Mathtrace – Handbuch

VI. Anwendungen: Physik und Technik

Inhalt

VI. Anwendungen: Physik und Technik

42. Anwendungen von Differentialgleichungen

43. Physik

44. Statik und Festigkeitslehre

45. Astronomie und Astrophysik

46. Anwendungen der Funktionentheorie

42. Anwendungen von Differentialgleichungen

Die Anwendungen finden Sie auf dem Startbildschirm im Abschnitt „Anwendungen“ – Kacheln der Fachgebiete, die Sie in den Einstellungen wählen (Zahnrad, „Meine Fachgebiete“), und einzelne mit der Nadel in der Liste oder im Formular angeheftete Anwendungen; „Alle Anwendungen“ zeigt sie nach Fachgebieten (eine Anwendung kann zu mehreren gehören, ein RC-Glied etwa zur Physik und zur Elektrotechnik). Die Differentialgleichungen nutzen ein Formular mit 23 Modellen: Radiokarbonmethode, Zerfall und Halbwertszeit, exponentielles Wachstum, Zerfallsreihe, Newtonsche Abkühlung (auch Todeszeitpunkt aus zwei Messungen), chemische Kinetik 0.–2. Ordnung, Medikament im Blut, Blutalkohol, Sparen und Kredit, RC-, RL- und RLC-Kreis, Federpendel, Fall mit Luftwiderstand, Ausfluss aus einem Gefäß, Mischen, logistisches und Gompertz-Wachstum, Population mit Ernte, SIR-Epidemie, Räuber und Beute, Konkurrenz zweier Arten und Chemostat.

Sie wählen das Modell, die Variante und die gesuchte Größe; Konstanten sind vorausgefüllt und änderbar. Für jede Größe und das Ergebnis wählen Sie die Einheit – die App rechnet um (die Umrechnung ist ein Schritt). Das „?“ beim Modell erklärt, woher seine Gleichung kommt.

Die Schritte stellen das Modell auf, lösen die Gleichung (Trennung der Variablen, integrierender Faktor, charakteristische Gleichung), setzen die Bedingungen ein, drücken die gesuchte Größe aus und setzen die Zahlen ein. Systeme werden numerisch mit Runge-Kutta gelöst, Gleichgewichte und Stabilität exakt. Der Graph zeigt die Größen im Zeitverlauf, bei Systemen auch die Phasenebene.

Beispiele

Alter eines Fundes mit 35 % verbliebenem ¹⁴C.

Eingabe: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Ergebnis

$$t \approx 8700\,\mathrm{J}.$$

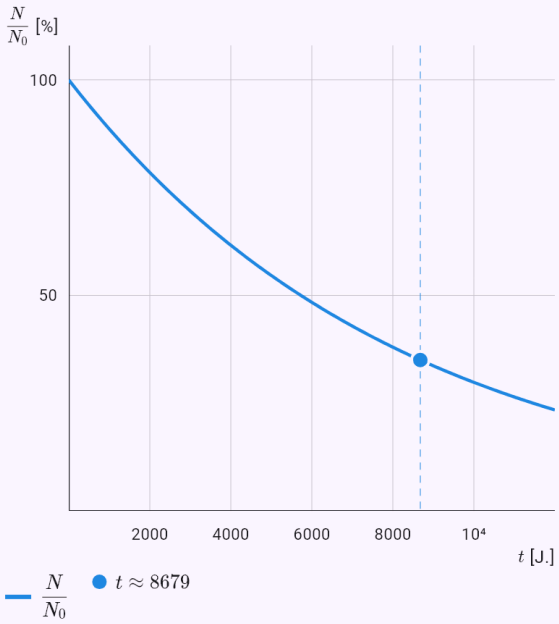
Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben: $T_{1/2} = 5730\,\mathrm{J}.$, $\dfrac{N}{N_0} = 35\,\%$
- Einheiten umrechnen: $\dfrac{N}{N_0} = 35\,\% = 0{,}35$
- Lebewesen nehmen Kohlenstoff aus der Luft auf und enthalten daher denselben Anteil des radioaktiven Isotops ¹⁴C wie die Atmosphäre. Nach dem Tod endet die Aufnahme und das ¹⁴C zerfällt. Die Zahl der Zerfälle pro Zeit ist proportional zur Zahl der verbleibenden Kerne: dN/dt = −λN mit der Zerfallskonstante λ. Die Lösung ist N = N₀·e^(−λt); nach der Halbwertszeit T½ = 5730 Jahre ist die Hälfte zerfallen, also λ = ln 2 / T½. Aus dem verbleibenden Anteil von ¹⁴C (oder der gemessenen Aktivität im Vergleich zu einer lebenden Probe) folgt das Alter. Gleichung des Modells: $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Trennung der Variablen: $\dfrac{dN}{N} = -\lambda\,dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln|N| = -\lambda t + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $N = Ce^{-\lambda t}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ ein: $N_0 = C$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- In einer Halbwertszeit halbiert sich die Menge – die Zerfallskonstante

  $$N\left(T_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}.^{-1}$$

- Gesuchte Größe ausdrücken: $t = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N}{N_0} = \dfrac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\dfrac{N_0}{N}$
- Einsetzen: $t = \dfrac{5730}{\ln 2}\ln\dfrac{1}{0{,}35} \approx 8679\,\mathrm{J}.$
- Labore geben das „Radiokarbonalter“ mit Libbys Halbwertszeit von 5568 Jahren an und rechnen es mit einer Kalibrierkurve um (der ¹⁴C-Gehalt der Atmosphäre war nicht immer gleich) – das wahre Alter kann etwas abweichen.

