Mathtrace – Handbuch

VII. Anwendungen: Naturwissenschaften, Wirtschaft und Optimierung

Inhalt

VII. Anwendungen: Naturwissenschaften, Wirtschaft und Optimierung

47. Chemie
48. Elektrotechnik
49. Biologie und Medizin
50. Wirtschaft, Finanzen und Versicherungen
51. Lineare Optimierung, Transport, Zuordnung und Matrixspiele
52. Graphen, Netzwerke und Logistik
53. Psychometrie

47. Chemie

Chemische Berechnungen finden Sie auf dem Startbildschirm im Abschnitt „Anwendungen“, Fachgebiet Chemie: Ausgleichen einer Reaktionsgleichung, pH einer Säure, Base, eines Salzes oder einer mehrprotonigen Säure, Puffer, Titration mit Titrationskurve, Arrhenius-Gleichung und Lambert-Beer-Gesetz. Im Formular wählen Sie die Aufgabe und die gesuchte Größe und füllen die Werte mit Einheiten aus; das Symbol „?“ erklärt, woher die Formel stammt. Kleine Konstanten lassen sich als 1.8e-5 oder 1,8·10^-5 schreiben, Messwerte (eine Temperaturtabelle, eine Kalibrierung) als durch Leerzeichen getrennte Zahlen.

Eine Reaktionsgleichung genügt es, in die manuelle Eingabe zu schreiben, etwa Fe + O2 -> Fe2O3 (Pfeil -> oder =, Gleichgewicht <=>), auch mit Ionen MnO4^- und Fe^3+, Klammern Ca(OH)2, Hydraten CuSO4·5H2O und Aggregatzuständen (aq). Die Koeffizienten sind der Kern der Matrix der Element- (und Ladungs-)bilanz: Der Lösungsweg schreibt die Bilanzgleichungen, die Matrix, ihre reduzierte Form nach dem Gauß-Verfahren, den freien Koeffizienten als Parameter und die kleinsten ganzen Zahlen, zum Schluss die Probe. Erkannt wird auch eine Gleichung, die sich nicht ausgleichen lässt (Element nur auf einer Seite, Stoff auf der falschen Seite) oder deren Ausgleich nicht eindeutig ist.

Der pH wird exakt berechnet (bei einer schwachen Säure über eine quadratische Gleichung), dazu die schulische Vereinfachung und der Dissoziationsgrad; bei einer mehrprotonigen Säure wird die Ladungsbilanz numerisch gelöst und das Diagramm zeigt die Anteile der Formen der Säure in Abhängigkeit vom pH. Beim Puffer mit zugegebener starker Säure oder Base wird das neue Gleichgewicht und die pH-Änderung berechnet. Eine Titration bestimmt den pH nach dem Bereich der Kurve (Beginn, Pufferbereich, Äquivalenzpunkt, Überschuss der Maßlösung), das Diagramm zeigt die ganze Titrationskurve. Die Arrhenius-Gleichung aus zwei Messungen oder aus einer Tabelle durch Regression von ln k gegen 1/T; das Lambert-Beer-Gesetz aus bekanntem ε, einem Standard oder einer Kalibriergeraden.

Beispiele

Ausgleichen der Oxidation von Salzsäure durch Permanganat.

Eingabe: `KMnO4 + HCl -> KCl + MnCl2 + H2O + Cl2`

Ergebnis

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \rightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{Mn(}$$

Lösungsweg

- Die unbekannten Koeffizienten bezeichnen wir mit Buchstaben
  $a\,\mathrm{KMnO_4} + b\,\mathrm{HCl} \rightarrow c\,\mathrm{KCl} + d\,\mathrm{MnCl_2} + f\,\mathrm{H_2O} + g\,\mathrm{C}$
- Atome entstehen und verschwinden nicht – von jedem Element sind links so viele Atome wie rechts

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad a = c \\ \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = f \\ \mathrm{H}: &\quad b = 2f \\ \mathrm{Cl}: &\quad b = c + 2d + 2g \end{aligned}$$

- Das homogene System als Matrix – eine Spalte je Stoff, die Produkte mit Minuszeichen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Das Gauß-Verfahren bringt die Matrix in die reduzierte Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

- Ein Koeffizient bleibt frei, $g = t$; die anderen drücken wir durch ihn aus

$$a = \frac{2}{5}t, \quad b = \frac{16}{5}t, \quad c = \frac{2}{5}t, \quad d = \frac{2}{5}t, \quad f = \frac{8}{5}t$$

- Wir wählen $t = 5$, damit alle Koeffizienten die kleinsten ganzen Zahlen sind:
  $a = 2, \quad b = 16, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad f = 8, \quad g = 5$
- Probe – Atome links und rechts

$$\begin{aligned} \mathrm{K}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{Mn}: &\quad 2 = 2 \\ \mathrm{O}: &\quad 8 = 8 \\ \mathrm{H}: &\quad 16 = 16 \\ \mathrm{Cl}: &\quad 16 = 16 \end{aligned}$$

Eine ionische Redoxgleichung mit Ladungsbilanz.

Eingabe: `MnO4^- + Fe^2+ + H^+ -> Mn^2+ + Fe^3+ + H2O`

Ergebnis

$$\mathrm{MnO_4^-} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} + 8\,\mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{Mn^{2+}} + 5\,\mathrm{Fe^{3+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$$

Lösungsweg

- Die unbekannten Koeffizienten bezeichnen wir mit Buchstaben

  $$a\,\mathrm{MnO_4^-} + b\,\mathrm{Fe^{2+}} + c\,\mathrm{H^+} \rightarrow d\,\mathrm{Mn^{2+}} + f\,\mathrm{Fe^{3+}} + g\,\mathrm{H_2O}$$

- Atome entstehen und verschwinden nicht und die Ladung bleibt erhalten (Zeile q) – für jedes Element und die Ladung gilt

  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad a = d \\ \mathrm{O}: &\quad 4a = g \\ \mathrm{Fe}: &\quad b = f \\ \mathrm{H}: &\quad c = 2g \\ q: &\quad -a + 2b + c = 2d + 3f \end{aligned}$$

- Das homogene System als Matrix – eine Spalte je Stoff, die Produkte mit Minuszeichen

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Das Gauß-Verfahren bringt die Matrix in die reduzierte Stufenform

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

- Ein Koeffizient bleibt frei, $g = t$; die anderen drücken wir durch ihn aus

  $$a = \frac{1}{4}t, \quad b = \frac{5}{4}t, \quad c = 2t, \quad d = \frac{1}{4}t, \quad f = \frac{5}{4}t$$

- Wir wählen $t = 4$, damit alle Koeffizienten die kleinsten ganzen Zahlen sind:

  $$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 1, \quad f = 5, \quad g = 4$$

- Probe – Atome und Ladung links und rechts

  $$\begin{aligned} \mathrm{Mn}: &\quad 1 = 1 \\ \mathrm{O}: &\quad 4 = 4 \\ \mathrm{Fe}: &\quad 5 = 5 \\ \mathrm{H}: &\quad 8 = 8 \\ q: &\quad 17 = 17 \end{aligned}$$

pH von 0,1 M Essigsäure (K_a = 1,8·10⁻⁵).

Eingabe: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K=1.8e-5[one]; kind=weakAcid; constant=K)`

Ergebnis

$$\mathrm{pH} \approx 2{,}88$$

Lösungsweg

- Gesucht pH; gegeben: $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$
- Der pH-Wert ist der negative dekadische Logarithmus der Konzentration der Wasserstoff-(Oxonium-)Ionen: pH = −log[H⁺]. Eine starke Säure (HCl) dissoziiert vollständig, also [H⁺] = c; eine starke Base ergibt [OH⁻] = c und pH = 14 − pOH. Eine schwache Säure HA ⇌ H⁺ + A⁻ dissoziiert nur teilweise nach ihrer Dissoziationskonstante Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; daraus folgt die quadratische Gleichung x² + Ka·x − Ka·c = 0. Ein Salz einer schwachen Säure und einer starken Base (Natriumacetat) reagiert mit Wasser basisch mit Kb = Kw/Ka, ein Salz einer schwachen Base (NH_4Cl) sauer. Bei einer mehrprotonigen Säure (H_2SO_4, H_3PO_4) wird die Ladungsbilanz numerisch gelöst. Bei 25 °C, Kw = 10⁻¹⁴. Gleichung des Modells

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-}, \quad K_a = \frac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$$

- Gesuchte Größe ausdrücken

$$K_a = \frac{x^2}{c - x} \Rightarrow x^2 + K_a x - K_a c = 0 \Rightarrow x = [\mathrm{H^+}] = -$$

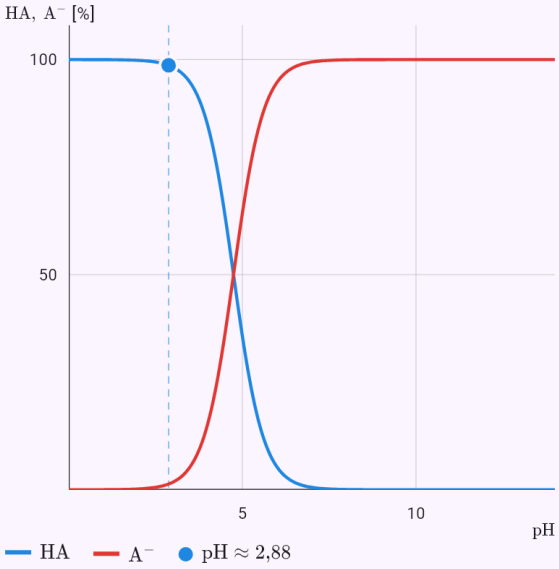
- Einsetzen

$$[\mathrm{H^+}] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} + \sqrt{\left(1{,}8 \cdot 10^{-5}\right)^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot}}{2}$$

- Dissoziationsgrad: $\alpha = \frac{x}{c} = \frac{0{,}001333}{0{,}1} \approx 1{,}33\,\%$
- Der Dissoziationsgrad liegt unter 5 %, die Vereinfachung c − x ≈ c würde also auch genügen:
  $x \approx \sqrt{K_a c} = 0{,}001342, \quad \mathrm{pH} \approx 2{,}87$

- Der pH ist der negative Logarithmus der H⁺-Konzentration:
  $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] = -\log 0{,}001333 \approx 2{,}88$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

pH von 0,1 M Phosphorsäure und die Anteile ihrer Formen.

Eingabe: `model(ph; find=pH[one]; c=0.1[mol_l]; K1=7.5e-3[one]; K2=6.2e-8[one]; K3=4.8e-`

`13[one]; kind=polyprotic; constant=K)`

Ergebnis

$\mathrm{pH} \approx 1{,}62$

Lösungsweg

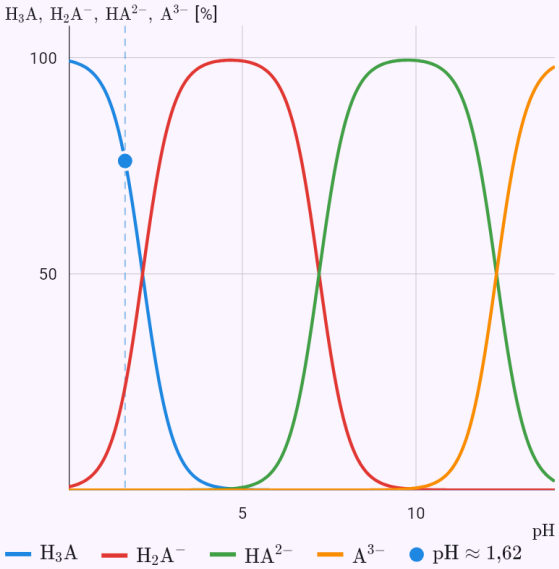
- Gesucht pH; gegeben
  $c = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_{a1} = 0{,}0075, \quad K_{a2} = 6{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad I$
- Der pH-Wert ist der negative dekadische Logarithmus der Konzentration der Wasserstoff-(Oxonium-)Ionen: pH = −log[H⁺]. Eine starke Säure (HCl) dissoziiert vollständig, also [H⁺] = c; eine starke Base ergibt [OH⁻] = c und pH = 14 − pOH. Eine schwache Säure HA ⇌ H⁺ + A⁻ dissoziiert nur teilweise nach ihrer Dissoziationskonstante Ka = [H⁺][A⁻]/[HA]; daraus folgt die quadratische Gleichung x² + Ka·x − Ka·c = 0. Ein Salz einer schwachen Säure und einer starken Base (Natriumacetat) reagiert mit Wasser basisch mit Kb = Kw/Ka, ein Salz einer schwachen Base (NH_4Cl) sauer. Bei einer mehrprotonigen Säure (H_2SO_4, H_3PO_4) wird die Ladungsbilanz numerisch gelöst. Bei 25 °C, Kw = 10^{-14}. Gleichung des Modells
  $\mathrm{H_3A} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{H_2A^-} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{HA^{2-}} \rightleftharpoons 3\,\mathrm{H^+} + \mathrm{A^{3-}}$
- Die Lösung ist elektrisch neutral – Ladungsbilanz
  $[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{H_2A^-}] + 2[\mathrm{HA^{2-}}] + 3[\mathrm{A^{3-}}]$
- Konzentrationen der Formen der Säure aus den Dissoziationskonstanten
  $[\mathrm{H_{3-i}A^{i-}}] = c\,\alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{K_{a1} \cdots K_{ai}\, h^{3-i}}{h^3 + K_{a1}h^2 + K_{a1}K_{a2}h + K_{a}}$
- Die Gleichung wird numerisch gelöst (Bisektion):
  $[\mathrm{H^+}] \approx 0{,}02389\,\mathrm{mol/l}$
- › Das Verfahren: Bisektion, 14 Iterationen
- Der pH ist der negative Logarithmus der H⁺-Konzentration: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H^+}] \approx 1{,}62$
- Die zweite Konstante ist viel kleiner als die erste, der pH wird also vor allem von der ersten Stufe bestimmt – wie

bei einer schwachen einprotonigen Säure

$$x = \frac{-K_{a1} + \sqrt{K_{a1}^2 + 4K_{a1}c}}{2} \approx 0{,}02389, \quad \mathrm{pH} \approx 1{,}62$$

- Anteile der Formen der Säure bei diesem pH
  $\mathrm{H_3A}: 76{,}1\,\%, \quad \mathrm{H_2A^-}: 23{,}9\,\%, \quad \mathrm{HA^{2-}}: 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Ein Acetatpuffer nach Zugabe von 1 mmol starker Säure.

Eingabe: `model(buffer; find=pH[one]; pK=4.74[one]; ca=0.1[mol_l]; cs=0.1[mol_l]; V=100[ml];`

`n=1[mmol]; kind=acidic; constant=pK; add=acid)`

Ergebnis

$$\mathrm{pH} \approx 4{,}65$$

Lösungsweg

- Gesucht pH; gegeben
  $\mathrm{p}K_a = 4{,}74, \quad c_{\mathrm{HA}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad c_{\mathrm{A^-}} = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V$
- Einheiten umrechnen
  $V = 100\,\mathrm{ml} = 0{,}1\,\mathrm{l}, \quad n = 1\,\mathrm{mmol} = 0{,}001\,\mathrm{mol}$
- Konstante aus pK:
  $K_a = 10^{-\mathrm{p}K_a} = 10^{-4{,}74} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-5}$
- Ein Puffer ist ein Gemisch einer schwachen Säure und ihres Salzes (CH_3COOH + CH_3COONa) oder einer schwachen Base und ihres Salzes (NH_3 + NH_4Cl). Aus der Dissoziationskonstante folgt die Henderson-Hasselbalch-Gleichung pH = pKa + log([A^-]/[HA]). Eine zugegebene starke Säure macht aus der basischen Komponente die saure (A^- + H^+ → HA), eine Base umgekehrt – das Verhältnis der Komponenten ändert sich nur wenig, daher ändert sich der pH kaum. Ein Puffer wirkt am besten bei einem Verhältnis von 0,1 bis 10, also pH = pKa ± 1. Gleichung des Modells
  $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$
- Stoffmengen der Pufferkomponenten
  $n_{\mathrm{HA}} = c_{\mathrm{HA}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}, \quad n_{\mathrm{A^-}} = c_{\mathrm{A^-}} V = 0{,}01\,\mathrm{mol}$
- Der zugegebene Stoff reagiert mit einer Pufferkomponente
  $\mathrm{A^-} + \mathrm{H^+} \rightarrow \mathrm{HA}: \quad n'_{\mathrm{HA}} = 0{,}011\,\mathrm{mol}, \quad n'_{\mathrm{A^-}} = 0{,}009\,\mathrm{m}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \dfrac{n'_{\mathrm{A^-}}}{n'_{\mathrm{HA}}}$
- Einsetzen: $\mathrm{pH} = 4{,}74 + \log \dfrac{0{,}009}{0{,}011} \approx 4{,}653$
- pH vor der Zugabe und seine Änderung:
  $\mathrm{pH}_0 = 4{,}74, \quad \Delta\mathrm{pH} = -0{,}087$

Titration von Essigsäure mit Natronlauge – der Äquivalenzpunkt.

Eingabe: `model(titration; find=pH[one]; ca=0.1[mol_l]; Va=25[ml]; ct=0.1[mol_l]; K=1.8e-`

```
5[one]; Vt=25[ml]; kind=weakAcid; constant=K)
```

Ergebnis

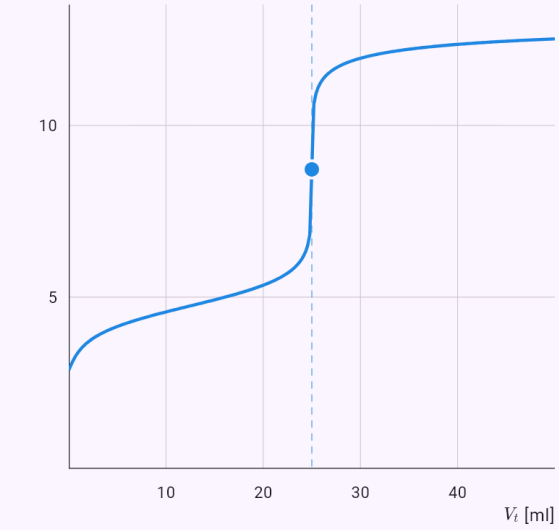
$$\mathrm{pH} \approx 8{,}72$$

Lösungsweg

- Gesucht pH; gegeben
  $c_a = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad V_a = 25\,\mathrm{ml}, \quad c_t = 0{,}1\,\mathrm{mol/l}, \quad K_a =$
- Bei einer Titration gibt man aus der Bürette eine Maßlösung bekannter Konzentration zu, bis der gesamte Analyt reagiert hat. Der Äquivalenzpunkt ist erreicht, wenn die Stoffmenge der Maßlösung $c_t \cdot V_t$ der des Analyten entspricht: $V_e = c_a \cdot V_a / c_t$. Davor bestimmt der unverbrauchte Analyt den pH (mit einer schwachen Säure entsteht ein Puffer), am Äquivalenzpunkt die Reaktion des gebildeten Salzes mit Wasser, danach der Überschuss der Maßlösung. Die Titrationskurve im Diagramm ist exakt aus der Ladungsbilanz berechnet. Gleichung des Modells: $\mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \rightarrow \mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O}$
- Äquivalenzpunkt – gleich viel Maßlösung wie Analyt
  $n_a = c_a V_a = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V_e = \frac{c_a V_a}{c_t} = \frac{2{,}5}{0{,}1} \approx 25\,\mathrm{ml}$
- Zugegebene Maßlösung und Gesamtvolumen:
  $n_t = c_t V_t = 2{,}5\,\mathrm{mmol}, \quad V = V_a + V_t = 50\,\mathrm{ml}$
- Der Äquivalenzpunkt – der gesamte Analyt hat reagiert.
- Am Äquivalenzpunkt ist nur das gebildete Salz übrig – seine Reaktion mit Wasser
  $c_{\mathrm{A^-}} = \frac{n_a}{V_a + V_e} = 0{,}05\,\mathrm{mol/l}, \quad K_b = \frac{K_w}{K_a} \approx 5{,}556 \cdot 10^{}$
- pOH und pH (pH + pOH = 14)

$$\mathrm{pOH} = -\log\left[\mathrm{OH^-}\right] = -\log 5{,}27 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}28, \quad \mathrm{pH}$$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Aktivierungsenergie aus einer Tabelle von Geschwindigkeitskonstanten.

Eingabe: `model(arrhenius; find=Ea[kJ_mol]; TT=25 35 45 55[degC]; kk=0.001 0.0021 0.0042`

`0.0079[per_s]; input=table)`

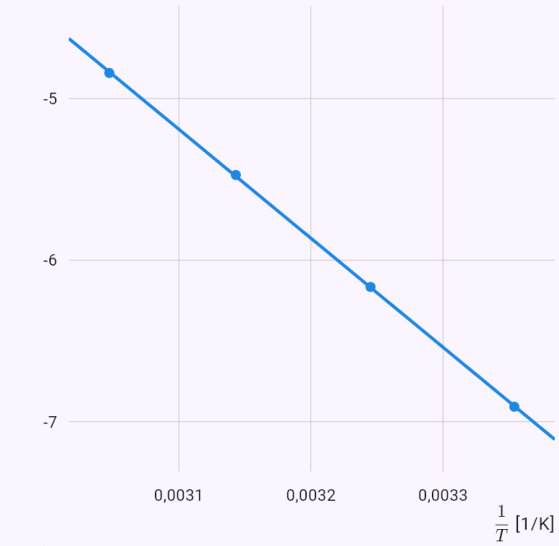
Ergebnis

$$E_a \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$$

Lösungsweg

- Gesucht E_a; gegeben
  $T_i = (25;\ 35;\ 45;\ 55)\,^\circ\mathrm{C}, \quad k_i = (0{,}001;\ 0{,}0021;\ 0{,}004$
- Einheiten umrechnen:
  $T_i = (298{,}1;\ 308{,}1;\ 318{,}1;\ 328{,}1)\,\mathrm{K}$
- Die Geschwindigkeitskonstante einer Reaktion wächst mit der Temperatur nach der Arrhenius-Gleichung k = A·e^(−Ea/RT), wobei Ea die Aktivierungsenergie ist – die Energiebarriere, die stoßende Moleküle überwinden müssen – und A der präexponentielle Faktor. Aus zwei Messungen folgt ln(k₂/k₁) = (Ea/R)(1/T₁ − 1/T₂). Aus mehreren Messungen ergibt sich Ea aus einer Regressionsgeraden: ln k = ln A − (Ea/R)·(1/T) ist eine Gerade in 1/T (Arrhenius-Diagramm) mit der Steigung −Ea/R. Gleichung des Modells:
  $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad R = 8{,}314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- Durch Logarithmieren entsteht eine Gerade
  $$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\cdot\frac{1}{T} \quad (y = a + bx,\ x = \tfrac{1}{T},\ y = \ln k)$$
- Werte für die Regressionsgerade
  $x_i = (0{,}003354;\ 0{,}003245;\ 0{,}003143;\ 0{,}003047)\,\mathrm{K^{-1}},$
- Regressionsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate
  $$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \approx -6747, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1$$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $E_a = -bR$
- Einsetzen:
  $E_a = -(-6747)\cdot 8{,}314\cdot 10^{-3} \approx 56{,}1\,\mathrm{kJ/mol}$
- Präexponentieller Faktor: $A = e^a \approx 6\,768\,000\,\mathrm{s^{-1}}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Konzentration einer Probe aus einer Kalibriergeraden.

Eingabe: `model(beer; find=c[mmol_l]; cc=0 0.1 0.2 0.3 0.4[mmol_l]; AA=0.002 0.151 0.299`

`0.452 0.598[one]; A=0.25[one]; input=calibration; measure=absorbance)`

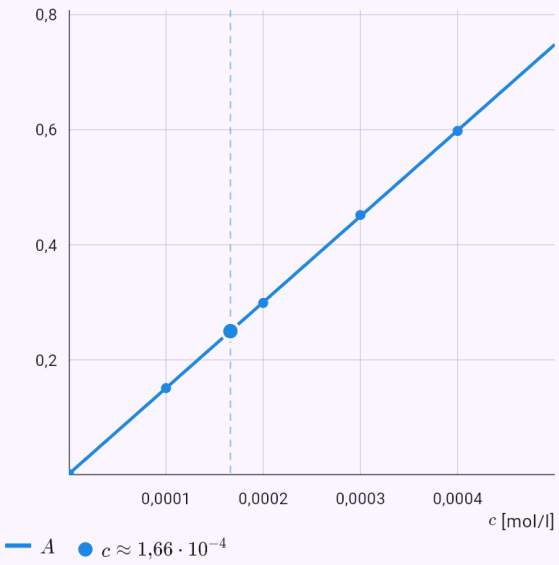
Ergebnis

$$c \approx 0{,}166\,\mathrm{mmol/l}$$

Lösungsweg

- Gesucht c; gegeben
  $c_i = (0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4)\,\mathrm{mmol/l}, \quad A_i = (0{,}002;\ 0{,}1$
- Einheiten umrechnen
  $c_i = \left(0;\ 10^{-4};\ 2\cdot10^{-4};\ 3\cdot10^{-4};\ 4\cdot10^{-4}\right)\,\mathrm{mol/l}$
- Eine Lösung absorbiert Licht proportional zur Konzentration des absorbierenden Stoffes und zur Schichtdicke: Extinktion A = ε·l·c (Lambert-Beer-Gesetz), wobei ε der molare Extinktionskoeffizient und l die Länge der Küvette ist. Ein Photometer misst die Transmission T – den Anteil des durchgelassenen Lichts – und A = −log T. Eine unbekannte Konzentration ergibt sich aus bekanntem ε, aus dem Vergleich mit einem Standard bekannter Konzentration oder aus einer an mehreren Standards gemessenen Kalibriergeraden (kleinste Quadrate). Das Gesetz gilt für verdünnte Lösungen. Gleichung des Modells: $A = \varepsilon\, l\, c$
- Kalibriergerade nach der Methode der kleinsten Quadrate
  $A = a + b\,c: \quad b = \dfrac{n\sum c_i A_i - \sum c_i \sum A_i}{n\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2} \approx 1493\,\mathrm{l/m}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $c = \dfrac{A - a}{b}$
- Einsetzen: $c = \dfrac{0{,}25 - 0{,}0018}{1493} \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l}$
- Einheiten umrechnen:
  $c \approx 1{,}662\cdot10^{-4}\,\mathrm{mol/l} = 0{,}1662\,\mathrm{mmol/l}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Einsatzhärten von Stahl – Zeit bis 0,8 % Kohlenstoff in 0,5 mm Tiefe.

Eingabe: `model(diffusion; find=t[h]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

`cx=0.8[pct]; x=0.5[mm]; process=carburizing)`

Ergebnis

$$t \approx 7{,}047\,\mathrm{h}$$

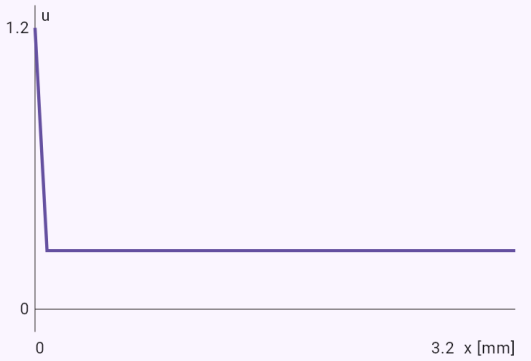
Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad c$
- Einheiten umrechnen
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad c = 0{,}8$
- Ein Stoff diffundiert von einer Oberfläche mit fester Konzentration c_s in einen Körper mit der Anfangskonzentration c_0 – etwa Kohlenstoff in Stahl beim Einsatzhärten. Es gilt die Diffusionsgleichung c_t = D·c_xx; für einen im Vergleich zur Eindringtiefe unendlich dicken Körper löst sie die Laplace-Transformation in der Zeit: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) mit der komplementären Fehlerfunktion. Daraus folgen die Konzentration in einer Tiefe, die Tiefe einer geforderten Konzentration oder die nötige Zeit. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Lösung mit der Laplace-Transformation (halbunendlicher Körper): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Inverse komplementäre Fehlerfunktion
  $\mathrm{erfc}\, z = \frac{c - c_0}{c_s - c_0} = \frac{0{,}008 - 0{,}0025}{0{,}012 - 0{,}0025} \approx 0{,}5789 \Rightarrow z \approx 0,$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $t = \frac{x^2}{4Dz^2}$
- Einsetzen
  $t = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3924^2} \approx 25\,370\,\mathrm{s}$

- Die typische Eindringtiefe ist √(Dt): $\sqrt{Dt} \approx 6{,}371 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Die doppelte Tiefe braucht die vierfache Zeit.
- Einheiten umrechnen: $t \approx 25\,370\,\mathrm{s} = 7{,}047\,\mathrm{h}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0 h

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Kohlenstoffkonzentration in 0,5 mm Tiefe nach 7 Stunden.

Eingabe: `model(diffusion; find=c[pct]; D=1.6e-11[m2_s]; cs=1.2[pct]; c0=0.25[pct];`

```
x=0.5[mm]; t=7[h]; process=carburizing)
```

Ergebnis

$$c \approx 0{,}7988\,\%$$

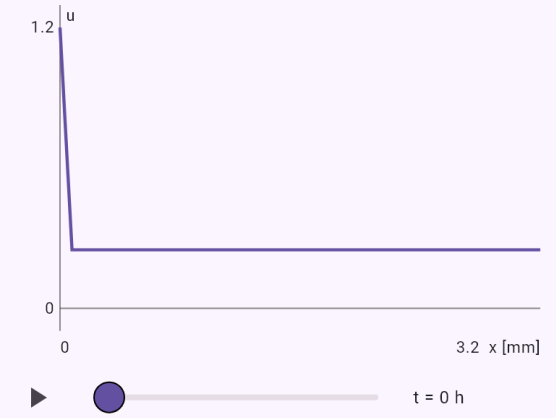
Lösungsweg

- Gesucht c; gegeben
  $D = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^2/s}, \quad c_s = 1{,}2\,\%, \quad c_0 = 0{,}25\,\%, \quad x$
- Einheiten umrechnen
  $c_s = 1{,}2\,\% = 0{,}012, \quad c_0 = 0{,}25\,\% = 0{,}0025, \quad x = 0{,}$
- Ein Stoff diffundiert von einer Oberfläche mit fester Konzentration c_s in einen Körper mit der Anfangskonzentration c_0 – etwa Kohlenstoff in Stahl beim Einsatzhärten. Es gilt die Diffusionsgleichung c_t = D·c_xx; für einen im Vergleich zur Eindringtiefe unendlich dicken Körper löst sie die Laplace-Transformation in der Zeit: c = c_0 + (c_s − c_0)·erfc(x/(2√(Dt))) mit der komplementären Fehlerfunktion. Daraus folgen die Konzentration in einer Tiefe, die Tiefe einer geforderten Konzentration oder die nötige Zeit. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0,t) = c_s, \quad c(x,0) = c_0$
- Lösung mit der Laplace-Transformation (halbunendlicher Körper): $c(x,t) = c_0 + (c_s - c_0)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$
- Argument der Fehlerfunktion
  $z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 25\,200}} \approx 0{,}3937, \quad \mathrm{erfc}$
- Einsetzen:
  $c = 0{,}0025 + (0{,}012 - 0{,}0025) \cdot 0{,}5777 \approx 0{,}007988$

- Die typische Eindringtiefe ist √(Dt):
  $\sqrt{Dt} \approx 6{,}35 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Die doppelte Tiefe braucht die vierfache Zeit.
- Einheiten umrechnen: $c \approx 0{,}007988 = 0{,}7988\,\%$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0 h

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Bekannte Einschränkungen

- pH und Titrationen setzen 25 °C (Kw = 10^{-14}) und verdünnte Lösungen voraus – Aktivitätskoeffizienten werden nicht berechnet.
- Titrationen nur einprotoniger Säuren oder Basen mit einer starken Maßlösung; mehrprotonige Säuren bisher nur als pH einer Lösung.
- Eine Reaktionsgleichung wird noch nicht vom Foto erkannt – schreiben Sie sie in die manuelle Eingabe oder ins Formular.

48. Elektrotechnik

Elektrotechnische Berechnungen finden Sie auf dem Startbildschirm im Abschnitt „Anwendungen“, Fachgebiet Elektrotechnik: RLC-Reihen- und Parallelschaltung bei Wechselstrom, RC- und RL-Filter, Schwingkreis, Spannungsteiler, Wheatstone-Brücke und Blindleistungskompensation. Im Formular wählen Sie die Schaltung und die gesuchte Größe und tragen die Werte mit Einheiten ein; das Symbol „?“ erklärt, woher die Formeln kommen. Spannungen und Ströme sind Effektivwerte, komplexe Zahlen werden wie in der Elektrotechnik mit j geschrieben.

Zu jeder Schaltung zeichnet die App den Schaltplan mit den Werten der Bauteile und bei Wechselstrom den Frequenzgang auf logarithmischer Achse – Impedanz und Phase, bei Filtern die Übertragung in Dezibel (Bode-Diagramm). Der Lösungsweg zeigt die Blindwiderstände, die Impedanz in algebraischer und Polarform (50∠53,13° Ω), die Phasenverschiebung, die Ströme, die Spannungen an den Bauteilen und die Leistung; er erklärt auch, warum sich die Spannungen an den Bauteilen als Zeiger addieren.

Eine Reihen-Parallel-Schaltung lässt sich als Ausdruck eingeben, z. B. R1 + (L1 || (R2 + C1)) mit den Werten R1=100 L1=10m C1=1u (Vorsätze m, u, n, k, M). Der Lösungsweg vereinfacht die Schaltung Gruppe für Gruppe und berechnet dann Spannung und Strom jedes Bauteils. Eine beliebige Schaltung (auch mit Brücken und mehreren Quellen) geben Sie als Netzliste wie in SPICE ein – ein Bauteil pro Zeile mit seinen Knoten, Knoten 0 ist die Masse; der Lösungsweg stellt die Knotenregel in den Knoten und die Matrix des Systems auf und löst es mit dem Gauß-Verfahren. Ohne Frequenz wird Gleichstrom gerechnet.

Beispiele

RLC-Reihenschaltung: Wirk- und Blindleistung, Leistungsfaktor.

