Mathtrace – Handbuch

I. Gleichungen, Ungleichungen und Terme

Inhalt

I. Gleichungen, Ungleichungen und Terme

1. Lineare Gleichungen und Ungleichungen
2. Quadratische Gleichungen
3. Gleichungen höheren Grades
4. Bruchgleichungen
5. Wurzelgleichungen
6. Exponential- und Logarithmusgleichungen und -ungleichungen
7. Betrag
8. Trigonometrische Gleichungen und Ungleichungen
9. Ungleichungen und Ungleichungssysteme
10. Gleichungssysteme
11. Gleichungen und Ungleichungen mit Parameter
12. Formeln umstellen
13. Terme umformen
14. Teilbarkeit und Primzahlen
15. Winkel in Grad, Minuten und Sekunden
16. Prozente, Verhältnisse und Dreisatz
17. Einheiten umrechnen
18. Logik und Mengen
19. Komplexe Zahlen

1. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Die App formt eine lineare Gleichung um wie in der Schule – sie löst die Klammern auf, bringt die Unbekannte auf eine Seite und dividiert. Bei einer Ungleichung achtet sie auf das Umdrehen des Zeichens beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl und schreibt das Ergebnis als Intervall; der Graph zeigt beide Seiten als Geraden und markiert die Lösung auf der x-Achse.

Mit dem Chip „Ausführlich“ (oder dauerhaft mit dem Schalter „Ausführlicher Lösungsweg bei Gleichungen“ auf dem Startbildschirm) folgt der Lösungsweg dem Unterricht in der Grundschule: dieselbe Umformung auf beiden Seiten (/ −4x, / :2), darunter die Zwischenzeile und das Ergebnis. Die Unbekannte kommt auf die Seite, auf der ihr Koeffizient positiv wird.

Beispiele

Eine Gleichung mit Klammer.

Eingabe: `3(x - 2) = 2x + 5`

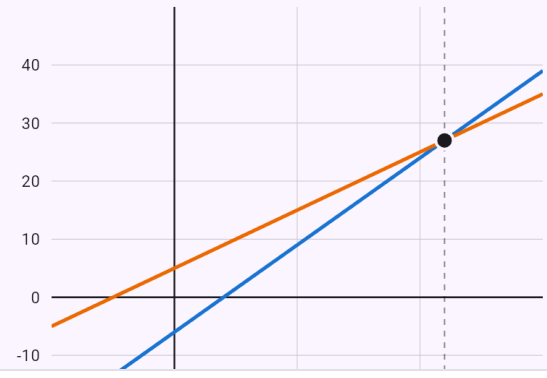
Ergebnis

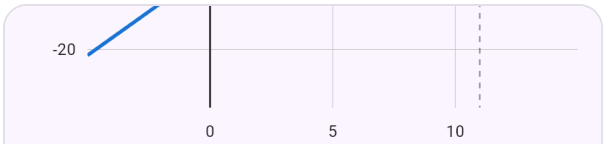
$x = 11$

Lösungsweg

- Alles auf eine Seite bringen: $x - 11 = 0$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $x = 11$

Graph





$y = 3(x - 2)$
$y = 2x + 5$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(11|27)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Eine Ungleichung – die Division durch eine negative Zahl dreht das Zeichen um.

Eingabe: `2x - 3 < 5x + 6`

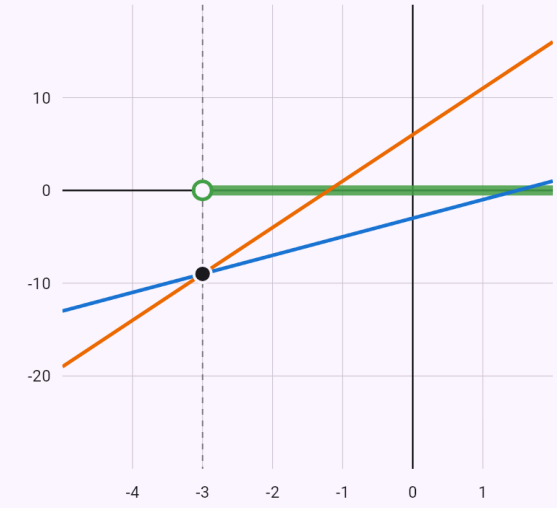
Ergebnis

$$x \in (-3;\, \infty)$$

Lösungsweg

- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-3x < 9$
- Durch die negative Zahl -3 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x > -3$

Graph



$y = 2x - 3$
$y = 5x + 6$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-3 | -9)$

Ausführlicher Lösungsweg – dieselbe Umformung auf beiden Seiten, ausgeschrieben wie in der

Schule.

Eingabe: `4x + 3 = 6x + 7` Ausführlich

Ergebnis

$$x = -2$$

Lösungsweg

- Auf beiden Seiten subtrahieren wir $4x$

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 6x + 7 \quad / -4x \\ 4x + 3 - 4x &= 6x + 7 - 4x \\ 3 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

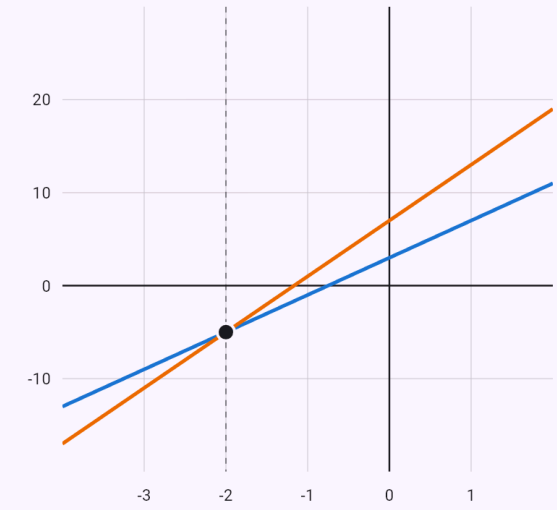
- Auf beiden Seiten subtrahieren wir 7

$$\begin{aligned} 3 &= 2x + 7 \quad / -7 \\ 3 - 7 &= 2x + 7 - 7 \\ -4 &= 2x \end{aligned}$$

- Beide Seiten dividieren wir durch 2

$$\begin{aligned} -4 &= 2x \quad / : 2 \\ \frac{-4}{2} &= \frac{2x}{2} \\ -2 &= x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Graph



$y = 4x + 3$
$y = 6x + 7$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-2|-5)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Brüche – beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert.

Eingabe: `x/2 + x/3 = 10` Ausführlich

Ergebnis

$$x = 12$$

Lösungsweg

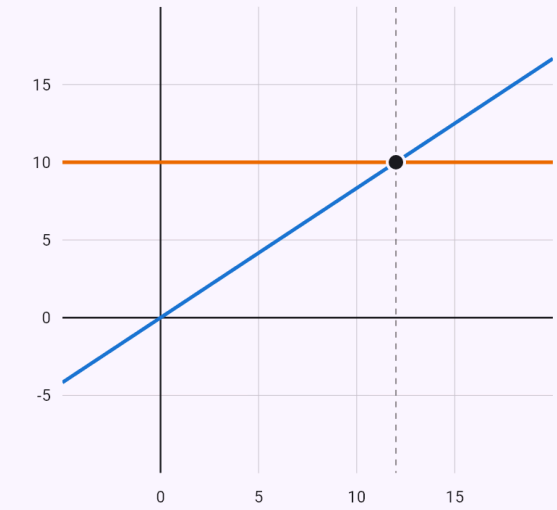
- Beide Seiten multiplizieren wir mit 6

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 10 \quad / \cdot 6 \\ 6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} &= 6 \cdot 10 \\ 3x + 2x &= 60 \\ 5x &= 60 \end{aligned}$$

- Beide Seiten dividieren wir durch 5

$$\begin{aligned} 5x &= 60 \quad / : 5 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{60}{5} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Graph



$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$
$y = 10$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(12|10)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

2. Quadratische Gleichungen

Die App bringt eine quadratische Gleichung auf die Form ax² + bx + c = 0 und löst sie mit der Diskriminante und der Lösungsformel; eine doppelte Lösung erkennt sie ebenfalls. Hat die Gleichung keine reelle Lösung, sagt sie es, und die Schaltfläche „Komplexe Lösung anzeigen“ zeigt die komplexen Lösungen.

Beispiele

Zwei reelle Lösungen.

Eingabe: `x^2 - 5x + 6 = 0`

Ergebnis

$x_1 = 3$
$x_2 = 2$

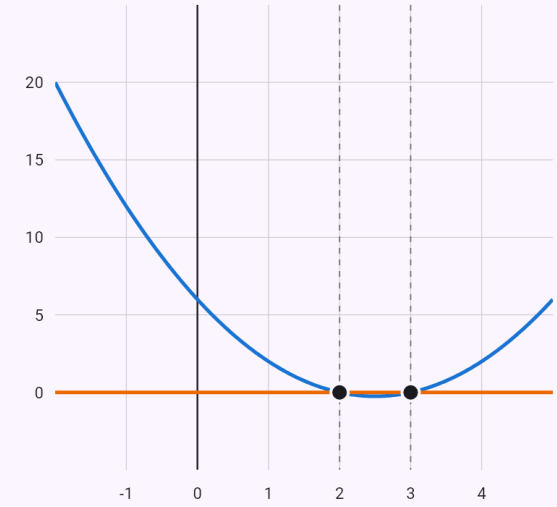
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Graph



$y = x^2 - 5x + 6$
$y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(2|0)$ ● $(3|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Negative Diskriminante – komplexe Lösungen.

Eingabe: `x^2 + 2x + 5 = 0` Komplexe Lösung anzeigen

Ergebnis

$$x_1 = -1 + 2i$$
$$x_2 = -1 - 2i$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

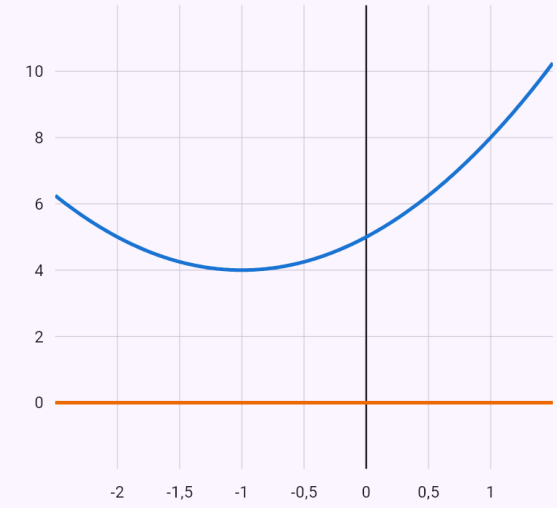
Σ Newton (Tangenten) Σ Bisektion

Σ Sekanten Σ Regula falsi Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Die Diskriminante ist negativ – im Bereich der komplexen Zahlen: $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

Graph



$y = x^2 + 2x + 5$
$y = 0$

Die Graphen schneiden sich nicht – die Gleichung hat keine reelle Lösung.

3. Gleichungen höheren Grades

Eine biquadratische Gleichung führt die App durch Substitution auf eine quadratische zurück. Eine allgemeine Gleichung höheren Grades zerlegt sie mit dem Horner-Schema: Nullstellen sucht sie unter den Teilern des absoluten Glieds und dividiert jede gefundene ab, bis eine quadratische Gleichung übrig bleibt.

Beispiele

Eine biquadratische Gleichung mit der Substitution y = x².

Eingabe: `x^4 - 5x^2 + 4 = 0`

Ergebnis

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 2$$

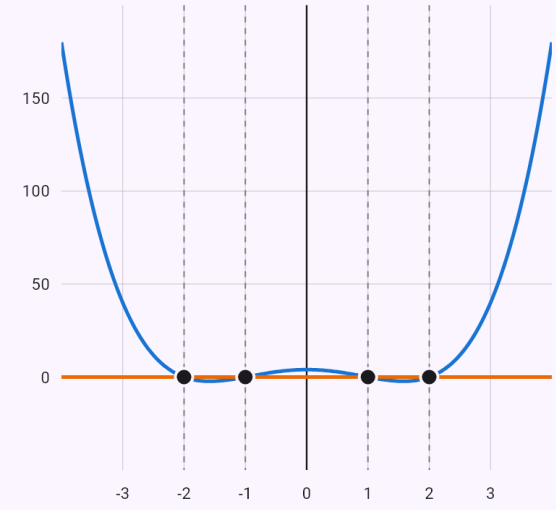
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Die Substitution $u = x^2$ macht daraus eine quadratische Gleichung: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- In die Lösungsformel einsetzen: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Rücksubstitution: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graph



$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(-2|0)$ ● $(-1|0)$ ● $(1|0)$ ● $(2|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Horner-Schema – Nullstellen unter den Teilern des absoluten Glieds.

Eingabe: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0`

Ergebnis

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

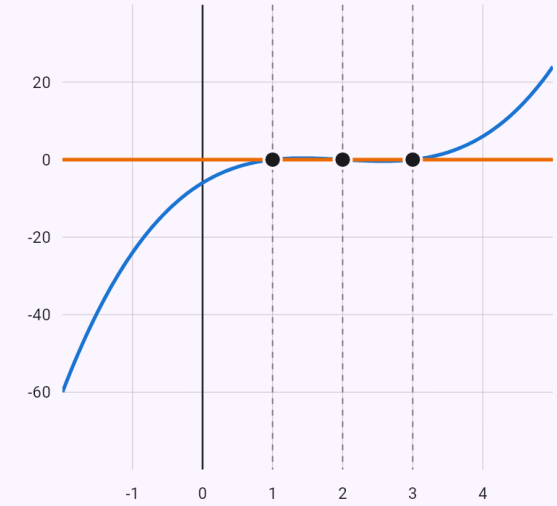
- Rationale Nullstellen können nur Teiler des Absolutglieds -6 sein: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 1$ und dividieren das Polynom:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

- Die Diskriminante berechnen:
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graph



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(1|0)$ ● $(2|0)$ ● $(3|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

4. Bruchgleichungen

Bei einer Gleichung mit der Unbekannten im Nenner bestimmt die App zuerst die Definitionsmenge, multipliziert dann mit dem Hauptnenner und löst. Die Lösungen vergleicht sie mit der Definitionsmenge und verwirft die, die nicht dazugehören.

Beispiele

Definitionsmenge, Hauptnenner, quadratische Gleichung.

Eingabe: `(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x`

Ergebnis

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Bedingungen: $x \neq 1$

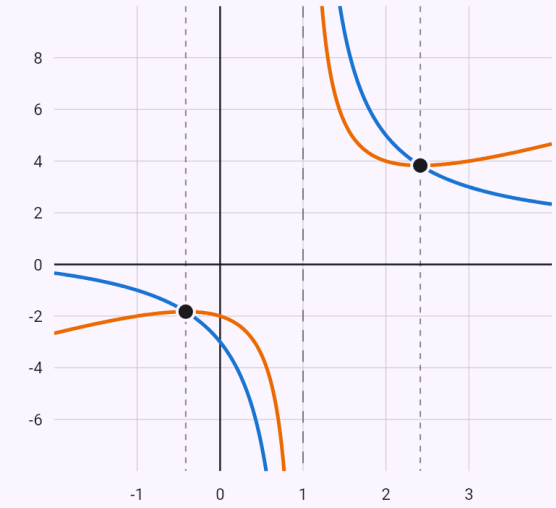
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 1$
- Beide Seiten werden mit dem Nenner $x - 1$ multipliziert: $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- In die Lösungsformel einsetzen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Die Lösung $x = 1 - \sqrt{2}$ erfüllt die Bedingungen.
- Die Lösung $x = 1 + \sqrt{2}$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y = \frac{2}{x-1} + x$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(1 - \sqrt{2} | 1 - 2\sqrt{2}\right)$
- $\left(1 + \sqrt{2} | 1 + 2\sqrt{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

5. Wurzelgleichungen

Eine Gleichung mit der Unbekannten unter einer Wurzel löst die App durch Isolieren der Wurzel und Quadrieren. Quadrieren kann Lösungen hinzufügen, die die Gleichung nicht erfüllen – deshalb folgt immer eine Probe, und die unpassenden Lösungen werden verworfen.

Beispiele

Quadrieren und Probe – eine der Lösungen erfüllt die Gleichung nicht.

Eingabe: `sqrt(x+5) = x - 1`

Ergebnis

$x = 4$

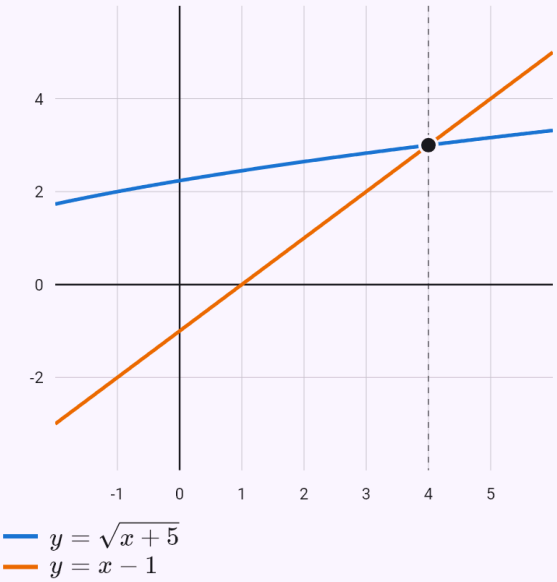
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Wir quadrieren beide Seiten (keine Äquivalenzumformung, daher machen wir die Probe): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Probe für $x = -1$: L = 2, R = -2, L ≠ R – die Lösung passt nicht.
- Probe für $x = 4$: L = 3, R = 3, L = R – die Lösung passt.

Graph



$y = \sqrt{x + 5}$
$y = x - 1$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(4|3)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Bekannte Einschränkungen

- Wurzelungleichungen werden noch nicht gelöst.

6. Exponential- und Logarithmusgleichungen und -ungleichungen

Eine Exponentialgleichung löst die App durch Umformen auf dieselbe Basis, durch Logarithmieren oder durch Substitution; eine Logarithmusgleichung durch Zusammenfassen der Logarithmen nach den Rechenregeln und Entlogarithmieren, immer mit der Definitionsmenge. Ungleichungen löst sie über die Monotonie – bei einer Basis kleiner als 1 dreht sich das Zeichen um. Den Logarithmus eines Quotienten, dessen Zähler oder Nenner nicht negativ sein kann (eine Wurzel), schreibt die App wie in der Schule als Differenz von Logarithmen.

Gleichungen mit verschiedenen Basen: $a^x + b^x = c^x$ mit Basen aus zwei Primzahlen ($25^x + 10^x = 4^x$) werden durch eine Potenz geteilt und mit $t = (5/2)^x$ quadratisch; Logarithmen verschiedener Basen werden auf eine umgerechnet ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logarithmen, deren Basen Potenzen einer Zahl sind ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), werden auf eine Basis umgerechnet ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), die Gleichung wird multipliziert und die Logarithmen zusammengefasst. Ein Logarithmus mit der Unbekannten in der Basis ($\log_x 8 = 3$) wird nach der Definition aufgelöst ($x^3 = 8$), mit den Bedingungen $x > 0$, $x \neq 1$. Eine Gleichung mit der Unbekannten in Basis und Exponent (x^(log x) = 100) wird logarithmiert und mit der Substitution t = log x gelöst. Ungleichungen mit der Substitution t = log(x + 1) und Systeme logarithmischer und exponentieller Ungleichungen werden wie einzelne Ungleichungen gelöst – über die Monotonie.

Gleichungen und Ungleichungen mit Hyperbelfunktionen werden nach der Definition ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, …) zu Exponentialgleichungen und mit der Substitution $t = e^x$ gelöst; arsinh x = c mit der Umkehrfunktion (x = sinh c).

Beispiele

Die Substitution t = 2ˣ.

Eingabe: `4^x - 3*2^x - 4 = 0`

Ergebnis

$$x = 2$$

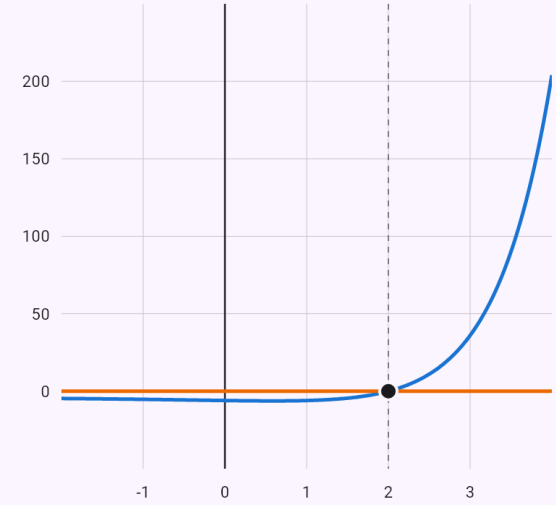
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Wir substituieren $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$
- Die Gleichung $2^x = -1$ hat keine reelle Lösung.
- Rücksubstitution: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graph



$y = 4^x - 3 \cdot 2^x - 4$
$y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(2|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Logarithmen zusammenfassen, Definitionsmenge.

Eingabe: `log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3`

Ergebnis

$$x = 3$$

Bedingungen: $x > 1$

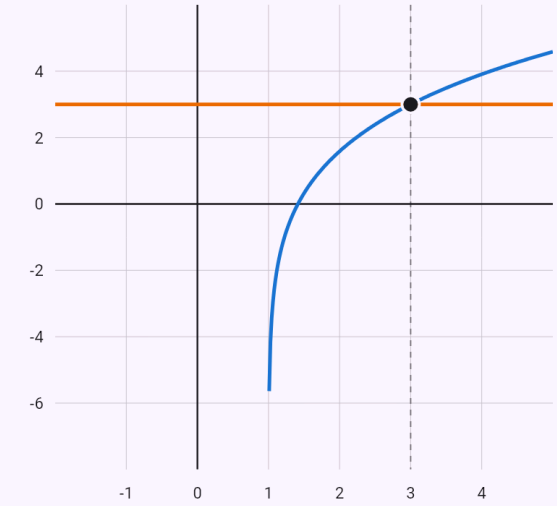
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen:
  $x > -1,\ x > 1 \ \Rightarrow\ x > 1$
- Mit den Logarithmengesetzen fassen wir die Logarithmen zusammen: $\log_2\left((x-1)(x+1)\right) = 3$
- Wir entlogarithmieren: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 9 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$
- Die Lösung $x = -3$ erfüllt die Bedingung $x > 1$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
$y = 3$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(3|3)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Verschiedene Basen – durch 4^d teilen, $t = (5/2)^d$ substituieren.