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Todeszeitpunkt: 30 °C beim Fund, eine Stunde später 28 °C, Raum 20 °C.

Eingabe: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC];`

`Tt=37[degC]; k=measured)`

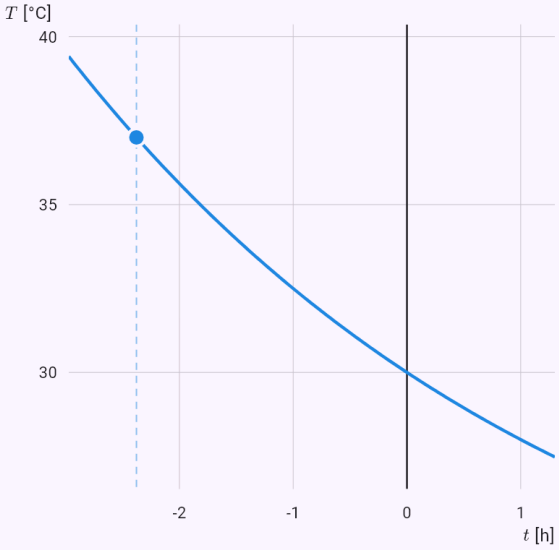
Ergebnis

$$t \approx -2{,}38\,\mathrm{h}$$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben $T_0 = 30\,^\circ\mathrm{C},\quad T_a = 20\,^\circ\mathrm{C},\quad t_1 = 1\,\mathrm{h},\quad T_1 = 28\,^\circ\mathrm{C},$
- Ein Körper gibt Wärme umso schneller ab, je größer der Temperaturunterschied ist: dT/dt = −k(T − T_a), T_a ist die Umgebungstemperatur, k hängt vom Körper ab. Die Lösung ist T = T_a + (T_0 − T_a)·e^(−kt). k lässt sich aus zwei Messungen bestimmen. So schätzt die Rechtsmedizin den Todeszeitpunkt: Man misst die Körpertemperatur beim Fund und etwas später und berechnet, wann der Körper 37 °C hatte. Gleichung des Modells: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Trennung der Variablen: $\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln|T - T_a| = -kt + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $T = T_a + Ce^{-kt}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ ein: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$
- k aus der zweiten Messung $T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1}\ln\frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$
- Gesuchte Größe ausdrücken $T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$
- Einsetzen: $t = -\frac{1}{0{,}2231}\ln\frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2{,}378\,\mathrm{h}$
- Eine negative Zeit bedeutet vor der ersten Messung (beim Todeszeitpunkt so viele Stunden vor dem Fund).

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

500 mg alle 8 Stunden – der stationäre Spiegel.

Eingabe: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

`mode=repeated)`

Ergebnis

$$c_{max} \approx 20{,}7\,\mathrm{mg/l}$$
$$c_{min} \approx 8{,}22\,\mathrm{mg/l}$$