Eingabe: `model(acseries; find=P[W]; U=100[V]; R=30[ohm]; L=254.6[mH]; C=79.58[uF];`

```
f=50[Hz]; parts=rlc)
```

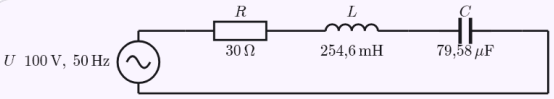
Ergebnis

$$P \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$$
$$Q \approx 160\,\mathrm{var}$$
$$S \approx 200\,\mathrm{VA}$$
$$\cos\varphi \approx 0{,}6$$

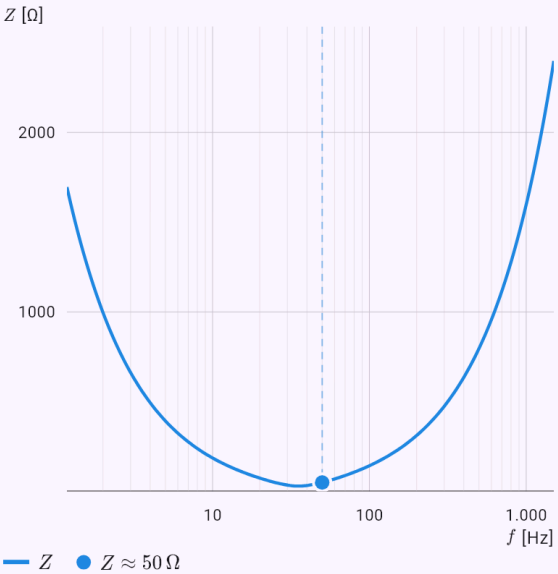
Lösungsweg

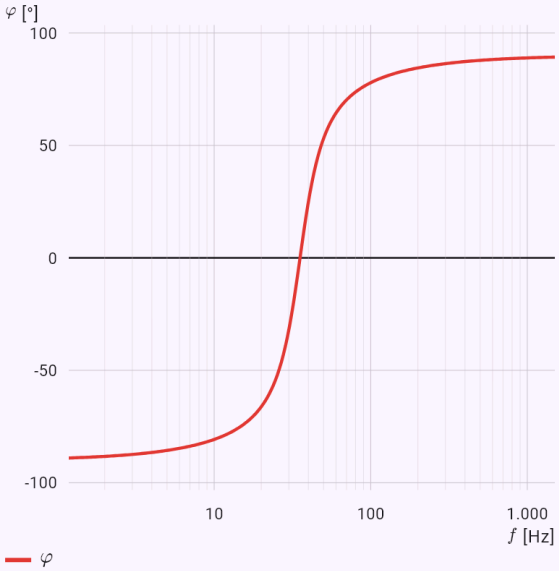
- Gesucht P; gegeben
  $U = 100\,\mathrm{V},\quad R = 30\,\Omega,\quad L = 254{,}6\,\mathrm{mH},\quad C = 79{,}5$
- Einheiten umrechnen
  $L = 254{,}6\,\mathrm{mH} = 0{,}2546\,\mathrm{H},\quad C = 79{,}58\,\mu\mathrm{F} = 7{,}958 \cdot 1$
- Im Wechselstromkreis setzen Spule und Kondensator dem Strom einen frequenzabhängigen Widerstand entgegen – den Blindwiderstand: der induktive X_L = ωL wächst mit der Frequenz, der kapazitive X_C = 1/(ωC) sinkt (ω = 2πf). Die Spannung an der Spule eilt dem Strom um 90° voraus, am Kondensator um 90° nach, deshalb addieren sie sich nicht arithmetisch, sondern als Zeiger – komplexe Zahlen mit der imaginären Einheit j: die Impedanz Z = R + j(X_L − X_C), ihr Betrag Z = √(R² + (X_L − X_C)²) und die Phasenverschiebung φ = arctan((X_L − X_C)/R). Der Strom I = U/Z, die Wirkleistung P = UI·cos φ. Spannungen und Ströme sind Effektivwerte. Gleichung des Modells:
  $\hat{Z} = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Induktiver Blindwiderstand der Spule:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}2546 \approx 79{,}98\,\Omega$
- Kapazitiver Blindwiderstand des Kondensators
  $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314{,}2 \cdot 7{,}958 \cdot 10^{-5}} \approx 40\,\Omega$
- Betrag der Impedanz – Blindwiderstand und Widerstand sind senkrechte Zeiger
  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (79{,}98 - 40)^2} \approx 4$
- Impedanz als komplexe Zahl (algebraische und Polarform)
  $\hat{Z} \approx 30 + \mathrm{j}\,39{,}99\,\Omega = 49{,}99\angle 53{,}12^\circ\,\Omega$
- Phasenverschiebung des Stroms gegen die Spannung:
  $\varphi = \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R} \approx 53{,}12^\circ$
- Die Schaltung ist induktiv – der Strom eilt der Spannung nach.
- Resonanzfrequenz: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 35{,}36\,\mathrm{Hz}$
- Strom nach dem ohmschen Gesetz:
  $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{49{,}99} \approx 2\,\mathrm{A}$
- Wirk-, Blind- und Scheinleistung
  $P = UI\cos\varphi \approx 120{,}1\,\mathrm{W}$
  $Q = UI\sin\varphi \approx 160\,\mathrm{var}$
  $S = UI \approx 200\,\mathrm{VA}$
- Leistungsfaktor: $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} \approx 0{,}6$

Schaltplan



Frequenzgang





Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jeder Teilstrich ist die zehnfache Frequenz. Die Punkte sind die gegebene Frequenz und markante Punkte.

RLC-Parallelschaltung: Zweigströme und Gesamtstrom.

Eingabe: `model(acparallel; find=parts[mA]; U=10[V]; R=100[ohm]; L=159.2[mH]; C=31.83[uF]; f=50[Hz]; parts=rlc)`

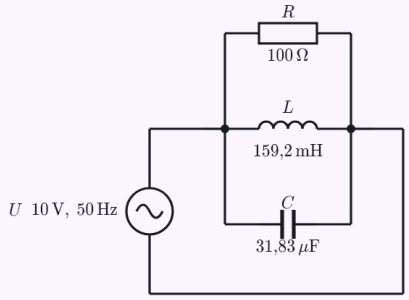
Ergebnis

$$I_R \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I_L \approx 199{,}9\,\mathrm{mA}$$
$$I_C \approx 100\,\mathrm{mA}$$
$$I \approx 141{,}4\,\mathrm{mA}$$

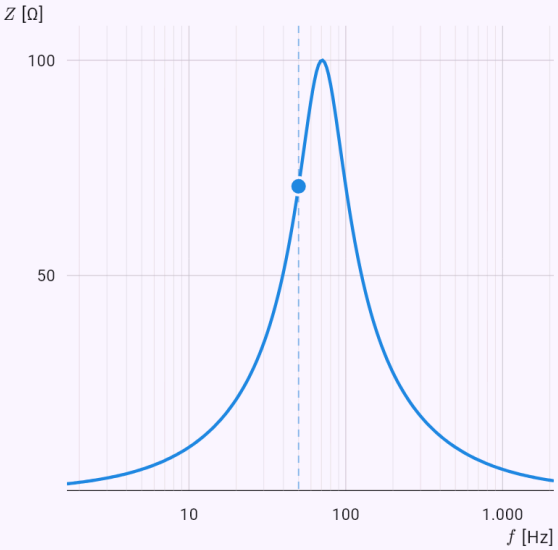
Lösungsweg

- Gesucht I; gegeben
  $U = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 100\,\Omega, \quad L = 159{,}2\,\mathrm{mH}, \quad C = 31{,}8$
- Einheiten umrechnen
  $L = 159{,}2\,\mathrm{mH} = 0{,}1592\,\mathrm{H}, \quad C = 31{,}83\,\mu\mathrm{F} = 3{,}183 \cdot 1$
- In der Parallelschaltung liegt an allen Zweigen dieselbe Spannung, und die Zweigströme addieren sich als Zeiger. Deshalb addieren sich statt der Impedanzen ihre Kehrwerte – die Admittanzen: Y = 1/R + j(ωC − 1/(ωL)). Der Strom durch den Widerstand ist in Phase mit der Spannung, der Spulenstrom eilt um 90° nach, der Kondensatorstrom um 90° voraus. Der Gesamtstrom I = √(I_R² + (I_C − I_L)²) kann kleiner sein als die Zweigströme – bei Resonanz heben sich Spulen- und Kondensatorstrom auf. Gleichung des Modells
  $$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Induktiver Blindwiderstand der Spule:
  $X_L = \omega L = 314{,}2 \cdot 0{,}1592 \approx 50{,}01\,\Omega$
- Kapazitiver Blindwiderstand des Kondensators
  $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}2 \cdot 3{,}183 \cdot 10^{-5}} \approx 100\,\Omega$$
- Admittanz – die Kehrwerte der Zweigimpedanzen addieren sich als Zeiger
  $$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{50{,}01}\right)^2} \approx 0{,}01414\,\mathrm{S}, \quad \hat{Y}$$
- Impedanz der Schaltung: $Z = \frac{1}{Y} \approx 70{,}73\,\Omega$
- Impedanz als komplexe Zahl (algebraische und Polarform)
  $\hat{Z} \approx 50{,}03 + \mathrm{j}\,50\,\Omega = 70{,}73\angle 44{,}98^\circ\,\Omega$
- Phasenverschiebung des Stroms gegen die Spannung
  $$\varphi = \arctan\left(R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \approx 44{,}98^\circ$$
- Die Schaltung ist induktiv – der Strom eilt der Spannung nach.
- Resonanzfrequenz: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 70{,}7\,\mathrm{Hz}$
- Zweigströme – an allen Zweigen liegt dieselbe Spannung
  $$I_R = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
  $$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{50{,}01} \approx 0{,}1999\,\mathrm{A}$$
  $$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{10}{100} \approx 0{,}1\,\mathrm{A}$$
- Gesamtstrom – die Zeigersumme der Zweigströme:
  $$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \approx 0{,}1414\,\mathrm{A}$$
- Die Zweigströme addieren sich als Zeiger, nicht arithmetisch – Spulen- und Kondensatorstrom sind gegenphasig.

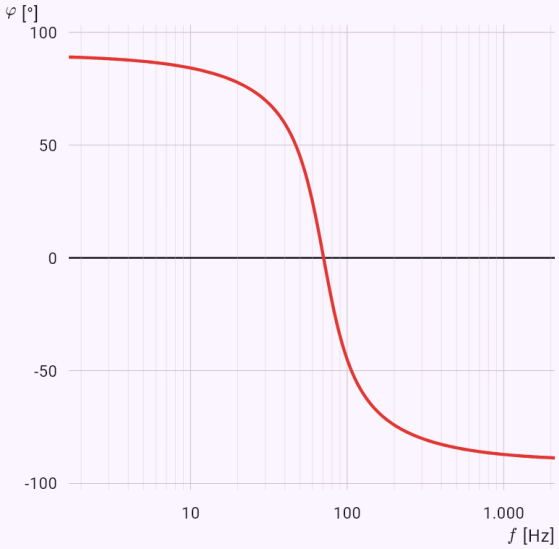
Schaltplan



Frequenzgang



Z $Z \approx 70{,}7\,\Omega$



φ

Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jeder Teilstrich ist die zehnfache Frequenz. Die Punkte sind die gegebene Frequenz und markante Punkte.

RC-Tiefpass: Übertragung in Dezibel und Bode-Diagramm.

Eingabe: `model(filter; find=gain[one]; R=1[kohm]; C=100[nF]; f=1[kHz]; U1=5[V]; kind=rcLow)`

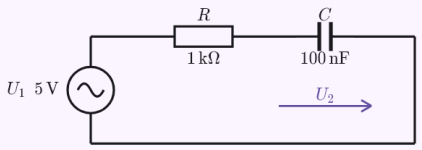
Ergebnis

$$|\hat{H}| \approx 0{,}8467$$
$$A \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
$$\varphi \approx -32{,}14^\circ$$
$$U_2 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

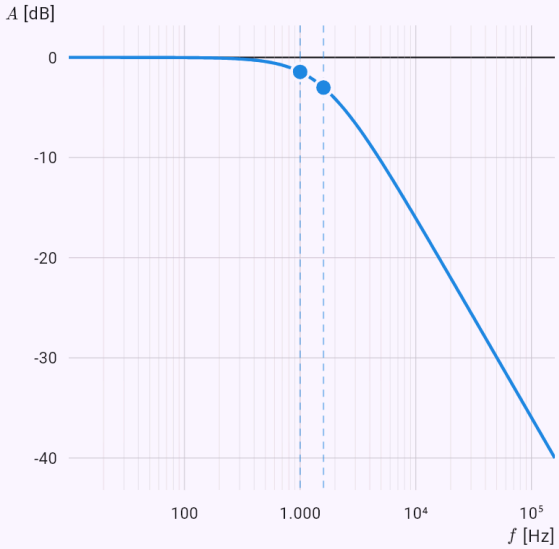
Lösungsweg

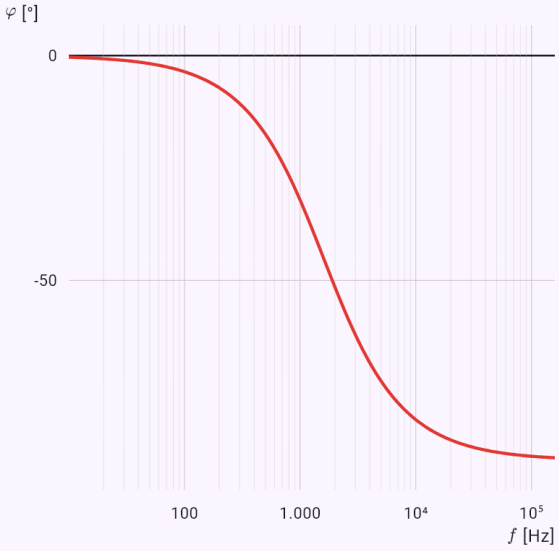
- Gegeben
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad f = 1\,\mathrm{kHz}, \quad U_1 = 5\,\mathrm{V}$
- Einheiten umrechnen
  $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad f = 1$
- Ein Filter erster Ordnung ist ein Spannungsteiler aus einem Widerstand und einem Kondensator (oder einer Spule). Ein Tiefpass (RC mit dem Ausgang am Kondensator) lässt tiefe Frequenzen durch und dämpft hohe, ein Hochpass umgekehrt. Die Grenzfrequenz f_c = 1/(2πRC), bei RL f_c = R/(2πL): dort sinkt die Ausgangsspannung auf 1/√2 ≈ 70,7 % (um 3 dB) und die Phasenverschiebung beträgt 45°. Die Übertragungsfunktion H = U₂/U₁ ist eine komplexe Zahl; ihr Betrag in Dezibel A = 20·log|H| und ihre Phase bilden das Bode-Diagramm – oberhalb der Grenzfrequenz fällt ein Tiefpass um 20 dB pro Dekade. Gleichung des Modells
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC}, \quad \hat{H} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}}$$
- Tiefpass: tiefe Frequenzen gehen durch, hohe werden gedämpft.
- Grenzfrequenz:
  $$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-7}} \approx 1592\,\mathrm{Hz}$$
- Bei der Grenzfrequenz ist die Übertragung 1/√2 ≈ 0,707 (−3 dB) und die Phasenverschiebung 45°.
- Verhältnis der Frequenz zur Grenzfrequenz:
  $$\frac{f}{f_c} = \frac{1000}{1592} \approx 0{,}6283$$
- Betrag der Übertragung:
  $$|\hat{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0{,}8467$$
- Übertragung in Dezibel:
  $$A = 20 \log |\hat{H}| \approx -1{,}45\,\mathrm{dB}$$
- Phasenverschiebung des Ausgangs gegen den Eingang:
  $$\varphi = -\arctan \frac{f}{f_c} \approx -32{,}14^\circ$$
- Ausgangsspannung:
  $$U_2 = |\hat{H}|\, U_1 \approx 0{,}8467 \cdot 5 \approx 4{,}234\,\mathrm{V}$$

Schaltplan



Frequenzgang





Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jeder Teilstrich ist die zehnfache Frequenz. Die Punkte sind die gegebene Frequenz und markante Punkte.

Reihenschwingkreis: Güte und Bandbreite.

Eingabe: `model(resonance; find=Q[one]; L=10[mH]; C=100[nF]; R=10[ohm]; kind=series)`

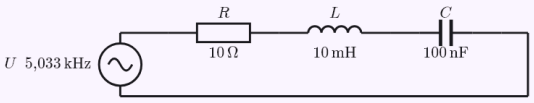
Ergebnis

$$Q \approx 31{,}62$$
$$B \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$$
$$f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}$$
$$f_2 \approx 5113\,\mathrm{Hz}$$

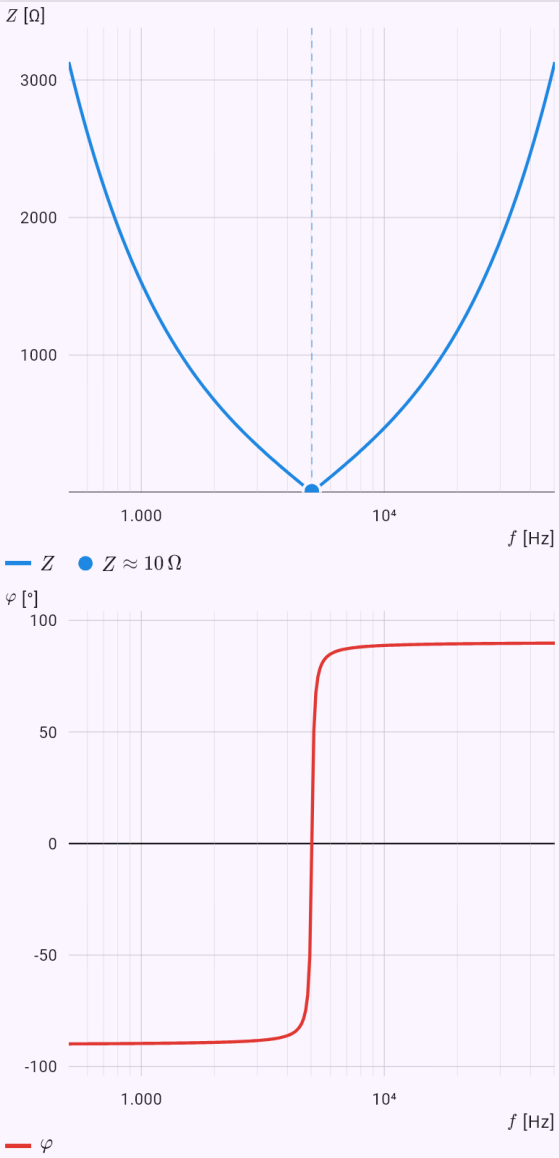
Lösungsweg

- Gegeben: $L = 10\,\mathrm{mH}, \quad C = 100\,\mathrm{nF}, \quad R = 10\,\Omega$
- Einheiten umrechnen:
  $L = 10\,\mathrm{mH} = 0{,}01\,\mathrm{H}, \quad C = 100\,\mathrm{nF} = 10^{-7}\,\mathrm{F}$
- Bei der Resonanzfrequenz $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ sind die Blindwiderstände von Spule und Kondensator gleich und heben sich auf. Ein Reihenschwingkreis hat dann die kleinste Impedanz (nur R) und den größten Strom, ein Parallelschwingkreis die größte Impedanz. Die Schärfe der Resonanz gibt die Güte Q an – beim Reihenkreis $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ – und die Bandbreite $B = f_0/Q$ zwischen den Frequenzen, bei denen der Strom auf $1/\sqrt{2}$ des Maximums fällt. Abstimmung: die Kapazität für eine gegebene Frequenz $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$. Gleichung des Modells: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- Einsetzen: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{0{,}01 \cdot 10^{-7}}} \approx 5033\,\mathrm{Hz}$
- Bei Resonanz heben sich die Blindwiderstände von Spule und Kondensator auf – der Reihenkreis hat die kleinste Impedanz und den größten Strom.
- Güte
  $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0{,}01}{10^{-7}}} \approx 31{,}62$$
- Bandbreite: $B = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{5033}{31{,}62} \approx 159{,}2\,\mathrm{Hz}$
- Grenzen des Bandes (Abfall auf $1/\sqrt{2}$)
  $$f_{1,2} = f_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right): \quad f_1 \approx 4954\,\mathrm{Hz}, \quad f_2 \approx$$

Schaltplan



Frequenzgang



Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jeder Teilstrich ist die zehnfache Frequenz. Die Punkte sind die gegebene Frequenz und markante Punkte.

Belasteter Spannungsteiler.

Eingabe: `model(divider; find=U2[V]; U=12[V]; R1=1[kohm]; R2=2[kohm]; RL=2[kohm]; load=load)`

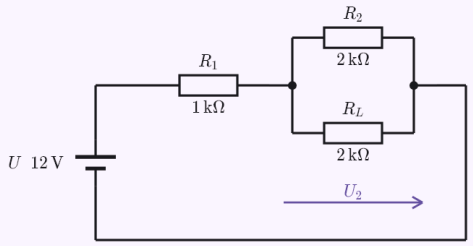
Ergebnis

$$U_2 \approx 6\,\mathrm{V}$$

Lösungsweg

- Gesucht U_2; gegeben
  $U = 12\,\mathrm{V}, \quad R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$
- Einheiten umrechnen
  $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega} = 2000\,\Omega, \quad R_L = 2$
- Zwei in Reihe geschaltete Widerstände teilen die Spannung im Verhältnis ihrer Widerstände: durch beide fließt derselbe Strom I = U/(R₁ + R₂), also U₂ = U·R₂/(R₁ + R₂). Eine Last R_L liegt parallel zu R₂ und verkleinert den unteren Widerstand auf R₂R_L/(R₂ + R_L) – die Ausgangsspannung des belasteten Teilers ist daher kleiner als im Leerlauf. Gleichung des Modells:
  $U_2 = U\dfrac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}, \quad R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$
- Die Last liegt parallel zu R₂
  $R_{2L} = \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \dfrac{2000 \cdot 2000}{2000 + 2000} \approx 1000\,\Omega$
- Einsetzen: $U_2 = 12 \cdot \dfrac{1000}{1000 + 1000} \approx 6\,\mathrm{V}$
- Im Leerlauf wäre $U_{2,0} = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 8\,\mathrm{V}$ – die Last senkt die Ausgangsspannung.

Schaltplan



Abgleich einer Wheatstone-Brücke.

Eingabe: `model(bridge; find=R4[ohm]; R1=100[ohm]; R2=200[ohm]; R3=150[ohm])`

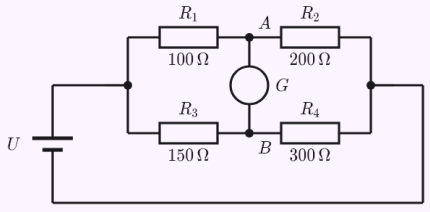
Ergebnis

$$R_4 \approx 300\,\Omega$$

Lösungsweg

- Gesucht R_4; gegeben:
  $R_1 = 100\,\Omega, \quad R_2 = 200\,\Omega, \quad R_3 = 150\,\Omega$
- Die Wheatstone-Brücke besteht aus zwei parallelen Spannungsteilern mit einem Messgerät zwischen ihren Mittelpunkten (A und B). Die Brücke ist abgeglichen – durch das Messgerät fließt kein Strom –, wenn beide Teiler die Spannung im selben Verhältnis teilen: R₁/R₂ = R₃/R₄. So misst man einen unbekannten Widerstand genau. Eine nicht abgeglichene Brücke liefert die Spannung U_AB = U(R₂/(R₁ + R₂) − R₄/(R₃ + R₄)) – so arbeiten zum Beispiel Dehnungsmessstreifen. Gleichung des Modells: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$
- Die Brücke ist abgeglichen – A und B haben dieselbe Spannung, durch das Messgerät fließt kein Strom.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$
- Einsetzen: $R_4 = \dfrac{200 \cdot 150}{100} \approx 300\,\Omega$

Schaltplan



Kondensator zur Kompensation von 0,7 auf 0,95.

Eingabe: `model(compensation; find=C[uF]; P=10[kW]; U=230[V]; f=50[Hz]; cos1=0.7[one]; cos2=0.95[one])`

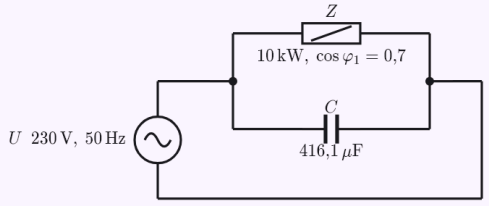
Ergebnis

$$C \approx 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$$

Lösungsweg

- Gesucht C; gegeben
  $P = 10\,\mathrm{kW}, \quad U = 230\,\mathrm{V}, \quad f = 50\,\mathrm{Hz}, \quad \cos\varphi_1 = 0{,}7$
- Einheiten umrechnen: $P = 10\,\mathrm{kW} = 10\,000\,\mathrm{W}$
- Verbraucher mit Spulen (Motoren, Transformatoren) beziehen neben der Wirkleistung P auch eine Blindleistung Q = P·tan φ, die die Leitung unnötig mit einem größeren Strom belastet. Ein parallel geschalteter Kondensator liefert Blindleistung entgegengesetzten Vorzeichens Q_C = Q₁ − Q₂ und hebt den Leistungsfaktor von cos φ₁ auf cos φ₂. Die nötige Kapazität C = Q_C/(ωU²) mit ω = 2πf. Die Wirkleistung bleibt gleich, der Strom aus dem Netz sinkt. Gleichung des Modells:
  $Q_C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2), \quad C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Phasenverschiebungen vor und nach der Kompensation
  $\varphi_1 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}19^\circ$
- Blindleistungen – der Kondensator liefert die Differenz
  $Q_1 = P\tan\varphi_1 \approx 10\,200\,\mathrm{var}$
  $Q_2 = P\tan\varphi_2 \approx 3287\,\mathrm{var}$
  $Q_C = Q_1 - Q_2 \approx 6915\,\mathrm{var}$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $C = \dfrac{Q_C}{\omega U^2}$
- Einsetzen: $C = \dfrac{6915}{314{,}2 \cdot 230^2} \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$
- Netzstrom vor und nach der Kompensation
  $I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1} \approx 62{,}11\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2} \approx 45{,}77\,\mathrm{A}$
- Einheiten umrechnen: $C \approx 4{,}161 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} = 416{,}1\,\mu\mathrm{F}$

Schaltplan



Schaltung als Ausdruck – vereinfacht, Strom durch jedes Bauteil.

Eingabe: `circuit(R1 + (L1 || C1); R1=10; L1=10m; C1=100u; U=10V; f=50Hz)`

Ergebnis

$$Z \approx 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$$
$$I \approx 0{,}9443\,\mathrm{A}$$
$$\varphi \approx 19{,}22^\circ$$
$$P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}$$

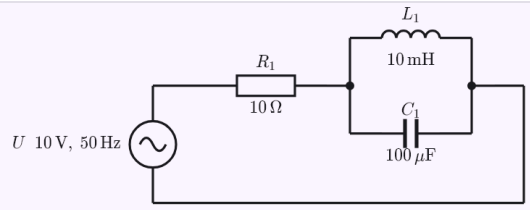
Lösungsweg

- Die Schaltung (+ in Reihe, ∥ parallel): $R_1 + (L_1 \parallel C_1)$; gegebene Werte
  $R_1 = 10\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\mathrm{mH}, \quad C_1 = 100\,\mu\mathrm{F}, \quad U = 10\,\mathrm{V}$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$
- Impedanzen der Spulen und Kondensatoren als komplexe Zahlen (j ist die imaginäre Einheit)
  $\hat{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j} \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}01 \approx \mathrm{j}\,3{,}142\,\Omega$
  $\hat{Z}_{C_1} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{314{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx -\mathrm{j}\,31{,}83\,\Omega$
- Eine Parallelgruppe – die Kehrwerte der Impedanzen addieren sich
  $\hat{Z}_a = \dfrac{\hat{Z}_{L_1} \cdot \hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{L_1} + \hat{Z}_{C_1}} \approx \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega$
- Eine Reihengruppe – die Impedanzen addieren sich:
  $\hat{Z} = R_1 + \hat{Z}_a$
- Gesamtimpedanz der Schaltung:
  $\hat{Z} = 10 + \mathrm{j}\,3{,}486\,\Omega = 10{,}59\angle 19{,}22^\circ\,\Omega$
- Der Strom der Quelle nach dem ohmschen Gesetz (die Quellenspannung hat die Phase 0°)
  $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \dfrac{10}{10{,}59\angle 19{,}22^\circ} \approx 0{,}9443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$
- Durch alle Teile der Gruppe $\hat{Z}$ fließt derselbe Strom – ihre Spannungen
  $\hat{U}_{R_1} = \hat{I} R_1 \approx 9{,}443\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{V}$
  $\hat{U}_a = \hat{I}\hat{Z}_a \approx 3{,}291\angle 70{,}78^\circ\,\mathrm{V}$
- An allen Zweigen der Gruppe $\hat{Z}_a$ liegt dieselbe Spannung – die Zweigströme
  $\hat{I}_{L_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{L_1}} \approx 1{,}048\angle -19{,}22^\circ\,\mathrm{A}$
  $\hat{I}_{C_1} = \dfrac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_{C_1}} \approx 0{,}1034\angle 160{,}8^\circ\,\mathrm{A}$
- Die Bauteile – Impedanz, Spannung und Strom (Betrag ∠ Phase)

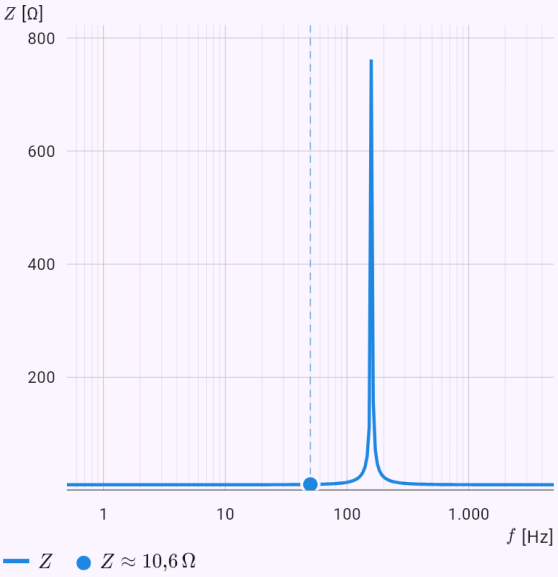
	$\hat{Z}\,[\Omega]$	$\hat{U}\,[\mathrm{V}]$	$\hat{I}\,[\mathrm{A}]$
R_1	10	$9{,}443\angle -19{,}22^\circ$	$0{,}9443\angle -19{,}22^\circ$
L_1	$\mathrm{j}\,3{,}142$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$1{,}048\angle -19{,}22^\circ$
C_1	$-\mathrm{j}\,31{,}83$	$3{,}291\angle 70{,}78^\circ$	$0{,}1034\angle 160{,}8^\circ$

- Die von der Quelle gelieferte Leistung
  $\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* \approx 8{,}917 + \mathrm{j}\,3{,}108, \quad P \approx 8{,}917\,\mathrm{W}, \quad Q \approx 3{,}1$

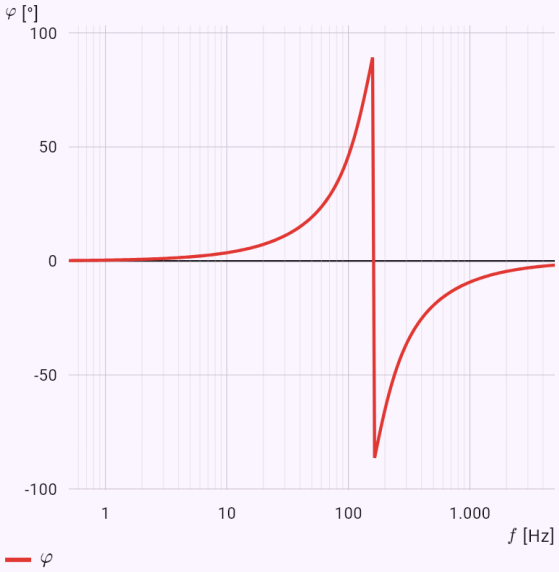
Schaltplan



Frequenzgang



Z $Z \approx 10{,}6\,\Omega$



φ

Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jeder Teilstrich ist die zehnfache Frequenz. Die Punkte sind die gegebene Frequenz und markante Punkte.

Nicht abgeglichene Brücke als Netzliste – Knotenanalyse.

Eingabe: `netlist(V1 1 0 12; R1 1 2 100; R2 2 0 200; R3 1 3 150; R4 3 0 250; R5 2 3 50)`

Ergebnis

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

Lösungsweg

- Die Bauteile, die Knoten, an denen sie liegen, und ihre Werte

	+	−	
V_1	1	0	$12\,\mathrm{V}$
R_1	1	2	$100\,\Omega$
R_2	2	0	$200\,\Omega$
R_3	1	3	$150\,\Omega$
R_4	3	0	$250\,\Omega$
R_5	2	3	$50\,\Omega$

- Unbekannt sind die Knotenspannungen gegen Masse und die Ströme der Spannungsquellen: $U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1}$
- Knotenregel – die Summe der aus jedem Knoten fließenden Ströme ist null

$$1\text{: } I_{V_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$
$$2\text{: } \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$$
$$3\text{: } \frac{U_3 - U_1}{R_3} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_2}{R_5} = 0$$

- Die Spannungsquellen legen die Spannung zwischen ihren Knoten fest: $U_1 = 12$
- Das lineare Gleichungssystem in Matrixform für die Unbekannten $(U_1,\ U_2,\ U_3,\ I_{V_1})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}01667 & -0{,}01 & -0{,}006667 & 1 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}035 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ -0{,}006667 & -0{,}02 & 0{,}03067 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- Das Gauß-Verfahren ergibt die Knotenspannungen

$$U_1 \approx 12\,\mathrm{V}$$
$$U_2 \approx 7{,}842\,\mathrm{V}$$
$$U_3 \approx 7{,}723\,\mathrm{V}$$

- Spannung und Strom jedes Bauteils (vom Knoten + zum Knoten −)

	$U\,[\mathrm{V}]$	$I\,[\mathrm{A}]$
V_1	12	0,0701
R_1	4,158	0,04158
R_2	7,842	0,03921
R_3	4,277	0,02851
R_4	7,723	0,03089
R_5	0,1188	0,002376

Bekannte Einschränkungen

- Die Schaltungen sind linear und eingeschwungen – Ausgleichsvorgänge von RC, RL und RLC rechnen die Anwendungen der Physik; Dioden, Transistoren und Operationsverstärker gibt es noch nicht.
- Der Schaltplan wird bei den Formularen und bei einer Schaltung als Ausdruck gezeichnet; eine Netzliste bekommt eine Tabelle der Bauteile und Knoten. Eine Schaltung wird nicht vom Foto eines Schaltplans erkannt.
- Eine Netzliste wird entweder bei Gleichstrom oder bei einer Frequenz gelöst – Quellen verschiedener Frequenzen und Überlagerung gibt es noch nicht.