Eingabe: `25^d + 10^d = 4^d`

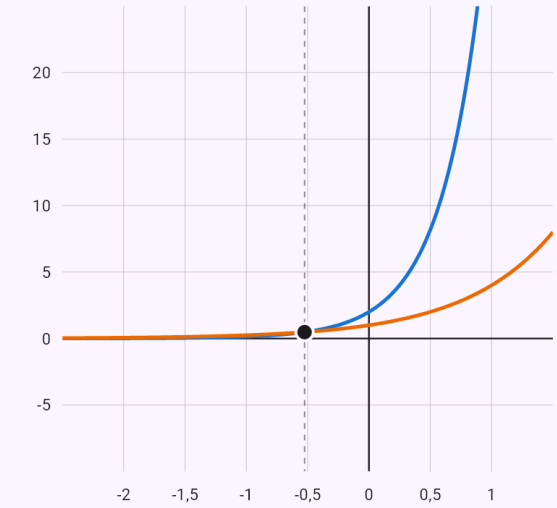
Ergebnis

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Lösungsweg

- Wir teilen die Gleichung durch den positiven Ausdruck 4^d : $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^{d} = 1$
- Wir substituieren $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{d}$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Die Gleichung $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hat keine reelle Lösung.
- Rücksubstitution
  $\left(\frac{5}{2}\right)^{d} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Graph



$y = 25^d + 10^d$
$y = 4^d$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) | 0{,}4829\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von d.

Basis kleiner als 1 – das Ungleichheitszeichen dreht sich um.

Eingabe: `(1/2)^x > 8`

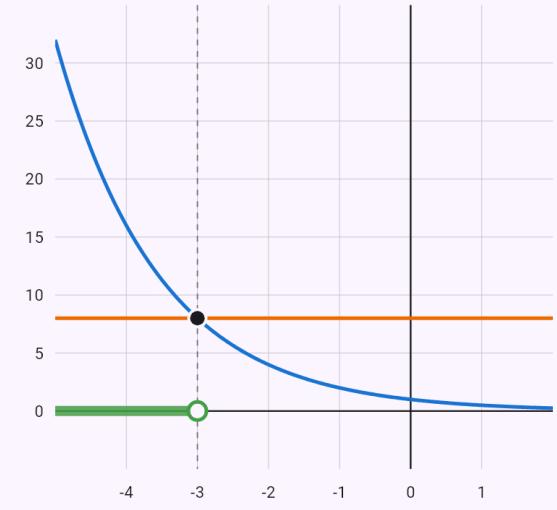
Ergebnis

$$x \in (-\infty;\ -3)$$

Lösungsweg

- Wir schreiben beide Seiten als Potenzen mit derselben Basis: $2^{-x} > 2^3$
- Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist streng monoton steigend – für die Exponenten gilt die Ungleichung mit demselben Zeichen: $-x > 3$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-x > 3$
- Durch die negative Zahl -1 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x < -3$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty;\ -3)$

Graph



$y = (\frac{1}{2})^x$

$y = 8$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-3|8)$

Tangens hyperbolicus nach der Definition – Substitution t = e²ˣ.

Eingabe: `tanh x = 1/2`

Ergebnis

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Wir setzen die Definitionen ein

$$\tanh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Wir substituieren $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Lösen: $t = 3$
- Rücksubstitution: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

Unbekannte in der Basis – nach der Definition; die Lösung −1 erfüllt die Bedingungen nicht.

Eingabe: `log_x (2x+3) = 2`

Ergebnis

$$x = 3$$

Bedingungen: $x > 0,\ x \neq 1$

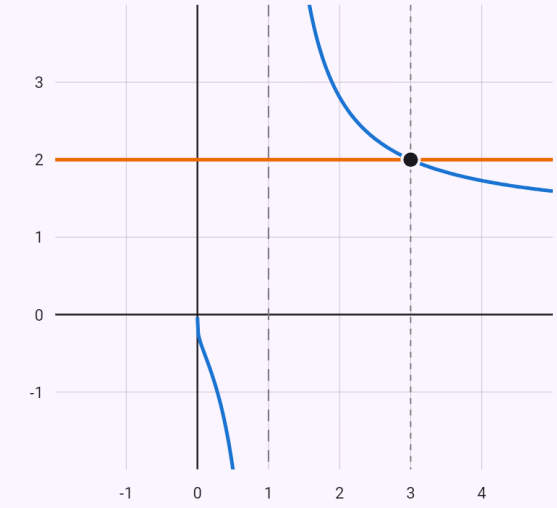
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen: $x > 0,\ x \neq 1$
- Wir entlogarithmieren: $x^2 = 2x + 3$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$
- Die Lösung $x = -1$ erfüllt die Bedingung $x > 0,\ x \neq 1$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



$y = \log_x(2x + 3)$
$y = 2$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(3|2)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Unbekannte in Basis und Exponent – logarithmieren, Substitution t = log x.

Eingabe: `x^(log x) = 100`

Ergebnis

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Bedingungen: $x > 0$

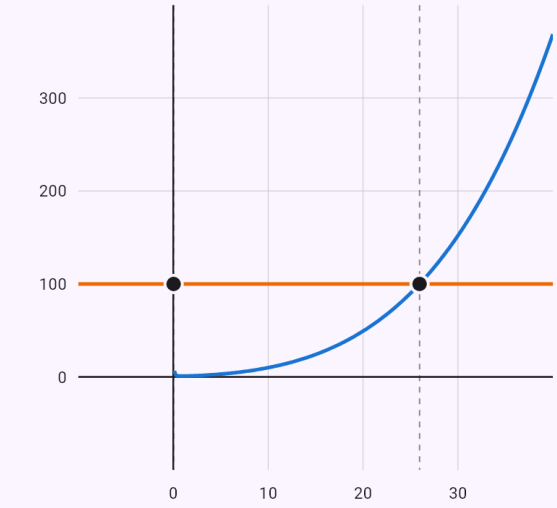
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Wir logarithmieren beide Seiten:
  $\log\left(x^{\log x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \log x \cdot \log x = 2$
- Definitionsbereich – Bedingungen: $x > 0$
- Wir substituieren $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Rücksubstitution: $\log x = -\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Rücksubstitution: $\log x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = 10^{\sqrt{2}}$
- Die Lösung $x = 10^{-\sqrt{2}}$ erfüllt die Bedingungen.
- Die Lösung $x = 10^{\sqrt{2}}$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



$y = x^{\log x}$
$y = 100$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(10^{-\sqrt{2}} | 100\right)$
- $\left(10^{\sqrt{2}} | 100\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Logarithmus eines Quotienten mit Wurzel – als Differenz von Logarithmen.

Eingabe: `log_3(sqrt(x+1)/x) < 0`

Ergebnis

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Bedingungen: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$

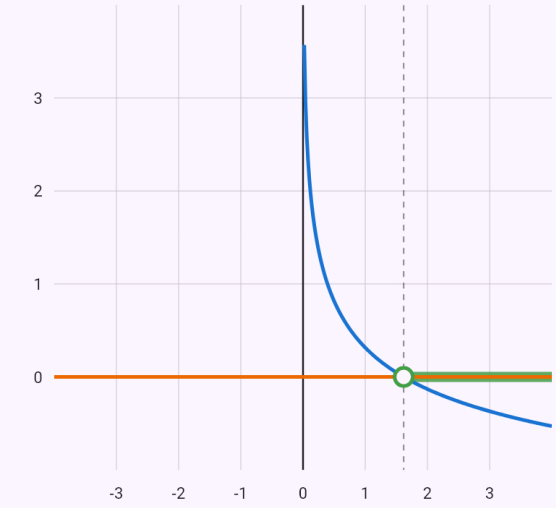
Lösungsweg

- Ein Teil des Quotienten kann nicht negativ sein, also ist der Quotient genau dann positiv, wenn beide Teile positiv sind – den Logarithmus des Quotienten schreiben wir daher als Differenz von Logarithmen und bringen den Subtrahenden auf die andere Seite: $\log_3 \sqrt{x+1} < \log_3 x$
- Definitionsbereich – Bedingungen: $\sqrt{x+1} > 0,\ x > 0$
- Der Logarithmus zur Basis 3 ist streng monoton steigend – wir entlogarithmieren, das Ungleichheitszeichen bleibt: $\sqrt{x+1} < x$
- Alles auf eine Seite bringen: $-x + \sqrt{x+1} < 0$
- Definitionsbereich – Bedingungen: $x \geq -1$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
$-x+\sqrt{x+1}$	×	+	−

- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

Graph



$y = \log_3\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$

$y = 0$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} | 0\right)$

Bekannte Einschränkungen

- Logarithmen verschiedener Basen, die keine Potenzen einer Zahl sind ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$), werden nur numerisch gelöst.
- Hyperbolische Gleichungen, die auf eine Gleichung 4. Grades in e^x führen ($\cosh^2 x - 3\sinh x = 3$), werden nur numerisch gelöst; Ungleichungen mit Areafunktionen werden noch nicht unterstützt.

7. Betrag

Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen löst die App auf zwei Arten, die Sie mit einem Chip wählen: „Nach Definition“ – kurz durch Ausschreiben von |a| = b oder |a| < b – und „Nullstellen“ – durch Aufteilen der Zahlengeraden in Intervalle, auf denen jeder Betrag ein festes Vorzeichen hat. Ohne Auswahl wählt sie den passenderen Weg selbst.

Verschachtelte Beträge (||x| − 2| = 1) löst sie genauso: nach Definition schrittweise von außen nach innen, mit Nullstellen von innen nach außen – zuerst die Nullstellen der inneren Beträge, dann auf jedem Intervall den verbleibenden Betrag.

Eine Ungleichung |f| < |g| (auf jeder Seite nur ein Betrag) lässt sich auch mit dem Chip „Durch Quadrieren“ lösen: Beide Seiten sind nicht negativ, sie wird also quadriert und als quadratische gelöst. Ein Ausdruck mit Beträgen allein (|x − 1| + |x + 2|) wird stückweise vereinfacht – Nullstellen, Vorzeichentabelle und auf jedem Intervall der Ausdruck ohne Beträge. Nach einem Komma kann ein Intervall folgen (|x| − 2, x < 0): Der Ausdruck wird dann nur darauf vereinfacht.

Beispiele

Ein Betrag – Ausschreiben nach Definition.

Eingabe: `|2x - 1| = 5`

Ergebnis

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

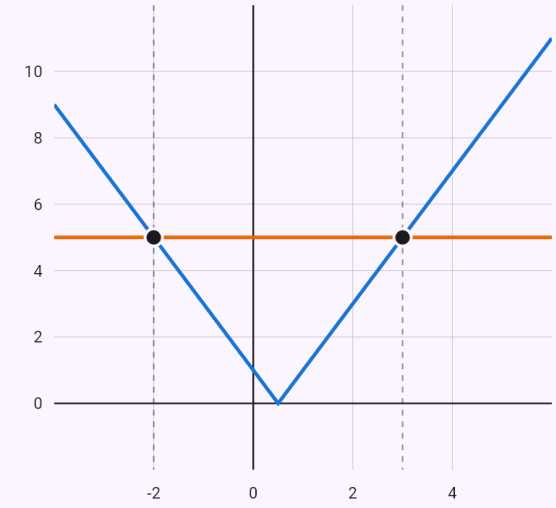
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Es gibt nur einen Betrag und auf der anderen Seite eine Zahl – es genügt, die Definition anzuwenden.
- Nach der Definition gilt $|2x - 1| = 5$ genau dann, wenn $2x - 1 = 5$ oder $2x - 1 = -5$
- Lösen: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Lösen: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graph



$y = |2x - 1|$

$y = 5$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(-2|5)$ ● $(3|5)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Zwei Beträge – Fallunterscheidung an den Nullstellen.

Eingabe: `|x - 1| + |x + 2| < 5`

Ergebnis

$$x \in (-3;\ 2)$$

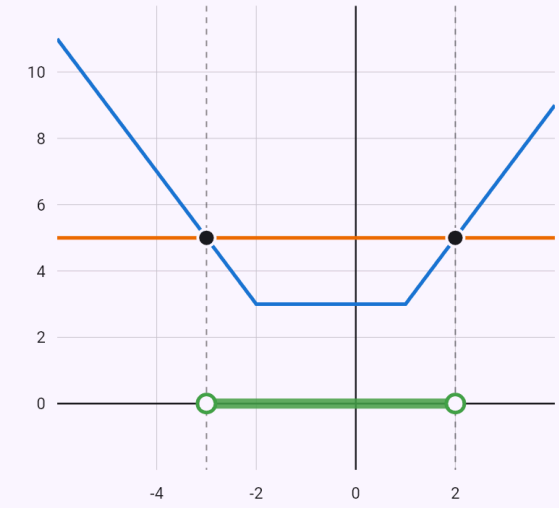
Lösungsweg

- Wir lösen die Beträge mit der Nullstellenmethode auf: Die Nullstellen teilen die Zahlengerade in Intervalle, auf jedem haben die Ausdrücke in den Beträgen ein festes Vorzeichen.
- Nullstellen der Ausdrücke in den Beträgen: $x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1, \quad x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = -2$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\ -2)$	$[-2;\ 1)$	$[1;\ \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Auf dem Intervall $(-\infty;\ -2)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Lösen: $-2x - 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-2x < 6$
- Durch die negative Zahl -2 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x > -3$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-3;\ \infty)$
- Schnitt mit dem Intervall $(-\infty;\ -2)$: $x \in (-3;\ -2)$
- Auf dem Intervall $[-2;\ 1)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- Die Unbekannte fällt weg, übrig bleibt die wahre Aussage $3 < 5$ – das ganze Intervall $[-2;\ 1)$ ist Lösung.
- Auf dem Intervall $[1;\ \infty)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Lösen: $2x + 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $2x < 4$
- Durch die positive Zahl 2 dividieren, das Ungleichheitszeichen bleibt: $x < 2$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty;\ 2)$
- Schnitt mit dem Intervall $[1;\ \infty)$: $x \in [1;\ 2)$
- Die Lösung ist die Vereinigung der Ergebnisse: $x \in (-3;\ 2)$

Graph



$y = |x - 1| + |x + 2|$
$y = 5$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

● $(-3|5)$ ● $(2|5)$

Verschachtelter Betrag – nach Definition von außen nach innen.

Eingabe: `||x| - 2| = 1`

Ergebnis

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 3$$

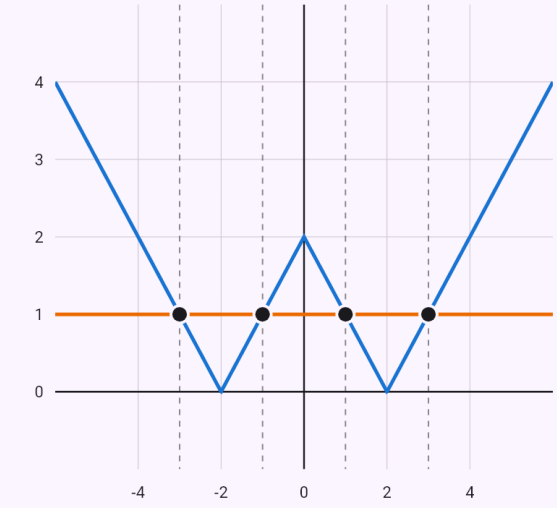
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Es gibt nur einen Betrag und auf der anderen Seite eine Zahl – es genügt, die Definition anzuwenden.
- Nach der Definition gilt $||x| - 2| = 1$ genau dann, wenn $|x| - 2 = 1$ oder $|x| - 2 = -1$
- Wir isolieren den Betrag: $|x| = 3$
- Nach der Definition gilt $|x| = 3$ genau dann, wenn $x = 3$ oder $x = -3$
- Wir isolieren den Betrag: $|x| = 1$
- Nach der Definition gilt $|x| = 1$ genau dann, wenn $x = 1$ oder $x = -1$

Graph



$y = ||x| - 2|$
$y = 1$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(-3|1)$ ● $(-1|1)$ ● $(1|1)$ ● $(3|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Beträge auf beiden Seiten – Quadrieren.

Eingabe: `|x - 1| < |2x + 3|` Durch Quadrieren

Ergebnis

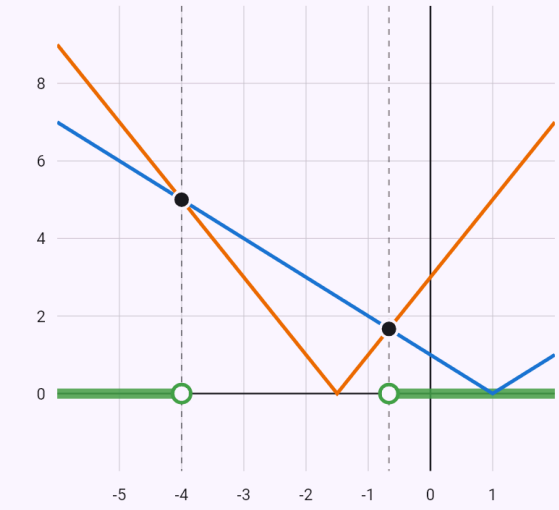
$$x \in (-\infty;\, -4) \cup \left(-\frac{2}{3};\, \infty\right)$$

Lösungsweg

- Auf beiden Seiten steht nur ein Betrag – beide Seiten sind nicht negativ, daher dürfen wir die Ungleichung quadrieren (eine Äquivalenzumformung).
- Beide Seiten quadrieren: $(x-1)^2 < (2x+3)^2$
- Alles auf eine Seite bringen: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Faktorisieren: $-(x+4)(3x+2) < 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{2}{3}$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\, -4)$	$(-4;\, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3};\, \infty)$
-1	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$-(x+4)(3x+2)$	$-$	$+$	$-$

Graph



$y = |x-1|$
$y = |2x+3|$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-4|5)$
- $\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{5}{3}\right)$

Ausdruck mit Beträgen – stückweise auf den Intervallen.

Eingabe: `|x - 1| + |x + 2|`

Ergebnis

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -2) \\ 3, & x \in [-2;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1;\, \infty) \end{cases}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die Beträge mit der Nullstellenmethode auf: Die Nullstellen teilen die Zahlengerade in Intervalle, auf jedem haben die Ausdrücke in den Beträgen ein festes Vorzeichen.
- Nullstellen der Ausdrücke in den Beträgen:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\, -2)$	$[-2;\, 1)$	$[1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$

- Auf dem Intervall $(-\infty;\, -2)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Auf dem Intervall $[-2;\, 1)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Auf dem Intervall $[1;\, \infty)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Ausdruck mit Beträgen auf einem vorgegebenen Intervall – stückweise nur dort.

Eingabe: `|x - 1| + |x + 2|, x > -1`

Ergebnis

$$\begin{cases} 3, & x \in (-1;\, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1;\, \infty) \end{cases}$$

Lösungsweg

- Wir vereinfachen den Term nur für Werte aus dem Intervall $(-1;\, \infty)$ – die Beträge lösen wir nach den Vorzeichen der Ausdrücke in ihnen auf.
- Nullstellen der Ausdrücke in den Beträgen:
  $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-1;\, 1)$	$[1;\, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 2$	$+$	$+$

- Auf dem Intervall $(-1;\, 1)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Auf dem Intervall $[1;\, \infty)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Bekannte Einschränkungen

- Quadrieren wird nur bei einer Ungleichung mit genau einem Betrag auf jeder Seite angeboten.

8. Trigonometrische Gleichungen und Ungleichungen

Die App führt eine Gleichung auf Grundgleichungen wie sin x = a zurück und löst sie am Einheitskreis: Sie findet die Winkel einer Umdrehung und addiert Vielfache der Periode ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Der Kreis ist direkt im Lösungsweg gezeichnet.

Bevorzugt werden die bekannten Formeln – doppelter und halber Winkel, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, Summe in Produkt –, dann Ausklammern, die Substitution t = sin x, das Dividieren einer homogenen Gleichung durch $\cos^n x$ und der Hilfswinkel bei $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Das Ergebnis wird zusätzlich numerisch über eine ganze Periode geprüft.

Eine Unbekannte mit lateinischem Buchstaben (x, t) ist im Bogenmaß, mit griechischem (alpha, β, …) in Grad – ebenso eine Eingabe mit dem Zeichen ° (sin(x + 30°)). Die Lösungen in einem Intervall erhalten Sie, wenn Sie das Intervall nach einem Komma oder in die nächste Zeile schreiben.

Eine Ungleichung wird über einen Bogen des Einheitskreises gelöst, eine kompliziertere über die Nullstellen auf einer Periode; das Ergebnis sind Intervalle mit der Periode.

Beispiele

Zwei Lösungszweige, die Winkel am Einheitskreis.

Eingabe: `sin x = 1/2`

Ergebnis

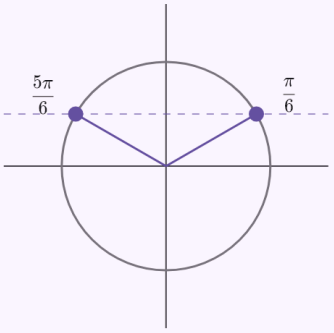
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

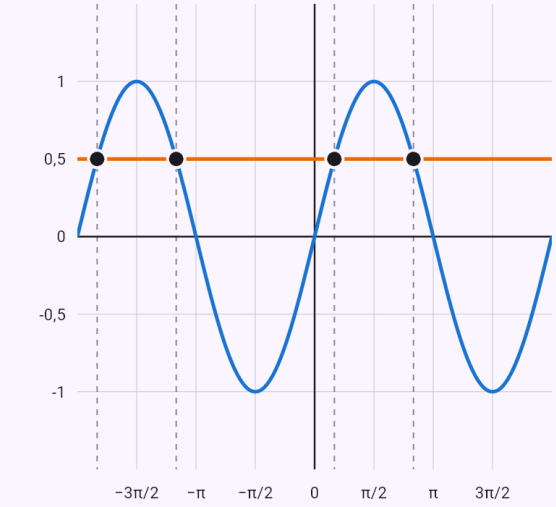
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graph



$y = \sin x$

$y = \frac{1}{2}$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-\frac{11\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Die Substitution t = sin x und eine quadratische Gleichung.

Eingabe: `2sin^2 x - sin x - 1 = 0`

Ergebnis

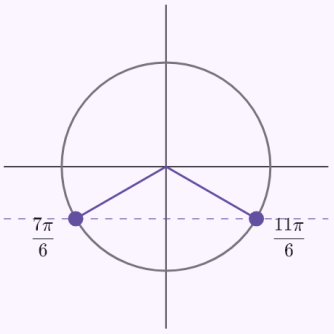
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Exakt geht es nicht – woher das „≈“ kommt, zeigt ein numerisches Verfahren:

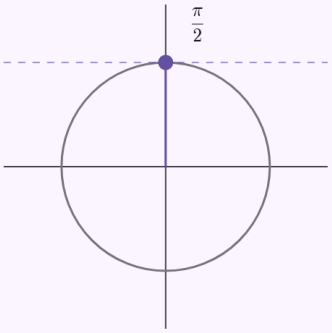
Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

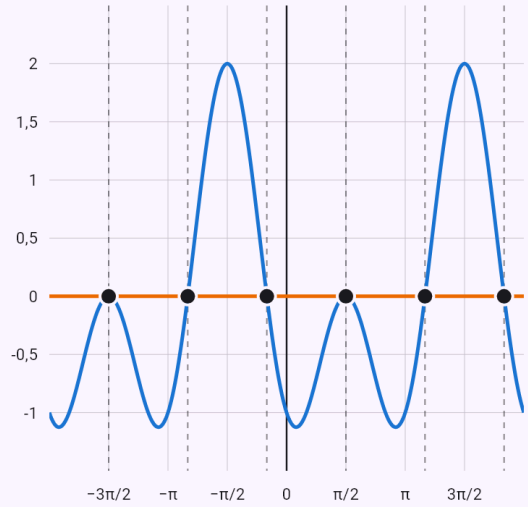
- Wir substituieren $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Grundgleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Grundgleichung $\sin x = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graph



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-\frac{3\pi}{2}|0\right)$
- $\left(-\frac{5\pi}{6}|0\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}|0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}|0\right)$
- $\left(\frac{7\pi}{6}|0\right)$
- $\left(\frac{11\pi}{6}|0\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Die Formel für sin 2x und die Zerlegung in ein Produkt.

