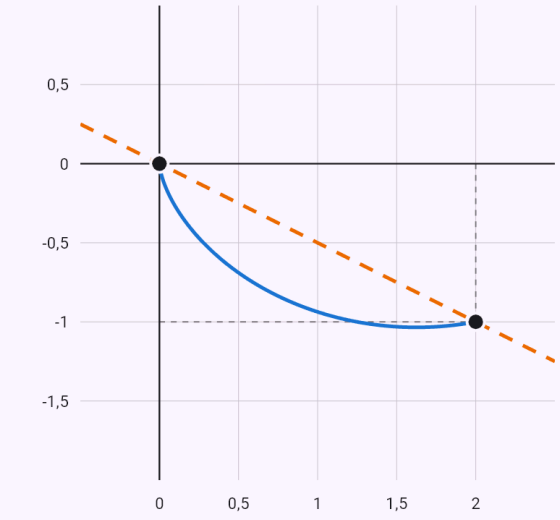
Resultado

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- De la identidad de Beltrami sale y·(1 + y'²) = const. La solución es una cicloide, la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda (el eje y apunta hacia abajo, salida en reposo desde A):
$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Las constantes a partir del punto final B (θ_B numéricamente por bisección)
$$\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$$
- El valor del funcional: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; por la recta $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Para J = ∫ ds/v con v = √(2gy), J es el tiempo de deslizamiento:
$T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056\ \text{s}$
- θ_B > π: la trayectoria más rápida baja por debajo del nivel de B y luego sube hasta B.

Gráfica



$x(\theta),\ y(\theta)$
$y = 0{,}5x$

El eje y apunta hacia abajo: la trayectoria pasa por debajo de A. En trazo continuo la cicloide (el deslizamiento más rápido), en discontinuo la recta para comparar.

La superficie de revolución mínima entre dos anillos: dos catenarias, el mínimo es la menos profunda.

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

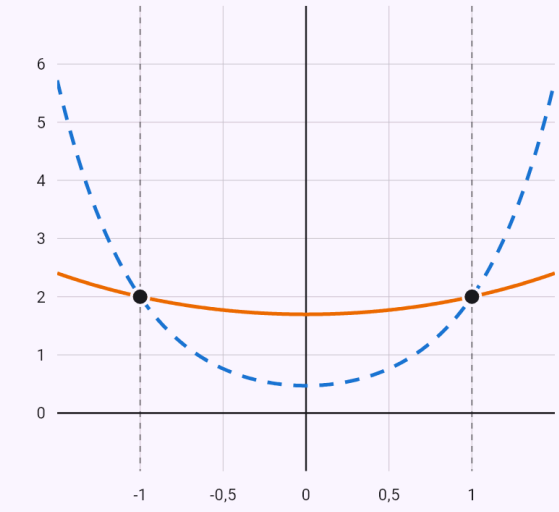
Resultado

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, con las condiciones de contorno $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- De la identidad de Beltrami sale una catenaria (el coseno hiperbólico): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Dos catenarias cumplen las condiciones de contorno (numéricamente). El mínimo lo da la de menor J, la menos profunda; la más profunda solo es estacionaria. $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358; \quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Gráfica



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

La extremal entre los puntos dados; en trazo discontinuo, la otra solución o una curva para comparar.

Anillos muy separados: ninguna catenaria (solución de Goldschmidt).

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Resultado

No tiene solución.

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, con las condiciones de contorno $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- De la identidad de Beltrami sale una catenaria (el coseno hiperbólico): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Ninguna catenaria pasa por ambos puntos: los anillos son demasiado pequeños para su distancia. La superficie mínima son entonces solo los dos discos y el eje entre ellos (solución de Goldschmidt); no existe extremal suave.

La mayor área bajo una curva de longitud π: una semicircunferencia.

Enunciado: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Resultado

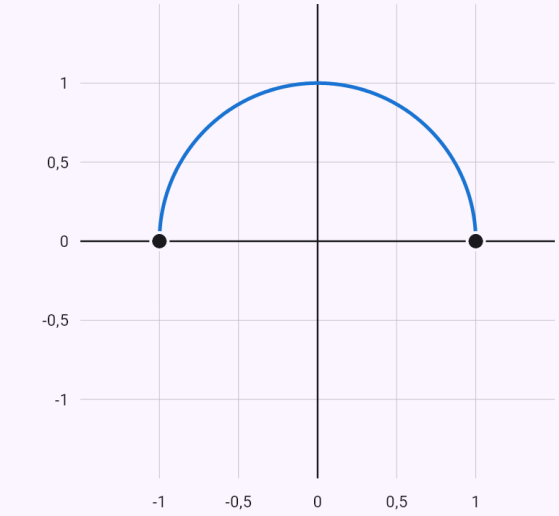
$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, con las condiciones de contorno $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Un problema isoperimétrico con la restricción $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: la añadimos con un multiplicador de Lagrange λ y buscamos un extremo del funcional con el integrando $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- De la identidad de Beltrami para F + λG sale una circunferencia: un arco de radio |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Las constantes a partir de la longitud del arco y de la cuerda, ángulo central 2α (numéricamente)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Gráfica



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

La extremal entre los puntos dados; en trazo discontinuo, la otra solución o una curva para comparar.

Una cadena colgante de longitud 3: una catenaria con multiplicador de Lagrange.

Enunciado: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Resultado

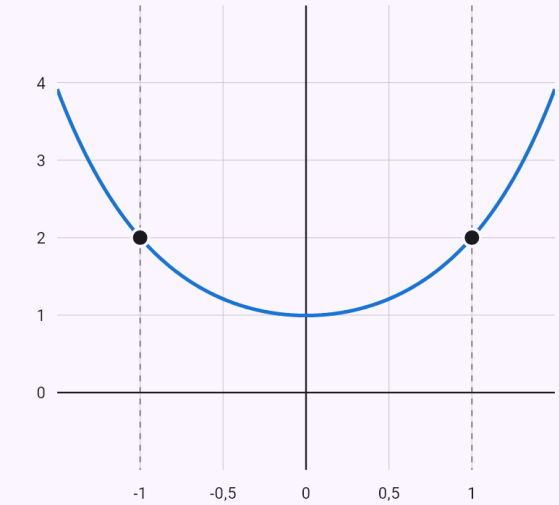
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$$

Pasos

- Buscamos la función para la que el funcional tiene un extremo: $J[y] = \int_{-1}^{1}\left(y\sqrt{y'^2+1}\right)dx$, con las condiciones de contorno $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Un problema isoperimétrico con la restricción $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{y'^2+1}\right)dx = 3$: la añadimos con un multiplicador de Lagrange λ y buscamos un extremo del funcional con el integrando $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- La ecuación de Euler-Lagrange ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- De la identidad de Beltrami para F + λG sale una catenaria desplazada en λ: $y = c + C\cosh\frac{x-x_0}{C}$
- Las constantes a partir de la longitud de la cadena y de las condiciones de contorno (numéricamente)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Gráfica



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165\cosh\frac{x}{0{,}6165}$

La extremal entre los puntos dados; en trazo discontinuo, la otra solución o una curva para comparar.

El principio de mínima acción: un muelle, la ecuación del movimiento m x'' + k x = 0.

Enunciado: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Resultado

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Pasos

- El principio de mínima acción: el movimiento hace estacionaria la acción: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- La ecuación de Euler-Lagrange del lagrangiano es la ecuación del movimiento: $-kx - mx'' = 0$
- Resolvemos la ecuación diferencial:
- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Buscamos soluciones x = e^(λt); al sustituir y dividir entre e^(λt) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), ..., x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- La solución general $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Un péndulo: sen θ ≈ θ para oscilaciones pequeñas.

Enunciado: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Resultado

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Pasos

- El principio de mínima acción: el movimiento hace estacionaria la acción: $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Las derivadas parciales del integrando respecto de y e y' y la derivada total respecto de x (y e y' dependen de x) $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- La ecuación de Euler-Lagrange del lagrangiano es la ecuación del movimiento: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- El integrando no depende de x: se cumple la identidad de Beltrami F − y'·∂F/∂y' = C₁: $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- La ecuación con sen θ no tiene solución elemental. Para oscilaciones pequeñas, sen θ ≈ θ da la ecuación de las oscilaciones armónicas: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Resolvemos la ecuación diferencial:
- Una ecuación lineal con coeficientes constantes: $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Buscamos soluciones \theta = e^(λt); al sustituir y dividir entre e^(λt) obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Cada raíz λ da la solución e^(λx), una raíz de multiplicidad k además x·e^(λx), ..., x^(k−1)·e^(λx), y un par α ± βi las soluciones e^(αx)·cos βx y e^(αx)·sin βx. El sistema fundamental $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- La solución general $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Limitaciones conocidas

- Una función incógnita y como mucho su primera derivada en el integrando; todavía no funcionales de varias funciones ni con y″.
- Las extremales conocidas (cicloide, catenaria, arco de circunferencia) se reconocen por la forma del integrando; otras ecuaciones no lineales quedan como ecuación de Euler-Lagrange.
- La braquistócrona parte del reposo: el punto inicial debe tener y(a) = 0 y el eje y apunta hacia abajo.

38. Ecuaciones en derivadas parciales

Escriba la ecuación con subíndices u_t, u_xx, u_xy (de una foto la app también lee ∂u/∂t y ∂²u/∂x²), el laplaciano como Δu; las condiciones y el dominio separados por punto y coma. Sin condiciones la app determina el tipo de una ecuación lineal de segundo orden (elíptica, parabólica, hiperbólica – por regiones con coeficientes variables), la ecuación de las características, la forma canónica y, sin términos de menor orden, la solución general. Una ecuación de primer orden a·u_x + b·u_y + c·u = f se resuelve por características con comprobación.

Con condiciones de contorno e iniciales resuelve por separación de variables la ecuación del calor u_t = k·u_xx y la de ondas u_tt = c²·u_xx en un intervalo (extremos a temperatura fija o aislados, valores no nulos mediante el estado estacionario) y la ecuación de Laplace en un rectángulo y en un disco (también fuera). Los coeficientes de Fourier salen como fórmula en n; si la función inicial es suma de funciones propias, sale una suma finita. En toda la recta usa la fórmula de d'Alembert y la transformada de Fourier (núcleo del calor), en la semirrecta x > 0 la transformada de Laplace en el tiempo. También admite una fuente f(x, t) (principio de Duhamel), un flujo de calor en un extremo, valores de contorno que cambian con el tiempo y, en la ecuación de Laplace, derivadas en los lados. De las ecuaciones no lineales resuelve la de Burgers: por características hasta que se forma una onda de choque y, con viscosidad, mediante la transformación de Cole-Hopf; la ecuación de ondas en la recta se muestra también con la transformada de Fourier. La ecuación de Poisson Δu = f en un rectángulo se resuelve con una serie de Fourier doble (la fuente como suma de productos p(x)·q(y)); con derivadas en los cuatro lados se comprueba la condición de solubilidad y la solución sale salvo una constante. Las ecuaciones con los coeficientes variables αx²u_xx + βxu_x se convierten en un problema de Sturm-Liouville con peso.

Numéricamente en una malla con el esquema como cabecera, como los demás métodos numéricos: la ecuación del calor explícita (ftcs), implícita (btcs), con Crank-Nicolson (cranknicolson) y el método θ (theta) – los sistemas implícitos con el algoritmo de Thomas, con el análisis de estabilidad de von Neumann; la ecuación de transporte con upwind, laxwendroff y leapfrog con la condición CFL, la ecuación de ondas con leapfrog; la ecuación de Laplace (Poisson) con el esquema de cinco puntos y las iteraciones jacobi, gaussseidel y sor comparando el número de iteraciones. Valores con nombre: h paso espacial, k paso de tiempo, to tiempo final, theta, omega, tol, max. La ecuación del calor también es un formulario en Métodos numéricos. El calor en 2D en un rectángulo se resuelve con los esquemas ftcs y adi (direcciones alternadas); la ecuación de Laplace también con gradiente conjugado (cg), multimalla (multigrid) y elementos finitos con triángulos (fem); la ecuación de Burgers con el esquema de Godunov (upwind). Las ecuaciones de transporte y de Laplace son también formularios en el área Métodos numéricos, y las aplicaciones (barra, cuerda, tambor, difusión), formularios de física y química. Para leyes de conservación están los esquemas laxfriedrichs y muscl (con el limitador minmod), para la ecuación de transporte y la de Burgers, esta también con viscosidad (comparación con la transformación de Cole-Hopf). El método de elementos finitos (fem) calcula también en un polígono

general dado por sus vértices, polygon = (0,0), (2,0), …, con el valor en el borde u = …; la malla sale de recortar orejas y dividir los triángulos. El calor en una placa es un formulario de física.

El resultado es una gráfica de u(x, t): una curva en el tiempo con deslizador y botón de reproducción y una superficie 3D giratoria; en la solución numérica la exacta va a trazos. La solución estacionaria u(x, y) de Laplace es una superficie 3D.

Cómo introducirlo

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	La ecuación, condiciones de contorno e iniciales; una derivada en una condición como u_t(x,0) o u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	El dominio: x ∈ ℝ, x > 0 o 0 < x < π; sin condiciones de contorno toda la recta.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	La ecuación de Laplace en un disco: Δu, el radio r y el ángulo φ (o θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numéricamente: el esquema como cabecera, los pasos h y k y el tiempo final to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Calor en 2D: u(x,y,t), condiciones como u(x,y,0) = … y u(0,y,t) = …; los lados sin condición valen 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Elementos finitos en un polígono: los vértices tras polygon =, el valor en el borde u = …, la arista mayor h.

Ejemplos

Una ecuación hiperbólica – características, forma canónica u_ξη = 0 y solución general.

Enunciado: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Resultado

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Los coeficientes de las segundas derivadas en la forma $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- El discriminante: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, la ecuación es hiperbólica (como la ecuación de ondas): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- La ecuación de las características: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Dos familias reales de características: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Nuevas variables a lo largo de las características: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Tras el cambio de variables (regla de la cadena) obtenemos la forma canónica: $u_{\xi\eta} = 0$
- La ecuación u_ξη = 0 se integra dos veces – la solución general con dos funciones arbitrarias $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

La ecuación de Tricomi – el tipo por regiones.

Enunciado: `y u_xx + u_yy = 0`

Resultado

$$D = -y$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Los coeficientes de las segundas derivadas en la forma $a_{11}u_xx + 2a_{12}u_xy + a_{22}u_yy$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- El discriminante depende de la posición: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- El tipo por regiones – hiperbólica para $y < 0$, parabólica para $y = 0$, elíptica para $y > 0$
- La ecuación de las características: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

La ecuación de transporte por características – la onda se mueve con velocidad 2.

Enunciado: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

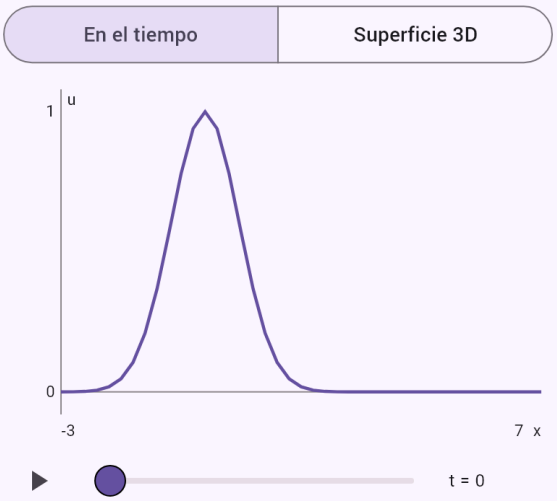
Resultado

$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t + 2u_x = 0$
- Condiciones: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- El método de las características: a lo largo de las curvas que resuelven el sistema la ecuación se convierte en una ecuación diferencial ordinaria para u.
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$
- Las características son las curvas en las que $x - 2t = \xi$ es constante.
- A lo largo de una característica resolvemos una ecuación ordinaria, el valor inicial de la condición:
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$$
- Comprobación: sustituida en la ecuación, el lado izquierdo es igual al derecho.
- La solución: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Calor en una barra con extremos enfriados – una serie de Fourier.