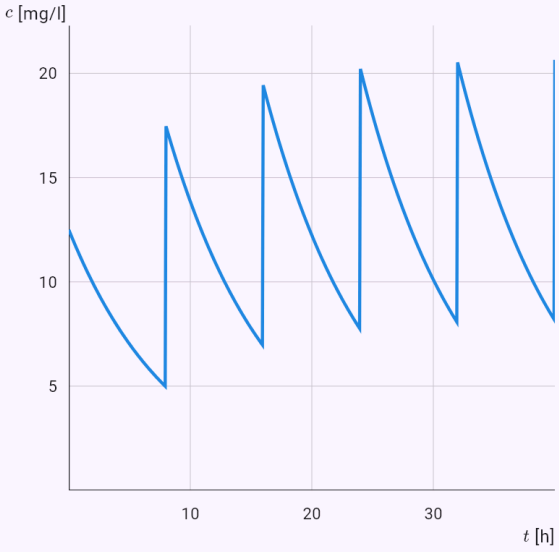
Lösungsweg

- Gesucht c_{max}; gegeben $D = 500\,\mathrm{mg},\quad V = 40\,\mathrm{l},\quad T_{1/2} = 6\,\mathrm{h},\quad \tau = 8\,\mathrm{h}$
- Ein Medikament verteilt sich im Verteilungsvolumen V; Nieren und Leber scheiden es mit einer zur Konzentration proportionalen Geschwindigkeit aus: dc/dt = −kc mit k = ln 2 / T½. Nach einer Dosis D ist c = (D/V)·e^(−kt). Bei wiederholter Gabe im Abstand τ addieren sich die Reste (geometrische Reihe) und der Spiegel pendelt sich zwischen c_min und c_max ein. Bei einer Infusion mit der Rate R gilt dc/dt = R/V − kc und die Konzentration nähert sich R/(kV). Gleichung des Modells: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Anfangskonzentration nach der Dosis: $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12{,}5\,\mathrm{mg/l}$
- Eliminationskonstante aus der biologischen Halbwertszeit: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}1155\,\mathrm{h^{-1}}$
- Trennung der Variablen: $\frac{dc}{c} = -k\,dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln|c| = -kt + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $c = Ce^{-kt}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $c(0) = c_0$ ein: $c_0 = C$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $c = c_0 e^{-kt}$
- Anteil des Medikaments, der bis zur nächsten Dosis bleibt: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0{,}1155\cdot 8} \approx 0{,}3969$
- Gesuchte Größe ausdrücken

$$c_{max} = c_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{c_0}{1-q},\quad c_{min} = q\,c_{max}$$

- Einsetzen: $c_{max} = \frac{12{,}5}{1 - 0{,}3969} \approx 20{,}72\,\mathrm{mg/l}$
- Einsetzen: $c_{min} = 0{,}3969 \cdot 20{,}72 \approx 8{,}225\,\mathrm{mg/l}$
- Kumulationsfaktor (wie viel höher der stationäre Spiegel als nach einer Dosis ist): $R = \frac{1}{1-q} \approx 1{,}658$

Graph



Wie sich die Größen mit der Zeit ändern.

Monatliche Rate eines Kredits von 1 000 000 CZK für 20 Jahre bei 5 %.

Eingabe: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];`

kind=loan)

Ergebnis

$$a \approx 6.592\,\mathrm{CZK/Mon.}$$

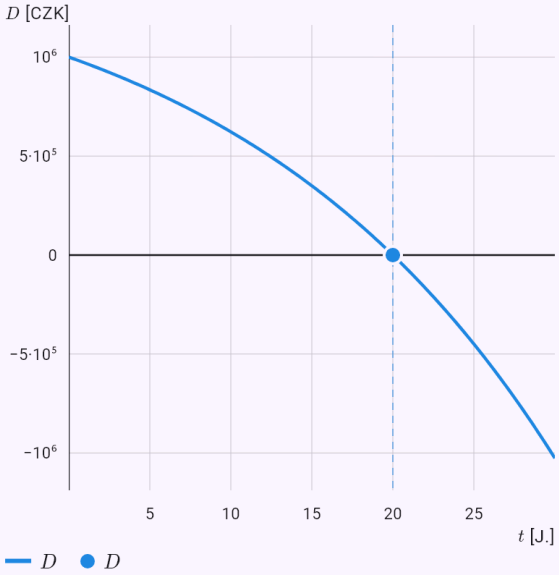
Lösungsweg

- Gesucht a; gegeben $D_0 = 1.000.000\,\mathrm{CZK}, \quad r = 5\,\%\ \mathrm{p.\,a.}, \quad t = 20\,\mathrm{J.}, \quad D$
- Einheiten umrechnen: $r = 5\,\%\ \mathrm{p.\,a.} = 0{,}05\,\mathrm{J.}^{-1}$
- Bei stetiger Verzinsung wächst der Zins in jedem Augenblick proportional zum Guthaben: dB/dt = rB mit dem Jahreszinssatz r. Regelmäßige Einzahlungen a erhöhen das Guthaben (dB/dt = rB + a), Kreditraten senken die Schuld (dD/dt = rD − a). Die Gleichung wird durch Trennung der Variablen gelöst; daraus folgen Guthaben, Laufzeit oder Ratenhöhe (stetige Annuität). Gleichung des Modells: $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Trennung der Variablen: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r\,dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln\left|D - \frac{a}{r}\right| = rt + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $D(0) = D_0$ ein: $C = D_0 - \frac{a}{r}$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r}\right)e^{rt}$
- Stetige Verzinsung ist ein Modell – Banken verzinsen monatlich oder jährlich; die Unterschiede sind gering.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$
- Einsetzen

$$a = \frac{0{,}05(1\,000\,000e^{0{,}05\cdot 20} - 0)}{e^{0{,}05\cdot 20} - 1} \approx 79.100\,\mathrm{CZK/J.}$$

- Insgesamt gezahlt: $a\,t = 1.582.000\,\mathrm{CZK}$
- Einheiten umrechnen: $a \approx 79.100\,\mathrm{CZK/J.} = 6.592\,\mathrm{CZK/Mon.}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Wie lange ein Kondensator bis zur halben Quellenspannung braucht.