Eingabe: `sin 2x = cos x`

Ergebnis

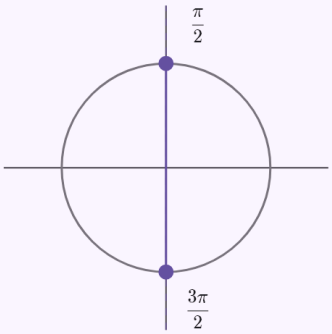
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Exakt geht es nicht – woher das „≈“ kommt, zeigt ein numerisches Verfahren:

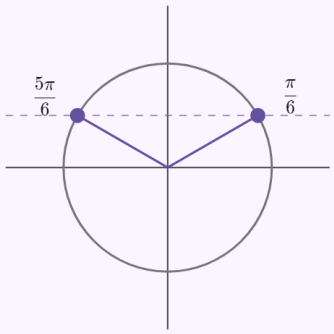
Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

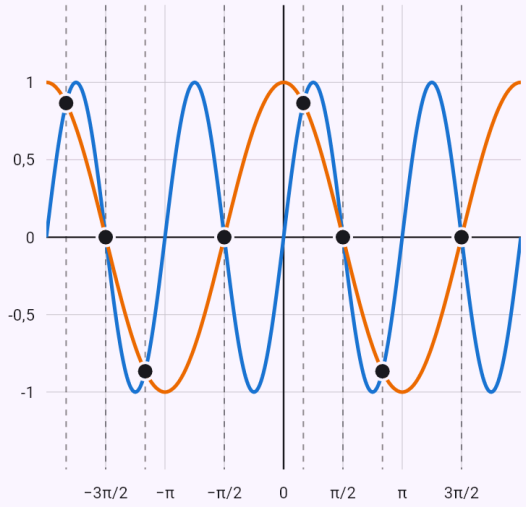
- Alles auf eine Seite bringen: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Wir verwenden die Formel $\sin 2x = 2\sin x \cos x$: $2\cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Wir zerlegen in ein Produkt – ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist: $(2\sin x - 1)\cos x = 0$
- Wir lösen die Gleichung $\cos x = 0$
- Grundgleichung $\cos x = 0$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Wir lösen die Gleichung $2\sin x - 1 = 0$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graph



$y = \sin 2x$
$y = \cos x$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-\frac{11\pi}{6} \middle| \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2} \middle| 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6} \middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2} \middle| 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6} \middle| \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2} \middle| 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6} \middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2} \middle| 0\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Der Hilfswinkel: sin x + cos x = √2·sin(x + π/4).

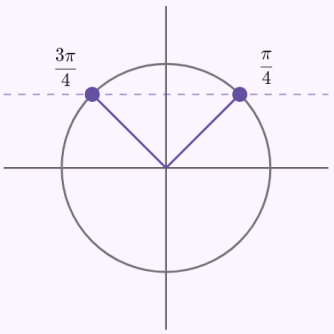
Eingabe: `sin x + cos x = 1`

Ergebnis

$$x_1 = 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

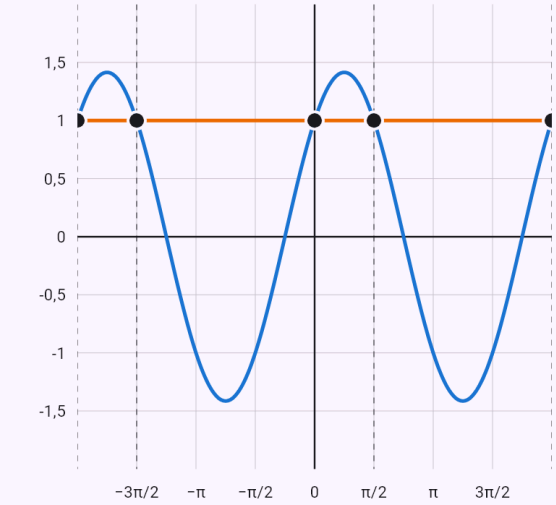
- Alles auf eine Seite bringen: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Wir führen einen Hilfswinkel φ ein:
  $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, wobei
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Grundgleichung $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Wir lösen nach der Unbekannten auf

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = 2k\pi \ \vee\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graph



$y = \sin x + \cos x$
$y = 1$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-2\pi|1)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}|1\right)$
- $(0|1)$
- $\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$
- $(2\pi|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Ein griechischer Buchstabe – das Ergebnis in Grad.

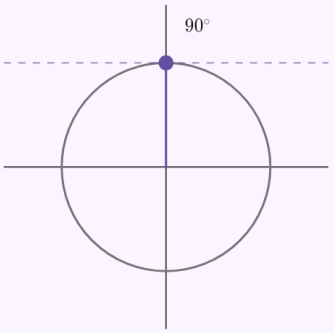
Eingabe: `sin alpha + cos alpha = sqrt(2)`

Ergebnis

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

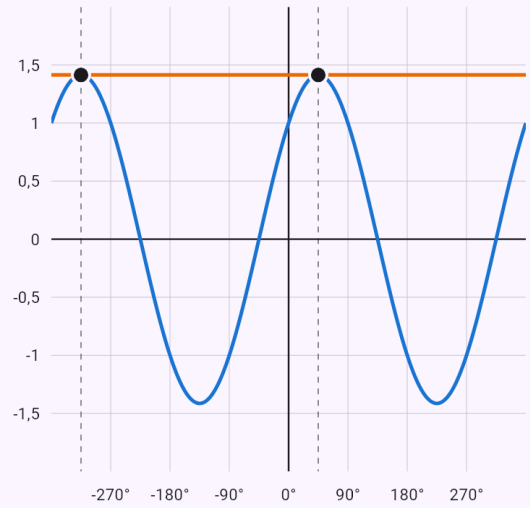
Lösungsweg

- Alles auf eine Seite bringen: $\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{2} = 0$
- Wir führen einen Hilfswinkel φ ein:
  $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, wobei
  $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Grundgleichung $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel 90°; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Wir lösen nach der Unbekannten auf
  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Graph



$y = \sin\alpha + \cos\alpha$
$y = \sqrt{2}$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-315^\circ \middle| \sqrt{2}\right)$
- $\left(45^\circ \middle| \sqrt{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Nur die Lösungen im angegebenen Intervall.

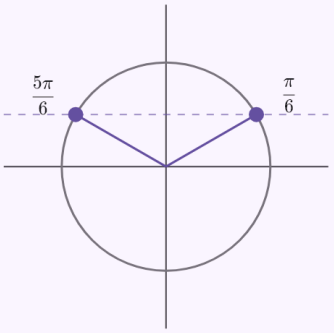
Eingabe: `sin x = 1/2, x ∈ <0; 4pi)`

Ergebnis

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$
$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

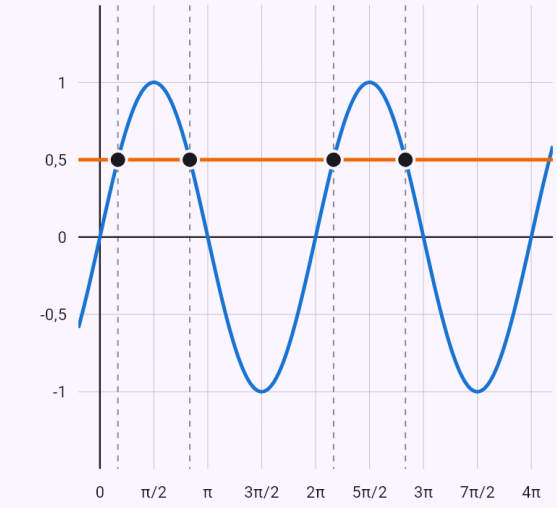
Lösungsweg

- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Die Lösungen im Intervall $x \in [0;\ 4\pi)$
  $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{17\pi}{6}$

Graph



$y = \sin x$
$y = \frac{1}{2}$

Schnittpunkte der Graphen:

$\left(\frac{\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{13\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{17\pi}{6} \middle| \frac{1}{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Ein Bogen des Einheitskreises, ein Intervall um null.

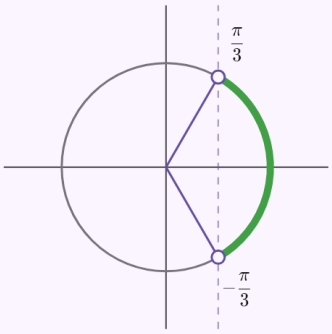
Eingabe: `cos x > 1/2`

Ergebnis

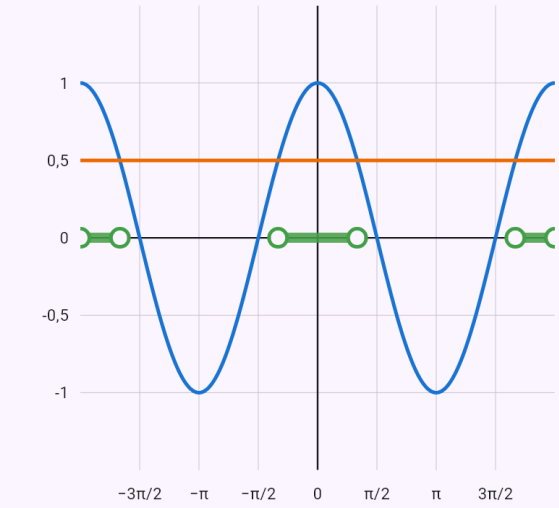
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Grundungleichung $\cos x > \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis gilt sie auf dem markierten Bogen; mit der Periode: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Graph



$y = \cos x$

$y = \frac{1}{2}$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Die Nullstellen auf einer Periode und das Vorzeichen dazwischen.

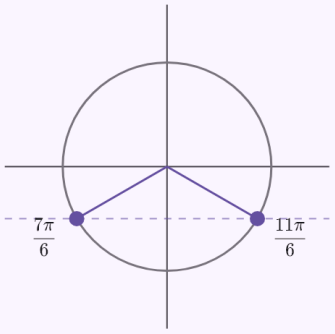
Eingabe: `2sin^2 x - sin x - 1 > 0`

Ergebnis

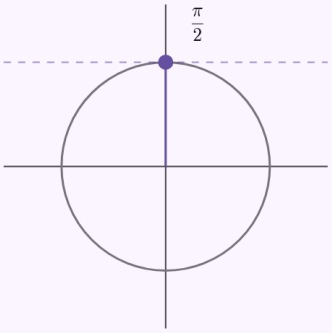
$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Zuerst lösen wir die Gleichung $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Wir substituieren $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- In die Lösungsformel einsetzen: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Grundgleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

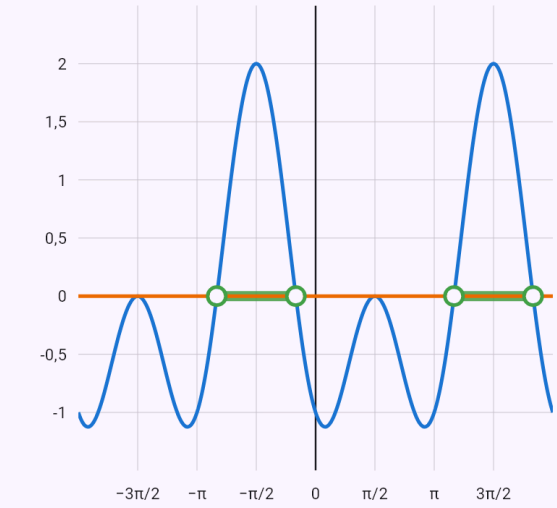


- Grundgleichung $\sin x = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Die Funktion hat die Periode 2π. Ihre Nullstellen (und die Stellen, an denen sie nicht definiert ist) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ zerlegen eine Periode in Intervalle; nach dem Vorzeichen darauf gilt die Ungleichung für: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$

Graph



$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
$y = 0$
Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Bekannte Einschränkungen

- Gleichungen, in denen die Unbekannte auch außerhalb der Winkelfunktion steht (x = cos x), lösen wir nur numerisch – mit dem Newton-Verfahren und der Iterationstabelle (siehe Numerische Verfahren), ohne Periode.
- Doppelte trigonometrische Ungleichungen (−1/2 < sin x < 1/2) und Winkelfunktionen im Betrag werden noch nicht unterstützt.

9. Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Quadratische und Bruchungleichungen löst die App mit den Nullstellen und einer Vorzeichentabelle. Eine Doppelungleichung und ein Ungleichungssystem löst sie als Schnittmenge der Lösungen der einzelnen Ungleichungen, die sie auf der Zahlengeraden zeigt. Ein Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten löst sie als Bereich in der Ebene und färbt ihn im Graphen ein.

Bei einem Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten gibt die App auch die Ecken des Bereichs an – die Schnittpunkte der Grenzen mit exakten Koordinaten. Ein System aus einer Gleichung und Ungleichungen mit einer Unbekannten wird gelöst, indem die Gleichung gelöst und ihre Lösungen in die Ungleichungen eingesetzt werden; mit zwei Unbekannten ist die Lösung der Teil der Kurve der Gleichung, der im Bereich der Ungleichungen liegt – im Graphen hervorgehoben, seine Endpunkte exakt berechnet. Ein System lässt sich auch in eine Zeile schreiben, durch Semikolons getrennt ($2^x > 4$; $3^x < 81$). Ein System aus zwei oder mehr Gleichungen mit Ungleichungen wird als Gleichungssystem gelöst, seine Lösungen werden in die Ungleichungen eingesetzt; bei zwei Unbekannten zeigt der Graph die Kurven im Bereich der Ungleichungen, nicht passende Schnittpunkte als leere Kreise.

Beispiele

Eine quadratische Ungleichung – Nullstellen und Vorzeichen.

Eingabe: `x^2 - x - 6 > 0`

Ergebnis

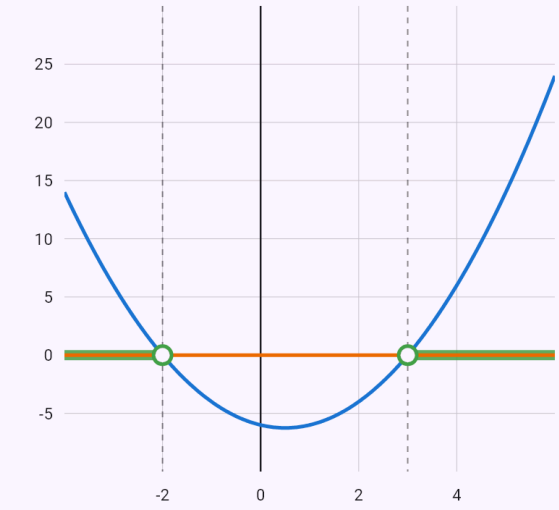
$$x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ \infty)$$

Lösungsweg

- Faktorisieren: $(x-3)(x+2) > 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Graph



$y = x^2 - x - 6$
$y = 0$
Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:
● $(-2|0)$ ● $(3|0)$

Eine Bruchungleichung – der Nenner darf nicht null sein.

Eingabe: `(x+1)/(x-3) <= 0`

Ergebnis

$$x \in [-1;\ 3)$$

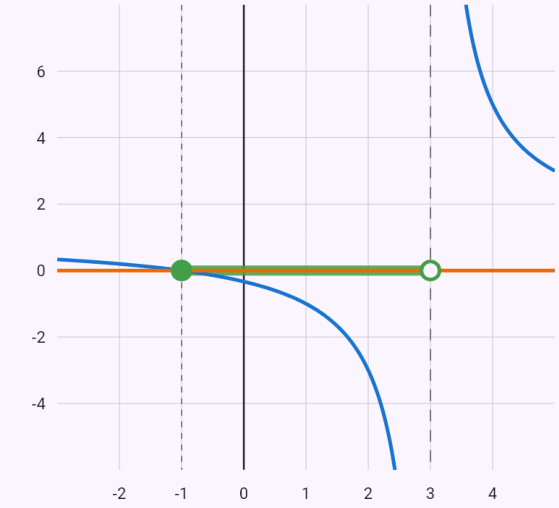
Bedingungen: $x \neq 3$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 3$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Graph



$y = \frac{x+1}{x-3}$

$y = 0$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-1|0)$

Eine Doppelungleichung.

Eingabe: `-1 <= 2x + 1 < 5`

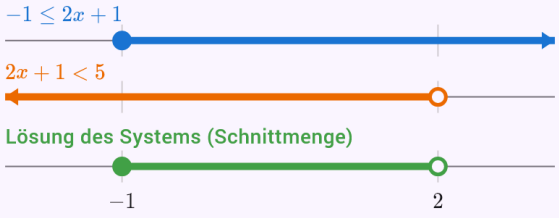
Ergebnis

$$x \in [-1;\ 2)$$

Lösungsweg

- 1. Ungleichung: $-1 \leq 2x + 1$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-2x \leq 2$
- Durch die negative Zahl -2 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x \geq -1$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in [-1;\ \infty)$
- 2. Ungleichung: $2x + 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $2x < 4$
- Durch die positive Zahl 2 dividieren, das Ungleichheitszeichen bleibt: $x < 2$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty;\ 2)$
- Die Lösung des Systems ist der Durchschnitt der Lösungen der einzelnen Ungleichungen: $x \in [-1;\ 2)$

Graph



Jede Ungleichung hat ihre eigene Zeile auf der Zahlengeraden, ihre Schnittmenge ist grün. Ein ausgefüllter Punkt gehört zur Lösung, ein leerer nicht.

Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten – ein Bereich in der Ebene und seine Ecken.

Eingabe: `x + y <= 4`
`x - y >= 0`
`y >= 0`

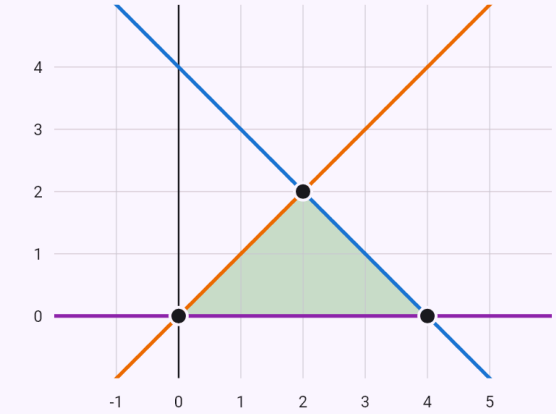
Ergebnis

$$y \leq 4 - x$$
$$y \leq x$$
$$y \in [0;\ \infty)$$

Lösungsweg

- 1. Ungleichung: $x + y \leq 4$
- Die Grenze ist die Kurve $x + y = 4$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[0;\ 0]$ ein: $0 \leq 4$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- 2. Ungleichung: $x - y \geq 0$
- Die Grenze ist die Kurve $x - y = 0$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[1;\ 0]$ ein: $1 \geq 0$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- 3. Ungleichung: $y \geq 0$
- Die Grenze ist die Kurve $y = 0$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[0;\ 1]$ ein: $1 \geq 0$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- Die Lösung des Systems ist der gemeinsame Teil dieser Gebiete – im Graphen eingefärbt.
- Ecken des Bereichs (Schnittpunkte der Grenzen): $[0;\ 0]$, $[2;\ 2]$, $[4;\ 0]$

Graph



$x + y \leq 4 \ \Leftrightarrow\ y \leq 4 - x$
$x - y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \leq x$
$y \geq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0;\ \infty)$

Die Lösung ist das eingefärbte Gebiet. Eine durchgezogene Grenze gehört dazu, eine gestrichelte nicht.

Ecken des Bereichs:
● $(0|0)$ ● $(2|2)$ ● $(4|0)$

Eine Ungleichung in den ganzen Zahlen – die ganzen Zahlen des Intervalls werden aufgezählt.

Eingabe: `x^2 < 10`

Ergebnis

$$x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

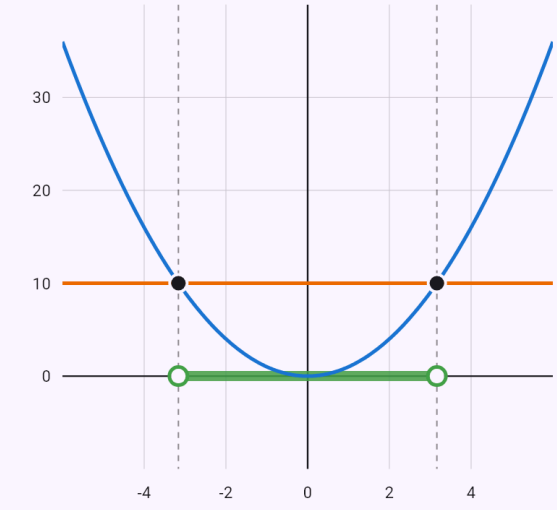
Lösungsweg

- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 10 < 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -\sqrt{10},\ x_2 = \sqrt{10}$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty;\ -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$	$(\sqrt{10};\ \infty)$
$x^2 - 10$	$+$	$-$	$+$

- In den reellen Zahlen $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$; in $\mathbb{Z}$: $x \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Graph



$y = x^2$
$y = 10$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-\sqrt{10}|10\right)$
- $\left(\sqrt{10}|10\right)$

Gleichung und Ungleichung – die Lösungen der Gleichung in die Ungleichung eingesetzt.

Eingabe: `x^2 - x - 6 = 0`
`x > 0`

Ergebnis

$$x = 3$$

Lösungsweg

- Zuerst lösen wir die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$, dann setzen wir ihre Lösungen in die Ungleichungen ein.
- Die Diskriminante berechnen: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$
- Die Lösung $x = -2$ erfüllt die Bedingung $x > 0$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Kreis und Halbebene – die Lösung ist ein Bogen, seine Endpunkte gehören nicht dazu.

Eingabe: `x^2 + y^2 = 4`

```
y > x
```

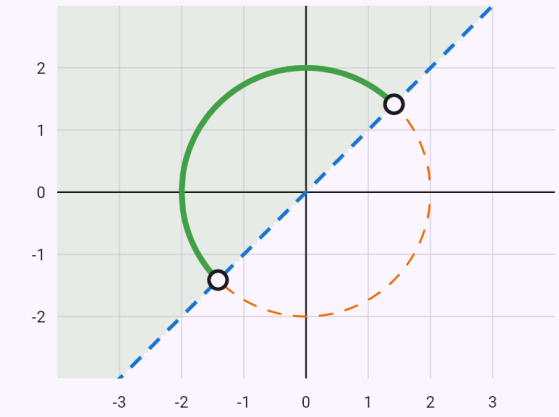
Ergebnis

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y > x$$

Lösungsweg

- Die Lösung sind die Punkte der Kurve $x^2 + y^2 = 4$, die im durch die Ungleichungen gegebenen Bereich liegen. Zuerst bestimmen wir diesen Bereich:
- Die Grenze ist die Kurve $y = x$ – gestrichelt, ihre Punkte gehören nicht zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[1;\ 0]$ ein: $0 > 1$ gilt nicht – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt nicht liegt.
- Endpunkte des Kurvenstücks: $\left[-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ – auf einer gestrichelten Grenze, sie gehören nicht zur Lösung.