Enunciado: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Resultado

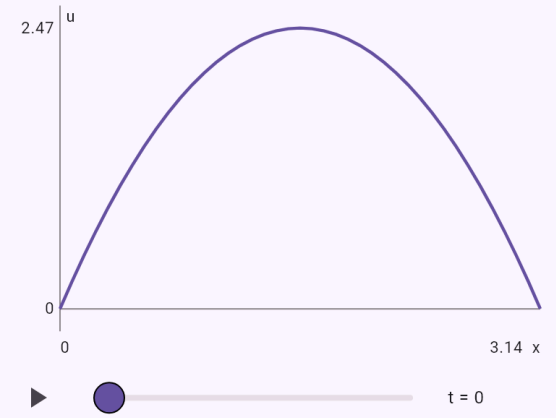
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(n$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = 4u_{xx}$
- Condiciones: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separación de variables: buscamos un producto; sustituido y dividido, las variables se separan – ambos lados deben ser iguales a la misma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes: $T_n' = -4n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-4n^2 t} \sin(nx)$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes) $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$
- La solución $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Extremos a distintas temperaturas – el estado estacionario y la desviación.

Enunciado: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Resultado

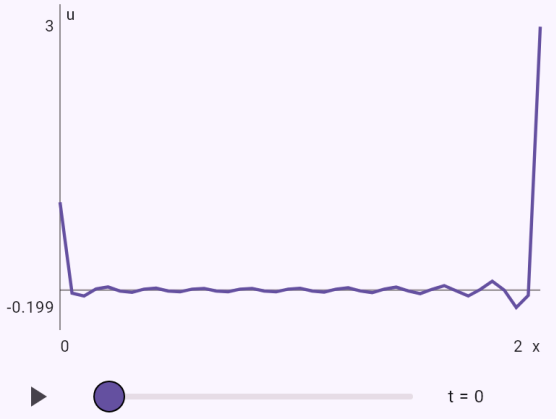
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = 2u_{xx}$
- Condiciones: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Los extremos tienen valores no nulos. Primero el estado estacionario $w(x) = x + 1$ (la ecuación sin tiempo, w" = 0), luego buscamos $u = w(x) + v(x,t)$; la desviación v es nula en los extremos.
- Separación de variables: buscamos un producto; sustituido y dividido, las variables se separan – ambos lados deben ser iguales a la misma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes:
  $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- La solución
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Una cuerda pulsada – ondas estacionarias.

Enunciado: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ s$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Condiciones: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, la ecuación es hiperbólica (como la ecuación de ondas): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Separación de variables: buscamos un producto – ondas estacionarias; ambos lados son iguales a la misma constante: $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – oscilaciones con su propia frecuencia: $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$

- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes)

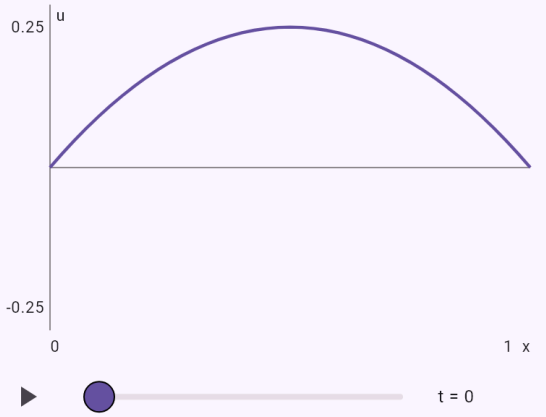
$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\ \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- La solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\ \sin(n\pi x)$$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

La ecuación de Laplace en un rectángulo con un lado calentado.

Enunciado: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Resultado

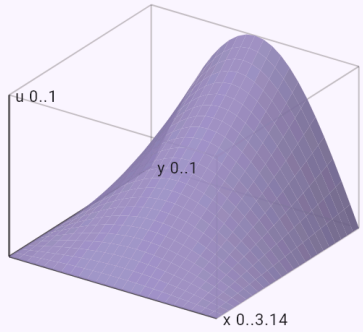
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condiciones: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, la ecuación es elíptica (como la ecuación de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- El lado con valores no nulos (los demás tienen u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Separación de variables: buscamos un producto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La otra ecuación Y" = λY, nula en el lado opuesto, escalada a 1 en el dado: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- La función inicial (de contorno) ya es una suma de funciones propias, así que solo unos pocos coeficientes $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, \sin(nx)\,dx$ no son nulos: $c_1 = 1$, los demás son nulos.

- La solución: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

La ecuación de Laplace en un disco – una suma finita de armónicos.

Enunciado: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

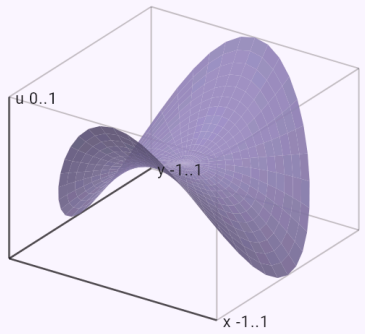
Resultado

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Condiciones: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, la ecuación es elíptica (como la ecuación de Laplace): $\Delta u = 0$
- Separación de variables en coordenadas polares:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi):\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- El ángulo vuelve tras una vuelta, Φ debe ser periódica:
  $\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – las soluciones
  $\lambda_n = n^2,\quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi,\quad n = 0,1,2,\ldots$
- La parte radial es la ecuación de Euler; dentro del disco la solución debe ser acotada (r^{-n} y ln r se descartan):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Los coeficientes de Fourier de la función de contorno:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- La función inicial (de contorno) ya es una suma de funciones propias, así que solo unos pocos coeficientes $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ no son nulos: $a_2 = -\frac{1}{2}$, los demás son nulos.
- Todos los coeficientes son nulos:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- La solución: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

La fórmula de d'Alembert – un impulso inicial se divide en dos ondas.

Enunciado: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

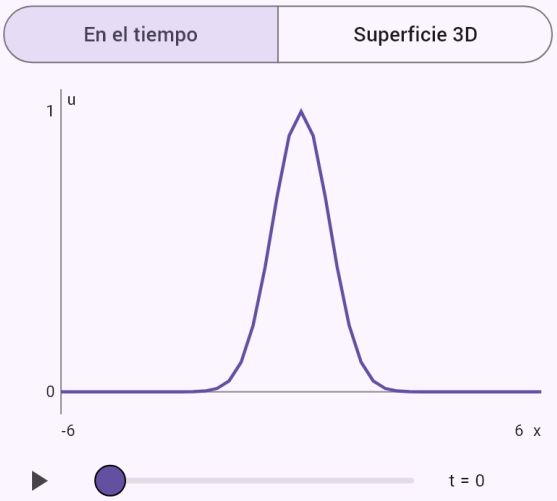
Resultado

$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{tt} = u_{xx}$
- Condiciones: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, la ecuación es hiperbólica (como la ecuación de ondas): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- La solución general de la ecuación de ondas son dos ondas que se mueven con velocidad c a la izquierda y a la derecha: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- Lo mismo con la transformada de Fourier en x: cada frecuencia ω oscila por separado. Multiplicar por e^(±icωt) es un desplazamiento de ∓ct, así que la transformada inversa da la fórmula de d'Alembert.
- Las condiciones iniciales u = f y u_t = g dan la fórmula de d'Alembert:
  $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Comprobación: sustituida en la ecuación, el lado izquierdo es igual al derecho.
- La solución: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

La transformada de Fourier en toda la recta – un perfil gaussiano se ensancha.

Enunciado: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Resultado

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

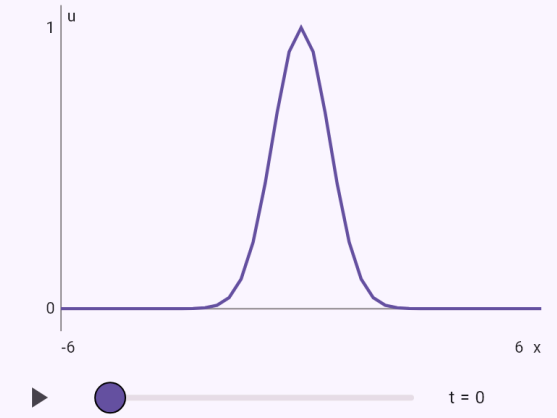
Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = u_{xx}$
- Condiciones: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- En toda la recta usamos la transformada de Fourier en x – la derivada u_xx se convierte en multiplicar por −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$. Para cada ω queda una ecuación ordinaria en el tiempo
  $$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$$
- La transformada inversa de un producto es la convolución con el núcleo del calor (una gaussiana que se ensancha con el tiempo)
  $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$$
- La convolución de dos gaussianas es otra gaussiana, solo más ancha y más baja
  $$\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$
- Comprobación: sustituida en la ecuación, el lado izquierdo es igual al derecho.

- La solución: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

La transformada de Laplace – un semiespacio calentado, la función erfc.

Enunciado: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

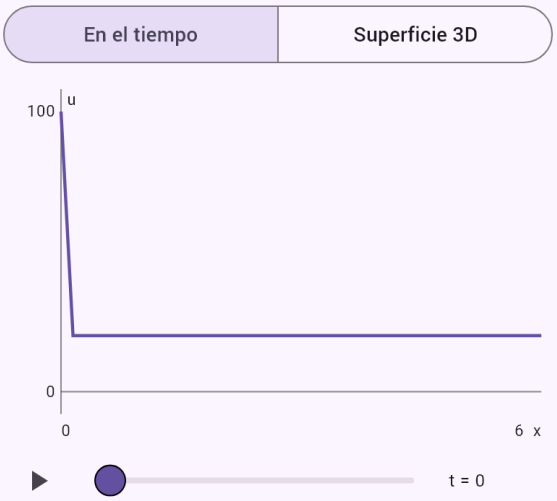
Resultado

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = 4u_{xx}$
- Condiciones: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- En una semirrecta usamos la transformada de Laplace en el tiempo $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – la derivada u_t se convierte en sU − u(x, 0) y queda una ecuación ordinaria en x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Cuando x → ∞ U debe quedar acotada, la exponencial creciente se descarta: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; la constante de la condición de contorno: $U(0,s) = \frac{100}{s} \Rightarrow A(s) = \frac{80}{s}$
- La transformada inversa según la tabla $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- La solución: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

El esquema explícito con r = 0,7 > 1/2 – inestable según von Neumann.

Enunciado: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to`

= 1)

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- La malla: 11 nodos en x, 143 pasos de tiempo hasta t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r es el paso de tiempo entre el cuadrado del paso espacial).
- El esquema explícito (adelante en el tiempo, centrado en el espacio) – cada valor nuevo directamente de tres viejos: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Análisis de von Neumann: el error se descompone en ondas e^(iβx), cada una se multiplica en un paso por G: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. La estabilidad exige $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – aquí no, los errores crecerán exponencialmente.
- El primer nivel de tiempo

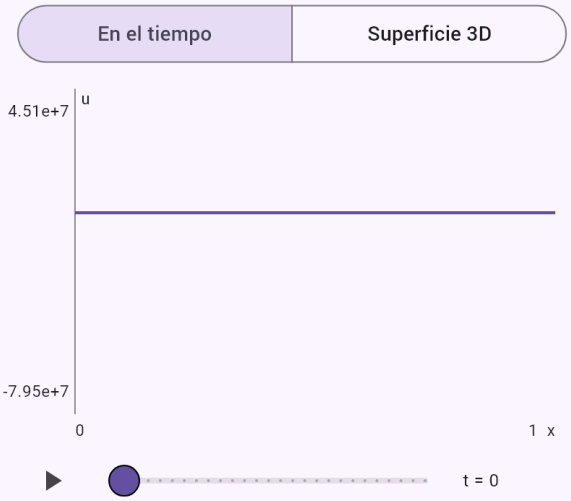
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- En el nivel level.50 los valores crecieron sin límite – el esquema es inestable, el cálculo se detuvo.
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

El esquema de Crank-Nicolson con el algoritmo de Thomas.

Enunciado: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k`

`= 0.01; to = 0.1)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- La malla: 11 nodos en x, 10 pasos de tiempo hasta t = $0{,}1$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r es el paso de tiempo entre el cuadrado del paso espacial).
- El esquema de Crank-Nicolson – la media del explícito y el implícito, de segundo orden también en el tiempo $-\frac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}r\left(u_{i+1}^n - 2\right.$
- Análisis de von Neumann: el error se descompone en ondas e^(iβx), la amplificación en un paso es $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; siempre $|G| \le 1$, el esquema es estable para cualquier paso (incondicionalmente).
- En cada nivel de tiempo hay que resolver un sistema tridiagonal a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ (los valores de contorno en el lado derecho). El primer nivel

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- El sistema con el algoritmo de Thomas – barrido hacia adelante y sustitución regresiva

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$$

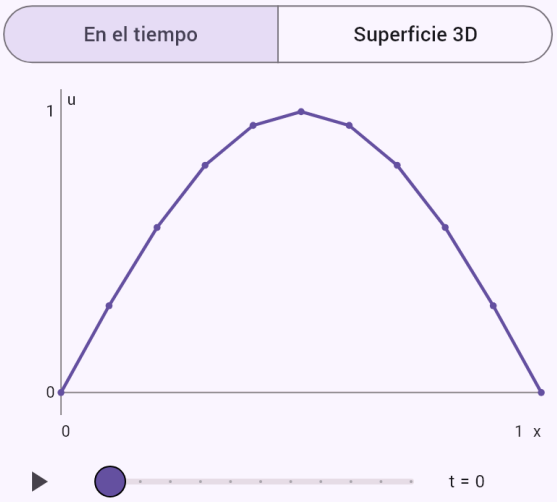
i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,(
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,(
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,(

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (exactamente $0{,}372708$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Gráfica



Puntos: la solución numérica en los nodos de la malla; a trazos: la solución exacta. El deslizador elige el nivel de tiempo.

El esquema de Lax-Wendroff para la ecuación de transporte, la condición CFL.