49. Biologie und Medizin

Berechnungen aus Biologie, Labor und Medizin finden Sie auf dem Startbildschirm im Abschnitt „Anwendungen“, Fachgebiete Biologie und Medizin: Enzymkinetik nach Michaelis und Menten (auch mit Inhibitor), das Hardy-Weinberg-Gleichgewicht, Verdünnungen und Koloniezählung, das Membranpotential nach Nernst und Goldman sowie die Arzneimitteldosierung. Das Formular füllen Sie wie bei den anderen Anwendungen aus; das Symbol „?“ erklärt, woher die Formeln kommen.

Aus gemessenen Geschwindigkeiten einer Enzymreaktion bestimmt die App K_m und V_max zweimal: auf dem Schulweg aus der Lineweaver-Burk-Geraden und genauer durch nichtlineare Regression; der Graph zeigt die Punkte und beide Kurven. Beim Hardy-Weinberg-Gleichgewicht berechnet sie aus den Genotypzahlen die Allelfrequenzen, die erwarteten Zahlen und einen χ^2-Test, bei einer rezessiven Krankheit aus ihrer Häufigkeit den Anteil der Überträger.

Verdünnungen: das Volumen der Stammlösung nach $c_1V_1 = c_2V_2$, eine Verdünnungsreihe und KBE/ml aus einer Koloniezählung. Dosierung: Dosis nach Körpergewicht oder Körperoberfläche (Mosteller, Du Bois), Infusionsrate in ml/h und Tropfen pro Minute sowie die Kreatinin-Clearance nach Cockcroft und Gault. Die Dosisberechnungen sind nur Richtwerte und ersetzen kein ärztliches Urteil.

Beispiele

K_m und V_max aus gemessenen Geschwindigkeiten – Lineweaver–Burk und nichtlineare Regression.

Eingabe: `model(enzyme; find=params[one]; SS=0.5 1 2 4 8[mmol_l]; vv=22 31 52 64`

`81[umol_l_min]; input=table)`

Ergebnis

$$V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$
$$K_m \approx 2{,}005\,\text{mmol/l}$$

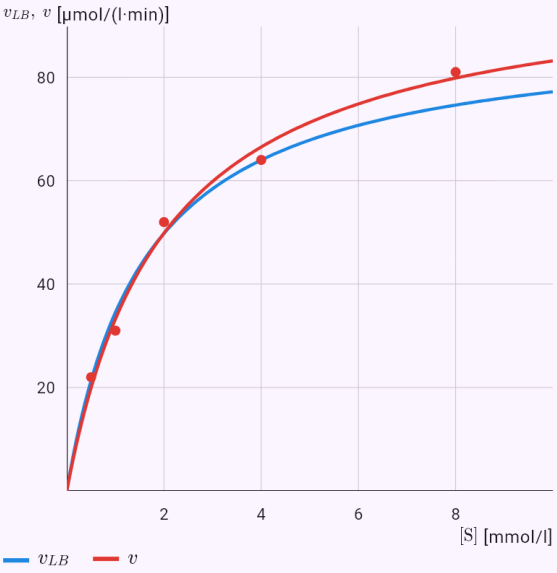
Lösungsweg

- Gegeben
  $[\text{S}]_i = (0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8)\,\text{mmol/l}, \quad v_i = (22;\ 31;\ 52;\ 64$
- Ein Enzym E bindet das Substrat S und setzt es zum Produkt um. Die Geschwindigkeit v wächst mit der Substratkonzentration, sättigt aber – höchstens erreicht sie die Maximalgeschwindigkeit V_max, wenn alle Enzymmoleküle besetzt sind. Die Michaelis-Konstante K_m ist die Substratkonzentration bei halber Geschwindigkeit: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Aus gemessenen Geschwindigkeiten ergeben sich die Konstanten aus der Lineweaver-Burk-Geraden (1/v gegen 1/[S], Achsenabschnitt 1/V_max, Steigung K_m/V_max) oder genauer durch nichtlineare Regression. Ein Inhibitor: ein kompetitiver erhöht das scheinbare K_m, ein nichtkompetitiver senkt V_max, ein unkompetitiver senkt beides – jeweils um den Faktor α = 1 + [I]/K_i.
  Gleichung des Modells: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Kehrwerte für das Lineweaver-Burk-Diagramm
  $\dfrac{1}{[\text{S}]_i} \approx (2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125), \quad \dfrac{1}{v_i} \approx (0{,}04545;\ 0{,}03$
- Regressionsgerade 1/v gegen 1/[S]
  $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{V_{max}} + \dfrac{K_m}{V_{max}} \cdot \dfrac{1}{[\text{S}]}: \quad a \approx 0{,}01117, \quad b \approx 0{,}0178$
- Konstanten aus der Geraden (Lineweaver–Burk)
  $V_{max} = \dfrac{1}{a} \approx 89{,}49\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = \dfrac{b}{a} \approx 1{,}594$
- Nichtlineare Regression – kleinste Quadrate direkt an der Kurve

$$\min \sum \left(v_i - \frac{V_{max}[\text{S}]_i}{K_m + [\text{S}]_i}\right)^2: \quad V_{max} \approx 99{,}85\,\mu\text{mol}/(\text{l}$$

- Das Lineweaver-Burk-Diagramm vergrößert die Messfehler bei kleinen Konzentrationen (großes 1/v) – das Ergebnis stammt daher aus der nichtlinearen Regression; die Gerade ist der Schulweg und der Startwert.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Reaktionsgeschwindigkeit mit einem kompetitiven Inhibitor.

Eingabe: `model(enzyme; find=v[umol_l_min]; Vmax=100[umol_l_min]; Km=2[mmol_l]; S=2[mmol_l];`

`I=1[mmol_l]; Ki=1[mmol_l]; input=constants; inhibition=competitive)`

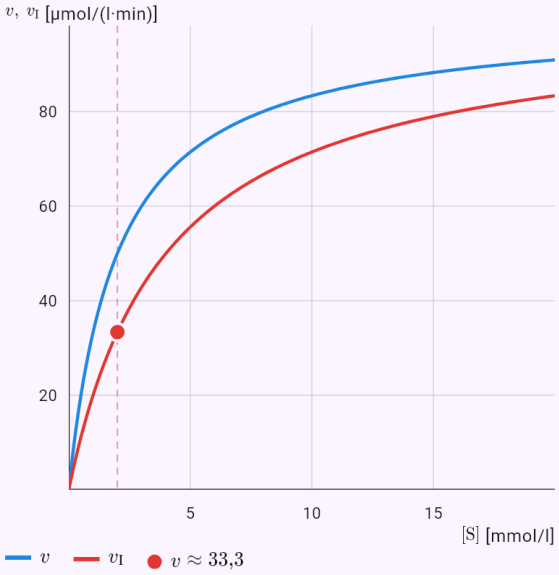
Ergebnis

$$v \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$$

Lösungsweg

- Gesucht v; gegeben
  $V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min}), \quad K_m = 2\,\text{mmol/l}, \quad [\text{S}] =$
- Ein Enzym E bindet das Substrat S und setzt es zum Produkt um. Die Geschwindigkeit v wächst mit der Substratkonzentration, sättigt aber – höchstens erreicht sie die Maximalgeschwindigkeit V_max, wenn alle Enzymmoleküle besetzt sind. Die Michaelis-Konstante K_m ist die Substratkonzentration bei halber Geschwindigkeit: v = V_max[S]/(K_m + [S]). Aus gemessenen Geschwindigkeiten ergeben sich die Konstanten aus der Lineweaver-Burk-Geraden (1/v gegen 1/[S], Achsenabschnitt 1/V_max, Steigung K_m/V_max) oder genauer durch nichtlineare Regression. Ein Inhibitor: ein kompetitiver erhöht das scheinbare K_m, ein nichtkompetitiver senkt V_max, ein unkompetitiver senkt beides – jeweils um den Faktor α = 1 + [I]/K_i.
  Gleichung des Modells: $v = \dfrac{V_{max}[\text{S}]}{K_m + [\text{S}]}$
- Inhibitionsfaktor: $\alpha = 1 + \dfrac{[\text{I}]}{K_i} = 1 + \dfrac{1}{1} \approx 2$
- Scheinbare Konstanten mit dem Inhibitor
  $K_m^{app} = \alpha K_m \approx 4\,\text{mmol/l}, \quad V_{max}^{app} = V_{max} = 100\,\mu\text{mol}/$
- Ein kompetitiver Inhibitor konkurriert mit dem Substrat um das aktive Zentrum – er erhöht das scheinbare K_m, V_max bleibt (viel Substrat verdrängt ihn).
- Einsetzen
  $v = \dfrac{100 \cdot 2}{4 + 2} \approx 33{,}33\,\mu\text{mol}/(\text{l}\cdot\text{min})$
- Sättigung des Enzyms: $\dfrac{v}{V_{max}} \approx 33{,}3\,\%$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

MN-Blutgruppen – Allelfrequenzen und χ²-Test des Gleichgewichts.

Eingabe: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; AA=1787[one]; Aa=3039[one];`

`aa=1303[one]; input=counts)`

Ergebnis

$p \approx 0{,}5395$
$q \approx 0{,}4605$
$\chi^2 \approx 0{,}02698$
$p_{\chi^2} \approx 0{,}87$

Lösungsweg

- Gegeben: $n_{AA} = 1787, \quad n_{Aa} = 3039, \quad n_{aa} = 1303$
- In einer Population mit zufälliger Paarung ohne Selektion, Mutation und Migration bleiben die Allelfrequenzen konstant, und die Genotypen stehen im Verhältnis p² : 2pq : q², wobei p und q (p + q = 1) die Frequenzen der Allele A und a sind. Aus den Genotypzahlen berechnen wir p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) und die erwarteten Zahlen; ein χ²-Test (1 Freiheitsgrad) zeigt, ob die Population vom Gleichgewicht abweicht. Bei einem rezessiven Merkmal kennen wir nur den Anteil der Homozygoten q², daraus q = √q² und der Anteil der Überträger 2pq. Gleichung des Modells:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Allelfrequenzen – jedes Individuum trägt zwei
  $p = \frac{2n_{AA} + n_{Aa}}{2n} = \frac{2 \cdot 1787 + 3039}{2 \cdot 6129} \approx 0{,}5395, \quad q = 1$
- Erwartete Zahlen im Gleichgewicht
  $E_{AA} = np^2 \approx 1784, \quad E_{Aa} = 2npq \approx 3045, \quad E_{aa} = n$
- χ²-Anpassungstest
  $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \approx 0{,}02698, \quad df = 1, \quad p \approx 0{,}87$
- p > 0,05 – die Abweichung vom Hardy-Weinberg-Gleichgewicht ist nicht signifikant.

Anteil der Überträger einer rezessiven Krankheit mit der Häufigkeit 1 : 2500.

Eingabe: `model(hardyweinberg; find=frequencies[one]; f=0.04[pct]; input=recessive)`

Ergebnis

$p \approx 0{,}98$
$q \approx 0{,}02$
$2pq \approx 0{,}0392$

Lösungsweg

- Gegeben: $f_{aa} = 0{,}04\,\%$
- Einheiten umrechnen: $f_{aa} = 0{,}04\,\% = 4 \cdot 10^{-4}$
- In einer Population mit zufälliger Paarung ohne Selektion, Mutation und Migration bleiben die Allelfrequenzen konstant, und die Genotypen stehen im Verhältnis p² : 2pq : q², wobei p und q (p + q = 1) die Frequenzen der Allele A und a sind. Aus den Genotypzahlen berechnen wir p = (2n_AA + n_Aa)/(2n) und die erwarteten Zahlen; ein χ²-Test (1 Freiheitsgrad) zeigt, ob die Population vom Gleichgewicht abweicht. Bei einem rezessiven Merkmal kennen wir nur den Anteil der Homozygoten q², daraus q = √q² und der Anteil der Überträger 2pq. Gleichung des Modells:
  $p + q = 1, \quad p^2 + 2pq + q^2 = 1$
- Frequenz des rezessiven Allels aus dem Anteil der Homozygoten
  $q^2 = f_{aa} \Rightarrow q = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \approx 0{,}02, \quad p = 1 - q \approx 0{,}98$
- Genotypfrequenzen:
  $p^2 \approx 0{,}9604, \quad 2pq \approx 0{,}0392, \quad q^2 = 4 \cdot 10^{-4}$
- Überträger (Heterozygote) sind $2pq \approx 3{,}92\,\% \approx \frac{1}{26}$

Wie viel Stammlösung für 50 ml zehnfach verdünnt.

Eingabe: `model(dilution; find=V1[ml]; c1=10[mg_ml]; c2=1[mg_ml]; V2=50[ml]; mode=simple)`

Ergebnis

$$V_1 \approx 5\,\mathrm{ml}$$

Lösungsweg

- Gesucht V_1; gegeben:
  $c_1 = 10\,\mathrm{mg/ml}, \quad c_2 = 1\,\mathrm{mg/ml}, \quad V_2 = 50\,\mathrm{ml}$
- Beim Verdünnen bleibt die Stoffmenge (Masse) des gelösten Stoffes gleich: $c_1V_1 = c_2V_2$. Daraus folgt das Volumen der Stammlösung $V_1 = c_2V_2/c_1$, das mit Lösungsmittel auf V_2 aufgefüllt wird. Bei einer Verdünnungsreihe wird jeder Schritt mit demselben Faktor d verdünnt (etwa 1 : 10), nach n Schritten ist die Konzentration c_0/d^n. In der Mikrobiologie ergibt sich aus der Zahl N der Kolonien auf einer Platte, auf die V_p ml der Verdünnung D ausplattiert wurden, die Zahl lebender Zellen in der ursprünglichen Probe KBE/ml = N·D/V_p (zuverlässig für 30 bis 300 Kolonien). Gleichung des Modells: $c_1V_1 = c_2V_2$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $V_1 = \dfrac{c_2V_2}{c_1}$
- Einsetzen: $V_1 = \dfrac{1 \cdot 50}{10} \approx 5\,\mathrm{ml}$
- Volumen des Lösungsmittels und Verdünnung:
  $V_2 - V_1 \approx 45\,\mathrm{ml}, \quad \dfrac{c_1}{c_2} \approx 10$

Zellen in einer Probe aus den Kolonien auf einer Platte.

Eingabe: `model(dilution; find=cfu[cfu_ml]; N=150[one]; Vp=0.1[ml]; D=100000[one]; mode=cfu)`

Ergebnis

$$\mathrm{CFU} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$$

Lösungsweg

- Gesucht CFU; gegeben:
  $N = 150, \quad V_p = 0{,}1\,\mathrm{ml}, \quad D = 100\,000$
- Beim Verdünnen bleibt die Stoffmenge (Masse) des gelösten Stoffes gleich: $c_1V_1 = c_2V_2$. Daraus folgt das Volumen der Stammlösung $V_1 = c_2V_2/c_1$, das mit Lösungsmittel auf V_2 aufgefüllt wird. Bei einer Verdünnungsreihe wird jeder Schritt mit demselben Faktor d verdünnt (etwa 1 : 10), nach n Schritten ist die Konzentration c_0/d^n. In der Mikrobiologie ergibt sich aus der Zahl N der Kolonien auf einer Platte, auf die V_p ml der Verdünnung D ausplattiert wurden, die Zahl lebender Zellen in der ursprünglichen Probe KBE/ml = N·D/V_p (zuverlässig für 30 bis 300 Kolonien). Gleichung des Modells: $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{N \cdot D}{V_p}$
- Einsetzen
  $\mathrm{CFU/ml} = \dfrac{150 \cdot 100\,000}{0{,}1} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{CFU/ml}$

Ruhemembranpotential eines Neurons (Goldman).

Eingabe: `model(nernst; find=E[mV]; Ko=5[mmol_l]; Ki=140[mmol_l]; Nao=145[mmol_l]; Nai=15[mmol_l]; Clo=110[mmol_l]; Cli=10[mmol_l]; PK=1[one]; PNa=0.04[one]; PCl=0.45[one]; T=37[degC]; equation=goldman)`

Ergebnis

$$V_m \approx -67{,}3\,\mathrm{mV}$$

Lösungsweg

- Gesucht V_m; gegeben
  $[\mathrm{K^+}]_o = 5\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{K^+}]_i = 140\,\mathrm{mmol/l}, \quad [\mathrm{Na^+}]_o =$
- Einheiten umrechnen: $T = 37\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}1\,\mathrm{K}$
- Ein Ion, für das die Membran durchlässig ist, verteilt sich so, dass die elektrische Kraft die Diffusion entlang des Konzentrationsgefälles ausgleicht. Die Gleichgewichtsspannung gibt die Nernst-Gleichung E = (RT/zF)·ln(c_o/c_i) an, mit den Konzentrationen außen und innen c_o und c_i, der Ladung z, der Gaskonstante R und der Faraday-Konstante F (bei 37 °C ist RT/F ≈ 26,7 mV). Das Ruhemembranpotential mehrerer Ionen beschreibt die Goldman-Gleichung – die Konzentrationen gewichtet mit den relativen Permeabilitäten P_K, P_Na, P_Cl (beim Anion Cl^- sind innen und außen vertauscht). Gleichung des Modells

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\mathrm{K^+}]_o + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_o + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_i}{P_K[\mathrm{K^+}]_i + P_{Na}[\mathrm{Na^+}]_i + P_{Cl}[\mathrm{Cl^-}]_o}$$

- Die Konstante RT/F bei dieser Temperatur:
  $\frac{RT}{F} = \frac{8{,}314 \cdot 310{,}1}{96\,485} \approx 26{,}73\,\mathrm{mV}$
- Gewichtete Konzentrationen außen (o) und innen (i)
  $\mathrm{o} : 1 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 145 + 0{,}45 \cdot 10 \approx 15{,}3, \quad \mathrm{i} : 1 \cdot 140 + 0$
- Einsetzen: $V_m = 26{,}73 \cdot \ln \frac{15{,}3}{190{,}1} \approx -67{,}34\,\mathrm{mV}$
- Das Ruhepotential liegt nahe am Gleichgewichtspotential des durchlässigsten Ions – in Ruhe dem des Kaliums.

Dosis eines Zytostatikums nach Körperoberfläche.

Eingabe: `model(dosage; find=dose[mg]; h=180[cm]; m=80[kg]; ds=100[mg_m2]; mode=bsa)`

Ergebnis

$$D \approx 200\,\mathrm{mg}$$

Lösungsweg

- Gesucht D; gegeben:
  $h = 180\,\mathrm{cm}, \quad m = 80\,\mathrm{kg}, \quad d_S = 100\,\mathrm{mg/m^2}$
- Nur ein Richtwert – ersetzt weder ärztliches Urteil noch Packungsbeilage oder Standards des Hauses.
- Dosis nach Körpergewicht D = d·m (mg/kg × kg); aus der bekannten Konzentration einer Lösung folgt das Volumen V = D/c. Bei Zytostatika und Kindern wird die Dosis auf die Körperoberfläche bezogen: Mosteller-Formel S = √(Größe·Gewicht/3600) (cm, kg, m²), zum Vergleich auch Du Bois. Die Infusionsrate in ml/h ist das Volumen durch die Zeit, in Tropfen pro Minute noch mal dem Tropfenfaktor des Systems (meist 20 Tropfen/ml). Die Kreatinin-Clearance nach Cockcroft und Gault schätzt die Nierenfunktion: Cl = (140 − Alter)·Gewicht/(72·S_cr) mit Kreatinin in mg/dl (µmol/l durch 88,4), bei Frauen mal 0,85. Die Ergebnisse sind nur Richtwerte – sie ersetzen weder ärztliches Urteil noch die Packungsbeilage. Gleichung des Modells:
  $S = \sqrt{\frac{h \cdot m}{3600}}, \quad D = d_S \cdot S$
- Körperoberfläche (Mosteller): $S = \sqrt{\frac{180 \cdot 80}{3600}} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Zum Vergleich Du Bois:
  $S = 0{,}007184 \cdot h^{0{,}725} \cdot m^{0{,}425} \approx 2\,\mathrm{m^2}$
- Einsetzen: $D = 100 \cdot 2 \approx 200\,\mathrm{mg}$

Kreatinin-Clearance einer Frau (Cockcroft–Gault).

Eingabe: `model(dosage; find=crcl[ml_min]; age=60[yr]; m=72[kg]; scr=88.4[umol_l]; mode=crcl; sex=female)`

Ergebnis

$$Cl_{cr} \approx 68\,\mathrm{ml/min}$$

Lösungsweg

- Gesucht Cl_{cr}; gegeben
  $a = 60\,\mathrm{J.}, \quad m = 72\,\mathrm{kg}, \quad S_{cr} = 88{,}4\,\mu\mathrm{mol/l}$
- Nur ein Richtwert – ersetzt weder ärztliches Urteil noch Packungsbeilage oder Standards des Hauses.
- Dosis nach Körpergewicht D = d·m (mg/kg × kg); aus der bekannten Konzentration einer Lösung folgt das Volumen V = D/c. Bei Zytostatika und Kindern wird die Dosis auf die Körperoberfläche bezogen: Mosteller-Formel S = √(Größe·Gewicht/3600) (cm, kg, m²), zum Vergleich auch Du Bois. Die Infusionsrate in ml/h ist das Volumen durch die Zeit, in Tropfen pro Minute noch mal dem Tropfenfaktor des Systems (meist 20 Tropfen/ml). Die Kreatinin-Clearance nach Cockcroft und Gault schätzt die Nierenfunktion: Cl = (140 − Alter)·Gewicht/(72·S_cr) mit Kreatinin in mg/dl (µmol/l durch 88,4), bei Frauen mal 0,85. Die Ergebnisse sind nur Richtwerte – sie ersetzen weder ärztliches Urteil noch die Packungsbeilage. Gleichung des Modells:
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - a)m}{72\,S_{cr}} \cdot 0{,}85$
- Kreatinin in mg/dl (µmol/l durch 88,4):
  $S_{cr} = \dfrac{88{,}4}{88{,}4} \approx 1\,\mathrm{mg/dl}$
- Einsetzen
  $Cl_{cr} = \dfrac{(140 - 60) \cdot 72}{72 \cdot 1} \cdot 0{,}85 \approx 68\,\mathrm{ml/min}$

Bekannte Einschränkungen

- Enzymkinetik nur für ein Substrat im Fließgleichgewicht (Michaelis–Menten); allosterische Enzyme (Hill-Gleichung) gibt es noch nicht.
- Hardy–Weinberg für ein Gen mit zwei Allelen; mehrere Allele und X-chromosomale Gene gibt es noch nicht.
- Die Dosierung ist nur ein Richtwert – Wechselwirkungen, Altersgruppen und Anpassungen an die Organfunktion außer der Kreatinin-Clearance berücksichtigt sie nicht.

50. Wirtschaft, Finanzen und Versicherungen

Finanz- und Wirtschaftsrechnungen finden Sie auf dem Startbildschirm im Abschnitt „Anwendungen“, Fachgebiet Wirtschaft: Tageszinsen (30E/360, ACT/360, ACT/365), ein Wechsel und sein Diskont, eine Rente aus dem Ersparten (befristet, aufgeschoben, ewig), gemischte Verzinsung, Sparen mit Anfangseinlage und jährlicher Zinsgutschrift, Ratentilgung eines Kredits, Verzinsung einer Einlage (einfach, Zinseszins, stetig, mit Steuer und Inflation), regelmäßiges Sparen, Kredit mit Tilgungsplan und Effektivzins, Anleihe, Investition (Kapitalwert, interner Zinsfuß, Amortisation), Währungsumrechnung, Break-even-Punkt, Gewinnmaximierung, Marktgleichgewicht, Leontief-Modell und Markow-Ketten sowie Versicherungsmathematik – Sterbetafeln, Lebensversicherung, Renten, Rückstellungen und Schadenversicherung mit Bonus-Malus.

Die Investition in P2P-Kredite berechnet den Wert des Portfolios (Guthaben auf dem Konto und ausstehendes Kapital) Monat für Monat: die Einzahlungen werden in ganzen Beträgen pro Kredit investiert, die Kredite als Annuität getilgt, die Plattform nimmt eine Abschlussgebühr und einen Anteil der Zinsen, die Verluste sind eine jährliche Ausfallrate; zum Vergleich eine geschlossene Formel mit stetiger Wiederanlage. Umgekehrt findet sie die Monatseinzahlung oder die Dauer für einen Zielbetrag.

Beträge können in jeder Währung gerechnet werden – Sie wählen sie im Formular (voreingestellt ist die des Landes Ihres Telefons); die Rechnung hängt nicht davon ab. Die Währungsumrechnung nutzt die Tageskurse der Tschechischen Nationalbank (auf Tschechisch oder auf einem Telefon aus Tschechien) oder die Referenzkurse der Europäischen Zentralbank (in den anderen Sprachen) und rechnet jedes Paar über eine gemeinsame Währung um; Quelle und Datum der Kurse werden angezeigt.

Beträge in einer Währung werden nach den Gepflogenheiten der App-Sprache und der Region aus den Telefoneinstellungen geschrieben (2.431,50 EUR; in der Schweiz 2’431.50; auf Englisch 2,431.50), ebenso das Datum der Kurstabelle.

Der Lösungsweg zeigt Formeln, Einsetzen und Zwischenergebnisse: effektiven und realen Zins, Tilgungsplan, Barwert der Zahlungen, Grenzerlös und Grenzkosten als Ableitungen, Renten als Integrale, die Leontief-Inverse und die stationäre Verteilung durch Lösen eines Systems. Die Versicherungsmathematik rechnet mit Kommutationswerten; die Rückstellung wird prospektiv und retrospektiv gezeigt.

Beispiele

Einlage mit monatlicher Gutschrift, Zinssteuer und Inflation.

Eingabe: `model(deposit; find=Kn[one]; K0=100000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; d=15[pct];`

`infl=3[pct]; kind=compound; freq=monthly; cur=CZK)`

Ergebnis

$$K_n \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $K_0 = 100.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10, \quad d = 15\,\%, \quad \pi = 3\,\%$
- Einheiten umrechnen:
  $p = 5\,\% = 0{,}05, \quad d = 15\,\% = 0{,}15, \quad \pi = 3\,\% = 0{,}03$
- Bei einfacher Verzinsung werden die Zinsen stets vom ursprünglichen Kapital berechnet: K_n = K₀(1 + pn). Beim Zinseszins werden sie gutgeschrieben und mitverzinst: K_n = K₀(1 + p/m)^(mn), m ist die Zahl der Gutschriften pro Jahr (jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, monatlich). Stetige Verzinsung ist der Grenzfall m → ∞: K_n = K₀e^(pn). Eine Steuer auf Zinsen d senkt den Satz auf p(1 − d). Der effektive Jahreszins vergleicht die Häufigkeiten. Abzinsen ist die Umkehrung – wie viel heute anzulegen ist. Mit Inflation π ist der reale Wert K_n/(1 + π)^n. Die gemischte Verzinsung (so schreiben Banken die Zinsen einmal jährlich gut) verzinst die ganzen Jahre mit Zinseszins und den Rest des letzten Jahres einfach: K_n = K₀(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f. Gleichung des Modells: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Zinsgutschriften pro Jahr: $m = 12$
- Zinssatz nach Steuer:
  $p' = p(1 - d) = 5\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 4{,}25\,\%$
- Effektiver Jahreszins: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^m - 1 \approx 4{,}334\,\%$
- Einsetzen
  $$K_n = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{12}\right)^{120} \approx 152.844{,}24\,\mathrm{CZK}$$
- Zinsen insgesamt: $K_n - K_0 \approx 52.844{,}24\,\mathrm{CZK}$
- Realer Wert (in heutigen Preisen):
  $\frac{K_n}{(1+\pi)^n} \approx 113.730{,}47\,\mathrm{CZK}$
- Realzins: $r = \frac{1 + p_{ef}}{1 + \pi} - 1 \approx 1{,}295\,\%$
- Der Zins liegt über der Inflation – der reale Wert des Geldes wächst.

Monatliches Sparen über 15 Jahre.

Eingabe: `model(savings; find=S[one]; a=2000[one]; p=3[pct]; n=15[one]; d=15[pct]; timing=due; freq=monthly; cur=CZK)`

Ergebnis

$$S \approx 438.907{,}24\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben: $a = 2.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 15, \quad d = 15\,\%$
- Einheiten umrechnen:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Beim regelmäßigen Sparen zahlen wir in jeder Periode (Monat, Jahr) den Betrag a ein. Jede Einzahlung wird unterschiedlich lange verzinst, das Endkapital ist daher die Summe einer geometrischen Reihe: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) bei Einzahlung zu Periodenbeginn (vorschüssig), ohne das erste q bei Einzahlung am Ende (nachschüssig); q = 1 + p/m und N = mn ist die Zahl der Einzahlungen. Die Gleichung liefert auch die nötige Rate oder die Laufzeit. Eine optionale Anfangseinlage K₀ wird die ganze Zeit verzinst – K₀·q^N kommt hinzu. Bei jährlicher Zinsgutschrift werden die Monatsraten im Jahr einfach verzinst – ein Jahr ergibt A = a(12 + p·13/2) bei Einzahlung am Monatsanfang, a(12 + p·11/2) am Monatsende – und erst diese Jahresbeträge werden mit Zinseszins verzinst. Gleichung des Modells:
  $S = a\,q\,\frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$
- Zinssatz nach Steuer:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Aufzinsungsfaktor pro Periode:
  $q = 1 + \frac{0{,}0255}{12} \approx 1{,}002125$
- Einsetzen
  $$S = 2.000 \cdot 1{,}002125 \cdot \frac{1{,}002125^{180} - 1}{0{,}002125} \approx 438.907{,}24\,\mathrm{C}$$
- Eingezahlt insgesamt und Zinsen
  $N \cdot a = 180 \cdot 2.000 = 360.000\,\mathrm{CZK}, \quad S - Na \approx 78.9($

Hypothek über 3 Mio. auf 25 Jahre – Rate, Tilgungsplan und Effektivzins.

Eingabe: `model(loan; find=a[one]; D=3000000[one]; p=5[pct]; n=25[one]; F=15000[one]; freq=monthly; cur=CZK)`

Ergebnis

$$a \approx 17.537{,}70\,\mathrm{CZK}$$

$$\mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $D = 3.000.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 25, \quad F = 15.000$
- Einheiten umrechnen: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Ein Annuitätenkredit wird mit gleichen Raten a getilgt. Jede Rate zahlt zuerst die Zinsen auf die Restschuld, der Rest tilgt die Schuld, so sinkt der Zinsanteil mit der Zeit. Der Barwert aller Raten ist gleich dem Kreditbetrag, daraus a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Der Tilgungsplan zeigt für jede Rate Zins, Tilgung und Restschuld. Der effektive Jahreszins schließt auch die Gebühren ein – der Satz, bei dem der Barwert der Raten dem tatsächlich ausgezahlten Betrag entspricht. Bei der Ratentilgung sinkt die Schuld jede Periode um denselben Betrag M = D/N und die Rate a_k = M + U_k sinkt mit den Zinsen – man zahlt weniger Zinsen als bei der Annuität, die ersten Raten sind aber höher. Der Tilgungsplan zeigt das erste Jahr und die letzte Rate oder alles. Gleichung des Modells:
  $$a = D\,\frac{q^N(q-1)}{q^N-1}, \quad q = 1 + \frac{p}{m}, \quad N = mn$$
- Zins pro Periode:
  $$i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667, \quad q = 1 + i$$
- Einsetzen
  $$a = 3.000.000 \cdot \frac{1{,}0041667^{300} \cdot 0{,}00416667}{1{,}0041667^{300} - 1} \approx 17.537{,}70$$
- Tilgungsplan (U Zins, M Tilgung, D Restschuld)

k	a	U_k	M_k	L
1	17.537,70	12.500	5.037,70	2.994.962,3
2	17.537,70	12.479,01	5.058,69	2.989.903,6
3	17.537,70	12.457,93	5.079,77	2.984.823,8
4	17.537,70	12.436,77	5.100,94	2.979.722,9
5	17.537,70	12.415,51	5.122,19	2.974.600,7
6	17.537,70	12.394,17	5.143,53	2.969.457,1
7	17.537,70	12.372,74	5.164,96	2.964.292,2
8	17.537,70	12.351,22	5.186,48	2.959.105,7
9	17.537,70	12.329,61	5.208,09	2.953.897,6
10	17.537,70	12.307,91	5.229,79	2.948.667,8
11	17.537,70	12.286,12	5.251,59	2.943.416,2
12	17.537,70	12.264,23	5.273,47	2.938.142,7
⋮	⋮	⋮	⋮	
300	17.537,70	72,77	17.464,93	

- Insgesamt gezahlt und davon Zinsen
  $$\sum a \approx 5.261.310{,}37\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 2.261.310{,}37\,\mathrm{C}$$
- Effektiver Jahreszins mit Gebühren
  $$D - F = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{(1+\mathrm{RPSN})^{k/m}} \Rightarrow \mathrm{RPSN} \approx 5{,}169\,\%$$
- › Das Verfahren: Bisektion, 14 Iterationen

Monatlich 1 000 sparen mit Anfangseinlage und jährlicher Zinsgutschrift.