Graph



$y > x$

$x^2 + y^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Die Lösung ist der grün hervorgehobene Teil der Kurve – der Teil im schattierten Bereich. Ein ausgefüllter Endpunkt gehört zur Lösung, ein leerer nicht.

Endpunkte:

○ $\left(-\sqrt{2}\middle|-\sqrt{2}\right)$ ○ $\left(\sqrt{2}\middle|\sqrt{2}\right)$

Kreis und Gerade mit einer Ungleichung – der Schnittpunkt unter der x-Achse erfüllt sie nicht.

Eingabe:

```
x^2 + y^2 = 25
x - y = 1
y > 0
```

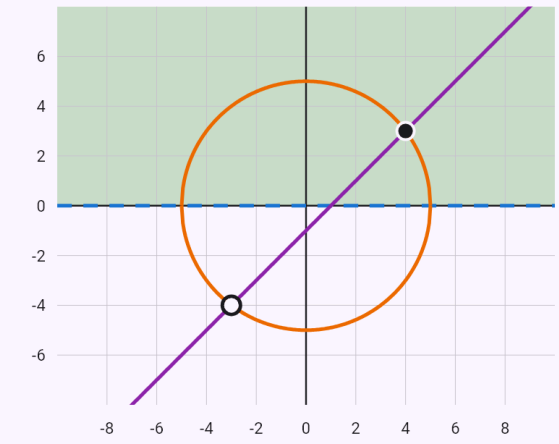
Ergebnis

$$x = 4$$
$$y = 3$$

Lösungsweg

- Zuerst lösen wir das Gleichungssystem, dann setzen wir seine Lösungen in die Ungleichungen ein.
- Die Lösung $x = -3,\ y = -4$ erfüllt die Ungleichung $y > 0$ nicht und ist daher keine Lösung des Systems.
- Die Lösung $x = 4,\ y = 3$ erfüllt die Ungleichungen.

Graph



$y > 0 \ \Leftrightarrow\ y \in (0;\ \infty)$

$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

$x - y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = x - 1$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Kurven im gefärbten Bereich (voller Punkt); ein leerer Punkt erfüllt die Ungleichungen nicht.

Schnittpunkte der Graphen:

○ $(-3|-4)$ ● $(4|3)$

10. Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten löst die App mit dem Additions- oder dem Einsetzungsverfahren, größere Systeme mit dem Gauß-Verfahren – als Gleichungen oder an der Matrix (erweiterte Koeffizientenmatrix und Zeilenumformungen). Ein quadratisches System löst sie auch mit der Cramerschen Regel (Determinanten). Das Verfahren wählen Sie mit einem Chip. Ein System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bekommt auch einen Graphen, in dem die Lösungen die Schnittpunkte der Geraden oder Kurven sind.

Die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten muss nicht übereinstimmen. Das Gauß-Verfahren erkennt, wann ein System keine Lösung hat (es ergibt sich eine Gleichung wie 0 = 1) und wann unendlich viele: Die Unbekannten, die die Gleichungen nicht bestimmen, werden zu Parametern t, s, … (so gewählt, dass die Lösung ohne Brüche auskommt), und die Lösung wird auch in Vektorform geschrieben. In Matrixform entscheidet der Satz von Kronecker-Capelli (Frobenius) über die Anzahl der Lösungen – er vergleicht den Rang der Koeffizientenmatrix, den Rang der erweiterten Matrix und die Anzahl der Unbekannten. Bei einem homogenen System (alle rechten Seiten 0) zeigt die App eine Basis des Lösungsraums.

Unbekannte dürfen einen Index haben: x_1, x_1 oder x1. Ein System kann auch durch Matrizen gegeben sein – durch die erweiterte Matrix mit den rechten Seiten hinter einem senkrechten Strich oder durch eine Matrix A, einen Vektor der rechten Seiten b und die Gleichung Ax = b; die Unbekannten heißen dann x_1, x_2, … und das Standardverfahren ist das Gauß-Verfahren an der Matrix.

Ein System kann einen oder zwei Parameter enthalten – Buchstaben, die keine Unbekannten sind (Unbekannte sind x, y, z, u, v, w, t und x_1, x_2, …). Die App untersucht dann die Lösbarkeit nach den Werten der Parameter (Fallunterscheidung): mit dem Chip „Gauß – Matrix“ (Standard bei drei und mehr Gleichungen) formt sie die erweiterte Matrix um; wo sie mit einem Ausdruck im Parameter multiplizieren würde, der null sein kann, setzt sie voraus, dass er es nicht ist, und behandelt seine Nullstellen gesondert durch Einsetzen – in jedem Fall entscheidet der Satz von Frobenius. Mit dem Chip „Cramersche Regel“ berechnet sie die Determinanten als Ausdrücke im Parameter: Formeln für $D \neq 0$, die Nullstellen von D werden eingesetzt. Bei zwei Parametern entstehen auch Fälle wie „b = 4, $a \neq 2$“ oder „a = b“.

Ein nichtlineares System (etwa Kreis und Gerade) wird gelöst und gezeichnet, bisher ohne Lösungsweg.

Eingabe

`x_1 + x_2 + x_3 = 6`	Unbekannte mit Index – x_1, x_1 und x1.

`[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`	Die erweiterte Matrix – die rechten Seiten hinter einem senkrechten Strich.

`A = [1 2; 4 5]`
`b = [3; 6]`
`Ax = b`
	Die Koeffizientenmatrix, der Vektor der rechten Seiten und die Gleichung Ax = b.

Beispiele

Das Additionsverfahren.

Eingabe: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Additionsverfahren

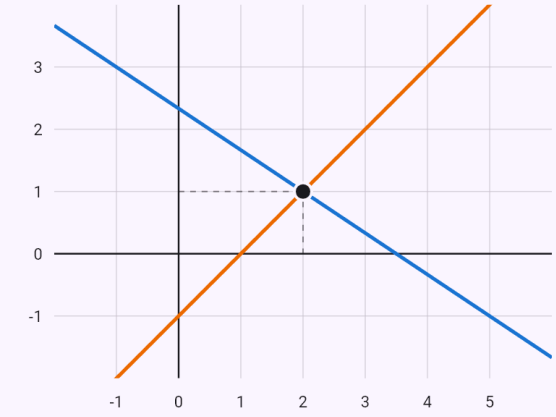
Ergebnis

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Lösungsweg

- Die erste Gleichung mit 1 und die zweite mit -2 multiplizieren, damit x beim Addieren wegfällt
  $$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$
- Gleichungen addieren, x fällt weg: $5y = 5$
- Lösen: $5y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$
- In Gleichung 2 einsetzen: $x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

Graph



$2x + 3y = 7 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$

$x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(2|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung des Gleichungssystems – seine Koordinaten sind die Werte von x und y.

Drei Gleichungen – Gauß-Verfahren.

Eingabe: `x + y + z = 6`
`2x - y + z = 3`

`x + 2y - z = 2` Gauß-Verfahren

Ergebnis

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Lösungsweg

- x aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- y aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Lösen: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- In Gleichung 2 einsetzen: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- In Gleichung 1 einsetzen: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Cramersche Regel – die Determinanten D, D_x, D_y.

Eingabe: `2x + 3y = 7`
`x - y = 1` Cramersche Regel

Ergebnis

$$x = 2$$
$$y = 1$$

Lösungsweg

- Wir berechnen die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

- Wir berechnen die Determinante

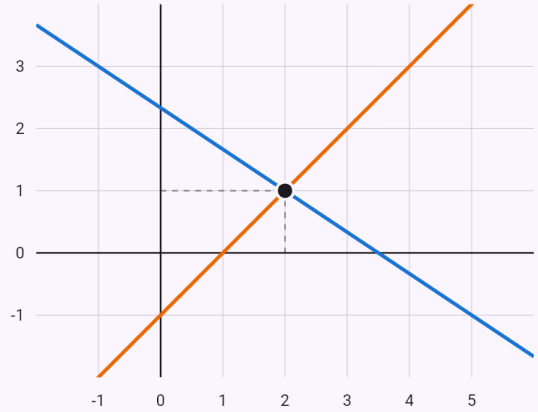
$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -10$$

- Wir berechnen die Determinante

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -5$$

- Nach der Cramerschen Regel: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$
- Nach der Cramerschen Regel: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$

Graph



$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$
$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(2|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung des Gleichungssystems – seine Koordinaten sind die Werte von x und y.

Unendlich viele Lösungen – Satz von Frobenius, Parameter und Vektorform.

Eingabe: `x + 2y + z = 3`
`2x + 4y + 3z = 7`
`3x + 6y + 4z = 10` Gauß – Matrix

Ergebnis

Es gibt unendlich viele Lösungen.

$$x = 2 - 2t$$
$$y = t$$
$$z = 1$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_3 \to R_3 - R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Die Gleichung 0 = 0 gilt immer – wir lassen sie weg
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Satz von Kronecker-Capelli (Frobenius):
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – die Ränge sind gleich, aber kleiner als die Anzahl der Unbekannten, das System hat unendlich viele Lösungen.
- Die Matrix in Stufenform (Dreiecksform) wieder als Gleichungen schreiben
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$
- Die Unbekannten, die die Gleichungen nicht bestimmen, wählen wir als Parameter: $y = t,\ t \in \mathbb{R}$
- Lösen: $z = 1$
- In Gleichung 1 einsetzen:
$x + 2t + 1 = 3 \ \Rightarrow \ x = 2 - 2t$
- Die Lösung in Vektorform
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein System ohne Lösung – es ergibt sich eine Gleichung, die nie gilt.

Eingabe: `x + y + z = 2`
`x - y + z = 0`

`2x + 2z = 3`

Ergebnis

Es gibt keine Lösung.

Lösungsweg

- x aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y=-1 \\ -2y=-1 \end{cases}$$

- y aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y=-1 \\ 0=1 \end{cases}$$

- Es ergibt sich die Gleichung $0=1$, die keine Lösung hat – also hat das System keine Lösung.

Ein homogenes System – eine Basis des Lösungsraums.

Eingabe: `x + 2y - z = 0`

`2x + 4y - 2z = 0`

`x - y + z = 0` Gauß – Matrix

Ergebnis

Es gibt unendlich viele Lösungen.

$$x = -t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3t$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Das System ist homogen (alle rechten Seiten sind 0) – es hat immer die triviale Lösung (lauter Nullen); eine nichttriviale Lösung hat es genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist.
- Die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Gleichungen 2 und 3 vertauschen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Die Gleichung 0 = 0 gilt immer – wir lassen sie weg
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
- Satz von Kronecker-Capelli (Frobenius):
$h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – die Ränge sind gleich, aber kleiner als die Anzahl der Unbekannten, das System hat unendlich viele Lösungen.
- Die Matrix in Stufenform (Dreiecksform) wieder als Gleichungen schreiben
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$
- Die Unbekannten, die die Gleichungen nicht bestimmen, wählen wir als Parameter: $z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$
- In Gleichung 2 einsetzen: $-3y + 6t = 0 \ \Rightarrow\ y = 2t$
- In Gleichung 1 einsetzen: $x + t = 0 \ \Rightarrow\ x = -t$
- Die Lösung in Vektorform
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Eine Basis des Lösungsraums (Dimension 1)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ein System, gegeben durch die erweiterte Matrix.

Eingabe: `[1 1 1 | 6; 2 -1 1 | 3; 1 2 -1 | 2]`

Ergebnis

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Lösungsweg

- Die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_3 \to \frac{1}{7}(3R_3 + R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

- Satz von Kronecker-Capelli (Frobenius): $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – der Rang der Koeffizientenmatrix ist gleich dem Rang der erweiterten Matrix und der Anzahl der Unbekannten, das System hat genau eine Lösung.
- Die Matrix in Stufenform (Dreiecksform) wieder als Gleichungen schreiben
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$
- Lösen: $-x_3 = -3 \ \Rightarrow \ x_3 = 3$
- In Gleichung 2 einsetzen: $-3x_2 - 3 = -9 \ \Rightarrow \ x_2 = 2$
- In Gleichung 1 einsetzen: $x_1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$

Ein System mit Parameter – erweiterte Matrix, die Fälle a = 1 und a = −2.

Eingabe: `ax + y + z = 1`
`x + ay + z = 1`

`x + y + az = 1` Gauß – Matrix

Ergebnis

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}, \\ x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \\ \emptyset, \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannten sind $x,\ y,\ z$, der Parameter a ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, daher gehen wir die einzelnen Fälle durch (Fallunterscheidung).
- Die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Gleichungen 1 und 2 vertauschen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - aR_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$
- Wir rechnen mit dem Element $1 - a$ weiter, das null sein kann – wir setzen daher $a \neq 1$ voraus; den Fall $a = 1$ behandeln wir gesondert.
- Gleichungen 2 und 3 vertauschen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+1) & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_3 \to \dfrac{1}{a-1}(R_3 - (a+1)R_2)$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-2 & -1 \end{array}\right)$$
- Wir rechnen mit dem Element $-a - 2$ weiter, das null sein kann – wir setzen daher $a \neq -2$ voraus; den Fall $a = -2$ behandeln wir gesondert.
- Für $a \neq -2,\ a \neq 1$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – das System hat genau eine Lösung:
$x = \dfrac{1}{a+2},\ y = \dfrac{1}{a+2},\ z = \dfrac{1}{a+2}$
- Für $a = 1$: $h(A) = h(A|b) = 1 < n = 3$ – das System hat unendlich viele Lösungen:
$x = 1 - t - s,\ y = t,\ z = s,\ t, s \in \mathbb{R}$. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Für $a = -2$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – das System hat keine Lösung. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Zwei Parameter – Fallunterscheidung nach a und b.

Eingabe: `x + y + z = 1`
`x + 2y + az = 2`

`x + 4y + a^2z = b`

Ergebnis

$$\begin{cases} x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \overline{(a} \\ \emptyset, \\ x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \\ x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannten sind $x,\ y,\ z$, die Parameter $a,\ b$ sind beliebige reelle Zahlen. Die Lösung hängt von ihren Werten ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- Die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 4 & a^2 & b \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & (a-1)(a+1) & b-1 \end{array}\right)$$
- Zeilenumformungen $R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & b-4 \end{array}\right)$$
- Wir rechnen mit dem Element $(a-2)(a-1)$ weiter, das null sein kann – wir setzen daher $a \neq 1,\ a \neq 2$ voraus; den Fall $a = 2,\ a = 1$ behandeln wir gesondert.
- Für $a \neq 1,\ a \neq 2$: $h(A) = h(A|b) = 3 = n$ – das System hat genau eine Lösung
$x = \dfrac{b-4}{a-1},\ y = \dfrac{a-b+2}{a-2},\ z = \dfrac{b-4}{(a-2)(a-1)}$
- Für $a = 2,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – das System hat keine Lösung. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Für $a = 2,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – das System hat unendlich viele Lösungen:
$x = 0,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Für $a = 1,\ b \neq 4$: $h(A) = 2 \neq h(A|b) = 3$ – das System hat keine Lösung. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$
- Für $a = 1,\ b = 4$: $h(A) = h(A|b) = 2 < n = 3$ – das System hat unendlich viele Lösungen:
$x = -t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Die Matrix nach dem Einsetzen
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kreis und Gerade.

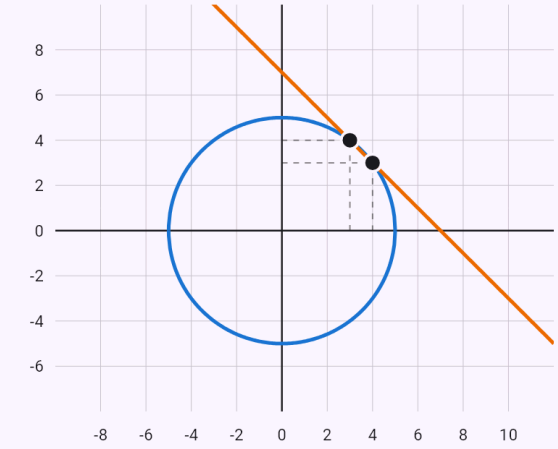
Eingabe: `x^2 + y^2 = 25`

```
x + y = 7
```

Ergebnis

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3$$

Graph



$x^2 + y^2 = 25 \ \Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x + y = 7 \ \Leftrightarrow \ y = 7 - x$

Schnittpunkte der Graphen:

● $(3|4)$ ● $(4|3)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung des Gleichungssystems – seine Koordinaten sind die Werte von x und y.

Bekannte Einschränkungen

- Nichtlineare Systeme sind vorerst ohne Lösungsweg.

11. Gleichungen und Ungleichungen mit Parameter

Ein weiterer Buchstabe neben der Unbekannten ist ein Parameter – eine beliebige reelle Zahl, von der die Lösung abhängt. Die App formt die Gleichung in die Form A·x = B um (eine quadratische in A·x² + B·x + C = 0) und unterscheidet die Fälle nach den Werten des Parameters: wo der Koeffizient der Unbekannten null ist, wo die Diskriminante positiv, null oder negativ ist, wo die Bedingungen eine Lösung ausschließen und für welche Werte die Aufgabe keinen Sinn hat. Das Ergebnis fasst die Fälle zusammen.

Die Unbekannte wählt die App in der Reihenfolge x, y, z, u, v, w, t; die anderen Buchstaben sind Parameter. Eine andere Unbekannte wählst du mit dem Chip „Unbekannte“ oder schreibst sie nach einem Komma. Der Graph zeigt alle Lösungen als Kurve (bei einer Ungleichung als Bereich) in der Ebene Parameter – Unbekannte; mit dem Schieberegler wählst du den Wert des Parameters und liest die Lösungen auf der senkrechten Geraden ab.

Nach einem Komma können Sie auch nach den Lösungen fragen: „x^2 + px + 4 = 0, x > 0“ – für welche p alle Lösungen positiv sind (der Chip „Die Bedingung gilt für“ schaltet auf mindestens eine Lösung um), „…, x = 3“ – für welche p 3 eine Lösung ist. Bei einer linearen Gleichung wird die Lösung in die Bedingung eingesetzt, bei einer quadratischen helfen die Formeln von Vieta. Ein System zweier linearer Gleichungen mit Parameter wird mit Determinanten (cramersche Regel) gelöst, mit den Fällen genau einer, keiner und unendlich vieler Lösungen. Quadratische und Bruchungleichungen werden nach der Reihenfolge der Nullstellen diskutiert. Der Schieberegler im Graphen hält genau an den kritischen Werten des Parameters an, die auch unter dem Graphen stehen.

In einem unbestimmten Integral sind andere Buchstaben Konstanten – die App gibt an, welche nicht null sein dürfen (∫ dx/(a − bx)³ für b ≠ 0). Im Grenzwert und im bestimmten Integral sind Buchstaben ebenfalls Parameter – siehe die Kapitel Grenzwerte und Bestimmtes Integral.

Eingabe

`2ax + a = 4x`	Jeder weitere Buchstabe ist ein Parameter; die Unbekannte ist x (oder y, z, …).
`(q+3)x = 2x + q, Unbekannte q`	Die Unbekannte oder den Parameter kannst du nach einem Komma angeben („a ist Parameter“, „Unbekannte q“).
`x^2 + px + 4 = 0, x > 0`	Eine Frage nach den Lösungen nach einem Komma: für welche p alle Lösungen (oder mindestens eine) die Eigenschaft haben.

Beispiele

Lineare Gleichung – für a = 2 keine Lösung.

Eingabe: `2ax + a = 4x`

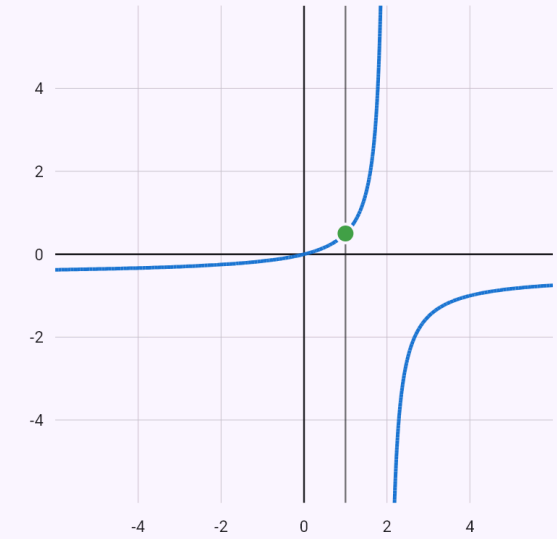
Ergebnis

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x, der Parameter a ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $2(a-2)x = -a$
- Für $a \neq 2$ ist $2(a-2)$ ungleich null, wir dürfen dadurch dividieren: $x = \dfrac{a}{2(2-a)}$
- Für $a = 2$ ist der Koeffizient der Unbekannten null: $0 \cdot x = -2$, also $x \in \emptyset$

Graph



$2ax + a = 4x$

Jeder Punkt [a; x] der Kurve ist eine Lösung. Für einen gewählten Wert von a liegen die Lösungen auf der senkrechten Geraden – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

a = 2

$a = 1: \quad x \approx 0,5$

Quadratische Gleichung – Fallunterscheidung nach der Diskriminante.

Eingabe: `x^2 + 6x + p = 0`

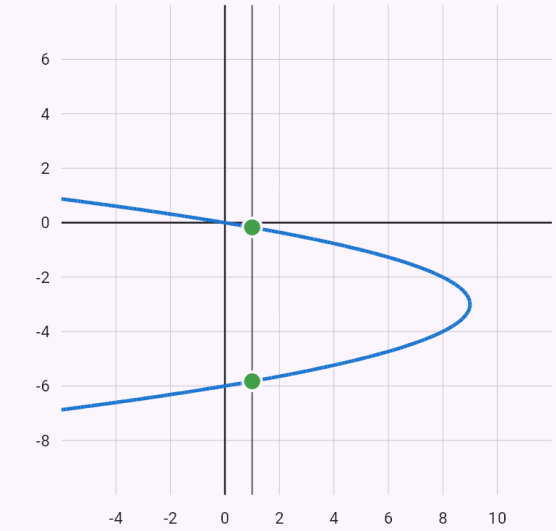
Ergebnis

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x, der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $x^2 + 6x + p = 0$
- Die Diskriminante in Abhängigkeit vom Parameter: $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9-p)$
- Für $p < 9$ ist D > 0, die Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Für $p > 9$ ist D < 0, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
- Für $p = 9$ ist D = 0, die Gleichung hat eine doppelte Lösung: $x = -3$

Graph



$x^2 + 6x + p = 0$

Jeder Punkt [p; x] der Kurve ist eine Lösung. Für einen gewählten Wert von p liegen die Lösungen auf der senkrechten Geraden – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

$p = 9$

$p = 1: \quad x \approx -5,83;\ -0,17$

Ungleichung – das Vorzeichen des Koeffizienten entscheidet über die Richtung.