Enunciado: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =`

```
0.016; to = 0.4)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- La malla en $0 \le x \le 1$: 51 nodos, 25 pasos de tiempo hasta t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ es el número de Courant.
- La solución exacta se transporta a lo largo de las características $x - t = C$ con velocidad a = 1
- El esquema de Lax-Wendroff – desarrollo de Taylor hasta segundo orden, u_tt sustituido por a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- La condición CFL (el dominio numérico de dependencia contiene la característica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Análisis de von Neumann: el error se descompone en ondas e^(iβx), cada una se multiplica en un paso por la amplificación G. El esquema es estable si |G| ≤ 1 para todo β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; se cumple porque $|\nu| \le 1$
- El primer nivel de tiempo

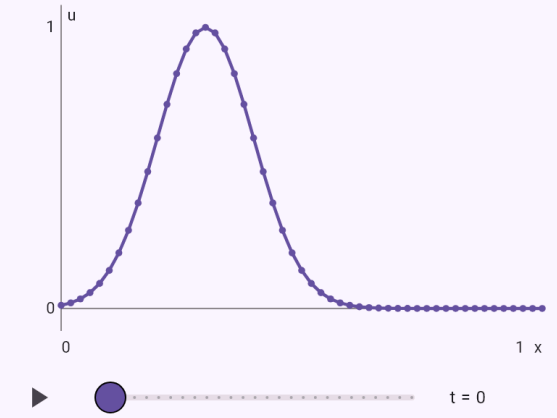
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (exactamente $0{,}135335$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Gráfica



Puntos: la solución numérica en los nodos de la malla; a trazos: la solución exacta. El deslizador elige el nivel de tiempo.

El esquema de cinco puntos y SOR con ω óptimo – comparado con Jacobi y Gauss-Seidel.

Enunciado: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Una malla cuadrada: $h = 0{,}1$, 121 nodos, 81 de ellos incógnitas interiores.
- El esquema de cinco puntos – u_xx + u_yy sustituido por diferencias, una ecuación en cada nodo: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- La sobrerrelajación sucesiva (SOR) – el paso de Gauss-Seidel «estirado» por el factor ω: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- El factor de relajación óptimo a partir del radio espectral de la iteración de Jacobi $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511$, $\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Las iteraciones desde una estimación nula en el interior (nodos elegidos y el mayor cambio)

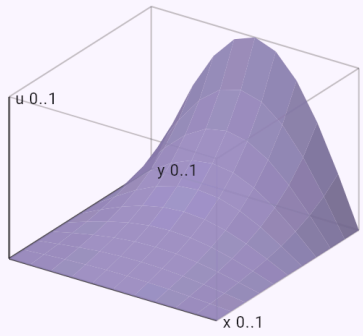
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- La iteración terminó tras 20 pasos, cuando el mayor cambio bajó de 10^{-4}
- Los métodos en la misma malla con la misma tolerancia: Jacobi 102 iteraciones, Gauss-Seidel 61, SOR con ω = 1,528 solo 20
- Métodos más rápidos para el mismo sistema (81 incógnitas): gradiente conjugado 10 iteraciones, multimalla 5 ciclos V. El número de ciclos V apenas depende de lo fina que sea la malla.
- Los valores en los nodos de la malla

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}0028$ (exactamente $0{,}199268$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Una fuente de calor que se debilita con el tiempo: principio de Duhamel.

Enunciado: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Pasos

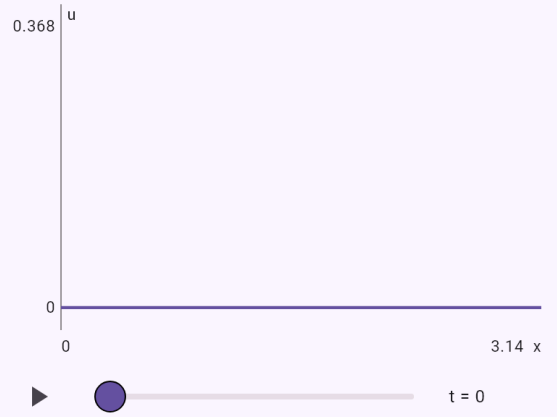
- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Condiciones: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Separación de variables: buscamos un producto; sustituido y dividido, las variables se separan – ambos lados deben ser iguales a la misma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes: $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Todos los coeficientes son nulos: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Desarrollamos la fuente $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ en las autofunciones igual que la condición inicial: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, con los coeficientes dados por una integral.
- La función inicial (de contorno) ya es una suma de funciones propias, así que solo unos pocos coeficientes $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ no son nulos: $f_1 = 1$, los demás son nulos.
- Principio de Duhamel: cada coeficiente de la serie cumple una ecuación ordinaria lineal con fuente; la solución es el decaimiento libre más la convolución de la fuente con el decaimiento

$$T_n' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- La fuente tiene solo un número finito de coeficientes no nulos; sus aportes salen exactos: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- La solución: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Una fuente de calor constante en la barra: el estado estacionario es una parábola.

Enunciado: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Resultado

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = u_{xx} + 1$
- Condiciones: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Ni la fuente ni los valores en el borde dependen del tiempo. Primero hallamos el estado estacionario: la solución de la ecuación sin derivada temporal $w'' + 1 = 0$ con las condiciones de contorno: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Buscamos $u = w(x) + v(x,t)$; la desviación v tiene condiciones de contorno nulas y ninguna fuente.
- Separación de variables: buscamos un producto; sustituido y dividido, las variables se separan – ambos lados deben ser iguales a la misma constante: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi x)$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes)

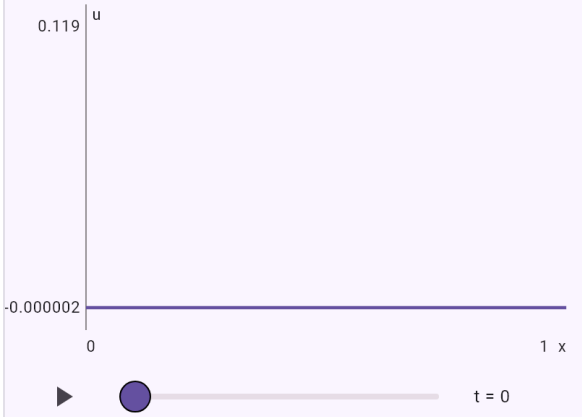
$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- La solución

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t}\, \sin(n\pi$$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Una barra aislada en la que entra calor por un extremo: la temperatura media crece linealmente.

Enunciado: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

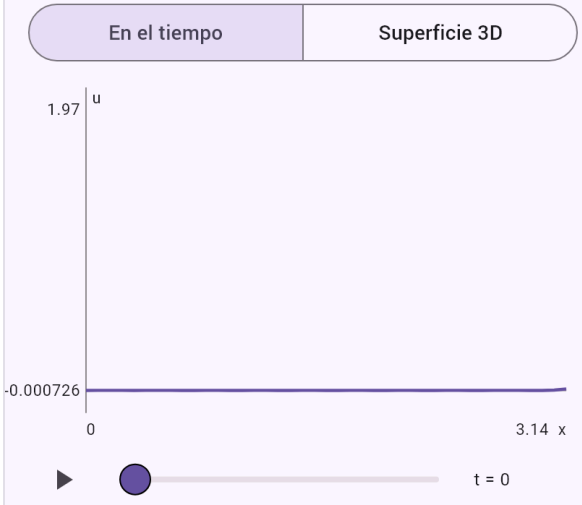
Resultado

$$u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = u_{xx}$
- Condiciones:
  $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, la ecuación es parabólica (como la ecuación del calor): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Ambos extremos están aislados, pero entra calor en la barra (un flujo en los extremos o una fuente). No hay estado estacionario: la temperatura media crece a razón $R = \frac{1}{\pi}$. Buscamos $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, donde W cumple la ecuación sin derivada temporal: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Separación de variables: buscamos un producto; sustituido y dividido, las variables se separan – ambos lados deben ser iguales a la misma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X' = 0 en ambos extremos (extremos aislados) tiene las soluciones $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes:
  $T_n' = -n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición):
  $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes):
  $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes)
  $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- La solución
  $u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Una cuerda agitada en su extremo con su propia frecuencia: resonancia, la amplitud crece con t.

Enunciado: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Resultado

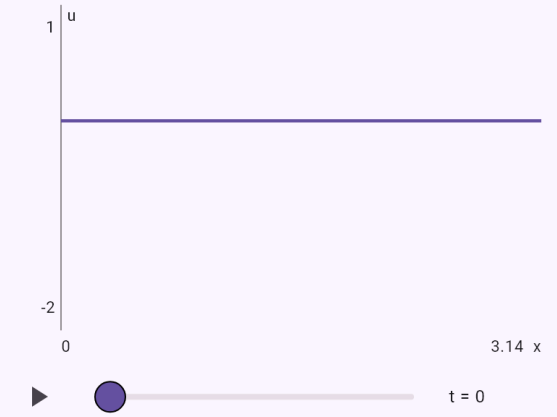
$$u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{tt} = u_{xx}$
- Condiciones: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, la ecuación es hiperbólica (como la ecuación de ondas): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Los valores en el borde cambian con el tiempo. Elegimos una función $w(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ que cumple las condiciones de contorno y buscamos $u = w + v$. La desviación v tiene condiciones de contorno nulas, pero su ecuación gana una fuente: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x\sin t}{\pi}$
- Separación de variables: buscamos un producto – ondas estacionarias; ambos lados son iguales a la misma constante: $u = X(x)\,T(t):\quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La parte temporal para cada n – oscilaciones con su propia frecuencia: $T_n'' + n^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n\cos nt + b_n\sin nt$
- La ecuación es lineal – una suma de soluciones es solución (superposición): $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\ \sin(nx)$
- Todos los coeficientes son nulos: $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes) $b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Desarrollamos la fuente $F(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi}$ en las autofunciones igual que la condición inicial: $F_n(t) = f_n\ \sin t$, con los coeficientes dados por una integral.
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes) $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\ \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Principio de Duhamel: cada coeficiente de la serie es una oscilación forzada, un oscilador con su propia frecuencia y una fuerza externa F_n(t). La solución es la oscilación libre más la convolución de la fuerza con la respuesta al impulso sin(ω_n t)/ω_n $T_n'' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(n$
- La integral se calcula en general para cada n (K_n es el núcleo del paso anterior); donde la fórmula general dividiría por cero (resonancia), por separado $\int_0^t K_n(t-s)\ \sin s\,\mathrm{d}s = \frac{n\sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- La solución $u(x,t) = \frac{x\sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\ \sin(nt)\ \sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Ecuación de Laplace con el lado inferior aislado (u_y = 0): cosh en lugar de sinh.

Enunciado: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Resultado

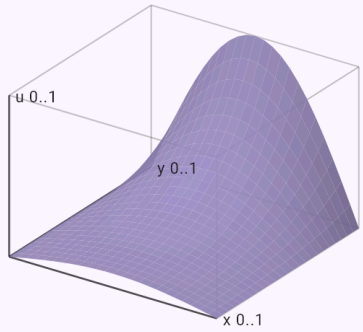
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condiciones: $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, la ecuación es elíptica (como la ecuación de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- El lado con valores no nulos (los demás tienen u = 0): $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Separación de variables: buscamos un producto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X = 0 en ambos extremos tiene soluciones no nulas solo para $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- La segunda ecuación Y" = λY con derivada nula en el lado opuesto (aislado) – de ahí cosh –, normalizada a 1 en el lado dado: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- La función inicial (de contorno) ya es una suma de funciones propias, así que solo unos pocos coeficientes $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ no son nulos: $c_1 = 1$, los demás son nulos.

- La solución: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Ecuación de Burgers: las características se cruzan y se forma una onda de choque.

Enunciado: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

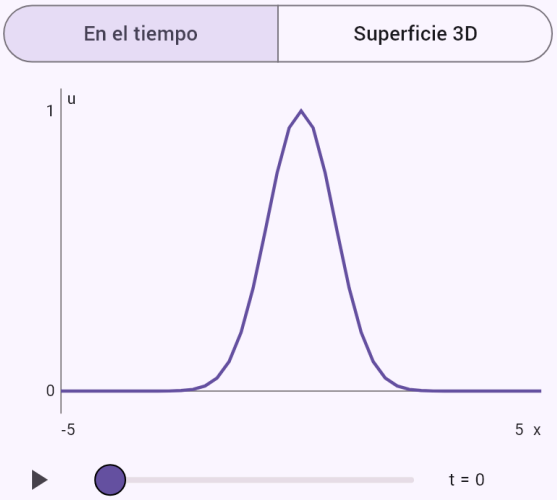
Resultado

$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t + uu_x = 0$
- Condiciones: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- La ecuación de Burgers es no lineal: la velocidad de propagación es el propio u. A lo largo de las características u es constante, así que las características son rectas $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$
- La solución viene dada implícitamente por $u = f(x - ut)$: para cada punto se busca el x_0 cuya característica llega a él.
- Donde f decrece, la parte más rápida de la onda alcanza a la más lenta y las características se cruzan. El primer cruce ocurre en el tiempo $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$: se forma una onda de choque y la solución suave deja de existir.
- La solución (implícita, hasta que se forma una onda de choque): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Ecuación de Burgers con viscosidad: transformación de Cole-Hopf a la ecuación del calor.

Enunciado: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

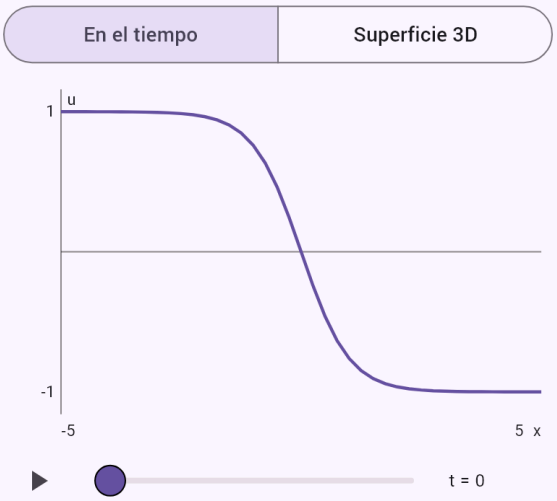
Resultado

$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Condiciones: $u(x,0) = -\tanh x$
- Con viscosidad v > 0 la transformación de Cole-Hopf linealiza la ecuación: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$; la ecuación de Burgers se convierte en la ecuación del calor.
- La condición inicial para φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- La ecuación del calor se resuelve con la convolución con el núcleo del calor; tras sustituir, u es un cociente de dos integrales, calculadas numéricamente para la gráfica $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}\,I}{\int K\,}$
- La integral no tiene forma elemental – la solución queda como convolución, la gráfica se calcula numéricamente: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Esquema de Godunov: la onda de choque avanza a velocidad 1/2.

Enunciado: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Resultado

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Malla: 61 nodos, 25 pasos de tiempo; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Una onda de choque la maneja el esquema conservativo de Godunov: el flujo F entre celdas sale de la solución exacta del problema de Riemann (un salto)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

- La condición CFL (el dominio numérico de dependencia contiene la característica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- La caída de u_L a u_R < u_L se propaga como onda de choque con la velocidad de la condición de Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x=-2$	$x=-1{,}4$	$x=-0{,}8$	$x=-0,$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- El resultado en el nodo central: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Calor en una placa cuadrada con ADI: estable incluso con paso grande.

Enunciado: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Malla: 121 nodos, 10 pasos de tiempo (los cocientes del paso temporal y los cuadrados de los pasos espaciales).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- El método de direcciones alternadas (ADI) de Peaceman y Rachford: medio paso es implícito en x y explícito en y, la otra mitad al revés

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Análisis de von Neumann: las dos mitades del paso tienen juntas la amplificación para cualquier paso: ADI es incondicionalmente estable.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- En la primera mitad del paso resolvemos 9 sistemas tridiagonales a lo largo de las filas de la malla y en la segunda 9 a lo largo de las columnas, cada uno con el algoritmo de Thomas. Es mucho más barato que un gran sistema para toda la malla.
- La solución en niveles de tiempo elegidos

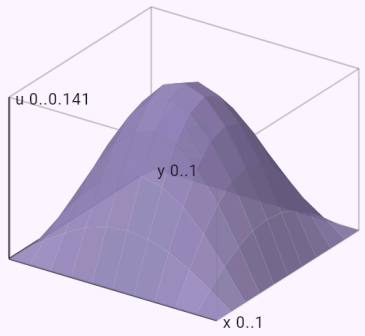
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	1,000000	1,000000
0,01	0,822069	0,822069
0,02	0,675798	0,675798
0,03	0,555553	0,555553
0,04	0,456703	0,456703
0,05	0,375442	0,375442
0,06	0,308639	0,308639
0,07	0,253723	0,253723
0,08	0,208578	0,208578
0,09	0,171465	0,171465
0,1	0,140956	0,140956

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel (exactamente $0{,}138911$ en el centro).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Ecuación de Laplace por gradiente conjugado: comparación con SOR y multimalla.

Enunciado: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

```
0.125)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$
- Una malla cuadrada: $h = 0{,}125$, 81 nodos, 49 de ellos incógnitas interiores.
- El esquema de cinco puntos – u_xx + u_yy sustituido por diferencias, una ecuación en cada nodo: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- El método del gradiente conjugado: el sistema $-\Delta_h u = -f$ es simétrico y definido positivo; cada paso reduce el error en una nueva dirección p_k, conjugada con las anteriores

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$$

- Las iteraciones desde una estimación nula en el interior (nodos elegidos y el mayor cambio)

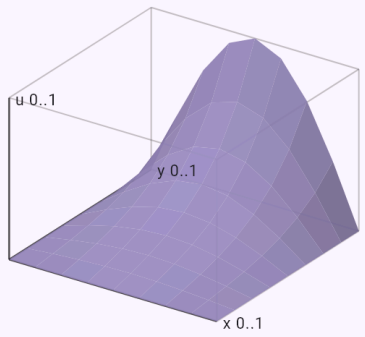
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- La iteración terminó tras 8 pasos, cuando el mayor cambio bajó de 10^{-4}
- Los métodos en la misma malla con la misma tolerancia: Jacobi 71 iteraciones, Gauss-Seidel 42, SOR con ω = $1{,}446$ solo 16
- Métodos más rápidos para el mismo sistema (49 incógnitas): gradiente conjugado 8 iteraciones, multimalla 5 ciclos V. El número de ciclos V apenas depende de lo fina que sea la malla.
- Los valores en los nodos de la malla

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j} \rvert \approx 0{,}00432$ (exactamente $0{,}199268$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Ecuación de Poisson por multimalla: unos pocos ciclos V en una malla fina.

Enunciado: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Una malla cuadrada: $h = 0{,}0625$, 289 nodos, 225 de ellos incógnitas interiores.
- El esquema de cinco puntos – u_xx + u_yy sustituido por diferencias, una ecuación en cada nodo

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$

- Multimalla (ciclo V): la iteración de Gauss-Seidel amortigua rápido solo la parte del error que varía rápidamente (S^2: dos barridos). El resto suave r pasa a la malla gruesa 2h, se corrige allí (de nuevo con multimalla) y la corrección se interpola de vuelta

$$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$

- Las iteraciones desde una estimación nula en el interior (nodos elegidos y el mayor cambio)

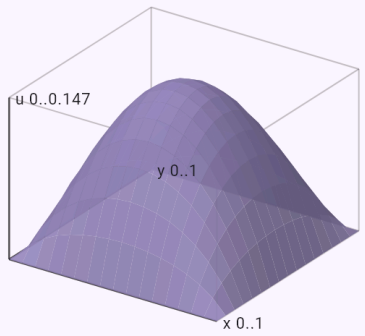
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- La iteración terminó tras 4 pasos, cuando el mayor cambio bajó de 10^{-4}
- Los métodos en la misma malla con la misma tolerancia: Jacobi 179 iteraciones, Gauss-Seidel 108, SOR con ω = $1{,}674$ solo 25
- Métodos más rápidos para el mismo sistema (225 incógnitas): gradiente conjugado 15 iteraciones, multimalla 4 ciclos V. El número de ciclos V apenas depende de lo fina que sea la malla.
- Los valores en los nodos de la malla

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (exactamente $0{,}147342$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Método de elementos finitos con triángulos: matriz de rigidez y el mismo sistema que el esquema de

cinco puntos.