Eingabe: `model(savings; find=S[one]; a=1000[one]; K0=20000[one]; p=2[pct]; n=5[one];`

`timing=due; freq=monthly; credit=annual; cur=CZK)`

Ergebnis

$$S \approx 85.206{,}62\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $a = 1.000, \quad K_0 = 20.000, \quad p = 2\,\%, \quad n = 5$
- Einheiten umrechnen: $p = 2\,\% = 0{,}02$
- Beim regelmäßigen Sparen zahlen wir in jeder Periode (Monat, Jahr) den Betrag a ein. Jede Einzahlung wird unterschiedlich lange verzinst, das Endkapital ist daher die Summe einer geometrischen Reihe: S = a·q·(q^N − 1)/(q − 1) bei Einzahlung zu Periodenbeginn (vorschüssig), ohne das erste q bei Einzahlung am Ende (nachschüssig); q = 1 + p/m und N = mn ist die Zahl der Einzahlungen. Die Gleichung liefert auch die nötige Rate oder die Laufzeit. Eine optionale Anfangseinlage K_0 wird die ganze Zeit verzinst – K_0·q^N kommt hinzu. Bei jährlicher Zinsgutschrift werden die Monatsraten im Jahr einfach verzinst – ein Jahr ergibt A = a(12 + p·13/2) bei Einzahlung am Monatsanfang, a(12 + p·11/2) am Monatsende – und erst diese Jahresbeträge werden mit Zinseszins verzinst. Gleichung des Modells
  $A = a\left(m + p'\,\frac{m+1}{2}\right), \quad S = A\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + K_0 r^n, \quad r =$
- Die Einzahlungen eines Jahres mit den Zinsen im Jahr:
  $A = a \cdot \left(12 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}\right) = a \cdot 12{,}13$
- Aufzinsungsfaktor pro Periode: $r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
- Einsetzen
  $S = 1.000 \cdot 12{,}13 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} + 20.000 \cdot 1{,}02^5 \approx 85.206$
- Eingezahlt insgesamt und Zinsen
  $K_0 + N \cdot a = 20.000 + 60 \cdot 1.000 = 80.000\,\mathrm{CZK}, \quad S -$

Investition in P2P-Kredite: 2 000 CZK monatlich über 10 Jahre, 200 CZK pro Kredit, mit Gebühr und Ausfällen.

Eingabe: `model(lending; find=V[one]; a=2000[one]; p=8[pct]; f=1[pct]; loss=2[pct];`

`L=200[one]; M=60[one]; n=10[one]; cur=CZK)`

Ergebnis

$$V \approx 318.974{,}12\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben

  $a = 2.000, \quad p = 8\,\%, \quad f = 1\,\%, \quad \lambda = 2\,\%, \quad L = 20$

- Einheiten umrechnen:

  $p = 8\,\% = 0{,}08, \quad f = 1\,\% = 0{,}01, \quad \lambda = 2\,\% = 0{,}02$

- Auf einer Plattform für P2P-Kredite zahlt der Anleger jeden Monat den Betrag a auf sein Konto ein. Das Guthaben wird in ganzen Vielfachen des Betrags L pro Kredit investiert (z. B. 200 CZK), der Rest wartet auf dem Konto. Von jeder Investition zieht die Plattform die Abschlussgebühr f ab, in den Kredit fließt L(1 − f). Die Kredite werden als Annuität mit gleichen Monatsraten s = P₀·i/(1 − (1 + i)^(−M)) über M Monate getilgt, i = p/12; die Plattform behält den Anteil g der Zinsen. Die Ausfallrate λ (jährlich) schreibt jeden Monat einen Teil des Kapitals ab, λ_m = 1 − (1 − λ)^(1/12). Die Raten fließen auf das Konto zurück und werden wieder investiert. Der Wert des Portfolios V = H + P ist das Guthaben H plus das ausstehende Kapital in Krediten P. Die Rechnung simuliert Monat für Monat und gibt zum Vergleich eine geschlossene Formel mit stetiger Wiederanlage an: V ≈ 12a(1 − f)(e^(rn) − 1)/r, r = p(1 − g)(1 − f) − λ − f·24/(M + 1). Die umgekehrte Aufgabe findet die nötige Monatseinzahlung oder Dauer für einen Zielwert. Es ist eine Schätzung mit fester Rendite – das echte Ergebnis bestimmen vor allem die Ausfälle. Die von der Plattform angegebene Rendite ist oft schon nach Gebühren und Ausfällen; diese dann nicht noch einmal eingeben. Dies ist keine Anlageempfehlung. Gleichung des Modells

  $$V_k = H_k + P_k, \quad P' = P(1 - \lambda_m) - (s - iP), \quad H' =$$

- Monatszins, monatliche Verluste und die Annuitätenrate

  $$i = \frac{p}{12} = 0{,}00666667, \quad \lambda_m = 1 - (1 - \lambda)^{1/12} \approx 0{,}001$$

- Einsetzen

  $$V_{120} = H_{120} + P_{120} = 10.735{,}19 + 308.238{,}93 \approx 318.97$$

- Simulation Monat für Monat – Stand am Ende der Jahre (k in Monaten): eingezahlt, Kapital in Krediten P, Guthaben H, Gebühren F, Verluste Z, Wert V

k	$\sum a$	P_k	H_k	F_k	
12	24.000	23.784,39	726,58	266	2
24	48.000	49.198,83	1.248,72	606	1.0
36	72.000	75.757,04	2.129,17	1.032	2.3
48	96.000	103.744,84	3.148,57	1.568	4.2
60	120.000	133.102,33	4.439,70	2.240	6.6
72	144.000	164.382,06	5.541,37	3.054	9.8
84	168.000	197.551,52	6.600,52	4.002	13.5
96	192.000	232.369,52	7.962,71	5.094	18.0
108	216.000	269.327,69	9.238,91	6.346	23.3
120	240.000	308.238,93	10.735,19	7.764	29.3

- Eingezahlt, Gebühren F, Verluste Z, Nettozinsen U und Gewinn

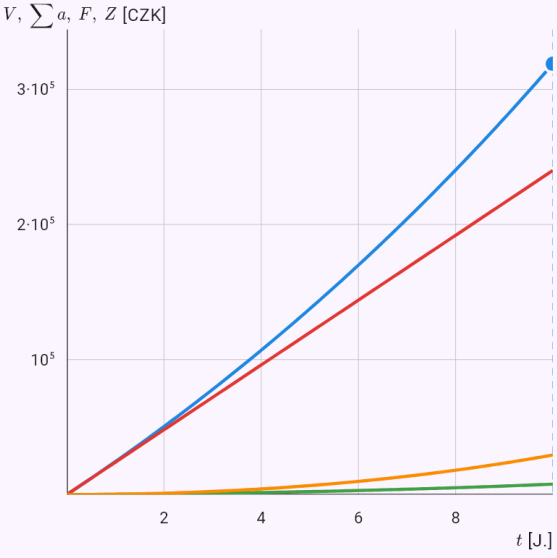
  $$\sum a = 240.000\,\mathrm{CZK}, \quad F = 7.764\,\mathrm{CZK}, \quad Z = 29.33$$

- Zum Vergleich: geschlossene Formel mit stetiger Wiederanlage

  $$r = p(1 - g)(1 - f) - \lambda - f\,\frac{24}{M + 1} \approx 5{,}527\,\%, \quad V \approx$$

- Es ist eine Schätzung mit fester Rendite und konstanter Ausfallrate – die Wirklichkeit bestimmen vor allem die Ausfälle. Die von der Plattform angegebene Rendite ist oft schon nach Gebühren und Ausfällen. Dies ist keine Anlageempfehlung.

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Ein Kredit mit Ratentilgung – sinkende Raten im Vergleich mit der Annuität.

Eingabe: `model(loan; find=a[one]; D=1200000[one]; p=5[pct]; n=10[one]; freq=monthly;`

`method=constant; schedule=short; cur=CZK)`

Ergebnis

$a_1 \approx 15.000\,\mathrm{CZK}$

$a_N \approx 10.041{,}67\,\mathrm{CZK}$

Lösungsweg

- Gegeben: $D = 1.200.000, \quad p = 5\,\%, \quad n = 10$
- Einheiten umrechnen: $p = 5\,\% = 0{,}05$
- Ein Annuitätenkredit wird mit gleichen Raten a getilgt. Jede Rate zahlt zuerst die Zinsen auf die Restschuld, der Rest tilgt die Schuld, so sinkt der Zinsanteil mit der Zeit. Der Barwert aller Raten ist gleich dem Kreditbetrag, daraus a = D·q^N(q − 1)/(q^N − 1), q = 1 + p/m. Der Tilgungsplan zeigt für jede Rate Zins, Tilgung und Restschuld. Der effektive Jahreszins schließt auch die Gebühren ein – der Satz, bei dem der Barwert der Raten dem tatsächlich ausgezahlten Betrag entspricht. Bei der Ratentilgung sinkt die Schuld jede Periode um denselben Betrag M = D/N und die Rate a_k = M + U_k sinkt mit den Zinsen – man zahlt weniger Zinsen als bei der Annuität, die ersten Raten sind aber höher. Der Tilgungsplan zeigt das erste Jahr und die letzte Rate oder alles. Gleichung des Modells

  $$M = \frac{D}{N}, \quad a_k = M + U_k, \quad U_k = D_{k-1}\,i, \quad i = \frac{p}{m},$$

- Zins pro Periode: $i = \frac{p}{m} = \frac{0{,}05}{12} \approx 0{,}00416667$
- Einsetzen: $M = \frac{1.200.000}{120} \approx 10.000\,\mathrm{CZK}$
- Erste und letzte Rate

  $a_1 = M + D\,i \approx 15.000\,\mathrm{CZK}, \quad a_N = M(1+i) \approx 10.0$
- Tilgungsplan (U Zins, M Tilgung, D Restschuld)

k	a_k	U_k	M_k	D_k
1	15.000	5.000	10.000	1.190.000
2	14.958,33	4.958,33	10.000	1.180.000
3	14.916,67	4.916,67	10.000	1.170.000
4	14.875	4.875	10.000	1.160.000
5	14.833,33	4.833,33	10.000	1.150.000
6	14.791,67	4.791,67	10.000	1.140.000
7	14.750	4.750	10.000	1.130.000
8	14.708,33	4.708,33	10.000	1.120.000
9	14.666,67	4.666,67	10.000	1.110.000
10	14.625	4.625	10.000	1.100.000
11	14.583,33	4.583,33	10.000	1.090.000
12	14.541,67	4.541,67	10.000	1.080.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	10.041,67	41,67	10.000	0

- Insgesamt gezahlt und davon Zinsen

  $\sum a_k \approx 1.502.500\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 302.500\,\mathrm{CZK}$
- Zum Vergleich als Annuität – Rate und Zinsen insgesamt:

  $a \approx 12.727{,}86\,\mathrm{CZK}, \quad \sum U_k \approx 327.343{,}42\,\mathrm{CZK}$
- Die Ratentilgung spart $24.843{,}42\,\mathrm{CZK}$ an Zinsen, die ersten Raten sind aber höher.

Tageszinsen nach 30E/360 mit 15 % Steuer.

Eingabe: `model(daycount; find=Kn[one]; K0=50000[one]; p=2[pct]; start=2026-03-15; end=2026-`

`09-20; d=15[pct]; basis=e30; cur=CZK)`

Ergebnis

$u' \approx 436{,}81\,\mathrm{CZK}$

$K_n \approx 50.436{,}81\,\mathrm{CZK}$

Lösungsweg

- Gegeben: $K_0 = 50.000, \quad p = 2\,\%, \quad d = 15\,\%$
- Einheiten umrechnen: $p = 2\,\% = 0{,}02, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Kurzfristige Einlagen werden für t Tage einfach verzinst: u = K₀·p·t/B. Die Tage und die Jahreslänge B bestimmt die Zinsmethode: 30E/360 (deutsche Zinsmethode, Banken und Schulen in Deutschland und Tschechien) zählt jeden Monat mit 30 Tagen (den 31. als 30.) und das Jahr mit 360, ACT/360 (Eurozinsmethode, Frankreich, Spanien, Geldmarkt) die tatsächlichen Tage und ein Jahr von 360, ACT/365 (Großbritannien) die tatsächlichen Tage und ein Jahr von 365. Die Tage ergeben sich aus dem Ein- und Auszahlungsdatum, oder Sie geben sie direkt ein. Die Zinsabgabe wird vom Zins abgezogen. Die Umkehrung – wie viel heute einzahlen für einen Betrag – ist das Abzinsen. Gleichung des Modells: $u = K_0 \cdot p \cdot \frac{t}{B}, \quad K_n = K_0 + u$
- Zinsmethode und Jahreslänge: $30\mathrm{E}/360: \quad B = 360$
- Tage (30E/360: Monat mit 30 Tagen, der 31. als 30.) $15{,}3.2026 \to 20{,}9.2026: \quad t = 360 \cdot (2026 - 2026) + 3$
- Einsetzen: $u = 50.000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{185}{360} \approx 513{,}89\,\mathrm{CZK}$
- Steuer auf den Zins und Zins nach Steuer $u \cdot d \approx 77{,}08\,\mathrm{CZK}, \quad u' = u - u \cdot d \approx 436{,}81\,\mathrm{CZK}$
- Zinsen insgesamt: $K_n = K_0 + u' \approx 50.436{,}81\,\mathrm{CZK}$

Ein Wechsel diskontiert – was die Bank 90 Tage vor dem Verfall zahlt.

Eingabe: `model(bill; find=payout[one]; N=100000[one]; dr=6[pct]; start=2026-01-10; end=2026-04-10; basis=act360; cur=CZK)`

Ergebnis

$K \approx 98.500\,\mathrm{CZK}$

$D \approx 1.500\,\mathrm{CZK}$

Lösungsweg

- Gegeben: $N = 100.000, \quad d = 6\,\%$
- Einheiten umrechnen: $d = 6\,\% = 0{,}06$
- Ein Wechsel verspricht, am Verfalltag die Wechselsumme N zu zahlen. Eine Bank kann ihn vorher ankaufen (diskontieren) und zahlt ihn abzüglich des Diskonts D = N·d·t/B aus, d ist der Diskontsatz und t die Tage bis zum Verfall: K = N(1 − d·t/B). Der Diskont wird vom Endbetrag berechnet, nicht vom ausgezahlten, daher ist die tatsächliche Rendite der Bank i = d/(1 − d·t/B) höher als der Diskontsatz. Üblich ist ACT/360. Gleichung des Modells: $D = N \cdot d \cdot \frac{t}{B}, \quad K = N - D = N\left(1 - d\,\frac{t}{B}\right)$
- Zinsmethode und Jahreslänge: $\mathrm{ACT}/360: \quad B = 360$
- Tage nach dem Kalender: $10{,}1.2026 \to 10{,}4.2026: \quad t = 90$
- Einsetzen: $D = 100.000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{90}{360} \approx 1.500\,\mathrm{CZK}$
- Auszahlungsbetrag: $K = N - D \approx 98.500\,\mathrm{CZK}$
- Tatsächliche Rendite der Bank: $i = \frac{d}{1 - d\,\frac{t}{B}} \approx 6{,}091\,\%$
- Der Diskont wird vom Endbetrag berechnet – die Bank verdient daher tatsächlich mehr als den Diskontsatz.

Eine Monatsrente aus 2 Millionen für 20 Jahre, um 5 Jahre aufgeschoben.

Eingabe: `model(annuity; find=a[one]; PV=2000000[one]; p=3[pct]; n=20[one]; k=5[one];`

`kind=temporary; timing=ordinary; freq=monthly; cur=CZK)`

Ergebnis

$$a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $K = 2.000.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 20, \quad k = 5$
- Einheiten umrechnen: $p = 3\,\% = 0{,}03$
- Eine Rente zahlt regelmäßig einen Betrag a aus einem Kapital K aus, das inzwischen weiter verzinst wird. Der Barwert von N Zahlungen ist K = a·(1 − q^(−N))/(q − 1), q = 1 + p/m − dieselbe Formel wie bei der Tilgung eines Kredits. Zahlungen am Periodenanfang (vorschüssig) multiplizieren sie mit q. Eine aufgeschobene Rente zahlt erst nach k Jahren, das Kapital wächst inzwischen auf K·q^(mk). Eine ewige Rente zahlt nur die Zinsen, das Kapital bleibt: K = a/(q − 1). Ergebnis ist die Rentenhöhe, das nötige Kapital oder wie lange die Rente reicht.
  Gleichung des Modells:
  $$K = a\,\frac{1 - q^{-N}}{q - 1} \cdot q^{-mk}, \quad q = 1 + \frac{p'}{m}, \quad N = mn$$
- Aufzinsungsfaktor pro Periode: $q = 1 + \dfrac{0{,}03}{12} \approx 1{,}0025$
- Abgezinst über den Aufschub:
  $q^{-mk} = 1{,}0025^{-60} \approx 0{,}860869$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $a = \dfrac{K(q-1)q^{mk}}{1 - q^{-N}}$
- Einsetzen: $a \approx 12.884{,}60\,\mathrm{CZK}$

- Kapital zu Beginn der Rente:
  $K\,q^{mk} \approx 2.323.233{,}56\,\mathrm{CZK}$
- Verlauf der Auszahlungen (U Zins, K Restkapital)

k	a	U_k	K_k
1	12.884,60	5.808,08	2.316.157,05
2	12.884,60	5.790,39	2.309.062,84
3	12.884,60	5.772,66	2.301.950,90
4	12.884,60	5.754,88	2.294.821,18
5	12.884,60	5.737,05	2.287.673,64
6	12.884,60	5.719,18	2.280.508,23
7	12.884,60	5.701,27	2.273.324,90
8	12.884,60	5.683,31	2.266.123,61
9	12.884,60	5.665,31	2.258.904,33
10	12.884,60	5.647,26	2.251.666,99
11	12.884,60	5.629,17	2.244.411,56
12	12.884,60	5.611,03	2.237.137,99
⋮	⋮	⋮	⋮
240	12.884,60	32,13	0

- Insgesamt ausgezahlt und davon Zinsen
  $\sum a \approx 3.092.303{,}41\,\mathrm{CZK}, \quad \sum a - K \approx 1.092.303{,}4$

Kurs und Duration einer Anleihe.

Eingabe: `model(bond; find=price[one]; N=1000[one]; cp=5[pct]; n=5[one]; y=4[pct]; freq=annual; cur=EUR)`

Ergebnis

$$P \approx 1.044{,}52\,€$$

Lösungsweg

- Gegeben: $N = 1.000, \quad c = 5\,\%, \quad n = 5, \quad y = 4\,\%$
- Einheiten umrechnen:
  $c = 5\,\% = 0{,}05, \quad y = 4\,\% = 0{,}04$
- Eine Anleihe zahlt in jeder Periode einen Kupon C = c·N/m und am Ende den Nennwert N. Ihr Kurs ist der Barwert dieser Zahlungen, abgezinst mit der Marktrendite y. Liegt die Marktrendite unter dem Kupon, notiert die Anleihe über pari, sonst unter pari. Die Rendite bis zur Fälligkeit ist der Satz, bei dem der Barwert der Zahlungen dem Kurs entspricht – numerisch bestimmt. Die Duration ist die gewichtete mittlere Zahlungsdauer und misst die Zinsempfindlichkeit des Kurses. Gleichung des Modells
  $$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^k} + \frac{N_{nom}}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^N}$$

- Kupon pro Periode: $C = \dfrac{c \cdot N_{nom}}{m} = 50\,€, \quad N = 5$
- Einsetzen
  $P = 50 \cdot \dfrac{1 - 0{,}961538^5}{0{,}04} + \dfrac{1.000}{1{,}04^5} \approx 222{,}59 + 821{,}93 =$
- Die Marktrendite liegt unter dem Kupon – die Anleihe notiert über pari.
- Duration (Macaulay und modifiziert)
  $D = \dfrac{1}{P}\sum_k t_k\,PV_k \approx 4{,}557, \quad D_{mod} = \dfrac{D}{1 + \frac{y}{m}} \approx 4{,}382$

Interner Zinsfuß einer Investition.

Eingabe: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=EUR)`

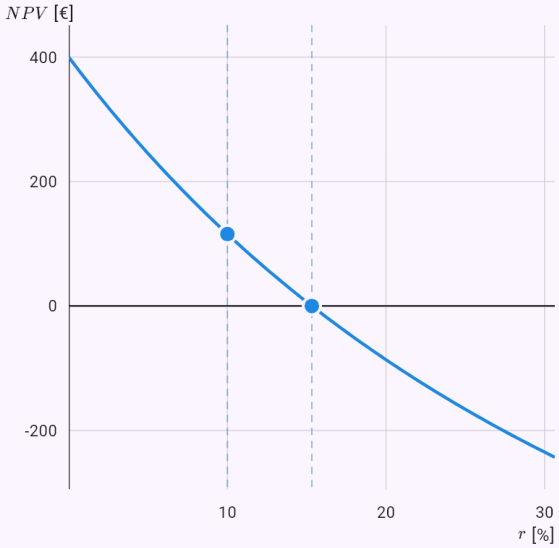
Ergebnis

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $CF_t = (-1.000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Einheiten umrechnen: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Der Kapitalwert NPV summiert die Zahlungsströme CF_0, CF_1, … eines Projekts, abgezinst mit der geforderten Rendite r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Ein Projekt mit NPV > 0 verdient mehr als die geforderte Rendite. Der interne Zinsfuß IRR ist der Satz, bei dem NPV = 0 – die Nullstelle eines Polynoms, numerisch bestimmt. Die Amortisationsdauer ist der Zeitpunkt, ab dem die (einfache oder abgezinste) kumulierte Summe nicht mehr negativ ist. Gleichung des Modells:
  $$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$
- Kapitalwert
  $$NPV = -1.000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – das Projekt erzielt mindestens die geforderte Rendite.
- Die Gleichung wird numerisch gelöst (Bisektion):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Das Verfahren: Bisektion, 14 Iterationen

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Euro in Kronen nach dem heutigen Kurs der ČNB.

Eingabe: `model(exchange; find=converted[one]; A=100[one]; from=EUR; to=CZK; source=cnb)`

Ergebnis

$$2.443{,}50\,\mathrm{CZK}$$

$$1\,€ \approx 24{,}435\,\mathrm{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben: $A = 100$
- Ein Wechselkurs ist der Preis einer Einheit einer fremden Währung. Die Tschechische Nationalbank veröffentlicht täglich die Kurse der Krone, die Europäische Zentralbank die Referenzkurse des Euro. Ein Betrag wird über eine gemeinsame Währung umgerechnet: $A_2 = A_1 \cdot k_1 / k_2$, wobei k_1 und k_2 die Werte beider Währungen in Kronen (ČNB) oder in Euro (EZB) sind – ein Kreuzkurs. Banken und Wechselstuben verwenden eigene An- und Verkaufskurse mit Aufschlag; das Ergebnis ist ein Richtwert. Gleichung des Modells: $A_2 = A_1 \cdot \frac{k_1}{k_2}$
- Kurstabelle: $\mathrm{ČNB},\ 27{,}11{,}2026$
- Kurse: $1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$
- Einsetzen: $A_2 = 100 \cdot \frac{24{,}435}{1} \approx 2.443{,}50\,\mathrm{CZK}$
- Banken und Wechselstuben verwenden eigene Kurse mit Aufschlag – das Ergebnis ist ein Richtwert.

Gewinnmaximum aus Grenzerlös und Grenzkosten.

Eingabe: `model(profit; find=optimum[one]; a=100[one]; b=2[one]; F=200[one]; cv=20[one];`

`e=0.5[one]; cur=CZK)`

Ergebnis

$Q^* \approx 16$

$p^* \approx 68\,\mathrm{CZK}$

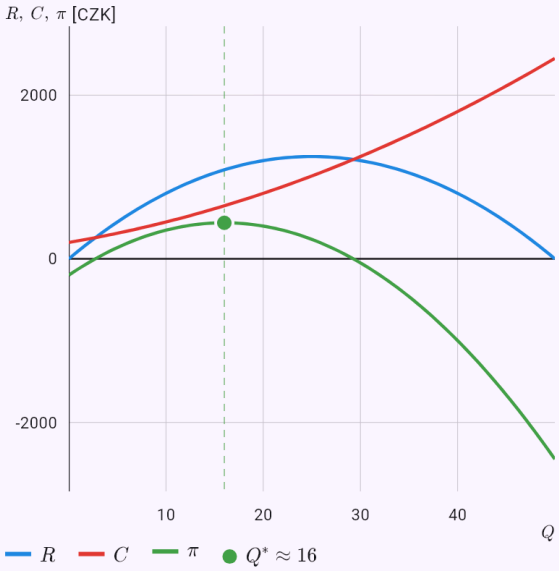
$\pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $a = 100, \quad b = 2, \quad F = 200, \quad c = 20, \quad e = 0{,}5$
- Ein Unternehmen mit linearer Nachfrage p = a − bQ hat den Umsatz R = pQ und die Kosten C(Q) = F + cQ + eQ². Der Gewinn π = R − C ist am größten, wo seine Ableitung null ist, also Grenzerlös gleich Grenzkosten: MR = R'(Q) = MC = C'(Q). Die zweite Ableitung bestätigt das Maximum. Die Preiselastizität der Nachfrage ε = (dQ/dp)·(p/Q) gibt an, um wie viel Prozent sich die Nachfragemenge bei 1 % Preisänderung ändert; |ε| > 1 ist elastische Nachfrage. Gleichung des Modells:
  $p = a - bQ, \quad R = pQ, \quad \pi = R - C$
- Umsatz und Kosten:
  $R(Q) = (100 - 2Q)Q, \quad C(Q) = 200 + 20Q + 0{,}5Q^2$
- Grenzerlös und Grenzkosten (Ableitungen):
  $MR = R'(Q) = 100 - 4Q, \quad MC = C'(Q) = 20 + 1Q$
- Einsetzen:
  $MR = MC: \quad 100 - 4Q = 20 + 1Q \Rightarrow Q^* = \frac{80}{5} \approx 16$
- Die zweite Ableitung des Gewinns ist negativ – ein Maximum: $\pi''(Q) = -5 < 0$
- Preis und Gewinn im Optimum:
  $p^* = 100 - 2 \cdot 16 \approx 68\,\mathrm{CZK}, \quad \pi^* \approx 440\,\mathrm{CZK}$

- Preiselastizität der Nachfrage: $\varepsilon = -\frac{p^*}{bQ^*} \approx -2{,}125$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Marktgleichgewicht, Renten und eine Steuer.

Eingabe: `model(market; find=equilibrium[one]; a=100[one]; b=2[one]; cs=10[one]; d=3[one];`

`t=5[one]; cur=CZK)`

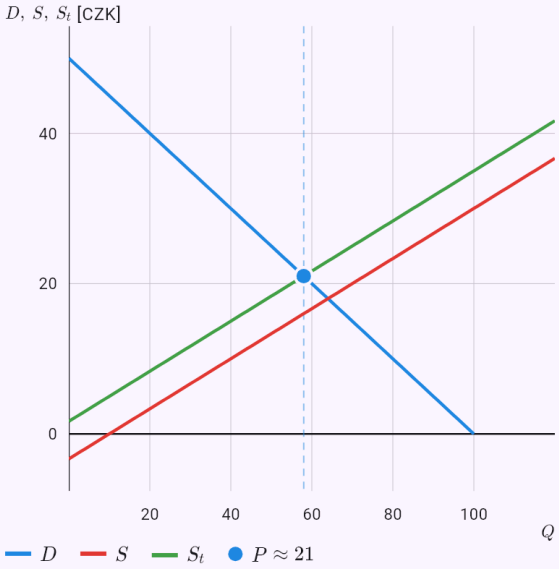
Ergebnis

$$P \approx 21\,\text{CZK}$$
$$Q \approx 58$$
$$CS \approx 841\,\text{CZK}$$
$$PS \approx 560{,}67\,\text{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben: $a = 100, \quad b = 2, \quad c = 10, \quad d = 3, \quad t = 5$
- Die Nachfrage Q_D = a − bP fällt mit dem Preis, das Angebot Q_S = c + dP steigt. Der Markt ist im Gleichgewicht, wo sie sich schneiden: P* = (a − c)/(b + d). Die Konsumentenrente ist die Fläche zwischen Nachfragekurve und Preis (was Käufer zusätzlich gezahlt hätten), die Produzentenrente die Fläche zwischen Preis und Angebotskurve – beides Integrale. Eine Mengensteuer t verschiebt das Angebot um t nach oben: Käufer zahlen mehr, Verkäufer erhalten weniger, es wird weniger gehandelt und ein Wohlfahrtsverlust entsteht. Gleichung des Modells:
  $Q_D = a - bP, \quad Q_S = c + d(P - t), \quad Q_D = Q_S$
- Einsetzen:
  $100 - 2P = 10 + 3P \Rightarrow P^* = \frac{90}{5} \approx 18, \quad Q^* \approx 64$
- Mit Steuer: Preis für Käufer und für Verkäufer
  $P_D = \frac{a - c + dt}{b + d} \approx 21, \quad P_S = P_D - t \approx 16, \quad Q_t \approx 5$
- Steuereinnahmen und Wohlfahrtsverlust
  $tQ_t \approx 290\,\text{CZK}, \quad \frac{1}{2}t(Q^* - Q_t) \approx 15\,\text{CZK}$
- Konsumentenrente:
  $CS = \int_0^Q \left(\frac{a - Q}{b} - P_D\right) dQ \approx 841\,\text{CZK}$
- Produzentenrente:
  $PS = \int_0^Q \left(P_S - \frac{Q - c}{d}\right) dQ \approx 560{,}67\,\text{CZK}$
- Elastizität von Nachfrage und Angebot im Gleichgewicht
  $\varepsilon_D = -b\frac{P}{Q} \approx -0{,}7241, \quad \varepsilon_S = d\frac{P}{Q} \approx 0{,}8276$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Leontief-Modell mit drei Sektoren.

Eingabe: `model(leontief; find=x[one]; A=0.2 0.3 0.1 0.4 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3[one]; y=100 200`

150[one])

Ergebnis

$$x_1 \approx 349{,}3$$
$$x_2 \approx 465{,}8$$
$$x_3 \approx 397{,}3$$

Lösungsweg

- Gegeben
  $A = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3), \quad y =$
- Das Leontief-Modell beschreibt eine Volkswirtschaft aus n Sektoren, die einander beliefern. Das Element a_ij der Matrix der technischen Koeffizienten A gibt an, wie viel Produktion des Sektors i der Sektor j je Einheit seiner Produktion verbraucht. Die Gesamtproduktion x muss die Vorleistungen Ax und die Endnachfrage y decken: x = Ax + y, also x = (I − A)⁻¹y. Die Leontief-Inverse (I − A)⁻¹ zeigt, wie viel jeder Sektor je Einheit Endnachfrage produzieren muss. Gleichung des Modells:
  $x = Ax + y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1}y$
- Technische Koeffizienten und Endnachfrage
  $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad y = (100;\ 200;\ 150)$$
- Die Matrix I − A
  $$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
- Leontief-Inverse
  $$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}616 & 0{,}6301 & 0{,}411 \\ 0{,}8219 & 1{,}507 & 0{,}5479 \\ 0{,}4658 & 0{,}5205 & 1{,}644 \end{pmatrix}$$
- Einsetzen: $x = (I - A)^{-1}y \approx (349{,}3;\ 465{,}8;\ 397{,}3)$
- Lieferströme zwischen den Sektoren
  $$x_{ij} = a_{ij}x_j: \quad \begin{pmatrix} 69{,}86 & 139{,}7 & 39{,}73 \\ 139{,}7 & 46{,}58 & 79{,}45 \\ 34{,}93 & 93{,}15 & 119{,}2 \end{pmatrix}$$

Langfristige Kundenanteile dreier Marken.

Eingabe: `model(markov; find=stationary[one]; P=0.8 0.15 0.05 0.1 0.8 0.1 0.05 0.15 0.8[one])`

Ergebnis

$$\pi \approx (0{,}2857;\ 0{,}4286;\ 0{,}2857)$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $P = (0{,}8;\ 0{,}15;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}8)$
- Eine Markow-Kette wechselt zwischen Zuständen mit Wahrscheinlichkeiten p_ij, die nur vom aktuellen Zustand abhängen (nicht von der Vorgeschichte). Die Zeilen der Übergangsmatrix P summieren sich zu 1. Die Verteilung nach einem Schritt ist $\pi_1 = \pi_0 P$, nach n Schritten $\pi_n = \pi_0 P^n$. Die stationäre Verteilung erfüllt $\pi P = \pi$ und zeigt die langfristigen Anteile der Zustände – Kunden von Marken, Bonus-Malus-Klassen, Maschinenzustände. Gleichung des Modells:
  $\pi_{k+1} = \pi_k P, \quad \pi_n = \pi_0 P^n, \quad \pi P = \pi$
- Übergangsmatrix
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$
- Das System für die stationäre Verteilung
  $$\pi_1 = 0{,}8\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}05\,\pi_3$$
  $$\pi_2 = 0{,}15\,\pi_1 + 0{,}8\,\pi_2 + 0{,}15\,\pi_3$$
  $$\pi_3 = 0{,}05\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}8\,\pi_3$$
  $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
- Langfristig stellt sich die stationäre Verteilung ein, unabhängig vom Anfang (bei einer regulären Kette).

Lebenserwartung einer 65-jährigen Frau.

Eingabe: `model(mortality; find=expectancy[one]; x=65[one]; table=female)`

Ergebnis

$$e_{65} \approx 20{,}57$$

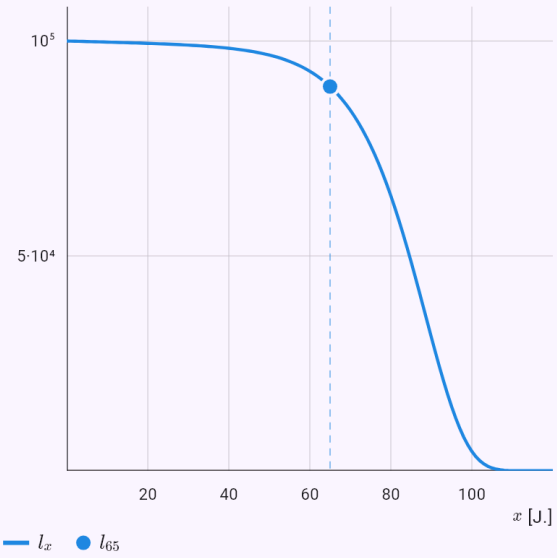
Lösungsweg

- Gegeben: $x = 65$
- Modelltafel (Gompertz–Makeham) ungefähr wie die tschechische Bevölkerung – für genaue Ergebnisse amtliche q_x eingeben.
- Eine Sterbetafel gibt an, wie viele von 100 000 Neugeborenen (l_x) das Alter x erreichen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-Jähriger weitere n Jahre lebt, ist ${}_np_x$ = l_{x+n}/l_x, zu sterben ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$. Die Lebenserwartung e_x ist die mittlere Zahl der Jahre, die ein x-Jähriger noch lebt. Die Modelltafel nach dem Gompertz-Makeham-Gesetz μ(x) = A + B·c^x ist ungefähr an die tschechische Bevölkerung angepasst; genaue Rechnungen nutzen amtliche Tafeln – geben Sie eigene q_x ein. Gleichung des Modells

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad e_x \approx \frac{1}{l_x}\sum_{k\geq 1} l_{x+k} + \frac{1}{2} $$

- Überlebende laut Tafel: $l_{65} \approx 89\,397{,}8$
- Einsetzen: $e_{65} \approx 20{,}57$
- Im Mittel wird das Alter $85{,}57$ erreicht.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Jahresprämie einer gemischten Versicherung.