Eingabe: `2x + 2p - 5 < 2px + 7`

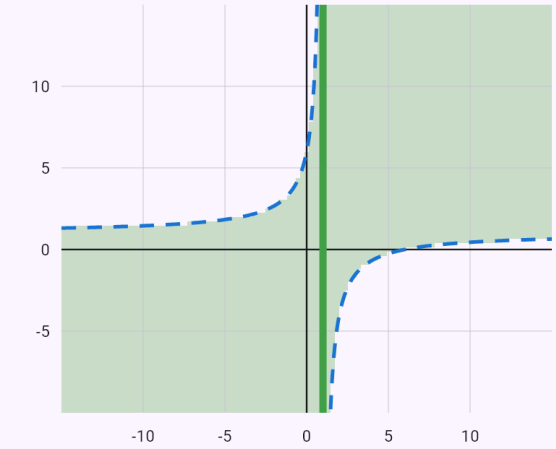
Ergebnis

$$\begin{cases} x < \dfrac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \dfrac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x, der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Für $p < 1$ ist $2(1-p)$ positiv – beim Dividieren bleibt das Ungleichheitszeichen: $x < \dfrac{p-6}{p-1}$
- Für $p > 1$ ist $2(1-p)$ negativ – beim Dividieren kehrt sich das Ungleichheitszeichen um: $x > \dfrac{p-6}{p-1}$
- Für $p = 1$ ist der Koeffizient der Unbekannten null: $0 \cdot x < 10$, also $x \in \mathbb{R}$

Graph



$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{p-6}{p-1}$

Der eingefärbte Bereich enthält alle Lösungen [p; x]. Für einen gewählten Wert von p ist der hervorgehobene Teil der senkrechten Geraden die Lösung – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

p = 1

$p = 1$

Beide Lösungen größer als 1 – Diskriminante und Formeln von Vieta.

Eingabe: `x^2 - 2px + p + 2 = 0, x > 1`

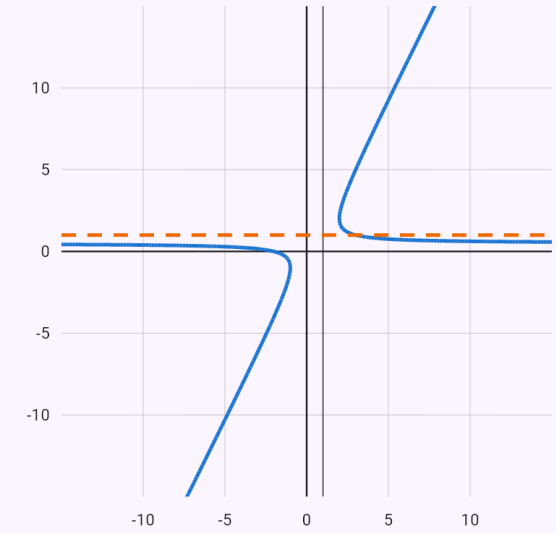
Ergebnis

$$2 \leq p < 3$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x, der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $x^2 - 2px + p + 2 = 0$
- Die Diskriminante in Abhängigkeit vom Parameter $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+2) = 4p^2 - 4p - 8 = 4(p-2$
- Für $p \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$ ist D > 0, die Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen: $x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2}$
- Für $-1 < p < 2$ ist D < 0, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
- Für $p = -1$ ist D = 0, die Gleichung hat eine doppelte Lösung: $x = -1$
- Für $p = 2$ ist D = 0, die Gleichung hat eine doppelte Lösung: $x = 2$
- Wir suchen die Werte des Parameters, für die alle Lösungen der Gleichung $x > 1$ erfüllen (und es eine Lösung gibt).
- Nach dem Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = 2p$, $x_1 \cdot x_2 = p + 2$
- Die Gleichung muss reelle Lösungen haben: $D \geq 0$, also $p \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ \infty)$
- Die Bedingung für die Summe: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 2(p-1) > 0$, also $p > 1$
- Die Bedingung für das Produkt: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 - p > 0$, also $p < 3$
- Die Bedingung gilt für $2 \leq p < 3$

Graph



$x^2 - 2px + p + 2 = 0$
$x = 1$

Jeder Punkt [p; x] der Kurve ist eine Lösung. Für einen gewählten Wert von p liegen die Lösungen auf der senkrechten Geraden – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

p = −1 | p = 2 | p = 3

$p = 1:\quad x \in \emptyset$

Ein System mit Parameter – Determinanten; die Geraden schneiden sich, sind parallel oder gleich.

Eingabe: `ax + y = 1`

`x + ay = 1`

Ergebnis

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}, & a \neq -1, \\ \emptyset, & a = -1 \\ y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}, & a = 1 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannten sind $x,\ y$, der Parameter a ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, daher gehen wir die einzelnen Fälle durch (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen

  $ax + y = 1$

  $x + ay = 1$

- Wir lösen das System mit Determinanten (cramersche Regel)

  $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$

  $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$

  $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

- Für $a \neq -1,\ a \neq 1$ ist D ≠ 0 – das System hat genau eine Lösung (die Geraden schneiden sich):

  $x = \dfrac{1}{a+1},\ y = \dfrac{1}{a+1}$

- Für $a = -1$ ist D = 0 und das System hat keine Lösung (die Geraden sind parallel).

  $-x + y = 1$

  $x - y = 1$

- Für $a = 1$ ist D = 0 und beide Gleichungen von beschreiben dieselbe Gerade – unendlich viele Lösungen: $y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$

  $x + y = 1$

  $x + y = 1$

Eine Bruchungleichung – nach der Reihenfolge der Nullstelle p und des Punktes 1.

Eingabe: `(x - p)/(x - 1) > 0`

Ergebnis

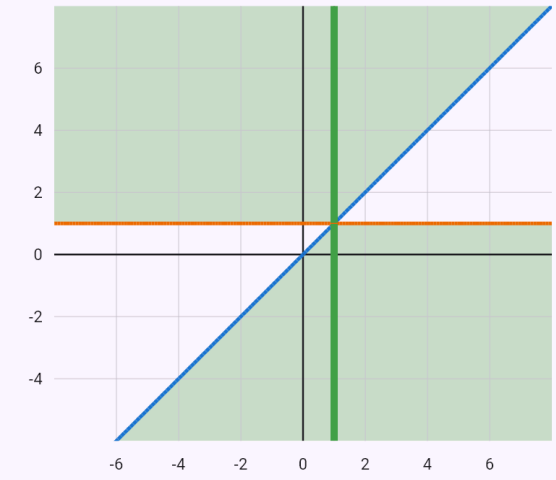
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty), & p < 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty), & p = 1 \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty), & p > 1 \end{cases}$$

Bedingungen: $x \neq 1$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x, der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 1$
- In die Grundform umformen: $\dfrac{x-p}{x-1} > 0$
- Die Nullstellen des Zählers: p; der Nenner ist null für 1
- Für $p < 1$ – nach der Reihenfolge der Nullstellen und den Vorzeichen auf den Intervallen: $x \in (-\infty;\ p) \cup (1;\ \infty)$
- Für $p > 1$ – nach der Reihenfolge der Nullstellen und den Vorzeichen auf den Intervallen: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (p;\ \infty)$
- Für $p = 1$ lösen wir $\dfrac{x-1}{x-1} > 0$; $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$

Graph



$\dfrac{x-p}{x-1} > 0$

$x - 1 = 0$

Der eingefärbte Bereich enthält alle Lösungen [p; x]. Für einen gewählten Wert von p ist der hervorgehobene Teil der senkrechten Geraden die Lösung – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

p = 1

$p = 1$

Bekannte Einschränkungen

- Die vollständige Fallunterscheidung nach Intervallen nur mit einem Parameter, mit mehreren die allgemeinen Fälle.
- Fragen nach den Lösungen nur bei linearen und quadratischen Gleichungen; Systeme mit Parameter nur aus zwei linearen Gleichungen; ein Parameter unter einer Wurzel oder in einem Logarithmus noch nicht.

12. Formeln umstellen

Eine Formel aus Mathematik, Physik oder Chemie (m = ρV, S = πr², v = s/t) wird so umgestellt, dass der gewählte Buchstabe allein auf einer Seite steht. Die anderen Buchstaben sind gegebene Größen – die App rechnet mit ihnen wie mit bekannten Zahlen. Die Schritte sind Äquivalenzumformungen wie in der Schule: Terme auf die andere Seite bringen, mit dem Nenner multiplizieren, dividieren, ausklammern, die Wurzel ziehen, Kehrwerte.

Nach welchem Buchstaben umgestellt wird, wählen Sie mit dem Chip „Umstellen nach“; ohne Wahl stellt die App nach dem ersten Buchstaben auf der Seite der Formel um. Das Ergebnis ist die Formel mit ihren Bedingungen – wodurch dividiert wird, darf nicht null sein (V = m/ρ für ρ ≠ 0). Die Größen einer Formel sind positiv, daher hat eine Wurzel nur ihren positiven Wert: r = √(S/π).

Eine Gleichung in x und y wird nach y umgestellt (die Gerade 2x + y = x + 2y ist y = x); die übrigen Gleichungen in x und y haben unter den Chips der Ableitung, des Integrals und des Graphen auch „Nach y umstellen“ und „Nach x umstellen“. Hier gibt die Wurzel beide Vorzeichen: x² + y² = 25 ist y = ±√(25 − x²).

Gleichungen mit Parameter (2ax + a = 4x, Unbekannte x) werden nicht als Formel umgestellt, sondern mit Fallunterscheidung gelöst – siehe das vorige Kapitel.

Eingabe

`m = ρV`	Eine Formel – auf einer Seite eine Größe allein, große und kleine Buchstaben (E, I, V sind Größen).
`1/R = 1/R_1 + 1/R_2`	Indizes mit Unterstrich (R_1, v_0), griechische Buchstaben (ρ, rho, \rho), π ist die Konstante.
`2x + y = x + 2y`	Eine Gleichung in x und y – nach y umgestellt.

Beispiele

Dichte – Division durch eine Größe mit der Bedingung ρ ≠ 0.

Eingabe: `m = ρV`

Ergebnis

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Bedingungen: $\rho \neq 0$

Lösungsweg

- Wir stellen nach V um. Mit den anderen Buchstaben ($m,\ \rho$) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis V allein auf einer Seite steht.
- Wir vertauschen die Seiten der Gleichung: $\rho V = m$
- Wir dividieren beide Seiten durch ρ, das nicht null sein darf ($\rho \neq 0$): $V = \frac{m}{\rho}$

Fläche eines Trapezes – mit zwei multiplizieren, durch die Höhe dividieren, a hinüberbringen.

Eingabe: `S = (a + c)/2 · v`

Ergebnis

$$c = \frac{2S - av}{v}$$

Bedingungen: $v \neq 0$

Lösungsweg

- Wir stellen nach c um. Mit den anderen Buchstaben ($S,\ a,\ v$) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis c allein auf einer Seite steht.
- Wir vertauschen die Seiten der Gleichung: $\frac{v(a+c)}{2} = S$
- Beide Seiten multiplizieren wir mit 2: $v(a+c) = 2S$
- Wir dividieren beide Seiten durch v, das nicht null sein darf ($v \neq 0$): $a + c = \frac{2S}{v}$
- Auf beiden Seiten subtrahieren wir a: $c = \frac{2S}{v} - a$
- Auf den Hauptnenner bringen: $c = \frac{2S - av}{v}$

Kreisfläche – Wurzel ziehen, der Radius ist positiv.

Eingabe: `S = πr^2`

Ergebnis

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Lösungsweg

- Wir stellen nach r um. Mit den anderen Buchstaben (S) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis r allein auf einer Seite steht.
- Wir vertauschen die Seiten der Gleichung: $\pi r^2 = S$
- Beide Seiten dividieren wir durch π: $r^2 = \frac{S}{\pi}$
- Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel. r ist eine Größe, und Größen sind positiv – es gilt nur die positive Wurzel: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Parallele Widerstände – Hauptnenner und Kehrwerte.

Eingabe: `1/R = 1/R_1 + 1/R_2`

Ergebnis

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

Bedingungen: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

Lösungsweg

- Wir stellen nach R_1 um. Mit den anderen Buchstaben ($R,\ R_2$) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis R_1 allein auf einer Seite steht.
- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$
- Wir vertauschen die Seiten der Gleichung: $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$
- Auf beiden Seiten subtrahieren wir $\frac{1}{R_2}$: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
- Auf den Hauptnenner bringen: $\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$
- Sind zwei Ausdrücke gleich, sind auch ihre Kehrwerte gleich: $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$

Eine Gerade – Terme mit y nach links, die übrigen nach rechts.

Eingabe: `2x + y = x + 2y`

Ergebnis

$$y = x$$

Lösungsweg

- Wir stellen nach y um. Mit den anderen Buchstaben (x) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis y allein auf einer Seite steht.
- Die Terme mit y bringen wir auf die linke Seite, die übrigen auf die rechte (mit umgekehrtem Vorzeichen), und fassen zusammen

$$\begin{aligned} y - 2y &= x - 2x \\ -y &= -x \end{aligned}$$

- Beide Seiten multiplizieren wir mit (-1): $y = x$

Ein Kreis nach y umgestellt – die Wurzel mit ±.

Eingabe: `x^2 + y^2 = 25`

Ergebnis

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Lösungsweg

- Wir stellen nach y um. Mit den anderen Buchstaben (x) rechnen wir wie mit bekannten Zahlen und formen die Gleichung durch Äquivalenzumformungen um, bis y allein auf einer Seite steht.
- Auf beiden Seiten subtrahieren wir x^2: $y^2 = 25 - x^2$
- Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel; eine Zahl und ihre Gegenzahl haben dasselbe Quadrat, daher ±: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Bekannte Einschränkungen

- Der Buchstabe nur in Potenzen, Brüchen und Wurzeln; noch nicht in Funktionen (sin, log, ein Exponent) oder quadriert zusammen mit sich selbst (s = v_0t + ½at^2 nach t).

13. Terme umformen

Einen Term ohne Gleichheitszeichen formt die App nach dem gewählten Chip um: sie vereinfacht ihn (einen Bruchterm auf den Hauptnenner gebracht und gekürzt, mit Definitionsmenge), multipliziert aus, faktorisiert (durch Ausklammern, binomische Formeln und das Horner-Schema) oder zerlegt in Partialbrüche – wie auf Papier, mit Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten. Faktorisiert wird über den ganzen Zahlen; lässt sich der Term über den reellen Zahlen weiter zerlegen (mit irrationalen Nullstellen), zeigt es der nächste Schritt. Die Wurzel aus einem Monom wird teilweise gezogen – bei einer geraden Wurzel als Betrag, wo die Basis negativ sein kann. Auch komplexe Zahlen gehen – die Division durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl.

Zahlenausdrücke mit Brüchen rechnet die App Schritt für Schritt wie in der Schule: zuerst die innersten Klammern (runde, eckige und geschweifte), beim Doppelbruch Zähler und Nenner getrennt, dann Potenzen, Multiplikation und Division (durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrwert, auch mit Doppelpunkt oder ÷) und zuletzt die Addition über den Hauptnenner. Eine gemischte Zahl schreiben Sie mit Leerzeichen – 2 1/3 (vom Foto auch 2⅓) –, die App wandelt sie zuerst in einen Bruch um; ein Produkt zweier Zahlen immer mit Punkt. Ein Ergebnis über 1 zeigt sie auch als gemischte Zahl.

Ein Polynom geteilt durch ein Polynom schreiben Sie mit Doppelpunkt: (2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1). Die App dividiert schriftlich wie auf Papier – teilt die höchsten Glieder, multipliziert den Divisor mit dem Ergebnis und subtrahiert – und zeigt Quotient, Rest und Probe; bei einem Divisor x − a bietet sie auch das Horner-Schema an. Ein Bruch p/q wird wie bisher vereinfacht, die Division wählen Sie mit dem Chip „Polynomdivision“.

Binomischer Lehrsatz: das k-te Glied einer Entwicklung („5. Glied (2x - 1/x)^8“) und das Glied ohne x („Glied ohne x in (x + 1/x)^10“) aus dem allgemeinen Glied. Permutationen P(5) und mit Wiederholung P′(2, 3, 1) werden als Fakultäten berechnet.

Kombinatorik können Sie auch mit einem kurzen Satz eingeben: „Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 aus 8 auszuwählen?“ (mit „Reihenfolge ist wichtig“, „mit Wiederholung“), „Auf wie viele Arten lassen sich 5 Personen anordnen?“ (auch um einen runden Tisch), dreistellige gerade Zahlen aus gegebenen Ziffern und Wörter aus den Buchstaben eines Wortes. Dazu zwei klassische Wahrscheinlichkeitsaufgaben: das Geburtstagsproblem (mindestens zwei von n Personen haben am selben Tag Geburtstag) und die Garderobenfrau, die die Marken verliert (niemand bekommt seinen Mantel – auch Briefe in Umschlägen).

Beispiele

Ein Zahlenterm mit Brüchen – zuerst die Multiplikation, dann der gemeinsame Nenner.

Eingabe: `2/3 - 1/6*2` Vereinfachen

Ergebnis

$$\frac{1}{3}$$

Lösungsweg

- Zuerst Multiplikation und Division: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Verschachtelte Klammern von innen nach außen.

Eingabe: `{2 - [1 - (1/2 - 1/3)]} * 6`

Ergebnis

$$7$$

Lösungsweg

- Zuerst die innerste Klammer: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
- Eingesetzt: $\left\{2 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]\right\} \cdot 6$
- Zuerst die innerste Klammer: $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Eingesetzt: $\left\{2 - \frac{5}{6}\right\} \cdot 6$
- Zuerst die innerste Klammer: $2 - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
- Eingesetzt: $\frac{7}{6} \cdot 6$
- Wir multiplizieren – Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner – und kürzen: $\frac{7}{6} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Ein Doppelbruch – Zähler und Nenner getrennt, dann mal den Kehrwert.

Eingabe: `(1/2 + 1/3)/(2 - 1/4)`

Ergebnis

$$\frac{10}{21}$$

Lösungsweg

- Zuerst Zähler und Nenner des Doppelbruchs getrennt:
  $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Zuerst Zähler und Nenner des Doppelbruchs getrennt:
  $2-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
- Eingesetzt: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}$
- Ein Doppelbruch: der Zähler mal den Kehrwert des Nenners
  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Gemischte Zahlen – in Brüche umgewandelt, das Ergebnis auch als gemischte Zahl.

Eingabe: `2 1/3 + 1 1/2`

Ergebnis

$$\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$$

Lösungsweg

- Die gemischten Zahlen wandeln wir in Brüche um – die Ganzen mal den Nenner plus den Zähler
  $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3},\quad 1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$
- Eingesetzt: $\frac{7}{3}+\frac{3}{2}$
- Auf den Hauptnenner bringen: $\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$
- Das Ergebnis als gemischte Zahl: $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

Einen Bruchterm vereinfachen.

Eingabe: `(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)` Vereinfachen

Ergebnis

$$\frac{x-1}{x+1}$$

Bedingungen: $x \neq -1$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq -1$
- Zähler und Nenner faktorisieren: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$
- Den gemeinsamen Faktor $x+1$ kürzen: $\frac{x-1}{x+1}$

Ausmultiplizieren.

Eingabe: `(x + 2)^3` Ausmultiplizieren

Ergebnis

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Lösungsweg

- Klammern ausmultiplizieren und gleichartige Terme zusammenfassen: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Faktorisieren mit dem Horner-Schema.

Eingabe: `x^3 - 6x^2 + 11x - 6` Faktorisieren

Ergebnis

$$(x-3)(x-2)(x-1)$$

Lösungsweg

- Rationale Nullstellen können nur Teiler des Absolutglieds -6 sein: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$
- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 1$ und dividieren das Polynom:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$

$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$

- Durch Einsetzen sehen wir, dass diese Kandidaten keine Nullstellen sind: $P(-1) = -24 \neq 0$
- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 2$ und dividieren das Polynom:

	1	-5	6
2	1	-3	$\boxed{0}$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Partialbruchzerlegung.

Eingabe: `(3x + 5)/(x^2 + x - 2)` Partialbrüche

Ergebnis

$$\frac{8}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Bedingungen: $x \neq -2,\ x \neq 1$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq -2,\ x \neq 1$
- Nenner faktorisieren: $(x-1)(x+2)$
- Ansatz für die Zerlegung: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
- Beide Seiten werden mit dem Nenner $(x-1)(x+2)$ multipliziert: $3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$
- Einsetzen von $x = 1$: $8 = 3A \ \Rightarrow\ A = \frac{8}{3}$
- Einsetzen von $x = -2$: $-1 = -3B \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{3}$

Teilweises Wurzelziehen mit Betrag.

Eingabe: `sqrt(8a^5 b^2)` Vereinfachen

Ergebnis

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Lösungsweg

- Teilweise radizieren – Potenzen unter der Wurzel kommen davor (bei einer geraden Wurzel als Betrag, wo die Basis negativ sein kann): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Division komplexer Zahlen.

Eingabe: `(3+4i)/(1-2i)` Algebraische Form

Ergebnis

$$-1 + 2i$$

Lösungsweg

- Den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners, $1 + 2i$, erweitern $\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1 + 2i$

Eine Gleichung mit Fakultäten – Bedingungen, Kürzen und Prüfen der Lösungen.

Eingabe: `(x+1)!/(x-1)! = 30`

Ergebnis

$$x = 5$$

Lösungsweg

- Bedingungen: Fakultäten und Binomialkoeffizienten gibt es nur für ganze nichtnegative Zahlen – jedes Argument (beim Binomialkoeffizienten n, k und n − k) muss ganz und ≥ 0 sein: $x+1 \geq 0,\ x-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 1$
- Die Fakultäten durch die kleinste ausgedrückt, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), und gekürzt; ein Binomialkoeffizient als Produkt: $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 30 \ \Rightarrow\ x^2 + x = 30$
- Es bleibt eine Gleichung ohne Fakultäten, alles auf eine Seite gebracht: $x^2 + x - 30 = 0$
- Die Lösungen der Gleichung sind $x = -6,\ x = 5$; die Bedingungen erfüllt $x = 5$

Schriftliche Division – Quotient, Rest und Probe.

Eingabe: `(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)`

Ergebnis

$$\left(2x^3 + 3x^2 - x + 5\right) : \left(x^2 + 1\right)$$
$$= 2x + 3 - \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

Lösungsweg

- 1. Schritt – die höchsten Glieder teilen $2x^3 : x^2 = 2x$, den Divisor mit dem Ergebnis multiplizieren $2x \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x^3 + 2x$ und subtrahieren, es bleibt $3x^2 - 3x + 5$
- 2. Schritt – die höchsten Glieder teilen $3x^2 : x^2 = 3$, den Divisor mit dem Ergebnis multiplizieren $3 \cdot \left(x^2 + 1\right) = 3x^2 + 3$ und subtrahieren, es bleibt $-3x + 2$
- Schriftliche Division $\left(2x^3 + 3x^2 - x + 5\right) : \left(x^2 + 1\right)$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +3x^2 & -x & +5 \\ -2x^3 & & -2x & \\ \hline & 3x^2 & -3x & +5 \\ & -3x^2 & & -3 \\ \hline & & -3x & +2 \end{array}$$

- Der Quotient ist $2x + 3$, der Rest $-3x + 2$
- Probe – Quotient mal Divisor plus Rest ergibt den Dividenden: $(2x+3)\left(x^2+1\right) + (-3x+2) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$

Division durch x − 1 mit dem Horner-Schema.