Enunciado: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Una malla cuadrada: $h = 0{,}25$, 25 nodos, 9 de ellos incógnitas interiores.
- El método de elementos finitos: la ecuación se multiplica por una función de prueba v y se integra por partes (formulación débil); la solución se busca como combinación de funciones «sombrero» φ_j

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- La malla: cada celda se divide con una diagonal en dos triángulos rectángulos: 32 triángulos, 25 nodos, 9 de ellos incógnitas.
- La matriz de rigidez de un triángulo (los gradientes de las funciones lineales son constantes en él)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\, \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0, \\ -0, \end{pmatrix}$$

- Sumando los aportes de los seis triángulos alrededor de un nodo interior obtenemos su ecuación: en una malla regular es el esquema de cinco puntos multiplicado por h_x·h_y

$$4{,}0000\, u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + u$$

- El método del gradiente conjugado: el sistema $-\Delta_h u = -f$ es simétrico y definido positivo; cada paso reduce el error en una nueva dirección p_k, conjugada con las anteriores

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$$

- Las iteraciones desde una estimación nula en el interior (nodos elegidos y el mayor cambio)

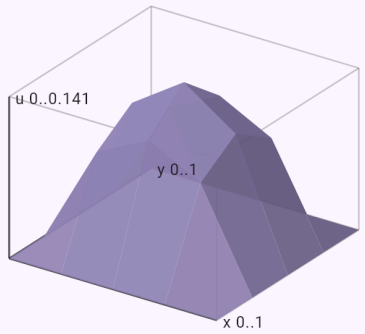
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- La iteración terminó tras 4 pasos, cuando el mayor cambio bajó de 10^{-4}
- Los métodos en la misma malla con la misma tolerancia: Jacobi 19 iteraciones, Gauss-Seidel 11, SOR con ω = $1{,}172$ solo 8
- Métodos más rápidos para el mismo sistema (9 incógnitas): gradiente conjugado 4 iteraciones, multimalla 3 ciclos V. El número de ciclos V apenas depende de lo fina que sea la malla.
- Los valores en los nodos de la malla

$y \backslash x$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$0{,}75$	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
$0{,}5$	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
$0{,}25$	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (exactamente $0{,}147342$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}140625$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Ecuación de Poisson en un cuadrado: serie de Fourier doble; compárela con el esquema sor.

Enunciado: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Resultado

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$

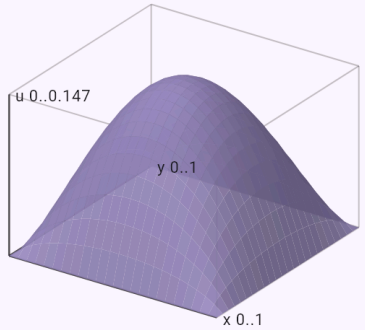
$$\frac{}{mn\pi^4\left(m^2 +\right.}$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Condiciones: $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, la ecuación es elíptica (como la ecuación de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- La parte con la fuente es una serie doble de las autofunciones de ambas direcciones: cada producto X_m·Y_n cumple las condiciones en los lados y el laplaciano solo lo multiplica por un número: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, donde $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- La fuente se desarrolla en la misma serie doble. Sustituyendo en Δv = f y comparando coeficientes se obtiene $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, es decir $f_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$ $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- La solución

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Derivadas en los cuatro lados: condición de solubilidad y solución salvo una constante.

Enunciado: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 +`

cos(πx)

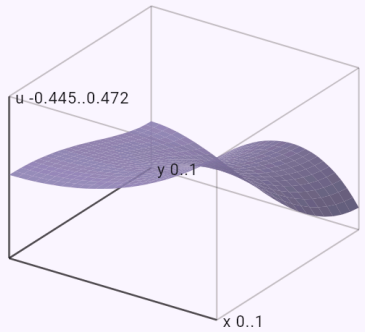
Resultado

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Condiciones $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, la ecuación es elíptica (como la ecuación de Laplace): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- En los cuatro lados se da la derivada (un flujo). Por el teorema de Gauss, el flujo total a través del borde debe corresponder a la fuente interior ($\iint_\Omega f\,\mathrm{d}S = 0$): la condición de solubilidad. Se cumple; hay solución, pero solo salvo una constante aditiva. El flujo a través del borde $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Un polinomio cuadrático P asume los flujos medios de los lados; el resto v tiene en cada lado un flujo de media nula y se suma lado por lado como antes: $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; los flujos medios $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- El lado con valores no nulos (los demás tienen u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Separación de variables: buscamos un producto: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- El problema de valores propios $X'' + \lambda X = 0$ con X' = 0 en ambos extremos (extremos aislados) tiene las soluciones $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- En el lado dado se prescribe una derivada y el lado opuesto está aislado: cosh, normalizado para que su derivada en el lado dado sea 1: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- La función inicial (de contorno) ya es una suma de funciones propias, así que solo unos pocos coeficientes $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ no son nulos: $c_1 = 1$, los demás son nulos.
- La solución (C es una constante arbitraria: con derivadas en todos los lados, u queda fijada solo salvo un desplazamiento) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Coeficientes variables: problema de Sturm-Liouville con peso 1/x, autofunciones sin(n ln x).

Enunciado: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

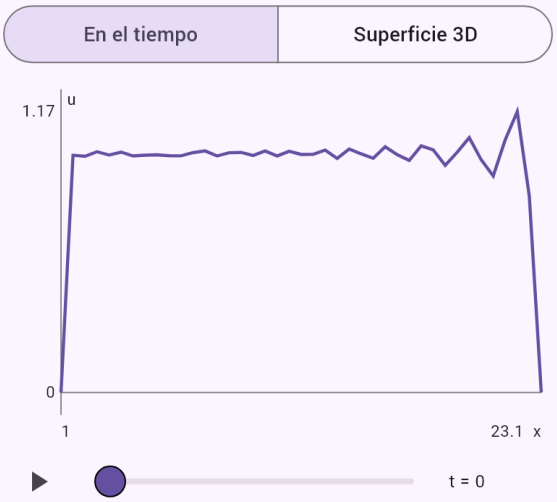
Resultado

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Pasos

- Resolvemos la ecuación en derivadas parciales $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Condiciones: $u(1,t) = 0, \quad u(e^{\pi},t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Separación de variables en una ecuación con coeficientes variables: ambos lados deben ser la misma constante:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Multiplicando la ecuación de X por una función adecuada se obtiene un problema de Sturm-Liouville $(xX')' + \lambda \dfrac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^{\pi}) = 0$ con p = x y el peso w = $\dfrac{1}{x}$. Sus autofunciones son ortogonales con el peso w.
- La ecuación de X es de Euler; se prueba X = x^r: $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0$. Una solución no nula con X = 0 en ambos extremos solo existe para raíces complejas: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Las condiciones en los extremos dan
  $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Ortogonalidad de las autofunciones con el peso w: $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; su norma $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- La parte temporal para cada n – un decaimiento exponencial, las frecuencias altas se amortiguan antes: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Los coeficientes de la función inicial f son sus proyecciones con el peso w: $c_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Tras una sustitución pasan a ser los coeficientes de una serie de senos ordinaria de $\xi = \ln x$: 1
- Los coeficientes a partir de la función inicial (de contorno) gracias a la ortogonalidad de las funciones propias (integración por partes)
  $c_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- La solución
  $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Gráfica



La solución u en el tiempo t elegido con el deslizador; el botón la reproduce.

Esquema MUSCL con limitador: compare su error con los esquemas de Lax-Wendroff y Lax-Friedrichs.

Enunciado: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016;`

```
to = 0.4)
```

Resultado

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- La malla en $0 \le x \le 1$: 51 nodos, 25 pasos de tiempo hasta t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ es el número de Courant.
- La solución exacta se transporta a lo largo de las características $x - t = C$ con velocidad a = 1
- El esquema MUSCL: en cada celda un perfil lineal con la pendiente σ_i acotada por un limitador; el flujo viene de la celda aguas arriba desplazada medio paso. Segundo orden donde la solución es suave, sin oscilaciones en los saltos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\nu}{2}$$

- La pendiente de una celda la acota minmod: nula en un extremo, si no la menor de las dos diferencias laterales

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- La condición CFL (el dominio numérico de dependencia contiene la característica): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Un esquema con limitador es no lineal; en lugar del análisis de von Neumann se cumple que no aumenta la variación total (TVD: no aparecen oscilaciones nuevas): $TV(u^{n+1}) \le TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, siempre que $|\nu| \le 1$
- El primer nivel de tiempo

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

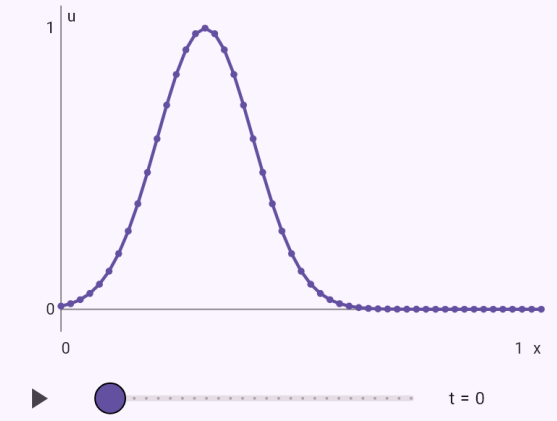
- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_i |u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}| \approx 0{,}0326$ (exactamente $0{,}135335$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



Puntos: la solución numérica en los nodos de la malla; a trazos: la solución exacta. El deslizador elige el nivel de tiempo.

Ecuación de Burgers con viscosidad por el esquema MUSCL, comparada con la transformación de Cole-Hopf.

Enunciado: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Resultado

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx},\ u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Malla: 41 nodos, 10 pasos de tiempo; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- El esquema MUSCL para la ecuación de Burgers: las pendientes acotadas σ_i (limitador) dan los valores en los bordes de las celdas, el flujo entre ellos sale de la solución de Godunov del salto y en el tiempo avanza el método de Heun (dos etapas)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- La pendiente de una celda la acota minmod: nula en un extremo, si no la menor de las dos diferencias laterales

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

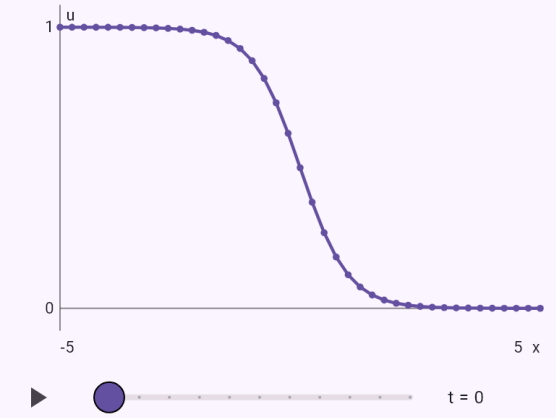
- La condición CFL (el dominio numérico de dependencia contiene la característica): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- El término viscoso ν·u_xx se suma con una diferencia central: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. El paso explícito es estable, ya que $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- La caída de u_L a u_R < u_L se propaga como onda de choque con la velocidad de la condición de Rankine-Hugoniot: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- La solución en niveles de tiempo elegidos

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- El mayor error respecto a la solución exacta en el último nivel: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (exactamente $0{,}811680$ en el centro).
- El resultado en el nodo central: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Gráfica

En el tiempo | Superficie 3D



Puntos: la solución numérica en los nodos de la malla; a trazos: la solución exacta. El deslizador elige el nivel de tiempo.

Elementos finitos en un dominio en forma de L: triangulación recortando orejas, superficie 3D solo sobre el dominio.

Enunciado: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h =`

0.25)

Resultado

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Pasos

- Resuelto numéricamente en una malla: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \ \ (\partial\Omega)$
- El dominio es un polígono con los vértices $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, de área $|\Omega| = 3{,}0000$
- El método de elementos finitos: la ecuación se multiplica por una función de prueba v y se integra por partes (formulación débil); la solución se busca como combinación de funciones «sombrero» φ_j

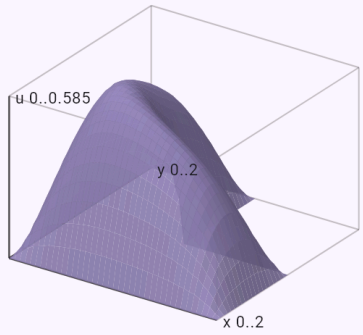
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulación: recortando «orejas» (un vértice convexo en cuyo triángulo no hay otro vértice) salen 4 triángulos; 4 veces cada uno se divide por los puntos medios de sus lados en cuatro: 1024 triángulos, 561 nodos, 465 de ellos interiores (incógnitas), arista mayor $h = 0{,}1398$
- La matriz de rigidez de un triángulo (los gradientes de las funciones lineales son constantes en él)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - $$

- Los valores en los nodos del borde están dados; sus aportaciones pasan al lado derecho: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- El sistema disperso K·U = F con 465 incógnitas lo resuelve el método del gradiente conjugado en 128 iteraciones. Valor máximo: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- El resultado en el nodo central: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Gráfica



La solución u como superficie sobre el dominio. Gírelo arrastrando el dedo.

Limitaciones conocidas

- Analíticamente solo ecuaciones lineales con una función incógnita u de dos variables y la ecuación de Burgers; otras ecuaciones no lineales y sistemas, no.
- Por separación de variables, las ecuaciones del calor y de ondas en un intervalo; una fuente solo como suma de productos p(x)·q(t), en la ecuación de Poisson como mucho tres productos p(x)·q(y). Coeficientes variables solo del tipo de Euler αx²u_xx + βxu_x con valores nulos en los extremos.
- La transformada de Fourier en forma cerrada para una gaussiana, un polinomio y funciones con f″ = λf; si no, queda la convolución y la gráfica se calcula numéricamente.
- Numéricamente en 2D, las ecuaciones del calor y de Laplace en un rectángulo con malla regular; en un polígono solo el método de elementos finitos con triángulos lineales y un valor en el borde (no una derivada), sin agujeros y con 40 vértices como mucho.

39. Recurrencias y funciones generatrices

La aplicación resuelve recurrencias lineales con coeficientes constantes de cualquier orden mediante la ecuación característica – también raíces múltiples y complejas (la forma compleja de la solución y su paso a la real por el teorema de De Moivre) – y con un lado derecho de la forma $P(n)\cdot q^n$ (también cos nφ, sin nφ, resonancia y suma de lados derechos). Las condiciones iniciales determinan las constantes; como comprobación, la aplicación calcula más términos con la recurrencia y los compara con la fórmula.

Con el chip «Método» se puede elegir también la función generatriz ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, fracciones parciales, series geométricas), las potencias de una matriz (diagonalización) o, en primer orden, la suma. Una recurrencia de primer orden con coeficiente variable ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) se resuelve con un producto (factoriales), las recurrencias no lineales convertibles con la sustitución $b_n = 1/a_n$ o $b_n = \ln a_n$. Un sistema de dos recurrencias se resuelve eliminando una sucesión o con la matriz, y una recurrencia de divide y vencerás $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ con $n = b^k$, junto con la estimación del teorema maestro.

Con la operación «Función generatriz» la aplicación halla la función generatriz de una sucesión dada por una fórmula ($n^2 + 2^n$) o por sus primeros términos (1, 0, 1, 0, …) y, al revés, la fórmula de a_n a partir de una función A(x). El número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (también con cotas o coeficientes: pagar con monedas) es un coeficiente de una función generatriz.

La gráfica muestra los términos de la sucesión como puntos (en un sistema, las dos sucesiones).

Una diferencia $\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n)$ («Δ(n^3)») y la ecuación en diferencias Δy_n = n como la recurrencia y_{n+1} − y_n = n. Una progresión aritmética o geométrica a partir de dos datos («a_3 = 7, a_7 = 19», «progresión geométrica a_2 = 6, a_5 = 162») – a_1, d o q, el término n-ésimo y los términos y sumas buscados (s_{10}, a_{20} = ?).

