Mathtrace – Handbuch

II. Lineare Algebra und Geometrie

Inhalt

II. Lineare Algebra und Geometrie

20. Berechnungen in der Geometrie

21. Matrizen

22. Vektoren

23. Geraden und Ebenen

24. Konstruktionsaufgaben

20. Berechnungen in der Geometrie

Umfänge und Flächeninhalte von Figuren, Volumen und Oberflächen von Körpern berechnet ein Formular wie die übrigen Anwendungen (Anwendungen → Geometrie): Figur und Gesuchtes wählen, Maße mit Einheiten eingeben. Figuren: Quadrat, Rechteck, Dreieck (Seite und Höhe oder drei Seiten – Heronsche Formel), Parallelogramm, Raute, Trapez, regelmäßiges Vieleck, Kreis, Kreisring, Kreisbogen und -ausschnitt, Satz des Pythagoras und ähnliche Dreiecke; Körper: Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, quadratische Pyramide, Kegel und Kugel.

Der Lösungsweg schreibt die Formel, setzt ein und rechnet; wird ein Zwischenwert gebraucht (Mantellinie des Kegels, Seitenhöhe der Pyramide), kommt er zuerst. Es geht auch umgekehrt – Radius aus dem Flächeninhalt, Kante aus dem Volumen, Kathete aus der Hypotenuse. Das Ergebnis exakt mit π und Wurzeln und gerundet (25π cm² ≈ 78,54 cm²). Einheiten werden umgerechnet (cm in dm, dm³ in Liter).

Beispiele

Kreisfläche – exakt mit π und gerundet.

Eingabe: `model(circle; find=S[cm2]; r=5[cm])`

Ergebnis

$$S = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$$

Lösungsweg

- Eine Kreislinie sind die Punkte im Abstand r vom Mittelpunkt, die Kreisfläche mit dem Inneren. Umfang o = 2πr = πd, Flächeninhalt S = πr². Die Zahl π ≈ 3,14159 ist Umfang durch Durchmesser – das Ergebnis exakt (mit π) und gerundet. Formeln
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Gesucht S; gegeben: $r = 5\,\mathrm{cm}$
- Einsetzen: $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 78{,}54\,\mathrm{cm}^2$

Umgekehrt: Radius aus dem Flächeninhalt.

Eingabe: `model(circle; find=r[cm]; S=50[cm2])`

Ergebnis

$$r \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$$

Lösungsweg

- Eine Kreislinie sind die Punkte im Abstand r vom Mittelpunkt, die Kreisfläche mit dem Inneren. Umfang o = 2πr = πd, Flächeninhalt S = πr². Die Zahl π ≈ 3,14159 ist Umfang durch Durchmesser – das Ergebnis exakt (mit π) und gerundet. Formeln
  $o = \pi d$
  $d = 2r$
  $o = 2\pi r$
  $S = \pi r^2$
- Gesucht r; gegeben: $S = 50\,\mathrm{cm}^2$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
- Einsetzen: $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}989\,\mathrm{cm}$

Dreieck aus drei Seiten – Heronsche Formel.

Eingabe: `model(triangle; find=S[cm2]; a=3[cm]; b=4[cm]; c=5[cm]; input=sides)`

Ergebnis

$$S = 6\,\mathrm{cm}^2$$

Lösungsweg

- Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist die halbe Seite mal ihre Höhe: S = a·v_a/2. Aus drei Seiten mit der Heronschen Formel S = √(s(s − a)(s − b)(s − c)), s = (a + b + c)/2 ist der halbe Umfang. Die Seiten müssen die Dreiecksungleichung erfüllen. Formeln
  $o = a + b + c$
  $S = \frac{a v_a}{2}$
  $s = \frac{a + b + c}{2}$
  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- Gesucht S; gegeben: $a = 3\,\mathrm{cm},\ b = 4\,\mathrm{cm},\ c = 5\,\mathrm{cm}$
- Einsetzen: $s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6\,\mathrm{cm}$
- Einsetzen: $S = \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = 6\,\mathrm{cm}^2$

Kathete aus der Hypotenuse.

Eingabe: `model(pythagoras; find=b[cm]; a=5[cm]; c=13[cm])`

Ergebnis

$$b = 12\,\mathrm{cm}$$

Lösungsweg

- Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten: c² = a² + b². Die Hypotenuse c liegt dem rechten Winkel gegenüber und ist am längsten; eine Kathete ist b = √(c² − a²). Formeln
  $c^2 = a^2 + b^2$
- Gesucht b; gegeben: $a = 5\,\mathrm{cm},\ c = 13\,\mathrm{cm}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- Einsetzen: $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

Kegeloberfläche – zuerst die Mantellinie.

Eingabe: `model(cone; find=S[cm2]; r=3[cm]; v=4[cm])`

Ergebnis

$$S = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$$

Lösungsweg

- Ein Kegel hat eine Kreisgrundfläche mit Radius r und die Höhe v. Volumen ein Drittel des Zylinders: V = πr²v/3. Die Mantellinie s ist Hypotenuse mit den Katheten r und v; der Mantel ist ein Kreisausschnitt S_{pl} = πrs, Oberfläche S = πr² + πrs. Formeln
  $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$
  $s^2 = r^2 + v^2$
  $S_{pl} = \pi r s$
  $S = \pi r^2 + S_{pl}$
- Gesucht S; gegeben: $r = 3\,\mathrm{cm},\ v = 4\,\mathrm{cm}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- Einsetzen: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{cm}$
- Einsetzen: $S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 47{,}12\,\mathrm{cm}^2$
- Einsetzen: $S = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 24\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 75{,}4\,\mathrm{cm}^2$

Würfelvolumen in Litern.

Eingabe: `model(cube; find=V[l]; a=10[cm])`

Ergebnis

$$V = 1\,\mathrm{l}$$

Lösungsweg

- Ein Würfel hat sechs gleiche Quadratflächen mit der Kante a. Volumen V = a³, Oberfläche S = 6a², Raumdiagonale u = a√3. Die Kante aus dem Volumen ist die dritte Wurzel: a = ∛V. Formeln
  $V = a^3$
  $S = 6a^2$
  $u = \sqrt{3}a$
- Gesucht V; gegeben: $a = 10\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen: $a = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm}$
- Einsetzen: $V = 1^3 = 1\,\mathrm{dm}^3$
- Einheiten umrechnen: $V = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$

Bekannte Einschränkungen

- Eine Skizze der Figur mit ihren Maßen fehlt noch.

21. Matrizen

Eine Matrix wird wie in Matlab in eckige Klammern geschrieben: Einträge durch Leerzeichen getrennt, Zeilen durch ein Semikolon oder eine neue Zeile. Ein Eintrag kann ein Bruch, eine Wurzel oder ein Buchstabe sein. Die Taste mit dem Gitter auf dem Reiter f(x) öffnet eine Tabelle zum Ausfüllen – oder zum Einfügen aus der Zwischenablage (aus Excel oder Google Tabellen kopierte Zellen) bzw. zum Laden aus einer CSV-Datei.

Bei einer einzelnen Matrix wählt ein Chip, was berechnet wird: die Determinante (2×2 mit der Formel, 3×3 mit der Regel von Sarrus, sonst durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte oder durch Umformung auf Dreiecksform – auch die Methode ist ein Chip), die Inverse (2×2 mit der Formel, sonst mit dem Gauß-Jordan-Verfahren mit der Einheitsmatrix daneben), den Rang (Umformung auf Zeilenstufenform) oder die transponierte Matrix.

Mehrere Matrizen mit Großbuchstaben benennen, jede in einer eigenen Zeile, und in die letzte Zeile schreiben, was berechnet wird: Summe, Differenz, Vielfaches, Produkt (Zeile mal Spalte, mit Prüfung der Größen), Potenz, Transponierte A^T, Inverse A^-1, det(A), rank(A) – oder eine Matrixgleichung AX = B bzw. XA = B, die die App mit der Inversen löst. Ein Gleichungssystem, das durch eine Matrix gegeben ist (erweiterte Matrix, Ax = b), behandelt das Kapitel Gleichungssysteme.

Enthält eine Matrix einen Parameter (einen Buchstaben), untersucht die App ihren Rang nach seinen Werten wie ein System – Umformung auf Stufenform, die kritischen Werte werden eingesetzt. Bei der Inversen berechnet sie zuerst die Determinante und die Bedingung, für welche Werte des Parameters sie nicht null ist (die Inverse existiert). Eine Inverse 3×3 und größer berechnet sie mit dem Gauß-Jordan-Verfahren oder – je nach Chip – mit der adjunkten Matrix (Komplemente, $A^{-1} = \text{adj } A / \det A$).

Bei einer quadratischen Matrix berechnen Sie auch die Eigenwerte und Eigenvektoren: das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda E)$ wird wie eine Determinante ausgeschrieben, in Faktoren zerlegt, und seine Nullstellen sind die Eigenwerte (ein quadratischer Faktor über die Diskriminante, auch komplex; ein kubischer ohne rationale Nullstelle näherungsweise). Die Eigenvektoren sind die Lösungen von $(A - \lambda E)v = o$ durch Umformung in die reduzierte Zeilenstufenform; zu jedem Eigenwert nennt die App die algebraische und die geometrische Vielfachheit. Der Chip Diagonalisierung stellt dazu P und D auf ($A = PDP^{-1}$) oder erklärt, warum die Matrix nicht diagonalisierbar ist. Die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ (SVD) und die Pseudoinverse A^+ gibt es für Matrizen jeder Größe: die SVD über die Eigenwerte von A^TA (bei einer breiten Matrix AA^T), die normierten Eigenvektoren und die daraus berechnete andere Seite; die Pseudoinverse einer Matrix mit vollem Rang über die Formel $(A^TA)^{-1}A^T$, sonst aus der Zerlegung $A^+ = V\Sigma^+U^T$ – und wären die Singulärwerte verschachtelte Wurzeln, exakt aus der Rangfaktorisierung $A = BC$ über $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$.

Eigenwerte und Diagonalisierung behandelt die App auch bei einer Matrix mit einem Parameter (bis 3×3): Sie zerlegt das charakteristische Polynom mit dem Parameter in Faktoren, schreibt die Eigenwerte als Funktionen des Parameters und findet seine besonderen Werte – dort fallen zwei Eigenwerte zusammen (zwei Faktoren haben eine gemeinsame Nullstelle, ein quadratischer Faktor die Diskriminante null) oder die allgemeine Berechnung der Eigenvektoren würde durch null teilen; sie nennt auch die Werte, für die die Eigenwerte komplex sind. Den allgemeinen Fall löst sie mit dem Parameter, die besonderen Werte setzt sie ein und behandelt sie getrennt. Der Chip Diagonalisierung beantwortet dann, für welche Werte des Parameters die Matrix diagonalisierbar ist.

Die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix (Chip Jordansche Normalform, Schreibweise jordan(A)) ergibt sich aus den Rängen der Potenzen $(A - \lambda E)^k$: Sie liefern Anzahl und Größen der Jordanblöcke, die Ketten verallgemeinerter Eigenvektoren werden vom obersten Vektor bis zu einem Eigenvektor aufgebaut und P, J geprüft ($A = PJP^{-1}$). Über die Jordansche Normalform berechnet die App auch die Potenz A^n für ein allgemeines n (Chip Potenz A^n, Schreibweise A^n; die Potenz eines Blocks mit dem binomischen Lehrsatz, das Ergebnis wie $2^{n-1}(n + 2)$) oder eine große Zahl (A^10) sowie das Matrixexponential e^{At} und e^A (Chip Matrixexponential, Schreibweise e^A, e^(At), exp(A), expm(A*t)) – nützlich für Systeme von Differentialgleichungen $x' = Ax$; komplexe Eigenwerte werden in Kosinus und Sinus umgeschrieben. Das Minimalpolynom (Chip Minimalpolynom, Schreibweise minpoly(A)) findet die App durch Probieren der Kandidaten – der Teiler des charakteristischen Polynoms – ab dem niedrigsten Grad; sie erinnert an den Satz von Cayley–Hamilton p(A) = O und gewinnt bei einer invertierbaren Matrix aus m(A) = O die Inverse.

Eingabe

`[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]`	Einträge mit Leerzeichen, Zeilen mit Semikolon (oder untereinander in den Klammern).

`A = [1 2; 3 4]`
`B = [0 1; 1 0]`
`A*B - 2B^T`
	Benannte Matrizen je eine Zeile, die Rechnung in der letzten Zeile.

`det(A), A^-1, A^T, rank(A)`	Determinante, Inverse und Transponierte, Rang.
`eig(A), diagonalize(A), svd(A), pinv(A), A^+`	Eigenwerte, Diagonalisierung, Singulärwertzerlegung, Pseudoinverse.
`jordan(A), A^n, e^A, e^(At), minpoly(A)`	Jordansche Normalform, allgemeine Potenz, Matrixexponential, Minimalpolynom.

Beispiele

Eine 3×3-Determinante mit der Regel von Sarrus.

Eingabe: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Determinante

Ergebnis

$$\det A = -3$$

Lösungsweg

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8\\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 10\\ &= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80\\ &= -3\end{aligned}$$

Entwicklung nach der Spalte mit den meisten Nullen.

Eingabe: `[1 0 2; 3 0 1; 4 5 6]` Entwicklung

Ergebnis

$$\det A = 25$$

Lösungsweg

- Entwicklung nach der 2. Spalte, jeder Eintrag mal seine Adjunkte mit dem Vorzeichen seiner Stelle

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ &= -5\cdot(-5)\\ &= 25\end{aligned}$$

Die Inverse mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Eingabe: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 10]` Inverse Matrix

Ergebnis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Einheitsmatrix neben die Matrix schreiben. Zeilenumformungen machen den linken Teil zur Einheitsmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Zeilenumformungen $R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 + 6R_3,\ R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Zeilenumformungen $R_1 \to 3R_1 + 2R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Zeilenumformungen $R_1 : 3,\ R_2 : (-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- Links die Einheitsmatrix, rechts die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang durch Zeilenumformungen.

Eingabe: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Rang

Ergebnis

$$h(A) = 2$$

Lösungsweg

- Zeilenumformungen

$$R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 4R_1),\ R_3 \to \frac{1}{6}(R_3 - 7R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeilenumformungen $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Der Rang ist die Anzahl der Zeilen ungleich null der Zeilenstufenform: $h(A) = 2$

Der Rang einer Matrix mit Parameter.

Eingabe: `[a 1 1; 1 a 1; 1 1 a]` Rang

Ergebnis

$$\begin{cases} h(A) = 3, & a \neq -2,\ a \neq 1 \\ h(A) = 1, & a = 1 \\ h(A) = 2, & a = -2 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Matrix enthält den Parameter a – eine beliebige reelle Zahl. Der Rang kann von seinem Wert abhängen, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle.
- Zeilenumformungen $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

- Wir rechnen mit dem Element $1 - a$ weiter, das null sein kann – wir setzen daher $a \neq 1$ voraus; den Fall $a = 1$ behandeln wir gesondert.
- Zeilenumformungen $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a \end{pmatrix}$$

- Zeilenumformungen $R_3 \to \frac{1}{1-a}(R_3 - (a+1)R_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Wir rechnen mit dem Element $a + 2$ weiter, das null sein kann – wir setzen daher $a \neq -2$ voraus; den Fall $a = -2$ behandeln wir gesondert.
- Die Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

- Für $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = 3$
- Für $a = 1$: $h(A) = 1$ – die Matrix nach dem Einsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Für $a = -2$: $h(A) = 2$ – die Matrix nach dem Einsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse mit Parameter über die adjunkte Matrix.

Eingabe: `[1 0 a; 0 1 0; 1 0 1]` Adjunkte Matrix

Ergebnis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Bedingungen: $a \neq 1$

Lösungsweg

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 0 \cdot 0 \\ &\quad - a \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 1 + 0 + 0 - a - 0 - 0 \\ &= 1 - a \end{aligned}$$

- $\det A = 1 - a$ – die Inverse existiert genau dann, wenn die Determinante nicht null ist, also für $a \neq 1$
- Die algebraischen Komplemente der Elemente (mit dem Vorzeichen (−1)^(i+j))

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \\ A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

- Die adjunkte Matrix ist die transponierte Matrix der Komplemente; wir teilen sie durch die Determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-} \end{pmatrix}$$

Produkt, Transponierte, Vielfaches und Differenz von Matrizen.

Eingabe: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [0 1; 1 0]`

`A*B - 2B^T`

Ergebnis

$$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \to 2 \times 2$)
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Transponieren, die Zeilen werden zu Spalten
  $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Jeden Eintrag mit der Zahl multiplizieren
  $$2B^T = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Die Einträge an denselben Stellen addieren (subtrahieren)
  $$AB - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 2 \\ 4 - 2 & 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eine Matrixgleichung AX = B mit der Inversen.

Eingabe: `A = [1 2; 3 4]`

`B = [5; 6]`

AX = B

Ergebnis

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Gleichung auf der Seite der Unbekannten mit der Inversen multiplizieren: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$
- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale
  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$
- $\det A = -2 \neq 0$, die Inverse existiert.
- Bei einer 2×2-Matrix die Einträge der Hauptdiagonale vertauschen, die Vorzeichen der anderen ändern und durch die Determinante teilen
  $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \to 2 \times 1$)
  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix.

Eingabe: `[2 1; 1 2]` Eigenwerte

Ergebnis

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

Irrationale Eigenwerte über die Diskriminante.

Eingabe: `[1 2; 3 4]` Eigenwerte

Ergebnis

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

  $A-\lambda E = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt: $\det(A-\lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

- Die Nullstellen des quadratischen Faktors über die Diskriminante

  $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0:\ D = 33,\ \lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3+\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 − die Zahl der freien Unbekannten)

  $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix}3+\sqrt{33}\\-6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix}\frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2\\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{3-\sqrt{33}}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 − die Zahl der freien Unbekannten)

  $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix}-3+\sqrt{33}\\6\end{pmatrix},\ t\neq 0$

Die Diagonalisierung A = PDP⁻¹.

Eingabe: `[2 0 0; 0 3 4; 0 4 9]` Diagonalisierung

Ergebnis

$$A = PDP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(9-\lambda) + 0\cdot 4\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 4 - 0\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 51\lambda + 54\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 \end{aligned}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = -(\lambda-1)(\lambda$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 11$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 11$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 11$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Matrix hat so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie Zeilen, sie ist also diagonalisierbar: P hat die Eigenvektoren als Spalten, D die Eigenwerte in derselben Reihenfolge auf der Diagonale, und es gilt $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Matrix ist symmetrisch: ihre Eigenwerte sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander. Normiert ergeben sie ein orthogonales P, $P^{-1} = P^T$

Eine Matrix, die nicht diagonalisierbar ist.

Eingabe: `[1 1 0; 0 1 0; 0 0 2]` Diagonalisierung

Ergebnis

Die Matrix ist nicht diagonalisierbar – sie hat nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren.

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{aligned}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 2, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Zu $\lambda = 1$ ist die geometrische Vielfachheit 1 kleiner als die algebraische 2 – die Matrix hat nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren und ist daher nicht diagonalisierbar.

Eigenwerte einer Matrix mit Parameter – die besonderen Werte und ihre Fälle.

Eingabe: `[1 1 0; 0 a 0; 0 0 2]` Eigenwerte

Ergebnis

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a, & a \neq 1,\ a \neq 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, & a = 1 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2, & a = 2 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(a-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a\right) \cdot \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a \end{aligned}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda^2 - 2\lambda - 3a\lambda + 2a =$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a$
- Besondere Werte des Parameters – dort fallen zwei Eigenwerte zusammen oder die Berechnung der Eigenvektoren würde durch null teilen: $a = 1,\ a = 2$. Wir behandeln sie getrennt ().

$$a = 1:\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \quad a = 2:\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =$$

- Der allgemeine Fall $a \neq 1,\ a \neq 2$: Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, die Matrix hat also so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie Zeilen und ist diagonalisierbar.
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = a$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A-\lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = a$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Der Fall $a = 1$ – in die Matrix eingesetzt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda -$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 2, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_3 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Zu $\lambda = 1$ ist die geometrische Vielfachheit 1 kleiner als die algebraische 2 – die Matrix hat nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren und ist daher nicht diagonalisierbar.
- Der Fall $a = 2$ – in die Matrix eingesetzt

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

  $$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda -$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

  $$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$ (algebraische Vielfachheit 2, geometrische 2 – die Zahl der freien Unbekannten)

  $$\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t, s) \neq (0, 0)$$

Für welche Werte des Parameters die Matrix diagonalisierbar ist.

Eingabe: `[0 1; a 0]` Diagonalisierung

Ergebnis

Die Matrix ist diagonalisierbar für: $a \neq 0$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot a = \lambda^2$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - a = 0$
- Die Nullstellen des quadratischen Faktors über die Diskriminante

$$\lambda^2 - a = 0: \; D = 4a, \; \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = -\sqrt{a}, \; \sqrt{a}$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = -\sqrt{a}, \; \lambda_2 = \sqrt{a}$
- Besondere Werte des Parameters – dort fallen zwei Eigenwerte zusammen oder die Berechnung der Eigenvektoren würde durch null teilen: $a = 0$. Wir behandeln sie getrennt ($a = 0: \; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
- Für $a \in (-\infty; \, 0)$ ist die Diskriminante negativ, die Eigenwerte sind konjugiert komplex (diagonalisierbar nur über den komplexen Zahlen).
- Der allgemeine Fall $a \neq 0$: Die Eigenwerte sind paarweise verschieden, die Matrix hat also so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie Zeilen und ist diagonalisierbar.
- Der Fall $a = 0$ – in die Matrix eingesetzt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 = 0$
- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ (algebraische Vielfachheit 2, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

- Zu $\lambda = 0$ ist die geometrische Vielfachheit 1 kleiner als die algebraische 2 – die Matrix hat nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren und ist daher nicht diagonalisierbar.

Die Singulärwertzerlegung einer 2×3-Matrix.

Eingabe: `[3 2 2; 2 3 -2]` Singulärwertzerlegung (SVD)

Ergebnis

$$A = U\Sigma V^T,\ U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \Sigma$$

Lösungsweg

- Die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$: die Matrix hat mehr Spalten als Zeilen, wir beginnen daher mit der kleineren AA^T – ihre Eigenwerte sind die Quadrate der Singulärwerte, ihre Eigenvektoren bilden U. Wir berechnen AA^T
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 & 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot (- \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 2 & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + (-2)\cdot \end{pmatrix}$$

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$AA^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)\cdot(17$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det\left(AA^T - \lambda E\right) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 25$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$\left(AA^T - \lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 25$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 9$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

$$\left(AA^T - \lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}:\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 9$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)

$$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

- Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte, absteigend geordnet: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Σ hat die Größe von A

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren normiert (durch ihren Betrag geteilt); die eines mehrfachen Eigenwerts zuerst mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthogonalisiert. Sie sind die Spalten von

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- Die Spalten von V zu den von null verschiedenen Singulärwerten, $\mathbf{v}_i = A^T\mathbf{u}_i/\sigma_i$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A^T\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A^T\mathbf{u}_2$$

- Die fehlenden Spalten von V ergänzen eine Orthonormalbasis – normierte Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, senkrecht zu den vorigen Spalten

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Die Singulärwertzerlegung

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse einer Matrix mit unabhängigen Spalten.

Eingabe: `[1 0; 0 1; 1 1]` Pseudoinverse

Ergebnis

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Spalten der Matrix sind linear unabhängig (Rang 2 = Zahl der Spalten), $A^T A$ ist also regulär, und die Pseudoinverse liefert die Formel:
- $A^{+} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \left($$
- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $$\det A^T A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$
- $\det A^T A = 3 \neq 0$, die Inverse existiert.
- Bei einer 2×2-Matrix die Einträge der Hauptdiagonale vertauschen, die Vorzeichen der anderen ändern und durch die Determinante teilen

  $$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 2 \cdot 2 \times 3 \to 2 \times 3$)

  $$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot 0 & \frac{2}{3} \cdot 0 + (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{2}{3} \cdot 1 + (-\frac{1}{3} \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 & (-\frac{1}{3}) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 & (-\frac{1}{3}) \cdot 1 + \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse einer singulären Matrix aus der Singulärwertzerlegung.

Eingabe: `A = [1 2; 2 4]`

A^+

Ergebnis

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Matrix hat keinen vollen Rang (Rang 1), die Pseudoinverse kommt daher aus der Singulärwertzerlegung: $A^+ = V\Sigma^+U^T$
- Die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$: die Eigenwerte von A^TA sind die Quadrate der Singulärwerte, ihre Eigenvektoren bilden V. Wir berechnen A^TA
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2\times 2 \cdot 2\times 2 \to 2\times 2$)
  $$A^TA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$
- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab
  $$A^TA - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$
- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale
  $$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ 10 & 20-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(20-$$
- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt
  $$\det\left(A^TA-\lambda E\right) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda-25) = 0$$
- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 0$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 25$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform
  $$\left(A^TA-\lambda_1 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 25$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)
  $$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 0$ sind die vom Nullvektor verschiedenen Lösungen des homogenen Systems; die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform
  $$\left(A^TA-\lambda_2 E\right)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 0$ (algebraische Vielfachheit 1, geometrische 1 – die Zahl der freien Unbekannten)
  $$\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$
- Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte, absteigend geordnet: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5,\ \sigma_2 = 0$. Σ hat die Größe von A
  $$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Die Eigenvektoren normiert (durch ihren Betrag geteilt); die eines mehrfachen Eigenwerts zuerst mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthogonalisiert. Sie sind die Spalten von
  $$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
  $$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Die Spalten von U zu den von null verschiedenen Singulärwerten, $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i/\sigma_i$
  $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Die fehlenden Spalten von U ergänzen eine Orthonormalbasis – normierte Lösungen von $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$, senkrecht zu den vorigen Spalten
  $$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Die Singulärwertzerlegung
  $$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
- Σ⁺ ist Σ transponiert, mit den Kehrwerten der von null verschiedenen Singulärwerte
  $$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Die Pseudoinverse
  $$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{} \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse aus der Rangfaktorisierung A = BC.