Eingabe: `model(lifeinsurance; find=premium[one]; x=40[one]; n=20[one]; i=2.5[pct];`

`S=1000000[one]; product=endowment; payment=annual; table=male; cur=CZK)`

Ergebnis

$$P \approx 40.227{,}05\,\text{CZK}$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $x = 40, \quad n = 20, \quad i = 2{,}5\,\%, \quad S = 1.000.000$
- Einheiten umrechnen: $i = 2{,}5\,\% = 0{,}025$
- Modelltafel (Gompertz–Makeham) ungefähr wie die tschechische Bevölkerung – für genaue Ergebnisse amtliche q_x eingeben.
- Die Nettoprämie folgt aus dem Äquivalenzprinzip: Der Barwert der Prämien gleicht dem Barwert der künftigen Leistungen. Mit den Kommutationswerten D_x = v^x l_x, N_x, C_x und M_x (v = 1/(1 + i), i der Rechnungszins) ist die Einmalprämie einer Risikoversicherung über n Jahre (M_x − M_{x+n})/D_x, einer Erlebensfallversicherung D_{x+n}/D_x, einer gemischten ihre Summe; eine Rente ä = (N_x − N_{x+n})/D_x. Die Jahresprämie entsteht durch Division durch ä. Die Deckungsrückstellung im Jahr t ist der Barwert der künftigen Leistungen minus der künftigen Prämien (prospektiv) – und ergibt dasselbe wie die eingenommenen Prämien minus die gezahlten Leistungen (retrospektiv). Gleichung des Modells
  $D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k \geq x} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k \geq}$
- Kommutationswerte
  $D_{40} \approx 35\,866{,}1, \quad N_{40} \approx 883\,077, \quad M_{40} \approx 14\,327{,}6,$
- Netto-Einmalprämie
  $A_{x:\overline{20|}} \approx 0{,}622543, \quad S \cdot A_{x:\overline{20|}} \approx 622.543{,}08\,\text{CZK}$
- Jahresprämie
  $\ddot{a}_{x:\overline{20|}} \approx 15{,}4757, \quad P = \dfrac{S \cdot A_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} \approx 40.227{,}05\,\text{CZK}$

Bonus-Malus-System und mittleres Prämienniveau.

Eingabe: `model(nonlife; find=stationary[one]; levels=100 90 80 70 60 50[one]; q=10[pct]; mode=bonusmalus; rule=reset; cur=CZK)`

Ergebnis

$$\bar{b} \approx 63{,}14$$

Lösungsweg

- Gegeben: $b = (100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ 50), \quad q = 10\,\%$
- Einheiten umrechnen: $q = 10\,\% = 0{,}1$
- In der Schadenversicherung (Auto, Eigentum) ist der erwartete Jahresschaden eines Versicherten E[S] = λ·m, λ die mittlere Schadenzahl pro Jahr und m die mittlere Schadenhöhe. Die Risikoprämie erhält einen Zuschlag θ für Kosten und Sicherheit. Ein Bonus-Malus-System ändert die Prämie nach dem Schadenverlauf: ein schadenfreies Jahr führt in eine bessere Klasse, ein Schaden zurück. Die Klassen bilden eine Markow-Kette; ihre stationäre Verteilung liefert die langfristigen Klassenanteile und das mittlere Prämienniveau.
  Gleichung des Modells: $\pi P = \pi, \quad \bar{b} = \sum_i \pi_i b_i$
- Ein schadenfreies Jahr führt eine Klasse tiefer (Rabatt), ein Schaden zurück in die erste Klasse.
- Übergangsmatrix
  $$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$
- Das System für die stationäre Verteilung
  $$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 + 0{,}1\,\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}9\,\pi_1 \\ \pi_3 &= 0{,}9\,\pi_2 \\ \pi_4 &= 0{,}9\,\pi_3 \\ \pi_5 &= 0{,}9\,\pi_4 \\ \pi_6 &= 0{,}9\,\pi_5 + 0{,}9\,\pi_6 \end{aligned}$$
  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$
- Langfristige Anteile der Klassen:
  $\pi \approx (0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}081;\ 0{,}0729;\ 0{,}0656;\ 0{,}5905)$
- Einsetzen: $\bar{b} = \sum_i \pi_i b_i \approx 63{,}14$

Bekannte Einschränkungen

- Die Sterbetafeln sind Modelltafeln (Gompertz–Makeham, ungefähr wie die tschechische Bevölkerung); für genaue Ergebnisse eigene q_x aus amtlichen Tafeln eingeben.
- Die Kurse sind Referenzkurse – Banken und Wechselstuben rechnen mit eigenen Kursen und Gebühren.
- Mikroökonomie mit linearer Nachfrage und quadratischen Kosten; allgemeine Funktionen als Formel gibt es noch nicht.
- Die Zinsmethoden verschieben keine Daten wegen Feiertagen – verzinst werden die Tage zwischen den angegebenen Daten; ein Kredit ohne Sondertilgungen und Zinsänderungen.
- Die Investition in P2P-Kredite ist eine Schätzung mit fester Rendite und konstanter Ausfallrate; Inkasso, vorzeitige Rückzahlung, Zweitmarkt und Steuern werden nicht berücksichtigt. Dies ist keine Anlageempfehlung.

51. Lineare Optimierung, Transport, Zuordnung und Matrixspiele

Optimierungsaufgaben finden Sie auf dem Startbildschirm im Bereich „Anwendungen“, Fachgebiet Logistik und Netzwerke (lineare Optimierung auch unter Wirtschaft): lineare und ganzzahlige Optimierung, Transportproblem und Zuordnungsproblem. Ein lineares Problem lässt sich auch eintippen oder fotografieren, z. B. max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0 – die Nebenbedingungen in eigenen Zeilen oder nach einem Semikolon, min statt max, und das Wort integer macht es ganzzahlig.

Der Lösungsweg zeigt die Standardform mit Schlupf- und künstlichen Variablen und die Simplex-Tableaus in exakten Brüchen mit markiertem Pivotelement. Nebenbedingungen ≥ und = löst standardmäßig die Zwei-Phasen-Methode, per Chip die Big-M-Methode. Zum Optimum kommen das duale Problem, die Schattenpreise und eine Sensitivitätsanalyse (Bereiche der Zielfunktionskoeffizienten und der rechten Seiten). Bei zwei Variablen zeichnet die App den zulässigen Bereich, die Ecken mit den Zielfunktionswerten und die Niveaulinie durch das Optimum. Ein ganzzahliges Problem löst Branch and Bound; den Verzweigungsbaum gehen Sie mit den Pfeilen als Graph durch.

Das Transportproblem wird durch die Stückkostenmatrix, das Angebot der Anbieter und die Nachfrage der Abnehmer gegeben; ein unausgeglichenes Problem erhält einen fiktiven Anbieter oder Abnehmer. Die Startlösung liefert die Nordwesteckenregel, die Methode der minimalen Kosten oder das Vogelsche Verfahren, das Optimum die MODI-Methode mit Potenzialen und geschlossenen Zyklen; der Transportplan erscheint auch als Graph. Das Zuordnungsproblem löst die Ungarische Methode – Zeilen- und Spaltenreduktion, Überdecken der Nullen mit Linien und Auswahl unabhängiger Nullen; auch Maximierung und rechteckige Matrizen.

Matrixspiele zweier Spieler (Fachgebiet Logistik und Netze oder die Schreibweise game(3 -1 2; -2 4 1) – Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B): ein Nullsummenspiel sucht zuerst einen Sattelpunkt (Maximin = Minimax), streicht dann dominierte Strategien und berechnet die gemischten Strategien per Formel bei 2 × 2, grafisch bei 2 × n und m × 2 (untere und obere Einhüllende der Geraden) und bei größeren Spielen per linearer Optimierung mit Simplex-Tableaus – das duale Problem liefert die Strategie des anderen Spielers. Ergebnis sind die optimalen Strategien beider Spieler und der Wert des Spiels in exakten Brüchen. Ein Bimatrixspiel (game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2), Auszahlungen A | Auszahlungen B) zeigt die besten Antworten und die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, bei 2 × 2 auch das gemischte Gleichgewicht.

Beispiele

Ein Produktionsplan mit dem Simplexverfahren, Schattenpreisen und Sensitivität.

Eingabe: `lp(max 3x1 + 5x2; x1 <= 4; 2x2 <= 12; 3x1 + 2x2 <= 18)`

Ergebnis

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 6$$
$$z_{max} = 36$$

Lösungsweg

- Das lineare Optimierungsproblem

  $\max z = 3x_1 + 5x_2$
  $x_1 \le 4$
  $2x_2 \le 12$
  $3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $x_1, x_2 \ge 0$

- Nichtnegativitätsbedingungen fehlen – wir nehmen $x_1, x_2 \ge 0$ an.

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a

  $x_1 + s_1 = 4$
  $2x_2 + s_2 = 12$
  $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

- Simplex-Tableau 1: x_2 tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_2 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	–
s_2	0	**2**	0	1	0	12	6
s_3	3	2	0	0	1	18	9
z	−3	−5	0	0	0	0	

- Simplex-Tableau 2: x_1 tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_3 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	–
s_3	**3**	0	0	−1	1	6	2
z	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	

- Tableau 3: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null):
  $x_1 = 2,\ x_2 = 6, \quad z_{max} = 36$

- Das duale Problem – zu jeder Nebenbedingung eine duale Variable, zu jeder Variablen eine Nebenbedingung

  $\min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
  $y_1 + 3y_3 \ge 3$
  $2y_2 + 2y_3 \ge 5$
  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Die Schattenpreise (die optimalen dualen Variablen) aus dem letzten Tableau: Um wie viel sich das Optimum ändert, wenn die rechte Seite einer Nebenbedingung um 1 wächst. Eine nicht ausgeschöpfte Nebenbedingung (Schlupf $b_i - a_i x > 0$) hat den Schattenpreis 0.

	$b_i - a_i x$	y_i
1	2	0
2	0	$\frac{3}{2}$
3	0	1

- Das Optimum des dualen Problems ist gleich dem des primalen: $w = 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36 = z$
- Sensitivitätsanalyse – in welchen Bereichen sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Lösung ändert

	c_j	
x_1	3	$\langle 0;\ \frac{15}{2} \rangle$
x_2	5	$\langle 2;\ \infty)$

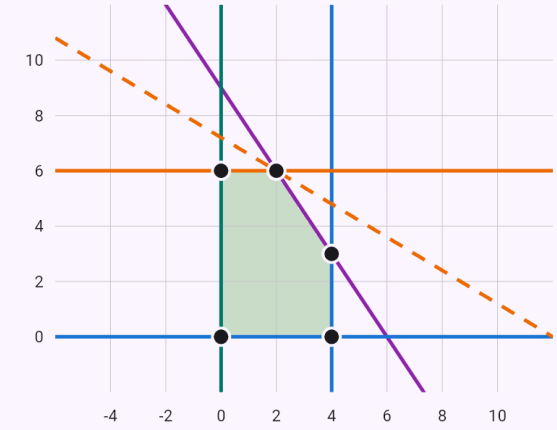
- In welchen Bereichen sich die rechten Seiten ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Basis ändert (nur dort gelten die Schattenpreise)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ \infty)$
2	12	$\langle 6;\ 18 \rangle$
3	18	$\langle 12;\ 24 \rangle$

- Die grafische Lösung: Der zulässige Bereich ist ein Vieleck, das Optimum liegt in einer Ecke. Die Werte der Zielfunktion in den Ecken (★ das Optimum)

$[x_1;\ x_2]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 6]$	30	
$[2;\ 6]$	36	★
$[4;\ 0]$	12	
$[4;\ 3]$	27	

Graph



- $x \leq 4 \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty;\ 4]$
- $2y \leq 12 \ \Leftrightarrow \ y \in (-\infty;\ 6]$
- $3x + 2y \leq 18 \ \Leftrightarrow \ y \leq 9 - \frac{3x}{2}$
- $x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$
- $y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$
- $z = 36 \ \Leftrightarrow \ 3x + 5y = 36$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Kurven im gefärbten Bereich (voller Punkt); ein leerer Punkt erfüllt die Ungleichungen nicht.

Schnittpunkte der Graphen:

● $(0|0)$ ● $(0|6)$ ● $(2|6)$ ● $(4|0)$ ● $(4|3)$

Ein eingetipptes Problem – die grafische Lösung für zwei Variablen.

Eingabe: `max 3x + 2y; x + y <= 4; x + 3y <= 6; x, y >= 0`

Ergebnis

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 12$$

Lösungsweg

- Das lineare Optimierungsproblem

  $\max z = 3x + 2y$
  $x + y \leq 4$
  $x + 3y \leq 6$
  $x, y \geq 0$

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a

  $x + y + s_1 = 4$
  $x + 3y + s_2 = 6$

- Simplex-Tableau 1: x tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_1 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{1}$	1	1	0	4	4
s_2	1	3	0	1	6	6
z	-3	-2	0	0	0	

- Tableau 2: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	1	1	0	4
s_2	0	2	-1	1	2
z	0	1	3	0	12

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null):
  $x = 4,\ y = 0, \quad z_{max} = 12$

- Das duale Problem – zu jeder Nebenbedingung eine duale Variable, zu jeder Variablen eine Nebenbedingung

  $\min v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \geq 3$
  $u_1 + 3u_2 \geq 2$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Die Schattenpreise (die optimalen dualen Variablen) aus dem letzten Tableau: Um wie viel sich das Optimum ändert, wenn die rechte Seite einer Nebenbedingung um 1 wächst. Eine nicht ausgeschöpfte Nebenbedingung (Schlupf $b_i - a_i x > 0$) hat den Schattenpreis 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	3
2	2	0

- Das Optimum des dualen Problems ist gleich dem des primalen: $v = 4 \cdot 3 = 12 = z$

- Sensitivitätsanalyse – in welchen Bereichen sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Lösung ändert

	c_j	
x	3	$\langle 2;\ \infty)$
y	2	$(-\infty;\ 3\rangle$

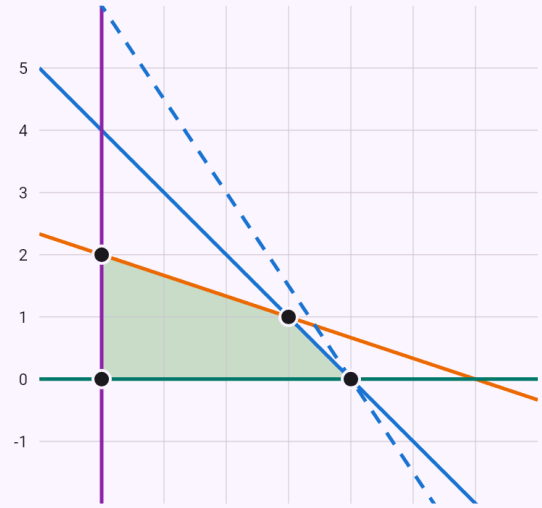
- In welchen Bereichen sich die rechten Seiten ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Basis ändert (nur dort gelten die Schattenpreise)

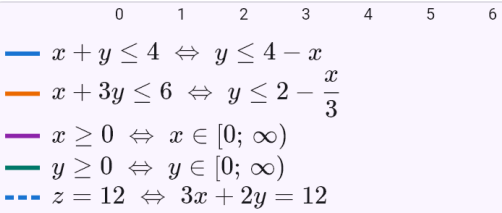
	b_i	
1	4	$\langle 0;\ 6\rangle$
2	6	$\langle 4;\ \infty)$

- Die grafische Lösung: Der zulässige Bereich ist ein Vieleck, das Optimum liegt in einer Ecke. Die Werte der Zielfunktion in den Ecken (★ das Optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 0]$	0	
$[0;\ 2]$	4	
$[3;\ 1]$	11	
$[4;\ 0]$	12	★

Graph





$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow \ y \leq 4 - x$

$x + 3y \leq 6 \ \Leftrightarrow \ y \leq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$

$z = 12 \ \Leftrightarrow \ 3x + 2y = 12$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Kurven im gefärbten Bereich (voller Punkt); ein leerer Punkt erfüllt die Ungleichungen nicht.

Schnittpunkte der Graphen:

● $(0|0)$ ● $(0|2)$ ● $(3|1)$ ● $(4|0)$

Ein Minimum mit ≥-Bedingungen nach der Zwei-Phasen-Methode.

Eingabe: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6)`

Ergebnis

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Lösungsweg

- Das lineare Optimierungsproblem
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Nichtnegativitätsbedingungen fehlen – wir nehmen $x, y \geq 0$ an.

- Ein Minimum suchen wir als Maximum der entgegengesetzten Funktion:
  $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Phase eins: Die künstlichen Variablen sind keine echte Lösung, darum bringen wir sie zuerst auf null – wir minimieren ihre Summe $\min w = a_1 + a_2$

- Simplex-Tableau 1: y tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), a_2 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	1	1	−1	0	1	0	4	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	6	2
w	−2	−4	1	1	0	0	−10	

- Simplex-Tableau 2: x tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), a_1 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b	b/a
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2	3
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2	6
w	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	−2	

- Phase eins endet mit w = 0 – die künstlichen Variablen sind null und entfallen. Phase zwei geht mit der echten Zielfunktion weiter.

- Tableau 3: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−9

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null):
  $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Das duale Problem – zu jeder Nebenbedingung eine duale Variable, zu jeder Variablen eine Nebenbedingung
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Die Schattenpreise (die optimalen dualen Variablen) aus dem letzten Tableau: Um wie viel sich das Optimum ändert, wenn die rechte Seite einer Nebenbedingung um

1 wächst. Eine nicht ausgeschöpfte Nebenbedingung (Schlupf $b_i - a_i x > 0$) hat den Schattenpreis 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Das Optimum des dualen Problems ist gleich dem des primalen: $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Sensitivitätsanalyse – in welchen Bereichen sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Lösung ändert

	c_j	
x	2	$\langle 1;\ 3 \rangle$
y	3	$\langle 2;\ 6 \rangle$

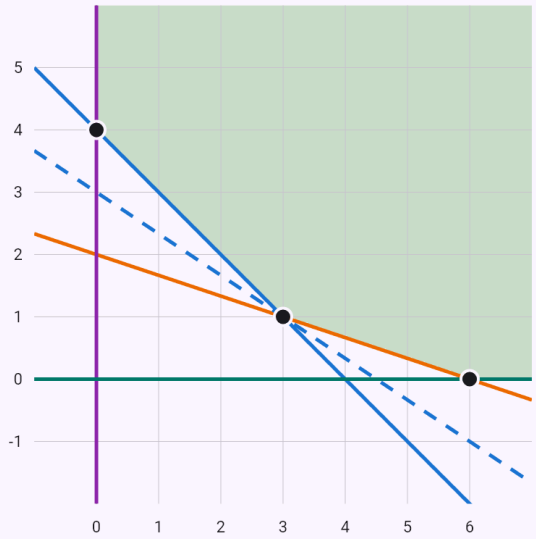
- In welchen Bereichen sich die rechten Seiten ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Basis ändert (nur dort gelten die Schattenpreise)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6 \rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12 \rangle$

- Die grafische Lösung: Der zulässige Bereich ist ein Vieleck, das Optimum liegt in einer Ecke. Die Werte der Zielfunktion in den Ecken (★ das Optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graph



- $x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$
- $x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$
- $x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$
- $y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$
- $z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Kurven im gefärbten Bereich (voller Punkt); ein leerer Punkt erfüllt die Ungleichungen nicht.

Schnittpunkte der Graphen:

● $(0|4)$ ● $(3|1)$ ● $(6|0)$

Dasselbe Problem mit der Big-M-Methode.

Eingabe: `lp(min 2x + 3y; x + y >= 4; x + 3y >= 6; method=bigm)`

Ergebnis

$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z_{min} = 9$$

Lösungsweg

- Das lineare Optimierungsproblem
  $\min z = 2x + 3y$
  $x + y \geq 4$
  $x + 3y \geq 6$
  $x, y \geq 0$

- Nichtnegativitätsbedingungen fehlen – wir nehmen $x, y \geq 0$ an.

- Ein Minimum suchen wir als Maximum der entgegengesetzten Funktion:
  $\min z = -\max(-z), \quad -z = -2x - 3y$

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a
  $x + y - s_1 + a_1 = 4$
  $x + 3y - s_2 + a_2 = 6$

- Die Big-M-Methode: Die künstlichen Variablen kommen mit einer großen Strafe −M in die Zielfunktion, damit das Simplexverfahren sie aus der Basis drängt:
  $\max z' = -2x - 3y - Ma_1 - Ma_2$

- Simplex-Tableau 1: y tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), a_2 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	6
z	$-2M+2$	$-4M+3$	M	M	0	0	-10

- Simplex-Tableau 2: x tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), a_1 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2
a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{2}{3}M+1$	0	M	$-\frac{1}{3}M+1$	0	$\frac{4}{3}M-1$

- Tableau 3: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	x	y	s_1	s_2	a_1	a_2	b
x	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-9

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null):
  $x = 3,\ y = 1, \quad z_{min} = 9$

- Das duale Problem – zu jeder Nebenbedingung eine duale Variable, zu jeder Variablen eine Nebenbedingung
  $\max v = 4u_1 + 6u_2$
  $u_1 + u_2 \leq 2$
  $u_1 + 3u_2 \leq 3$
  $u_1, u_2 \geq 0$

- Die Schattenpreise (die optimalen dualen Variablen) aus dem letzten Tableau: Um wie viel sich das Optimum ändert, wenn die rechte Seite einer Nebenbedingung um 1 wächst. Eine nicht ausgeschöpfte Nebenbedingung (Schlupf $b_i - a_i x > 0$) hat den Schattenpreis 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{3}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$

- Das Optimum des dualen Problems ist gleich dem des primalen: $v = 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9 = z$
- Sensitivitätsanalyse – in welchen Bereichen sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Lösung ändert

	c_j	
x	2	$\langle 3;\ 1 \rangle$
y	3	$\langle 6;\ 2 \rangle$

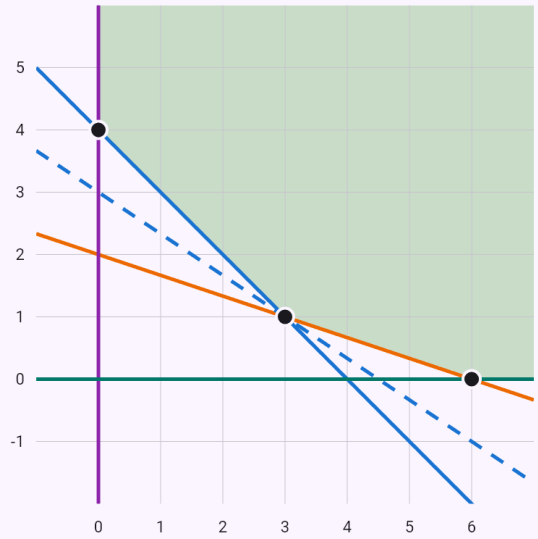
- In welchen Bereichen sich die rechten Seiten ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Basis ändert (nur dort gelten die Schattenpreise)

	b_i	
1	4	$\langle 2;\ 6 \rangle$
2	6	$\langle 4;\ 12 \rangle$

- Die grafische Lösung: Der zulässige Bereich ist ein Vieleck, das Optimum liegt in einer Ecke. Die Werte der Zielfunktion in den Ecken (★ das Optimum)

$[x;\ y]$	z	
$[0;\ 4]$	12	
$[3;\ 1]$	9	★
$[6;\ 0]$	12	

Graph



$x + y \geq 4 \ \Leftrightarrow \ y \geq 4 - x$

$x + 3y \geq 6 \ \Leftrightarrow \ y \geq 2 - \frac{x}{3}$

$x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \infty)$

$y \geq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0;\ \infty)$

$z = 9 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3y = 9$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Kurven im gefärbten Bereich (voller Punkt); ein leerer Punkt erfüllt die Ungleichungen nicht.

Schnittpunkte der Graphen:

● $(0|4)$ ● $(3|1)$ ● $(6|0)$

Eine ganzzahlige Lösung mit Branch and Bound.

Eingabe: `lp(max 5x + 4y; 6x + 4y <= 24; x + 2y <= 6; integer)`

Ergebnis

$$x = 4$$
$$y = 0$$
$$z_{max} = 20$$

Lösungsweg

- Das lineare Optimierungsproblem

  $\max z = 5x + 4y$
  $6x + 4y \le 24$
  $x + 2y \le 6$
  $x, y \ge 0,\ x, y \in \mathbb{Z}$

- Nichtnegativitätsbedingungen fehlen – wir nehmen $x, y \ge 0$ an.

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a

  $6x + 4y + s_1 = 24$
  $x + 2y + s_2 = 6$

- Simplex-Tableau 1: x tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_1 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
s_1	$\boxed{6}$	4	1	0	24	4
s_2	1	2	0	1	6	6
z	-5	-4	0	0	0	

- Simplex-Tableau 2: y tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_2 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	x	y	s_1	s_2	b	b/a
x	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	4	6
s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	2	$\frac{3}{2}$
z	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	20	

- Tableau 3: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	3
y	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	21

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null):
  $x = 3,\ y = \frac{3}{2},\quad z_{max} = 21$

- Das Problem ist ganzzahlig – wir verwenden Branch and Bound. Die Lösung ohne Ganzzahligkeit oben ist die Wurzel P_0 des Baums.

- Die Knoten des Baums (Tiefensuche, der ≤-Zweig zuerst): Eine nicht ganzzahlige Variable teilt in zwei Zweige; × – keine zulässige Lösung, z ≤ z* – der Zweig kann die beste gefundene Lösung nicht übertreffen (abgeschnitten), ✓ – eine ganzzahlige Lösung.

		x, y	z	
P_0	–	$3,\ \frac{3}{2}$	21	$y \le 1,\ y \ge 2$
P_1	$y \le 1$	$\frac{10}{3},\ 1$	$\frac{62}{3}$	$x \le 3,\ x \ge 4$
P_2	$x \le 3$	$3,\ 1$	19	✓ $z^* = 19$
P_3	$x \ge 4$	$4,\ 0$	20	✓ $z^* = 20$
P_4	$y \ge 2$	$2,\ 2$	18	$z \le z^*$

- Die beste ganzzahlige Lösung:
  $x = 4,\ y = 0,\quad z_{max} = 20$

Graph



Ausgangszustand

$P_0:\ x = 3,\ y = \frac{3}{2}$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Ein Transportproblem – Vogelsches Verfahren und MODI.

Eingabe: `transport(19 30 50 10; 70 30 40 60; 40 8 70 20; supply=7 9 18; demand=5 8 7 14;`

```
method=vogel)
```

Ergebnis

$$x_{11} = 5,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2$$
$$x_{23} = 7,\ x_{32} = 6,\ x_{34} = 12$$
$$z_{min} = 743$$

Lösungsweg

- Die Stückkosten, das Angebot a_i der Anbieter und die Nachfrage b_j der Abnehmer

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	30	50	10	7
A_2	70	30	40	60	9
A_3	40	8	70	20	18
b_j	5	8	7	14	

- Das Angebot ist gleich der Nachfrage – das Problem ist ausgeglichen: $\sum a_i = 34, \quad \sum b_j = 34$
- Das Vogelsche Approximationsverfahren: In jedem Schritt berechnen wir die Strafkosten – die Differenz der zwei niedrigsten Kosten in jeder Zeile und Spalte – und besetzen in der Zeile oder Spalte mit der größten Strafe (eingerahmt) das billigste Feld.

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	9	10	12	21	$\boxed{22}$	10	10	$(3,2)$
2	9	20	20	$\boxed{21}$		10	10	$(1,1)$
3	40	20	$\boxed{50}$			10	10	$(3,4)$
4	40	20				10	$\boxed{50}$	$(1,4)$
5		20				40	$\boxed{60}$	$(2,4)$
6		$\boxed{40}$				40		$(2,3)$

- Die Startlösung (die kleine Zahl sind die Kosten, die fette die Menge) – die Kosten
$z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 20 \cdot 10 = 779$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}.$	$^{50}.$	$^{10}\mathbf{2}$	7
A_2	$^{70}.$	$^{30}.$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9
A_3	$^{40}.$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}.$	$^{20}\mathbf{10}$	18
b_j	5	8	7	14	

- MODI-Iteration 1: die Potenziale aus $u_i + v_j = c_{ij}$ in den besetzten Feldern ($u_1 = 0$), in den leeren Feldern $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (in Klammern). Das negativste d = -18 hat das Feld $(2,2)$ – es wird besetzt. Der geschlossene Zyklus $(2,2)^+ \to (3,2)^- \to (3,4)^+ \to (2,4)^-$, wir verschieben θ = 2 (die kleinste Menge in den mit − markierten Feldern).

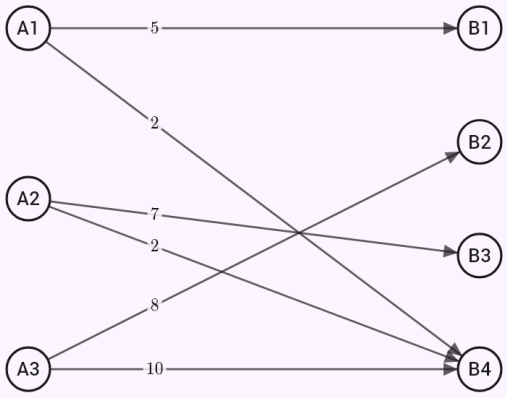
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(60)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(1)$	$^{30}\boxed{-18}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}\mathbf{2}$	9	50
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{8}$	$^{70}(70)$	$^{20}\mathbf{10}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	-10	10		

- Kein d_{ij} ist negativ – der Transportplan ist optimal.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	$^{19}\mathbf{5}$	$^{30}(32)$	$^{50}(42)$	$^{10}\mathbf{2}$	7	0
A_2	$^{70}(19)$	$^{30}\mathbf{2}$	$^{40}\mathbf{7}$	$^{60}(18)$	9	32
A_3	$^{40}(11)$	$^{8}\mathbf{6}$	$^{70}(52)$	$^{20}\mathbf{12}$	18	10
b_j	5	8	7	14		
v_j	19	-2	8	10		

- Die Gesamtkosten:
$z = 19 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 20 \cdot 12 = 743$

Graph



Ausgangszustand
$\sum = 779$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Ein unausgeglichenes Transportproblem mit fiktivem Abnehmer.

Eingabe: `transport(4 6 8; 5 7 3; supply=50 60; demand=30 40 20; method=northwest)`

Ergebnis

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 20$$
$$z_{min} = 440$$

Lösungsweg

- Die Stückkosten, das Angebot a_i der Anbieter und die Nachfrage b_j der Abnehmer

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	50
A_2	5	7	3	60
b_j	30	40	20	

- Das Angebot übersteigt die Nachfrage ($\sum a_i = 110,\quad \sum b_j = 90$) – wir ergänzen einen fiktiven Abnehmer B_4^* mit der Nachfrage 20 und Kosten null (Ware, die bei den Anbietern bleibt).

- Die Startlösung nach der Nordwesteckenregel: Ab dem linken oberen Feld besetzen wir so viel wie möglich und gehen nach rechts oder unten (die kleine Zahl sind die Kosten, die fette die Menge), die Kosten $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}.$	$^{0}.$	50
A_2	$^{5}.$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60
b_j	30	40	20	20	

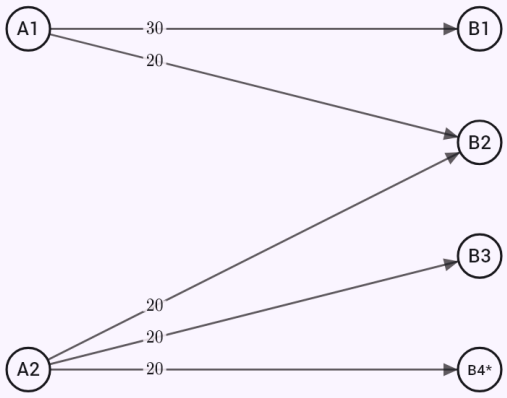
- Kein d_{ij} ist negativ – der Transportplan ist optimal.

	B_1	B_2	B_3	B_4^*	a_i	u_i
A_1	$^{4}\mathbf{30}$	$^{6}\mathbf{20}$	$^{8}(6)$	$^{0}(1)$	50	0
A_2	$^{5}(0)$	$^{7}\mathbf{20}$	$^{3}\mathbf{20}$	$^{0}\mathbf{20}$	60	1
b_j	30	40	20	20		
v_j	4	6	2	-1		

- Ein d_{ij} ist null – es gibt eine weitere optimale Lösung mit gleichen Kosten.

- Die Gesamtkosten: $z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 440$

Graph



Ausgangszustand
$\sum = 440$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Zuordnung von Arbeitern zu Aufgaben mit minimalen Kosten.

Eingabe: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=min)`

Ergebnis

$$R_1 \to S_2,\ R_2 \to S_1,\ R_3 \to S_3$$
$$R_4 \to S_4$$
$$z_{min} = 13$$

Lösungsweg

- Die Kosten – die Zeilen sind Arbeiter (Maschinen), die Spalten Aufgaben

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Von jeder Zeile wird ihr Minimum $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$ abgezogen

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	0	5	6
R_2	3	1	0	4
R_3	4	7	0	7
R_4	3	2	5	0

- Von jeder Spalte wird ihr Minimum $(3,\ 0,\ 0,\ 0)$ abgezogen

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	0	5	6
R_2	0	1	0	4
R_3	1	7	0	7
R_4	0	2	5	0

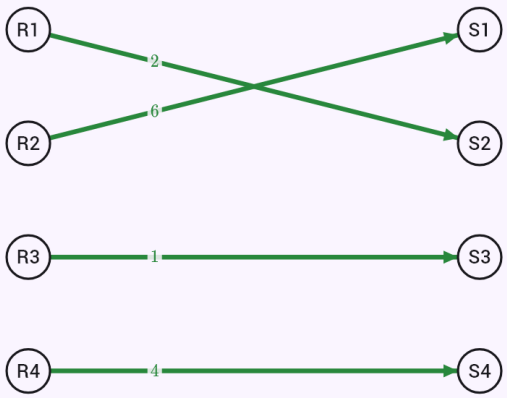
- Zum Überdecken der Nullen sind 4 Linien nötig – wir wählen unabhängige Nullen, eine in jeder Zeile und Spalte (eingerahmt).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	4	$\boxed{0}$	5	6
R_2	$\boxed{0}$	1	0	4
R_3	1	7	$\boxed{0}$	7
R_4	0	2	5	$\boxed{0}$

- Die Zuordnung mit den ursprünglichen Kosten – insgesamt $z_{min} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

		c
R_1	S_2	2
R_2	S_1	6
R_3	S_3	1
R_4	S_4	4

Graph



Eine Zuordnung mit maximalem Gewinn.