Eingabe: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

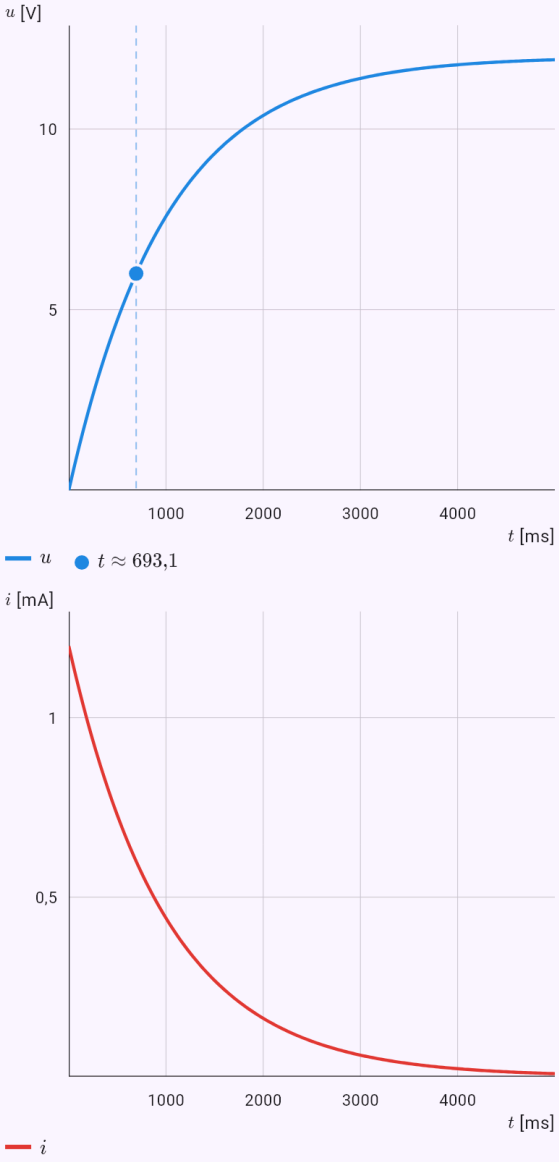
Ergebnis

$$t \approx 693\,\text{ms}$$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $R = 10\,\text{k}\Omega, \quad C = 100\,\mu\text{F}, \quad U = 12\,\text{V}, \quad u = 6\,\text{V}$
- Beim Laden eines Kondensators über einen Widerstand gilt nach Kirchhoff U = Ri + u, und der Strom lädt den Kondensator: i = C·du/dt. Zusammen RC·du/dt + u = U. Die Spannung nähert sich der Quellenspannung: u = U(1 − e^(−t/τ)) mit der Zeitkonstante τ = RC; der Strom i = (U/R)·e^(−t/τ) fällt. Beim Entladen ist u = U₀·e^(−t/τ).
  Gleichung des Modells: $RC\frac{du}{dt} + u = U$
- Zeitkonstante: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000\,\text{ms}$
- Trennung der Variablen: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln|u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ ein:
  $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
  $u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Einsetzen: $t = -1000 \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693{,}1\,\text{ms}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Gedämpftes Federpendel – Auslenkung nach 1 s.

Eingabe: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

t=1[s])

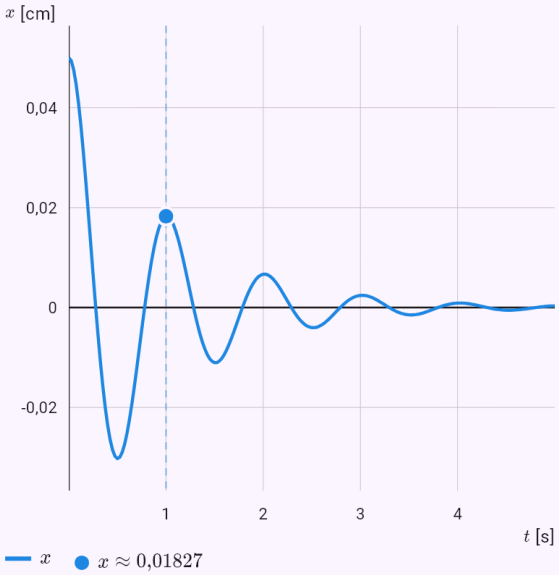
Ergebnis

$$x \approx 1{,}827\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht x; gegeben
  $m = 0{,}5\,\text{kg}, \quad k = 20\,\text{N/m}, \quad b = 1\,\text{kg/s}, \quad x_0 = 5\,\text{cm},$
- Einheiten umrechnen: $x_0 = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
- Auf einen Körper an einer Feder wirken die Federkraft −kx (Hooke), die Dämpfung −b·v und eventuell eine Antriebskraft F_0·cos ωt. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz m·x'' + b·x' + kx = F_0·cos ωt – eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zeigen, ob der Körper schwingt (schwache Dämpfung) oder nur zurückkehrt. Ein Antrieb nahe der Eigenfrequenz ω_0 = √(k/m) führt zur Resonanz. Gleichung des Modells:
  $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
- Eigenkreisfrequenz (ohne Dämpfung):
  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} \approx 6{,}325\,\text{s}^{-1}$
- Abklingkonstante: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} \approx 1\,\text{s}^{-1}$
- Wir suchen Lösungen x = e^(λt); Einsetzen und Teilen durch e^(λt) ergibt die charakteristische Gleichung:
  $0{,}5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6{,}245i$
- Schwache Dämpfung (δ < ω_0; $\delta = 1, \quad \omega_0 = 6{,}325$): komplexe Wurzeln – gedämpfte Schwingung.
- Lösung der homogenen Gleichung:
  $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6{,}245t + C_2 \sin 6{,}245t)$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein: $x(0) = 0{,}05, \quad x'(0) = 0$, daraus
  $C_1 \approx 0{,}05, \quad C_2 \approx 0{,}008006$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
  $x = e^{-t}(0{,}05 \cos 6{,}245t + 0{,}008006 \sin 6{,}245t)$
- Einsetzen: $x(1) \approx 0{,}01827\,\text{m}$
- Einheiten umrechnen: $x \approx 0{,}01827\,\text{m} = 1{,}827\,\text{cm}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Epidemie mit R_0 = 2,5 – Höhepunkt und Gesamtzahl der Infizierten.