Eingabe: `[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]` Pseudoinverse

Ergebnis

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Matrix hat keinen vollen Rang (Rang 2) und ihre Singulärwerte wären verschachtelte Wurzeln. Die Pseudoinverse berechnen wir daher exakt aus der Rangfaktorisierung A = BC – B sind die linear unabhängigen Spalten von A, C die Zeilen ungleich null ihrer reduzierten Stufenform.
- Wir bringen die Matrix auf reduzierte Stufenform; die Pivotelemente stehen in den Spalten $1, 2$, B besteht aus diesen Spalten von A und C aus den Zeilen ungleich null der umgeformten Matrix

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$
- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$CC^{T} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (- \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $$\det CC^{T} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-2) = 6$$

- $\det CC^{T} = 6 \neq 0$, die Inverse existiert.
- Bei einer 2×2-Matrix die Einträge der Hauptdiagonale vertauschen, die Vorzeichen der anderen ändern und durch die Determinante teilen

  $$\left(CC^{T}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Zeile mal Spalte multiplizieren (Größen $2 \times 3 \cdot 3 \times 2 \to 2 \times 2$)

  $$B^{T}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 7\cdot 7 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 + 7\cdot 8 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 + 8\cdot 7 & 2\cdot 2 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $$\det B^{T}B = \begin{vmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{vmatrix} = 66\cdot 93 - 78\cdot 78 = 54$$

- $\det B^{T}B = 54 \neq 0$, die Inverse existiert.
- Bei einer 2×2-Matrix die Einträge der Hauptdiagonale vertauschen, die Vorzeichen der anderen ändern und durch die Determinante teilen

  $$\left(B^{T}B\right)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & -\frac{13}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

- Die Pseudoinverse

  $$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Eine Jordansche Normalform mit zwei Blöcken zu einem Eigenwert.

Eingabe: `[1 1 0; -1 3 0; -1 1 2]` Jordansche Normalform

Ergebnis

$$A = PJP^{-1},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot(-1 \\ &\quad - 0\cdot(3-\lambda)\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 - \\ &= \left(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\right) + 0 + 0 - 0 - \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3 =$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
- Für $\lambda = 2$ (algebraische Vielfachheit 3) berechnen wir die Potenzen von $A - \lambda E$ und ihre Ränge h, bis der Rang um die algebraische Vielfachheit gesunken ist

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Es gibt für $\lambda = 2$ so viele Jordanblöcke wie unabhängige Eigenvektoren: $n - h(A-\lambda E)$ = 2. Die Anzahl der Blöcke der Größe mindestens k ist $h_{k-1} - h_k$, die Blockgrößen sind also $2, 1$: $J_2(2),\ J_1(2)$
- Eine Kette der Länge 2 für $\lambda = 2$: Den obersten Vektor wählen wir im Kern von $(A-\lambda E)^k$ außerhalb des Kerns der niedrigeren Potenz und der Hülle der vorigen Ketten und multiplizieren ihn mit $A - \lambda E$ bis zu einem Eigenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A-2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Ein Block der Größe 1 für $\lambda = 2$ liefert einen Eigenvektor

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Jordansche Normalform: Die Spalten von P sind die Vektoren der Ketten (jede vom Eigenvektor aufwärts), J hat die Eigenwerte auf der Diagonale und in den Blöcken Einsen darüber; es gilt $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & - \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Potenz A^n über die Jordansche Normalform.

Eingabe: `[3 1; -1 1]` Potenz A^n

Ergebnis

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
- Für $\lambda = 2$ (algebraische Vielfachheit 2) berechnen wir die Potenzen von $A - \lambda E$ und ihre Ränge h, bis der Rang um die algebraische Vielfachheit gesunken ist

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = 0$$

- Es gibt für $\lambda = 2$ so viele Jordanblöcke wie unabhängige Eigenvektoren: $n - h(A - \lambda E)$ = 1. Die Anzahl der Blöcke der Größe mindestens k ist $h_{k-1} - h_k$, die Blockgrößen sind also 2: $J_2(2)$
- Eine Kette der Länge 2 für $\lambda = 2$: Den obersten Vektor wählen wir im Kern von $(A - \lambda E)^k$ außerhalb des Kerns der niedrigeren Potenz und der Hülle der vorigen Ketten und multiplizieren ihn mit $A - \lambda E$ bis zu einem Eigenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = (A - 2E)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Die Jordansche Normalform: Die Spalten von P sind die Vektoren der Ketten (jede vom Eigenvektor aufwärts), J hat die Eigenwerte auf der Diagonale und in den Blöcken Einsen darüber; es gilt $A = PJP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wir berechnen die Potenz über die Jordansche Normalform: $A^n = PJ^nP^{-1}$. Die Potenz eines Blocks folgt aus dem binomischen Lehrsatz – das Element d Stellen über der Diagonale ist $\binom{n}{d}\lambda^{n-d}$

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Wir multiplizieren die Matrizen

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Das Exponential e^{At} – die Lösung des Systems x' = Ax.

Eingabe: `A = [0 1; -2 -3]`

`e^(At)`

Ergebnis

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix},$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

  $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{pmatrix}$$

- Eine 2×2-Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale

  $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda - 3 \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot (-\lambda - 3) - 1$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

  $$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

- Ein Block der Größe 1 für $\lambda = -2$ liefert einen Eigenvektor

  $$(A + 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Ein Block der Größe 1 für $\lambda = -1$ liefert einen Eigenvektor

  $$(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Alle Jordanblöcke haben die Größe 1, J ist also diagonal und die Matrix diagonalisierbar. Die Spalten von P sind die Eigenvektoren und es gilt $A = PJP^{-1}$

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wir berechnen das Exponential über die Jordansche Normalform: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. In einem Block ist das Element d Stellen über der Diagonale $e^{\lambda t}\frac{t^d}{d!}$

  $$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

- Wir multiplizieren die Matrizen

  $$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e \\ 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 2 \end{pmatrix}$$

- Für t = 1

  $$e^{A} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 2(e^{-2} - e^{-1}) & 2e^{-2} - e^{-1} \end{pmatrix}$$

Das Minimalpolynom, der Satz von Cayley–Hamilton und die Inverse daraus.

Eingabe: `[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]` Minimalpolynom

Ergebnis

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 +$$

Lösungsweg

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung det(A − λE) = 0 (E die Einheitsmatrix). Auf der Diagonale ziehen wir λ ab

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + \\ &\quad - 0\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (2-\lambda)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot \\ &= \left(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12\right) + 0 + 0 - 0 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

- Das charakteristische Polynom, in Faktoren zerlegt

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)^2(\lambda$$

- Die Eigenwerte (eine mehrfache Nullstelle hat mehrere Namen): $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom und hat alle seine Nullstellen. Die Kandidaten ab dem niedrigsten Grad

$$(\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

- Wir setzen die Matrix ein – nicht die Nullmatrix, dieser Kandidat ist also nicht das Minimalpolynom.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)(A-3E) =$$

- Wir setzen die Matrix ein – die Nullmatrix; der niedrigste solche Kandidat ist das Minimalpolynom.

$$q(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3):\ q(A) = (A-2E)^2(A-3E)$$

- Der Satz von Cayley–Hamilton: Jede quadratische Matrix ist Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12,\ p(A) = A^3 - 7A^2 + 16A$$

- Die Matrix ist invertierbar (das Absolutglied des Minimalpolynoms ist nicht null), aus m(A) = O folgt daher die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - 7A + 16E\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Bekannte Einschränkungen

- Matrizen bis 6×6.
- Eigenwerte, Diagonalisierung, Singulärwertzerlegung, Jordansche Normalform, Potenz A^n, Exponential und Minimalpolynom für Matrizen bis 4×4 und ohne Parameter; Eigenwerte und Diagonalisierung mit einem Parameter bis 3×3 (ohne kubischen Faktor mit dem Parameter), Eigenvektoren des allgemeinen Falls nur bei Eigenwerten ohne Wurzel aus dem Parameter.
- Die Jordansche Normalform mit Schritten nur bei rationalen Eigenwerten, sonst nur das Ergebnis; eine allgemeine Potenz A^n und e^{At} brauchen exakte Eigenwerte (ein kubischer Faktor ohne rationale Nullstelle: nur e^A näherungsweise).

22. Vektoren

Einen Vektor schreiben Sie mit Semikolons, jeden in eine eigene Zeile: u = (1; 2; 3); der Name darf einen Index haben (F_1 = (3; 4)). Einen Punkt schreiben Sie mit eckigen Klammern: A[1; 2; 3]. Vektoren in der Ebene haben zwei Koordinaten, im Raum drei.

Ein einzelner Punkt in der Ebene wird nach den Vorzeichen seiner Koordinaten einem Quadranten (oder einer Achse) zugeordnet und gezeichnet. Bei zwei Punkten gibt es neben dem Abstand |AB| den Chip „Mittelpunkt“ – seine Koordinaten sind die Mittelwerte der Endpunkte. Auch mit Worten: „Mittelpunkt AB, A[1; 2], B[5; 6]“, „Abstand der Punkte A[1; 2] und B[4; 6]“, „Quadrant A[3; −2]“.

Ohne weitere Zeile wählt der Chip, was berechnet wird: der Betrag, die Summe (die Resultierende von Kräften mit Betrag und Richtung), das Skalarprodukt (null heißt senkrechte Vektoren), der Winkel (aus dem Kosinus, bei Tabellenwerten exakt, sonst in Grad und Minuten), das Kreuzprodukt (über die Determinante mit i, j, k), der Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck, das Volumen von Spat und Tetraeder über das Spatprodukt oder die lineare Abhängigkeit. Aus Punkten bildet die App zuerst die Vektoren AB, AC, AD vom ersten Punkt: zwei Punkte ergeben den Abstand, drei ein Dreieck, vier ein Tetraeder.

In die letzte Zeile können Sie einen Ausdruck schreiben: u + 2v, u·v (oder u*v), u × v, |u|, (u × v)·w, |AB| und den Vektor AB aus zwei Punkten. Der Graph zeigt die Vektoren als Pfeile – in der Ebene mit Gitter, im Raum mit Achsen, die Sie mit dem Finger drehen; eine Fläche ist eingefärbt, ein Winkel mit einem Bogen markiert.

Eingabe

`u = (1; 2; 3)`	Ein Vektor mit Semikolons, jeder in einer eigenen Zeile.
`A[1; 2; 3]`	Ein Punkt mit eckigen Klammern.
`u + 2v, u·v, u × v, |AB|, (u × v)·w`	Ein Ausdruck mit Vektoren in der letzten Zeile.

Beispiele

Quadrant eines Punktes.

Eingabe: `A[3; -2]`

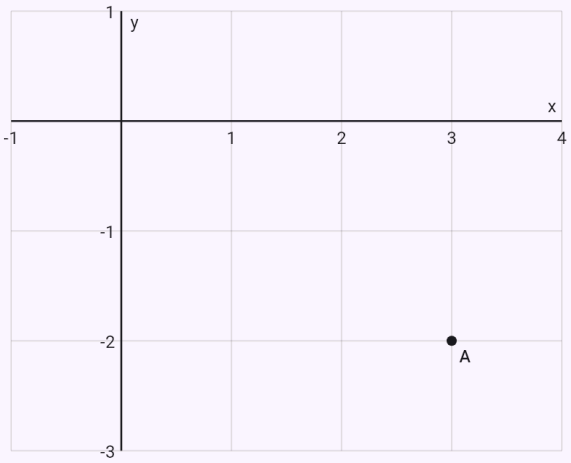
Ergebnis

$$A \in \mathrm{IV}$$

Lösungsweg

- Der Punkt $A[3;\ -2]$ hat x positiv und y negativ – er liegt im IV. Quadranten (rechts unten).

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Mittelpunkt einer Strecke.

Eingabe: `střed AB, A[1; 2], B[5; 6]`

Ergebnis

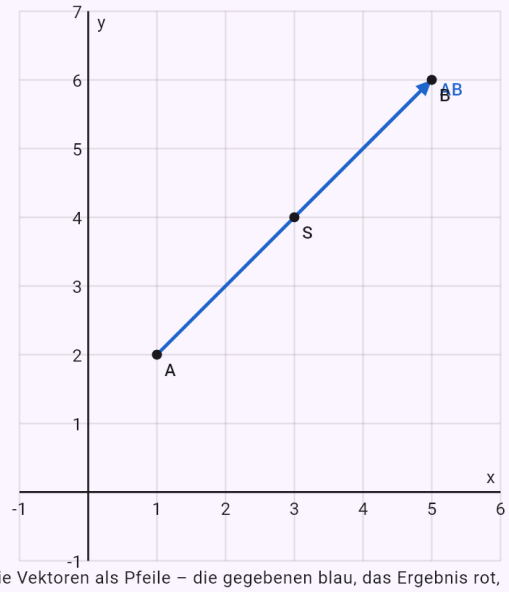
$$S_{AB} = [3;\ 4]$$

Lösungsweg

- Die Koordinaten des Mittelpunkts sind die Mittelwerte der Koordinaten der Endpunkte

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left[\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right] \\ &= \left[\frac{1+5}{2};\ \frac{2+6}{2}\right] \\ &= [3;\ 4] \end{aligned}$$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Der Betrag eines Vektors.

Eingabe: `u = (1; 2; 3)`

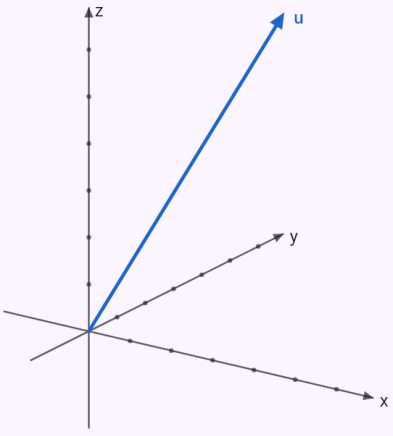
Ergebnis

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

Lösungsweg

- Der Betrag des Vektors:
  $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Der Winkel zweier Vektoren.

Eingabe: `u = (1; 2; 2)`
`v = (2; -1; 2)`

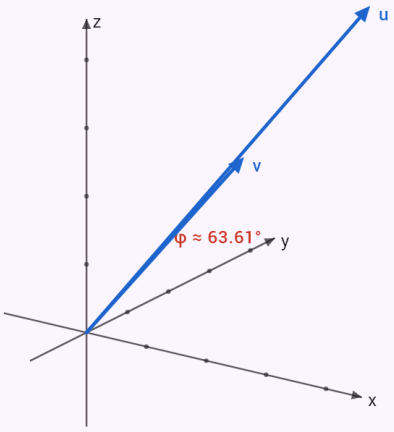
Ergebnis

$$\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$$

Lösungsweg

- Das Skalarprodukt ist die Summe der Produkte der entsprechenden Koordinaten:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$
- Der Betrag des Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Der Betrag des Vektors:
  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$
- Der Winkel der Vektoren aus dem Skalarprodukt also
  $\varphi \approx 63{,}61^\circ \approx 63^\circ 37'$
  $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{4}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Summe und Vielfaches von Vektoren.

Eingabe: `u = (1; 2)`
`v = (3; 4)`
`u + 2v`

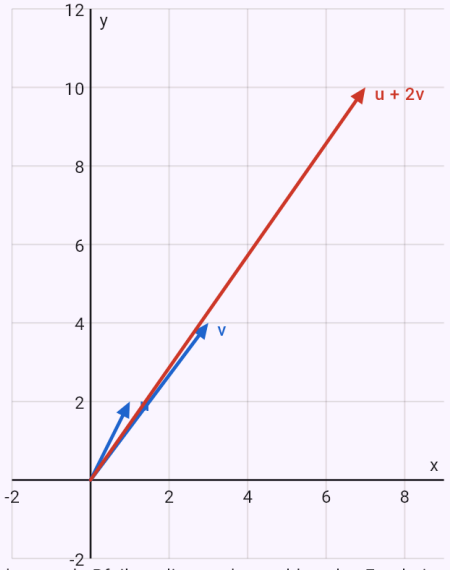
Ergebnis

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (7;\ 10)$$

Lösungsweg

- Ein Vielfaches eines Vektors – jede Koordinate mal die Zahl: $2\vec{v} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4) = (6;\ 8)$
- Vektoren werden koordinatenweise addiert (subtrahiert):
  $\vec{u} + 2\vec{v} = (1 + 6;\ 2 + 8) = (7;\ 10)$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Das Kreuzprodukt.

Eingabe: `u = (1; 2; 3)`
`v = (4; 5; 6)` Kreuzprodukt

Ergebnis

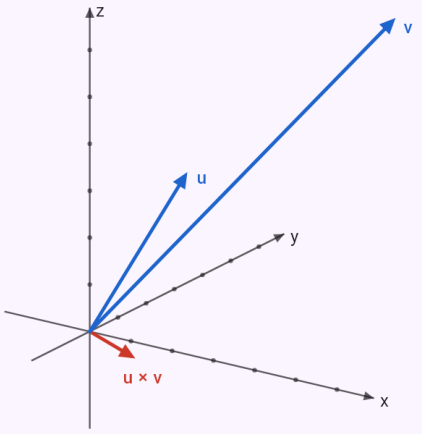
$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3;\ 6;\ -3)$$

Lösungsweg

- Das Kreuzprodukt durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6;\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3;$$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks aus drei Punkten.

Eingabe: `A[1; 0; 2]`
`B[3; 1; 0]`

`C[0; 2; 1]`

Ergebnis

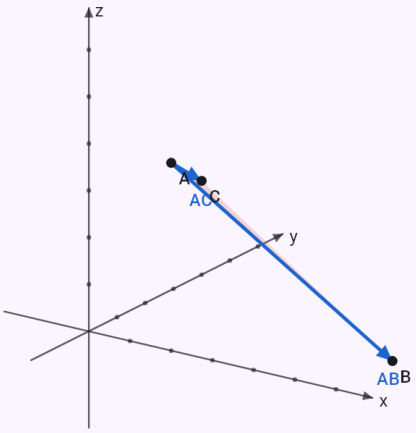
$$S_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$$

Lösungsweg

- Ein Vektor aus zwei Punkten – Koordinaten des Endpunkts minus die des Anfangspunkts
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;\ 1-0;\ 0-2) = (2;\ 1;\ -2)$
- Ein Vektor aus zwei Punkten – Koordinaten des Endpunkts minus die des Anfangspunkts
  $\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;\ 2-0;\ 1-2) = (-1;\ 2;\ -1)$
- Das Kreuzprodukt durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile
  $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2;\ (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-$$
- Der Betrag des Vektors
  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$
- Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist der Betrag des Kreuzprodukts (in der Ebene der Betrag der Determinante): $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$

- Das Dreieck ist die Hälfte des Parallelogramms:
  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Das Volumen von Spat und Tetraeder über das Spatprodukt.

Eingabe: `u = (1; 0; 2)`
`v = (2; 1; 0)`

`w = (0; 3; 1)`

Ergebnis

$$V = 13,\ V_4 = \frac{13}{6}$$

Lösungsweg

- Das Spatprodukt als Determinante der Koordinaten der Vektoren

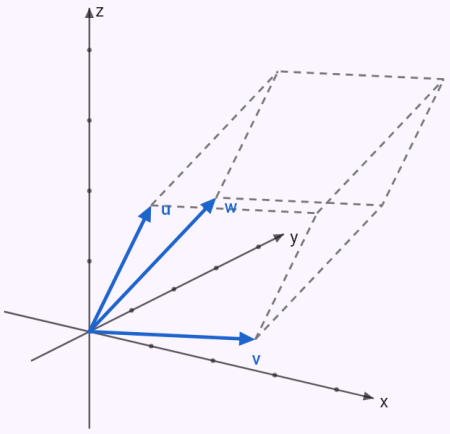
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 0 + 12 - 0 - 0 - 0 = 13$$

- Das Volumen des Spats ist der Betrag des Spatprodukts: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 13$
- Das Tetraeder hat ein Sechstel des Spatvolumens: $V_4 = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{13}{6}$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Die Resultierende zweier Kräfte.

Eingabe: `F_1 = (3; 1)`
`F_2 = (-1; 3)` Summe (Resultierende)

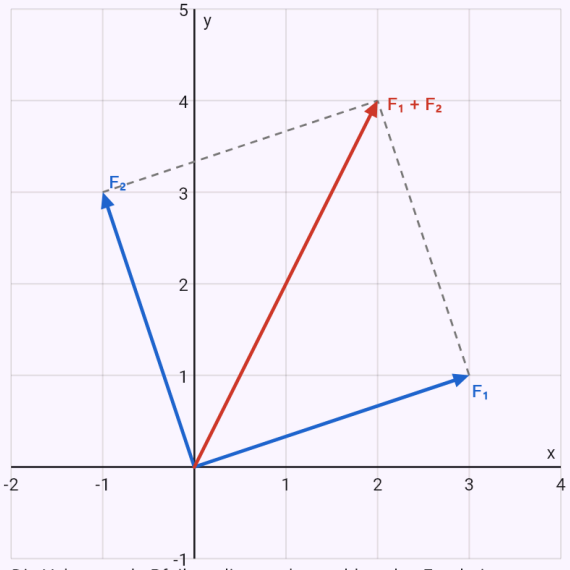
Ergebnis

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (2;\ 4),\ |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = 2\sqrt{5} \approx$$

Lösungsweg

- Vektoren werden koordinatenweise addiert (subtrahiert) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = (3 + (-1);\ 1 + 3) = (2;\ 4)$
- Der Betrag des Vektors $|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$
- Die Richtung der Resultierenden – ihr Winkel mit der positiven x-Achse: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2},\ \alpha \approx 63{,}43^\circ$

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren.

Eingabe: `u = (1; 2; 3)`
`v = (2; 1; 0)`
`w = (4; 5; 6)` Lineare Abhängigkeit

Ergebnis

Die Vektoren sind linear abhängig.

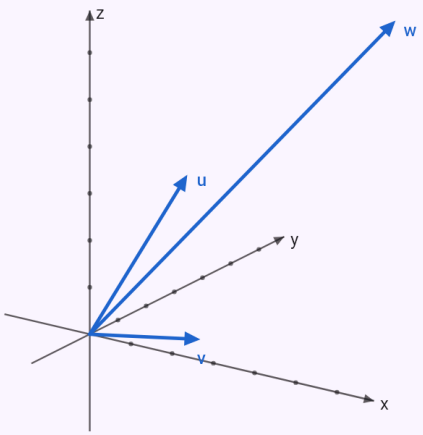
Lösungsweg

- Regel von Sarrus, die Produkte entlang der Hauptdiagonalen minus die entlang der Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$
$$= 6 + 0 + 30 - 12 - 0 - 24$$
$$= 0$$

- Die Determinante der Koordinaten der Vektoren: $D = 0$. Ist sie von null verschieden, sind die Vektoren linear unabhängig, sonst abhängig.

Graph



Die Vektoren als Pfeile – die gegebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Bekannte Einschränkungen

- Die Koordinaten sind Zahlen (ohne Parameter), höchstens sechs; der Graph nur in der Ebene und im Raum.

23. Geraden und Ebenen

Analytische Geometrie in der Ebene und im Raum. Einen Punkt schreiben Sie wie bei Vektoren: A[1; 2]. Geben Sie einer Geraden oder Ebene einen Namen und schreiben Sie ihre Gleichung nach einem Doppelpunkt, jede in eine eigene Zeile: als Koordinatengleichung (p: 2x + 3y − 5 = 0), in der Form y = mx + b (p: y = 2x + 1), in Parameterform (p: x = 1 + 2t, y = 3 − t) oder als Vektorgleichung (p: X = A + t·u). Im Raum ist eine Gleichung in x, y, z eine Ebene (ρ: x + y + z = 1), ebenso eine Parameterform mit zwei Parametern; eine Gerade im Raum schreiben Sie in Parameterform oder als Schnitt zweier Ebenen (p: x + y + z = 1, x − y = 0). Die Tasten p:, q: und ρ: finden Sie auf der Funktionstastatur.

Was berechnet wird, wählen Sie per Chip – das Angebot richtet sich nach der Eingabe: eine Gerade oder Ebene erhält alle Formen ihrer Gleichung, zwei ihre Lagebeziehung mit dem Schnitt, den Winkel und den Abstand, ein Punkt und eine Gerade (Ebene) den Abstand, das Lot und die Parallele durch den Punkt, den Lotfußpunkt und den Spiegelpunkt. Zwei oder drei Punkte allein erhalten zu den Vektor-Chips die Gerade AB, die Mittelsenkrechte und Schwerpunkt mit Höhen des Dreiecks (im Raum die Ebene ABC).

Einen Abstand berechnet die App mit der Formel oder – mit dem Chip „Über den Lotfußpunkt“ – wie in der Übung: das Lot durch den Punkt, sein Fußpunkt und die Länge der Strecke. Bei windschiefen Geraden findet sie auch das gemeinsame Lot. Winkel sind bei Tabellenwerten exakt, sonst in Grad und Minuten. Die Aufgabe können Sie auch in die letzte Zeile schreiben: angle(p, q), distance(A, p), intersection(p, q), perpendicular(A, p), parallel(A, p), projection(A, ρ), reflection(A, p), bisector(A, B), midpoint(A, B), centroid(A, B, C), line(A, B), plane(A, B, C). Der Graph zeigt die Geraden und Ebenen; im Raum drehen Sie ihn mit dem Finger.

Abbildungen in der Ebene: Verschiebung um einen Vektor, Drehung um ein Zentrum um einen Winkel (in Grad, positiv gegen den Uhrzeigersinn), zentrische Streckung mit Zentrum und Faktor sowie Punkt- und Achsenspiegelung. Abbilden lassen sich ein Punkt, ein Vieleck (Punkte hintereinander: translation(A, B, C, u) ist ein Dreieck), eine Gerade und ein Kreis (k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 4). Die Aufgabe steht in der letzten Zeile, oder du wählst den Chip „Verschiebung“, „Drehung“, „Zentrische Streckung“ oder „Spiegelung“ – Winkel und Faktor dann in einer eigenen Zeile (φ = 90, κ = 2), das Zentrum als Punkt S. Die Schritte zeigen die Abbildungsvorschrift in Koordinaten und das Bild jedes Punktes, bei einer Geraden die Bilder zweier Punkte, beim Kreis Mittelpunkt und Radius; der Graph Urbild und Bild.