Una sucesión dada por su término n-ésimo (a_n = (n+1)/n) se estudia: los cinco primeros términos, la monotonía por la diferencia de términos vecinos, la acotación y el límite.

Cómo introducirlo

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Con paréntesis, las condiciones tras una coma.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Con subíndices (también de una foto). Sin condiciones: la solución general con constantes C_1, C_2.

`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	El índice puede bajar (a_{n-1}, a_{n-2}); un mismo valor puede darse a varios términos.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Un sistema: las ecuaciones en líneas, las condiciones en la última.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Divide y vencerás: un término en n/b.
`n^2 + 2^n`	La fórmula de una sucesión con la operación «Función generatriz» (también a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Los primeros términos separados por comas.
`1/(1 - x - x^2)`	Una función generatriz en x (también A(x) = …): la fórmula de a_n.
`número de soluciones x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	El número de soluciones enteras no negativas con cotas.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Una diferencia y una ecuación en diferencias.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Una progresión a partir de términos dados – aritmética sin palabra, geométrica con «geométrica».

Ejemplos

Dos raíces reales distintas, comprobación con más términos.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

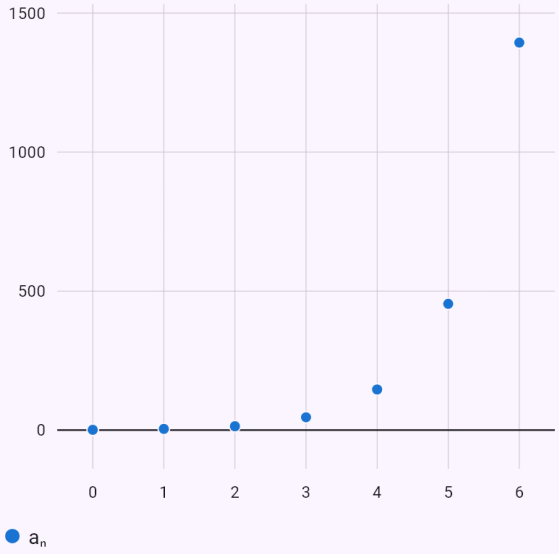
Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- El discriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; las raíces: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- La solución general: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ 2C_1 + 3C_2 &= 4 \end{aligned}$$

- La solución que cumple las condiciones dadas: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Comprobación: la recurrencia da $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

La sucesión de Fibonacci: la fórmula de Binet.

Enunciado: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

Resultado

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

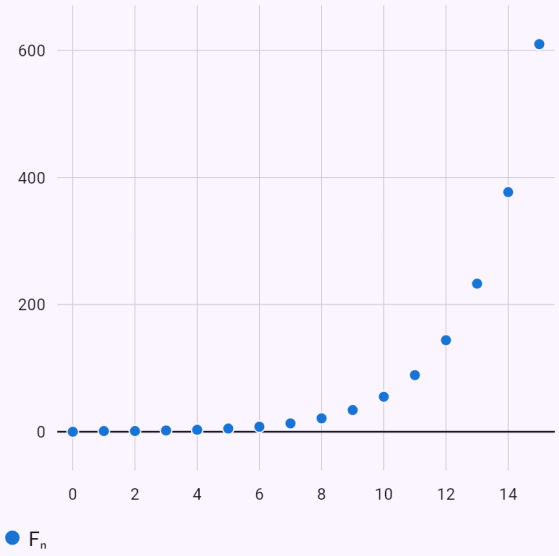
Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Buscamos soluciones $F_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^{n-2} obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- El discriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; las raíces: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- La solución general $F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$

- La solución que cumple las condiciones dadas $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Comprobación: la recurrencia da $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Raíces complejas 1 ± i: la forma compleja y el teorema de De Moivre.

Enunciado: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Resultado

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

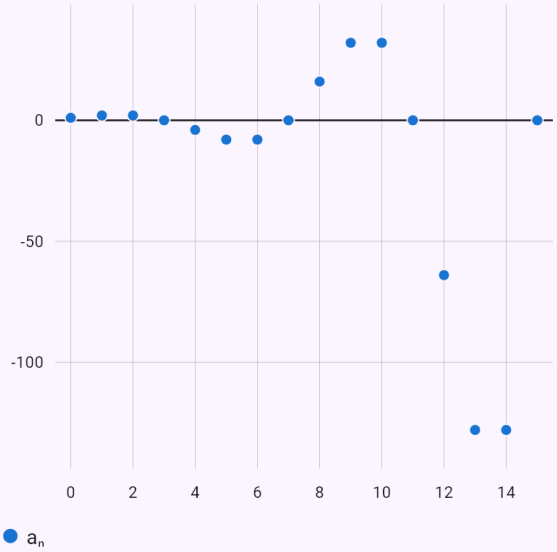
Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; las raíces: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Escribimos las raíces complejas $1 \pm i$ en forma trigonométrica: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, es decir $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Por el teorema de De Moivre $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- La solución general en forma compleja (constantes complejas): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Sumando los términos conjugados, con nuevas constantes reales obtenemos la forma real
  $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1,\ C_2 = 1$

$$C_1 = 1$$
$$C_1 + C_2 = 2$$

- La solución que cumple las condiciones dadas
  $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Comprobación: la recurrencia da $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

El lado derecho n, una raíz doble 2.

Enunciado: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Resultado

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- El discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; las raíces: $\lambda_{1,2} = 2$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- El lado derecho n tiene forma especial; el número 1 no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $a_n^{(p)} = An + B$
- Sustituimos en la recurrencia y agrupamos los términos: $An + B - 2A = n$
- Comparamos los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de donde $A = 1,\ B = 2$

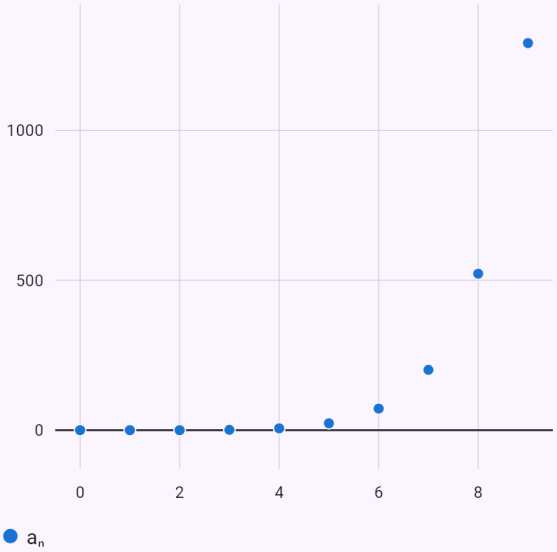
$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \end{aligned}$$

- Una solución particular: $a_n^{(p)} = n + 2$
- La solución general: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_1 + 2 &= 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- La solución que cumple las condiciones dadas: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Comprobación: la recurrencia da $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

La misma recurrencia con la función generatriz.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Función generatriz

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Introducimos la función generatriz $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Multiplicamos la recurrencia por x^{n+2} y sumamos para todo n ≥ 0

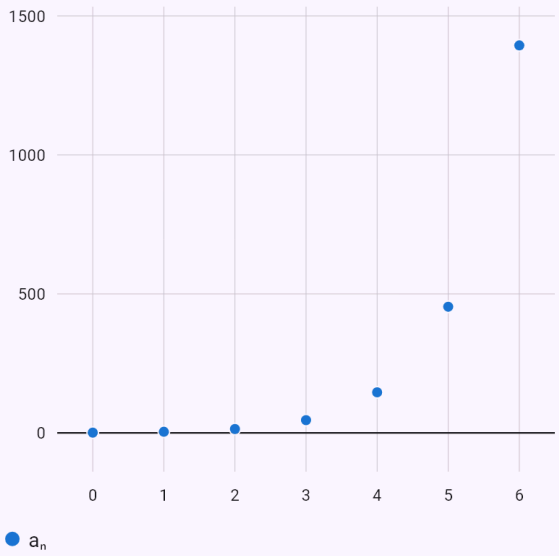
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Expresamos las sumas mediante la función generatriz y los valores iniciales:
  $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Despejamos la función generatriz y factorizamos el denominador: $A(x) = \dfrac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Descomposición en fracciones parciales:
  $A(x) = -\dfrac{1}{1 - 2x} + \dfrac{2}{1 - 3x}$
- Desarrollamos las fracciones en series geométricas

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- El coeficiente de x^n es el término buscado:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

La misma recurrencia con potencias de una matriz.

Enunciado: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Potencias de una matriz

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- La recurrencia en forma matricial es decir $v_{n+1} = M \cdot v_n$ con

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sustituyendo repetidamente, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Los valores propios de la matriz:
  $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, luego
  $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Los vectores propios, soluciones de $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalizamos la matriz, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

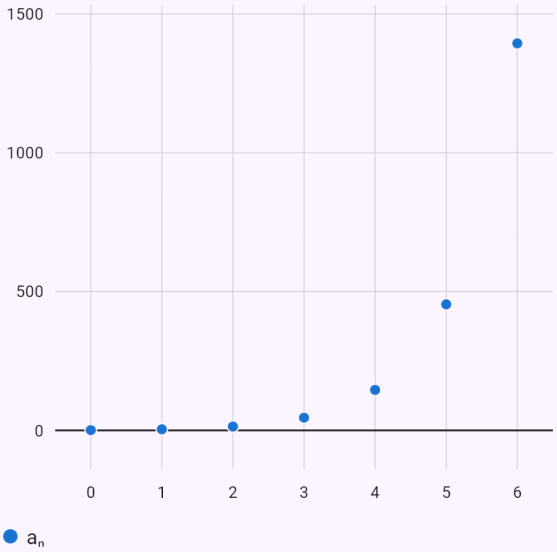
- La potencia de la matriz los coeficientes así que $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- La solución que cumple las condiciones dadas:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Comprobación: la recurrencia da
  $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Una recurrencia de primer orden sumando.

Enunciado: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Suma

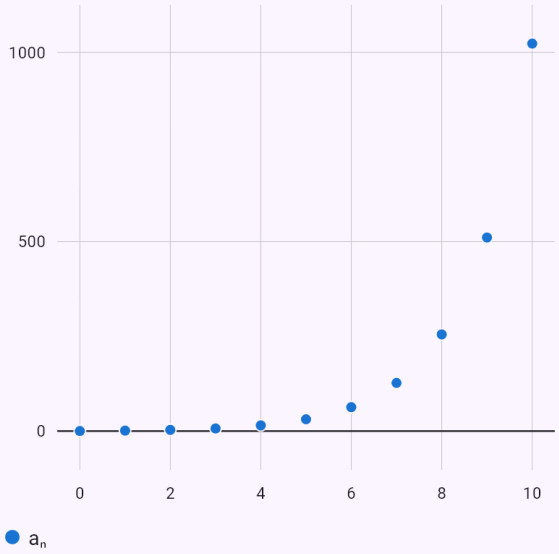
Resultado

$$a_n = 2^n - 1$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 1 con coeficientes constantes: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Sustituimos la recurrencia en sí misma repetidamente: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \ldots$; en general $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Calculamos la suma: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $a_n = 2^n - 1$
- Comprobación: la recurrencia da $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Un coeficiente variable: el producto da un factorial.

Enunciado: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Resultado

$$a_n = n!$$

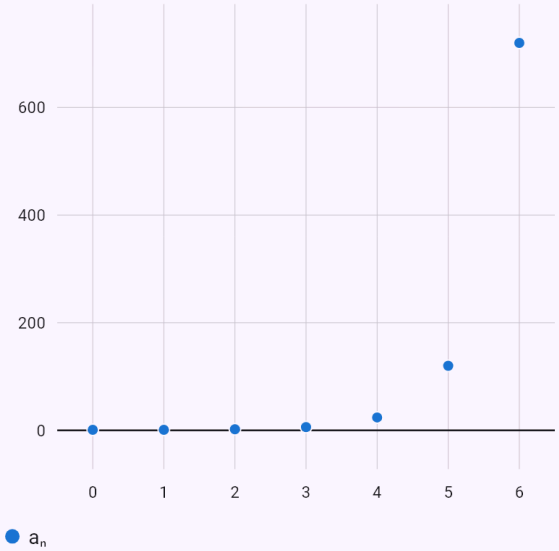
Pasos

- Recurrencia lineal de primer orden con coeficiente variable: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Sustituyendo la recurrencia en sí misma repetidamente, el término es un producto

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1$$

- Simplificamos el producto (los factoriales se cancelan): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $a_n = n!$
- Comprobación: la recurrencia da $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Una recurrencia no lineal: la sustitución $b_n = 1/a_n$.

Enunciado: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

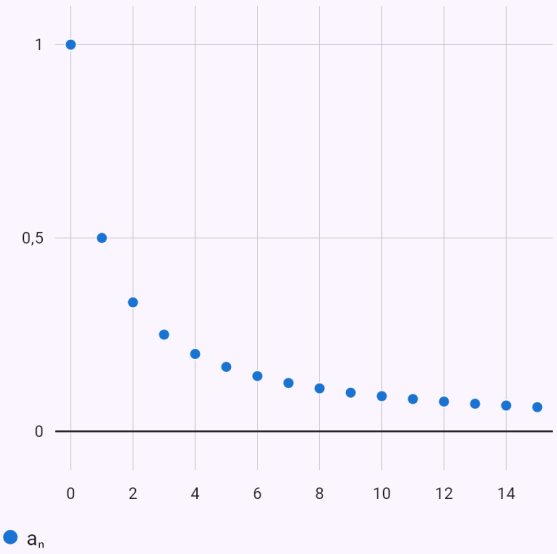
Resultado

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Pasos

- Una recurrencia no lineal: los inversos de los términos la vuelven lineal: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Invertimos ambos lados: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; la sustitución $b_n = \frac{1}{a_n}$ vuelve así lineal la recurrencia: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Las condiciones iniciales de la nueva sucesión: $b_0 = 1$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Buscamos soluciones $b_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda - 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = 1$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $b_n^{(h)} = C_1$
- El lado derecho 1 tiene forma especial; el número 1 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por n: $b_n^{(p)} = An$
- Sustituimos en la recurrencia y agrupamos los términos: $A = 1$
- Una solución particular: $b_n^{(p)} = n$
- La solución general: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- La solución que cumple las condiciones dadas:
  $b_n = 1 + n$
- Comprobación: la recurrencia da $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4,$ igual que la fórmula.
- Volvemos a la sucesión original: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Un sistema de dos recurrencias eliminando la sucesión b_n.

Enunciado: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

```
a_0 = 1, b_0 = 0
```

Resultado

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Pasos

- Un sistema de dos recurrencias lineales
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$

- De la primera ecuación $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, luego $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; al sustituir en la segunda obtenemos una recurrencia para una sola sucesión:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$

- La segunda condición inicial sale de la primera ecuación:
  $a_1 = 1 + 0 = 1$

- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica:
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

- El discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; las raíces:
  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$

- La solución general:
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$

- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + C_2 = 1$$

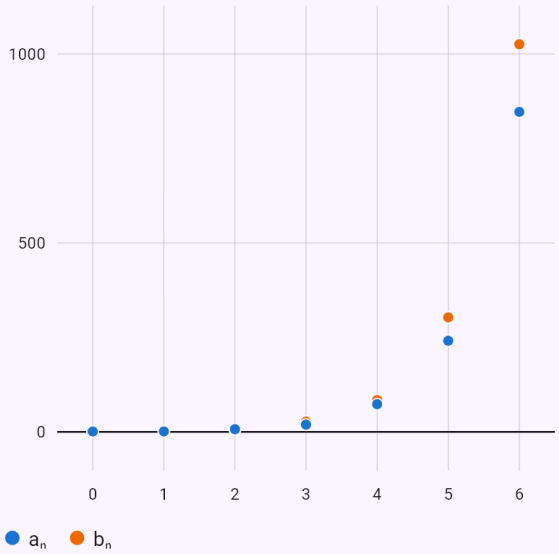
$$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$

- La solución que cumple las condiciones dadas:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$

- Comprobación: la recurrencia da
  $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$, igual que la fórmula.

- La otra sucesión a partir de la expresión
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Divide y vencerás (merge sort): n = 2^k y el teorema maestro.