Eingabe: `assignment(9 2 7 8; 6 4 3 7; 5 8 1 8; 7 6 9 4; goal=max)`

Ergebnis

$$R_1 \to S_1,\ R_2 \to S_4,\ R_3 \to S_2$$
$$R_4 \to S_3$$
$$z_{max} = 33$$

Lösungsweg

- Die Kosten – die Zeilen sind Arbeiter (Maschinen), die Spalten Aufgaben

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	9	2	7	8
R_2	6	4	3	7
R_3	5	8	1	8
R_4	7	6	9	4

- Gesucht ist ein Maximum – wir machen daraus ein Minimum, indem wir jedes Element von der größten Zahl 9 abziehen.

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	3	5	6	2
R_3	4	1	8	1
R_4	2	3	0	5

- Von jeder Zeile wird ihr Minimum $(0,\ 2,\ 1,\ 0)$ abgezogen

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

- Von jeder Spalte wird ihr Minimum $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ abgezogen

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	7	2	1
R_2	1	3	4	0
R_3	3	0	7	0
R_4	2	3	0	5

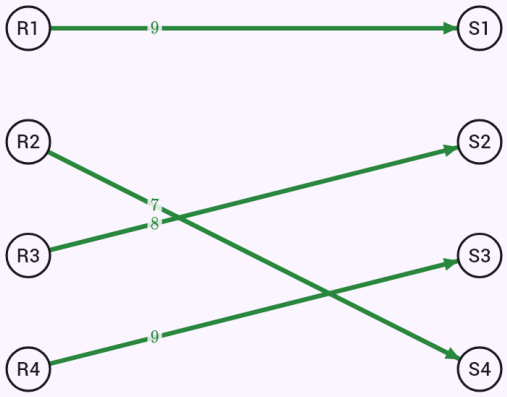
- Zum Überdecken der Nullen sind 4 Linien nötig – wir wählen unabhängige Nullen, eine in jeder Zeile und Spalte (eingerahmt).

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	$\boxed{0}$	7	2	1
R_2	1	3	4	$\boxed{0}$
R_3	3	$\boxed{0}$	7	0
R_4	2	3	$\boxed{0}$	5

- Die Zuordnung mit den ursprünglichen Kosten – insgesamt $z_{max} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$

		c
R_1	S_1	9
R_2	S_4	7
R_3	S_2	8
R_4	S_3	9

Graph



Ein Spiel mit Sattelpunkt – Maximin gleich Minimax.

Eingabe: `game(4 2 5; 3 1 6; 6 0 2)`

Ergebnis

$$v = 2, \quad (A_1, B_2)$$

Lösungsweg

- Die Auszahlungsmatrix (3×3): Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B, die Zahlen Gewinne von A (Verluste von B). A will möglichst viel, B möglichst wenig.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	1	6
A_3	6	0	2

- Wir suchen einen Sattelpunkt: in jeder Zeile das Minimum (das sichert sich A), in jeder Spalte das Maximum (mehr verliert B nicht).
$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2, \quad \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$ – Maximin gleich Minimax, das Spiel hat einen Sattelpunkt.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	4	2	5	2
A_2	3	1	6	1
A_3	6	0	2	0
max	6	2	6	

- Die optimalen reinen Strategien (Sattelpunkte): (A_1, B_2); der Wert des Spiels $v = 2$

Ein 2 × 2-Spiel ohne Sattelpunkt – gemischte Strategien per Formel.

Eingabe: `game(3 -1; -2 4)`

Ergebnis

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg

- Die Auszahlungsmatrix (2×2): Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B, die Zahlen Gewinne von A (Verluste von B). A will möglichst viel, B möglichst wenig.

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Wir suchen einen Sattelpunkt: in jeder Zeile das Minimum (das sichert sich A), in jeder Spalte das Maximum (mehr verliert B nicht). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – es gibt keinen Sattelpunkt. Die Spieler wählen gemischte Strategien – jede reine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

	B_1	B_2	min
A_1	3	-1	-1
A_2	-2	4	-2
max	3	4	

- Ein 2 × 2-Spiel ohne Sattelpunkt (Strategien A_1, A_2 und B_1, B_2): A spielt die erste Zeile mit Wahrscheinlichkeit p so, dass sein erwarteter Gewinn gegen beide Spalten gleich ist, B die erste Spalte mit Wahrscheinlichkeit q entsprechend. Für die Matrix (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Die optimalen gemischten Strategien: $p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; der Wert des Spiels $v = 1$

Dominierte Strategien nacheinander gestrichen.

Eingabe: `game(3 -1 4; -2 4 5; 1 -2 3)`

Ergebnis

$$v = 1, \quad p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Lösungsweg

- Die Auszahlungsmatrix (3×3): Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B, die Zahlen Gewinne von A (Verluste von B). A will möglichst viel, B möglichst wenig.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5
A_3	1	-2	3

- Wir suchen einen Sattelpunkt: in jeder Zeile das Minimum (das sichert sich A), in jeder Spalte das Maximum (mehr verliert B nicht). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad -1 < 3$ – es gibt keinen Sattelpunkt. Die Spieler wählen gemischte Strategien – jede reine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	3	-1	4	-1
A_2	-2	4	5	-2
A_3	1	-2	3	-2
max	3	4	5	

- Die Strategie A_3 wird von A_1 dominiert – diese bringt Spieler A in jeder Spalte mindestens gleich viel. A wählt sie nicht, wir streichen sie

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	4
A_2	-2	4	5

- Die Strategie B_3 wird von B_1 dominiert – damit verliert Spieler B in keiner Zeile mehr. B wählt sie nicht, wir streichen sie

	B_1	B_2
A_1	3	-1
A_2	-2	4

- Ein 2 × 2-Spiel ohne Sattelpunkt (Strategien A_1, A_2 und B_1, B_2): A spielt die erste Zeile mit Wahrscheinlichkeit p so, dass sein erwarteter Gewinn gegen beide Spalten gleich ist, B die erste Spalte mit Wahrscheinlichkeit q entsprechend. Für die Matrix (a b; c d)

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{4-(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{3}{5}$$
$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{4-(-1)}{3-(-1)-(-2)+4} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{3\cdot 4-(-1)\cdot(-2)}{3-(-1)-(-2)+4} = 1$$

- Die optimalen gemischten Strategien: $p^* = \left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$; der Wert des Spiels $v = 1$

Ein 2 × 4-Spiel grafisch – das Maximum der unteren Einhüllenden.

Eingabe: `game(2 3 1 5; 4 1 6 0)`

Ergebnis

$$v = \frac{17}{7}, \quad p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad q^* = \left(0,\right.$$

Lösungsweg

- Die Auszahlungsmatrix (2×4): Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B, die Zahlen Gewinne von A (Verluste von B). A will möglichst viel, B möglichst wenig.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	1	6	0

- Wir suchen einen Sattelpunkt: in jeder Zeile das Minimum (das sichert sich A), in jeder Spalte das Maximum (mehr verliert B nicht). $\max_i \min_j a_{ij} = 1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3, \quad 1 < 3$ – es gibt keinen Sattelpunkt. Die Spieler wählen gemischte Strategien – jede reine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

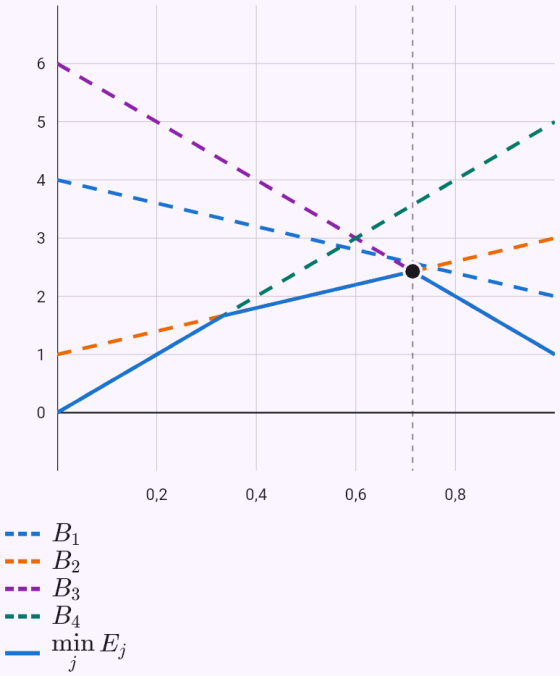
	B_1	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	3	1	5	1
A_2	4	1	6	0	0
max	4	3	6	5	

- Die grafische Methode: A spielt die erste Zeile mit Wahrscheinlichkeit p, die zweite mit 1 − p. Sein erwarteter Gewinn gegen jede Strategie von B ist eine Gerade in p; B wählt die niedrigste, A sucht daher den höchsten Punkt der unteren Einhüllenden – Maximum $p^* = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{17}{7}$. Die Geraden

$$B_1: \; E = 2p + 4(1-p) = -2p + 4$$
$$B_2: \; E = 3p + (1-p) = 2p + 1$$
$$B_3: \; E = p + 6(1-p) = -5p + 6$$
$$B_4: \; E = 5p + 0(1-p) = 5p$$

- Das Optimum liegt im Schnittpunkt der Geraden B_2, B_3. B mischt sie mit den Wahrscheinlichkeiten w und 1 − w so, dass es A gleich ist, welche Zeile er spielt: $2w + (-5)(1-w) = 0 \;\Rightarrow\; w = \frac{5}{7}$
- Die optimalen gemischten Strategien: $p^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $q^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$; der Wert des Spiels $v = \frac{17}{7}$

Graph



Die Geraden sind die erwarteten Gewinne von A gegen die Strategien von B in Abhängigkeit von p; die hervorgehobene untere Einhüllende ist, was A sich sichern kann, der Punkt ihr Maximum.

Schere, Stein, Papier per linearer Optimierung – jede Strategie mit Wahrscheinlichkeit 1/3.

Eingabe: `game(0 -1 1; 1 0 -1; -1 1 0)`

Ergebnis

$$v = 0, \quad p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Lösungsweg

- Die Auszahlungsmatrix (3×3): Zeilen sind die Strategien von Spieler A, Spalten die von Spieler B, die Zahlen Gewinne von A (Verluste von B). A will möglichst viel, B möglichst wenig.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	1
A_2	1	0	-1
A_3	-1	1	0

- Wir suchen einen Sattelpunkt: in jeder Zeile das Minimum (das sichert sich A), in jeder Spalte das Maximum (mehr verliert B nicht). $\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1, \quad -1 < 1$ – es gibt keinen Sattelpunkt. Die Spieler wählen gemischte Strategien – jede reine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	-1	1	-1
A_2	1	0	-1	-1
A_3	-1	1	0	-1
max	1	1	1	

- Wir addieren k = 2 zu allen Einträgen, damit sie positiv sind – die optimalen Strategien ändern sich nicht, der Wert steigt um k.
- Ein größeres Spiel wird zur linearen Optimierung. Spieler B: max Σ y⃞ unter Σ⃞ a'⃞⃞·y⃞ ≤ 1, y⃞ ≥ 0, wobei $y_j = \frac{q_j}{v'}, \quad v' = v + k$. Das duale Problem gehört zu Spieler A.
- Das lineare Optimierungsproblem

  $\max z = y_1 + y_2 + y_3$

  $2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1$

  $3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$

  $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1$

  $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

- Die Standardform: Zu einer ≤-Bedingung wird eine Schlupfvariable s addiert, von einer ≥-Bedingung subtrahiert und eine künstliche Variable a ergänzt, zu einer Gleichung nur eine künstliche. Die Startbasis bilden s und a

  $2y_1 + y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$

  $3y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 1$

  $y_1 + 3y_2 + 2y_3 + s_3 = 1$

- Simplex-Tableau 1: y_1 tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_2 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	2	1	3	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
s_2	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
s_3	1	3	2	0	0	1	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	

- Simplex-Tableau 2: y_3 tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_1 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
s_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
s_3	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

- Simplex-Tableau 3: y_2 tritt ein (das negativste $z_j - c_j$), s_3 tritt aus (der kleinste Quotient b/a); das Pivotelement ist eingerahmt.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b	b/a
y_3	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	–
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
s_3	0	$\boxed{\frac{18}{7}}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	

- Tableau 4: Kein $z_j - c_j$ ist negativ – die Lösung ist optimal.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	b
y_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$
y_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

- Die optimale Lösung lesen wir aus dem letzten Tableau ab (die Nichtbasisvariablen sind null)

  $y_1 = \frac{1}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = \frac{1}{6}, \quad z_{max} = \frac{1}{2}$

- Das duale Problem – zu jeder Nebenbedingung eine duale Variable, zu jeder Variablen eine Nebenbedingung

  $\min v = u_1 + u_2 + u_3$
  $2u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 1$
  $u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 1$
  $3u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$
  $u_1, u_2, u_3 \geq 0$

- Die Schattenpreise (die optimalen dualen Variablen) aus dem letzten Tableau: Um wie viel sich das Optimum ändert, wenn die rechte Seite einer Nebenbedingung um 1 wächst. Eine nicht ausgeschöpfte Nebenbedingung (Schlupf $b_i - a_i x > 0$) hat den Schattenpreis 0.

	$b_i - a_i x$	u_i
1	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$

- Das Optimum des dualen Problems ist gleich dem des primalen: $v = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = z$

- Sensitivitätsanalyse – in welchen Bereichen sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Lösung ändert

	c_j	
y_1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
y_3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- In welchen Bereichen sich die rechten Seiten ändern dürfen, ohne dass sich die optimale Basis ändert (nur dort gelten die Schattenpreise)

	b_i	
1	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
2	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$
3	1	$\left\langle \frac{4}{7};\ \frac{8}{5} \right\rangle$

- Aus dem Optimum: $v' = \frac{1}{\sum y_j} = 2, \quad v = v' - k = 0$.
  Die Strategien sind die optimalen y (bei Spieler A die Schattenpreise) mal v'.

- Die optimalen gemischten Strategien: $p^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $q^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; der Wert des Spiels $v = 0$

Ein Bimatrixspiel (Kampf der Geschlechter) – zwei reine und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Eingabe: `game(2 0; 0 1 | 1 0; 0 2)`

Ergebnis

$$(A_1, B_1); \quad (A_2, B_2); \quad p^* = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Lösungsweg

- Ein Bimatrixspiel (2×2): in jedem Feld steht (Auszahlung von A, Auszahlung von B), und jeder Spieler will seine möglichst groß.

	B_1	B_2
A_1	$(2,\ 1)$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$(1,\ 2)$

- Beste Antworten: in jeder Spalte unterstreichen wir die größte Auszahlung von A, in jeder Zeile überstreichen wir die größte von B. Felder mit beiden (eingerahmt) sind Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien: $(A_1, B_1),\ (A_2, B_2)$.

	B_1	B_2
A_1	$\boxed{(\underline{2},\ \overline{1})}$	$(0,\ 0)$
A_2	$(0,\ 0)$	$\boxed{(\underline{1},\ \overline{2})}$

- Das gemischte Gleichgewicht: A wählt p so, dass es B gleich ist, welche Spalte er spielt, B wählt q so, dass es A gleich ist, welche Zeile er spielt (erwartete Auszahlungen $E_A = \frac{2}{3}, \quad E_B = \frac{2}{3}$)

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \ \Rightarrow \ p = \frac{2}{3}$$

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \ \Rightarrow \ q = \frac{1}{3}$$

Bekannte Einschränkungen

- Höchstens 12 Variablen und 15 Nebenbedingungen; ganzzahlige Probleme bis 6 Variablen. Alle Variablen müssen nichtnegativ sein – freie Variablen gibt es noch nicht.
- Transport- und Zuordnungsprobleme bis 8 × 8.
- Matrixspiele bis 6 × 6; das gemischte Nash-Gleichgewicht eines Bimatrixspiels nur bei 2 × 2.

52. Graphen, Netzwerke und Logistik

Aufgaben zu Graphen und Netzwerken finden Sie auf dem Startbildschirm im Bereich „Anwendungen“, Fachgebiet Logistik und Netzwerke: kürzester Weg (Algorithmen von Dijkstra, Bellman-Ford und Floyd-Warshall), minimaler Spannbaum (Kruskal, Prim), maximaler Fluss und minimaler Schnitt, Währungsarbitrage als Suche nach einem negativen Zyklus und der kritische Pfad eines Projekts (CPM, PERT).

Den Graphen geben Sie in ein mehrzeiliges Feld ein, eine Kante pro Zeile – A-B 4 ist eine ungerichtete Kante mit Gewicht 4, A->B 4 eine gerichtete, beim Fluss A->B 3/7 ein gegebener Fluss und die Kapazität; ohne Zahl hat eine Kante das Gewicht 1. Statt der Kanten können Sie eine Gewichtsmatrix zeilenweise einfügen (-, ∞ oder 0 bedeutet keine Kante), darüber ggf. eine Zeile mit den Knotennamen. Knoten können einen Buchstaben oder ein Wort als Namen haben (PHA, Berlin). Projekttätigkeiten werden mit Name, Dauer und Vorgängern eingegeben (D 5 B C), für PERT mit drei Schätzungen (B 3/4/11 A).

Bei der Arbitrage können Sie statt eigener Kurse die heutige Kurstabelle der ČNB oder der EZB wählen – es genügt, die Währungen aufzuzählen (CZK EUR USD GBP). Mit einer Tabelle ergibt sich nie eine Arbitrage (der Lösungsweg zeigt, warum); mit beiden Tabellen zugleich nimmt jedes Währungspaar den günstigeren Kurs, und ein Zyklus über 1 ist möglich. Die Schaltfläche „Kurse zum Bearbeiten einfügen“ setzt die Kurse einer Tabelle in das Feld Wechselkurse – bearbeiten Sie sie etwa nach den Ankaufs- und Verkaufskursen einer Wechselstube.

Der Lösungsweg zeigt eine Iterationstabelle wie im Lehrbuch – endgültige und vorläufige Marken bei Dijkstra, die Durchläufe von Bellman-Ford, die Floyd-Warshall-Matrix nach jedem Knoten, die sortierten Kanten bei Kruskal, die verbessernden Wege eines Flusses, die Vorwärts- und Rückwärtsrechnung bei CPM. Unter dem Ergebnis steht der Graph, den Sie mit den Pfeilen Schritt für Schritt durchgehen: rot die Änderung des Schritts, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis.

Beispiele

Kürzester Weg mit dem Dijkstra-Algorithmus.

Eingabe: `shortestpath(A-B 4; A-C 2; B-C 1; B-D 5; C-D 8; C-E 10; D-E 2; D-F 6; E-F 2;`

`from=A; to=F; method=dijkstra)`

Ergebnis

$$d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = 12$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

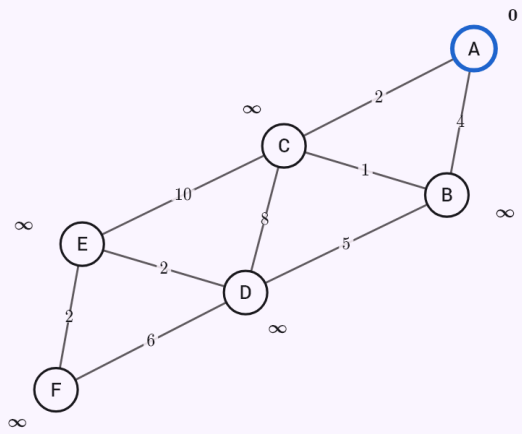
Lösungsweg

- Ein ungerichteter Graph mit 6 Knoten und 9 Kanten.
- Dijkstra-Algorithmus: In jedem Schritt wird der Knoten mit der kleinsten vorläufigen Marke endgültig (eingerahmt), und die Marken seiner Nachbarn sinken, wenn über ihn ein kürzerer Weg führt (fett); der Index ist der Vorgänger.

		A	B	C	D	E	F
0		0	∞	∞	∞	∞	∞
1	A	$\boxed{0}$	$\mathbf{4_A}$	$\mathbf{2_A}$	∞	∞	∞
2	C		$\mathbf{3_C}$	$\boxed{2_A}$	$\mathbf{10_C}$	$\mathbf{12_C}$	∞
3	B		$\boxed{3_C}$		$\mathbf{8_B}$	12_C	∞
4	D				$\boxed{8_B}$	$\mathbf{10_D}$	$\mathbf{14_D}$
5	E					$\boxed{10_D}$	$\mathbf{12_E}$
6	F						$\boxed{12_E}$

- Den Weg lesen wir rückwärts über die Vorgänger ab: $\mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, seine Länge $2 + 1 + 5 + 2 + 2 = 12$

Graph



Ausgangszustand
$d(\mathrm{A}) = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Ein negatives Kantengewicht – der Bellman-Ford-Algorithmus.

Eingabe: `shortestpath(S->A 4; S->B 5; B->A -2; A->C 3; C->D 2; B->D 6; from=S; to=D; method=bellmanford)`

Ergebnis

$$d(\mathrm{S},\mathrm{D}) = 8$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$$

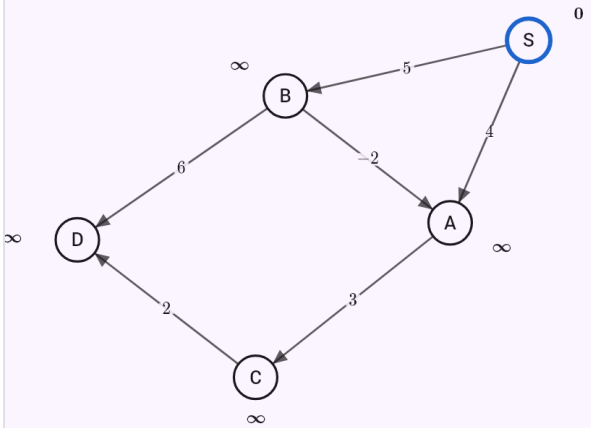
Lösungsweg

- Ein gerichteter Graph mit 5 Knoten und 6 Kanten.
- Bellman-Ford-Algorithmus: In jedem Durchlauf versuchen wir, den Weg über jede Kante zu verkürzen, $d(v) = \min\left(d(v), d(u) + w(u,v)\right)$; geänderte Marken sind fett, der Index ist der Vorgänger.

	S	A	B	C	D
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{3_B}$	$\mathbf{5_S}$	$\mathbf{6_A}$	$\mathbf{8_C}$

- Im 2. Durchlauf hat sich keine Marke mehr geändert – die Abstände sind endgültig.
- Den Weg lesen wir rückwärts über die Vorgänger ab: $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D}$, seine Länge $5 - 2 + 3 + 2 = 8$

Graph



Ausgangszustand
$d(\mathrm{S}) = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Abstände zwischen allen Knotenpaaren.

Eingabe: `shortestpath(A->B 3; B->C -1; A->C 4; C->A 2; C->D 2; D->B 1; method=floyd)`

Ergebnis

$$D = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Lösungsweg

- Ein gerichteter Graph mit 4 Knoten und 6 Kanten.
- Der Floyd-Warshall-Algorithmus beginnt mit der Matrix der Kantengewichte (∞ – keine Kante)

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \infty & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Wir lassen den Knoten A als Zwischenstation zu: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; verkürzte Abstände sind fett.

$$D^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 4 & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}$$

- Wir lassen den Knoten B als Zwischenstation zu: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; verkürzte Abstände sind fett.

$$D^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & \mathbf{2} & \infty \\ \mathrm{B} & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \infty & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

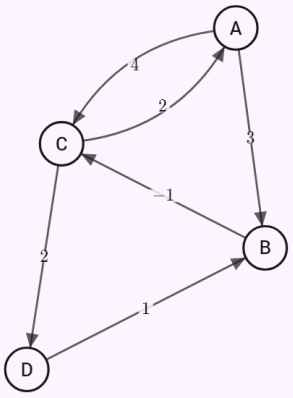
- Wir lassen den Knoten C als Zwischenstation zu: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; verkürzte Abstände sind fett.

$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathrm{B} & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathrm{C} & 2 & 5 & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- Wir lassen den Knoten D als Zwischenstation zu: $d(i,j) = \min\left(d(i,j), d(i,k) + d(k,j)\right)$; verkürzte Abstände sind fett.

$$D^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{A} & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathrm{B} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathrm{C} & 2 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathrm{D} & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Graph



Ausgangszustand
$D^{(0)}$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Minimaler Spannbaum mit dem Kruskal-Algorithmus.

Eingabe: `spanningtree(A-B 7; A-D 5; B-C 8; B-D 9; B-E 7; C-E 5; D-E 15; D-F 6; E-F 8; E-G`

`9; F-G 11; method=kruskal)`

Ergebnis

$w = 39$

$\mathrm{AB},\ \mathrm{AD},\ \mathrm{BE}$
$\mathrm{CE},\ \mathrm{DF},\ \mathrm{EG}$

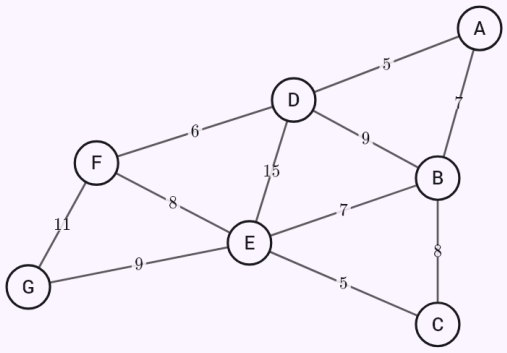
Lösungsweg

- Ein ungerichteter Graph mit 7 Knoten und 11 Kanten.
- Kruskal-Algorithmus: die Kanten von der billigsten an, jede wird hinzugefügt (✓), sofern sie keinen Zyklus schließt (×).

	w	
AD	5	✓
CE	5	✓
DF	6	✓
AB	7	✓
BE	7	✓
BC	8	×
EF	8	×
BD	9	×
EG	9	✓

- Die Summe der Kantengewichte des Baums:
  $7 + 5 + 7 + 5 + 6 + 9 = 39$

Graph



Ausgangszustand

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Das kürzeste Netz zwischen Kreisstädten mit dem Prim-Algorithmus.

Eingabe: `spanningtree(PHA-PLZ 93; PHA-LBC 110; PHA-HK 115; PHA-JI 128; PHA-BRN 205; LBC-HK 100; HK-OL 140; JI-BRN 88; BRN-OL 78; OL-OVA 100; BRN-OVA 170; PLZ-JI 210; start=PHA; method=prim)`

Ergebnis

$w = 697$

$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{LBC},\ \mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$
$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK},\ \mathrm{JI}-\mathrm{BRN},\ \mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$
$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$

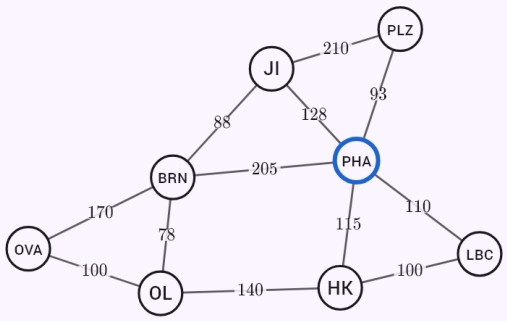
Lösungsweg

- Ein ungerichteter Graph mit 8 Knoten und 12 Kanten.
- Prim-Algorithmus ab dem Knoten PHA: In jedem Schritt hängen wir die billigste Kante an, die vom Baum zu einem Knoten außerhalb führt.

		w
1	$\mathrm{PHA}-\mathrm{PLZ}$	93
2	$\mathrm{PHA}-\mathrm{LBC}$	110
3	$\mathrm{LBC}-\mathrm{HK}$	100
4	$\mathrm{PHA}-\mathrm{JI}$	128
5	$\mathrm{JI}-\mathrm{BRN}$	88
6	$\mathrm{BRN}-\mathrm{OL}$	78
7	$\mathrm{OL}-\mathrm{OVA}$	100

- Die Summe der Kantengewichte des Baums:
  $93 + 110 + 128 + 100 + 88 + 78 + 100 = 697$

Graph



Ausgangszustand
PHA

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Maximaler Fluss und minimaler Schnitt.

Eingabe: `maxflow(S->A 16; S->B 13; B->A 4; A->C 12; C->B 9; B->D 14; D->C 7; C->T 20; D->T 4; from=S; to=T)`

Ergebnis

$f_{max} = 23$

$S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$

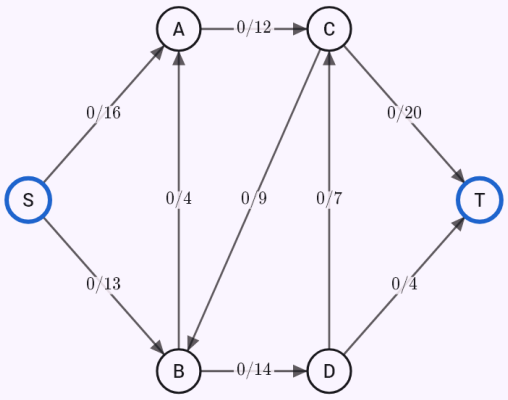
Lösungsweg

- Gesucht ist der maximale Fluss von der Quelle S zur Senke T, wir beginnen mit einem Fluss der Stärke 0
- 1. verbessernder Weg (der kürzeste im Residualnetz): $\mathrm{S} \to \mathrm{A} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Der Fluss wächst um die kleinste Restkapazität $\min(16, 12, 20) = 12$, seine Stärke ist jetzt 12
- 2. verbessernder Weg (der kürzeste im Residualnetz): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Der Fluss wächst um die kleinste Restkapazität $\min(13, 14, 4) = 4$, seine Stärke ist jetzt 16
- 3. verbessernder Weg (der kürzeste im Residualnetz): $\mathrm{S} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C} \to \mathrm{T}$. Der Fluss wächst um die kleinste Restkapazität $\min(9, 10, 7, 8) = 7$, seine Stärke ist jetzt 23
- Es gibt keinen verbessernden Weg mehr – im Residualnetz erreicht die Quelle nur die Knoten $S = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$
- Fluss entlang der Kanten (f) und ihre Kapazitäten (c)

	f	c
$\mathrm{S} \to \mathrm{A}$	12	16
$\mathrm{S} \to \mathrm{B}$	11	13
$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	0	4
$\mathrm{A} \to \mathrm{C}$	12	12
$\mathrm{C} \to \mathrm{B}$	0	9
$\mathrm{B} \to \mathrm{D}$	11	14
$\mathrm{D} \to \mathrm{C}$	7	7
$\mathrm{C} \to \mathrm{T}$	19	20
$\mathrm{D} \to \mathrm{T}$	4	4

- Die Kanten aus der Menge S heraus bilden den minimalen Schnitt: $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{T}$. Sie sind alle voll, und ihre Kapazitätssumme $12 + 7 + 4 = 23$ ist gleich dem maximalen Fluss.

Graph



Ausgangszustand
$f = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Ein profitabler Tauschzyklus dreier Währungen.

Eingabe: `arbitrage(USD->EUR 0.9; EUR->GBP 0.8; GBP->USD 1.4; EUR->USD 1.1; GBP->EUR 1.24;`

USD->GBP 0.7)

Ergebnis

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}008 \; (+0{,}8\,\%)$$

Lösungsweg

- Die Kurse und die Kantengewichte $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	$0{,}9$	$0{,}10536$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}8$	$0{,}22314$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	$1{,}4$	$-0{,}33647$
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	$1{,}1$	$-0{,}09531$
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	$1{,}24$	$-0{,}21511$
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	$0{,}7$	$0{,}35667$

- Ein Zyklus bringt Gewinn, wenn das Produkt seiner Kurse über 1 liegt – logarithmiert ein negativer Zyklus der Gewichte

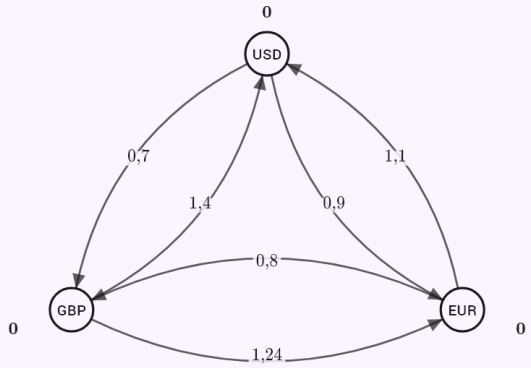
$$r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$$

- Den Bellman-Ford-Algorithmus starten wir von allen Währungen zugleich (alle Marken 0); geänderte Marken sind fett, der Index ist der Vorgänger.

	USD	EUR	GBP
0	0	0	0
1	$\mathbf{-0{,}336472_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}215111_{\mathrm{GBP}}}$	0
2	$\mathbf{-0{,}34444_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}231112_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}007968}$
3	$\mathbf{-0{,}352409_{\mathrm{GBP}}}$	$\mathbf{-0{,}23908_{\mathrm{USD}}}$	$\mathbf{-0{,}015936}$

- Die Marken ändern sich auch im n-ten Durchlauf – die Vorgänger führen zum negativen Zyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$. Produkt der Kurse $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4 \approx 1{,}008$, Gewinn $0{,}8\,\%$: aus 1000 Einheiten werden nach einer Runde 1008

Graph



Ausgangszustand
$d = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Konsistente Kurse als Matrix – keine Arbitrage.

Eingabe: `arbitrage(CZK EUR USD; 1 0.04 0.0432; 25 1 1.08; 23.148148 0.925926 1)`

Ergebnis

Keine Arbitrage – kein Tauschzyklus bringt Gewinn.

Lösungsweg

- Die Kurse und die Kantengewichte $w = -\ln r$

	r	$w = -\ln r$
CZK → EUR	0,04	3,2189
CZK → USD	0,0432	3,1419
EUR → CZK	25	−3,2189
EUR → USD	1,08	−0,076961
USD → CZK	23,1481	−3,1419
USD → EUR	0,925926	0,076961

- Ein Zyklus bringt Gewinn, wenn das Produkt seiner Kurse über 1 liegt – logarithmiert ein negativer Zyklus der Gewichte

$$r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$$

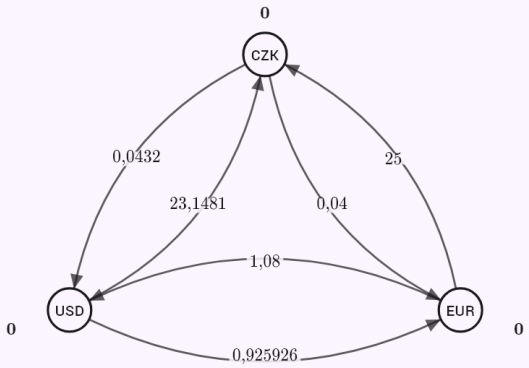
- Den Bellman-Ford-Algorithmus starten wir von allen Währungen zugleich (alle Marken 0); geänderte Marken sind fett, der Index ist der Vorgänger.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}218876_{EUR}}$	0	$\mathbf{-0{,}076961_{EUR}}$

- Im 2. Durchlauf hat sich keine Marke mehr geändert – die Abstände sind endgültig.
- Auch im n-ten Durchlauf hat sich keine Marke geändert – es gibt keinen negativen Zyklus und somit keine Arbitrage. Die Potenziale p = −d sind Logarithmen konsistenter „Preise“ der Währungen: Für jeden Kurs gilt $\ln r \le p(\text{Ziel}) - p(\text{Ausgang})$.