Kegelschnitte in achsenparalleler Lage (ohne xy-Glied): quadratische Ergänzung zur Mittelpunkts- oder Scheitelgleichung, beim Kreis Mittelpunkt und Radius, bei Ellipse und Hyperbel Mittelpunkt, Halbachsen, Exzentrizität und Brennpunkte (bei der Hyperbel auch die Asymptoten), bei der Parabel Scheitel, Parameter, Brennpunkt und Leitgerade; der Graph zeigt die Kurve mit ihren Punkten.

Die Tangente in einem Punkt eines Kegelschnitts schreiben Sie in Worten – „Tangente an den Kreis x^2 + y^2 = 25 im Punkt [3; 4]“ –, die App findet sie durch „Halbieren“ der Gleichung. Die Lage von Kegelschnitt

und Gerade („Lage von x^2/9 + y^2/4 = 1 und y = x + 1“) ergibt sich durch Einsetzen und die Diskriminante: Sekante, Tangente oder Passante, mit den Schnittpunkten. Eine Kugel (x² + y² + z² − 2x + 4y − 6z − 2 = 0) wird quadratisch ergänzt – Mittelpunkt und Radius. Unter den Formen einer Geraden ist auch die Achsenabschnittsform x/p + y/q = 1. Tangenten von einem Punkt außerhalb („tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]“, englisch „… from the point …“) sucht die App unter den Geraden durch den Punkt mit der Steigung k – Tangente ist die mit Diskriminante null; die senkrechte Gerade wird getrennt geprüft. Tangenten parallel oder senkrecht zu einer Geraden haben denselben Normalenvektor und ein unbekanntes Absolutglied c. Eine Kugel schreiben Sie mit Namen und in die nächste Zeile eine Ebene, eine Gerade oder einen Punkt: bei einer Ebene wird der Abstand des Mittelpunkts mit dem Radius verglichen (Schnittkreis mit Mittelpunkt und Radius, Berührpunkt oder nichts), die Parametergleichungen einer Geraden werden eingesetzt und die Diskriminante entscheidet, in einem Punkt der Kugel ergibt sich die Tangentialebene.

Eingabe

`p: 2x + 3y - 5 = 0, q: x = 1 + 2t, y = 3 - t`	Eine Gerade als Koordinatengleichung, in der Form y = mx + b oder in Parameterform, jede in eigener Zeile.
`p: X = A + t·u`	Eine Gerade als Vektorgleichung aus einem Punkt und einem Vektor.
`ρ: x + 2y - 2z + 3 = 0`	Eine Ebene als Koordinatengleichung (im Raum).
`p: x + y + z = 1, x - y = 0`	Eine Gerade im Raum als Schnitt zweier Ebenen.
`angle(p, q), distance(A, p), centroid(A, B, C)`	Die Aufgabe in der letzten Zeile.
`translation(A, B, C, u), rotation(A, S, 90), homothety(p, k, S, 2), reflection(k, q)`	Eine Abbildung: die Figuren, dann der Vektor, das Zentrum und der Winkel oder Faktor, oder das Spiegelzentrum bzw. die Achse.
`x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`	Ein Kegelschnitt – eine Gleichung zweiten Grades in x und y.

Beispiele

Alle Formen der Geradengleichung aus der Parameterform.

Eingabe: `p: x = 1 + 2t, y = 3 - t`

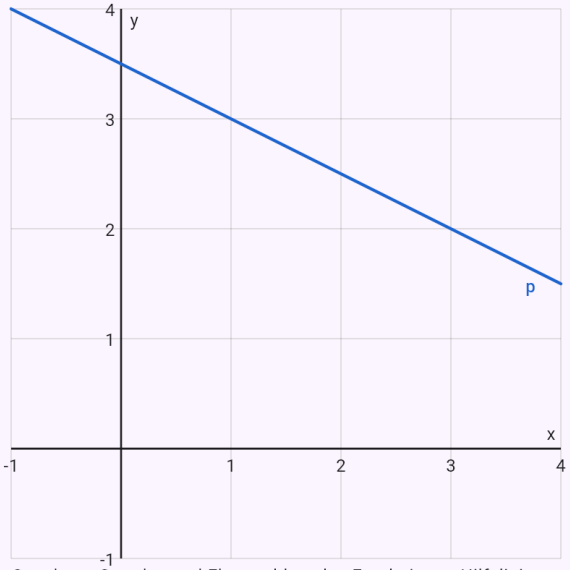
Ergebnis

$$p: x + 2y - 7 = 0$$
$$p: x = 1 + 2t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$$
$$p: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$p: \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$

Lösungsweg

- Aus der Parameterform lesen wir einen Punkt (die Konstanten) und den Richtungsvektor (die Koeffizienten des Parameters) ab: $P_p[1;\ 3],\ \vec{u}_p = (2;\ -1)$
- Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Richtungsvektor – Koordinaten tauschen und ein Vorzeichen ändern: $\vec{u}_p = (2;\ -1) \ \Rightarrow\ \vec{n}_p = (1;\ 2)$
- Die Koordinatengleichung: die Koeffizienten sind die Koordinaten des Normalenvektors, die Konstante folgt aus dem Punkt $p: x + 2y + c = 0,\ P_p[1;\ 3]:\ 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \ \Rightarrow\ c =$
- Die Normalform – die Koordinatengleichung nach y aufgelöst: $p: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- Achsenabschnittsform – in den Nennern stehen die Abschnitte auf den Achsen x und y: $p: \frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Der Schnittpunkt zweier Geraden.

Eingabe: `p: 2x + 3y - 5 = 0`

`q: x - y + 1 = 0`

Ergebnis

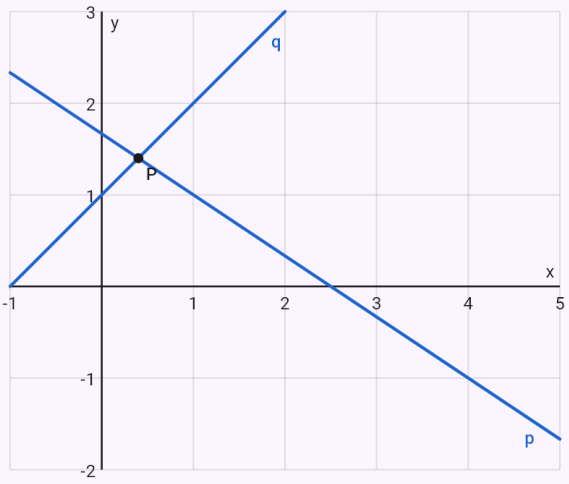
Die Geraden schneiden sich im Punkt:

$$P\left[\frac{2}{5};\ \frac{7}{5}\right]$$

Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z):
  $p: 2x + 3y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (2;\ 3)$
- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z):
  $q: x - y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_q = (1;\ -1)$
- Keiner der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen – die beiden sind nicht parallel
  $\vec{n}_p = (2;\ 3),\ \vec{n}_q = (1;\ -1),\ \vec{n}_q \neq k \cdot \vec{n}_p$
- Der Schnittpunkt löst das Gleichungssystem beider Geraden (Cramersche Regel)
  $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} D = -5,\ D_x = -2,\ D_y = -7 \ \Rightarrow$:

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden mit der Formel.

Eingabe: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0`

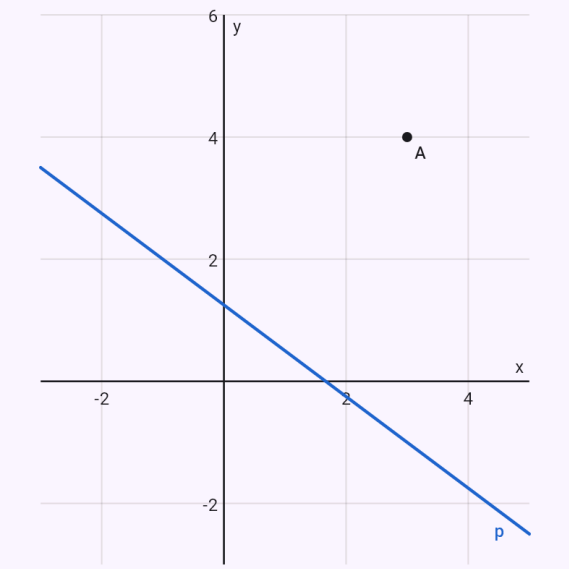
Ergebnis

$$v(A, p) = 4$$

Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z):
  $p: 3x + 4y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (3;\ 4)$
- Der Abstand des Punktes von der Geraden
  $v(A, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} =$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Derselbe Abstand über den Lotfußpunkt.

Eingabe: `A[3; 4]`

`p: 3x + 4y - 5 = 0` Über den Lotfußpunkt

Ergebnis

$$v(A,p) = 4$$

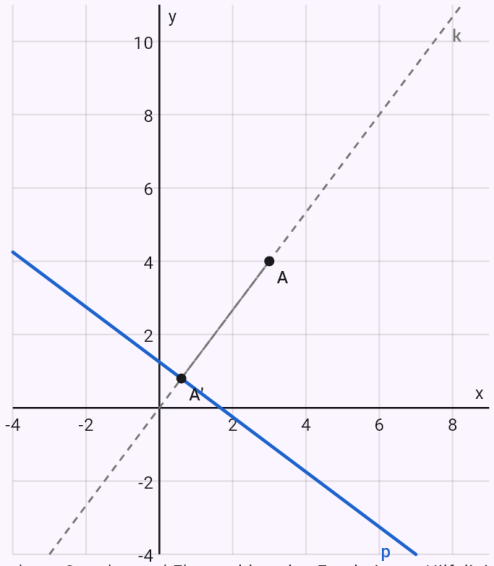
Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $p: 3x + 4y - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (3;\,4)$
- Das Lot durch A auf die Gerade p – der Richtungsvektor der einen ist der Normalenvektor der anderen $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (3;\,4),\; k: x = 3 + 3t,\; y = 4 + 4t,\; t \in \mathbb{R}$
- Der Lotfußpunkt A' ist der Schnitt des Lots mit p – einsetzen und t berechnen

  $3 \cdot (3 + 3t) + 4 \cdot (4 + 4t) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{5},\; A'\left[\frac{3}{5};\right.$
- Der Abstand des Punktes von der Geraden

  $$v(A,p) = |AA'| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = 4$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Schwerpunkt, Höhen und Höhenschnittpunkt eines Dreiecks.

Eingabe: `A[1; 2]`

`B[5; 2]`

`C[3; 6]` Schwerpunkt und Höhen

Ergebnis

$$T\left[3;\ \frac{10}{3}\right]$$

$$v_a : x - 2y + 3 = 0$$

$$v_b : x + 2y - 9 = 0$$

$$v_c : x - 3 = 0$$

$$V[3;\ 3]$$

$$|v_a| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}5777,\ |v_b| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx$$

Lösungsweg

- Der Schwerpunkt – der Durchschnitt der Koordinaten der Ecken

  $$T = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{1+5+3}{3};\ \frac{2+2+6}{3}\right],\ T\left[3;\ \frac{10}{3}\right.$$

- Die Höhe von A steht senkrecht auf der Gegenseite – deren Vektor ist ihr Normalenvektor, ihre Länge der Abstand der Ecke von der Seite

  $$\overrightarrow{BC} = (-2;\ 4)\ \rightarrow\ (1;\ -2) = \vec{n}_{v_a},\ v_a : x - 2y + 3 = 0,$$

- Die Höhe von B steht senkrecht auf der Gegenseite – deren Vektor ist ihr Normalenvektor, ihre Länge der Abstand der Ecke von der Seite

  $$\overrightarrow{CA} = (-2;\ -4)\ \rightarrow\ (1;\ 2) = \vec{n}_{v_b},\ v_b : x + 2y - 9 = 0,$$

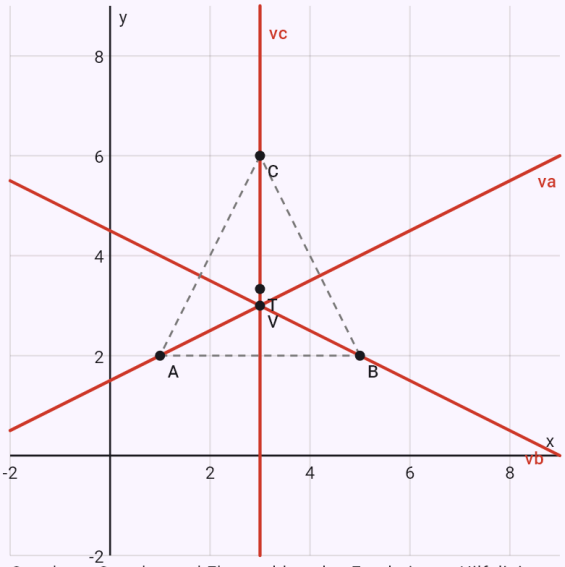
- Die Höhe von C steht senkrecht auf der Gegenseite – deren Vektor ist ihr Normalenvektor, ihre Länge der Abstand der Ecke von der Seite

  $$\overrightarrow{AB} = (4;\ 0)\ \rightarrow\ (1;\ 0) = \vec{n}_{v_c},\ v_c : x - 3 = 0,\ |v_c| = v$$

- Der Höhenschnittpunkt – zwei Höhen geschnitten

  $$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow V[3;\ 3]$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Ein Punkt an einer Geraden gespiegelt.

Eingabe: `A[1; 2]`

`p: x - y = 0` Spiegelung

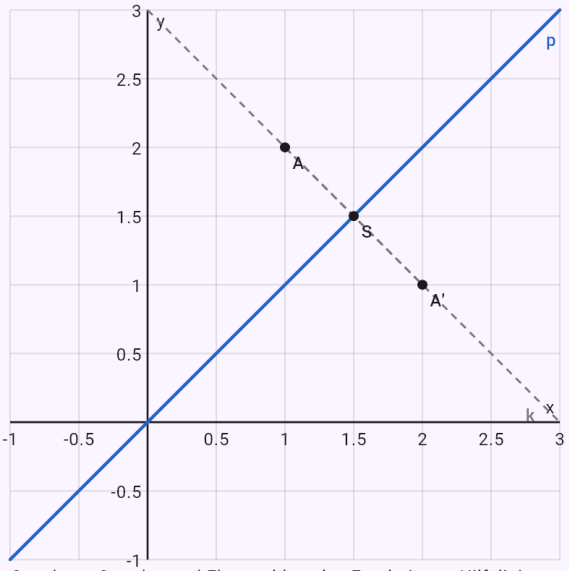
Ergebnis

$A'[2;\ 1]$

Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $p: x - y = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_p = (1;\ -1)$
- Das Lot durch A auf die Gerade p – der Richtungsvektor der einen ist der Normalenvektor der anderen $\vec{u}_k = \vec{n}_p = (1;\ -1),\ k: x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$
- Der Lotfußpunkt S ist der Schnitt des Lots mit p – einsetzen und t berechnen $(1 + t) - (2 - t) = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2},\ S\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$
- Der Spiegelpunkt: das Zentrum (der Lotfußpunkt) ist der Mittelpunkt zwischen dem Punkt und seinem Bild $A' = 2S - A = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1;\ 2 \cdot \frac{3}{2} - 2\right),\ A'[2;\ 1]$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Ein Dreieck um einen Vektor verschoben.

Eingabe: `A[1; 2]`

`B[4; 2]`

`C[2; 5]`

`u = (3; -1)`

`translation(A, B, C, u)`

Ergebnis

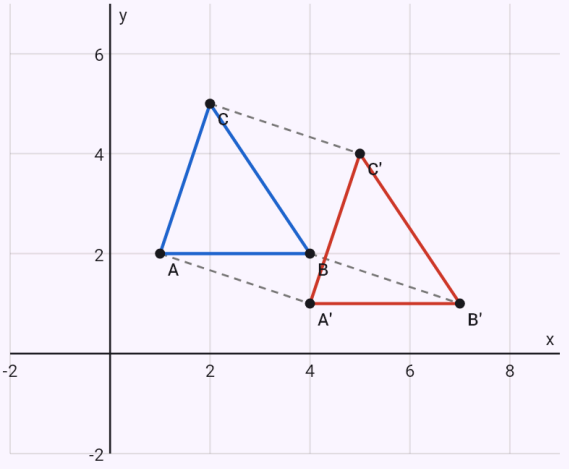
$A'[4;\ 1],\ B'[7;\ 1]$

$C'[5;\ 4]$

Lösungsweg

- Verschiebung um einen Vektor: Jeder Punkt X wird um denselben Vektor verschoben, X' = X + u: $X' = X + \vec{u},\ \vec{u} = (3;\ -1)$
- Das Bild eines Punktes: $A' = [1 + 3;\ 2 + (-1)] = [4;\ 1]$
- Das Bild eines Punktes: $B' = [4 + 3;\ 2 + (-1)] = [7;\ 1]$
- Das Bild eines Punktes: $C' = [2 + 3;\ 5 + (-1)] = [5;\ 4]$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Ein Dreieck um 90° um S gedreht.

Eingabe: `A[3; 1]`
`B[5; 1]`
`C[3; 4]`
`S[1; 1]`
`rotation(A, B, C, S, 90)`

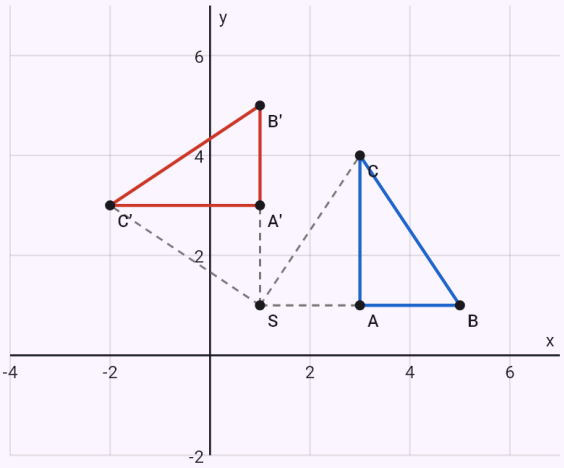
Ergebnis

$A'[1;\ 3],\ B'[1;\ 5]$
$C'[-2;\ 3]$

Lösungsweg

- Drehung um das Zentrum S um den Winkel φ (positiv gegen den Uhrzeigersinn): Der Vektor X − S wird um φ gedreht und zum Zentrum addiert
  $X' = S + ((x - s_1)\cos\varphi - (y - s_2)\sin\varphi;\ (x - s_1)\sin$
- Das Bild eines Punktes
  $A - S = (2;\ 0),\ A' = [1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Das Bild eines Punktes
  $B - S = (4;\ 0),\ B' = [1 + 4 \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0$
- Das Bild eines Punktes
  $C - S = (2;\ 3),\ C' = [1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1;\ 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Eine Gerade und ein Kreis zentrisch gestreckt mit dem Faktor 2.

Eingabe: `p: x + y - 3 = 0`
`k: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1`

```
S[0; 0]
homothety(p, k, S, 2)
```

Ergebnis

$$p' : x + y - 6 = 0$$

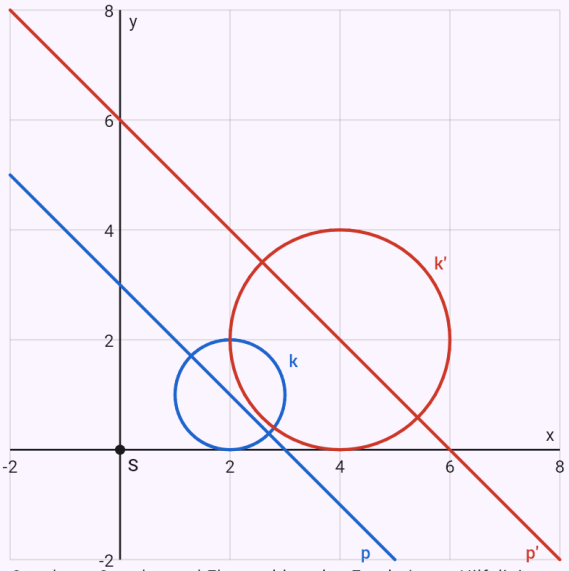
$$k' : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $p : x + y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_p = (1;\,1)$
- Der Kreis k – Mittelpunkt und Radius aus der Mittelpunktsform (quadratische Ergänzung) $k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; S_k[2;\,1],\; r = 1$
- Zentrische Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor κ: Der Vektor X − S wird mit κ multipliziert (ein negatives κ bringt das Bild auf die andere Seite des Zentrums): $X' = S + \kappa\,(X - S),\; \kappa = 2$
- Das Bild der Geraden p: Zwei ihrer Punkte werden abgebildet, das Bild ist die Gerade durch deren Bilder – parallel zum Urbild $P_1[0;\,3],\; P_2[1;\,2] \in p \;\Rightarrow\; P_1'[0;\,6],\; P_2'[2;\,4] \in p'$
- Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Richtungsvektor – Koordinaten tauschen und ein Vorzeichen ändern: $\vec{u}_{p'} = (2;\,-2) \;\Rightarrow\; \vec{n}_{p'} = (1;\,1)$
- Die Koordinatengleichung: die Koeffizienten sind die Koordinaten des Normalenvektors, die Konstante folgt aus dem Punkt $p' : x + y + c = 0,\; P_{p'}[0;\,6] :\; 0 + 6 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -$
- Das Bild des Kreises k: Der Mittelpunkt wird abgebildet, der Radius mit |κ| multipliziert

$$S_k[2;\,1] \;\rightarrow\; S_k'[4;\,2],\; r' = |\kappa|\,r = |2| \cdot 1 = 2$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Ein Kreis an einer Geraden gespiegelt – die Achse per Chip.

Eingabe: `k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4`

`q: y = x` Spiegelung

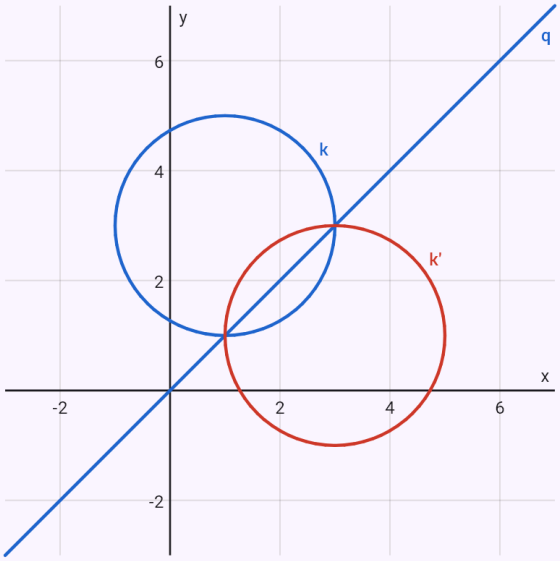
Ergebnis

$$k' : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Lösungsweg

- Der Kreis k – Mittelpunkt und Radius aus der Mittelpunktsform (quadratische Ergänzung)
  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \;\Rightarrow\; S_k[1;\,3],\; r = 2$
- Die Normalform y = mx + b als Koordinatengleichung geschrieben ergibt den Normalenvektor:
  $q : x - y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_q = (1;\,-1)$
- Achsenspiegelung: Das Bild liegt auf der Senkrechten zur Achse, die XX' halbiert – der Punkt wird um das Doppelte seines Abstands von der Achse in Richtung des Normalenvektors (a; b) verschoben:
  $X' = X - 2\,\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}\,(a;\,b),\; q : x - y = 0$
- Das Bild des Kreises k: Der Mittelpunkt wird abgebildet, der Radius bleibt (die Abbildung ist eine Kongruenzabbildung): $S_k[1;\,3] \;\rightarrow\; S_k'[3;\,1],\; r' = r = 2$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt.

Die Schnittgerade zweier Ebenen.

Eingabe: `ρ: x + y + z = 1`

σ: 2x - y + z = 3

Ergebnis

Die Ebenen schneiden sich in der Geraden:

$$p: x = \frac{4}{3} + 2t,\ y = -\frac{1}{3} + t,\ z = -3t$$

Lösungsweg

- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $\rho: x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $\sigma: 2x - y + z - 3 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\sigma = (2;\ -1;\ 1)$
- Keiner der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen – die beiden sind nicht parallel $\vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1),\ \vec{n}_\sigma = (2;\ -1;\ 1),\ \vec{n}_\sigma \neq k \cdot \vec{n}_\rho$
- Die Richtung der Schnittgeraden steht senkrecht auf beiden Normalenvektoren – ihr Kreuzprodukt

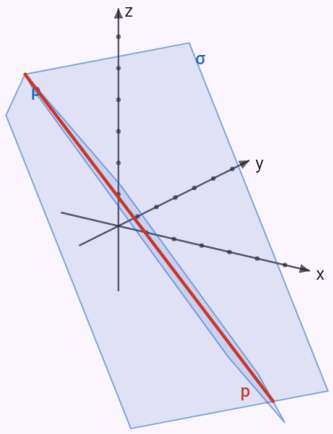
$$\vec{u}_p = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2;\ 1;\ -3)$$

- Ein Punkt von p: Koordinaten wählen, die übrige aus der Gleichung berechnen

$$z = 0: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ P_p\left[\frac{4}{3};\right.$$

- Die Schnittgerade – ihr Punkt und Richtungsvektor: $p: x = \frac{4}{3} + 2t,\ y = -\frac{1}{3} + t,\ z = -3t,\ t \in \mathbb{R}$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Der Winkel einer Geraden und einer Ebene.