Eingabe: `(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)` Horner-Schema

Ergebnis

$$\left(x^3 - 2x + 1\right) : (x - 1)$$
$$= x^2 + x - 1$$

Lösungsweg

- Horner-Schema für $x = 1$ – oben die Koeffizienten des Dividenden, unten ihre laufenden Summen; die letzte Zahl ist der Rest

	1	0	-2	1
1	1	1	-1	$\boxed{0}$

- Der Quotient ist $x^2 + x - 1$, der Rest 0
- Probe – Quotient mal Divisor plus Rest ergibt den Dividenden: $\left(x^2 + x - 1\right)(x - 1) = x^3 - 2x + 1$

Eine Gleichung mit einem Binomialkoeffizienten C(n, 2) – auch V(n, k), C', V' mit Wiederholung.

Eingabe: `C(n, 2) = 45`

Ergebnis

$$n = 10$$

Lösungsweg

- Bedingungen: Fakultäten und Binomialkoeffizienten gibt es nur für ganze nichtnegative Zahlen – jedes Argument (beim Binomialkoeffizienten n, k und n − k) muss ganz und ≥ 0 sein: $n \geq 0,\ n - 2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$
- Die Fakultäten durch die kleinste ausgedrückt, (x + 1)! = (x − 1)! · x · (x + 1), und gekürzt; ein Binomialkoeffizient als Produkt: $\binom{n}{2} = 45 \ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{2} = 45$
- Es bleibt eine Gleichung ohne Fakultäten, alles auf eine Seite gebracht: $n^2 - n - 90 = 0$
- Die Lösungen der Gleichung sind $n = -9,\ n = 10$; die Bedingungen erfüllt $n = 10$

Auswahl k aus n als Satz – Kombinationen.

Eingabe: `Kolika způsoby lze vybrat 3 z 10?`

Ergebnis

120

Lösungsweg

- Wir wählen 3 aus 10, die Reihenfolge spielt keine Rolle, ohne Wiederholung – die Anzahl der Kombinationen:
- $$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Gerade dreistellige Zahlen – zwei Fälle nach der letzten Ziffer.

Eingabe: `Kolik je trojmístných sudých čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, číslice se nesmí opakovat?`

Ergebnis

52

Lösungsweg

- Die Zahlen haben 3 Stellen aus den Ziffern $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Vorne darf keine Null stehen. Ziffern dürfen sich nicht wiederholen. Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist.
- Am Ende steht 0 – für die übrigen Stellen bleiben alle anderen Ziffern: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
- Am Ende steht eine passende Ziffer außer 0 – vorne darf dann weder die Null noch diese Ziffer stehen: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- Wir addieren beide Fälle: $20 + 32 = 52$

Wörter aus den Buchstaben eines Wortes – Permutationen mit Wiederholung.

Eingabe: `Kolik slov lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA?`

Ergebnis

151200

Lösungsweg

- Das Wort hat 10 Buchstaben; wir zählen, wie oft jeder vorkommt: $\mathrm{M}:2,\ \mathrm{A}:3,\ \mathrm{T}:2,\ \mathrm{E}:1,\ \mathrm{I}:1,\ \mathrm{K}:1$
- Die Wörter sind Permutationen mit Wiederholung – vertauschte gleiche Buchstaben ergeben dasselbe Wort: $$P'(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200$$

Das Geburtstagsproblem über das Gegenereignis.

Eingabe: `Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 23 lidí slaví alespoň dva narozeniny ve stejný den?`

Ergebnis

$$P(A) \approx 0{,}5073$$

Lösungsweg

- Leichter ist das Gegenereignis A': alle 23 Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag (365 Tage, jeder gleich wahrscheinlich).
- Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Geburtstage verschieden sind
  $$P(A') = \frac{V(365,23)}{365^{23}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$$
- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Ergänzung zu eins: $P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}5073 = 50{,}73\,\%$

Die verlorenen Garderobenmarken – fixpunktfreie Permutationen.

Eingabe: `Jaká je pravděpodobnost, že nikdo z 5 lidí odcházejících z divadla nedostane svůj kabát, když šatnářka ztratí lístky?`

Ergebnis

$$P = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$$

Lösungsweg

- Verteilungen, bei denen niemand das Eigene bekommt, sind fixpunktfreie Permutationen – ihre Anzahl nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion
  $$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$
- Es gibt n! Verteilungen, die Wahrscheinlichkeit ist der Quotient: $P = \frac{D_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}3667$
- Für mehr Personen ändert sich die Wahrscheinlichkeit kaum: $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$

Das Glied ohne x einer binomischen Entwicklung.

Eingabe: `Glied ohne x in (x + 1/x)^10`

Ergebnis

$$T_6 = 252$$

Lösungsweg

- Das allgemeine $(k+1)$-te Glied der binomischen Entwicklung: $T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$
- Das Glied ohne x hat den Exponenten von x gleich null: $10 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k = 5$
- Das gesuchte 6. Glied: $T_6 = \binom{10}{5} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 252$

14. Teilbarkeit und Primzahlen

Eine ganze Zahl allein zerlegt die App in Primfaktoren – sie teilt nacheinander durch die kleinsten Primzahlen und schreibt 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; bei einer Primzahl zeigt sie, dass keine Primzahl bis zu ihrer Wurzel sie teilt. Den Test können Sie auch als isprime(97) eingeben.

Den größten gemeinsamen Teiler ggT(60, 90) und das kleinste gemeinsame Vielfache kgV(18, 30) berechnet die App aus den Primfaktorzerlegungen, mit dem Chip „Euklidischer Algorithmus“ durch Division mit Rest. Der erweiterte euklidische Algorithmus mit Tabelle liefert das Lemma von Bézout bezout(240, 46): ggT(240, 46) = 240·u + 46·v.

Die Teiler einer Zahl teiler(36) sucht die App paarweise 1·36, 2·18, … bis zur Wurzel und prüft ihre Anzahl an der Zerlegung. Die Teilbarkeitsregeln teilbarkeit(1236) zeigt sie als Tabelle für 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 und 25 (letzte Ziffer, Quersumme, alternierende Quersumme…); einen Teiler schreiben Sie als teilbarkeit(1236, 7), als Satz „ist 1236 durch 7 teilbar“ oder 7 | 1236 – ohne Schulregel wird mit Rest dividiert. Die Primzahlen bis 200 liefert das Sieb des Eratosthenes („primzahlen bis 50“). Eine lineare Gleichung ax + by = c in den ganzen Zahlen („3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ“ oder Chip ℤ) wird über das Lemma von Bézout gelöst – alle Lösungen $x = x_0 + 5k$, $y = y_0 - 3k$.

Modulare Arithmetik: der Rest 17 mod 5, das Inverse 3^(-1) mod 11 (aus dem erweiterten euklidischen Algorithmus, mit Probe) und die Potenz 7^13 mod 13 durch wiederholtes Quadrieren. Darauf beruht RSA – rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9) berechnet n, φ(n), den privaten Schlüssel d und ver- und entschlüsselt die Nachricht; e und m dürfen fehlen.

Eingabe

`360, factor(360), isprime(97)`	Primfaktorzerlegung, Primzahltest.
`ggT(60, 90), kgV(18, 30)`	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches.
`teiler(36), teilbarkeit(1236), teilbarkeit(1236, 7)`	Teiler einer Zahl und Teilbarkeitsregeln – alle oder ein Teiler (auch der Satz „ist 1236 durch 7 teilbar“, 7 | 1236).
`primzahlen bis 50`	Die Primzahlen bis n (höchstens 200) mit dem Sieb des Eratosthenes; auch primzahlen(50).
`3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`	Eine lineare Gleichung in den ganzen Zahlen (diophantisch); auch diophant(3, 5, 1).

`bezout(240, 46)`	Lemma von Bézout.
`17 mod 5, 3^(-1) mod 11, 7^13 mod 13`	Rest, Inverses und Potenz modulo n.
`rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`	RSA mit kleinen Zahlen.

Beispiele

Primfaktorzerlegung durch fortgesetzte Division.

Eingabe: `360`

Ergebnis

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Lösungsweg

- Wir teilen 360 nacheinander durch die kleinsten Primzahlen, bis 1 übrig bleibt

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Primfaktorzerlegung: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Eine Primzahl – kein Teiler bis zur Wurzel.

Eingabe: `97`

Ergebnis

Die Zahl ist eine Primzahl.

Lösungsweg

- Es genügt, die Primzahlen bis $\sqrt{97} \approx 9{,}85$ zu probieren: $2,\ 3,\ 5,\ 7$ – keine teilt 97, also ist es eine Primzahl.

Der ggT aus den Primfaktorzerlegungen.

Eingabe: `ggT(60, 90)`

Ergebnis

$$\mathrm{ggT}\,(60, 90) = 30$$

Lösungsweg

- Primfaktorzerlegung: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- Primfaktorzerlegung: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Der größte gemeinsame Teiler ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren mit den kleinsten Exponenten: $\mathrm{ggT}\,(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Das kgV über den ggT mit dem euklidischen Algorithmus.

Eingabe: `kgV(60, 90)` Euklidischer Algorithmus

Ergebnis

$$\mathrm{kgV}\,(60, 90) = 180$$

Lösungsweg

- Euklidischer Algorithmus – die größere Zahl durch die kleinere mit Rest teilen, dann den Teiler durch den Rest, bis der Rest 0 ist; der letzte Rest ungleich 0 ist der größte gemeinsame Teiler

$$\begin{aligned} 90 &= 1 \cdot 60 + 30 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{ggT}\,(60, 90) = 30$$

- Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Produkt der Zahlen geteilt durch ihren größten gemeinsamen Teiler

$$\mathrm{kgV}\,(60, 90) = \frac{60 \cdot 90}{\mathrm{ggT}\,(60, 90)} = \frac{5400}{30} = 180$$

Teiler paarweise, die Anzahl aus der Zerlegung.

Eingabe: `dělitelé(36)`

Ergebnis

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Lösungsweg

- Die Teiler suchen wir paarweise d · 36/d – es genügt, d bis 6 zu probieren, der andere Teiler des Paares folgt

  $36 = 1 \cdot 36$

  $36 = 2 \cdot 18$

  $36 = 3 \cdot 12$

  $36 = 4 \cdot 9$

  $36 = 6 \cdot 6$

- Probe der Teileranzahl aus der Primfaktorzerlegung – die um 1 erhöhten Exponenten multipliziert:
  $36 = 2^2 \cdot 3^2,\ (2+1) \cdot (2+1) = 9$

Die Tabelle der Teilbarkeitsregeln.

Eingabe: `dělitelnost(1236)`

Ergebnis

$$2, 3, 4, 6, 12 \mid 1236$$

Lösungsweg

- Teilbarkeitsregeln: 2, 5, 10 – die letzte Ziffer; 4, 25 – die letzten zwei Ziffern; 8 – die letzten drei; 3, 9 – die Quersumme; 6 = 2 · 3 und 12 = 3 · 4 – beide zugleich; 7 – letzte Ziffer abtrennen und ihr Doppeltes vom Rest abziehen; 11 – die alternierende Quersumme

2	6	$2 \mid 1236$
3	$1+2+3+6=12$	$3 \mid 1236$
4	36	$4 \mid 1236$
5	6	$5 \nmid 1236$
6	$2 \mid 1236,\ 3 \mid 1236$	$6 \mid 1236$
7	$123 - 2 \cdot 6 = 111,\ 11 - 2 \cdot 1 = 9$	$7 \nmid 1236$
8	236	$8 \nmid 1236$
9	$1+2+3+6=12$	$9 \nmid 1236$
10	6	$10 \nmid 1236$
11	$6-3+2-1=4$	$11 \nmid 1236$
12	$3 \mid 1236,\ 4 \mid 1236$	$12 \mid 1236$
25	36	$25 \nmid 1236$

Teilbarkeit durch sieben – letzte Ziffer abtrennen.

Eingabe: `dělitelnost(1309, 7)`

Ergebnis

$$7 \mid 1309$$

Lösungsweg

- Teilbarkeit durch 7: die letzte Ziffer abtrennen, ihr Doppeltes vom Rest abziehen und wiederholen, bis höchstens zwei Ziffern übrig sind – diese Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn es die ursprüngliche ist (bei großen Zahlen ist Dividieren oft schneller): $130 - 2 \cdot 9 = 112,\ 11 - 2 \cdot 2 = 7$

Das Sieb des Eratosthenes.

Eingabe: `prvočísla do 50`

Ergebnis

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$
$$23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Lösungsweg

- 2 ist eine Primzahl – wir streichen alle ihre Vielfachen; die kleineren sind schon gestrichen, wir beginnen bei $2^2 = 4$: $4, 6, 8, 10, \ldots, 50$
- 3 ist eine Primzahl – wir streichen alle ihre Vielfachen; die kleineren sind schon gestrichen, wir beginnen bei $3^2 = 9$: $9, 12, 15, 18, \ldots, 48$
- 5 ist eine Primzahl – wir streichen alle ihre Vielfachen; die kleineren sind schon gestrichen, wir beginnen bei $5^2 = 25$: $25, 30, 35, 40, 45, 50$
- 7 ist eine Primzahl – wir streichen alle ihre Vielfachen; die kleineren sind schon gestrichen, wir beginnen bei $7^2 = 49$: 49
- Das Sieb des Eratosthenes: Es genügt, die Vielfachen der Primzahlen bis zur Wurzel aus 50 zu streichen. Die übrigen Zahlen sind die Primzahlen – 15 Stück

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

Lemma von Bézout mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus.

Eingabe: `bezout(240, 46)`

Ergebnis

$$\mathrm{ggT}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot$$

Lösungsweg

- Erweiterter euklidischer Algorithmus – jeder Rest r wird als r = 240·u + 46·v geschrieben; eine neue Zeile ist die vorletzte minus das q-Fache der letzten

r	q	u	v
240		1	0
46	5	0	1
10	4	1	−5
6	1	−4	21
4	1	5	−26
2	2	−9	47
0			

- Aus der letzten Zeile mit Rest ungleich 0 folgt das Lemma von Bézout:
  $\mathrm{ggT}\,(240, 46) = 2 = 240 \cdot (-9) + 46 \cdot 47$

Eine diophantische Gleichung über das Lemma von Bézout.

Eingabe: `3x + 5y = 1, x, y ∈ ℤ`

Ergebnis

$$x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Wir lösen $3x + 5y = 1$ in den ganzen Zahlen. Es gibt genau dann eine Lösung, wenn der größte gemeinsame Teiler von 3 und 5 die rechte Seite teilt.
- Erweiterter euklidischer Algorithmus – jeder Rest r wird als r = 5·u + 3·v geschrieben; eine neue Zeile ist die vorletzte minus das q-Fache der letzten

r	q	u	v
5		1	0
3	1	0	1
2	1	1	−1
1	2	−1	2
0			

- Aus der letzten Zeile mit Rest ungleich 0 folgt das Lemma von Bézout: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$
- Das Lemma von Bézout mal 1 gibt eine Lösung: $1 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)$, also $x_0 = 2,\ y_0 = -1$
- Alle Lösungen: zu x Vielfache von 5 und zugleich zu y Vielfache von -3 addieren (die linke Seite bleibt gleich); verschoben auf das kleinste nichtnegative $x_0 = 2,\ y_0 = -1$: $x = 2 + 5k,\ y = -1 - 3k,\ k \in \mathbb{Z}$
- Probe: $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$

Eine Potenz modulo n durch wiederholtes Quadrieren.

Eingabe: `7^13 mod 13`

Ergebnis

$$7^{13} \mod 13 = 7$$

Lösungsweg

- Den Exponenten als Summe von Zweierpotenzen schreiben: $13 = 2^3 + 2^2 + 1$
- Wiederholt quadrieren und die Reste modulo 13 nehmen

  $7^1 \equiv 7$

  $7^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 10$

  $7^4 \equiv 10^2 = 100 \equiv 9$

  $7^8 \equiv 9^2 = 81 \equiv 3$

- Die benötigten Potenzen multiplizieren und laufend die Reste modulo 13 nehmen

  $7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^1$

  $\equiv 3 \cdot 9 \cdot 7$

  $3 \cdot 9 = 27 \equiv 1$

  $1 \cdot 7 = 7$

RSA – Schlüssel, Verschlüsselung und Entschlüsselung.

Eingabe: `rsa(p = 11, q = 13, e = 7, m = 9)`

Ergebnis

$n = 143,\ e = 7,\ d = 103$
$c = 48$
$m = 9$

Lösungsweg

- Der Modul: $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$
- Eulersche φ-Funktion:
  $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$
- Euklidischer Algorithmus – die größere Zahl durch die kleinere mit Rest teilen, dann den Teiler durch den Rest, bis der Rest 0 ist; der letzte Rest ungleich 0 ist der größte gemeinsame Teiler

$$120 = 17 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$
$$\Rightarrow\ \mathrm{ggT}\,(120, 7) = 1$$

- Der öffentliche Exponent e muss zu φ(n) teilerfremd sein: $\mathrm{ggT}\,(7, 120) = 1$ – das ist er.
- Erweiterter euklidischer Algorithmus – jeder Rest r wird als r = 120·u + 7·v geschrieben; eine neue Zeile ist die vorletzte minus das q-Fache der letzten

r	q	u	v
120		1	0
7	17	0	1
1	7	1	−17
0			

- Der private Exponent d ist das Inverse von e modulo φ(n): $d = e^{-1} \mod \varphi(n) = 7^{-1} \mod 120 = 103$
- Öffentlicher Schlüssel $(n, e) = (143, 7)$, privater Schlüssel $(n, d) = (143, 103)$
- Verschlüsselung der Nachricht m:
  $c = m^e \mod n = 9^7 \mod 143$
- Den Exponenten als Summe von Zweierpotenzen schreiben: $7 = 2^2 + 2^1 + 1$
- Wiederholt quadrieren und die Reste modulo 143 nehmen
  $9^1 \equiv 9$
  $9^2 \equiv 9^2 = 81$
  $9^4 \equiv 81^2 = 6561 \equiv 126$
- Die benötigten Potenzen multiplizieren und laufend die Reste modulo 143 nehmen
  $9^7 = 9^4 \cdot 9^2 \cdot 9^1$
  $\equiv 126 \cdot 81 \cdot 9$
  $126 \cdot 81 = 10206 \equiv 53$
  $53 \cdot 9 = 477 \equiv 48$
- Entschlüsselung – die ursprüngliche Nachricht kommt heraus: $m = c^d \mod n = 48^{103} \mod 143$
- Den Exponenten als Summe von Zweierpotenzen schreiben: $103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1$
- Wiederholt quadrieren und die Reste modulo 143 nehmen
  $48^1 \equiv 48$
  $48^2 \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^4 \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
  $48^8 \equiv 113^2 = 12769 \equiv 42$
  $48^{16} \equiv 42^2 = 1764 \equiv 48$
  $48^{32} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 16$
  $48^{64} \equiv 16^2 = 256 \equiv 113$
- Die benötigten Potenzen multiplizieren und laufend die Reste modulo 143 nehmen
  $48^{103} = 48^{64} \cdot 48^{32} \cdot 48^4 \cdot 48^2 \cdot 48^1$
  $\equiv 113 \cdot 16 \cdot 113 \cdot 16 \cdot 48$
  $113 \cdot 16 = 1808 \equiv 92$
  $92 \cdot 113 = 10396 \equiv 100$
  $100 \cdot 16 = 1600 \equiv 27$
  $27 \cdot 48 = 1296 \equiv 9$

Bekannte Einschränkungen

- Die Primfaktorzerlegung geht für Zahlen bis 10^{18}; eine größere Primzahl wird nur durch einen Test bestätigt.
- RSA ist ein Schulbeispiel mit kleinen Zahlen (n = p·q bis etwa eine Billion), keine echte Verschlüsselung.

15. Winkel in Grad, Minuten und Sekunden

Einen Winkel allein rechnet die App in alle Formen um: Grad, Minuten und Sekunden (5,5° = 5°30′), Dezimalgrad, Minuten, Sekunden und Bogenmaß – 1° = 60′, 1′ = 60″, 180° = π rad. Nur eine Form gibt es mit „= ?′“, „= ?°“, „= ?″“ oder „= ? rad“. Bogenmaß in Grad: „π/6 rad“.

Winkel werden wie in der Schule addiert und subtrahiert – Grad, Minuten und Sekunden getrennt; 60′ werden zu 1°, und reichen die Minuten nicht, wird ein Grad in 60′ umgewandelt. Mit einer Zahl werden sie multipliziert und dividiert: 100° : 3 schrittweise, der Rest der Grad in Minuten, der Rest der Minuten in Sekunden.

Minuten und Sekunden schreiben Sie mit ′ und ″ (auf der Tastatur der App) oder mit Apostroph und Anführungszeichen: 25°30'15". Grad in einer Funktion (sin 30°) gehören ins Kapitel Trigonometrische Gleichungen.

Eingabe

`25°30’15”, 25°30'15", 5,5°`	Ein Winkel – Grad, Minuten, Sekunden, auch Dezimalgrad.
`25°30’ + 18°45’, 3 · 25°30’, 100° : 3`	Summe, Differenz, Vielfaches und Quotient mit einer Zahl.
`5,5° = ?’, 30° = ? rad, π/6 rad`	Eine Form der Umrechnung, Bogenmaß in Grad.

Beispiele

Dezimalgrad in allen Formen.

Eingabe: `5,5°`

Ergebnis

$$
\begin{aligned}
&5^\circ 30' \\
&= 330' \\
&= 19800'' \\
&= \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}
\end{aligned}
$$

Lösungsweg

- Den Dezimalteil des Grades rechnen wir in Minuten um (1° = 60'), den der Minute in Sekunden (1' = 60"): $5{,}5^\circ = 5^\circ + 0{,}5 \cdot 60' = 5^\circ 30'$
- In Minuten: die Grad mal 60 (1° = 60') plus die Minuten: $5^\circ 30' = 5 \cdot 60' + 30' = 330'$
- In Sekunden: die Minuten mal 60 (1' = 60"): $330' = 330 \cdot 60'' = 19800''$
- Ins Bogenmaß: 180° = π rad, also die Grad mal π/180 $5{,}5^\circ = 5{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{11\pi}{360}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}09599\,\mathrm{rad}$

Summe – 60' werden zu 1°.

Eingabe: `25°30’ + 18°45’`

Ergebnis

$$44^\circ 15'$$

Lösungsweg

- Wir addieren Grad, Minuten und Sekunden getrennt: $25^\circ 30' + 18^\circ 45' = 43^\circ 75'$
- Je 60" ergeben 1' und je 60' ergeben 1° – umgerechnet: $43^\circ 75' = 44^\circ 15'$

Differenz – ein Grad in 60′ umgewandelt.