Eingabe: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Ergebnis

$$I_{max} \approx 2340\,\text{Ind.}$$
$$t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$$
$$R_\infty \approx 8930\,\text{Ind.}$$

Lösungsweg

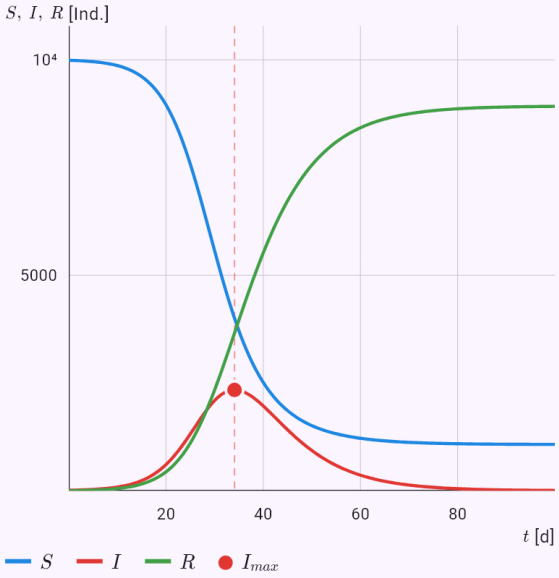
- Gesucht t_{max}; gegeben
  $N = 10\,000\,\text{Ind.}, \quad I_0 = 10\,\text{Ind.}, \quad R_0 = 2{,}5, \quad D = 7$
- Die Bevölkerung N wird in Empfängliche S, Infizierte I und Genesene R geteilt. Neuinfektionen sind proportional zu den Begegnungen: β·S·I/N; Infizierte genesen mit der Rate γ = 1/D (D = Krankheitsdauer). Das System S' = −βSI/N, I' = βSI/N − γI, R' = γI hat keine Lösung in elementaren Funktionen – es wird numerisch gelöst. Exakt folgen die Basisreproduktionszahl R_0 = β/γ, der Höhepunkt, die Gesamtzahl der Infizierten und die Herdenimmunitätsschwelle 1 − 1/R_0. Gleichung des Modells
  $$S' = -\frac{\beta S I}{N}$$
  $$I' = \frac{\beta S I}{N} - \gamma I$$
  $$R' = \gamma I$$
- Genesungsrate: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429\,\text{d}^{-1}$
- Übertragungsrate: $\beta = R_0\gamma \approx 0{,}3571\,\text{d}^{-1}$
- Die Summe S + I + R = N ist konstant (die Gleichungen ergeben addiert null).
- Herdenimmunitätsschwelle (Anteil Immuner, ab dem sich die Krankheit nicht mehr ausbreitet):
  $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\,\%$
- Die Epidemie bricht aus, da anfangs
  $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$ gilt.
- Der Höhepunkt liegt bei S = N/R_0; aus der Gleichung für dI/dS
  $$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0}\ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$
- Die Gleichung wird numerisch gelöst (Bisektion)

$$\ln\frac{S_\infty}{S_0} = \frac{R_0(S_\infty - N)}{N} \Rightarrow S_\infty \approx 1072\,\text{Ind.}$$

- Insgesamt erkranken:
  $R_\infty = N - S_\infty \approx 8928\,\text{Ind.}\ (89{,}3\,\%)$
- Das System ist nicht elementar lösbar – es wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit Schrittweite $0{,}05$ auf $[0;\ 100]$ gelöst.
- › Das Verfahren: Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, 2000 Schritte
- Aus der numerischen Lösung: $t_{max} \approx 34{,}1\,\text{d}$

Graph

Zeitverlauf | Phasenebene



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Räuber und Beute – Gleichgewicht, Stabilität und Periode.