Eingabe: p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t
ρ: x + y + z = 1 Schnittwinkel

Ergebnis

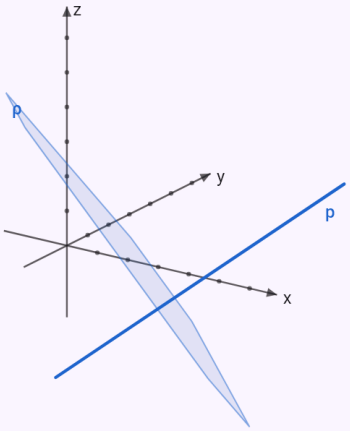
$$\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$$

Lösungsweg

- Aus der Parameterform lesen wir einen Punkt (die Konstanten) und den Richtungsvektor (die Koeffizienten des Parameters) ab: $P_p[1;\ 0;\ -1],\ \vec{u}_p = (1;\ 2;\ 1)$
- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z): $\rho: x + y + z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$
- Der Winkel von Gerade und Ebene: der Winkel von Richtungs- und Normalenvektor ergänzt ihn zu 90°, daher der Sinus also $\varphi \approx 70{,}53^\circ \approx 70^\circ 32'$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{u}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Abstand und gemeinsames Lot windschiefer Geraden.

Eingabe: `p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t`
`q: x = 2 + s, y = 1 + s, z = 1 - s` Abstand

Ergebnis

$$v(p,q) = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$o: x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t$$

Lösungsweg

- Aus der Parameterform lesen wir einen Punkt (die Konstanten) und den Richtungsvektor (die Koeffizienten des Parameters) ab: $P_p[1;\ 2;\ 0],\ \vec{u}_p = (1;\ -1;\ 3)$
- Aus der Parameterform lesen wir einen Punkt (die Konstanten) und den Richtungsvektor (die Koeffizienten des Parameters) ab: $P_q[2;\ 1;\ 1],\ \vec{u}_q = (1;\ 1;\ -1)$
- Der Abstand der windschiefen Geraden

$$\vec{u}_p \times \vec{u}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2;\ 4;\ 2),\ \overrightarrow{P_pP_q} = (1;\ -1;$$

$$v(p,q) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_pP_q}, \vec{u}_p, \vec{u}_q\right]\right|}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} = \frac{|(-2)\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 2\cdot}{2\sqrt{6}}$$

- Das gemeinsame Lot: X auf der ersten Geraden und Y auf der zweiten, XY senkrecht auf beiden Richtungen – ein System für t und s

$$X = P_p + t\vec{u}_p,\ Y = P_q + s\vec{u}_q,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_p = 0,\ \overrightarrow{XY}\cdot\vec{u}_q =$$

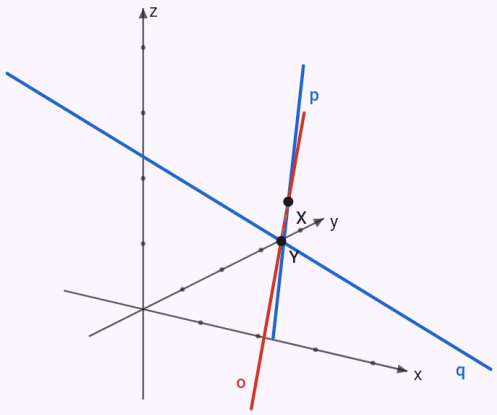
$$\begin{cases} 11t + 3s = 5 \\ -3t - 3s = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$X\left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right],\ Y\left[\frac{11}{6};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}\right]$$

- Die Parameterform – Punkt plus Parameter mal Richtungsvektor:

$$o: x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} - 2t,\ z = \frac{3}{2} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Ein Kreis – quadratische Ergänzung, Mittelpunkt und Radius.

Eingabe: `x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0`

Ergebnis

$$S = [2;\ -3],\ r = 4$$

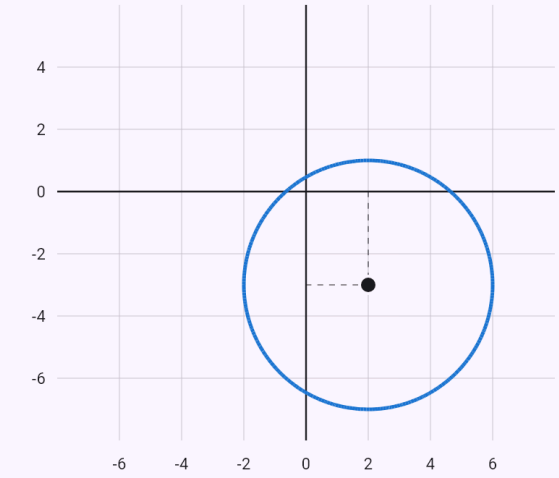
Lösungsweg

- Wir ergänzen quadratisch

  $$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$
  $$\Rightarrow\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

- Die Mittelpunktsgleichung des Kreises:
  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
- Mittelpunkt $S = [2;\ -3]$, Radius $r = 4$

Graph



$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve in der x-y-Ebene.

Eine Ellipse – Halbachsen, Exzentrizität und Brennpunkte.

Eingabe: `x^2/4 + y^2/9 = 1`

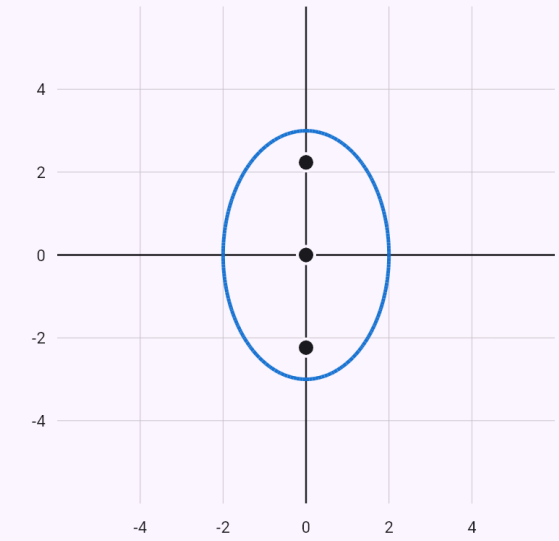
Ergebnis

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{5}$$

Lösungsweg

- Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Mittelpunkt $S = [0;\ 0]$, Halbachsen $a = 3,\ b = 2$ (Hauptachse parallel zur y-Achse), lineare Exzentrizität $e = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{5}$, numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, Brennpunkte $F_1 = \left[0;\ -\sqrt{5}\right],\ F_2 = \left[0;\ \sqrt{5}\right]$

Graph



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve in der x-y-Ebene.

Eine Hyperbel – Brennpunkte und Asymptoten.

Eingabe: `x^2/9 - y^2/16 = 1`

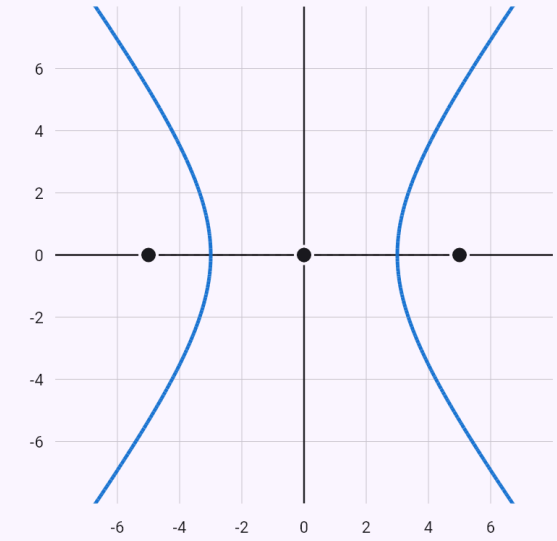
Ergebnis

$$S = [0;\ 0],\ a = 3,\ b = 4,\ e = 5$$

Lösungsweg

- Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Mittelpunkt $S = [0;\ 0]$, Halbachsen $a = 3,\ b = 4$ (Hauptachse parallel zur x-Achse), lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{3}$, Brennpunkte $F_1 = [-5;\ 0],\ F_2 = [5;\ 0]$, Asymptoten $y = \pm\frac{4}{3}x$

Graph



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve in der x-y-Ebene.

Eine Parabel – Scheitel, Brennpunkt und Leitgerade.

Eingabe: `y^2 = 8x`

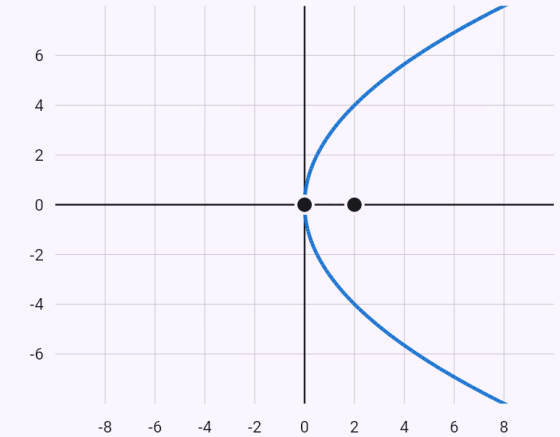
Ergebnis

$$V = [0;\ 0],\ p = 4,\ F = [2;\ 0]$$

Lösungsweg

- Die Scheitelgleichung der Parabel: $y^2 = 8x$
- Scheitel $V = [0;\ 0]$, Parameter $p = 4$, Achse parallel zur x-Achse, Brennpunkt $F = [2;\ 0]$, Leitgerade $x = -2$

Graph



$y^2 = 8x$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve in der x-y-Ebene.

Die Tangente an einen Kreis in seinem Punkt.

Eingabe: `Tangente an den Kreis x^2 + y^2 = 25 im Punkt [3; 4]`

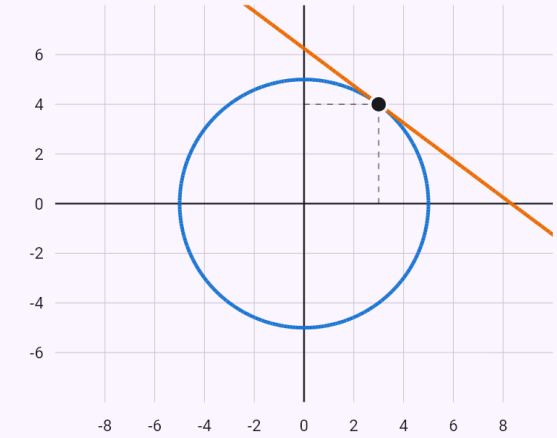
Ergebnis

$$t : 3x + 4y - 25 = 0$$

Lösungsweg

- Der Punkt $T = [3;\ 4]$ liegt auf dem Kegelschnitt – eingesetzt: $3^2 + 4^2 - 25 = 0$
- Die Tangente im Punkt $[x_0; y_0]$ des Kegelschnitts durch „Halbieren“: $x^2 \to x_0 x$, $y^2 \to y_0 y$, $x \to \dfrac{x + x_0}{2}$, $y \to \dfrac{y + y_0}{2}$: $3x + 4y - 25 = 0$
- Die Tangente: $t : 3x + 4y - 25 = 0$

Graph



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$

Der Kegelschnitt und die Geraden; markiert sind die Berührpunkte, die Schnittpunkte und der gegebene Punkt.

Tangenten von einem äußeren Punkt – Diskriminante null für die Steigung k.

Eingabe: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 z bodu [7; 1]`

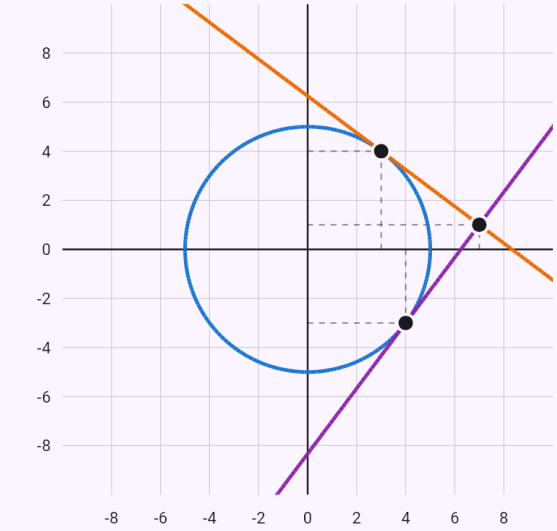
Ergebnis

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$$

Lösungsweg

- Der Punkt $M = [7;\ 1]$ liegt nicht auf dem Kegelschnitt – eingesetzt: $7^2 + 1^2 - 25 = 25$, nicht 0.
- Die Tangenten suchen wir unter den Geraden durch M mit der Steigung k: $y - 1 = k(x - 7) \ \Rightarrow\ y = kx + 1 - 7k$
- Für y setzen wir in die Gleichung des Kegelschnitts ein: $(k^2 + 1)x^2 + (-14k^2 + 2k)x + 49k^2 - 14k - 24 = 0$
- Die Gerade ist genau dann eine Tangente, wenn die Gleichung eine einzige (doppelte) Lösung hat – die Diskriminante ist null: $D = 12k^2 - 7k - 12 = 0 \ \Rightarrow\ k_1 = -\dfrac{3}{4},\ k_2 = \dfrac{4}{3}$
- Die Tangenten: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 4x - 3y - 25 = 0$; die Berührpunkte: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [4;\ -3]$

Graph



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$4x - 3y - 25 = 0$

Der Kegelschnitt und die Geraden; markiert sind die Berührpunkte, die Schnittpunkte und der gegebene Punkt.

Tangenten parallel zu einer Geraden.

Eingabe: `tečny ke kružnici x^2 + y^2 = 25 rovnoběžné s přímkou 3x + 4y = 0`

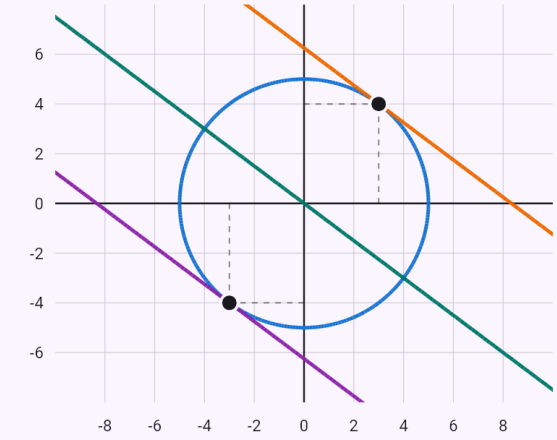
Ergebnis

$$t_1 : 3x + 4y - 25 = 0$$
$$t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$$

Lösungsweg

- Zur Geraden parallele Tangenten haben ihren Normalenvektor und unterscheiden sich nur im Absolutglied c: $t : 3x + 4y + c = 0$
- Für y setzen wir in die Gleichung des Kegelschnitts ein: $y = \frac{-3x - c}{4} \Rightarrow 25x^2 + 6cx + c^2 - 400 = 0$
- Die Gerade ist genau dann eine Tangente, wenn die Gleichung eine einzige (doppelte) Lösung hat – die Diskriminante ist null: $D = c^2 - 625 = 0 \Rightarrow c_1 = -25,\ c_2 = 25$
- Die Tangenten: $t_1 : 3x + 4y - 25 = 0,\ t_2 : 3x + 4y + 25 = 0$; die Berührpunkte: $T_1 = [3;\ 4],\ T_2 = [-3;\ -4]$

Graph



$x^2 + y^2 = 25$
$3x + 4y - 25 = 0$
$3x + 4y + 25 = 0$
$3x + 4y = 0$

Der Kegelschnitt und die Geraden; markiert sind die Berührpunkte, die Schnittpunkte und der gegebene Punkt.

Die Lage einer Ellipse und einer Geraden.

Eingabe: `Lage von x^2/9 + y^2/4 = 1 und y = x + 1`

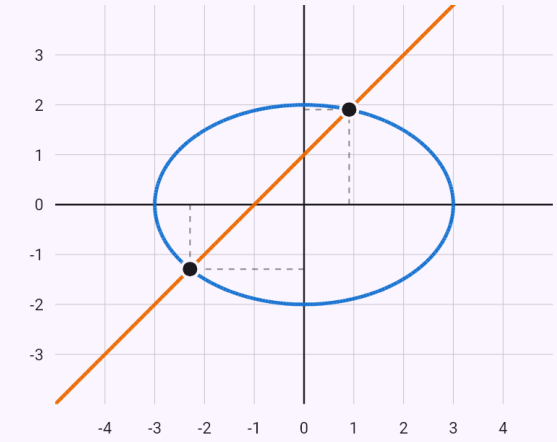
Ergebnis

$$P_1 = \left[-\frac{3\left(3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1 - 3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$
$$P_2 = \left[\frac{3\left(-3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1 + 3\sqrt{3}\right)}{13}\right]$$

Lösungsweg

- Aus der Geradengleichung drücken wir y aus und setzen in den Kegelschnitt ein: $y = x + 1 \Rightarrow 13x^2 + 18x - 27 = 0$
- Die Diskriminante $D = 18^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-27) = 1728$ ist positiv – die Gerade ist eine Sekante mit zwei gemeinsamen Punkten.
- Die Schnittpunkte $P_1 = \left[-\frac{3\left(3 + 4\sqrt{3}\right)}{13};\ \frac{4\left(1 - 3\sqrt{3}\right)}{13}\right],\ P_2 = \left[\frac{3\left(-3 + 4\right.}{13}\right.$

Graph



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
$y = x + 1$

Der Kegelschnitt und die Geraden; markiert sind die Berührpunkte, die Schnittpunkte und der gegebene Punkt.

Eine Kugel – Mittelpunkt und Radius.

Eingabe: `x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`

Ergebnis

$$S = [1;\ -2;\ 3],\ r = 4$$

Lösungsweg

- Wir ergänzen quadratisch
  $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$
  $$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$
- Die Mittelpunktsgleichung der Kugel:
  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- Mittelpunkt $S = [1;\ -2;\ 3]$, Radius $r = 4$

Kugel und Ebene – der Schnittkreis.

Eingabe: `k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0`
`ρ: x + y + z = 1`

Ergebnis

Die Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis mit Mittelpunkt und Radius:

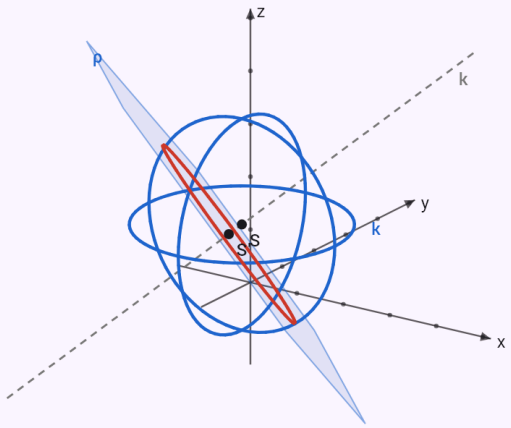
$$S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right],\ \varrho = \frac{\sqrt{141}}{3}$$

Lösungsweg

- Durch quadratische Ergänzung bringen wir die Gleichung der Kugel k in die Mittelpunktsform – Mittelpunkt und Radius
  $$k: (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16\ \Rightarrow\ S[1;\ -2;\ 3$$
- Aus der Koordinatengleichung lesen wir den Normalenvektor ab – die Koeffizienten von x, y (z):
  $$\rho: x + y + z - 1 = 0\ \Rightarrow\ \vec{n}_\rho = (1;\ 1;\ 1)$$
- Der Abstand des Punktes von der Ebene
  $$v(S,\rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1 + (-2) + 3 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$
- Der Abstand des Mittelpunkts von der Ebene ρ ist kleiner als der Radius – die Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis: $v = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 < r = 4$
- Das Lot durch S auf die Ebene ρ verläuft in Richtung ihres Normalenvektors:
  $$k: x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3 + t,\ t \in \mathbb{R}$$
- Der Lotfußpunkt S' ist der Schnitt des Lots mit ρ – einsetzen und t berechnen
  $$(1+t) + (-2+t) + (3+t) - 1 = 0\ \Rightarrow\ t = -\frac{1}{3},\ S'\Big[$$

- Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Lotfußpunkt vom Mittelpunkt, $S'\left[\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3};\ \frac{8}{3}\right]$; der Radius nach Pythagoras
  $$\varrho = \sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx 3{,}9581$$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Kugel und Gerade – die Schnittpunkte.

Eingabe: `k: x^2 + y^2 + z^2 = 9`

`p: x = 1 + t, y = 2t, z = -1 + t`

Ergebnis

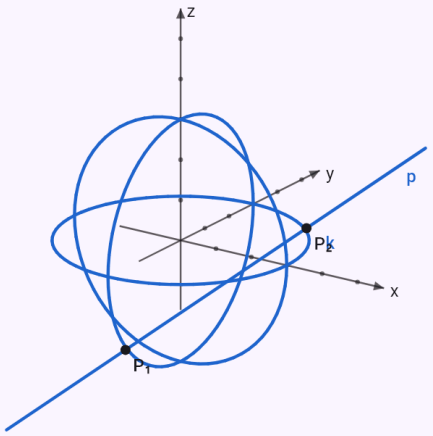
Die Gerade schneidet die Kugel in zwei Punkten:

$$P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\ P$$

Lösungsweg

- Durch quadratische Ergänzung bringen wir die Gleichung der Kugel k in die Mittelpunktsform – Mittelpunkt und Radius: $k: x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow\ S[0;\,0;\,0],\ r=3$
- Aus der Parameterform lesen wir einen Punkt (die Konstanten) und den Richtungsvektor (die Koeffizienten des Parameters) ab: $P_p[1;\,0;\,-1],\ \vec{u}_p=(1;\,2;\,1)$
- Die Parametergleichungen der Geraden p setzen wir in die Kugelgleichung ein
  $(t+1)^2+(2t)^2+(t-1)^2=3^2\ \Rightarrow\ 6t^2-7=0$
- Die Diskriminante $D=0^2-4\cdot 6\cdot(-7)=168$ ist positiv – die Gerade ist eine Sekante mit zwei gemeinsamen Punkten.
- Die Schnittpunkte
  $t_1=-\frac{\sqrt{42}}{6}:\ P_1\left[\frac{6-\sqrt{42}}{6};\ -\frac{\sqrt{42}}{3};\ \frac{-6-\sqrt{42}}{6}\right],\quad t_2$

Graph



Gegebene Geraden und Ebenen blau, das Ergebnis rot, Hilfslinien gestrichelt. Vektoren im Raum – dreh den Graphen mit dem Finger.

Bekannte Einschränkungen

- Koordinaten und Koeffizienten sind Zahlen (ohne Parameter); Kegelschnitte nur in Achsenlage (ohne xy-Glied).
- Abbildungen nur in der Ebene; einen Kreis bildet die App bisher nur ab (kein Abstand, keine Lage, keine Tangenten).
- Die Höhen eines Dreiecks im Raum nur mit ihrer Länge, ohne Gleichungen und Schnittpunkt.
- Der Name einer Geraden oder Ebene ist ein Buchstabe (auch mit Index) – „a: 2x + 3 = 5“ wird daher als Gerade gelesen, nicht als Gleichung.

24. Konstruktionsaufgaben

Konstruktionsaufgaben geben Sie in einem Formular ein – im Bereich „Anwendungen“ des Startbildschirms, Fachgebiet Geometrie (Formular „Konstruktionsaufgaben“). Die Grundaufgabe ist ein Dreieck ABC aus drei Stücken: drei Seiten (SSS), zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (SWS), einer Seite und zwei Winkeln (WSW – der dritte Winkel folgt aus der Winkelsumme 180°) oder zwei Seiten und dem Winkel gegenüber einer von ihnen (SsW). Längen in Zentimetern, Winkel in Grad.

Die Lösung entspricht der Schulpraxis: Analyse (Skizze des fertigen Dreiecks mit hervorgehobenen gegebenen Stücken), Konstruktionsbeschreibung in symbolischer Schreibweise (1. AB; |AB| = 6 cm, 2. k; k(A; 4 cm), 3. C; C ∈ k ∩ l …) und Diskussion der Anzahl der Lösungen. Das Bild unter dem Ergebnis blättern Sie mit den Pfeilen Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind farbig hervorgehoben. Das Ergebnis enthält auch die berechneten Seiten und Winkel, mit denen Sie Ihre Zeichnung nachmessen können.

Die Diskussion erklärt, warum eine Aufgabe keine Lösung hat (Dreiecksungleichung, Winkelsumme, ein Kreis, der die Halbgerade nicht erreicht) oder warum sie zwei hat (SsW mit dem Winkel gegenüber der kürzeren Seite).

Ein Dreieck lässt sich auch mit einer Höhe, einer Seitenhalbierenden, dem Umkreis- oder Inkreisradius konstruieren. Zuerst wird eine Seite gezeichnet; die dritte Ecke liegt im Schnitt zweier Ortslinien: einer Parallelen im Abstand der Höhe, eines Kreises um den Seitenmittelpunkt mit der Seitenhalbierenden als Radius, eines Kreises um einen Endpunkt, eines Winkelschenkels, des Fasskreisbogens über der Seite oder der Umkreise. Bei zwei Seiten und der Höhe aus ihrer gemeinsamen Ecke beginnt man mit der Höhe; mit dem Inkreisradius, einer Seite und einem Winkel daran werden der Inkreis und die Tangente an ihn konstruiert.

Vierecke: Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm und Trapez (AB ∥ CD) aus den Seiten a, b, c, d, den Diagonalen e, f, den Winkeln α, β und der Höhe v – die Stücke werden wie beim Dreieck in Zeilen gewählt. Meist wird zuerst das Dreieck ABC oder ABD konstruiert und die vierte Ecke ergänzt; sonst helfen die sich halbierenden Diagonalen (bei der Raute auch senkrecht), die Parallele im Abstand der Höhe oder beim Trapez ein Hilfsdreieck durch Verschieben der Seite AD oder der Diagonalen BD um den Vektor DC.

Ortslinien sind im selben Formular: die Mittelsenkrechte einer Strecke, die Winkelhalbierende, der Thaleskreis und die Fasskreisbögen, von denen aus eine Strecke unter gegebenem Winkel erscheint (zwei zur Strecke symmetrische Bögen). Jede wird mit Zirkel und Lineal Schritt für Schritt konstruiert; die Analyse erklärt, warum die Punkte genau dort liegen.

Kreise und Tangenten: die Tangenten von einem Punkt an einen Kreis (die Berührpunkte auf einem Thaleskreis), die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise (über Hilfskreise mit der Differenz und der Summe der Radien), der Kreis mit gegebenem Radius, der die Schenkel eines Winkels berührt, die Kreise

durch einen Punkt, die eine Gerade berühren, und die Kreise durch zwei Punkte. Die Diskussion bestimmt die Anzahl der Lösungen aus der Lage – zwei Kreise haben zum Beispiel vier, drei, zwei, eine oder keine gemeinsame Tangente.