Enunciado: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Resultado

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Condiciones: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Pasos

- Una recurrencia de tipo divide y vencerás: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Para n potencia de la base: la sustitución $n = 2^k,\ S_k = T(2^k)$ da una recurrencia lineal de primer orden: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Las condiciones iniciales de la nueva sucesión: $S_0 = 1$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Buscamos soluciones $S_k = \lambda^k$; al sustituir y dividir entre λ^k obtenemos la ecuación característica: $\lambda - 2 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = 2$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- El lado derecho 2^{k+1} tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por k: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Sustituimos en la recurrencia, dividimos entre 2^k y agrupamos los términos: $2A = 2$
- De donde $A = 1$
- Una solución particular: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- La solución general: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1$

  $C_1 = 1$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Comprobación: la recurrencia da $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$, igual que la fórmula.
- Volvemos a n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- El teorema maestro (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, luego T(n) = $\Theta(n \log n)$

La función generatriz de la sucesión $n^2 + 2^n$.

Enunciado: `n^2 + 2^n` Función generatriz

Resultado

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Pasos

- Introducimos la función generatriz $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- Separamos la serie por linealidad: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Una serie conocida: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Una serie conocida: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Multiplicar los términos por n equivale a derivar y multiplicar por x

  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Multiplicar los términos por n equivale a derivar y multiplicar por x

  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- La función generatriz: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Comprobación: el desarrollo empieza por los términos de la sucesión: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \ldots$

La fórmula de a_n a partir de una función generatriz: fracciones parciales con raíces irracionales.

Enunciado: `1/(1 - x - x^2)` Función generatriz

Resultado

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}($$

Pasos

- Despejamos la función generatriz y factorizamos el denominador

$$A(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Descomposición en fracciones parciales

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Desarrollamos las fracciones en series geométricas

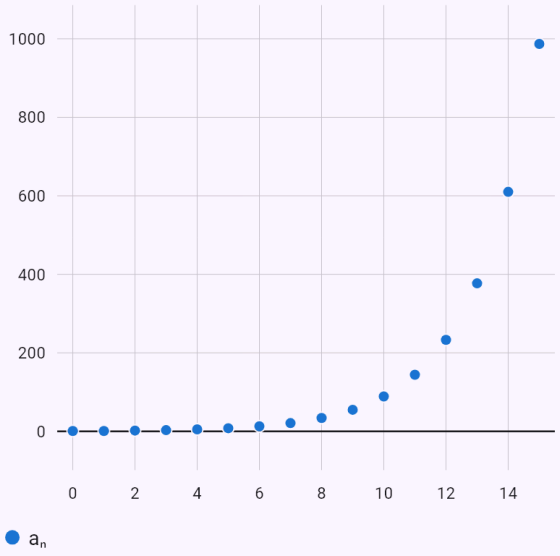
$$\frac{1}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$$

- El coeficiente de x^n es el término buscado

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Comprobación: el desarrollo empieza por los términos de la sucesión: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

El número de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ con $x_1 \le 3$.

Enunciado: `número de soluciones x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Resultado

38

Pasos

- La incógnita x_1 $(0 \le x_1 \le 3)$ aporta la serie $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$
- La incógnita x_2 $(x_2 \ge 0)$ aporta la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- La incógnita x_3 $(x_3 \ge 0)$ aporta la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$
- La función generatriz es su producto: el coeficiente de x^N cuenta las soluciones: $G(x) = \frac{1-x^4}{(1-x)^3}$
- El número de soluciones es el coeficiente de x^{10}: 38

La diferencia de una función.

Enunciado: `Δ(n^3)`

Resultado

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Pasos

- La diferencia – el incremento de la función cuando n crece en 1

  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3r$

Una ecuación en diferencias como recurrencia.

Enunciado: `\Delta y_n = n`

Resultado

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 1 con coeficientes constantes: $y_{n+1} - y_n = n$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Buscamos soluciones $y_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda - 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = 1$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $y_n^{(h)} = C_1$
- El lado derecho n tiene forma especial; el número 1 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por n: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- Sustituimos en la recurrencia y agrupamos los términos:

  $2An + A + B = n$
- Comparamos los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de donde $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $2A = 1$

  $A + B = 0$
- Una solución particular: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- La solución general: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Una progresión aritmética a partir de dos términos y la suma de diez términos.

Enunciado: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Resultado

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Pasos

- Una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Los datos forman un sistema
  $a_3 = a_1 + 2d = 7$
  $a_7 = a_1 + 6d = 19$
- La solución del sistema: $a_1 = 1,\ d = 3$
- El término n-ésimo: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Los valores buscados: $s_{10} = 145$

Una progresión geométrica a partir de dos términos.

Enunciado: `progresión geométrica a_2 = 6, a_5 = 162`

Resultado

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Pasos

- Una progresión geométrica: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Los datos forman un sistema
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- La solución del sistema: $a_1 = 2,\ q = 3$
- El término n-ésimo: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Las propiedades de una sucesión dada por una fórmula.

Enunciado: `a_n = (n+1)/n`

Resultado

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Pasos

- Los cinco primeros términos
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- La diferencia de términos vecinos
  $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2+n}$ es negativa para todo $n \geq 1$: la sucesión es decreciente.
- El límite $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$: la sucesión es convergente.
- La sucesión está acotada: $1 < a_n \leq 2$

Limitaciones conocidas

- Todavía no: recurrencias lineales de orden superior con coeficientes variables, sistemas de tres o más recurrencias, divide y vencerás con varios términos (T(n/2) y T(n/3)) y recurrencias no lineales que estas sustituciones no vuelven lineales.
- Una progresión a partir de términos dados necesita exactamente dos datos (términos, sumas, d o q).

40. Métodos numéricos

Los métodos numéricos están en la pantalla de inicio, en la sección «Aplicaciones», campo Métodos numéricos: raíces de ecuaciones (bisección, Newton, secante, regula falsi, iteración de punto fijo), integrales numéricas (métodos del trapecio, de Simpson y de Romberg), derivadas numéricas con cocientes de diferencias, ecuaciones diferenciales (métodos de Euler, de Heun y de Runge–Kutta), sistemas lineales (métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel, descomposición LU), interpolación (polinomio de Lagrange y de Newton, spline cúbico) y mínimos cuadrados. La integral y la derivada se pueden calcular también a partir de una tabla de valores medidos.

Ecuaciones diferenciales también con métodos multipaso – Adams-Bashforth y el predictor-corrector Adams-Bashforth-Moulton (con arranque por Runge-Kutta) –, con el método adaptativo RK45 (Dormand-Prince, una tabla de los pasos aceptados y rechazados según la estimación del error, notación tol=…) y con métodos implícitos para ecuaciones rígidas: el método de Euler implícito y la regla del trapecio (Crank-Nicolson), con el método de Newton en cada paso. En una ecuación con $\partial f/\partial y < 0$, la solución muestra la estabilidad del método: $h\lambda$ y el factor de amplificación $|R(h\lambda)|$; si es mayor que 1, un método explícito diverge y el cálculo lo indica.

Problemas de contorno $y'' = f(x, y, y')$ con las condiciones $y(a)$, $y(b)$: por el método del disparo (la pendiente inicial por el método de la secante, cada disparo con Runge-Kutta) y por diferencias finitas (una ecuación lineal como sistema tridiagonal resuelto por el algoritmo de Thomas, con tablas del barrido hacia delante y de la sustitución hacia atrás); si el resolutor de EDO encuentra la solución exacta, se compara en los nodos. La ecuación del movimiento $x'' = a(x)$ la resuelve el método simpléctico de Verlet junto a RK4, mostrando cómo evoluciona en cada uno el error de la energía total.

Los pasos muestran la fórmula del método, la tabla de iteraciones o de valores en los nodos, la condición de parada (precisión por defecto $\varepsilon = 10^{-4}$, como mucho 50 iteraciones) y la estimación del error; donde se conoce el valor exacto, se compara con él. Se comprueban las condiciones de convergencia: el cambio de signo en el intervalo, la condición de Fourier para empezar el método de Newton, $|g'(x)| < 1$ en la iteración de punto fijo, la dominancia diagonal y el radio espectral en los sistemas. La gráfica muestra las tangentes o secantes, los trapecios o parábolas, la solución numérica de una ecuación diferencial frente a la exacta y el polinomio ajustado con los puntos.

En un problema corriente – una ecuación con una incógnita, una integral definida, una ecuación diferencial con condición inicial – la aplicación ofrece bajo el resultado los chips «Resolver con un método numérico»; el formulario se rellena con el enunciado. Donde no hay forma exacta o resulta innecesariamente complicada ($x = \cos x$, las fórmulas de Cardano), la oferta aparece destacada, y una ecuación que no se resuelve algebraicamente se resuelve directamente por el método de Newton. Las aplicaciones que calculan un número sin mostrarlo (la tasa interna de retorno, la TAE, la rentabilidad de

un bono, el pH de un ácido poliprótico, Runge–Kutta en los modelos) tienen bajo el resultado una línea plegada «El método» con una tabla corta de iteraciones.

Cómo introducirlo

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	El método – su nombre en inglés – y tras los puntos y coma la ecuación, la estimación inicial x0, la precisión tol y, opcionalmente, max (iteraciones) y stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Una función f(x) (se resuelve f(x) = 0) y el intervalo a, b. Sin intervalo ni estimación, las raíces se separan automáticamente.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	La integral de una función entre a y b con n subintervalos; también trapezoid y romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	La integral de valores medidos: x e y separados por espacios.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	La derivada en el punto at con el paso h; desde una tabla x=…; y=… (at opcional).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Una ecuación diferencial de primer orden con su condición inicial, el paso h y el final del intervalo to; también euler y heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Un sistema: las ecuaciones tras puntos y coma o en líneas; también jacobi y lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Los puntos x, y y el punto at; también newtonpoly y spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Un polinomio de mínimos cuadrados de grado degree.

Ejemplos

Una ecuación que no se resuelve algebraicamente: la aplicación la resuelve por el método de Newton y

ofrece los demás.

Enunciado: `x = cos x`

Resultado

$x \approx 0{,}7391$

Resolver con un método numérico:

Σ Bisección | Σ Secante | Σ Regula falsi | Σ Punto fijo

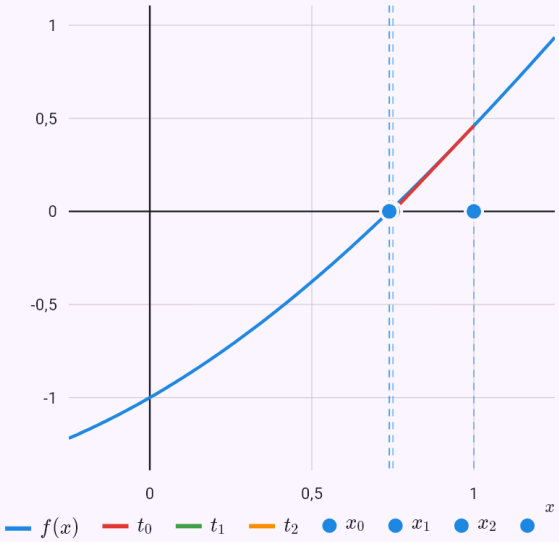
Pasos

- Buscamos una raíz de la ecuación $x = \cos x$, es decir, un cero de la función $f(x) = x - \cos x$
- Separamos las raíces con una tabla de valores: la función cambia de signo en los intervalos $[0,\ 1]$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Una función continua tiene una raíz en cada uno de ellos.
- El método de Newton necesita la derivada: $f'(x) = \sin x + 1$
- La estimación inicial $x_0 = 1$ elegida según la condición de Fourier, en el extremo donde $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); desde él las tangentes convergen a la raíz de forma monótona.
- Método de Newton: desde el punto x_n por la tangente hasta el eje x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-}$
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- La condición de parada $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert < 10^{-4}$ se cumple tras 3 iteraciones.
- Estimación del error por el teorema del valor medio, $m_1 = \min \lvert f'(x) \rvert \approx 1$ en el intervalo $[0,\ 1]$: $\lvert \xi - x_n \rvert \leq \dfrac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Resultado del método: $x \approx 0{,}7391$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Método de Newton con la raíz separada automáticamente y el inicio según la condición de Fourier.

Enunciado: `newton(x^3 - x - 2)`

Resultado

$$x \approx 1{,}5214$$

Pasos

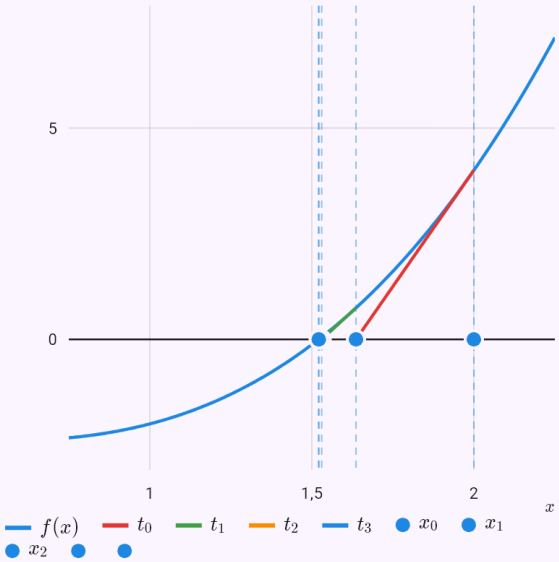
- Buscamos una raíz de la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$, es decir, un cero de la función $f(x) = x^3 - x - 2$
- Separamos las raíces con una tabla de valores: la función cambia de signo en los intervalos $[1,\ 2]$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Una función continua tiene una raíz en cada uno de ellos.
- El método de Newton necesita la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- La estimación inicial $x_0 = 2$ elegida según la condición de Fourier, en el extremo donde $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); desde él las tangentes convergen a la raíz de forma monótona.
- Método de Newton: desde el punto x_n por la tangente hasta el eje x, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- La condición de parada $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ se cumple tras 4 iteraciones.
- Estimación del error por el teorema del valor medio, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 2$ en el intervalo $[1,\ 2]$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Resultado del método: $x \approx 1{,}5214$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Bisección en un intervalo dado con la estimación del error.

Enunciado: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Resultado

$$x \approx 1{,}5214$$

Pasos

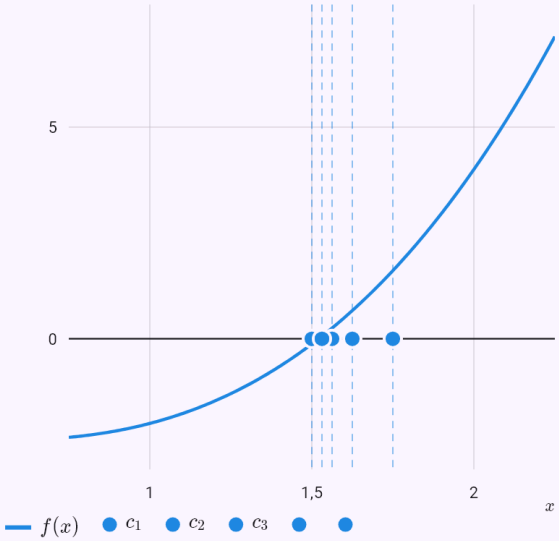
- Buscamos una raíz de la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$, es decir, un cero de la función $f(x) = x^3 - x - 2$
- En el intervalo $[1,\ 2]$, $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$: signos opuestos, la función continua tiene allí una raíz.
- Bisección: el punto medio del intervalo $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, nos quedamos con la mitad en la que f cambia de signo.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- La condición de parada $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ se cumple tras 14 iteraciones.
- Estimación del error: la raíz ξ está en el último intervalo, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$

- Resultado del método: $x \approx 1{,}5214$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Método de la secante a partir de dos estimaciones.

Enunciado: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Resultado

$$x \approx 2{,}0946$$

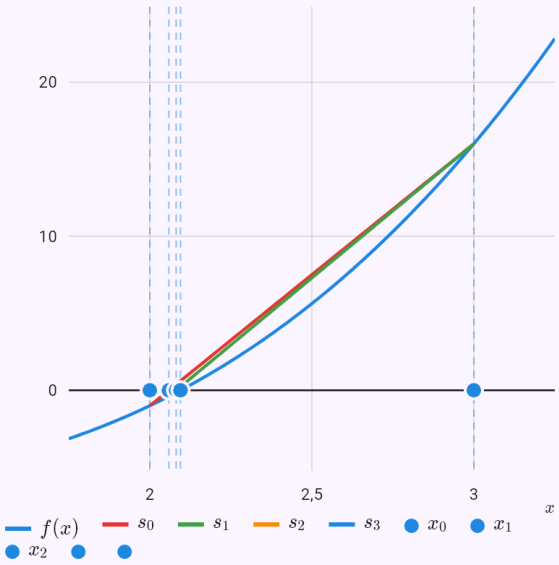
Pasos

- Buscamos una raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$, es decir, un cero de la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Método de la secante: la secante de los dos últimos puntos sustituye a la tangente,
  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	$-1{,}000000$	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	$-0{,}390800$	0,941176
3	2,081264	$-0{,}147204$	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	$-0{,}000023$	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- La condición de parada $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ se cumple tras 6 iteraciones.
- Estimación del error por el teorema del valor medio, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ en el intervalo $[2,\ 3]$:
  $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Resultado del método: $x \approx 2{,}0946$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Iteración de punto fijo con la condición de convergencia |g'(x)| < 1 comprobada.