Eingabe: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo];`

```
c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])
```

Ergebnis

$[x^*;\, y^*] \approx [80;\, 50]$

$T \approx 14{,}9\,\text{Mon.}$

Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben

  $a = 0{,}5\,\text{Mon.}^{-1}, \quad b = 0{,}01\,(\text{Ind.}\cdot\text{Mon.})^{-1}, \quad c = 0{,}4\,\text{I}$

- Beute x vermehrt sich ohne Räuber (ax), Räuber y sterben ohne Beute (−cy). Begegnungen (proportional zu xy) verringern die Beute (−bxy) und ernähren die Räuber (+dxy). Das System x' = ax − bxy, y' = −cy + dxy (Lotka, Volterra) hat das Gleichgewicht [c/d; a/b] mit rein imaginären Eigenwerten der Linearisierung – die Populationen schwanken periodisch, die Räuber hinter der Beute her. Numerisch gelöst; Gleichgewichte und erstes Integral exakt. Gleichung des Modells

  $x' = ax - bxy$

  $y' = -cy + dxy$

- Gleichgewichte – alle Ableitungen sind null

  $x(a - by) = 0,\ y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0;\, 0],\ \left[\frac{c}{d};\, \frac{a}{b}\right] \approx [80;$

- Stabilität durch Linearisierung – Jacobi-Matrix des Systems

  $J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$

- Im Punkt $[0;\, 0]$ Eigenwerte $\lambda_1 = -0{,}4, \quad \lambda_2 = 0{,}5$ – Sattel (instabil).

  $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

- Im Punkt $[80;\, 50]$ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}4472i$ – Zentrum (Schwingungen um das Gleichgewicht).

  $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

- Division der Gleichungen und Trennung ergeben ein erstes Integral – eine entlang der Trajektorie konstante Größe: $V = dx - c\ln x + by - a\ln y = C$

- Da V entlang einer Trajektorie konstant ist, sind die Trajektorien geschlossene Kurven – die Populationen schwanken periodisch.

- Periode kleiner Schwingungen um das Gleichgewicht (aus den Eigenwerten): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14{,}05\,\text{Mon.}$

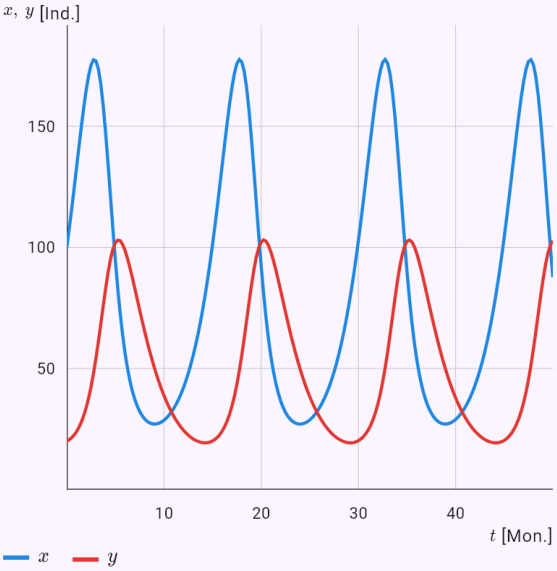
- Das System ist nicht elementar lösbar – es wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit Schrittweite $0{,}0125$ auf $[0;\, 50]$ gelöst.

- › Das Verfahren: Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, 4000 Schritte

- Aus der numerischen Lösung: $T \approx 14{,}95\,\text{Mon.}$

Graph

Zeitverlauf | Phasenebene



Wie sich die Größen mit der Zeit ändern.

Kegelförmiges Gefäß: Auslaufzeit.