Aufgaben mit Beziehungen: eine gegebene Figur (eine Strecke AB, ein Kreis k und ein Punkt A, eine Gerade p und ein Punkt A, ein Kreis k und eine Gerade p, zwei sich schneidende Geraden p, q) und zwei Beziehungen, die der gesuchte Punkt erfüllen soll – über einer Strecke die Ecke C des Dreiecks ABC, sonst ein Punkt X. Die Beziehungen werden in Zeilen gewählt: die Strecke erscheint vom Punkt aus unter einem Winkel (90° = Thaleskreis), gleich weit von zwei Punkten oder zwei Geraden, Abstand von einem Punkt oder einer Geraden, Verhältnis der Abstände von A und B (Kreis des Apollonius), liegt auf einer Geraden oder einem Kreis, die Gerade AX ist Tangente an k, Mittelpunkt eines Kreises mit Radius ϱ, der k berührt, und A ist Mittelpunkt von XY mit Y auf k oder p (Punktspiegelung). Jede Beziehung wird zu einer Ortslinie, der gesuchte Punkt liegt in ihrem Schnitt; die Diskussion zählt die Lösungen (über einer Strecke in einer Halbebene, die andere gibt kongruente Spiegelbilder). Unter dem Ergebnis stehen die Abstände des Punktes von den gegebenen Punkten und Geraden als Probe.

Allgemeine Beziehungen zwischen mehreren Punkten (mit Kreis k oder ohne): die Punkte A bis H werden durch Zeilen von Beziehungen angegeben – Punkt auf k, Mittelpunkt, Tangente an k, Länge, Längenverhältnis, senkrecht, parallel, Punkt auf einer Geraden, Winkel und Dreieck (nur was gezeichnet wird). Die Beziehungen werden zu Gleichungen in Koordinaten (Mittelpunkt S im Ursprung, erster Punkt auf der x-Achse) und exakt gelöst, mit Wurzeln. Ergebnis sind die Längen zwischen den Punkten (mit Kreis auch als Vielfache von r), die Probe und die Zahl der Lösungen bis auf Kongruenz. Wo möglich folgt eine Schulkonstruktion: jeder Punkt auf zwei Ortslinien – gegebener Kreis, Abstand, Gerade, Tangente, Mittelpunkt, Punktspiegelung – und berechnete Längen als Hypotenuse oder Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks oder nach dem Höhensatz; die Lösung zeigt auch die Potenz eines Punktes und den Sehnen-Tangenten-Winkel, wenn sie gelten. Sonst ehrlich nur die Rechnung und das Bild.

Schnitte von Körpern: Würfel, Quader, regelmäßiges Prisma und regelmäßige Pyramide mit einer Grundfläche von 3 bis 6 Seiten (Ecken ABC… und A'B'C'…, die Spitze der Pyramide V) und das regelmäßige Tetraeder ABCD. Die Schnittebene geben die Punkte X, Y, Z an, je einer pro Zeile: AE=2 ist der Punkt auf der Strecke AE 2 cm von A – die Strecke kann eine Kante, eine Flächen- oder Raumdiagonale oder die Achse SS' sein (S, S' die Mittelpunkte der Grundflächen), ein Abstand größer als ihre Länge ergibt einen Punkt auf der Verlängerung; X: AB = 1:2 ist der Punkt X, der AB im Verhältnis 1 : 2 teilt. Hilfspunkte lassen sich in anderen Zeilen verwenden. Der Körper ist im Schrägbild mit gestrichelten verdeckten Kanten; ein regelmäßiges Dreieck, Fünfeck oder Sechseck in der Grundfläche wird zuerst daneben in wahrer Größe gezeichnet und ins Schrägbild übertragen. Der Schnitt entsteht Seite für Seite nach den Schulregeln: Punkte derselben Fläche werden verbunden, parallele Flächen werden in Parallelen geschnitten, die Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Hilfspunkt T, der auch in der Nachbarfläche liegt, und die Gerade eines Punktes im Inneren wird mit einer senkrechten

Hilfsebene in die Grundfläche übertragen. Unter dem Bild lässt sich der fertige Schnitt im Raum mit dem Finger drehen.

Beispiele

Dreieck aus drei Seiten (SSS).

Eingabe: `construction(triangle; a=5; b=4; c=6)`

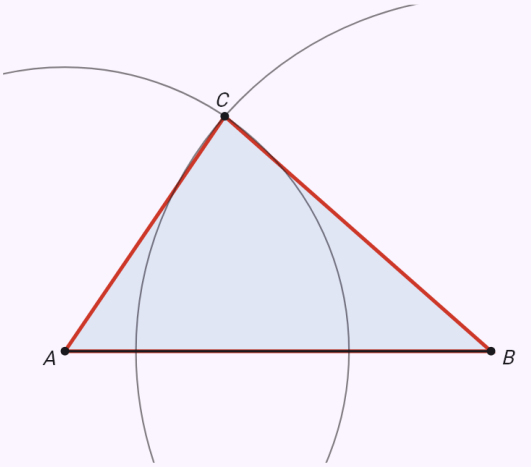
Ergebnis

$$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 55{,}77^\circ,\ \beta \approx 41{,}41^\circ,\ \gamma \approx 82{,}82^\circ$$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius b
- 3. $l;\ l(B;\ 5\,\text{cm})$ – der Kreis l mit Mittelpunkt B und Radius a
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – die dritte Ecke ist der Schnittpunkt.
- 5. $\triangle ABC$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Die Dreiecksungleichung $a + b > c$ gilt, die Kreise schneiden sich. In einer Halbebene der ersten Seite hat die Aufgabe eine Lösung (in der anderen liegt ihr kongruentes Spiegelbild).

Graph



Schritt 5 von 5
5. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS).

Eingabe: `construction(triangle; b=4; c=6; alpha=60)`

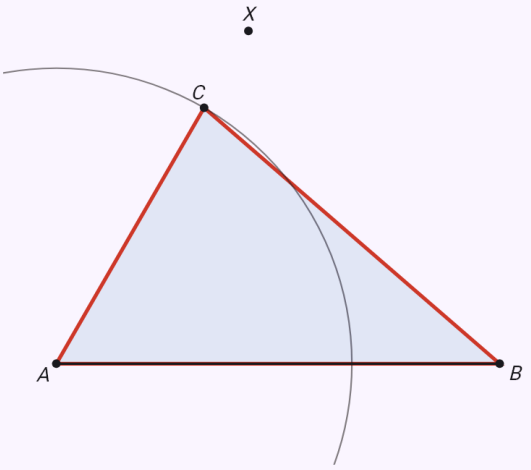
Ergebnis

$$a \approx 5{,}29\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 40{,}89^\circ,\ \gamma \approx 79{,}11^\circ$$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 60^\circ$ – wir tragen den Winkel α an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(A;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius b
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – die dritte Ecke ist der Schnittpunkt.
- 5. $\triangle ABC$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In einer Halbebene der ersten Seite hat die Aufgabe eine Lösung (in der anderen Halbebene liegt ihr kongruentes Spiegelbild).

Graph



Schritt 5 von 5
5. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Eine Seite und zwei Winkel, einer davon nicht an der Seite – der dritte Winkel wird berechnet (WSW).

Eingabe: `construction(triangle; c=6; alpha=50; gamma=70)`

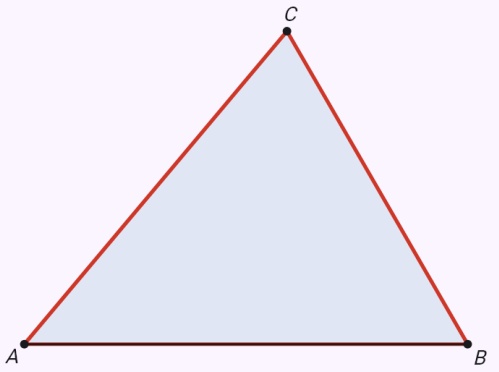
Ergebnis

$$a \approx 4{,}89\,\text{cm},\ b \approx 5{,}53\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 50^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 70^\circ$$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 50^\circ,\ \gamma = 70^\circ$
- Den dritten Winkel berechnen wir aus der Winkelsumme im Dreieck: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 50^\circ$ – wir tragen den Winkel α an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{AX}$
- 3. $\angle ABY;\ |\angle ABY| = 60^\circ$ – wir tragen den Winkel β an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{BY}$
- 4. $C;\ C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$ – die dritte Ecke ist der Schnittpunkt.
- 5. $\triangle ABC$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In einer Halbebene der ersten Seite hat die Aufgabe eine Lösung (in der anderen Halbebene liegt ihr kongruentes Spiegelbild).

Graph



Schritt 5 von 5
5. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Winkel gegenüber der kürzeren von zwei Seiten – zwei Lösungen (SsW).

Eingabe: `construction(triangle; a=4; c=6; alpha=30)`

Ergebnis

$\triangle ABC_1$:

$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 2{,}55\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 18{,}59^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

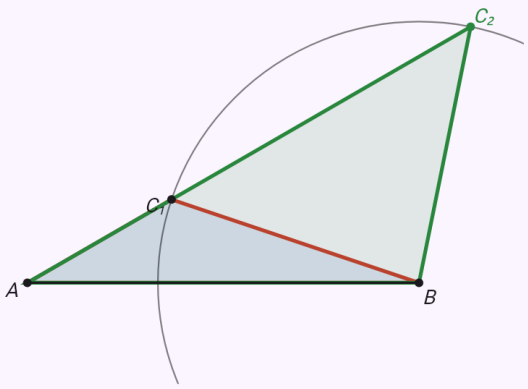
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}84\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 30^\circ,\ \beta \approx 101{,}41^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $a = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 30^\circ$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $\angle BAX;\ |\angle BAX| = 30^\circ$ – wir tragen den Winkel α an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{AX}$
- 3. $k;\ k(B;\,4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt B und Radius a
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{AX} \cap k$ – es gibt zwei Schnittpunkte, jeder ist die dritte Ecke eines Dreiecks.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Der Kreis schneidet die Halbgerade in zwei Punkten – in einer Halbebene der ersten Seite hat die Aufgabe zwei Lösungen, zwei verschiedene Dreiecke.

Graph



Schritt 5 von 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Seiten, die die Dreiecksungleichung verletzen.

Eingabe: `construction(triangle; a=2; b=3; c=6)`

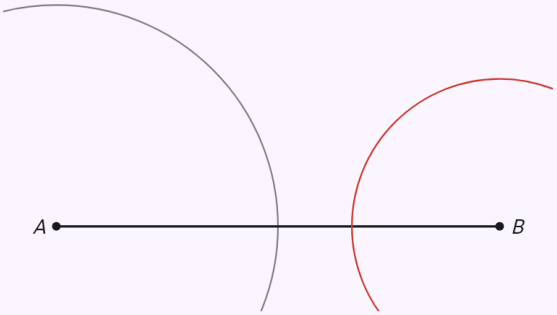
Ergebnis

Eine Figur mit den gegebenen Stücken lässt sich nicht konstruieren.

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $a = 2\,\mathrm{cm},\ b = 3\,\mathrm{cm},\ c = 6\,\mathrm{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\mathrm{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $k;\ k(A;\ 3\,\mathrm{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius b
- 3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$ – der Kreis l mit Mittelpunkt B und Radius a
- Diskussion: Die Dreiecksungleichung gilt nicht ($a + b = 5\,\mathrm{cm} \leq c = 6\,\mathrm{cm}$) – die Kreise schneiden sich nicht, es gibt kein Dreieck.

Graph



Schritt 3 von 3
3. $l;\ l(B;\ 2\,\mathrm{cm})$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Seite c, Höhe und Seitenhalbierende dazu – zwei Lösungen.

Eingabe: `construction(triangle; c=6; vc=4; tc=5)`

Ergebnis

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 7{,}21\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha = 90^\circ,\ \beta \approx 33{,}69^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

$\triangle ABC_2$:

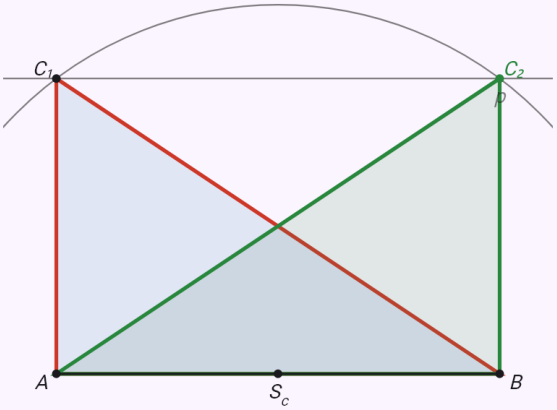
$a = 4\,\text{cm},\ b \approx 7{,}21\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 33{,}69^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma \approx 56{,}31^\circ$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 4\,\text{cm},\ t_c = 5\,\text{cm}$
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 4\,\text{cm}$ – die Parallele p zu AB im Abstand v_c
- 3. $S_c;\ S_c \in AB,\ |AS_c| = |S_cB|$ – der Mittelpunkt S_c der Strecke AB (Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten mit der Strecke).
- 4. $k;\ k(S_c;\ 5\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt S_c und Radius t_c
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in p \cap k$ – es gibt zwei Schnittpunkte, jeder ist die dritte Ecke eines Dreiecks.
- 6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In der Halbebene über der ersten Seite haben die Ortslinien 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat ebenso viele Lösungen (in der anderen Halbebene liegen ihre kongruenten Spiegelbilder).

Graph



Schritt 6 von 6

6. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Seite c, die Höhe dazu und der gegenüberliegende Winkel – der Fasskreisbogen.

Eingabe: `construction(triangle; c=6; vc=3; gamma=60)`

Ergebnis

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

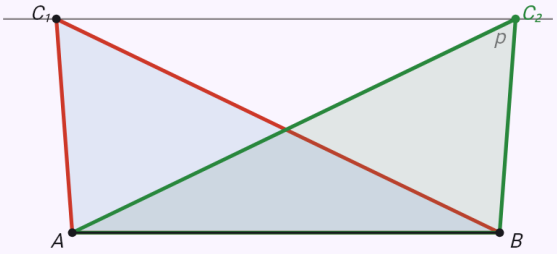
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $c = 6\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm},\ \gamma = 60^\circ$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. p; $p \parallel AB,\ |p, AB| = v_c = 3\,\text{cm}$ – die Parallele p zu AB im Abstand v_c
- 3. k; $|\angle AXB| = 60^\circ,\ X \in k$ – der Bogen k, von dem aus die Strecke AB unter dem Winkel γ erscheint (konstruiert wie in „Fasskreisbogen“).
- 4. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in p \cap k$ – es gibt zwei Schnittpunkte, jeder ist die dritte Ecke eines Dreiecks.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In der Halbebene über der ersten Seite haben die Ortslinien 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat ebenso viele Lösungen (in der anderen Halbebene liegen ihre kongruenten Spiegelbilder).

Graph



Schritt 5 von 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Eine Seite, der Umkreisradius und eine weitere Seite – zwei Umkreise.

Eingabe: `construction(triangle; c=6; r=4; a=5)`

Ergebnis

$\triangle ABC_1$:

$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 1{,}38\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 9{,}91^\circ,\ \gamma \approx 131{,}41^\circ$

$\triangle ABC_2$:

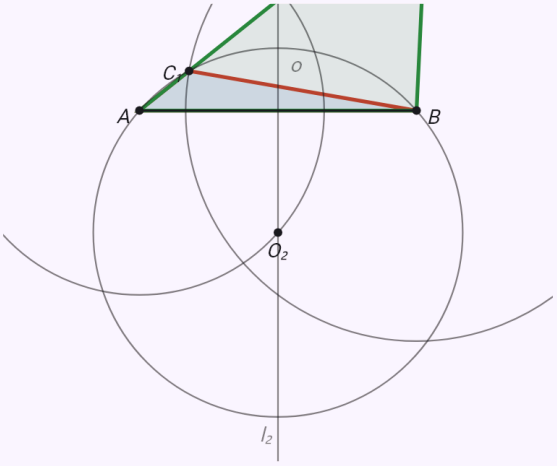
$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 7{,}99\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 38{,}68^\circ,\ \beta \approx 92{,}73^\circ,\ \gamma \approx 48{,}59^\circ$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $c = 6\,\text{cm},\ r = 4\,\text{cm},\ a = 5\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – die Mittelsenkrechte o der Strecke AB, konstruiert wie in der Aufgabe „Mittelsenkrechte“.
- 3. k; $k(A;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius r
- 4. O_1, O_2; $O_1, O_2 \in o \cap k$ – die Schnittpunkte O_1, O_2
- 5. l_1, l_2; $l_1(O_1;\ r),\ l_2(O_2;\ r)$ – der Umkreis l_1, l_2 mit Mittelpunkt O_1, O_2
- 6. m; $m(B;\ 5\,\text{cm})$ – der Kreis m mit Mittelpunkt B und Radius a
- 7. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in (l_1 \cup l_2) \cap m$ – es gibt zwei Schnittpunkte, jeder ist die dritte Ecke eines Dreiecks.
- 8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In der Halbebene über der ersten Seite haben die Ortslinien 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat ebenso viele Lösungen (in der anderen Halbebene liegen ihre kongruenten Spiegelbilder).

Graph



Schritt 8 von 8

8. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Zwei Seiten und die Höhe aus ihrer gemeinsamen Ecke – die Höhe zuerst.

Eingabe: `construction(triangle; a=5; b=4; vc=3)`

Ergebnis

$\triangle AB_1C$:

$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 6{,}65\,\text{cm}$

$\alpha \approx 48{,}59^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 94{,}54^\circ$

$\triangle AB_2C$:

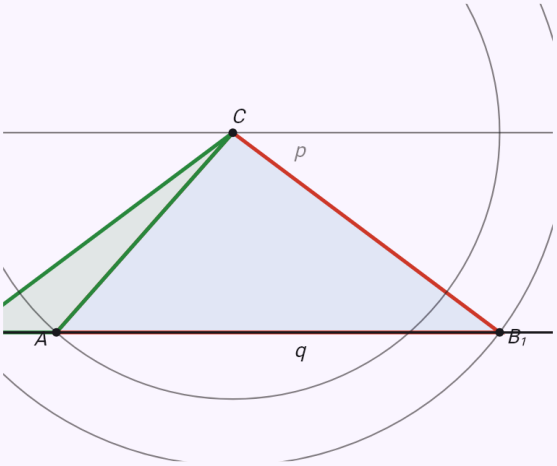
$a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c \approx 1{,}35\,\text{cm}$

$\alpha \approx 131{,}41^\circ,\ \beta \approx 36{,}87^\circ,\ \gamma \approx 11{,}72^\circ$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $a = 5\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ v_c = 3\,\text{cm}$
- 1. q; $A, B \in q$ – eine beliebige Gerade q, auf der die Seite AB liegen wird.
- 2. p; $p \parallel q,\ |p, q| = v_c = 3\,\text{cm}$ – die Parallele p zu q im Abstand v_c
- 3. C; $C \in p$ – ein beliebiger Punkt C der Geraden p
- 4. k; $k(C; 4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt C und Radius b
- 5. A; $A \in k \cap q$ – einer der Schnittpunkte, A (der andere ergibt ein kongruentes Dreieck).
- 6. l; $l(C; 5\,\text{cm})$ – der Kreis l mit Mittelpunkt C und Radius a
- 7. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in l \cap q$ – es gibt zwei Schnittpunkte, jeder ist die dritte Ecke eines Dreiecks.
- 8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Der Kreis l schneidet die Gerade q in zwei Punkten – die Aufgabe hat zwei Lösungen, zwei verschiedene Dreiecke (der andere Schnittpunkt des Kreises k ergibt nur kongruente).

Graph



Schritt 8 von 8

8. $\triangle AB_1C,\ \triangle AB_2C$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Eine Seite, ein Winkel daran und der Inkreisradius – die Tangente über einen Thaleskreis.

Eingabe: `construction(triangle; c=6; alpha=60; rho=1)`

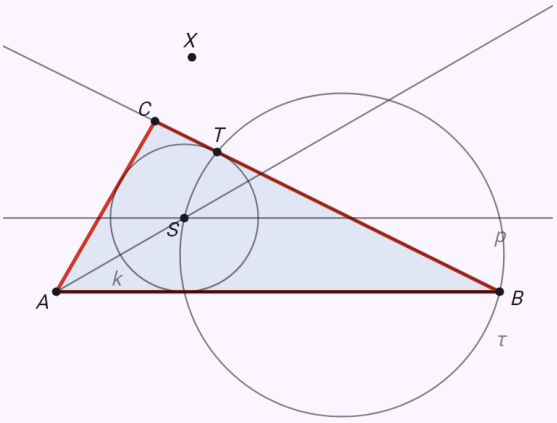
Ergebnis

$$a \approx 5{,}21\,\text{cm},\ b \approx 2{,}67\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 26{,}37^\circ,\ \gamma \approx 93{,}63^\circ$$

Lösungsweg

- Analyse: Skizze des fertigen Dreiecks, die gegebenen Stücke sind hervorgehoben – $c = 6\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ,\ \varrho = 1\,\text{cm}$
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite c
- 2. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60^\circ$ – wir tragen den Winkel α an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{AX}$
- 3. o; $o = \overrightarrow{AY}$, $|\angle BAY| = \frac{\alpha}{2}$ – die Winkelhalbierende o des Winkels α (konstruiert wie in „Winkelhalbierende“); auf ihr liegt der Inkreismittelpunkt.
- 4. p; $p \parallel AB$, $|p, AB| = \varrho = 1\,\text{cm}$ – die Parallele p zu AB im Abstand ϱ
- 5. S; $S \in o \cap p$ – der Schnittpunkt S
- 6. k; $k(S;\ \varrho)$ – der Inkreis k mit Mittelpunkt S
- 7. τ; $\tau(S_1;\ \frac{|BS|}{2})$ – der Thaleskreis τ über der Strecke BS
- 8. T; $T \in \tau \cap k$ – der Berührpunkt T der Tangente von B (der andere Schnittpunkt ist der Berührpunkt auf der ersten Seite).
- 9. $\overrightarrow{BT}$ – die Tangente vom Punkt B an den Inkreis.
- 10. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BT}$ – die dritte Ecke ist der Schnittpunkt.
- 11. $\triangle ABC$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: In einer Halbebene der ersten Seite hat die Aufgabe eine Lösung (in der anderen Halbebene liegt ihr kongruentes Spiegelbild).

Graph



Schritt 11 von 11
11. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Rechteck aus einer Seite und der Diagonalen – der rechte Winkel bei B.

Eingabe: `construction(rectangle; a=5; e=6.5)`

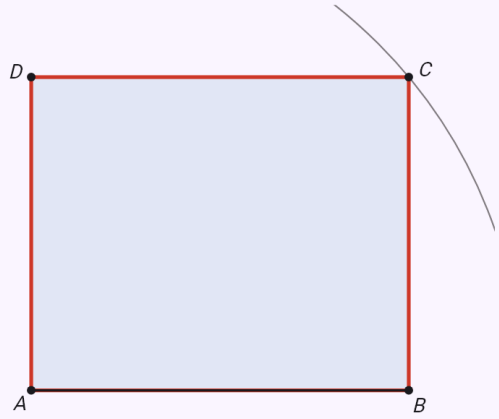
Ergebnis

$$a = 5\,\text{cm},\ b \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$c = 5\,\text{cm},\ d \approx 4{,}15\,\text{cm}$$
$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ,\ \delta = 90^\circ$$
$$e = 6{,}5\,\text{cm},\ f = 6{,}5\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 5\,\text{cm},\ e = 6{,}5\,\text{cm}$): Die Seite AB bestimmt mit den übrigen gegebenen Stücken das Dreieck ABC oder ABD, das wie eine Dreiecksaufgabe konstruiert wird. Die vierte Ecke wird ergänzt – gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind gleich lang und parallel.
- 1. AB; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite a
- 2. $\angle ABY$; $|\angle ABY| = 90^\circ$ – wir tragen den Winkel β an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{BY}$
- 3. k; $k(A;\ 6{,}5\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius e
- 4. C; $C \in \overrightarrow{BY} \cap k$ – der Schnittpunkt C
- 5. D; $|CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – die vierte Ecke D: Gegenseiten sind gleich lang, sie liegt also auf den Kreisen um C, A mit den Radien $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Die Aufgabe hat eine Lösung – jedes weitere solche Viereck ist dazu kongruent.

Graph



Schritt 6 von 6
6. $ABCD$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Eine Raute aus den Diagonalen – die Ecken auf der Mittelsenkrechten von AC.

Eingabe: `construction(rhombus; e=7; f=4)`

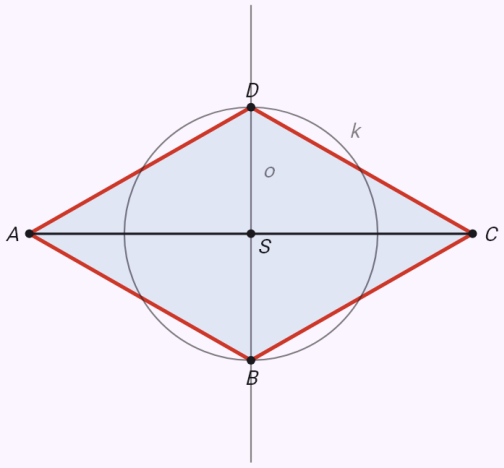
Ergebnis

$a \approx 4{,}03\,\text{cm},\ b \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$c \approx 4{,}03\,\text{cm},\ d \approx 4{,}03\,\text{cm}$
$\alpha \approx 59{,}49^\circ,\ \beta \approx 120{,}51^\circ$
$\gamma \approx 59{,}49^\circ,\ \delta \approx 120{,}51^\circ$
$e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$

Lösungsweg

- Analyse ($e = 7\,\text{cm},\ f = 4\,\text{cm}$): Die Diagonalen von Quadrat und Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich. Die Ecken B und D liegen daher auf der Mittelsenkrechten von AC, die halbe andere Diagonale von deren Mittelpunkt S entfernt.
- 1. $AC;\ |AC| = 7\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Diagonale AC
- 2. $o;\ o \perp AC,\ S \in o$ – die Mittelsenkrechte o der Strecke AC, konstruiert wie in der Aufgabe „Mittelsenkrechte“.
- 3. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt S und Radius $\frac{f}{2}$
- 4. $B, D;\ B, D \in o \cap k$ – die Schnittpunkte B, D
- 5. $ABCD$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Die Aufgabe hat eine Lösung – jedes weitere solche Viereck ist dazu kongruent.