Eingabe: `25°15′ - 18°45′`

Ergebnis

$$6^\circ 30'$$

Lösungsweg

- Es gibt weniger Minuten (Sekunden), als abgezogen werden – ein Grad (eine Minute) wird in 60′ (60″) umgewandelt: $25^\circ 15' = 24^\circ 75'$
- Wir subtrahieren Grad, Minuten und Sekunden getrennt: $24^\circ 75' - 18^\circ 45' = 6^\circ 30'$

Division durch eine Zahl, der Rest in Minuten.

Eingabe: `100° : 3`

Ergebnis

$$33^\circ 20'$$

Lösungsweg

- Schrittweise dividieren: die Grad, der Rest in Minuten dazu; die Minuten, der Rest in Sekunden; die Sekunden

$$100^\circ : 3 = 33^\circ,\ 1^\circ = 60'$$
$$60' : 3 = 20'$$
$$\Rightarrow\ 100^\circ : 3 = 33^\circ 20'$$

Bogenmaß in Grad.

Eingabe: `π/6 rad`

Ergebnis

$$30^\circ$$
$$= 1800'$$
$$= 108000''$$

Lösungsweg

- Vom Bogenmaß in Grad: π rad = 180°, also mal 180°/π: $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$
- In Minuten: die Grad mal 60 (1° = 60′) plus die Minuten: $30^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$
- In Sekunden: die Minuten mal 60 (1′ = 60″): $1800' = 1800 \cdot 60'' = 108000''$

Bekannte Einschränkungen

- Gleichungen mit Winkeln in Minuten (x + 25°30′ = 90°) noch nicht.

16. Prozente, Verhältnisse und Dreisatz

Prozente geben Sie kurz ein, ohne Textaufgabe: den Anteil „20 % von 480“, den Grundwert „15 % = 45“, den Prozentsatz „96 von 480 = ? %“, eine Erhöhung und Verminderung „480 + 15 %“, „480 − 20 %“ und den ursprünglichen Wert „x − 20 % = 384“. Die App rechnet über 1 % wie heute in der Schule (1 % = 480 : 100 = 4,8); der Chip „Formel“ schaltet auf Anteil = Grundwert · Prozentsatz mit dem Prozentsatz als Dezimalzahl (480 · 0,2).

Ein Verhältnis „12 : 18“ wird zu 2 : 3 gekürzt, ein Ganzes im Verhältnis geteilt („300 im Verhältnis 2 : 3 : 5“ – die Teile zusammen, ein Teil, die Anteile) und eine Verhältnisgleichung „3 : 4 = x : 20“ über das Produkt der Außen- und Innenglieder gelöst. Ein Verhältnis von Brüchen („2/3 : 4/9“) wird zuerst mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner multipliziert; in einem längeren Ausdruck ist der Doppelpunkt eine Division.

Den Dreisatz schreiben Sie wie in der Schule – zwei Zeilen mit drei Punkten (oder …, →): „10 kg … 250 €, 12 kg … x“, Einheiten können fehlen. Standard ist proportional, mit dem Chip „Umgekehrt proportional“ (oder dem Wort „umgekehrt“ nach einem Komma) umgekehrt. Einfache Zinsen: zins(Kapital, Satz %, Jahre, Steuer %) – die Steuer ist optional. Zinseszins: Zinseszins(Kapital, Zinssatz %, Jahre, Steuer %, Häufigkeit) – Steuer und Häufigkeit (jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, monatlich, stetig) sind optional; weitere Aufgaben (Sparen, Kredite, Tageszinsen) stehen in den Anwendungen, Kapitel Wirtschaft.

Eingabe

`20 % von 480, 15 % = 45, 96 von 480 = ? %, 480 – 20 %, x – 20 % = 384`	Prozente – Anteil, Grundwert, Prozentsatz, Änderung, ursprünglicher Wert.
`12 : 18, 300 im Verhältnis 2 : 3 : 5, 3 : 4 = x : 20`	Ein Verhältnis gekürzt, im Verhältnis geteilt, eine Verhältnisgleichung.
`10 kg … 250 Kč, 12 kg … x`	Der Dreisatz – proportional und umgekehrt proportional.
`zins(10000, 3 %, 2, 15 %)`	Einfache Zinsen mit Steuer.
`Zinseszins(10000, 3 %, 5, 15 %, monatlich)`	Zinseszins mit Steuer und Gutschrifthäufigkeit.

Beispiele

Ein Anteil über 1 %.

Eingabe: `20 % z 480`

Ergebnis

$$96$$

Lösungsweg

- Zuerst 1 % – den Grundwert (das Ganze, 100 %) durch 100 dividiert: $1\,\% = 480 : 100 = 4{,}8$
- Die gesuchten Prozent sind so oft 1 %: $20\,\% = 20 \cdot 4{,}8 = 96$

Eine Verminderung mit der Formel.

Eingabe: `480 - 20 %` Formel Anteil = Grundwert · Prozentsatz

Ergebnis

$$384$$

Lösungsweg

- Verminderter Wert = Grundwert · (1 − Prozentsatz), $20\,\% = 0{,}2$: $480 \cdot (1 - 0{,}2) = 480 \cdot 0{,}8 = 384$

Der ursprüngliche Preis vor dem Rabatt.

Eingabe: `x - 20 % = 384`

Ergebnis

$$x = 480$$

Lösungsweg

- Der ursprüngliche Wert ist 100 %; nach der Verminderung bleiben weniger Prozent – der bekannte Wert: $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%, \quad 80\,\% = 384$
- 1 % ist der bekannte Wert geteilt durch seine Prozentzahl: $1\,\% = 384 : 80 = 4{,}8$
- Der Grundwert ist 100 %, also hundertmal 1 %: $100\,\% = 100 \cdot 4{,}8 = 480$

Teilung im Verhältnis.

Eingabe: `300 v poměru 2 : 3 : 5`

Ergebnis

$$60,\ 90,\ 150$$

Lösungsweg

- Das Ganze wird in so viele Teile geteilt, wie die Glieder zusammen ergeben: $2 + 3 + 5 = 10$
- Ein Teil ist: $300 : 10 = 30$
- Jeder Anteil hat so viele Teile, wie sein Glied sagt: $2 \cdot 30 = 60,\ 3 \cdot 30 = 90,\ 5 \cdot 30 = 150$; Probe $60 + 90 + 150 = 300$

Ein Verhältnis von Brüchen.

Eingabe: `2/3 : 4/9`

Ergebnis

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Lösungsweg

- Wir beseitigen die Brüche – alle Glieder des Verhältnisses mal das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner 9

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{4}{9} \cdot 9\right) = 6 : 4$$

- Das Verhältnis gekürzt – alle Glieder durch ihren größten gemeinsamen Teiler 2: $6 : 4 = (6 : 2) : (4 : 2) = 3 : 2$

Umgekehrt proportional.

Eingabe: `4 dělníci … 6 dní, 3 dělníci … x` Umgekehrt proportional

Ergebnis

$$x = 8\,\text{dní}$$

Lösungsweg

- Der Dreisatz. Umgekehrt proportional – so oft mehr vom einen, so oft weniger vom anderen, die Pfeile entgegengesetzt

$$\begin{array}{ccc} 4\,\text{dělníci} & \ldots & 6\,\text{dní} \\ 3\,\text{dělníci} & \ldots & x \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

- Nach den Pfeilen eine Verhältnisgleichung – das zweite Verhältnis umgekehrt: $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$

Einfache Zinsen mit 15 % Steuer.

Eingabe: `úrok(10000, 3 %, 2, 15 %)`

Ergebnis

$$10000 + 510 = 10510$$

Lösungsweg

- Zinsen = Kapital · p/100 · Zeit in Jahren:
  $10000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 2 = 600$
- Von den Zinsen geht die Steuer $15\,\%$ ab, es bleiben die Nettozinsen: $600 \cdot \frac{15}{100} = 90, \quad 600 - 90 = 510$
- Am Ende das Kapital mit den Zinsen:
  $10000 + 510 = 10510$

Zinseszins mit 15 % Steuer und monatlicher Gutschrift.

Eingabe: `Zinseszins(10000, 3 %, 5, 15 %, monatlich)`

Ergebnis

$$K_n \approx 11.358{,}31$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $K_0 = 10.000, \quad p = 3\,\%, \quad n = 5, \quad d = 15\,\%$
- Einheiten umrechnen:
  $p = 3\,\% = 0{,}03, \quad d = 15\,\% = 0{,}15$
- Bei einfacher Verzinsung werden die Zinsen stets vom ursprünglichen Kapital berechnet: K_n = K_0(1 + pn). Beim Zinseszins werden sie gutgeschrieben und mitverzinst: K_n = K_0(1 + p/m)^(mn), m ist die Zahl der Gutschriften pro Jahr (jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, monatlich). Stetige Verzinsung ist der Grenzfall m → ∞: K_n = K_0e^(pn). Eine Steuer auf Zinsen d senkt den Satz auf p(1 − d). Der effektive Jahreszins vergleicht die Häufigkeiten. Abzinsen ist die Umkehrung – wie viel heute anzulegen ist. Mit Inflation π ist der reale Wert K_n/(1 + π)^n. Die gemischte Verzinsung (so schreiben Banken die Zinsen einmal jährlich gut) verzinst die ganzen Jahre mit Zinseszins und den Rest des letzten Jahres einfach: K_n = K_0(1 + p)^k·(1 + p·f), n = k + f.
  Gleichung des Modells: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{mn}$
- Zinsgutschriften pro Jahr: $m = 12$
- Zinssatz nach Steuer:
  $p' = p(1 - d) = 3\,\% \cdot (1 - 0{,}15) = 2{,}55\,\%$
- Effektiver Jahreszins: $p_{ef} = \left(1 + \frac{p'}{m}\right)^{m} - 1 \approx 2{,}58\,\%$
- Einsetzen: $K_n = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0255}{12}\right)^{60} \approx 11.358{,}31$
- Zinsen insgesamt: $K_n - K_0 \approx 1.358{,}31$

Bekannte Einschränkungen

- Noch keine Textaufgaben – die Aufgabe muss kurz geschrieben werden; Zinseszins mit regelmäßigen Einzahlungen und weitere Finanzaufgaben stehen in den Formularen der Anwendungen.

17. Einheiten umrechnen

Eine Umrechnung schreiben Sie als „5 m² = ? cm²“ (oder „5 m2 in cm2“). Die App schreibt die Umrechnung und multipliziert damit (in eine kleinere Einheit) oder dividiert (in eine größere); bei dezimalen Einheiten ergänzt sie, um wie viele Stellen das Komma rückt. Bei Flächen und Volumen erklärt sie, warum die Zahl eine Potenz ist: 1 m = 100 cm, also 1 m² = 100² cm² = 10 000 cm².

Länge mm bis km, Fläche mm² bis km² und Ar und Hektar, Volumen mm³ bis m³ und ml, cl, dl, l, hl (1 l = 1 dm³), Masse mg bis t, Zeit s, min, h, d – auch zusammengesetzt „1 h 30 min“ und das Ergebnis in Stunden und Minuten –, Geschwindigkeit km/h und m/s (1 m/s = 3,6 km/h) und Temperatur °C, K, °F nach ihren Formeln.

Eingabe

`5 m² = ? cm², 3,5 l in m³, 1 h 30 min = ? min`	Ein Wert mit Einheit, „= ?“ (oder „in“) und die Zieleinheit.

Beispiele

Fläche – die Zahl ist ein Quadrat.

Eingabe: `5 m² = ? cm²`

Ergebnis

$$5\,\mathrm{m}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$$

Lösungsweg

- Bei Flächen und Volumen werden beide (alle drei) Maße umgerechnet – die Zahl der Längen wird potenziert $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$
- In eine kleinere Einheit – es werden mehr, also multiplizieren: $5\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 50\,000\,\mathrm{cm}^2$
- Mit einer Eins mit Nullen (hier 4) multiplizieren rückt das Komma um so viele Stellen nach rechts, wie es Nullen sind; fehlende Stellen werden Nullen.

Liter in Kubikmeter.

Eingabe: `3,5 l = ? m³`

Ergebnis

$$3{,}5\,\mathrm{l} = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$$

Lösungsweg

- Die Umrechnung: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$
- In eine größere Einheit – es werden weniger, also dividieren: $3{,}5\,\mathrm{l} = 3{,}5 : 1000\,\mathrm{m}^3 = 0{,}0035\,\mathrm{m}^3$
- Durch eine Eins mit Nullen (hier 3) dividieren rückt das Komma um so viele Stellen nach links, wie es Nullen sind; fehlende Stellen werden Nullen.

Minuten in Stunden, auch in Stunden und Minuten.

Eingabe: `150 min = ? h`

Ergebnis

$$150\,\mathrm{min} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$
$$= 2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$$

Lösungsweg

- Die Umrechnung: $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- In eine größere Einheit – es werden weniger, also dividieren: $150\,\mathrm{min} = 150 : 60\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{h}$
- In Stunden und Minuten: $2\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$

Geschwindigkeit – durch 3,6.

Eingabe: `72 km/h = ? m/s`

Ergebnis

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Die Umrechnung: $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$
- In eine größere Einheit – es werden weniger, also dividieren: $72\,\mathrm{km/h} = 72 : 3{,}6\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$

Temperatur nach der Formel.

Eingabe: `20 °C = ? K`

Ergebnis

$$20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$$

Lösungsweg

- Temperaturen werden nicht mit einem Faktor, sondern mit einer Formel umgerechnet (die Skalen haben verschiedene Nullpunkte):
  $T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\,\mathrm{K}$

18. Logik und Mengen

Eine Aussage mit den Junktoren ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ wertet die App mit einer Wahrheitstafel aus – eine Spalte für jeden Junktor, Einsen für wahr – und sagt, ob sie eine Tautologie, ein Widerspruch oder nur erfüllbar ist; bei einer erfüllbaren ergänzt sie die disjunktive und die konjunktive Normalform und eine vereinfachte Form.

Mit dem Chip „Negation“ verneint die App die Aussage Schritt für Schritt nach den Regeln von De Morgan und den Negationen von Implikation und Äquivalenz. Eine Aussage mit Quantoren (∀x ∈ ℝ: x² ≥ 0) verneint sie direkt – aus dem Allquantor wird der Existenzquantor, aus einer Ungleichung die Gegenbeziehung. Bei einer Implikation bietet sie auch Kontraposition und Umkehrung an.

Mengen, durch ihre Elemente ({1, 2, 3}) oder als Intervalle ((1; 5), ⟨3; 7)) gegeben, und ihre Vereinigung, ihr Durchschnitt, ihre Differenz, das Komplement in der Grundmenge U und die symmetrische Differenz berechnet die App Operation für Operation. Aufgezählte Mengen bekommen ein Venn-Diagramm mit den Elementen in seinen Bereichen, Intervalle das Ergebnis auf dem Zahlenstrahl.

Ohne Elemente (A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)) prüft die App eine Gleichheit von Mengenausdrücken mit einer Zugehörigkeitstafel und Venn-Diagrammen beider Seiten; ein Ausdruck allein, (A \ B) ∪ (B \ C), wird im Venn-Diagramm schraffiert. Sie entscheidet auch, ob 3 ∈ A oder A ⊆ B gilt.

Eingabe

`¬p, p ∧ q, p ∨ q, p ⇒ q, p ⇔ q`	Die Junktoren von der Tastatur der App (Reiter ∧∪) oder vom Foto (\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow).
`p => q, p <=> q`	Implikation und Äquivalenz als Pfeile von einer normalen Tastatur. &, | und ! liest die App nicht als Junktoren – sie sind Betrag und Fakultät.
`∀x ∈ ℝ: x^2 ≥ 0, ∃x > 0: x^2 < x`	Quantoren mit Bereich (∈ ℝ) oder Bedingung (> 0), die Aussage nach einem Doppelpunkt.
`negace(p ∧ q), obmena(p ⇒ q), obracena(p ⇒ q)`	Die Aufgabe als Wort – Negation, Kontraposition und Umkehrung (negation, contrapositive, converse).
`A = {1, 2, 3}, B = (1; 5), U = {1, 2, ..., 10}`	Eine Menge durch ihre Elemente (durch Kommas getrennt, durch Semikolons beim Dezimalkomma), ein

	Intervall, die Grundmenge U; jede Definition in einer eigenen Zeile oder nach einem Komma.
`A ∪ B, A ∩ B, A \ B, A', A △ B`	Vereinigung, Durchschnitt, Differenz (auch \), Komplement A', symmetrische Differenz; der Durchschnitt geht vor.
`3 ∈ A, A ⊆ B`	Element einer Menge und Teilmenge – gilt oder gilt nicht.

Beispiele

Eine Tautologie – eine Implikation ist zu ihrer Kontraposition äquivalent.

Eingabe: `(p ⇒ q) ⇔ (¬q ⇒ ¬p)`

Ergebnis

Die Aussage ist eine Tautologie – bei jeder Belegung wahr.

Lösungsweg

- Die Wahrheitstafel (1 – wahr, 0 – falsch), eine Spalte für jeden Junktor

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

- In der letzten Spalte stehen nur Einsen – die Aussage ist bei jeder Belegung wahr, eine Tautologie.

Eine erfüllbare Aussage mit ihren Normalformen.

Eingabe: `(p ∨ q) ⇒ r`

Ergebnis

Die Aussage ist erfüllbar – nur bei manchen Belegungen wahr. Eine vereinfachte äquivalente Form:
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Lösungsweg

- Die Wahrheitstafel (1 – wahr, 0 – falsch), eine Spalte für jeden Junktor

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

- In der letzten Spalte stehen Einsen und Nullen – die Aussage ist erfüllbar, aber keine Tautologie.
- Eine vereinfachte Form: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; die volle disjunktive Normalform – die Disjunktion der Zeilen, in denen sie wahr ist
  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
- Die konjunktive Normalform – aus den Zeilen, in denen sie falsch ist
  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Eine Negation nach De Morgan Schritt für Schritt.

Eingabe: `p ∧ (q ⇒ r)` Negation

Ergebnis

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Lösungsweg

- Die Negation: $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$
- Regel von De Morgan, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$:
  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r)$
- Negation einer Implikation, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$:
  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Die Negation einer Aussage mit Quantor.

Eingabe: `∀x ∈ ℝ: x^2 + 1 > 0`

Ergebnis

$\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Lösungsweg

- Die Negation: $\neg\big(\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 > 0\big)$
- Aus „für alle gilt“ wird „es gibt eines, für das es nicht gilt“: $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \neg\big(x^2 + 1 > 0\big)$
- Die Negation einer (Un-)Gleichung ist die Gegenbeziehung ($<$ zu $\geq$, $=$ zu $\neq$): $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + 1 \leq 0$

Die Kontraposition.

Eingabe: `p ⇒ ¬q` Kontraposition

Ergebnis

$$q \Rightarrow \neg p$$

Lösungsweg

- Die Kontraposition von $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$ – zu ihr äquivalent: $\neg\neg q \Rightarrow \neg p$, Negationen vereinfacht $q \Rightarrow \neg p$

Das Komplement einer Vereinigung mit Venn-Diagramm.

Eingabe: `A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}, U = {1, 2, ..., 6}, (A ∪ B)'`

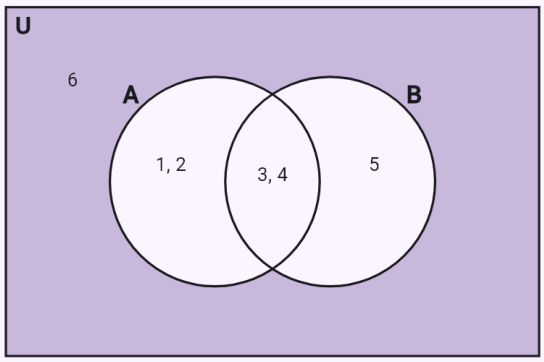
Ergebnis

$$(A \cup B)' = \{6\}$$

Lösungsweg

- Gegeben: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Gegeben: $B = \{3, 4, 5\}$
- Gegeben: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Die Vereinigung – die Elemente in mindestens einer der Mengen: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Das Komplement – die Elemente der Grundmenge, die nicht in der Menge liegen: $(A \cup B)' = \{6\}$

Graph



Der Durchschnitt von Intervallen auf dem Zahlenstrahl.

Eingabe: `A = (1; 5), B = ⟨3; 7), A ∩ B`

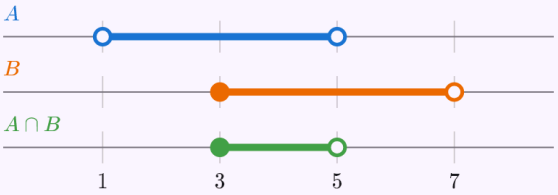
Ergebnis

$$A \cap B = [3;\, 5)$$

Lösungsweg

- Gegeben: $A = (1;\, 5)$
- Gegeben: $B = [3;\, 7)$
- Der Durchschnitt – die Elemente in beiden Mengen: $A \cap B = [3;\, 5)$

Graph



Jede gegebene Menge hat auf der Achse ihre eigene Zeile, das Ergebnis ist grün. Ein voller Punkt gehört zur Menge, ein leerer nicht.

Das Distributivgesetz mit einer Zugehörigkeitstafel.

Eingabe: `A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)`

Ergebnis

Die Gleichheit gilt – beide Seiten sind dieselbe Menge.

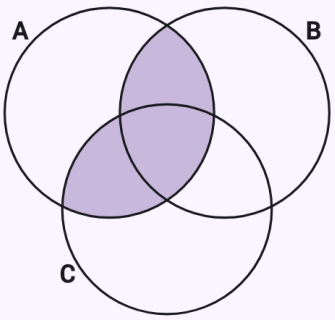
Lösungsweg

- Die Zugehörigkeitstafel – für jede Möglichkeit, zu welchen Mengen ein Element gehört (1 – gehört dazu), beide Seiten verglichen

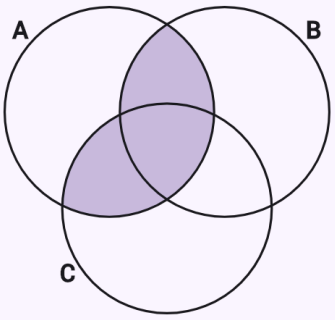
A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Graph

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



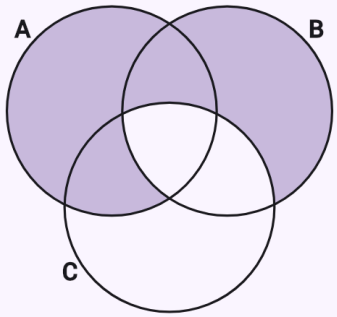
Ein Mengenausdruck im Venn-Diagramm.

Eingabe: `(A \ B) ∪ (B \ C)`

Ergebnis

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

Graph



Bekannte Einschränkungen

- Eine Wahrheitstafel für höchstens 5 Variablen (32 Zeilen), ein Venn-Diagramm für höchstens 4 Mengen.
- Mengen, durch eine Eigenschaft gegeben ({x ∈ ℝ: x² < 4}), liest die App noch nicht – als Intervall schreiben.

19. Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl schreiben Sie mit der imaginären Einheit i: 1 - i√3 (oder 1 - i*sqrt(3)), in trigonometrischer Form 2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)) oder cis(pi/3), in Exponentialform 3e^(i pi/4); Winkel auch in Grad (cos 60° + i sin 60°). Zahlen lassen sich benennen, jede in einer eigenen Zeile (z_1 = 1 + i), mit einem Term in ihren Namen in der letzten Zeile (z_1/z_2, z^8).

Zu einer einzelnen Zahl berechnet die App den Betrag $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ und das Argument φ – aus den Tabellenwerten von Kosinus und Sinus, sonst über den spitzen Winkel aus $\tan \alpha = |b/a|$ und den Quadranten (exakt mit arctan und näherungsweise im Bogenmaß und in Grad) – und schreibt die trigonometrische und die Exponentialform. Eine Zahl in trigonometrischer Form wird in die algebraische umgewandelt. Das Argument liegt in $\langle 0; 2\pi)$; der Chip „Hauptwert des Arguments“ schaltet auf $(-\pi; \pi\rangle$ um. Das Diagramm zeigt die Zahl in der Gaußschen Zahlenebene als Vektor mit dem Bogen des Arguments.

Eine Potenz wie (1 + i)^10 berechnet die App mit dem Satz von de Moivre und verkleinert das Argument um Vielfache von 2π; Produkt und Quotient über Beträge und Argumente. Die Chips wählen „Trigonometrische Form“ (bei einer Potenz „Satz von de Moivre“) oder „Algebraische Form“; die Division algebraischer Zahlen durch Erweitern mit der konjugierten Zahl steht im Kapitel Terme umformen. Eine Wurzel root(3, 8i) und eine binomische Gleichung $z^3 = 8i$ ergeben alle n Lösungen nach $z_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$; im Diagramm sind sie die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Eine Gleichung mit der Unbekannten z wird direkt in den komplexen Zahlen gelöst; der Chip „Lösen in:“ schaltet auf $\mathbb{R}$ um. Eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten ($z^2 + i = 2z$) löst die App durch quadratische Ergänzung, $(z - 1)^2 = 1 - i$, die komplexe Quadratwurzel als a + bi durch Vergleich von Real- und Imaginärteil.

Eine Gleichung mit der konjugierten Zahl $\bar{z}$ (die Taste $\bar{z}$ fügt conj(z) ein, ein Foto liefert \bar{z}), mit |z|, Re z und Im z löst die App durch Einsetzen von z = x + yi: sie bringt beide Seiten in die Form a + bi, vergleicht Real- und Imaginärteile und löst das entstandene System zweier Gleichungen für x und y – eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst und in die andere eingesetzt, lässt sie sich faktorisieren ($y(2x + 1) = 0$), zerfällt die Lösung in Fälle. Die Lösungen werden als Punkte der Zahlenebene gezeigt. Stimmen die Imaginärteile von selbst überein ($|z - 1| = 2$, $\mathrm{Re}\, z \geq 1$, $|z - i| < |z + 1|$), ist das Ergebnis eine Punktmenge: die App quadriert die Beträge, ergänzt quadratisch und beschreibt den Kreis (die Kreisscheibe, das Äußere eines Kreises), die Gerade, die Halbebene oder die Mittelsenkrechte. Mehrere Bedingungen, jede in einer eigenen Zeile oder durch Kommas getrennt ($|z| \leq 2$, $\mathrm{Re}\, z > 0$), und eine Doppelungleichung ($1 < |z - 1| \leq 2$) werden als Schnittmenge gezeichnet – ein gefärbter Bereich; ein durchgezogener Rand gehört zur Menge, ein gestrichelter nicht.

Eingabe

`1 - i*sqrt(3)`	Die algebraische Form mit der imaginären Einheit i.
`2(cos(pi/3) + i sin(pi/3)), cis(pi/3)`	Die trigonometrische Form, kurz cis φ.
`3e^(i pi/4)`	Die Exponentialform.
`z_1 = 1 + i ↵ z_2 = 2 - 2i ↵ z_1/z_2`	Benannte Zahlen, jede in einer eigenen Zeile, und ein Term mit ihnen.
`root(3, 8i), z^3 = 8i`	Alle n-ten Wurzeln, eine binomische Gleichung.
`z + 2conj(z) = 3 - i, Re(z), Im(z)`	Konjugierte Zahl, Real- und Imaginärteil.
`|z - i| < 3, |z| <= 2 ↵ Re(z) > 0`	Punktmenge in der Zahlenebene, mehrere Bedingungen zeilenweise.

Beispiele

Betrag, Argument aus Tabellenwerten, trigonometrische und Exponentialform.

Eingabe: `1 - i*sqrt(3)`

Ergebnis

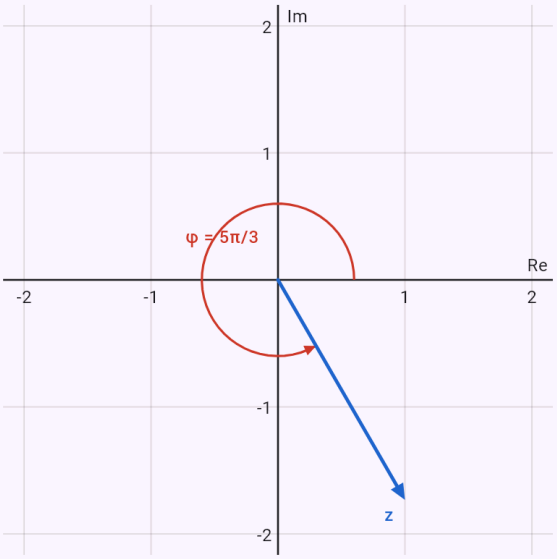
$$|z| = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Lösungsweg

- Der Betrag |z| = √(a² + b²):
  $$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
- Das Argument φ aus cos φ = a/|z| und sin φ = b/|z| – Werte aus der Tabelle
  $$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{3}$$
- Die trigonometrische Form z = |z|(cos φ + i sin φ):
  $$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
- Die Exponentialform $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Ein Argument außerhalb der Tabelle – spitzer Winkel und Quadrant.

Eingabe: `-3 + 4i`

Ergebnis

$$|z| = 5,\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$$

$$\varphi \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$$

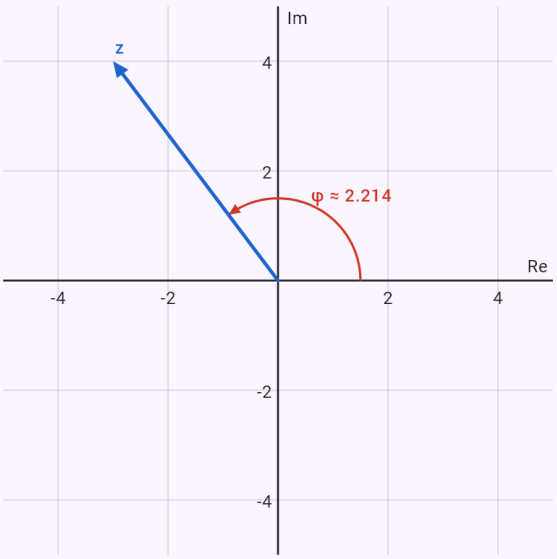
$$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 5\,e^{i\varphi}$$

Lösungsweg

- Der Betrag |z| = √(a² + b²):
  $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- Der spitze Winkel α aus tan α = |b/a|. Die Zahl liegt im 2. Quadranten, also ist das Argument
  $\tan\alpha = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3},\ \alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927\ (53^\circ 8')$

  $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 2{,}214\ (126^\circ 52')$
- Die trigonometrische Form z = |z|(cos φ + i sin φ):
  $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \pi - \arctan\frac{4}{3}$
- Die Exponentialform $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 5\,e^{i\varphi}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Von der trigonometrischen zur algebraischen Form.

Eingabe: `2(cos(pi/3) + i sin(pi/3))`

Ergebnis

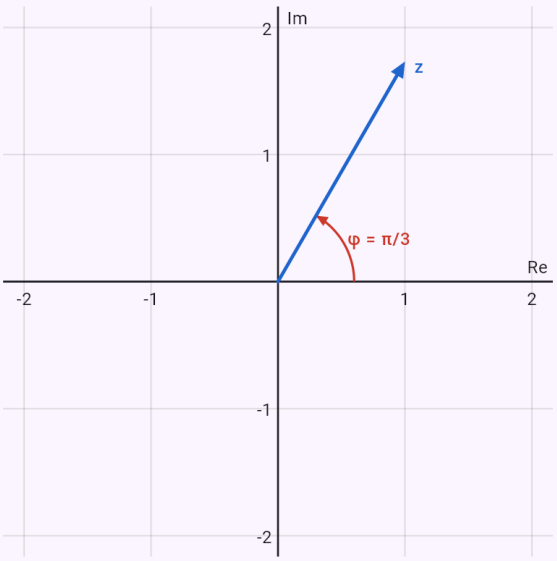
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Lösungsweg

- Die Zahl ist in trigonometrischer (exponentieller) Form gegeben – Betrag und Argument abgelesen
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right):\ |z| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$
- Die algebraische Form – die Werte von Kosinus und Sinus eingesetzt, ausmultipliziert
  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$
- Die Exponentialform $z = |z|\,e^{i\varphi}$: $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Der Satz von de Moivre.

Eingabe: `(1 + i)^10` Satz von de Moivre

Ergebnis

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{10} = 32i$$

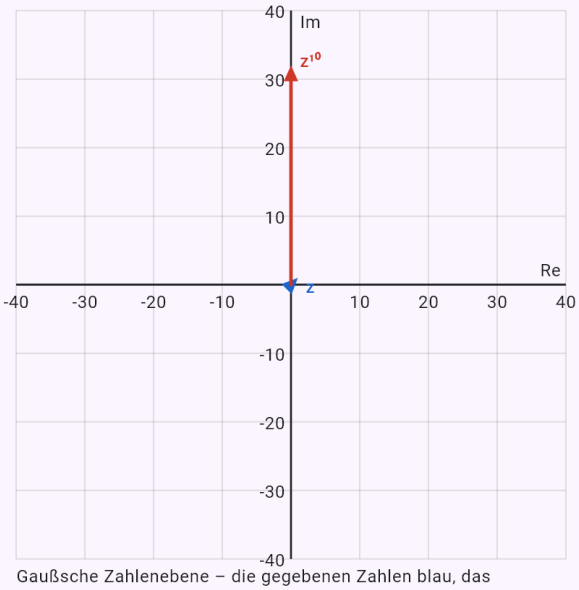
Lösungsweg

- Der Betrag |z| = √(a² + b²): $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Das Argument φ aus cos φ = a/|z| und sin φ = b/|z| – Werte aus der Tabelle

  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Der Satz von de Moivre $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

  $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
- Das Argument in das Intervall $\langle 0; 2\pi)$ gebracht – um ein Vielfaches des Vollwinkels: $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- Die algebraische Form – die Werte von Kosinus und Sinus eingesetzt, ausmultipliziert:
  $32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Ein Quotient in trigonometrischer Form.

Eingabe: `z_1 = 1 + i`
`z_2 = 2 - 2i`

z_1/z_2 Trigonometrische Form

Ergebnis

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$$

Lösungsweg

- Der Betrag |z| = √(a² + b²): $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Das Argument φ aus cos φ = a/|z| und sin φ = b/|z| – Werte aus der Tabelle

  $$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

- Der Betrag |z| = √(a² + b²):

  $$|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- Das Argument φ aus cos φ = a/|z| und sin φ = b/|z| – Werte aus der Tabelle

  $$\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 =$$

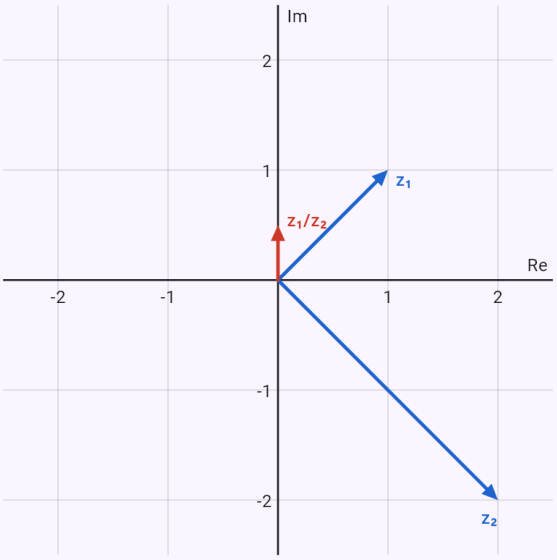
- Beim Dividieren werden die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left($$

- Das Argument in das Intervall $\langle 0; 2\pi)$ gebracht – um ein Vielfaches des Vollwinkels: $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$
- Die algebraische Form – die Werte von Kosinus und Sinus eingesetzt, ausmultipliziert

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0+i) = \frac{1}{2}i$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Eine binomische Gleichung – drei Lösungen in den Ecken eines Dreiecks.

Eingabe: `z^3 = 8i`

Ergebnis

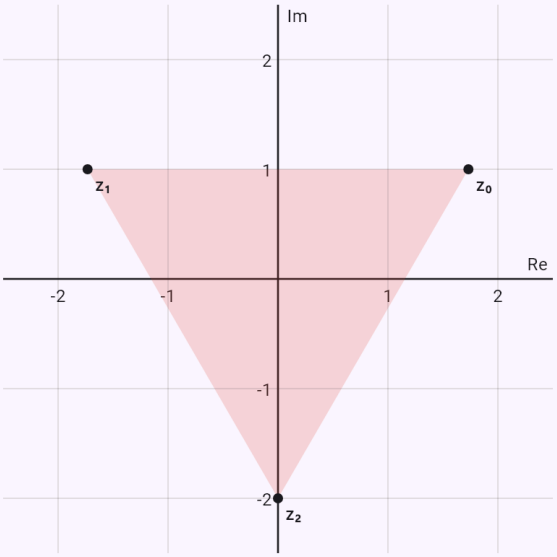
$$z_0 = \sqrt{3} + i$$
$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_2 = -2i$$

Lösungsweg

- Eine binomische Gleichung $z^n = a$ – ihre Lösungen sind alle n-ten Wurzeln aus a: $z^3 = 8i$
- Der Betrag |z| = √(a² + b²): $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$
- Die Zahl liegt auf einer Achse – das Argument direkt: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- Alle 3 Lösungen nach der Formel $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i\sin((\varphi + 2k\pi)/n))$

  $$\sqrt[3]{8} = 2,\ z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),\ k =$$
- Für k = 0: $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$
- Für k = 1: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$
- Für k = 2: $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
- In der Zahlenebene bilden die Lösungen die Ecken eines regelmäßigen 3-Ecks auf dem Kreis um 0 mit dem Radius 2

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Gleichung mit der konjugierten Zahl – Vergleich der Real- und Imaginärteile.

Eingabe: `z + 2conj(z) = 3 - i`

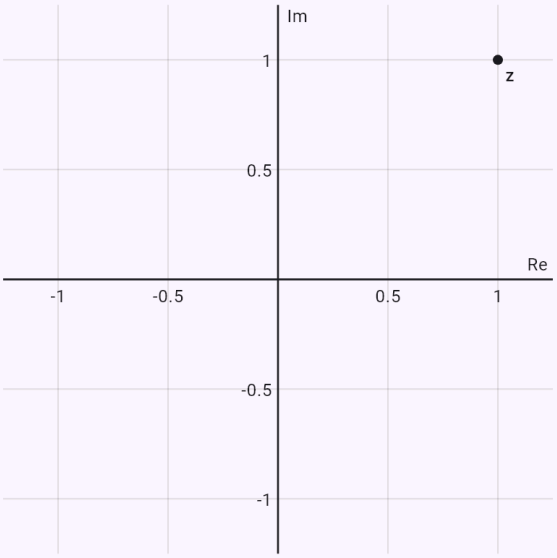
Ergebnis

$$z = 1 + i$$

Lösungsweg

- Wir setzen z = x + yi mit reellen x und y ein: $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Beide Seiten in die Form a + bi bringen: $3x - yi = 3 - i$
- Komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile gleich sind: $3x = 3$ und $-y = -1$
- Wir setzen $y = 1$ in die andere Gleichung ein: $3x = 3$
- Alles auf eine Seite bringen: $3x - 3 = 0$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $3x = 3$
- Durch den Koeffizienten 3 dividieren: $x = 1$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Lösungen als Punkte: auf der waagerechten Achse der Realteil, auf der senkrechten der Imaginärteil.

Die Gleichung z² = z̄ – Faktorisieren und Fallunterscheidung, vier Punkte.

Eingabe: `z^2 = conj(z)`

Ergebnis

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = 0$$
$$z_4 = 1$$

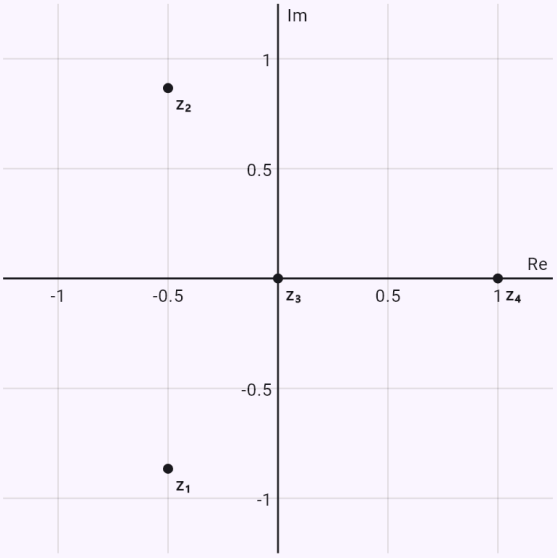
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Newton (Tangenten) | Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

Lösungsweg

- Wir setzen z = x + yi mit reellen x und y ein:
  $z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$
- Beide Seiten in die Form a + bi bringen:
  $x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$
- Komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile gleich sind: $x^2 - y^2 = x$ und $2xy = -y$
- Die Gleichung faktorisieren – ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist
  $$2xy + y = 0 \ \Rightarrow\ y(2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} \ \vee\ y = 0$$
- Wir setzen $x = -\frac{1}{2}$ in die andere Gleichung ein:
  $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$
- Alles auf eine Seite bringen: $\frac{3}{4} - y^2 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{3}}{-2}$
- Wir setzen $y = 0$ in die andere Gleichung ein: $x^2 = x$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - x = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
  $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$
- In die Lösungsformel einsetzen:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Lösungen als Punkte: auf der waagerechten Achse der Realteil, auf der senkrechten der Imaginärteil.

Schnitt einer Kreisscheibe mit einer Halbebene – gefärbter Bereich, der gestrichelte Rand gehört nicht dazu.

Eingabe: `|z| <= 2`

`Re(z) > 0`

Ergebnis

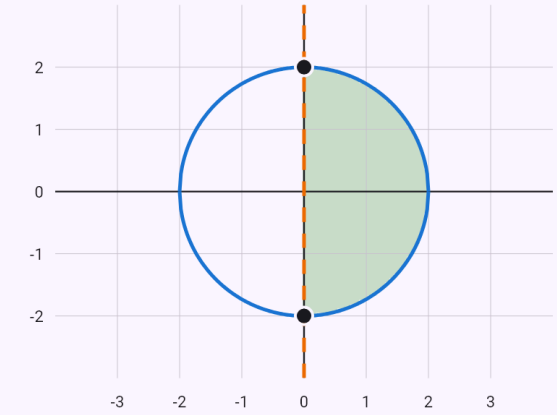
$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$x > 0$$

Lösungsweg

- Wir setzen z = x + yi mit reellen x und y ein: $z = x + yi,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Re}\, z = x$
- 1. Bedingung für x und y: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$
- Beide Seiten sind nicht negativ, wir quadrieren sie: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Das ist die Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius 2 samt Randlinie.
- 2. Bedingung für x und y: $x > 0$
- Das ist die Halbebene rechts von der Geraden $x = 0$, die Randgerade gehört nicht dazu.
- 1. Ungleichung: $x^2 + y^2 \leq 4$
- Die Grenze ist die Kurve $x^2 + y^2 = 4$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[0;\ 0]$ ein: $0 \leq 4$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- 2. Ungleichung: $x > 0$
- Die Grenze ist die Kurve $x = 0$ – gestrichelt, ihre Punkte gehören nicht zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[1;\ 0]$ ein: $1 > 0$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- Die Lösung des Systems ist der gemeinsame Teil dieser Gebiete – im Graphen eingefärbt.

- Ecken des Bereichs (Schnittpunkte der Grenzen): $[0;\ -2],\ [0;\ 2]$

Graph



$|z| \leq 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 \leq 4$
$\mathrm{Re}\,(z) > 0 \ \Leftrightarrow\ x > 0$

Gaußsche Zahlenebene – auf der waagerechten Achse x = Re z, auf der senkrechten y = Im z. Die Punktmenge ist der gefärbte Bereich. Ein durchgezogener Rand gehört dazu, ein gestrichelter nicht.

Die Punkte, die von i und von −1 gleich weit entfernt sind – eine Mittelsenkrechte.

Eingabe: `|z - i| = |z + 1|`

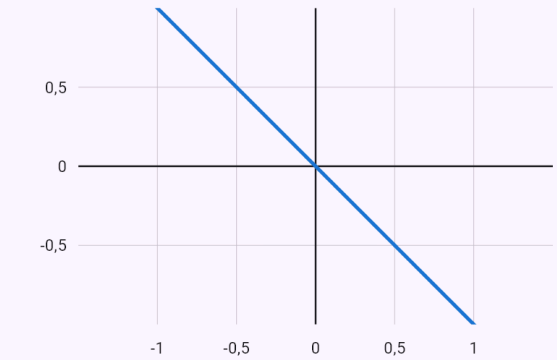
Ergebnis

$$y = -x$$

Lösungsweg

- Wir setzen z = x + yi mit reellen x und y ein: $z = x + yi$
- Bedingung für x und y: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
- Beide Seiten sind nicht negativ, wir quadrieren sie: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$
- Das sind die Punkte, die von i und -1 gleich weit entfernt sind – die Mittelsenkrechte der Strecke zwischen i und -1: $y = -x$

Graph



$|z - i| = |z + 1|$

Gaußsche Zahlenebene – auf der waagerechten Achse x = Re z, auf der senkrechten y = Im z. Die Punktmenge ist die eingezeichnete Linie.

Bekannte Einschränkungen

- Lösungen, deren Argument kein Tabellenwert ist, stehen in trigonometrischer Form und näherungsweise in algebraischer.
- Eine Punktmenge wird beschrieben, wenn sie ein Kreis (eine Kreisscheibe), eine Gerade (Halbebene) oder eine Mittelsenkrechte ist; andere Kegelschnitte (Im $z^2 = 2$) werden nur gezeichnet, eine Summe von Beträgen ($|z - 1| + |z + 1| = 4$, eine Ellipse) ist noch nicht möglich.
- Ein System für x und y, das sich nicht durch Auflösen nach einer Variablen lösen lässt, wird ohne Lösungsweg gelöst.

Erzeugt aus der App Mathtrace