Eingabe: `model(vessel; find=T[min]; shape=cone; R=30[cm]; H=60[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=50[cm]; g=9.81[m_s2])
```

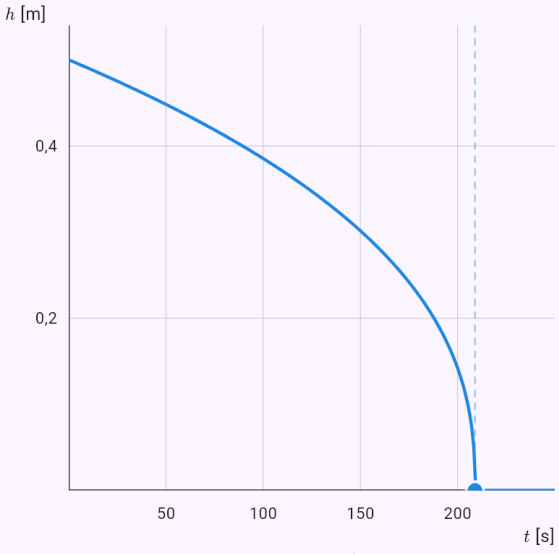
Ergebnis

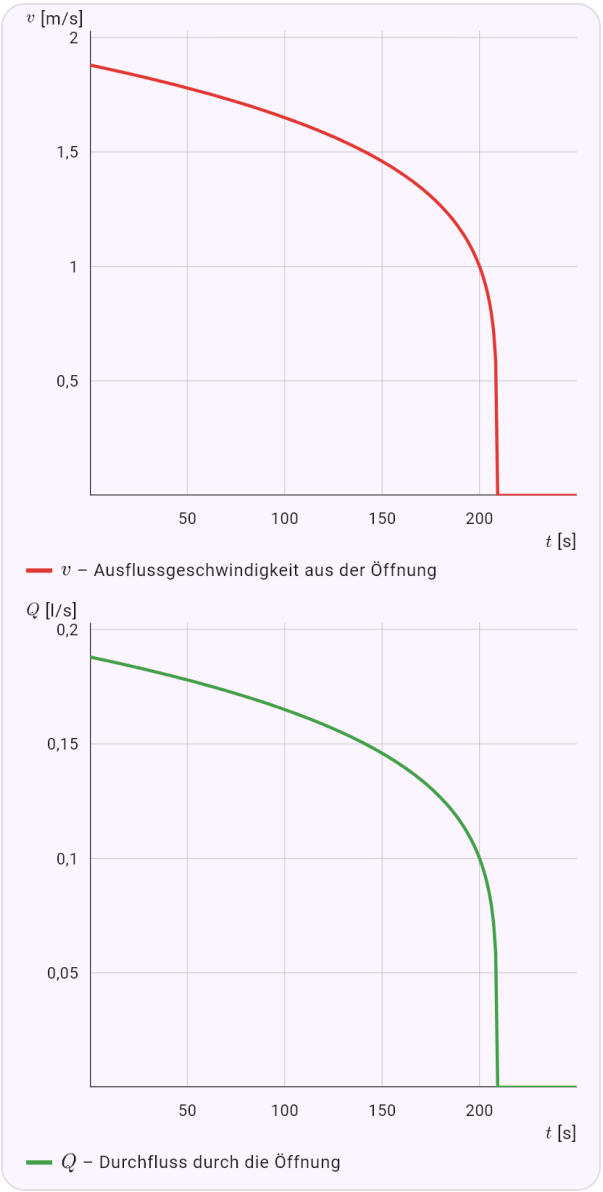
$$T \approx 3{,}48\,\text{min}$$

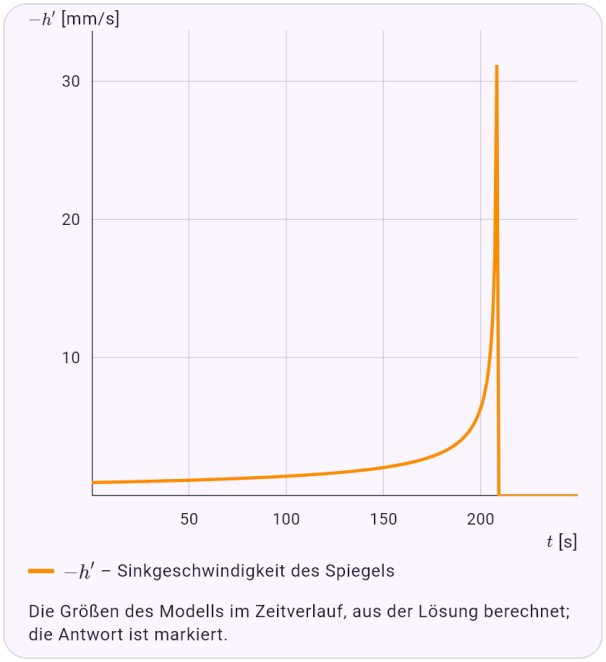
Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben
  $R = 30\,\text{cm}, \quad H = 60\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h$
- Einheiten umrechnen
  $R = 30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}, \quad H = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}$
- Ein Rotationsgefäß der gewählten Form hat ein Loch im Boden. Die Flüssigkeit fließt mit einer Geschwindigkeit aus der Energiebilanz aus: Torricellis v = μ√(2gh), korrigiert um ein großes Loch (Term s²/S²), ein Auslaufrohr der Länge L (zusätzliche Höhe L, aber auch Reibung nach der Viskosität – laminar oder turbulent) und beim geschlossenen Gefäß um den Unterdruck der Luft über dem Pegel, der den Ausfluss bremst bis stoppt. In dt fließt s·v·dt aus, der Pegel sinkt um dh, also dt = −S(h)/(s·v) dh, die Zeit folgt durch Integration. Der Graph zeigt Pegel, Ausflussgeschwindigkeit und Durchfluss. Bei r = R·(h/H)^p ohne Rohr und Deckel steht zum Vergleich auch die Formel da. Bei r = k·h^(1/4) sinkt der Pegel gleichmäßig, so funktionierten Wasseruhren. Gleichung des Modells
  $$S(h)\frac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \frac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \frac{s^2}{S^2(h)}\right) = h$$
- Querschnitt des Gefäßes in der Höhe h:
  $$S(h) = \pi R^2 \left(\frac{h}{H}\right)^{2p}, \quad p = 1$$
- Wasser bei 20 °C:
  $\rho = 998{,}2\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 1{,}002\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Flüssig bei Normaldruck von 0 bis 100 °C.
- Trennung der Variablen: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Die Ausflussgeschwindigkeit hängt kompliziert vom Pegel ab, das Integral wird daher numerisch berechnet.
- Zum Vergleich nach Torricelli ohne Korrektur für ein großes Loch: $T_0 = \dfrac{h_0^q}{q\kappa} \approx 209\,\text{s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Einsetzen: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 208{,}9\,\text{s}$
- Einheiten umrechnen: $T \approx 208{,}9\,\text{s} = 3{,}482\,\text{min}$

Graph







Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Öl aus einem Kugelgefäß durch ein Rohr – Pegel, Ausflussgeschwindigkeit, Durchfluss und Sinkgeschwindigkeit des Pegels.

Eingabe: `model(vessel; find=T[min]; shape=sphere; liquid=oil; R=20[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6;`