Graph



Schritt 5 von 5
5. $ABCD$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Parallelogramm aus zwei Seiten und einer Diagonalen – zuerst das Dreieck ABC.

Eingabe: `construction(parallelogram; a=6; b=4; e=8)`

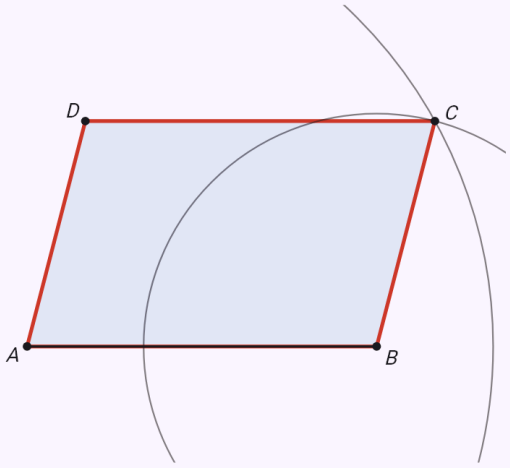
Ergebnis

$$a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 6\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 75{,}52^\circ,\ \beta \approx 104{,}48^\circ$$
$$\gamma \approx 75{,}52^\circ,\ \delta \approx 104{,}48^\circ$$
$$e = 8\,\text{cm},\ f \approx 6{,}32\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ e = 8\,\text{cm}$): Die Seite AB bestimmt mit den übrigen gegebenen Stücken das Dreieck ABC oder ABD, das wie eine Dreiecksaufgabe konstruiert wird. Die vierte Ecke wird ergänzt – gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind gleich lang und parallel.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite a
- 2. $k;\ k(A;\ 8\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius e
- 3. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis l mit Mittelpunkt B und Radius b
- 4. $C;\ C \in k \cap l$ – der Schnittpunkt C
- 5. $D;\ |CD| = |AB|,\ |AD| = |BC|$ – die vierte Ecke D: Gegenseiten sind gleich lang, sie liegt also auf den Kreisen um C, A mit den Radien $|AB|, |BC|$
- 6. $ABCD$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Die Aufgabe hat eine Lösung – jedes weitere solche Viereck ist dazu kongruent.

Graph



Schritt 6 von 6
6. $ABCD$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Trapez aus vier Seiten – das Hilfsdreieck EBC.

Eingabe: `construction(trapezoid; a=7; b=4; c=3; d=4)`

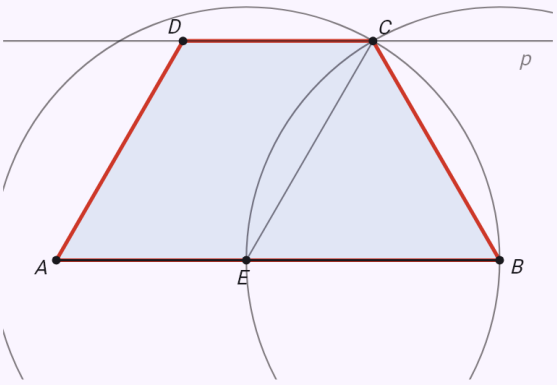
Ergebnis

$$a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm}$$
$$c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$$
$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ$$
$$\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$$
$$e \approx 6{,}08\,\text{cm},\ f \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 7\,\text{cm},\ b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ d = 4\,\text{cm}$): Verschiebt man die Seite AD um den Vektor DC, entsteht das Dreieck EBC mit E auf AB und |AE| = c. Seine Seiten sind |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d, seine Winkel bei E und B sind α und β. Es wird zuerst konstruiert, D dann auf der Parallelen zu AB ergänzt.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – der Punkt E im Abstand $3\,\text{cm}$ von A
- 3. $k;\ k(E;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt E und Radius d
- 4. $l;\ l(B;\ 4\,\text{cm})$ – der Kreis l mit Mittelpunkt B und Radius b
- 5. $C;\ C \in k \cap l$ – der Schnittpunkt C
- 6. $D;\ D \in p,\ p \parallel AB,\ C \in p,\ |CD| = 3\,\text{cm}$ – die Ecke D auf der Parallelen zu AB durch C, im Abstand $3\,\text{cm}$ davon.
- 7. $ABCD$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Die Aufgabe hat eine Lösung – jedes weitere solche Viereck ist dazu kongruent.

Graph



Schritt 7 von 7
7. $ABCD$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Trapez aus drei Seiten und einem Winkel – zwei Lösungen.

Eingabe: `construction(trapezoid; a=7; b=3.5; c=3; alpha=60)`

Ergebnis

ABC_1D_1 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 1{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 21{,}79^\circ$

$\gamma \approx 158{,}21^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 3{,}97\,\text{cm},\ f \approx 6{,}38\,\text{cm}$

ABC_2D_2 :

$a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm}$

$c = 3\,\text{cm},\ d = 2{,}5\,\text{cm}$

$\alpha = 60^\circ,\ \beta \approx 38{,}21^\circ$

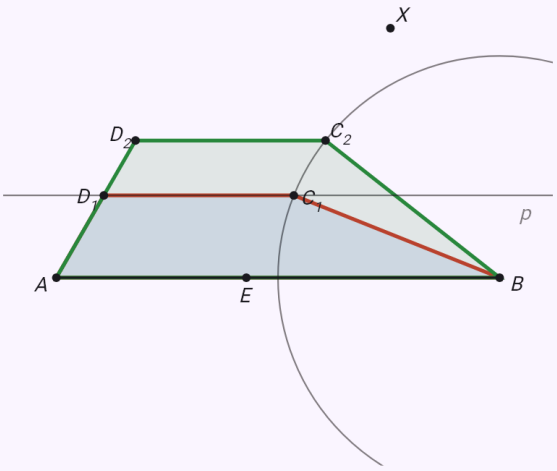
$\gamma \approx 141{,}79^\circ,\ \delta = 120^\circ$

$e \approx 4{,}77\,\text{cm},\ f \approx 6{,}14\,\text{cm}$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 7\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^\circ$): Verschiebt man die Seite AD um den Vektor DC, entsteht das Dreieck EBC mit E auf AB und |AE| = c. Seine Seiten sind |EB| = a − c, |BC| = b, |EC| = d, seine Winkel bei E und B sind α und β. Es wird zuerst konstruiert, D dann auf der Parallelen zu AB ergänzt.
- 1. $AB;\ |AB| = 7\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Seite a
- 2. $E;\ E \in AB,\ |AE| = c = 3\,\text{cm}$ – der Punkt E im Abstand $3\,\text{cm}$ von A
- 3. $\angle BEX;\ |\angle BEX| = 60^\circ$ – wir tragen den Winkel α an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{EX}$
- 4. $k;\ k(B;\ 3{,}5\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt B und Radius b
- 5. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in \overrightarrow{EX} \cap k$ – die Schnittpunkte C_1, C_2
- 6. $D_1;\ D_1 \in p,\ p \parallel AB,\ C_1 \in p,\ |C_1D_1| = 3\,\text{cm}$ – die Ecke D_1 auf der Parallelen zu AB durch C_1, im Abstand $3\,\text{cm}$ davon.
- 7. $D_2;\ D_2 \in p,\ p \parallel AB,\ C_2 \in p,\ |C_2D_2| = 3\,\text{cm}$ – die Ecke D_2 auf der Parallelen zu AB durch C_2, im Abstand $3\,\text{cm}$ davon.
- 8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: Es gibt zwei Schnittpunkte – die Aufgabe hat zwei Lösungen, zwei verschiedene Vierecke.

Graph



Schritt 8 von 8

8. $ABC_1D_1,\ ABC_2D_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Mittelsenkrechte einer 6 cm langen Strecke AB.

Eingabe: `construction(segment_bisector; d=6)`

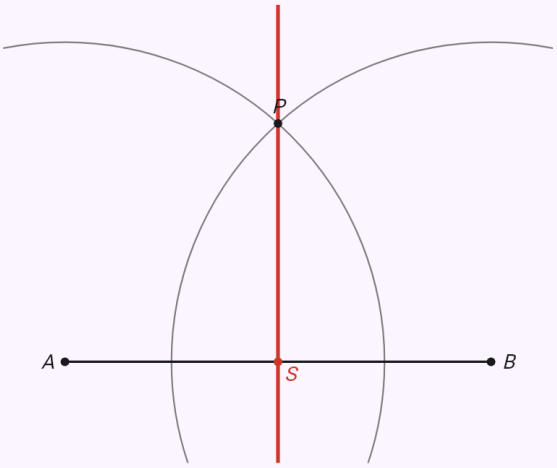
Ergebnis

$$o = \{X;\ |AX| = |BX|\}$$
$$|AS| = |SB| = 3\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$): Ein Punkt X, der von A und B gleich weit entfernt ist, ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ABX – er liegt auf der Senkrechten zu AB durch ihren Mittelpunkt, der Mittelsenkrechten.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Strecke AB
- 2. $k;\ k(A;\ r),\ r = 4{,}5\,\text{cm}$ – der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius $r > \frac{|AB|}{2}$
- 3. $l;\ l(B;\ r)$ – der Kreis l mit Mittelpunkt B und demselben Radius.
- 4. $P, Q;\ P, Q \in k \cap l$ – die Schnittpunkte P, Q
- 5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$ – die Gerade o ist die Mittelsenkrechte: die Menge aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind.

Graph



Schritt 5 von 5

5. $o;\ o = \overleftrightarrow{PQ}$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Winkelhalbierende eines 70°-Winkels.

Eingabe: `construction(angle_bisector; phi=70)`

Ergebnis

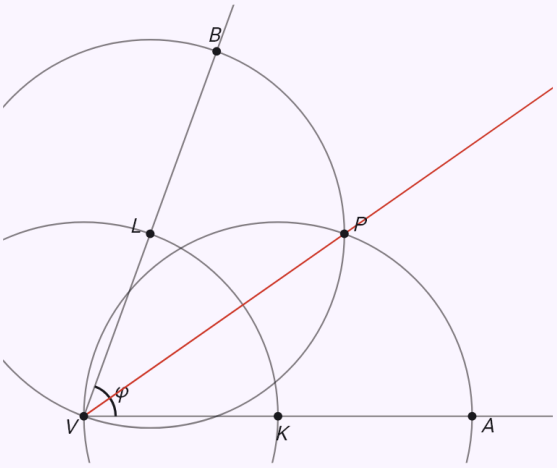
$o = \overrightarrow{VP}$

$|\angle AVP| = |\angle PVB| = 35^\circ$

Lösungsweg

- Analyse ($|\angle AVB| = 70^\circ$): Ein Punkt im Winkel, der von beiden Schenkeln gleich weit entfernt ist, liegt auf der Halbgeraden, die den Winkel halbiert – der Winkelhalbierenden.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 70^\circ$ – wir zeichnen den Winkel $\angle AVB$
- 2. $k;\ k(V;\ 3\,\mathrm{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt V und beliebigem Radius.
- 3. $K, L;\ K \in k \cap \overrightarrow{VA},\ L \in k \cap \overrightarrow{VB}$ – die Schnittpunkte K, L
- 4. $m;\ m(K;\ s),\ s = 3\,\mathrm{cm}$ – der Kreis m mit Mittelpunkt K und Radius $s > \frac{|KL|}{2}$
- 5. $n;\ n(L;\ s)$ – der Kreis n mit Mittelpunkt L und demselben Radius.
- 6. $P;\ P \in m \cap n$ – der Schnittpunkt P
- 7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$ – die Halbgerade o ist die Winkelhalbierende: Sie halbiert den Winkel, ihre Punkte sind von beiden Schenkeln gleich weit entfernt.

Graph



Schritt 7 von 7

7. $o;\ o = \overrightarrow{VP}$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Thaleskreis über einer 5 cm langen Strecke.

Eingabe: `construction(thales; d=5)`

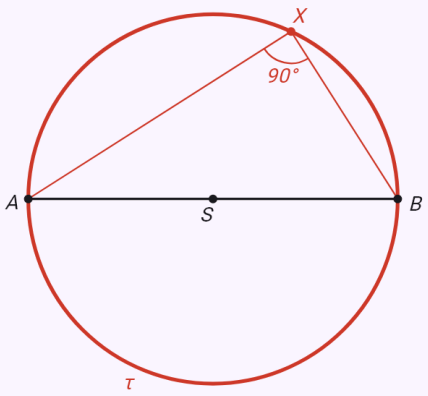
Ergebnis

$\tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm}) \setminus \{A, B\}$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 5\,\mathrm{cm}$): Nach dem Satz des Thales ist der Winkel AXB genau dann ein rechter, wenn X auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt (außer A und B).
- 1. $AB;\ |AB| = 5\,\mathrm{cm}$ – wir zeichnen die Strecke AB
- 2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |SB|$ – der Mittelpunkt S der Strecke AB (Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten mit der Strecke).
- 3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$ – der Thaleskreis τ mit Mittelpunkt S und Radius $\frac{|AB|}{2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$; ohne A und B ist er die gesuchte Menge.

Graph



Schritt 3 von 3

3. $\tau;\ \tau(S;\ 2{,}5\,\mathrm{cm})$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Punkte, von denen aus eine 6 cm lange Strecke unter 60° erscheint.

Eingabe: `construction(angle_arc; d=6; phi=60)`

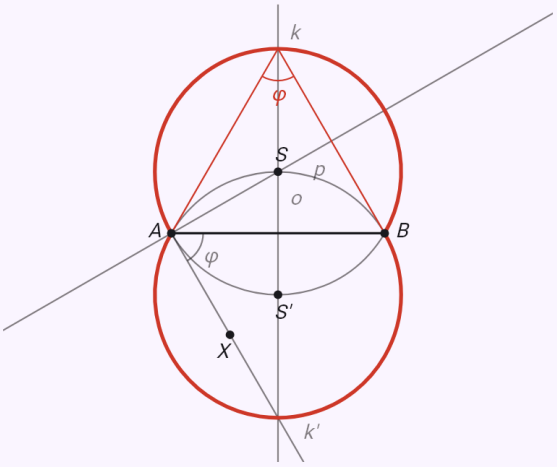
Ergebnis

$$r = \frac{|AB|}{2\sin\varphi} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm},\ \varphi = 60°$): Die Punkte X, von denen aus AB unter dem Winkel φ erscheint, liegen auf zwei zu AB symmetrischen Bögen. Der Umfangswinkel über der Sehne AB ist gleich dem Sehnentangentenwinkel bei A – der Mittelpunkt des Bogens liegt auf der Mittelsenkrechten von AB und auf der Senkrechten zur Tangente in A.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Strecke AB
- 2. o; $o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – die Mittelsenkrechte o der Strecke AB, konstruiert wie in der Aufgabe „Mittelsenkrechte“.
- 3. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = 60°$ – wir tragen den Winkel φ an, sein Schenkel ist die Halbgerade $\overrightarrow{AX}$
- 4. p; $p \perp AX,\ A \in p$ – die Senkrechte p zur Halbgeraden $\overrightarrow{AX}$ im Punkt A
- 5. S; $S \in o \cap p$ – der Schnittpunkt S
- 6. k; $k(S; |SA|)$ – der Kreis k mit Mittelpunkt S und Radius $|SA|$
- 7. k'; $k' = O_{AB}(k)$ – der Kreis k', das Spiegelbild von k an der Geraden AB
- 8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$ – die Bögen über der Strecke AB (ohne A und B) sind die gesuchte Menge: Von jedem ihrer Punkte erscheint AB unter dem Winkel φ

Graph



Schritt 8 von 8

8. $\overset{\frown}{AB} \subset k,\ \overset{\frown}{AB} \subset k'$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Tangenten von einem 5 cm entfernten Punkt an einen Kreis mit Radius 3 cm.

Eingabe: `construction(tangents_point; r=3; d=5)`

Ergebnis

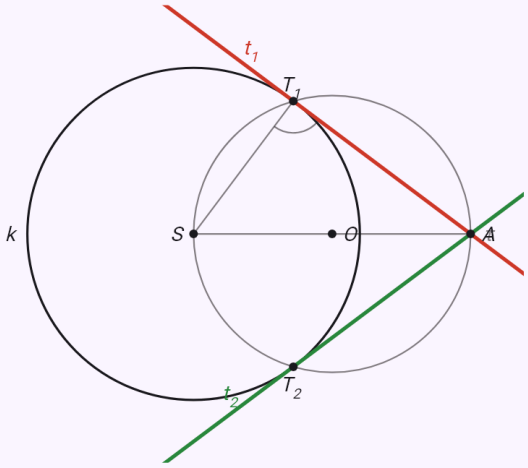
$$|AT_1| = |AT_2| = 4\,\text{cm}$$

$$|AT| = \sqrt{|SA|^2 - r^2}$$

Lösungsweg

- Analyse ($r = 3\,\text{cm},\ |SA| = 5\,\text{cm}$): Eine Tangente steht im Berührpunkt T senkrecht auf dem Radius, der Winkel STA ist also ein rechter. Die Berührpunkte liegen daher auf dem Thaleskreis über SA.
- 1. $k;\ k(S;\ 3\,\text{cm})$ – der Kreis k mit Mittelpunkt S und Radius $3\,\text{cm}$
- 2. $A;\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – der Punkt A im Abstand $5\,\text{cm}$ von S
- 3. $O;\ O \in SA,\ |SO| = |OA|$ – der Mittelpunkt O der Strecke SA (Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten mit der Strecke).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OA|)$ – der Thaleskreis τ über der Strecke SA
- 5. $T_1, T_2;\ T_1, T_2 \in k \cap \tau$ – die Berührpunkte T_1, T_2 sind die Schnittpunkte der Kreise k und τ
- 6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$ – die Tangenten t_1, t_2 vom Punkt A
- Diskussion: Der Punkt A liegt außerhalb des Kreises – von ihm gehen zwei Tangenten aus, symmetrisch zur Geraden SA.

Graph



Schritt 6 von 6

6. $t_1, t_2;\ t_1 = \overleftrightarrow{AT_1},\ t_2 = \overleftrightarrow{AT_2}$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Vier gemeinsame Tangenten zweier Kreise, die außerhalb voneinander liegen.

Eingabe: `construction(common_tangents; r1=3; r2=1.5; d=6)`

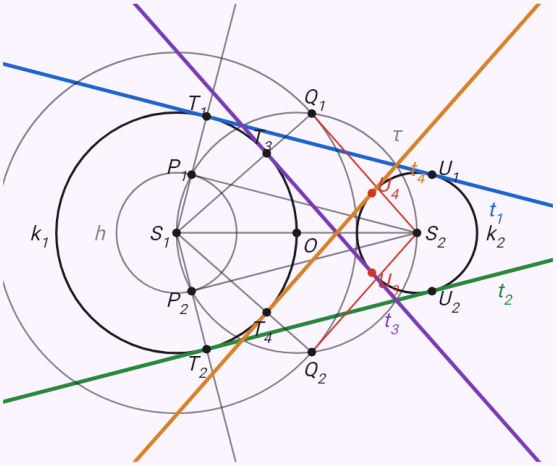
Ergebnis

$$|T_1U_1| = |T_2U_2| \approx 5{,}81\,\text{cm}$$
$$|T_3U_3| = |T_4U_4| \approx 3{,}97\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($r_1 = 3\,\text{cm},\ r_2 = 1{,}5\,\text{cm},\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$): Verschiebt man eine äußere Tangente parallel um den kleineren Radius zu den Mittelpunkten hin, berührt sie einen Hilfskreis um den Mittelpunkt des größeren Kreises mit dem Radius $|r_1 - r_2|$ und geht durch den Mittelpunkt des kleineren. Bei einer inneren Tangente hat der Hilfskreis den Radius $r_1 + r_2$. Die Tangenten vom Mittelpunkt an den Hilfskreis liefert der Thaleskreis über der Zentrale.
- 1. $k_1;\ k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$ – der Kreis k_1 mit Mittelpunkt S_1 und Radius $3\,\text{cm}$
- 2. $k_2;\ k_2(S_2;\ 1{,}5\,\text{cm}),\ |S_1S_2| = 6\,\text{cm}$ – der Kreis k_2 mit Mittelpunkt S_2 und Radius $1{,}5\,\text{cm}$
- 3. $O;\ O \in S_1S_2,\ |S_1O| = |OS_2|$ – der Mittelpunkt O der Strecke S_1S_2 (Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten mit der Strecke).
- 4. $\tau;\ \tau(O;\ |OS_1|)$ – der Thaleskreis τ über der Strecke S_1S_2
- 5. $h;\ h(S_1;\ |r_1 - r_2|),\ |r_1 - r_2| = 1{,}5\,\text{cm}$ – der Hilfskreis h um S_1 mit der Differenz der Radien als Radius, $1{,}5\,\text{cm}$
- 6. $P_1, P_2;\ P_1, P_2 \in h \cap \tau$ – die Schnittpunkte P_1, P_2
- 7. $T_1, T_2;\ T_1 \in \overrightarrow{S_1P_1},\ T_2 \in \overrightarrow{S_1P_2}$ – die Berührpunkte T_1, T_2 sind die Schnittpunkte von $\overrightarrow{S_1P_1}, \overrightarrow{S_1P_2}$ mit dem Kreis k_1
- 8. $t_1, t_2;\ T_1 \in t_1 \parallel S_2P_1,\ T_2 \in t_2 \parallel S_2P_2$ – die äußeren gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 durch die Punkte T_1, T_2, parallel zu S_2P_1, S_2P_2; sie berühren auch den anderen Kreis.
- 9. $h';\ h'(S_1;\ r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$ – der Hilfskreis h' um S_1 mit der Summe der Radien als Radius, $4{,}5\,\text{cm}$
- 10. $Q_1, Q_2;\ Q_1, Q_2 \in h' \cap \tau$ – die Schnittpunkte Q_1, Q_2
- 11. $T_3, T_4;\ T_3 \in S_1Q_1 \cap k_1,\ T_4 \in S_1Q_2 \cap k_1$ – die Berührpunkte T_3, T_4 sind die Schnittpunkte von S_1Q_1, S_1Q_2 mit dem Kreis k_1
- 12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$ – die inneren gemeinsamen Tangenten t_3, t_4 durch die Punkte T_3, T_4, parallel zu S_2Q_1, S_2Q_2
- Diskussion: Die Kreise liegen außerhalb voneinander ($|S_1S_2| = 6\,\text{cm} > r_1 + r_2 = 4{,}5\,\text{cm}$) – es gibt zwei äußere und zwei innere gemeinsame Tangenten.

Graph



Schritt 12 von 12

12. $t_3, t_4;\ T_3 \in t_3 \parallel S_2Q_1,\ T_4 \in t_4 \parallel S_2Q_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Kreis mit Radius 2 cm, der die Schenkel eines 60°-Winkels berührt.

Eingabe: `construction(circle_angle; phi=60; r=2)`

Ergebnis

$$|VS| = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 4\,\text{cm}$$

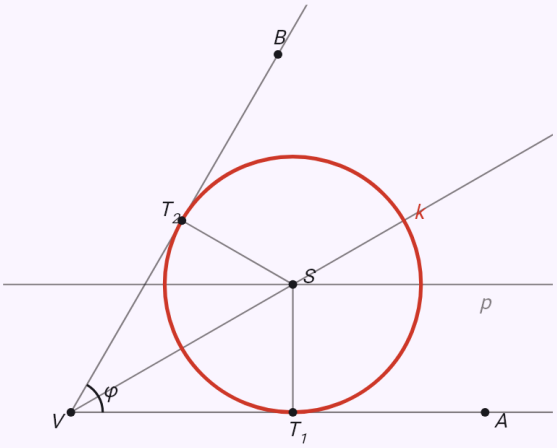
$$|VT_1| = |VT_2| = \frac{r}{\tan\frac{\varphi}{2}} \approx 3{,}46\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($\varphi = 60°,\ r = 2\,\text{cm}$): Der Mittelpunkt hat von beiden Schenkeln den Abstand r – er liegt auf der Winkelhalbierenden und auf der Parallelen zu einem Schenkel im Abstand r. Die Berührpunkte sind die Lotfußpunkte vom Mittelpunkt auf die Schenkel.
- 1. $\angle AVB;\ |\angle AVB| = 60°$ – wir zeichnen den Winkel $\angle AVB$
- 2. $o;\ o = \overrightarrow{VX},\ |\angle AVX| = \frac{\varphi}{2}$ – die Winkelhalbierende o des Winkels $\angle AVB$ (konstruiert wie in „Winkelhalbierende“); ihre Punkte haben von beiden Schenkeln denselben Abstand.
- 3. $p;\ p \parallel VA,\ |p, VA| = r = 2\,\text{cm}$ – die Parallele p zu VA im Abstand r
- 4. $S;\ S \in o \cap p$ – der Schnittpunkt S
- 5. $T_1, T_2;\ ST_1 \perp VA,\ ST_2 \perp VB$ – die Berührpunkte T_1, T_2 sind die Lotfußpunkte vom Mittelpunkt S auf VA, VB
- 6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$ – der gesuchte Kreis k mit dem Mittelpunkt S und dem Radius $2\,\text{cm}$
- Diskussion: Winkelhalbierende und Parallele schneiden sich immer in genau einem Punkt – die Aufgabe hat eine

Lösung.

Graph



Schritt 6 von 6
6. $k;\ k(S;\ 2\,\text{cm})$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Kreise durch einen Punkt, die eine Gerade berühren – zwei Lösungen.