	$p = -d$
CZK	3,2189
EUR	0
USD	0,076961

Graph



Ausgangszustand
$d = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Die Kurse einer Tabelle (ČNB) – nie eine Arbitrage.

Eingabe: `arbitrage(source=cnb; CZK EUR USD GBP)`

Ergebnis

Keine Arbitrage – kein Tauschzyklus bringt Gewinn.

Lösungsweg

- Kurse aus der Kurstabelle: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB},\ 27{,}11{,}2026$
- Die Tabelle gibt den Wert einer Einheit jeder Währung in der Basiswährung CZK an (k) – und seinen Logarithmus p = ln k

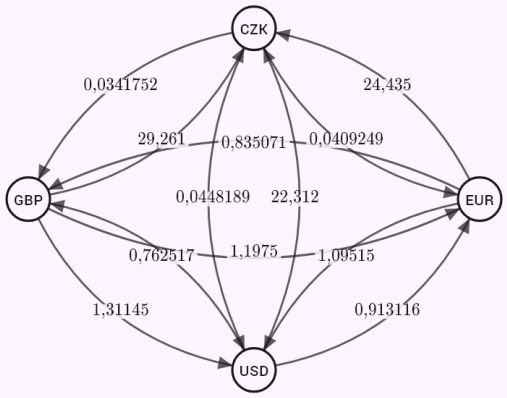
	k	$p = \ln k$
CZK	1	0
EUR	$1\,€ = 24{,}435\,\mathrm{CZK}$	$3{,}196$
USD	$1\,\$ = 22{,}312\,\mathrm{CZK}$	$3{,}1051$
GBP	$1\,\mathrm{GBP} = 29{,}261\,\mathrm{CZK}$	$3{,}3763$

- Der Kurs zwischen zwei Währungen ist ein Kreuzkurs über die Basiswährung: $r_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$
- Auf jedem Zyklus kürzen sich die Werte k und das Produkt der Kurse ist genau 1. Die Kurse einer Tabelle ($\check{\mathrm{C}}\mathrm{NB}$) sind konsistent, eine Arbitrage ergibt sich daraus nie – die Logarithmen p = ln k sind die „Preise“ der Währungen, die das belegen.

$$r_{ij}\, r_{jl} \cdots r_{mi} = \frac{k_i}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_l} \cdots \frac{k_m}{k_i} = 1$$

- ČNB und EZB veröffentlichen nur Mittelkurse (Referenzkurse), ohne Ankauf und Verkauf. Mit den Kursen einer Wechselstube (Ankauf und Verkauf) verliert jeder Zyklus.

Graph



Die Kurse der ČNB und der EZB zusammen – ein winziger „Gewinn“ zwischen Referenzkursen.

Eingabe: `arbitrage(source=cnb+ecb; CZK EUR USD GBP CHF)`

Ergebnis

$$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$$

$$\prod r \approx 1{,}0009332 \;(+0{,}09332\,\%)$$

Lösungsweg

- Kurse aus der Kurstabelle:
  $\text{ČNB},\ 27{,}11{,}2026;\quad \text{ECB},\ 27{,}11{,}2026$
- Für jedes Währungspaar nehmen wir den günstigeren der beiden Kurse – den der ČNB oder den der EZB (letzte Spalte der Tabelle). Der andere würde keinen Zyklus verbessern.
- Die Kurse und die Kantengewichte $w = -\ln r$

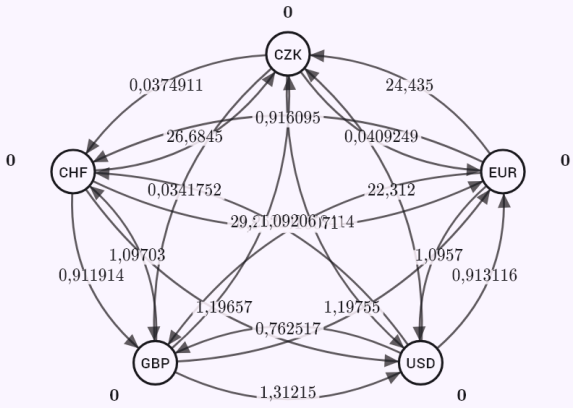
	r	$w = -\ln r$	
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{EUR}$	0,0409249	3,196	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{USD}$	0,0448414	3,1046	ECB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{GBP}$	0,0341752	3,3763	ČNB
$\mathrm{CZK} \to \mathrm{CHF}$	0,0374911	3,2837	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CZK}$	24,435	−3,196	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{USD}$	1,0957	−0,091393	ECB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{GBP}$	0,835071	0,18024	ČNB
$\mathrm{EUR} \to \mathrm{CHF}$	0,916095	0,087635	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CZK}$	22,312	−3,1051	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{EUR}$	0,913116	0,090892	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{GBP}$	0,762517	0,27113	ČNB
$\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF}$	0,836501	0,17853	ČNB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CZK}$	29,2621	−3,3763	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{EUR}$	1,19755	−0,18028	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{USD}$	1,31215	−0,27167	ECB
$\mathrm{GBP} \to \mathrm{CHF}$	1,09703	−0,092604	ČNB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{CZK}$	26,6845	−3,2841	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{EUR}$	1,09206	−0,088066	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$	1,19657	−0,17946	ECB
$\mathrm{CHF} \to \mathrm{GBP}$	0,911914	0,092209	ECB

- Ein Zyklus bringt Gewinn, wenn das Produkt seiner Kurse über 1 liegt – logarithmiert ein negativer Zyklus der Gewichte
  $r_1 r_2 \cdots r_k > 1 \iff \ln r_1 + \cdots + \ln r_k > 0 \iff (-\ln$
- Den Bellman-Ford-Algorithmus starten wir von allen Währungen zugleich (alle Marken 0); geänderte Marken sind fett, der Index ist der Vorgänger.

	CZK	EUR	USD
0	0	0	0
1	$\mathbf{-3{,}376687_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}18067_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}272064}$
2	$\mathbf{-3{,}37762_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}181603_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}272996}$
3	$\mathbf{-3{,}378552_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}182536_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}273929}$
4	$\mathbf{-3{,}379485_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}183468_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}274862}$
5	$\mathbf{-3{,}380418_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}184401_{\mathrm{CHF}}}$	$\mathbf{-0{,}275795}$

- Die Marken ändern sich auch im n-ten Durchlauf – die Vorgänger führen zum negativen Zyklus $\mathrm{USD} \to \mathrm{CHF} \to \mathrm{USD}$. Produkt der Kurse $0{,}836501 \cdot 1{,}19657 \approx 1{,}0009332$, Gewinn $0{,}09332\,\%$: aus 1000 Einheiten werden nach einer Runde $1000{,}933$
- Der Zyklus ergibt sich nur zwischen den Referenzkursen zweier Banken, die zu verschiedenen Zeiten festgelegt und anders gerundet werden. Zu diesen Kursen wird nicht gehandelt – der Gewinn ist praktisch nicht erzielbar.

Graph



Ausgangszustand
$d = 0$

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Kritischer Pfad und Puffer der Tätigkeiten.

Eingabe: `cpm(A 3; B 4 A; C 2 A; D 5 B C; E 3 C; F 2 D E)`

Ergebnis

$$T = 14$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$$

Lösungsweg

- Die Tätigkeiten, ihre Dauern und Vorgänger

	t	
A	3	–
B	4	A
C	2	A
D	5	B, C
E	3	C
F	2	D, E

- Vorwärtsrechnung: Eine Tätigkeit beginnt frühestens, wenn alle Vorgänger fertig sind (ES = größtes EF der Vorgänger), und endet bei EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	7
C	3	5
D	$\max(7, 5) = 7$	12
E	5	8
F	$\max(12, 8) = 12$	14

- Die Projektdauer ist das späteste der frühesten Enden: $T = 14$
- Rückwärtsrechnung: Eine Tätigkeit muss spätestens enden, wenn ihre Nachfolger beginnen müssen (LF = kleinster LS der Nachfolger), und spätestens bei LS = LF − t beginnen.

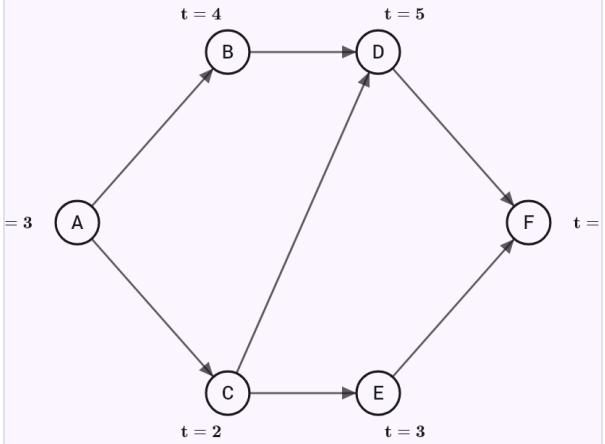
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
F	14	12
E	12	9
D	12	7
C	$\min(7, 9) = 7$	5
B	7	3
A	$\min(3, 5) = 3$	0

- Der Puffer jeder Tätigkeit; kritische Tätigkeiten (★) haben keinen

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	2	
D	0	★
E	4	
F	0	★

- Der kritische Pfad – eine Verzögerung jeder seiner Tätigkeiten verzögert das ganze Projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D} \to \mathrm{F}$

Graph



Ausgangszustand

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

PERT – Wahrscheinlichkeit, das Projekt bis zum Termin abzuschließen.

Eingabe: `cpm(A 2/3/4; B 3/4/11 A; C 1/2/3 A; D 4/5/6 B C; T=15)`

Ergebnis

$T = 13$

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$

$P(T \le 15) \approx 0{,}9214$

Lösungsweg

- Die Tätigkeiten, ihre Dauern und Vorgänger

	t	
A	3	–
B	5	A
C	2	A
D	5	B, C

- PERT: erwartete Dauern und Varianzen aus den drei Schätzungen

	a	m	b	$t = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	2	3	4	3	0,1111
B	3	4	11	5	1,778
C	1	2	3	2	0,1111
D	4	5	6	5	0,1111

- Vorwärtsrechnung: Eine Tätigkeit beginnt frühestens, wenn alle Vorgänger fertig sind (ES = größtes EF der Vorgänger), und endet bei EF = ES + t.

	ES	$\mathrm{EF} = \mathrm{ES} + t$
A	0	3
B	3	8
C	3	5
D	$\max(8, 5) = 8$	13

- Die Projektdauer ist das späteste der frühesten Enden: $T = 13$
- Rückwärtsrechnung: Eine Tätigkeit muss spätestens enden, wenn ihre Nachfolger beginnen müssen (LF = kleinster LS der Nachfolger), und spätestens bei LS = LF − t beginnen.

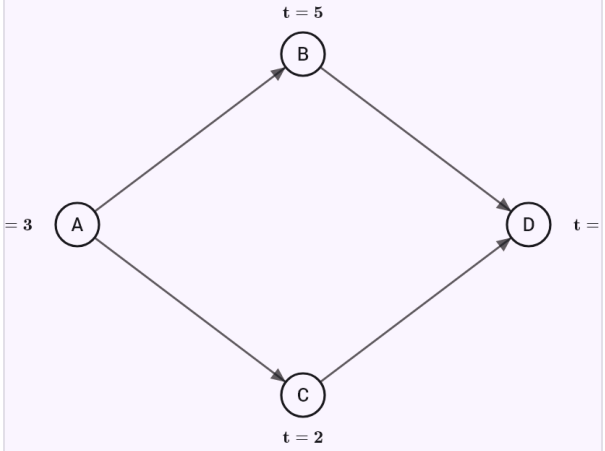
	LF	$\mathrm{LS} = \mathrm{LF} - t$
D	13	8
C	8	6
B	8	3
A	$\min(3, 6) = 3$	0

- Der Puffer jeder Tätigkeit; kritische Tätigkeiten (★) haben keinen

	$R = \mathrm{LS} - \mathrm{ES}$	
A	0	★
B	0	★
C	3	
D	0	★

- Der kritische Pfad – eine Verzögerung jeder seiner Tätigkeiten verzögert das ganze Projekt: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{D}$
- Die Varianz der Projektdauer ist die Summe der Varianzen auf dem kritischen Pfad: $\sigma_T^2 = 0{,}1111 + 1{,}778 + 0{,}1111 = 2, \quad \sigma_T \approx 1{,}414$
- Die Dauer ist näherungsweise normalverteilt – Wahrscheinlichkeit der Fertigstellung bis zum Termin: $P(T \le 15) = \Phi\left(\frac{15-13}{1{,}414}\right) = \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9214$

Graph



Ausgangszustand

Mit den Pfeilen gehen Sie den Algorithmus Schritt für Schritt durch. Rot ist die Änderung in diesem Schritt, blau das bereits Entschiedene, grün das Ergebnis. Neben den Knoten stehen ihre Marken (Abstand, früheste und späteste Termine).

Bekannte Einschränkungen

- Ein Graph darf höchstens 30 Knoten und 200 Kanten haben; die Floyd-Warshall-Matrizen nach jedem Knoten werden bis 6 Knoten gezeigt, bei größeren Graphen nur die Endmatrix.
- Die Arbitragesuche findet einen profitablen Zyklus (nicht unbedingt den ertragreichsten); Unterschiede unter 0,0001 % gelten als Rundung der Kurse.

- ČNB und EZB veröffentlichen nur Mittelkurse (Referenzkurse), zu denen nicht gehandelt wird; der „Gewinn“ aus beiden Tabellen zugleich liegt im Bereich von Hundertstelprozent und ist praktisch nicht erzielbar.
- Mit beiden Tabellen nur Währungen, die beide Banken veröffentlichen (den russischen Rubel keine von beiden).
- Tourenplanung, Rucksackproblem, Lagerhaltung und Warteschlangen sind in Vorbereitung; lineare Optimierung, Transport und Zuordnung haben ein eigenes Kapitel.

53. Psychometrie

Psychometrische Berechnungen zur Interpretation von Testergebnissen (nach dem Skript „Klinische Psychometrie – von der Zahl zur Interpretation“) finden Sie im Formular „Statistik und Psychometrie“ – Abschnitt „Anwendungen“ auf dem Startbildschirm, Fachgebiet Psychologie. Wählen Sie die Aufgabe, die Skala und die gesuchte Größe und füllen Sie die gemessenen Werte aus; Mittelwert und Standardabweichung der Norm setzt die Wahl der Skala (IQ 100; 15, T 50; 10, Wertpunkte 10; 3, z 0; 1, Sten 5,5; 2, Stanine 5; 2), „Eigene“ lässt die Norm eines anderen Tests eingeben. Das Symbol „?“ erklärt, woher die Formel stammt.

Hilfe direkt in der App: Das Symbol „?“ bei jeder Aufgabe des Formulars erklärt, was sie berechnet und woher die Formel stammt. Das Ergebnis zeigt den Lösungsweg Schritt für Schritt, und die Fachbegriffe darin (Cohens Kappa, ROC-Kurve, Konfidenzintervall, p-Wert, Prozentrang, wahrer Wert, prädiktive Werte …) sind gepunktet unterstrichen – ein Tippen auf einen Begriff zeigt seine kurze Erklärung in einfachen Worten, oft mit einem Beispiel. Die Hinweise am Ende des Lösungswegs sagen, wie das Ergebnis zu deuten ist und worauf man achten sollte.

Umrechnung von Standardwerten: $z = (X - M)/SD$ und daraus T, IQ, Wertpunkte, Sten und Stanine (auf eine ganze Zahl im Skalenbereich gerundet) sowie der Prozentrang. Testwert und Prozentrang: $PR = 100 \cdot \Phi(z)$ unter Normalverteilung und umgekehrt der Testwert zu einem gegebenen Prozentrang.

Der Standardmessfehler $SEM = SD \cdot \sqrt{(1 - r)}$ aus der Reliabilität r. Das Konfidenzintervall um den beobachteten Wert $X \pm z \cdot SEM$ auf 80, 90, 95 oder 99 % ($z = 1{,}28$; 1,645; 1,96; 2,576). Die Schätzung des wahren Werts $T' = M + r(X - M)$ – Regression zur Mitte – mit dem Intervall um T' und dem Standardschätzfehler $SEE = SD \cdot \sqrt{(r(1 - r))}$.

Die Signifikanz der Differenz zweier Werte derselben Skala (etwa WAIS-Indizes): Standardfehler der Differenz $SE_diff = SD \cdot \sqrt{(2 - r_{11} - r_{22})}$ und die kritische Differenz $z \cdot SE_diff$. Prädiktive Werte eines Tests nach Bayes: PPV und NPV aus Sensitivität, Spezifität und Prävalenz – oder aus einer Vierfeldertafel (richtig und falsch positiv und negativ), wahlweise mit der Prävalenz der Population, in der der Test eingesetzt wird – dazu die Likelihood-Quotienten LR^+ und LR^-.

Die Spearman-Brown-Formel (im selben Formular) berechnet die Reliabilität eines k-mal verlängerten Tests, $r' = k \cdot r / (1 + (k - 1) \cdot r)$, oder umgekehrt den Verlängerungsfaktor für eine Zielreliabilität – mit der aktuellen Itemzahl auch die benötigte Anzahl der Items. Die Bonferroni-Korrektur liefert das strengere Niveau $\alpha' = \alpha/m$ für m Vergleiche, dazu die Wahrscheinlichkeit eines falsch signifikanten Ergebnisses ohne Korrektur und die Šidák-Korrektur.

Reliabilität und Übereinstimmung aus Messdaten berechnen die Chips zur Schreibweise data(…) oder zum Raster „Als Daten“ (eingefügt aus Excel, CSV-Datei): Cronbachs Alpha – Items in Spalten, Befragte in Zeilen – mit Itemanalyse (Korrelation des Items mit dem Rest des Tests, Alpha ohne das Item); die ICC –

Beurteiler in Spalten, Personen in Zeilen – alle sechs Formen nach Shrout und Fleiss aus einer Varianzanalysetabelle; Cohens Kappa aus zwei Spalten mit Urteilen (Kategorien als Zahlen) oder aus einer quadratischen Übereinstimmungstabelle; ROC-Kurve und AUC aus einer Spalte mit Werten und einer Spalte mit dem Zustand 0/1 (1 = Störung) über die Mann-Whitney-Statistik U, mit dem Trennwert nach dem Youden-Index und einem Diagramm der ROC-Kurve. Zu Alpha, ICC, Kappa und AUC gehört ein Konfidenzintervall (90, 95 oder 99 % per Chip): Alpha nach Feldt, ICC aus der F-Verteilung, Kappa aus dem asymptotischen Standardfehler, AUC nach Hanley und McNeil. Bei geordneten Kategorien wird Kappa auch mit linearen oder quadratischen Gewichten berechnet. Die ROC-Kurve entsteht auch aus zwei Spalten mit den Werten zweier Gruppen (die erste positiv, beliebig lang), zur AUC kommt der Mann-Whitney-Test. Drei Spalten – die Werte zweier Tests und der Zustand – werden mit dem DeLong-Test verglichen, beide Kurven in einem Diagramm.

Der Lösungsweg endet mit einem Interpretationshinweis: Prozentränge sind ordinal (nicht addieren oder mitteln), die Umrechnung in einen Prozentrang gilt nur bei normalverteiltem Testwert, eine signifikante Differenz ist nicht unbedingt ungewöhnlich (Basisrate der Diskrepanz), die prädiktiven Werte hängen von der Prävalenz ab. Der Graph zeigt die Normalverteilung mit markiertem Wert, Intervall oder kritischem Bereich.

Beispiele

IQ 85 in allen Skalen: z = −1, T = 40, Wertpunkte 7.

Eingabe: `model(scores; find=all[one]; X=85[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Ergebnis

$$z = -1$$
$$T = 40$$
$$IQ = 85$$
$$SS = 7$$
$$\text{sten} = 4$$
$$\text{stanin} = 3$$
$$PR \approx 16$$

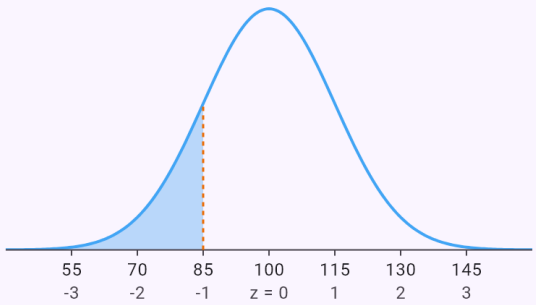
Lösungsweg

- Gegeben: $X = 85, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Standardwerte geben an, wie weit eine Leistung vom Mittelwert der Norm entfernt ist, in Standardabweichungen. Zuerst z = (X − M)/SD, dann die andere Skala: T = 50 + 10z, IQ = 100 + 15z, Wertpunkte = 10 + 3z, Sten = 5,5 + 2z (1–10), Stanine = 5 + 2z (1–9). Der Prozentrang gibt an, wie viel Prozent der Population niedriger liegen – nur bei normalverteiltem Testwert. Gleichung des Modells:
  $z = \frac{X - M}{SD}, \quad X' = M' + z \cdot SD'$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Einsetzen: $z = \frac{85 - 100}{15} = -1$
- Einsetzen: $T = 50 + 10z = 50 + 10 \cdot (-1) = 40$
- Einsetzen: $IQ = 100 + 15z = 100 + 15 \cdot (-1) = 85$
- Einsetzen: $SS = 10 + 3z = 10 + 3 \cdot (-1) = 7$
- Einsetzen
  $\text{sten} = 5{,}5 + 2z = 5{,}5 + 2 \cdot (-1) = 3{,}5 \Rightarrow \text{sten} = 4$
- Einsetzen:
  $\text{stanin} = 5 + 2z = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow \text{stanin} = 3$

- Sten und Stanine sind ganze Zahlen – der Wert wird gerundet und auf den Skalenbereich begrenzt (1–10, 1–9).
- Einsetzen: $PR = 100 \cdot \Phi(z) = 100 \cdot \Phi(-1) \approx 15{,}87$
- Die Umrechnung in einen Prozentrang gilt nur für normalverteilte Werte. Bei schiefen Tests (z. B. Zeiten im TMT) liest man den Prozentrang aus der Normtabelle ab.
- Prozentränge sind ordinal – ihre Schritte sind ungleich (in der Mitte liegen der 50. und 60. Prozentrang im Testwert nah, an den Rändern weit auseinander). Man addiert, mittelt und subtrahiert sie daher nicht.

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$PR \approx 16 \quad X = 85$

IQ 130 entspricht dem Prozentrang 98.

Eingabe: `model(percentile; find=PR[one]; X=130[one]; M=100[one]; SD=15[one]; scale=iq)`

Ergebnis

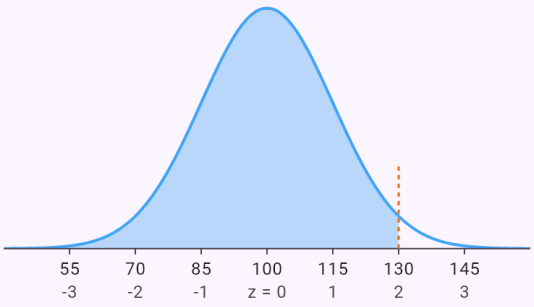
$$PR \approx 98$$

Lösungsweg

- Gesucht PR; gegeben: $X = 130, \quad M = 100, \quad SD = 15$
- Der Prozentrang sagt, wie viel Prozent der Normstichprobe einen niedrigeren Wert erreichten. Unter Normalverteilung folgt er aus dem z-Wert: PR = 100·Φ(z), umgekehrt der Testwert über das Quantil z = Φ⁻¹(PR/100). Gleichung des Modells: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $z = \frac{X - M}{SD}$
- Einsetzen: $z = \frac{130 - 100}{15} = 2$
- Einsetzen: $PR = 100 \cdot \Phi(2) \approx 97{,}72$
- Die Umrechnung in einen Prozentrang gilt nur für normalverteilte Werte. Bei schiefen Tests (z. B. Zeiten im TMT) liest man den Prozentrang aus der Normtabelle ab.
- Prozentränge sind ordinal – ihre Schritte sind ungleich (in der Mitte liegen der 50. und 60. Prozentrang im Testwert nah, an den Rändern weit auseinander). Man addiert, mittelt und subtrahiert sie daher nicht.

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$PR \approx 98 \quad X = 130$

Der T-Wert zum Prozentrang 16.

Eingabe: `model(percentile; find=X[one]; PR=16[pct]; M=50[one]; SD=10[one]; scale=t)`

Ergebnis

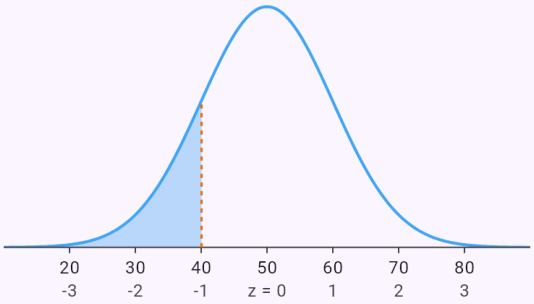
$$X \approx 40{,}1$$

Lösungsweg

- Gesucht X; gegeben: $PR = 16\,\%, \quad M = 50, \quad SD = 10$
- Einheiten umrechnen: $PR = 16\,\% = 0{,}16$
- Der Prozentrang sagt, wie viel Prozent der Normstichprobe einen niedrigeren Wert erreichten. Unter Normalverteilung folgt er aus dem z-Wert: PR = 100·Φ(z), umgekehrt der Testwert über das Quantil z = Φ⁻¹(PR/100). Gleichung des Modells: $PR = 100 \cdot \Phi\left(\frac{X - M}{SD}\right)$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $z = \Phi^{-1}\left(\frac{PR}{100}\right), \quad X = M + z \cdot SD$
- Einsetzen $z = \Phi^{-1}(0{,}16) \approx -0{,}9945, \quad X = 50 + (-0{,}9945) \cdot 10$
- Die Umrechnung in einen Prozentrang gilt nur für normalverteilte Werte. Bei schiefen Tests (z. B. Zeiten im TMT) liest man den Prozentrang aus der Normtabelle ab.
- Prozentränge sind ordinal – ihre Schritte sind ungleich (in der Mitte liegen der 50. und 60. Prozentrang im Testwert nah, an den Rändern weit auseinander). Man addiert, mittelt und subtrahiert sie daher nicht.

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$PR = 16 \quad X \approx 40{,}1$

Der Standardmessfehler eines Tests mit der Reliabilität 0,97.

Eingabe: `model(sem; find=SEM[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq)`

Ergebnis

$$SEM \approx 2{,}6$$

Lösungsweg

- Gesucht SEM; gegeben: $SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}97$
- Keine Messung ist exakt: beobachteter Wert X = wahrer Wert T + Fehler E. Der Standardmessfehler SEM = SD·√(1 − r) gibt an, wie stark der beobachtete Wert typischerweise vom wahren abweicht; r ist die Reliabilität (Retest, Cronbachs α). Je höher die Reliabilität, desto kleiner der Fehler. Gleichung des Modells: $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Standardmessfehler: $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$

Das 95-%-Konfidenzintervall um IQ 95.

Eingabe: `model(interval; find=CI[one]; X=95[one]; SD=15[one]; r=0.97[one]; scale=iq;`

`level=95)`

Ergebnis

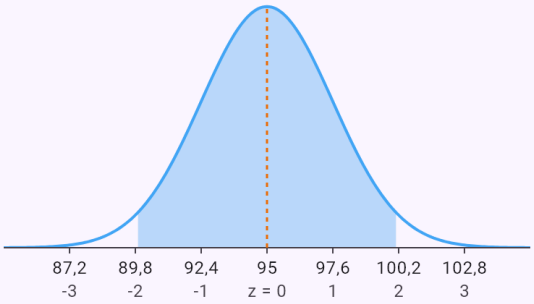
$95\,\%:\ [89{,}9;\ 100{,}1]$

Lösungsweg

- Gesucht X; gegeben:
  $X = 95,\quad SD = 15,\quad r_{xx} = 0{,}97$
- Um den beobachteten Wert legen wir den Bereich, in dem der wahre Wert mit gegebener Sicherheit liegt: X ± z·SEM mit z = 1,28 (80 %), 1,645 (90 %), 1,96 (95 %) oder 2,576 (99 %). Ein Testwert ist als Intervall zu lesen, nicht als genaue Zahl. Gleichung des Modells
  $X \pm z_{1-\alpha/2} \cdot SEM$
  $SEM = SD\sqrt{1 - r_{xx}}$
- Standardmessfehler: $SEM = 15\sqrt{1 - 0{,}97} \approx 2{,}598$
- Kritischer Wert der Standardnormalverteilung:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Einsetzen:
  $95 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}6 = 95 \pm 5{,}09 \Rightarrow [89{,}91;\ 100{,}1]$
- Das Intervall liegt um den beobachteten Wert. Genauer (vor allem bei extremen Werten) ist das Intervall um den geschätzten wahren Wert – Modell „Schätzung des wahren Werts“.

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$95\,\%:\ [89{,}9;\ 100{,}1] \quad X = 95$

Die Schätzung des wahren Werts von IQ 74 bei der Reliabilität 0,92.

Eingabe: `model(truescore; find=T[one]; X=74[one]; M=100[one]; SD=15[one]; r=0.92[one];`

`scale=iq; level=95)`

Ergebnis

$$T' \approx 76{,}1$$

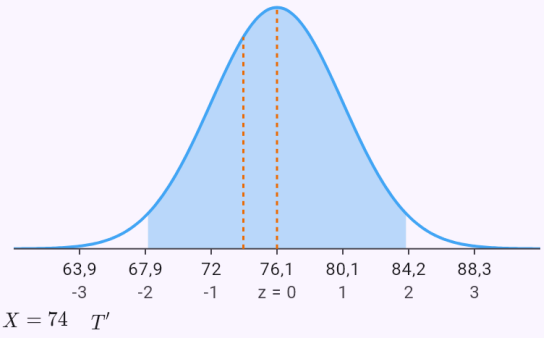
$$95\,\%:\ [68{,}1;\ 84{,}1]$$

Lösungsweg

- Gesucht T'; gegeben:
  $X = 74, \quad M = 100, \quad SD = 15, \quad r_{xx} = 0{,}92$
- Bei extremen Werten wird der wahre Wert näher am Mittelwert geschätzt (Regression zur Mitte): T' = M + r(X − M). Das Konfidenzintervall liegt dann um T' mit dem Standardschätzfehler SEE = SD·√(r(1 − r)) – genauer als um den beobachteten Wert, besonders bei niedriger Reliabilität. Gleichung des Modells
  $T' = M + r_{xx}(X - M)$
  $SEE = SD\sqrt{r_{xx}(1 - r_{xx})}$
- Einsetzen: $T' = 100 + 0{,}92 \cdot (74 - 100) = 76{,}08$
- Der geschätzte wahre Wert liegt näher am Mittelwert als der beobachtete – bei erneuter Messung fiele ein extremes Ergebnis wahrscheinlich weniger extrem aus.
- Standardschätzfehler des wahren Werts:
  $SEE = 15\sqrt{0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92)} \approx 4{,}069$
- Kritischer Wert der Standardnormalverteilung:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Einsetzen
  $T' \pm z \cdot SEE = 76{,}08 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}07 \Rightarrow [68{,}1;\ 84{,}06]$

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



Zwei Indizes 112 und 97 – ist die Differenz signifikant?

Eingabe: `model(difference; find=D[one]; X1=112[one]; X2=97[one]; SD=15[one]; r1=0.95[one];`

`r2=0.90[one]; scale=iq; level=95)`

Ergebnis

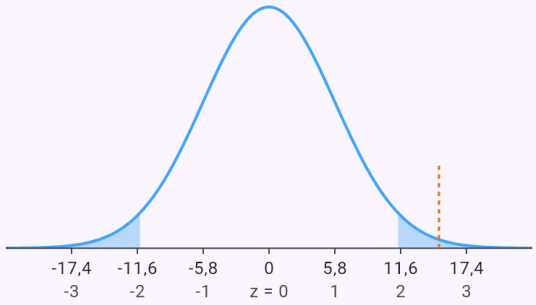
$$D = 15 \geq D_{crit} \approx 11{,}4$$

Lösungsweg

- Gesucht D; gegeben:
  $X_1 = 112, \quad X_2 = 97, \quad SD = 15, \quad r_{11} = 0{,}95, \quad r_{22} = 0{,}9$
- Unterscheiden sich zwei Werte (etwa WAIS-Indizes) stärker, als der Messfehler erklären würde? Standardfehler der Differenz SE_diff = SD·√(2 − r_{11} − r_{22}), kritische Differenz z·SE_diff. Eine Differenz, die sie erreicht, ist signifikant – das heißt aber nicht, dass sie ungewöhnlich ist. Gleichung des Modells
  $SE_{diff} = SD\sqrt{2 - r_{11} - r_{22}}$
  $D_{crit} = z_{1-\alpha/2} \cdot SE_{diff}$
- Standardfehler der Differenz:
  $SE_{diff} = 15\sqrt{2 - 0{,}95 - 0{,}9} \approx 5{,}809$
- Kritischer Wert der Standardnormalverteilung:
  $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad (95\,\%)$
- Kritische Differenz: $D_{crit} = 1{,}96 \cdot 5{,}81 \approx 11{,}39$
- Einsetzen: $D = |X_1 - X_2| = |112 - 97| = 15 \geq 11{,}4$
- Die Differenz erreicht den kritischen Wert – sie ist signifikant (nicht allein durch den Messfehler erklärbar).
- Signifikant heißt nicht ungewöhnlich: Indexdifferenzen dieser Größe zeigen oft 20–30 % der Normstichprobe (Basisrate der Diskrepanz). Für die Interpretation zählt auch ihre Häufigkeit in der Norm.