Enunciado: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Resultado

$$x \approx 0{,}7391$$

Pasos

- La ecuación $x = \cos x$ escrita como x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Condición de convergencia: $g'(x) = -\sin x$, en el intervalo $[0,\ 1]$ es $q = \max |g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1: g es una contracción y la iteración converge.
- Iteración de punto fijo: $x_{n+1} = g(x_n)$.

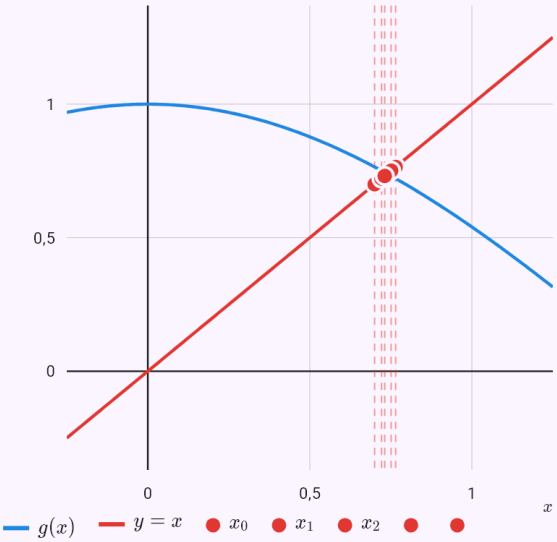
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- La condición de parada $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ se cumple tras 18 iteraciones.
- Estimación del error de la iteración de punto fijo

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Resultado del método: $x \approx 0{,}7391$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Regla de Simpson, estimación del error de Runge y comparación con el valor exacto.

Enunciado: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Resultado

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}746825$$

Pasos

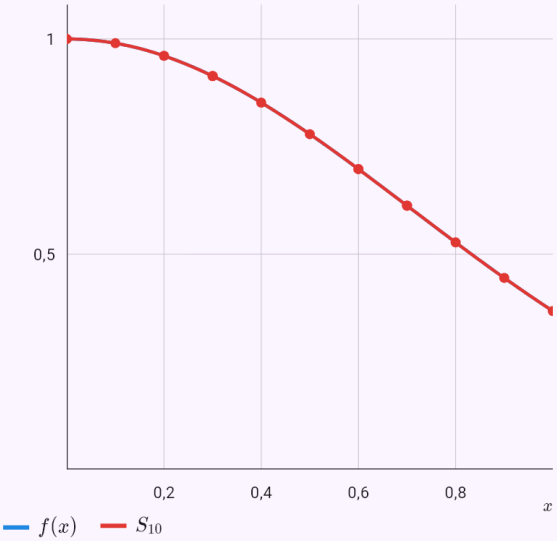
- Calculamos la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ numéricamente.
- El paso: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Los valores en los nodos y sus coeficientes

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Regla de Simpson
  $S_n = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \frac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Para comparar, el valor exacto
  $I = \frac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, el error del método
  $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Resultado del método: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}746825$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Tabla de Romberg para una integral sin primitiva elemental.

Enunciado: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Resultado

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

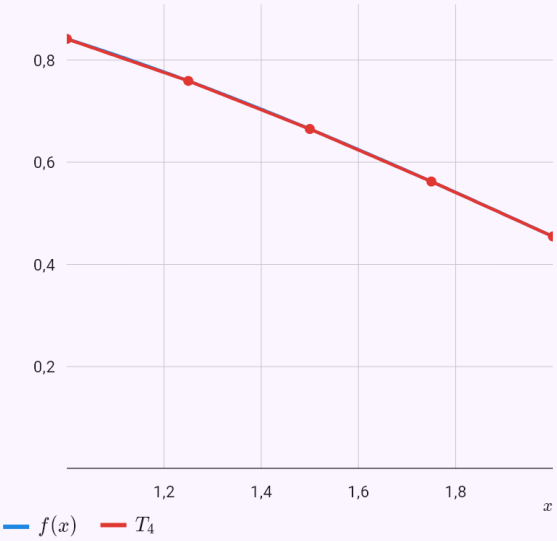
Pasos

- Calculamos la integral $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ numéricamente.
- Método de Romberg: la primera columna son los trapecios con los pasos h, h/2, h/4, …, las siguientes los refinan con la extrapolación de Richardson,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- La condición de parada $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ se cumple tras 2 iteraciones.
- Para comparar, el valor exacto el error del método
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Resultado del método: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La distancia a partir de una velocidad medida con la regla del trapecio.

Enunciado: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Resultado

$$\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

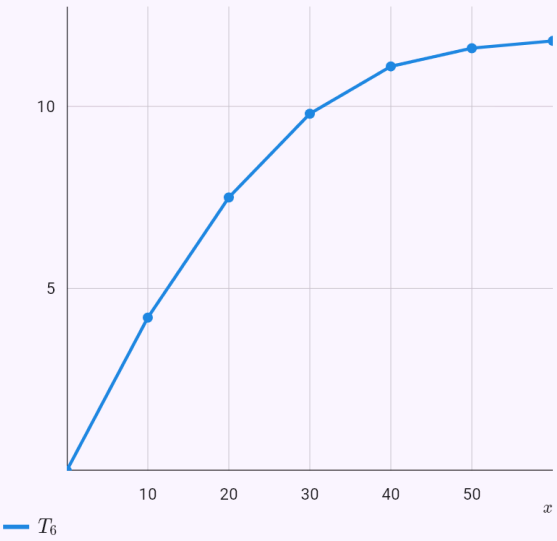
Pasos

- Integramos una tabla de 6 subintervalos en el intervalo $[0,\ 60]$
- El paso: $h = 10$
- Los valores en los nodos y sus coeficientes

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Regla del trapecio $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Error estimado con la regla de Runge (el cálculo con el paso doble): $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Resultado del método: $\int_0^{60} y\,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Diferencias progresiva, regresiva y central para tres pasos.

Enunciado: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Resultado

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

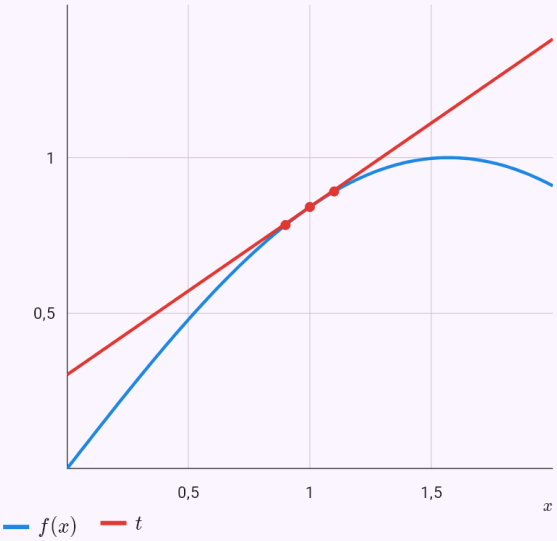
Pasos

- Estimamos la derivada de la función $f(x) = \sin x$ en $x_0 = 1$ con cocientes de diferencias.
- La diferencia progresiva $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ tiene un error proporcional a h, la regresiva $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ también; la central $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ solo a h². La segunda derivada: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
0,1	0,497364	0,581441	0,539402	−0,840770
0,05	0,519045	0,561110	0,540077	−0,841296
0,025	0,529728	0,550764	0,540246	−0,841427

- Exactamente: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. El error de la diferencia progresiva con el primer paso es $0{,}0429$, el de la central solo $9 \cdot 10^{-4}$
- Resultado del método: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Método de Runge–Kutta de 4.º orden con la tabla de pendientes y la solución exacta para comparar.

Enunciado: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Pasos

- El problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ en el intervalo $[0,\ 1]$, el paso $h = 0{,}1$ (10 pasos).
- Método de Runge–Kutta de 4.º orden: media ponderada de cuatro pendientes

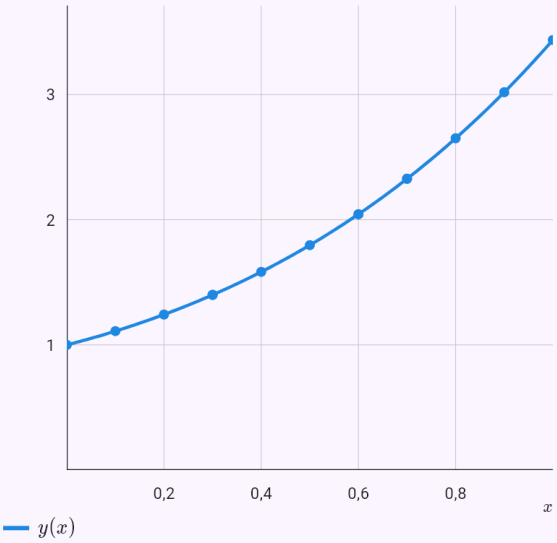
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Para comparar, la solución exacta: $y = -x + 2e^x - 1$
- Paso a paso

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- Al final del intervalo, exactamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Resultado del método: $y(1) \approx 3{,}436559$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Método de Euler para una ecuación sin solución elemental.

Enunciado: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

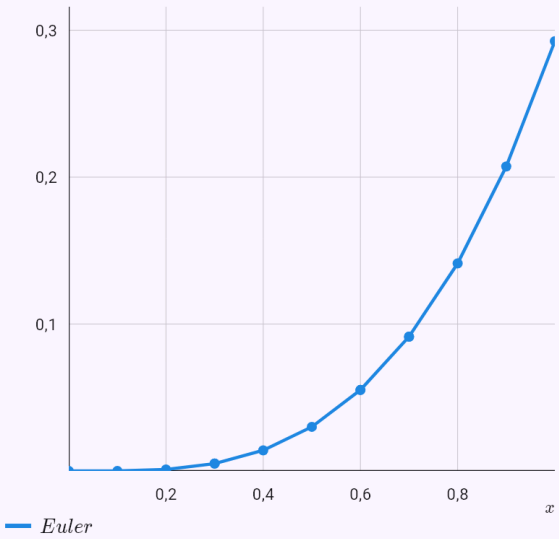
Pasos

- El problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ en el intervalo $[0,\ 1]$, el paso $h = 0{,}1$ (10 pasos).
- Método de Euler: un paso por la tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Paso a paso

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Resultado del método: $y(1) \approx 0{,}292542$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El predictor-corrector ABM: más preciso que Adams-Bashforth solo.

Enunciado: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Resultado

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Pasos

- El problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ en el intervalo $[0,\ 1]$, el paso $h = 0{,}1$ (10 pasos).
- Un predictor-corrector: Adams-Bashforth estima el nuevo punto y Adams-Moulton lo corrige con la pendiente en el punto estimado. Arranque con el método de Runge-Kutta

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

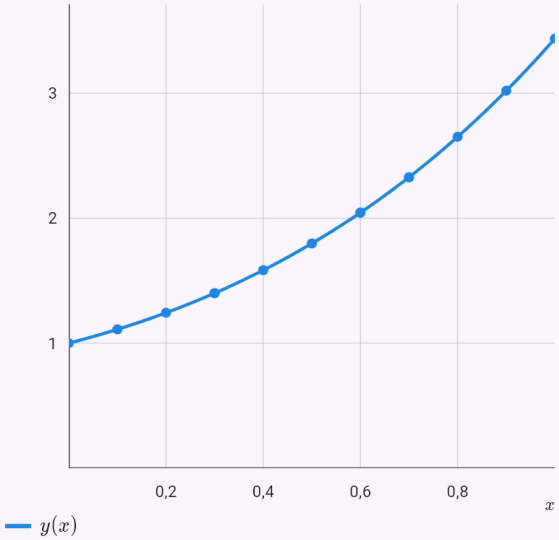
- Para comparar, la solución exacta: $y = -x + 2e^x - 1$
- Paso a paso

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + A$
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + A$
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + A$
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + A$
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + A$
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + A$
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + A$
10	1	3,436567	4,436567		

- Al final del intervalo, exactamente $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Resultado del método: $y(1) \approx 3{,}436567$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El RK45 adaptativo: el primer paso se rechaza y se acorta; después el método controla el paso por sí

mismo.

Enunciado: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Resultado

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Pasos

- El problema de valor inicial $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ en el intervalo $[0,\ 2]$, el paso $h = 0{,}5$ (4 pasos).
- Un paso adaptativo: en cada paso, dos métodos (de 5.º y 4.º orden) con las mismas pendientes; su diferencia estima el error. El paso se acepta si el error queda por debajo de la tolerancia, y el siguiente crece o se reduce según él

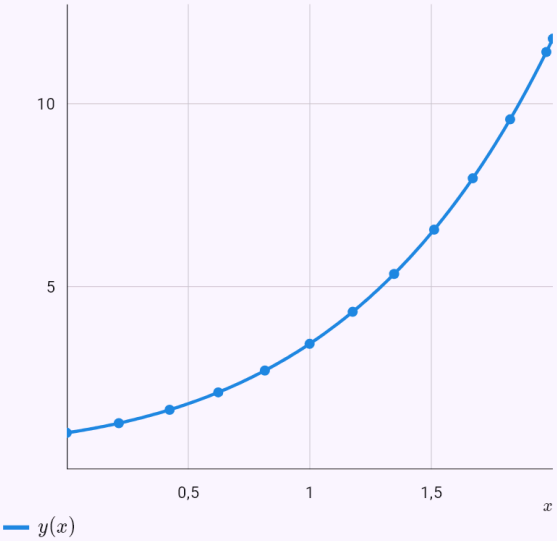
$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Para comparar, la solución exacta: $y = -x + 2e^x - 1$
- Los pasos con la tolerancia $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ paso aceptado, × rechazado (el paso se redujo y se repitió). Aceptados 12, rechazados 1.

k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- Al final del intervalo, exactamente $y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
- Resultado del método: $y(2) \approx 11{,}778114$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Una ecuación rígida: el método de Euler explícito con paso 0,05 es inestable (|1 + hλ| = 1,5) y diverge.

Enunciado: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Resultado

La solución numérica diverge con este paso (ver la solución).

Pasos

- El problema de valor inicial $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ en el intervalo $[0,\ 1]$, el paso $h = 0{,}05$ (20 pasos).
- Método de Euler: un paso por la tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Para comparar, la solución exacta: $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Estabilidad: la ecuación se comporta como y' = λy con $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. El método amplía un error en cada paso: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$; con este paso es inestable y los valores oscilarán y crecerán. Ayuda un paso menor o un método implícito.
- Paso a paso

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Los valores crecen sin límite (en $x \approx 0{,}6000$): el método es inestable con este paso. Pruebe un paso menor o un método implícito.

La misma ecuación con el método de Euler implícito: estable incluso con un paso grande.

Enunciado: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Resultado

$y(1) \approx 0{,}556616$

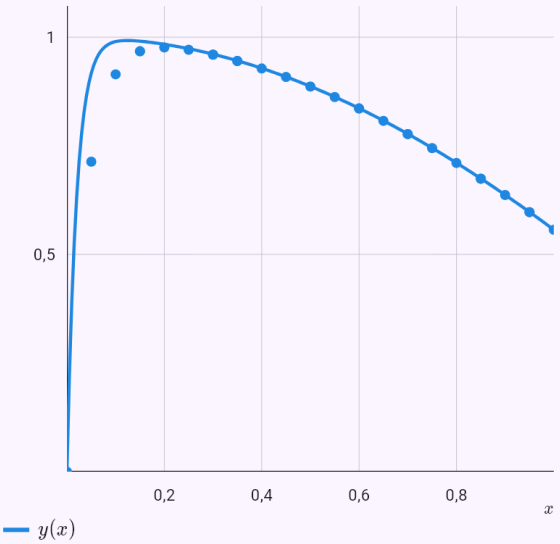
Pasos

- El problema de valor inicial $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ en el intervalo $[0,\ 1]$, el paso $h = 0{,}05$ (20 pasos).
- El método de Euler implícito: la pendiente al final del paso, así que y_{n+1} aparece a ambos lados de una ecuación. Se resuelve en cada paso por el método de Newton: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Para comparar, la solución exacta: $y = -\frac{2500e^{-50x}}{2501} + \frac{2500\cos x}{2501} + \frac{50\sin x}{2501}$
- Estabilidad: la ecuación se comporta como y' = λy con $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. El método reduce un error en cada paso: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$; el cálculo es estable.
- Paso a paso

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- Al final del intervalo, exactamente $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Resultado del método: $y(1) \approx 0{,}556616$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Un problema de contorno no lineal por el método del disparo: cinco pasos de la secante corrigen la

pendiente.