Eingabe: `construction(circle_point_line; v=1.5; r=2.5)`

Ergebnis

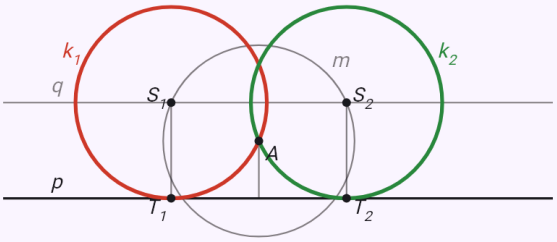
$$k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$$

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{v(2r-v)} \approx 4{,}58\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($|Ap| = v = 1{,}5\,\text{cm},\ r = 2{,}5\,\text{cm}$): Der Mittelpunkt hat von der Geraden p den Abstand r, liegt also auf der Parallelen q zu p im Abstand r auf der Seite von A. Von A hat er ebenfalls den Abstand r, liegt also auch auf dem Kreis m(A; r).
- 1. p – eine beliebige Gerade p
- 2. $A;\ |Ap| = 1{,}5\,\text{cm}$ – der Punkt A im Abstand $1{,}5\,\text{cm}$ von p
- 3. $q;\ q \parallel p,\ |q,p| = r = 2{,}5\,\text{cm}$ – die Parallele q zu p im Abstand r
- 4. $m;\ m(A;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – der Kreis m mit Mittelpunkt A und Radius $2{,}5\,\text{cm}$
- 5. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in q \cap m$ – die Schnittpunkte S_1, S_2
- 6. $T_1, T_2;\ S_1T_1 \perp p,\ S_2T_2 \perp p$ – die Berührpunkte T_1, T_2 sind die Lotfußpunkte vom Mittelpunkt S_1, S_2 auf p
- 7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$ – die gesuchten Kreise k_1, k_2 mit den Mittelpunkten S_1, S_2 und dem Radius $2{,}5\,\text{cm}$
- Diskussion: $|Ap| = 1{,}5\,\text{cm} < 2r = 5\,\text{cm}$ – der Kreis m schneidet die Parallele q in zwei Punkten, die Aufgabe hat zwei Lösungen.

Graph



Schritt 7 von 7

7. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\ 2{,}5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\ 2{,}5\,\text{cm})$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Kreise mit gegebenem Radius durch zwei Punkte – zwei Lösungen, symmetrisch zu AB.

Eingabe: `construction(circle_two_points; d=6; r=5)`

Ergebnis

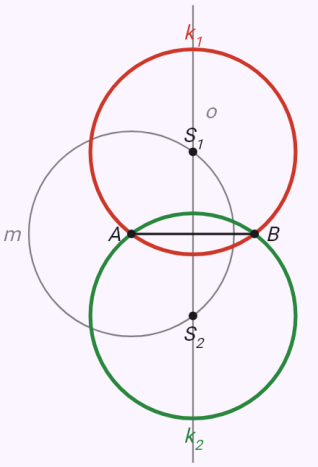
$$k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$$

$$|S_1S_2| = 2\sqrt{r^2 - \frac{|AB|^2}{4}} = 8\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm},\ r = 5\,\text{cm}$): Der Mittelpunkt hat von A und von B den Abstand r – er liegt auf der Mittelsenkrechten von AB und auf dem Kreis m(A; r).
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die Strecke AB
- 2. $o;\ o \perp AB,\ S_{AB} \in o$ – die Mittelsenkrechte o der Strecke AB, konstruiert wie in der Aufgabe „Mittelsenkrechte“.
- 3. $m;\ m(A;\,5\,\text{cm})$ – der Kreis m mit Mittelpunkt A und Radius $5\,\text{cm}$
- 4. $S_1, S_2;\ S_1, S_2 \in o \cap m$ – die Schnittpunkte S_1, S_2
- 5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$ – die gesuchten Kreise k_1, k_2 mit den Mittelpunkten S_1, S_2 und dem Radius $5\,\text{cm}$
- Diskussion: $|AB| = 6\,\text{cm} < 2r = 10\,\text{cm}$ – der Kreis m schneidet die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, die Aufgabe hat zwei Lösungen, symmetrisch zu AB.

Graph



Schritt 5 von 5

5. $k_1, k_2;\ k_1(S_1;\,5\,\text{cm}),\ k_2(S_2;\,5\,\text{cm})$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Ecke C, von der aus AB unter 60° erscheint, in der Höhe 3 cm – Bögen und Parallelen.

Eingabe: `construction(relations_segment; d=6; angle_AB=60; dist_AB=3)`

Ergebnis

$\triangle ABC_1$:

$a \approx 6{,}91\,\text{cm},\ b \approx 3{,}01\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 94{,}26^\circ,\ \beta \approx 25{,}74^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

$\triangle ABC_2$:

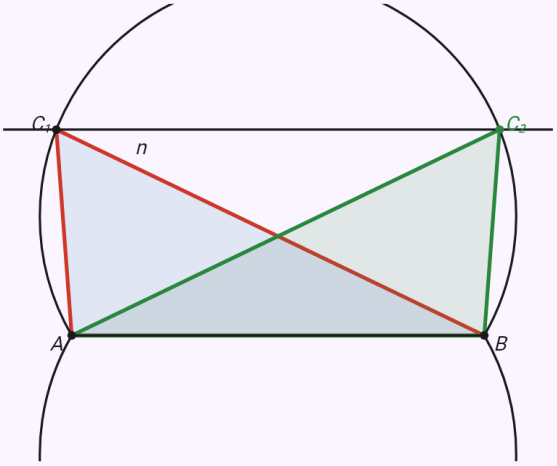
$a \approx 3{,}01\,\text{cm},\ b \approx 6{,}91\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$

$\alpha \approx 25{,}74^\circ,\ \beta \approx 94{,}26^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$): Skizze des fertigen Dreiecks ABC, die gegebenen Beziehungen hervorgehoben. Jede der zwei Beziehungen ergibt eine Ortslinie, auf der die Ecke C liegt – C liegt also in ihrem Schnitt.
- 1. $AB;\ |AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die gegebene Strecke AB.
- 2. $m, m';\ m \cup m' = \{C;\ |\angle ACB| = 60^\circ\}$ – die Punkte, von denen aus die Strecke AB unter dem Winkel 60° erscheint, liegen auf zwei zu AB symmetrischen Bögen m, m' (konstruiert wie in „Fasskreisbogen“).
- 3. $n, n';\ n \parallel AB,\ n' \parallel AB,\ |nAB| = |n'AB| = 3\,\text{cm}$ – die Punkte im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Geraden AB liegen auf zwei Parallelen n, n' zu ihr, je eine auf jeder Seite.
- 4. $C_1, C_2;\ C_1, C_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – die gesuchten Punkte sind die Schnittpunkte beider Ortslinien.
- 5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: in der Halbebene über AB haben die Ortslinien 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat 2 Lösungen (in der anderen Halbebene ihre kongruenten Spiegelbilder).

Graph



Schritt 5 von 5

5. $\triangle ABC_1,\ \triangle ABC_2$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Das Verhältnis |AC| : |BC| = 2 und |BC| = 3 cm – der Kreis des Apollonius.

Eingabe: `construction(relations_segment; d=6; ratio_AB=2; dist_B=3)`

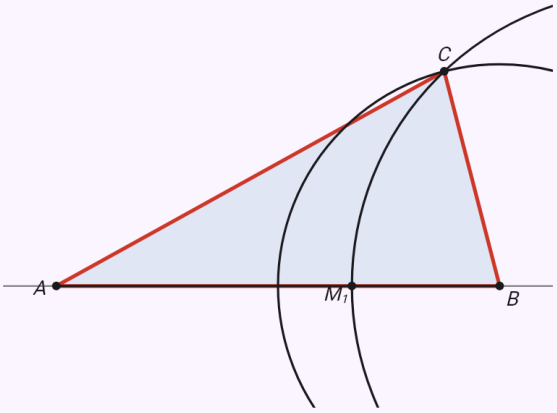
Ergebnis

$$a = 3\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$$
$$\alpha \approx 28{,}96^\circ,\ \beta \approx 75{,}52^\circ,\ \gamma \approx 75{,}52^\circ$$

Lösungsweg

- Analyse ($|AB| = 6\,\text{cm}$): Skizze des fertigen Dreiecks ABC, die gegebenen Beziehungen hervorgehoben. Jede der zwei Beziehungen ergibt eine Ortslinie, auf der die Ecke C liegt – C liegt also in ihrem Schnitt.
- 1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die gegebene Strecke AB.
- 2. M_1, M_2; $M_1, M_2 \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AM_i| : |BM_i| = 2$ – die Punkte, deren Abstände von den Endpunkten der Strecke AB im Verhältnis 2 stehen, liegen auf dem Kreis des Apollonius. Zuerst die Punkte M_1 (innerhalb der Strecke) und M_2 (auf ihrer Verlängerung), die AB in diesem Verhältnis teilen.
- 3. m; $m(S_{M_1M_2};\ \frac{|M_1M_2|}{2})$ – der Kreis des Apollonius m ist der Thaleskreis über dem Durchmesser M_1M_2.
- 4. n; $n(B;\ 3\,\text{cm})$ – die Punkte im Abstand $3\,\text{cm}$ vom Punkt B liegen auf dem Kreis n mit dem Mittelpunkt B
- 5. C; $C \in m \cap n$ – der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt beider Ortslinien.
- 6. $\triangle ABC$ – wir verbinden die Ecken.
- Diskussion: in der Halbebene über AB haben die Ortslinien einen gemeinsamen Punkt – die Aufgabe hat eine Lösung (in der anderen Halbebene ihr kongruentes Spiegelbild).

Graph



Schritt 6 von 6
6. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Berührpunkte der Tangenten von A – AX Tangente und X auf dem Kreis.

Eingabe: `construction(relations_circle_point; r=3; d=5; tangent_A=1; on_k=1)`

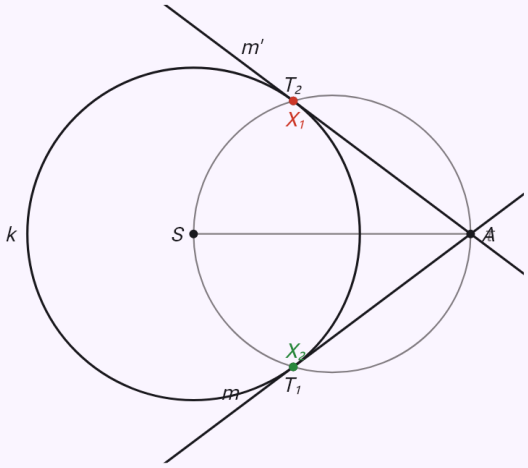
Ergebnis

$$X_1: \ |SX_1| = 3\,\text{cm}, \ |AX_1| = 4\,\text{cm}$$
$$X_2: \ |SX_2| = 3\,\text{cm}, \ |AX_2| = 4\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$): Skizze mit dem gegebenen Kreis k, dem Punkt A und dem gesuchten Punkt X, die gegebenen Beziehungen hervorgehoben. Jede der zwei Beziehungen ergibt eine Ortslinie – X liegt in ihrem Schnitt.
- 1. $k, A;\ k(S;\,3\,\text{cm}),\ |SA| = 5\,\text{cm}$ – wir zeichnen den gegebenen Kreis k und den Punkt A.
- 2. $\tau;\ \tau(S_{SA};\ \frac{|SA|}{2})$ – die Gerade AX soll Tangente an k sein: die Berührpunkte liegen auf dem Thaleskreis τ über dem Durchmesser SA.
- 3. $m, m';\ m = \overleftrightarrow{AT_1},\ m' = \overleftrightarrow{AT_2}$ – τ schneidet k in den Berührpunkten T_1, T_2, durch die die Tangenten m, m' gehen.
- Der Punkt X soll auf dem Kreis k liegen – die Ortslinie ist der Kreis k selbst, er ist schon gezeichnet.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$ – die gesuchten Punkte sind die Schnittpunkte beider Ortslinien.
- Diskussion: die Ortslinien haben 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat 2 Lösungen.

Graph



Schritt 4 von 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap n$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Mittelpunkte der Kreise mit Radius 1 cm, die den Kreis k und die Gerade p berühren.

Eingabe: `construction(relations_circle_line; r=2; d=3; touch_k=1; dist_p=1)`

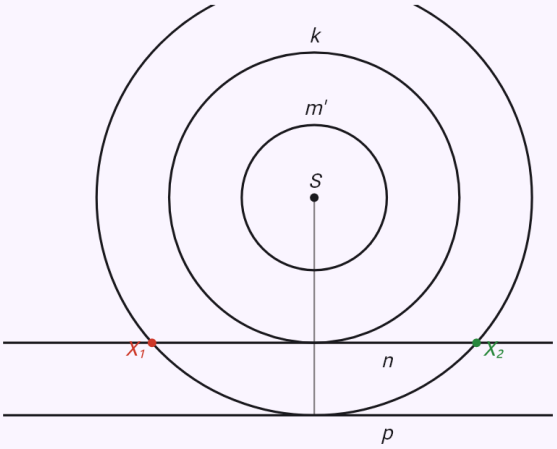
Ergebnis

$$X_1: \ |SX_1| = 3\,\text{cm},\ |X_1p| = 1\,\text{cm}$$
$$X_2: \ |SX_2| = 3\,\text{cm},\ |X_2p| = 1\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$): Skizze mit dem gegebenen Kreis k, der Geraden p und dem gesuchten Punkt X, die gegebenen Beziehungen hervorgehoben. Jede der zwei Beziehungen ergibt eine Ortslinie – X liegt in ihrem Schnitt.
- 1. $k, p;\ k(S;\,2\,\text{cm}),\ |Sp| = 3\,\text{cm}$ – wir zeichnen den gegebenen Kreis k und die Gerade p.
- 2. $m, m';\ m(S;\,3\,\text{cm}),\ m'(S;\,1\,\text{cm})$ – ein Kreis mit dem Radius $1\,\text{cm}$ berührt k von außen, wenn sein Mittelpunkt r + ϱ von S entfernt ist, und von innen bei |r − ϱ|: die Mittelpunkte liegen auf den Kreisen m, m'
- 3. $n, n';\ n \parallel p,\ n' \parallel p,\ |np| = |n'p| = 1\,\text{cm}$ – die Punkte im Abstand $1\,\text{cm}$ von der Geraden p liegen auf zwei Parallelen n, n' zu ihr, je eine auf jeder Seite.
- 4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – die gesuchten Punkte sind die Schnittpunkte beider Ortslinien.
- Diskussion: die Ortslinien haben 2 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat 2 Lösungen.

Graph



Schritt 4 von 4

4. $X_1, X_2;\ X_1, X_2 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Die Mittelpunkte der Kreise mit Radius 1,5 cm, die zwei sich schneidende Geraden berühren – vier

Lösungen.

Eingabe: `construction(relations_lines; phi=60; dist_p=1.5; dist_q=1.5)`

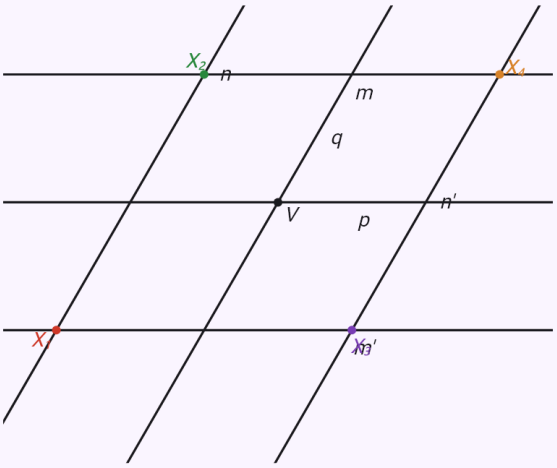
Ergebnis

$$X_1:\ |VX_1| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_1p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_1q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_2:\ |VX_2| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_2p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_2q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_3:\ |VX_3| \approx 1{,}73\,\text{cm}$$
$$|X_3p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_3q| = 1{,}5\,\text{cm}$$
$$X_4:\ |VX_4| = 3\,\text{cm}$$
$$|X_4p| = 1{,}5\,\text{cm},\ |X_4q| = 1{,}5\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($|\angle(p,q)| = 60°$): Skizze mit den gegebenen Geraden p, q und dem gesuchten Punkt X, die gegebenen Beziehungen hervorgehoben. Jede der zwei Beziehungen ergibt eine Ortslinie – X liegt in ihrem Schnitt.
- 1. $p, q;\ p \cap q = V,\ |\angle(p,q)| = 60°$ – wir zeichnen die gegebenen Geraden p, q, die sich in V schneiden.
- 2. $m, m';\ m \parallel p,\ m' \parallel p,\ |mp| = |m'p| = 1{,}5\,\text{cm}$ – die Punkte im Abstand $1{,}5\,\text{cm}$ von der Geraden p liegen auf zwei Parallelen m, m' zu ihr, je eine auf jeder Seite.
- 3. $n, n';\ n \parallel q,\ n' \parallel q,\ |nq| = |n'q| = 1{,}5\,\text{cm}$ – die Punkte im Abstand $1{,}5\,\text{cm}$ von der Geraden q liegen auf zwei Parallelen n, n' zu ihr, je eine auf jeder Seite.
- 4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap (n \cup n')$ – die gesuchten Punkte sind die Schnittpunkte beider Ortslinien.
- Diskussion: die Ortslinien haben 4 gemeinsame Punkte – die Aufgabe hat 4 Lösungen.

Graph



Schritt 4 von 4

4. $X_1, X_2, X_3, X_4;\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in (m \cup m') \cap$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Kreis k(S; 2 cm), AC Tangente, k Umkreis von ABD, D Mittelpunkt von BC, |AC| = 2|AD| – |AD| = r√7/2.

Eingabe: `construction(general_circle; r=2; on_A=1; on_B=1; on_D=1; mid_DBC=1; tangent_AC=1;`

ratio_ACAD=2; triangle_ABC=1)

Ergebnis

$$|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

$$|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,r$$

$$|AC| = 2\sqrt{7}\,\text{cm} = \sqrt{7}\,r$$

$$|BD| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

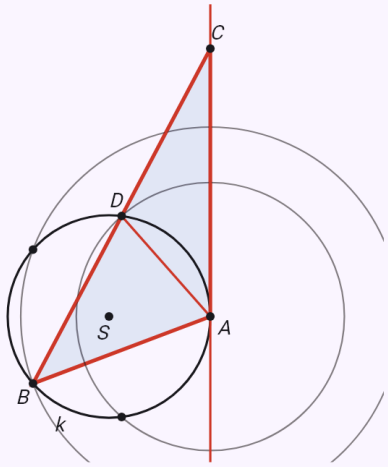
$$|BC| = 2\sqrt{14}\,\text{cm} = \sqrt{14}\,r$$

$$|DC| = \sqrt{14}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,r$$

Lösungsweg

- Analyse ($k(S;\,2\,\text{cm})$): wir schreiben die Beziehungen in Koordinaten. Der Mittelpunkt S in den Ursprung und der Punkt A auf die positive x-Achse, A = [r; 0] – jede Lösung lässt sich in diese Lage drehen. Unbekannt sind die Koordinaten der übrigen Punkte.
- Der Punkt liegt auf dem Kreis k ($A \in k$): $x_A^2 + y_A^2 = 4$
- Der Punkt liegt auf dem Kreis k ($B \in k$): $x_B^2 + y_B^2 = 4$
- Der Punkt liegt auf dem Kreis k ($D \in k$): $x_D^2 + y_D^2 = 4$
- Mittelpunkt ($D = S_{BC}$): $x_D = \frac{x_B+x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B+y_C}{2}$
- Die Gerade $\overleftrightarrow{AC}$ ist Tangente an k – ihr Abstand vom Mittelpunkt S ist r: $(x_A y_C - x_C y_A)^2 = r^2\,|AC|^2$
- Längenverhältnis ($|AC| = 2\,|AD|$): $|AC|^2 = 4\,|AD|^2$
- $\triangle ABC$ ist die gesuchte Figur – ihre Ecken dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
- Wir lösen das Gleichungssystem exakt (ohne Runden). Es hat 2 verschiedene Lagen der Punkte (keine zusammenfallend), bis auf Kongruenz 1
- Probe: mit der eingesetzten Lösung gelten alle Beziehungen.
- Aus der Lösung: die Potenz des Punktes C bezüglich k – das Quadrat der Tangente ist gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte: $|CA|^2 = |CD| \cdot |CB| = 28$
- Aus der Lösung: der Sehnen-Tangenten-Winkel der Sehne AD ist gleich dem Umfangswinkel über ihr: $|\angle CAD| = |\angle ABD| \approx 41{,}41°$
- 1. k; $k(S;\,2\,\text{cm})$ – wir zeichnen den gegebenen Kreis k.
- 2. A; $A \in k$ – ein beliebiger Punkt A des Kreises k.
- Die Länge $|AB| = \sqrt{14}\,\text{cm}$ konstruieren wir als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse: $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$
- 3. B; $B \in k \cap m(A;\,\sqrt{14}\,\text{cm})$ – der Punkt B ist einer der Schnittpunkte beider Ortslinien (ihre Anzahl: 2).
- Die Länge $|AD| = \sqrt{7}\,\text{cm}$ konstruieren wir als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse: $\sqrt{4^2 - 3^2}$
- 4. D; $D \in k \cap m(A;\,\sqrt{7}\,\text{cm})$ – der Punkt D ist einer der Schnittpunkte beider Ortslinien (ihre Anzahl: 2).
- 5. C; $C = S_D(B)$ – der Punkt C symmetrisch zu B bezüglich des Zentrums D (Punktspiegelung).
- 6. $\triangle ABC$ – die fertige Figur.
- Diskussion: 2 Lagen der Punkte erfüllen die Beziehungen, alle kongruent (symmetrisch) – bis auf Kongruenz hat die Aufgabe eine Lösung.

Graph



Schritt 6 von 6
6. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Rechtwinkliges Dreieck ohne Kreis: |AB| = 5 cm, |AC| = 3 cm, rechter Winkel bei C.

Eingabe: `construction(general; len_AB=5; len_AC=3; angle_ACB=90; triangle_ABC=1)`

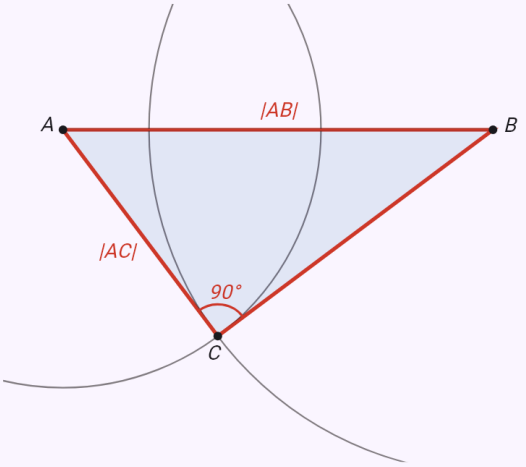
Ergebnis

$$|AB| = 5\,\text{cm}$$
$$|AC| = 3\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse: wir schreiben die Beziehungen in Koordinaten. Der Punkt A in den Ursprung und der Punkt B auf die positive x-Achse – jede Lösung lässt sich in diese Lage verschieben und drehen. Unbekannt sind die Koordinaten der übrigen Punkte.
- Länge ($|AB| = 5\,\text{cm}$): $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25$
- Länge ($|AC| = 3\,\text{cm}$): $|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 9$
- Winkel ($|\angle ACB| = 90^\circ$): $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |CA|\,|CB| \cos 90^\circ$
- $\triangle ABC$ ist die gesuchte Figur – ihre Ecken dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
- Wir lösen das Gleichungssystem exakt (ohne Runden). Es hat 2 verschiedene Lagen der Punkte (keine zusammenfallend), bis auf Kongruenz 1
- Probe: mit der eingesetzten Lösung gelten alle Beziehungen.
- 1. A – ein beliebiger Punkt A
- 2. B; $|AB| = 5\,\text{cm}$ – der Punkt B im berechneten Abstand von A
- 3. C; $C \in m(A;\,3\,\text{cm}) \cap m(B;\,4\,\text{cm})$ – der Punkt C ist einer der Schnittpunkte beider Ortslinien (ihre Anzahl: 2).
- 4. $\triangle ABC$ – die fertige Figur.
- Diskussion: 2 Lagen der Punkte erfüllen die Beziehungen, alle kongruent (symmetrisch) – bis auf Kongruenz hat die Aufgabe eine Lösung.

Graph



Schritt 4 von 4
4. $\triangle ABC$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Ein Würfelschnitt – gegenüberliegende Flächen in Parallelen.

Eingabe: `construction(cube_section; a=6; AE=2; BF=4; CG=5)`

Ergebnis

$$XYZK$$

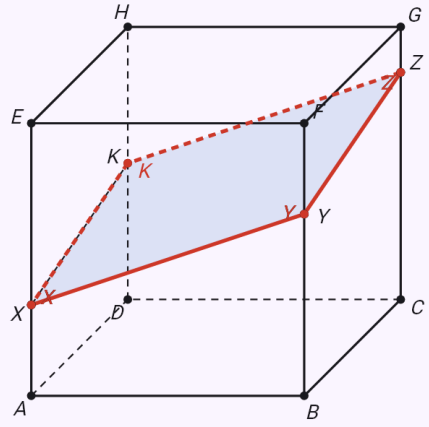
$$|XY| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

$$|ZK| \approx 6{,}32\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite nach drei Regeln konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; parallele Flächen werden in parallelen Strecken geschnitten; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen den Würfel $ABCDEFGH$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. $X;\ X \in AE,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AE im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 4\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante BF im Abstand $4\,\text{cm}$ von der Ecke B
- 4. $Z;\ Z \in CG,\ |CZ| = 5\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante CG im Abstand $5\,\text{cm}$ von der Ecke C
- 5. XY – die Punkte X, Y liegen in der Fläche $ABFE$, wir verbinden sie.
- 6. YZ – die Punkte Y, Z liegen in der Fläche $BCGF$, wir verbinden sie.
- 7. $ZK;\ ZK \parallel YX,\ K \in DH$ – die Fläche $CDHG$ ist parallel zur Fläche $ABFE$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu YX durch Z; sie schneidet die Kante DH in K
- 8. XK – die Punkte X, K liegen in der Fläche $ADHE$, wir verbinden sie.
- 9. $XYZK$ – der Schnitt ist das Viereck $XYZK$

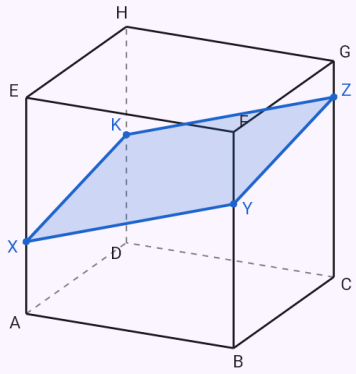
Graph



Schritt 9 von 9
9. $XYZK$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Das regelmäßige Sechseck durch Kantenmitten – der Hilfspunkt T_1.