Graph

Dichte der Normalverteilung, die gefärbte Fläche ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$95\,\%$ $D = 15$

Ein Screening mit Sensitivität 92,5 % und Spezifität 74,6 % bei einer Prävalenz von 2 %.

Eingabe: `model(predictive; find=values[one]; sens=92.5[pct]; spec=74.6[pct]; p=2[pct];`

`input=rates)`

Ergebnis

$$PPV \approx 0{,}0692 = 6{,}92\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}998 = 99{,}8\,\%$$

Lösungsweg

- Gesucht PPV; gegeben:
  $Se = 92{,}5\,\%, \quad Sp = 74{,}6\,\%, \quad p = 2\,\%$
- Einheiten umrechnen:
  $Se = 92{,}5\,\% = 0{,}925, \quad Sp = 74{,}6\,\% = 0{,}746, \quad p = 2\,\% = 0{,}02$
- Die Sensitivität (Se) ist der Anteil der Kranken, die der Test erkennt, die Spezifität (Sp) der Anteil der Gesunden, die er richtig ausschließt. Für die Praxis zählt die Wahrscheinlichkeit der Störung bei positivem Ergebnis – der positive prädiktive Wert PPV. Nach dem Satz von Bayes hängt er von der Prävalenz p ab: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), der negative NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Gleichung des Modells
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Einsetzen
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}02}{0{,}925 \cdot 0{,}02 + 0{,}254 \cdot 0{,}98} = \frac{0{,}0185}{0{,}2674} \approx 0{,}0691$$
- Einsetzen
  $$NPV = \frac{0{,}746 \cdot 0{,}98}{0{,}746 \cdot 0{,}98 + 0{,}075 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}7311}{0{,}7326} \approx 0{,}998$$
- Likelihood-Quotienten:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} \approx 3{,}642, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} \approx 0{,}1005$$
- Die prädiktiven Werte hängen von der Prävalenz ab: bei niedriger Prävalenz sind selbst bei einem guten Test die meisten positiven Ergebnisse falsch positiv. Ein positives Screening muss bestätigt werden.

Prädiktive Werte aus einer Vierfeldertafel.

Eingabe: `model(predictive; find=values[one]; TP=37[one]; FP=10[one]; FN=3[one]; TN=50[one]; input=table)`

Ergebnis

$$PPV \approx 0{,}787 = 78{,}7\,\%$$
$$NPV \approx 0{,}943 = 94{,}3\,\%$$

Lösungsweg

- Gesucht PPV; gegeben:
  $TP = 37, \quad FP = 10, \quad FN = 3, \quad TN = 50$
- Sensitivität: $Se = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{37}{40} = 0{,}925$
- Spezifität: $Sp = \frac{TN}{TN + FP} = \frac{50}{60} \approx 0{,}8333$
- Prävalenz in der Stichprobe:
  $$p = \frac{TP + FN}{N} = \frac{40}{100} = 0{,}4$$
- Die Sensitivität (Se) ist der Anteil der Kranken, die der Test erkennt, die Spezifität (Sp) der Anteil der Gesunden, die er richtig ausschließt. Für die Praxis zählt die Wahrscheinlichkeit der Störung bei positivem Ergebnis – der positive prädiktive Wert PPV. Nach dem Satz von Bayes hängt er von der Prävalenz p ab: PPV = Se·p / (Se·p + (1 − Sp)(1 − p)), der negative NPV = Sp(1 − p) / (Sp(1 − p) + (1 − Se)p). Gleichung des Modells
  $$PPV = \frac{Se \cdot p}{Se \cdot p + (1 - Sp)(1 - p)}$$
  $$NPV = \frac{Sp(1 - p)}{Sp(1 - p) + (1 - Se)p}$$
- Einsetzen
  $$PPV = \frac{0{,}925 \cdot 0{,}4}{0{,}925 \cdot 0{,}4 + 0{,}1667 \cdot 0{,}6} = \frac{0{,}37}{0{,}47} \approx 0{,}7872$$
- Einsetzen
  $$NPV = \frac{0{,}8333 \cdot 0{,}6}{0{,}8333 \cdot 0{,}6 + 0{,}075 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}5}{0{,}53} \approx 0{,}9434$$
- Likelihood-Quotienten:
  $$LR^{+} = \frac{Se}{1 - Sp} = 5{,}55, \quad LR^{-} = \frac{1 - Se}{Sp} = 0{,}09$$
- Die prädiktiven Werte hängen von der Prävalenz ab: bei niedriger Prävalenz sind selbst bei einem guten Test die meisten positiven Ergebnisse falsch positiv. Ein positives Screening muss bestätigt werden.

Interne Konsistenz eines Fragebogens mit vier Items.

Eingabe: `data(P1 P2 P3 P4; 3 4 3 5; 2 2 3 2; 4 5 4 4; 5 4 5 5; 1 2 2 1; 3 3 4 3)`

Cronbachs Alpha

Ergebnis

$$\alpha \approx 0{,}9343$$

$$95\,\%:\ [0{,}765;\ 0{,}990]$$

Lösungsweg

- Anzahl der Items (Spalten) k = 4, Anzahl der Befragten (Zeilen) 6
- Die Stichprobenvarianzen der Items und ihre Summe

$$s^2_{\mathrm{P1}} = 2,\ s^2_{\mathrm{P2}} \approx 1{,}467,\ s^2_{\mathrm{P3}} = 1{,}1,\ s^2_{\mathrm{P4}} \approx 2{,}667$$

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 2 + 1{,}467 + 1{,}1 + 2{,}667 = 7{,}233$$

- Der Gesamtwert jeder befragten Person (Summe ihrer Antworten): $15,\ 9,\ 17,\ 19,\ 6,\ 13$. Die Varianz der Gesamtwerte: $s_X^2 \approx 24{,}17$
- Cronbachs Alpha – die interne Konsistenz ist exzellent.

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_X^2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7{,}233}{24{,}17}\right) \approx 0{,}9343$$

- Itemanalyse – Mittelwert, Varianz, Korrelation des Items mit dem Rest des Tests und Alpha ohne das Item

	$\bar{x}_i$	s_i^2	r_{it}	α_{-i}
P1	3	2	0,957	0,875
P2	3,333	1,467	0,825	0,922
P3	3,5	1,1	0,804	0,934
P4	3,333	2,667	0,869	0,918

- Das 95-%-Konfidenzintervall nach Feldt – der Quotient (1 − α)/(1 − α̂) ist F-verteilt mit n − 1 und (n − 1)(k − 1) Freiheitsgraden

$$F_{0{,}975}(5;\ 15) = 3{,}576$$

$$F_{0{,}025}(5;\ 15) = 0{,}1556$$

$$\alpha_L = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}975} = 1 - 0{,}06575 \cdot 3{,}576$$

$$\alpha_U = 1 - (1-\alpha)F_{0{,}025} = 1 - 0{,}06575 \cdot 0{,}155$$

- Grobe Einordnung von α: ≥ 0,9 exzellente, ≥ 0,8 gute, ≥ 0,7 akzeptable interne Konsistenz. Für die Forschung genügt etwa 0,7, für Entscheidungen über Einzelpersonen (Diagnostik) werden mindestens 0,9 empfohlen.
- Ein hohes α bedeutet nicht, dass der Test ein einziges Merkmal misst, und es steigt schon mit der Anzahl der Items. Steigt α beim Weglassen eines Items (letzte Spalte der Tabelle), gehört das Item vermutlich nicht zur Skala.

Übereinstimmung von vier Beurteilern bei sechs Personen (Beispiel von Shrout und Fleiss).

Eingabe: `data(H1 H2 H3 H4; 9 2 5 8; 6 1 3 2; 8 4 6 8; 7 1 2 6; 10 5 6 9; 6 2 4 7)`

ICC (Beurteilerübereinstimmung)

Ergebnis

$$ICC(1,1) \approx 0{,}1657 \quad [-0{,}133;\ 0{,}723]$$
$$ICC(1,4) \approx 0{,}4428 \quad [-0{,}884;\ 0{,}912]$$
$$ICC(2,1) \approx 0{,}2898 \quad [0{,}019;\ 0{,}761]$$
$$ICC(2,4) \approx 0{,}6201 \quad [0{,}071;\ 0{,}927]$$
$$ICC(3,1) \approx 0{,}7148 \quad [0{,}342;\ 0{,}946]$$
$$ICC(3,4) \approx 0{,}9093 \quad [0{,}676;\ 0{,}986]$$

Lösungsweg

- Anzahl der beurteilten Personen (Zeilen) 6, Anzahl der Beurteiler (Spalten) k = 4, Gesamtmittelwert $\bar{x} = 5{,}292$
- Varianzanalyse – Quadratsummen SS, Freiheitsgrade df und mittlere Quadrate MS zwischen den Personen (R), zwischen den Beurteilern (C), Residuum (E) und innerhalb der Personen (W)

	SS	df	MS
R	56,21	5	11,24
C	97,46	3	32,49
E	15,29	15	1,019
W	112,7	18	6,264
$\sum$	169	23	

- Einfaktorielles Modell – jede Person kann von anderen Beurteilern eingeschätzt werden

$$ICC(1,1) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R + (k-1)MS_W} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24 + 3 \cdot 6{,}264} \approx 0{,}1657$$
$$ICC(1,4) = \frac{MS_R - MS_W}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 6{,}264}{11{,}24} \approx 0{,}4428$$

- Zweifaktorielles Modell mit zufälligen Beurteilern – absolute Übereinstimmung

$$ICC(2,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E + \frac{k}{n}(MS_C - MS_E)} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019 + \frac{4}{6}(32{,}49 - 1{,}019)} \approx 0$$
$$ICC(2,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + \frac{MS_C - MS_E}{n}} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + \frac{32{,}49 - 1{,}019}{6}} \approx 0{,}6201$$

- Zweifaktorielles Modell mit festen Beurteilern – Konsistenz

$$ICC(3,1) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R + (k-1)MS_E} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24 + 3 \cdot 1{,}019} \approx 0{,}7148$$
$$ICC(3,4) = \frac{MS_R - MS_E}{MS_R} = \frac{11{,}24 - 1{,}019}{11{,}24} \approx 0{,}9093$$

- Die 95-%-Konfidenzintervalle aus der F-Verteilung (Shrout und Fleiss) – die Quotienten der mittleren Quadrate und ihre Grenzen

$$F_W = \frac{MS_R}{MS_W} = 1{,}795$$
$$F_E = \frac{MS_R}{MS_E} = 11{,}03$$
$$F_{W,L} = \frac{F_W}{F_{0{,}975}(5;\ 18)} = 0{,}5307$$
$$F_{W,U} = F_W \cdot F_{0{,}975}(18;\ 5) = 11{,}42$$
$$F_{E,L} = \frac{F_E}{F_{0{,}975}(5;\ 15)} = 3{,}083$$
$$F_{E,U} = F_E \cdot F_{0{,}975}(15;\ 5) = 70{,}88$$
$$ICC(\cdot,1)_L = \frac{F_L - 1}{F_L + k - 1}$$
$$ICC(\cdot,k)_L = 1 - \frac{1}{F_L}$$

- Alle sechs ICC mit ihren 95-%-Konfidenzintervallen

	ICC	95 %
$ICC(1,1)$	0,166	$[-0{,}133;\ 0{,}723]$
$ICC(1,4)$	0,443	$[-0{,}884;\ 0{,}912]$
$ICC(2,1)$	0,290	$[0{,}019;\ 0{,}761]$
$ICC(2,4)$	0,620	$[0{,}071;\ 0{,}927]$
$ICC(3,1)$	0,715	$[0{,}342;\ 0{,}946]$
$ICC(3,4)$	0,909	$[0{,}676;\ 0{,}986]$

- Welche ICC: ICC(1,·) – jede Person wird von anderen Beurteilern eingeschätzt; ICC(2,·) – die Beurteiler sind eine Zufallsauswahl, es geht um absolute Übereinstimmung; ICC(3,·) – feste Beurteiler, es geht um Konsistenz. ICC(·,1) gilt für einen Beurteiler, ICC(·,k) für den Mittelwert von k Beurteilern. Grobe Einordnung (Koo und Li): unter 0,5 schwach, 0,5–0,75 mäßig, 0,75–0,9 gut, über 0,9 exzellent.
- ICC(3,k) ist gleich Cronbachs Alpha derselben Daten (die Beurteiler als Items).
- Das Konfidenzintervall eines ICC ist bei wenigen Personen oft breit – auch ein hoher ICC kann eine niedrige Untergrenze haben. Die Intervalle der ICC(2,·) sind Näherungen (Satterthwaite-Freiheitsgrade).
- Achtung: wenige Daten, die Schätzungen (vor allem Varianz und Quartile) sind unsicher.

Übereinstimmung zweier Ärzte in drei diagnostischen Kategorien.

Eingabe: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Cohens Kappa

Ergebnis

$\kappa \approx 0{,}6211$

$95\,\%:\ [0{,}256;\ 0{,}986]$

$p_o = 0{,}75$

$p_e \approx 0{,}3403$

Lösungsweg

- Aus den Urteilspaaren entsteht die Übereinstimmungstabelle (Zeilen Beurteiler A, Spalten Beurteiler B, Übereinstimmung auf der Diagonale)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Die beobachtete Übereinstimmung – der Anteil der Fälle auf der Diagonale:
  $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$
- Die zufällig erwartete Übereinstimmung – aus den Zeilen- und Spaltensummen
  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 3}{12^2} = \frac{49}{144} \approx 0{,}3403$
- Cohens Kappa – die Übereinstimmung ist beachtlich (Landis und Koch).
  $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}75 - 0{,}3403}{1 - 0{,}3403} \approx 0{,}6211$
- Das 95-%-Konfidenzintervall aus dem asymptotischen Standardfehler (Fleiss, Cohen und Everitt)
  $SE \approx 0{,}1861$
  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}6211 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1861 \Rightarrow [0{,}256;\ 0{,}986]$
- κ bereinigt die Übereinstimmung um die zufällig erwartete: 0 bedeutet rein zufällige, 1 vollständige Übereinstimmung. Überwiegt eine Kategorie, fällt κ auch bei hoher prozentualer Übereinstimmung niedrig aus – deshalb wird auch p_o angegeben.
- Die Kategorien gelten als nominal – jede Abweichung wiegt gleich. Bei geordneten Kategorien (z. B. Schweregrad) verwendet man das gewichtete κ, das kleinere Abweichungen weniger bestraft.

Dieselben Diagnosen mit quadratischen Gewichten – benachbarte Kategorien zählen als teilweise Übereinstimmung.

Eingabe: `data(A B; 1 1; 1 1; 2 2; 1 2; 2 2; 3 3; 1 1; 2 3; 3 3; 2 2; 1 1; 3 2)`

Cohens Kappa, Quadratische Gewichte

Ergebnis

$$\kappa_w \approx 0{,}7955$$

$$95\,\%: \ [0{,}576;\ 1{,}000]$$

$$p_o = 0{,}9375$$

$$p_e \approx 0{,}6944$$

Lösungsweg

- Aus den Urteilspaaren entsteht die Übereinstimmungstabelle (Zeilen Beurteiler A, Spalten Beurteiler B, Übereinstimmung auf der Diagonale)

$A\backslash B$	1	2	3	$\sum$
1	**4**	1	0	5
2	0	**3**	1	4
3	0	1	**2**	3
$\sum$	4	5	3	12

- Quadratische Übereinstimmungsgewichte – eine kleine Abweichung kostet wenig, eine große viel:

$$w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2}$$

	1	2	3
1	1	0,75	0
2	0,75	1	0,75
3	0	0,75	1

- Die gewichtete beobachtete Übereinstimmung – die Häufigkeiten der Tabelle mal die Gewichte:

$$p_o = \frac{\sum w_{ij} n_{ij}}{N} = \frac{11{,}25}{12} = 0{,}9375$$

- Die gewichtete zufällig erwartete Übereinstimmung – aus den Zeilen- und Spaltensummen mit den Gewichten:

$$p_e = \frac{\sum w_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{N^2} = \frac{100}{144} \approx 0{,}6944$$

- Das gewichtete Cohens Kappa – die Übereinstimmung ist beachtlich (Landis und Koch).

$$\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}9375 - 0{,}6944}{1 - 0{,}6944} \approx 0{,}7955$$

- Das 95-%-Konfidenzintervall aus dem asymptotischen Standardfehler (Fleiss, Cohen und Everitt)

$$SE \approx 0{,}1119$$

$$\kappa_w \pm z \cdot SE = 0{,}7955 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1119 \Rightarrow [0{,}576;\ 1{,}000]$$

- κ bereinigt die Übereinstimmung um die zufällig erwartete: 0 bedeutet rein zufällige, 1 vollständige Übereinstimmung. Überwiegt eine Kategorie, fällt κ auch bei hoher prozentualer Übereinstimmung niedrig aus – deshalb wird auch p_o angegeben.
- Das gewichtete Kappa zählt auch teilweise Übereinstimmung: Urteile eine Stufe auseinander gelten nicht als völlige Abweichung. Mit quadratischen Gewichten kommt das gewichtete Kappa dem ICC nahe; die Wahl der Gewichte sollte man angeben.

Cohens Kappa aus einer 2×2-Übereinstimmungstabelle.

Eingabe: `data(20 5; 10 15)` Cohens Kappa

Ergebnis

$$\kappa = 0{,}4$$
$$95\,\%:\ [0{,}151;\ 0{,}649]$$
$$p_o = 0{,}7$$
$$p_e = 0{,}5$$

Lösungsweg

- Die Übereinstimmungstabelle (Zeilen Beurteiler A, Spalten Beurteiler B, Übereinstimmung auf der Diagonale) mit Zeilen- und Spaltensummen

$A\backslash B$	1	2	$\sum$
1	**20**	5	25
2	10	**15**	25
$\sum$	30	20	50

- Die beobachtete Übereinstimmung – der Anteil der Fälle auf der Diagonale: $p_o = \frac{\sum n_{ii}}{N} = \frac{20+15}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7$
- Die zufällig erwartete Übereinstimmung – aus den Zeilen- und Spaltensummen
  $p_e = \frac{\sum n_{i\cdot} n_{\cdot i}}{N^2} = \frac{25 \cdot 30 + 25 \cdot 20}{50^2} = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$

- Cohens Kappa: $\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 0{,}4$ – die Übereinstimmung ist mäßig (Landis und Koch).
- Das 95-%-Konfidenzintervall aus dem asymptotischen Standardfehler (Fleiss, Cohen und Everitt)
  $SE \approx 0{,}127$
  $\kappa \pm z \cdot SE = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}127 \Rightarrow [0{,}151;\ 0{,}649]$
- κ bereinigt die Übereinstimmung um die zufällig erwartete: 0 bedeutet rein zufällige, 1 vollständige Übereinstimmung. Überwiegt eine Kategorie, fällt κ auch bei hoher prozentualer Übereinstimmung niedrig aus – deshalb wird auch p_o angegeben.

Wie gut der Testwert Patienten (Zustand 1) von Gesunden (Zustand 0) trennt.

Eingabe: `data(12 0; 15 1; 9 0; 20 1; 18 1; 11 0; 7 0; 14 1; 16 0; 10 0)` ROC-Kurve und AUC

Ergebnis

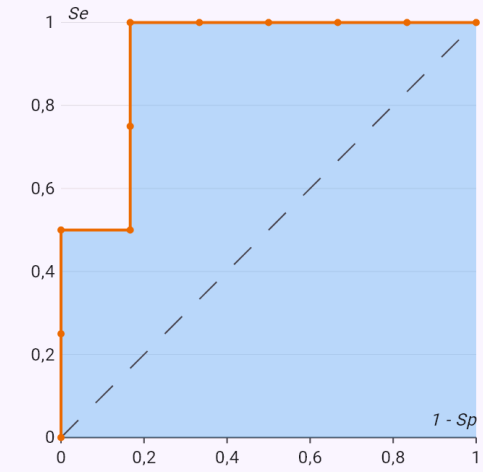
$$AUC \approx 0{,}9167$$
$$95\,\%:\ [0{,}706;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}132,\ p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8333$$

Lösungsweg

- Positive Fälle (Zustand 1) und negative (Zustand 0): $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Alle Werte werden sortiert und mit Rängen versehen. Die Rangsumme der positiven Fälle: $R_1 = 6 + 7 + 9 + 10 = 32$
- Die Mann-Whitney-Statistik U – die Anzahl der Paare (positiv, negativ), in denen der positive Fall den höheren Wert hat: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 32 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 22$
- Die Fläche unter der ROC-Kurve: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{22}{4 \cdot 6} \approx 0{,}9167$ – die Trennschärfe des Tests ist hervorragend.
- Das 95-%-Konfidenzintervall nach Hanley und McNeil
  $$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8462$$
  $$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}8768$$
  $$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
  $$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9167 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1074 \Rightarrow [0{,}706;\ 1{,}0$$
- Nullhypothese: Der Test trennt nicht (AUC = 0,5), Alternative: er trennt – der Mann-Whitney-Test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- Die Teststatistik – unter H_0 standardnormalverteilt: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{22 - 12}{4{,}69} \approx 2{,}132$
- Der kritische Wert zum Niveau α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, der kritische Bereich $|z| \ge 1{,}96$
- Der p-Wert: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}132) \approx 0{,}03301$
- Da $p \approx 0{,}03301 \le \alpha = 0{,}05$, lehnen wir die Nullhypothese ab – das Ergebnis ist statistisch signifikant.
- Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit eines mindestens so extremen Ergebnisses wie des beobachteten, falls H_0 gilt – nicht die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 gilt. H_0 nicht abzulehnen heißt nicht, dass H_0 wahr ist; statistische Signifikanz sagt nichts über Größe oder praktische Bedeutung eines Unterschieds.
- Der Trennwert mit dem größten Youden-Index ist 14 (positiv ist ein Wert ≥ 14)
  $Se = 1$
  $Sp \approx 0{,}8333$
  $J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8333$
- Die AUC ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter positiver Fall einen höheren Wert hat als ein zufällig gewählter negativer (0,5 – der Test trennt nicht, 1 – er trennt perfekt). Der Trennwert nach dem Youden-Index ist nur eine Möglichkeit – in der Praxis zählen auch die Kosten falsch positiver und falsch negativer Ergebnisse.
- Achtung: wenige Daten, die Schätzungen (vor allem Varianz und Quartile) sind unsicher.

Graph

ROC-Kurve – die schattierte Fläche ist die AUC, die gestrichelte Diagonale ein Test, der nicht trennt



Werte von Patienten und Gesunden in zwei unterschiedlich großen Gruppen, mit dem Mann-Whitney-

Test.

Eingabe: `data(pacienti = 15 20 18 14 17; zdravi = 12 9 11 7 16 10 13)` ROC-Kurve und AUC

Ergebnis

$$AUC \approx 0{,}9429$$
$$95\,\%:\ [0{,}787;\ 1{,}000]$$
$$z \approx 2{,}517,\ p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$$
$$c = 14:\ Se = 1,\ Sp \approx 0{,}8571$$

Lösungsweg

- Die positive Gruppe pacienti und die negative Gruppe zdravi: $n_1 = 5, \quad n_0 = 7$
- Alle Werte werden sortiert und mit Rängen versehen. Die Rangsumme der positiven Fälle: $R_1 = 7 + 8 + 10 + 11 + 12 = 48$
- Die Mann-Whitney-Statistik U – die Anzahl der Paare (positiv, negativ), in denen der positive Fall den höheren Wert hat: $U = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 48 - \frac{5 \cdot 6}{2} = 33$
- Die Fläche unter der ROC-Kurve: $AUC = \frac{U}{n_1 n_0} = \frac{33}{5 \cdot 7} \approx 0{,}9429$ – die Trennschärfe des Tests ist hervorragend.
- Das 95-%-Konfidenzintervall nach Hanley und McNeil

$$Q_1 = \frac{AUC}{2 - AUC} = 0{,}8919$$
$$Q_2 = \frac{2\,AUC^2}{1 + AUC} = 0{,}9151$$
$$SE = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (n_1 - 1)\left(Q_1 - AUC^2\right)}{n_1 n_0}}$$
$$AUC \pm z \cdot SE = 0{,}9429 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}07971 \Rightarrow [0{,}787;\ 1{,}$$

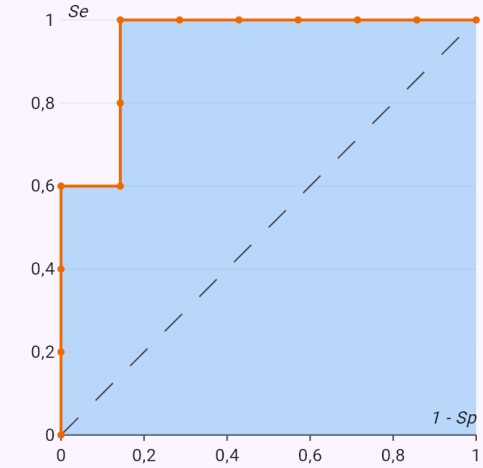
- Nullhypothese: Der Test trennt nicht (AUC = 0,5), Alternative: er trennt – der Mann-Whitney-Test: $H_0: AUC = 0{,}5, \quad H_1: AUC \neq 0{,}5$
- Die Teststatistik – unter H_0 standardnormalverteilt: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_0}{2}}{\sigma_U} = \frac{33 - 17{,}5}{6{,}158} \approx 2{,}517$
- Der kritische Wert zum Niveau α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, der kritische Bereich $|z| \ge 1{,}96$
- Der p-Wert: $p = 2\,P(Z \ge 2{,}517) \approx 0{,}01183$
- Da $p \approx 0{,}01183 \le \alpha = 0{,}05$, lehnen wir die Nullhypothese ab – das Ergebnis ist statistisch signifikant.
- Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit eines mindestens so extremen Ergebnisses wie des beobachteten, falls H_0 gilt – nicht die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 gilt. H_0 nicht abzulehnen heißt nicht, dass H_0 wahr ist; statistische Signifikanz sagt nichts über Größe oder praktische Bedeutung eines Unterschieds.
- Der Trennwert mit dem größten Youden-Index ist 14 (positiv ist ein Wert ≥ 14)

$$Se = 1$$
$$Sp \approx 0{,}8571$$
$$J = Se + Sp - 1 \approx 0{,}8571$$

- Die AUC ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter positiver Fall einen höheren Wert hat als ein zufällig gewählter negativer (0,5 – der Test trennt nicht, 1 – er trennt perfekt). Der Trennwert nach dem Youden-Index ist nur eine Möglichkeit – in der Praxis zählen auch die Kosten falsch positiver und falsch negativer Ergebnisse.
- Achtung: wenige Daten, die Schätzungen (vor allem Varianz und Quartile) sind unsicher.

Graph

ROC-Kurve – die schattierte Fläche ist die AUC, die gestrichelte Diagonale ein Test, der nicht trennt



Zwei Tests an denselben Personen – trennen sie gleich gut? (DeLong-Test)

Eingabe: `data(A B stav; 12 10 0; 15 14 1; 9 11 0; 20 13 1; 18 19 1; 11 9 0; 7 12 0; 14 16`

1; 16 8 0; 10 13 0)

ROC-Kurve und AUC

Ergebnis

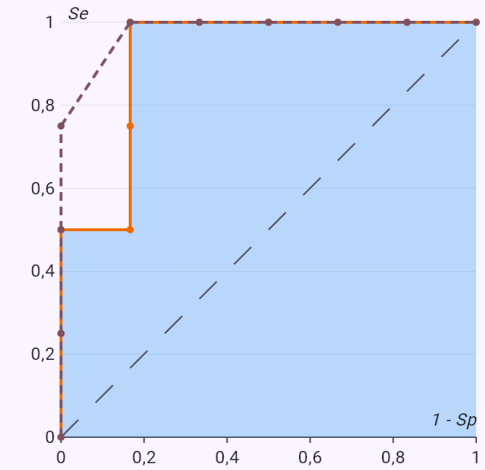
$$AUC_\mathrm{A} \approx 0{,}9167,\ AUC_\mathrm{B} \approx 0{,}9792$$
$$z \approx -0{,}571,\ p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$$
$$95\,\%:\ [-0{,}277;\ 0{,}152]$$

Lösungsweg

- Zwei Tests A und B an denselben Fällen, positiver Zustand 1: $n_1 = 4, \quad n_0 = 6$
- Die Flächen unter den ROC-Kurven beider Tests und ihre Standardfehler (DeLong)
  $AUC_\mathrm{A} \approx 0{,}9167$
  $AUC_\mathrm{B} \approx 0{,}9792$
  $SE_\mathrm{A} \approx 0{,}09623$
  $SE_\mathrm{B} \approx 0{,}02946$
- Die Varianz der Differenz nach DeLong – die Tests betreffen dieselben Fälle, daher wird ihre Kovarianz abgezogen (Korrelation der AUC $-0{,}327$)
  $$\begin{aligned}\operatorname{var}(AUC_\mathrm{A} - AUC_\mathrm{B}) &= \operatorname{var} AUC_\mathrm{A} + \operatorname{var} AUC_\mathrm{B} - 2\,\mathrm{c}\\ &= 0{,}009259 + 8{,}681 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot\end{aligned}$$
  $$SE = \sqrt{0{,}01198} \approx 0{,}1094$$
- Nullhypothese: Beide Tests trennen gleich gut, Alternative: sie unterscheiden sich
  $H_0\colon AUC_\mathrm{A} = AUC_\mathrm{B}$
  $H_1\colon AUC_\mathrm{A} \neq AUC_\mathrm{B}$
- Die Teststatistik – unter H_0 standardnormalverteilt
  $$z = \frac{AUC_\mathrm{A} - AUC_\mathrm{B}}{SE} = \frac{-0{,}0625}{0{,}1094} \approx -0{,}571$$
- Der kritische Wert zum Niveau α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, der kritische Bereich $|z| \geq 1{,}96$
- Der p-Wert: $p = 2\,P(Z \geq 0{,}571) \approx 0{,}568$
- Da $p \approx 0{,}568 > \alpha = 0{,}05$, lehnen wir die Nullhypothese nicht ab – die Daten liefern nicht genug Belege gegen sie.
- Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit eines mindestens so extremen Ergebnisses wie des beobachteten, falls H_0 gilt – nicht die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 gilt. H_0 nicht abzulehnen heißt nicht, dass H_0 wahr ist; statistische Signifikanz sagt nichts über Größe oder praktische Bedeutung eines Unterschieds.
- Das 95-%-Konfidenzintervall der Differenz beider AUC
  $AUC_\mathrm{A} - AUC_\mathrm{B} \pm z \cdot SE = -0{,}0625 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}1094 =$
- Der DeLong-Test vergleicht die AUC zweier Tests an denselben Fällen – er berücksichtigt, dass sie korreliert sind. Ein nicht signifikanter Unterschied heißt nicht, dass die Tests gleich gut sind, nur dass die Daten keinen Unterschied gezeigt haben.
- Achtung: wenige Daten, die Schätzungen (vor allem Varianz und Quartile) sind unsicher.

Graph

ROC-Kurven beider Tests – der erste durchgezogen mit schattierter Fläche, der zweite gestrichelt



Um wie viel ein Test mit 20 Items und Reliabilität 0,7 für 0,9 zu verlängern ist.

Eingabe: `model(spearmanbrown; find=k[one]; r=0.7[one]; rt=0.9[one]; items=20[one])`

Ergebnis

$$k \approx 3{,}86$$

$$n' = 78$$

Lösungsweg

- Gesucht k; gegeben: $r_{xx} = 0{,}7, \quad r'_{xx} = 0{,}9, \quad n = 20$
- Ein längerer Test misst zuverlässiger: Wird er k-mal mit gleich guten (parallelen) Items verlängert, steigt die Reliabilität nach der Spearman-Brown-Formel r' = k·r / (1 + (k − 1)·r). Umgekehrt ergibt sich, um welchen Faktor ein Test zu verlängern ist, um eine Zielreliabilität zu erreichen. Die Formel korrigiert auch die Split-Half-Reliabilität (k = 2). Gleichung des Modells:
  $$k = \frac{r'_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - r'_{xx})}$$
- Einsetzen
  $$k = \frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}7)}{0{,}7 \cdot (1 - 0{,}9)} \approx 3{,}857$$
- Benötigte Anzahl der Items:
  $n' = k \cdot n = 3{,}857 \cdot 20 \approx 77{,}14 \Rightarrow n' = 78$
- Die Formel setzt voraus, dass die neuen Items so gut sind wie die ursprünglichen (parallel). Der tatsächliche Zuwachs ist meist kleiner, und ein längerer Test ermüdet stärker.

Das korrigierte Niveau für 10 Vergleiche.

Eingabe: `model(bonferroni; find=alpha[one]; alpha=0.05[one]; m=10[one])`

Ergebnis

$$\alpha' = 0{,}005$$

Lösungsweg

- Gesucht α'; gegeben: $\alpha = 0{,}05, \quad m = 10$
- Bei m Tests auf dem Niveau α steigt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer nur zufällig signifikant wird: 1 − (1 − α)^m. Die Bonferroni-Korrektur beurteilt deshalb jeden Test auf dem strengeren Niveau α' = α/m. Die Šidák-Korrektur 1 − (1 − α)^(1/m) ist etwas weniger streng. Gleichung des Modells: $\alpha' = \frac{\alpha}{m}$
- Einsetzen: $\alpha' = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005$
- Wahrscheinlichkeit mindestens eines falsch signifikanten Ergebnisses ohne Korrektur: $1 - (1-\alpha)^m = 1 - (1-0{,}05)^{10} \approx 0{,}4013$
- Šidák-Korrektur $\alpha'_S = 1 - (1-\alpha)^{1/m} = 1 - (1-0{,}05)^{1/10} \approx 0{,}005116$
- Die Bonferroni-Korrektur ist konservativ: Sie schützt vor falsch signifikanten Ergebnissen, übersieht bei vielen Vergleichen aber leicht einen echten Unterschied. Weniger streng sind z. B. die Holm-Methode oder die FDR-Kontrolle (Benjamini-Hochberg).

Bekannte Einschränkungen

- Der Prozentrang stammt aus der Normalverteilung – bei schiefen Tests (Zeiten im TMT) gilt nur der Prozentrang aus der Normtabelle.
- Die Konfidenzintervalle sind asymptotisch oder genähert – bei kleinen Stichproben (bis 10–20 Fälle) nur als Orientierung.
- Eine Aufgabe in Worten oder vom Foto (aus dem Skript) geht noch nicht – die Werte kommen ins Formular.

Erzeugt aus der App Mathtrace