Enunciado: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Pasos

- El problema de contorno $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, paso $h = 0{,}05$ (20 subintervalos).
- El método del disparo: elegimos una pendiente inicial s = y'(a), resolvemos el problema como de valor inicial (Runge-Kutta) y vemos cuánto falla el extremo derecho. La pendiente se corrige por el método de la secante

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_k}$$

- Los disparos: cada uno es un problema de valor inicial; corregimos hasta que F(s) queda por debajo de la tolerancia.

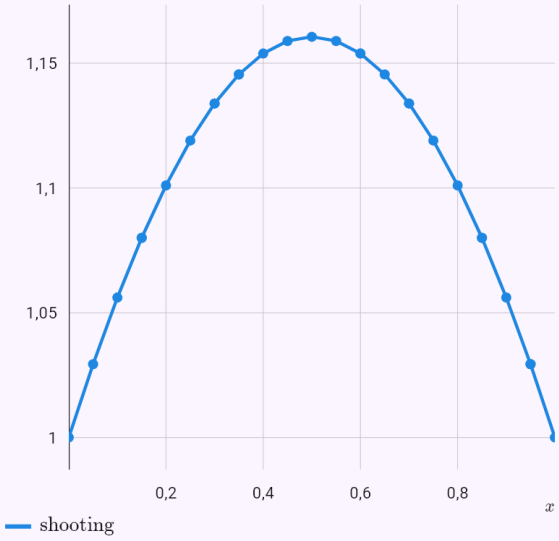
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	$-0{,}429$
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- La pendiente inicial con la que la solución alcanza la condición de contorno: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- La solución en los nodos

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Resultado del método: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Diferencias finitas y el algoritmo de Thomas: exacto en los nodos para y = x³.

Enunciado: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Pasos

- El problema de contorno $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, paso $h = 0{,}25$ (4 subintervalos).
- Diferencias finitas: en los nodos x_i sustituimos y" e y' por diferencias centrales

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i$$

- El sistema tridiagonal a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; los valores de contorno pasan al lado derecho

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- El algoritmo de Thomas: eliminación de Gauss para una matriz tridiagonal; barrido hacia delante y luego sustitución hacia atrás desde el final

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i y_{i+1}$$

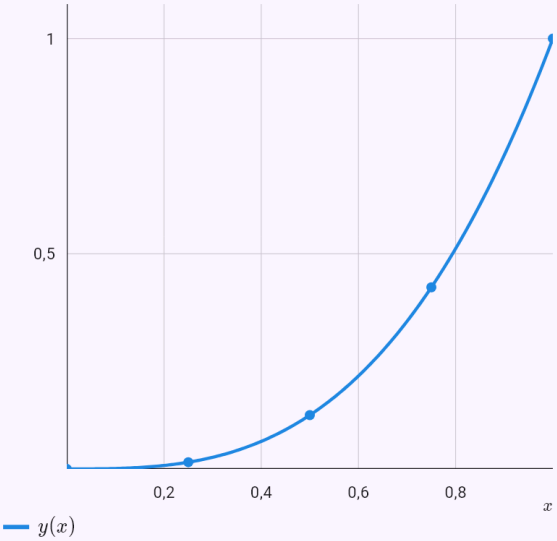
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Para comparar, la solución exacta: $y = x^3$
- La solución en los nodos

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- El mayor error en los nodos frente a la solución exacta: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Resultado del método: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Problema de contorno por elementos finitos: exacto en los nodos.

Enunciado: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Resultado

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Pasos

- El problema de contorno $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, paso $h = 0{,}25$ (4 subintervalos).
- El método de elementos finitos: la ecuación se multiplica por una función «sombrero» φ_i (lineal a trozos, 1 en el nodo i y 0 en los demás) y se integra por partes. La solución se busca como combinación de sombreros, con las integrales sobre los elementos por la regla de Gauss

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- El sistema ensamblado: una fila por cada nodo interior (la matriz de rigidez K es tridiagonal; los valores de contorno pasan al lado derecho)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- El algoritmo de Thomas: eliminación de Gauss para una matriz tridiagonal; barrido hacia delante y luego sustitución hacia atrás desde el final

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+1}$$

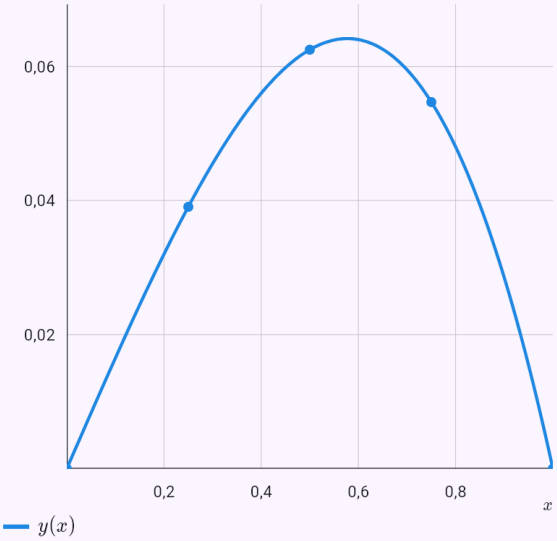
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Para comparar, la solución exacta: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- La solución en los nodos

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- El mayor error en los nodos frente a la solución exacta: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Resultado del método: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Un péndulo por el método de Verlet: su error de energía se mantiene, el de RK4 crece diez veces.

Enunciado: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Resultado

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx (\text{illegible})$$

Pasos

- La ecuación del movimiento $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, paso $h = 0{,}5$ (1000 pasos).
- El método de Verlet de velocidad: la nueva posición a partir de la velocidad y la aceleración, la velocidad a partir de la aceleración media al principio y al final del paso. La energía total $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ se calcula para ambos métodos

$$x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \tfrac{h^2}{2}a(x_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + \tfrac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$$

- Verlet frente a RK4 con el mismo paso (filas seleccionadas)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^R
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

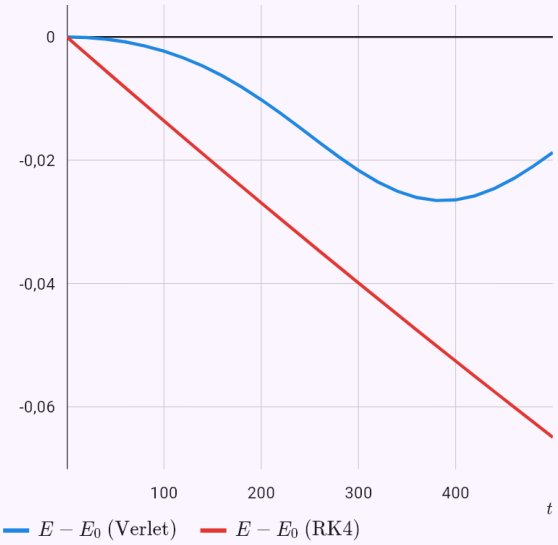
- El error de energía de Verlet se mantiene y el de RK4 crece con el tiempo: en un cálculo largo, Verlet es más fiel. El mayor error al principio y al final, arriba Verlet, abajo RK4

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$$

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$$

- Resultado del método: $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Gráfica



La desviación de la energía total respecto de la inicial: Verlet oscila en torno a cero, RK4 se aleja poco a poco.

Método de Gauss–Seidel: ecuaciones reordenadas por la dominancia diagonal.

Enunciado: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Resultado

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Pasos

- El sistema en forma matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Reordenamos las ecuaciones para que la matriz sea diagonal dominante ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- La matriz de iteración su radio espectral $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$: el método converge.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Método de Gauss–Seidel: los valores nuevos se usan en cuanto se calculan

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Las iteraciones

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- La condición de parada $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ se cumple tras 6 iteraciones.
- Resultado del método: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

Descomposición LU en fracciones exactas, sustitución progresiva y regresiva.

Enunciado: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Resultado

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Pasos

- El sistema en forma matricial
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Eliminación de Gauss: los multiplicadores de las filas forman la matriz L:
$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$$
- Descomposición LU A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sustitución progresiva Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$

- Sustitución regresiva Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$

- Resultado del método: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

El polinomio interpolador de Lagrange y su valor en un punto.

Enunciado: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Resultado

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Pasos

- Los puntos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Polinomios base de Lagrange $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

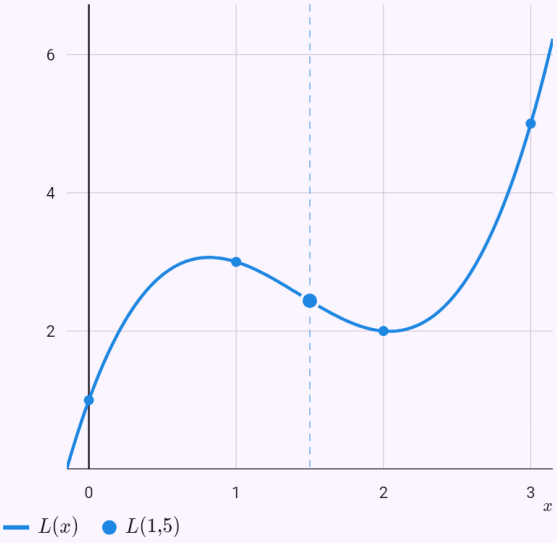
- El polinomio interpolador de Lagrange

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

- El valor en el punto dado: $L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$
- Resultado del método

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

El polinomio de Newton a partir de la tabla de diferencias divididas.

Enunciado: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Resultado

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Pasos

- Los puntos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- La tabla de diferencias divididas

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

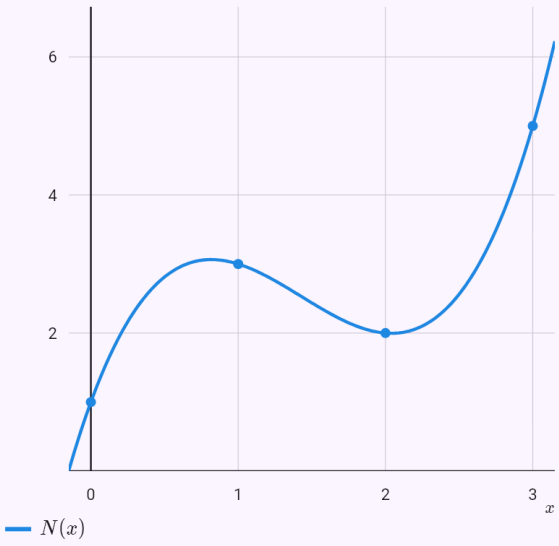
i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

- El polinomio interpolador de Newton (coeficientes de la diagonal superior de la tabla)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Resultado del método: $N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Spline cúbico natural: el sistema para los momentos y los polinomios de cada tramo.

Enunciado: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Resultado

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Pasos

- Los puntos dados (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Spline cúbico natural: las segundas derivadas M⃰ en los nodos cumplen con $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

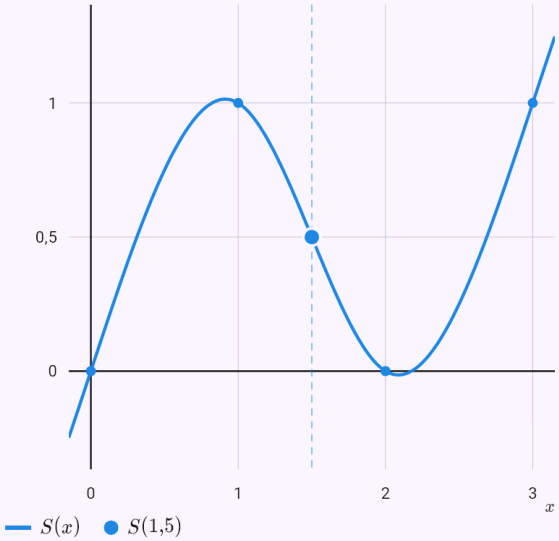
- La solución del sistema:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- En cada subintervalo

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- El valor en el punto dado: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Resultado del método: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Aproximación cuadrática por mínimos cuadrados.

Enunciado: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Resultado

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Pasos

- Los puntos dados (6)

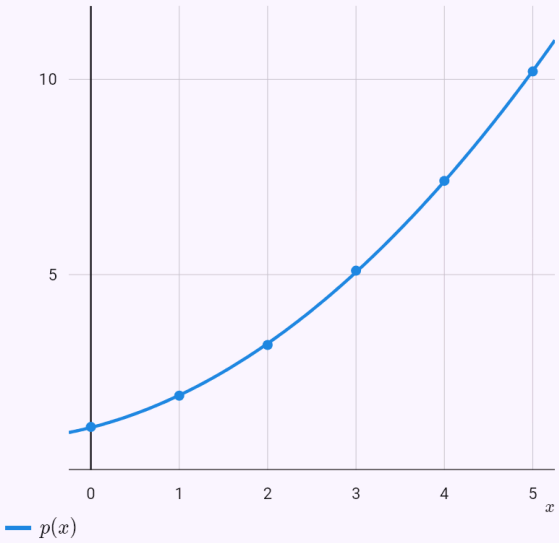
i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Buscamos el polinomio con $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Las sumas necesarias $n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$
- Las ecuaciones normales para los coeficientes $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- La solución: $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- La suma de los cuadrados de las desviaciones: $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Resultado del método: $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

La tasa interna de retorno: bajo el resultado, los pasos de la bisección plegados.

Enunciado: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

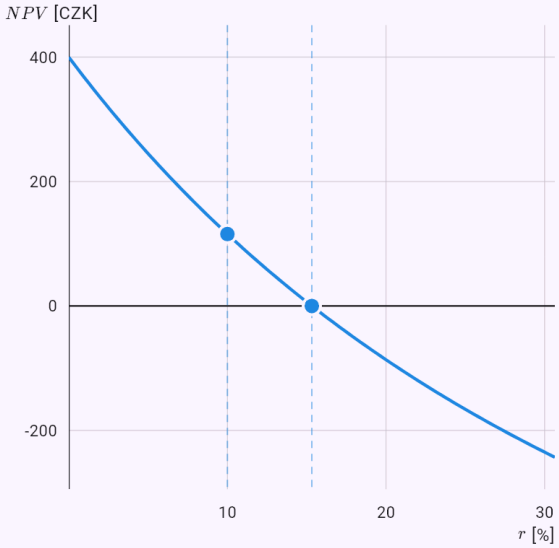
Resultado

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Pasos

- Datos:
  $CF_t = (-1000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Convertimos las unidades: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- El valor actual neto VAN suma los flujos de caja CF_0, CF_1, … de un proyecto descontados con la rentabilidad exigida r: VAN = Σ CF_t/(1 + r)^t. Un proyecto con VAN > 0 rinde más de lo exigido. La tasa interna de retorno TIR es el tipo con el que VAN = 0, raíz de una ecuación polinómica que se busca numéricamente. El plazo de recuperación es el momento en que la suma acumulada (simple o descontada) deja de ser negativa. Ecuación del modelo: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$
- Valor actual neto
  $NPV = -1000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}57$
- VAN ≥ 0: el proyecto rinde al menos lo exigido.
- Resolvemos la ecuación numéricamente (bisección): $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › El método: bisección, 14 iteraciones

Gráfica



El gráfico calculado a partir de la solución del modelo; los puntos son los valores dados o la respuesta.

Limitaciones conocidas

- Raíces: una ecuación con una incógnita, raíces reales; automáticamente se separan como mucho tres raíces en ⟨−50; 50⟩.
- Ecuaciones diferenciales: solo una ecuación de primer orden y′ = f(x, y), como mucho 2000 pasos; sistemas y órdenes superiores todavía no.
- Sistemas: de 2 a 6 ecuaciones; interpolación como mucho 12 puntos, polinomio de mínimos cuadrados como mucho de grado 5.
- Los métodos de Simpson y de Romberg a partir de una tabla necesitan pasos iguales (Romberg 2, 4, 8, … subintervalos).
- Problemas de contorno solo de 2.º orden con los valores y(a), y(b) (no una derivada en un extremo); diferencias finitas solo para una ecuación lineal en y e y′. El método de Verlet solo para un movimiento x″ = a(x) en una coordenada; todavía no la órbita de un planeta en el plano.