Eingabe: `construction(cube_section; a=6; AB=3; BC=3; GH=3)`

Ergebnis

$$XYMZKL$$

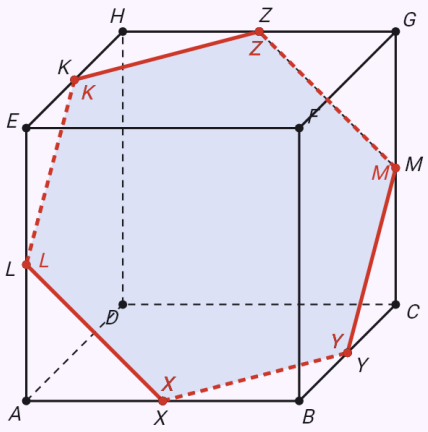
$$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YM| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|MZ| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |ZK| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$
$$|KL| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 4{,}24\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite nach drei Regeln konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; parallele Flächen werden in parallelen Strecken geschnitten; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen den Würfel $ABCDEFGH$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AB im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 3. $Y;\ Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante BC im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke B
- 4. $Z;\ Z \in GH,\ |GZ| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante GH im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke G
- 5. XY – die Punkte X, Y liegen in der Fläche $ABCD$, wir verbinden sie.
- 6. $ZK;\ ZK \parallel XY,\ K \in EH$ – die Fläche $EFGH$ ist parallel zur Fläche $ABCD$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu XY durch Z; sie schneidet die Kante EH in K
- 7. $T_1;\ T_1 \in \overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{EF}$ – wir verlängern die Seite ZK und die Kante EF; ihr Schnittpunkt T_1 liegt in der Ebene der Fläche $EFGH$ und der Fläche $ABFE$
- 8. $XL;\ L \in \overleftrightarrow{XT_1} \cap AE$ – die Gerade XT_1 liegt in der Ebene der Fläche $ABFE$; sie schneidet die Kante AE in L
- 9. KL – die Punkte K, L liegen in der Fläche $ADHE$, wir verbinden sie.
- 10. $ZM;\ ZM \parallel XL,\ M \in CG$ – die Fläche $CDHG$ ist parallel zur Fläche $ABFE$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu XL durch Z; sie schneidet die Kante CG in M
- 11. YM – die Punkte Y, M liegen in der Fläche $BCGF$, wir verbinden sie.

- 12. $XYMZKL$ – der Schnitt ist das Sechseck $XYMZKL$

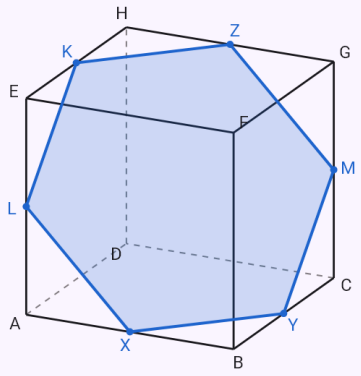
Graph



Schritt 12 von 12
12. $XYMZKL$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Ein Pyramidenschnitt durch die Mitten zweier Seitenkanten und einer Grundkante.

Eingabe: `construction(pyramid_section; a=6; v=6; AB=3; BC=3; DV=4)`

Ergebnis

$XYKZL$

$|XY| \approx 4{,}24\,\text{cm},\ |YK| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

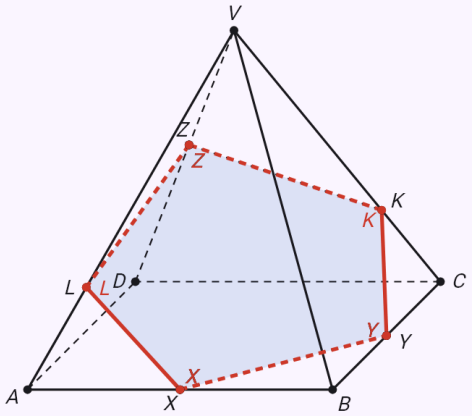
$|KZ| \approx 3{,}92\,\text{cm},\ |ZL| \approx 3{,}92\,\text{cm}$

$|LX| \approx 2{,}87\,\text{cm}$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; ist eine Schnittseite parallel zu einer Kante einer anderen Fläche, schneidet die Ebene diese Fläche in einer Parallelen dazu; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDV$; $a = 6\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die regelmäßige quadratische Pyramide $ABCDV$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. X; $X \in AB,\ |AX| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AB im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 3. Y; $Y \in BC,\ |BY| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante BC im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke B
- 4. Z; $Z \in DV,\ |DZ| = 4\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante DV im Abstand $4\,\text{cm}$ von der Ecke D
- 5. XY – die Punkte X, Y liegen in der Fläche $ABCD$, wir verbinden sie.
- 6. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{CD}$ – wir verlängern die Seite XY und die Kante CD; ihr Schnittpunkt T_1 liegt in der Ebene der Fläche $ABCD$ und der Fläche CDV
- 7. ZK; $K \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap CV$ – die Gerade ZT_1 liegt in der Ebene der Fläche CDV; sie schneidet die Kante CV in K
- 8. YK – die Punkte Y, K liegen in der Fläche BCV, wir verbinden sie.
- 9. T_2; $T_2 \in \overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{BV}$ – wir verlängern die Seite YK und die Kante BV; ihr Schnittpunkt T_2 liegt in der Ebene der Fläche BCV und der Fläche ABV
- 10. XL; $L \in \overleftrightarrow{XT_2} \cap AV$ – die Gerade XT_2 liegt in der Ebene der Fläche ABV; sie schneidet die Kante AV in L
- 11. ZL – die Punkte Z, L liegen in der Fläche DAV, wir verbinden sie.
- 12. $XYKZL$ – der Schnitt ist das Fünfeck $XYKZL$

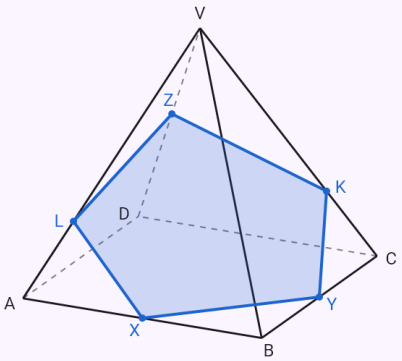
Graph



Schritt 12 von 12
12. $XYKZL$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Ein Punkt auf der Verlängerung einer Kante – Y 2 cm hinter der Ecke B.

Eingabe: `construction(pyramid_section; n=4; a=4; v=6; AV=1; AB=6; CD=2)`

Ergebnis

$$XLKZM$$

$$|XL| \approx 3{,}64\,\text{cm},\ |LK| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

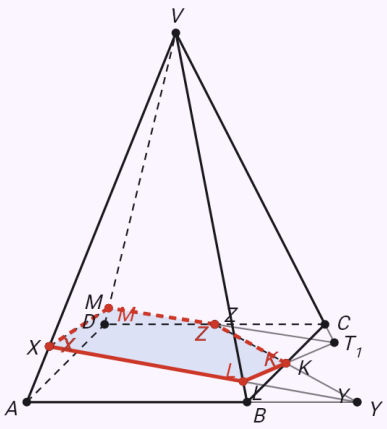
$$|KZ| \approx 2{,}83\,\text{cm},\ |ZM| \approx 1{,}92\,\text{cm}$$

$$|MX| \approx 3{,}64\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; ist eine Schnittseite parallel zu einer Kante einer anderen Fläche, schneidet die Ebene diese Fläche in einer Parallelen dazu; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDV$; $a = 4\,\text{cm},\ v = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen die regelmäßige quadratische Pyramide $ABCDV$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. X; $X \in AV,\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AV im Abstand $1\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 3. Y; $Y \in\!\mapsto AB,\ |AY| = 6\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf dem Strahl AB im Abstand $6\,\text{cm}$ von der Ecke A, hinter der Ecke B – außerhalb des Körpers.
- 4. Z; $Z \in CD,\ |CZ| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante CD im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke C
- 5. ZK; $ZK \subset \overleftrightarrow{YZ}$ – die Punkte YZ liegen in der Ebene der Fläche $ABCD$; ihre Verbindungsgerade schneidet die Fläche in der Strecke ZK
- 6. XL; $XL \subset \overleftrightarrow{XY}$ – die Punkte XY liegen in der Ebene der Fläche ABV; ihre Verbindungsgerade schneidet die Fläche in der Strecke XL
- 7. KL – die Punkte K, L liegen in der Fläche BCV, wir verbinden sie.
- 8. T_1; $T_1 \in \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{CV}$ – wir verlängern die Seite KL und die Kante CV; ihr Schnittpunkt T_1 liegt in der Ebene der Fläche BCV und der Fläche CDV
- 9. ZM; $M \in \overleftrightarrow{ZT_1} \cap DV$ – die Gerade ZT_1 liegt in der Ebene der Fläche CDV; sie schneidet die Kante DV in M
- 10. XM – die Punkte X, M liegen in der Fläche DAV, wir verbinden sie.
- 11. $XLKZM$ – der Schnitt ist das Fünfeck $XLKZM$

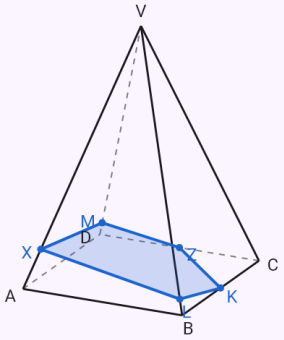
Graph



Schritt 11 von 11
11. $XLKZM$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Ein Punkt im Inneren auf der Raumdiagonale – eine senkrechte Hilfsebene.

Eingabe: `construction(cube_section; a=6; AG=5; BF=1; DH=2)`

Ergebnis

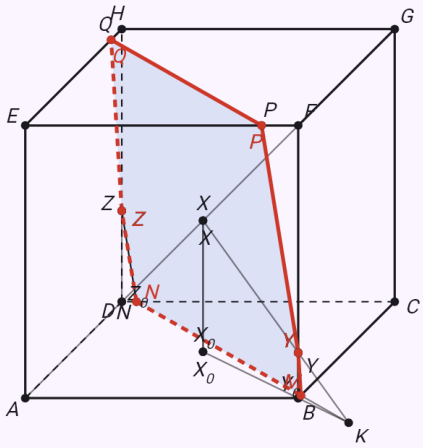
$$QPYMNZ$$

$$|QP| \approx 7{,}45\,\text{cm},\ |PY| \approx 5{,}06\,\text{cm}$$
$$|YM| \approx 1{,}01\,\text{cm},\ |MN| \approx 8{,}14\,\text{cm}$$
$$|NZ| \approx 2{,}03\,\text{cm},\ |ZQ| \approx 4{,}05\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite nach drei Regeln konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; parallele Flächen werden in parallelen Strecken geschnitten; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDEFGH;\ a = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen den Würfel $ABCDEFGH$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. $X;\ X \in AG,\ |AX| = 5\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Strecke AG im Abstand $5\,\text{cm}$ vom Punkt A
- 3. $Y;\ Y \in BF,\ |BY| = 1\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante BF im Abstand $1\,\text{cm}$ von der Ecke B
- 4. $Z;\ Z \in DH,\ |DZ| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante DH im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke D
- 5. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – der Punkt X liegt im Inneren des Körpers, deshalb nehmen wir die senkrechte Hilfsebene der Geraden XY: Wir projizieren die Punkte in die Grundfläche (X_0Y_0), und die Geraden XY und X_0Y_0 schneiden sich in K, wo die Gerade XY die Ebene der Grundfläche $ABCD$ durchstößt.
- 6. $L;\ L \in \overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X_0Z_0}$ – der Punkt X liegt im Inneren des Körpers, deshalb nehmen wir die senkrechte Hilfsebene der Geraden XZ: Wir projizieren die Punkte in die Grundfläche (X_0Z_0), und die Geraden XZ und X_0Z_0 schneiden sich in L, wo die Gerade XZ die Ebene der Grundfläche $ABCD$ durchstößt.
- 7. $MN;\ MN \subset \overleftrightarrow{KL}$ – die Punkte KL liegen in der Ebene der Fläche $ABCD$; ihre Verbindungsgerade schneidet die Fläche in der Strecke MN
- 8. ZN – die Punkte Z, N liegen in der Fläche $CDHG$, wir verbinden sie.
- 9. YM – die Punkte Y, M liegen in der Fläche $BCGF$, wir verbinden sie.
- 10. $YP;\ YP \parallel NZ,\ P \in EF$ – die Fläche $ABFE$ ist parallel zur Fläche $CDHG$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu NZ durch Y; sie schneidet die Kante EF in P
- 11. $PQ;\ PQ \parallel MN,\ Q \in EH$ – die Fläche $EFGH$ ist parallel zur Fläche $ABCD$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu MN durch P; sie schneidet die Kante EH in Q
- 12. ZQ – die Punkte Z, Q liegen in der Fläche $ADHE$, wir verbinden sie.
- 13. $QPYMNZ$ – der Schnitt ist das Sechseck $QPYMNZ$

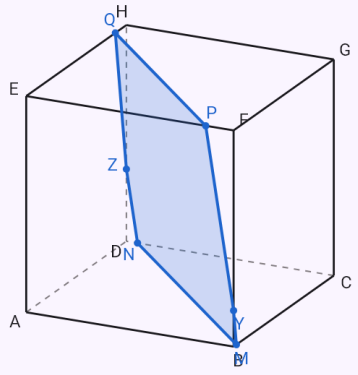
Graph



Schritt 13 von 13
13. $QPYMNZ$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Der Punkt X teilt die Kante AB im Verhältnis 1 : 2.

Eingabe: `construction(cube_section; a=6; X: AB=1:2; BF=3; CG=4)`

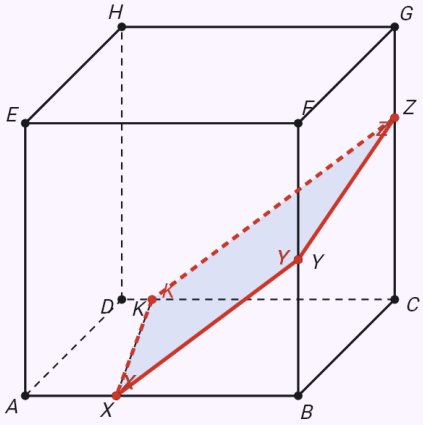
Ergebnis

$$XYZK$$
$$|XY| = 5\,\text{cm},\ |YZ| \approx 6{,}08\,\text{cm}$$
$$|ZK| \approx 6{,}67\,\text{cm},\ |KX| \approx 6{,}15\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 6\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite nach drei Regeln konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; parallele Flächen werden in parallelen Strecken geschnitten; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDEFGH$; $a = 6\,\text{cm}$ – wir zeichnen den Würfel $ABCDEFGH$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 2. X; $|AX| : |XB| = 1 : 2$ – der Punkt X teilt die Strecke AB im Verhältnis $1 : 2$; damit ist der Punkt X gegeben.
- 3. Y; $Y \in BF$, $|BY| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante BF im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke B
- 4. Z; $Z \in CG$, $|CZ| = 4\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante CG im Abstand $4\,\text{cm}$ von der Ecke C
- 5. XY – die Punkte X, Y liegen in der Fläche $ABFE$, wir verbinden sie.
- 6. YZ – die Punkte Y, Z liegen in der Fläche $BCGF$, wir verbinden sie.
- 7. ZK; $ZK \parallel XY$, $K \in CD$ – die Fläche $CDHG$ ist parallel zur Fläche $ABFE$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu XY durch Z; sie schneidet die Kante CD in K
- 8. XK – die Punkte X, K liegen in der Fläche $ABCD$, wir verbinden sie.
- 9. $XYZK$ – der Schnitt ist das Viereck $XYZK$

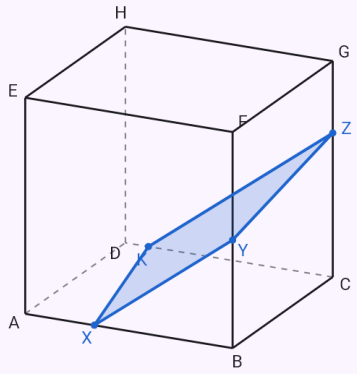
Graph



Schritt 9 von 9
9. $XYZK$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Schnitt eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas – die Grundfläche zuerst in wahrer Größe.

Eingabe: `construction(prism_section; n=6; a=2; v=4; AA'=1; CC'=2; EE'=3)`

Ergebnis

$$XMYNZL$$

$$|XM| = 2\,\text{cm},\ |MY| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

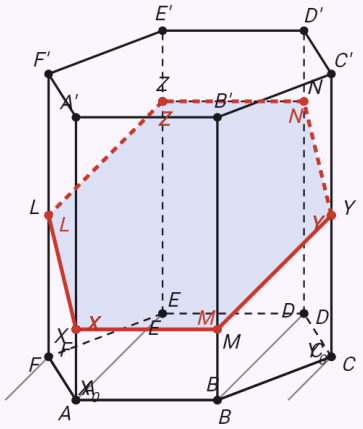
$$|YN| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |NZ| = 2\,\text{cm}$$

$$|ZL| \approx 2{,}24\,\text{cm},\ |LX| \approx 2{,}24\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite nach drei Regeln konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; parallele Flächen werden in parallelen Strecken geschnitten; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABCDEF;\ a = 2\,\text{cm}$ – daneben zeichnen wir die Grundfläche $ABCDEF$ in wahrer Größe: das regelmäßige Sechseck mit der Seite a, die Seite AB auf der x-Achse (Punkte A_0, B_0, …).
- 2. $ABCDEF;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – von den Ecken C, D, E, F fällen wir die Lote auf die Gerade AB; die Lotfußpunkte übertragen wir unverändert auf die x-Achse und tragen von ihnen unter 45° die halbe Lotlänge (die Tiefe) ab – die Grundfläche $ABCDEF$ im Schrägbild.
- 3. $ABCDEFA'B'C'D'E'F';\ a = 2\,\text{cm},\ v = 4\,\text{cm}$ – wir zeichnen das regelmäßige sechsseitige Prisma $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 4. $X;\ X \in AA',\ |AX| = 1\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AA' im Abstand $1\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 5. $Y;\ Y \in CC',\ |CY| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante CC' im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke C
- 6. $Z;\ Z \in EE',\ |EZ| = 3\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante EE' im Abstand $3\,\text{cm}$ von der Ecke E
- 7. $K;\ K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X_0Y_0}$ – die Punkte XY liegen nicht in derselben Fläche, deshalb nehmen wir die senkrechte Hilfsebene der Geraden XY: Wir projizieren die Punkte in die Grundfläche (X_0Y_0), und die Geraden XY und X_0Y_0 schneiden sich in K, wo die Gerade XY die Ebene der Grundfläche $ABCDEF$ durchstößt.
- 8. $ZL;\ ZL \subset \overleftrightarrow{ZK}$ – die Punkte ZK liegen in der Ebene der Fläche $EFF'E'$; ihre Verbindungsgerade schneidet die Fläche in der Strecke ZL
- 9. XL – die Punkte X, L liegen in der Fläche $FAA'F'$, wir verbinden sie.
- 10. $YM;\ YM \parallel LZ,\ M \in BB'$ – die Fläche $BCC'B'$ ist parallel zur Fläche $EFF'E'$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu LZ durch Y; sie schneidet die Kante BB' in M
- 11. XM – die Punkte X, M liegen in der Fläche $ABB'A'$, wir verbinden sie.
- 12. $YN;\ YN \parallel XL,\ N \in DD'$ – die Fläche $CDD'C'$ ist parallel zur Fläche $FAA'F'$, der Schnitt trifft sie also in der Parallelen zu XL durch Y; sie schneidet die Kante DD' in N
- 13. ZN – die Punkte Z, N liegen in der Fläche $DEE'D'$, wir verbinden sie.
- 14. $XMYNZL$ – der Schnitt ist das Sechseck $XMYNZL$

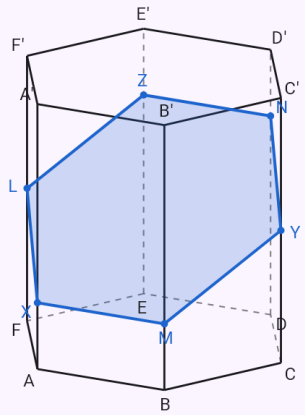
Graph



Schritt 14 von 14
14. $XMYNZL$

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Schnitt des regelmäßigen Tetraeders durch die Mitten dreier Kanten.

Eingabe: `construction(tetrahedron_section; a=4; AB=2; AC=2; AD=2)`

Ergebnis

XYZ

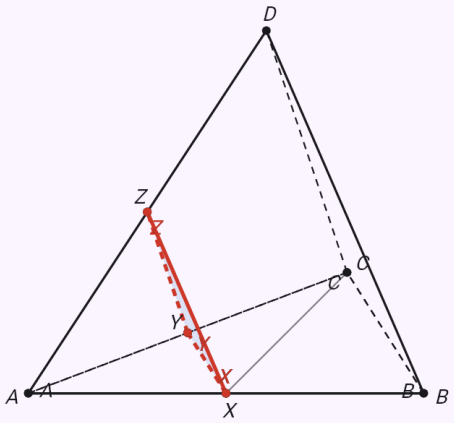
$|XY| = 2\,\text{cm},\ |YZ| = 2\,\text{cm}$

$|ZX| = 2\,\text{cm}$

Lösungsweg

- Analyse ($a = 4\,\text{cm}$): Die Schnittebene ist durch die Punkte X, Y, Z bestimmt. Der Schnitt wird Seite für Seite konstruiert: Zwei Schnittpunkte in derselben Fläche werden verbunden; ist eine Schnittseite parallel zu einer Kante einer anderen Fläche, schneidet die Ebene diese Fläche in einer Parallelen dazu; die verlängerte Gerade einer Schnittseite trifft die Gerade einer Kante in einem Punkt, der in den Ebenen beider Flächen an dieser Kante liegt.
- 1. $ABC;\ a = 4\,\text{cm}$ – daneben zeichnen wir die Grundfläche ABC in wahrer Größe: das regelmäßige Dreieck mit der Seite a, die Seite AB auf der x-Achse (Punkte A_0, B_0, …).
- 2. $ABC;\ y' = \frac{1}{2}\,y$ – von den Ecken C fällen wir die Lote auf die Gerade AB; die Lotfußpunkte übertragen wir unverändert auf die x-Achse und tragen von ihnen unter 45° die halbe Lotlänge (die Tiefe) ab – die Grundfläche ABC im Schrägbild.
- 3. $ABCD;\ a = 4\,\text{cm}$ – wir zeichnen das regelmäßige Tetraeder $ABCD$ in Schrägbildprojektion (Tiefe unter 45°, halbiert), verdeckte Kanten gestrichelt.
- 4. $X;\ X \in AB,\ |AX| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt X auf der Kante AB im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 5. $Y;\ Y \in AC,\ |AY| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt Y auf der Kante AC im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 6. $Z;\ Z \in AD,\ |AZ| = 2\,\text{cm}$ – der Punkt Z auf der Kante AD im Abstand $2\,\text{cm}$ von der Ecke A
- 7. XY – die Punkte X, Y liegen in der Fläche ABC, wir verbinden sie.
- 8. XZ – die Punkte X, Z liegen in der Fläche ABD, wir verbinden sie.
- 9. YZ – die Punkte Y, Z liegen in der Fläche CAD, wir verbinden sie.
- 10. XYZ – der Schnitt ist das Dreieck XYZ

Graph

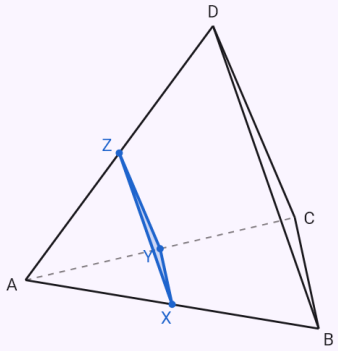


Schritt 10 von 10

10. XYZ

Die Analyse zeigt eine Skizze der fertigen Konstruktion mit den gegebenen Stücken. Mit den Pfeilen gehen Sie dann die Konstruktion Schritt für Schritt durch – die in einem Schritt hinzugefügten Elemente sind hervorgehoben.

Der Schnitt im Raum – mit dem Finger drehen



Bekannte Einschränkungen

- Bisher ein Dreieck (Seiten, Winkel, Höhe und Seitenhalbierende zur gegebenen Seite, die Radien r und ϱ in den genannten Kombinationen), vier grundlegende Ortslinien, fünf Aufgaben zu Kreisen und Tangenten, Vierecke in den Kombinationen aus dem Hinweis des Formulars sowie Schnitte von

Würfel, Quader, regelmäßigen Prismen und Pyramiden (Grundfläche mit 3 bis 6 Seiten) und regelmäßigem Tetraeder; allgemeine Vierecke, Höhen und Seitenhalbierende zu anderen Seiten und weitere Körper folgen.

- Aufgaben mit Beziehungen nehmen genau zwei Beziehungen zu einer der fünf gegebenen Figuren; Beziehungen zwischen mehreren Punkten geben Sie als allgemeine Beziehungen an.
- Allgemeine Beziehungen: höchstens 8 Punkte und 10 Beziehungen, eine Konstruktion nur aus dem Katalog der Schritte; eine Analyse wie „ähnliche Dreiecke“ ist nicht automatisiert.
- Eingabe nur im Formular – nicht in Worten oder per Foto.

Erzeugt aus der App Mathtrace