```
h0=30[cm]; L=30[cm]; g=9.81[m_s2])
```

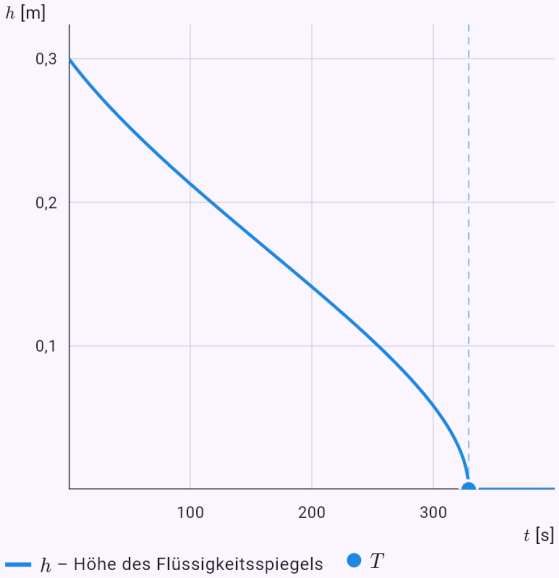
Ergebnis

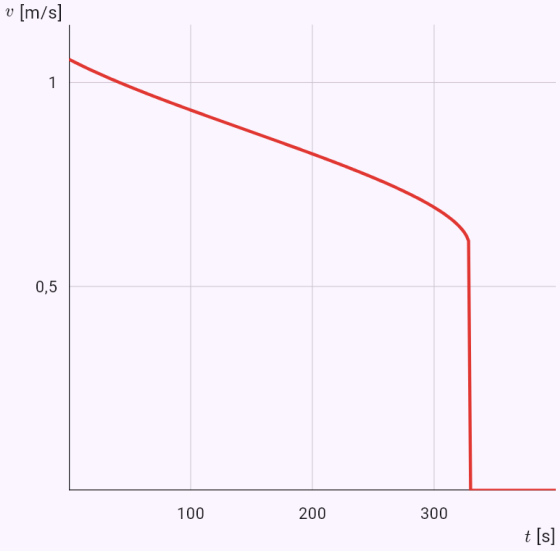
$$T \approx 5{,}48\,\text{min}$$

Lösungsweg

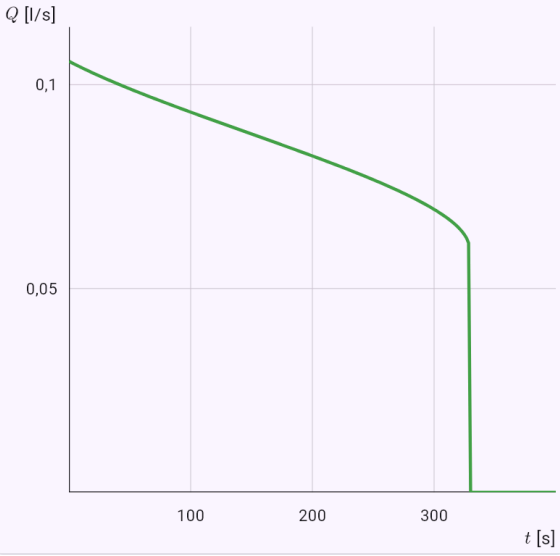
- Gesucht T; gegeben
  $R = 20\,\text{cm}, \quad s = 1\,\text{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 30\,\text{cm}, \quad L$
- Einheiten umrechnen
  $R = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}, \quad s = 1\,\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2, \quad h_0 = 30$
- Ein Rotationsgefäß der gewählten Form hat ein Loch im Boden. Die Flüssigkeit fließt mit einer Geschwindigkeit aus der Energiebilanz aus: Torricellis v = μ√(2gh), korrigiert um ein großes Loch (Term s²/S²), ein Auslaufrohr der Länge L (zusätzliche Höhe L, aber auch Reibung nach der Viskosität – laminar oder turbulent) und beim geschlossenen Gefäß um den Unterdruck der Luft über dem Pegel, der den Ausfluss bremst bis stoppt. In dt fließt s·v·dt aus, der Pegel sinkt um dh, also dt = −S(h)/(s·v) dh, die Zeit folgt durch Integration. Der Graph zeigt Pegel, Ausflussgeschwindigkeit und Durchfluss. Bei r = R·(h/H)^p ohne Rohr und Deckel steht zum Vergleich auch die Formel da. Bei r = k·h^(1/4) sinkt der Pegel gleichmäßig, so funktionierten Wasseruhren. Gleichung des Modells
  $S(h)\dfrac{dh}{dt} = -s\,v, \quad \dfrac{v^2}{2g\mu^2}\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2(h)}\right) + h_z(v) = h +$
- Querschnitt des Gefäßes in der Höhe h:
  $S(h) = \pi\left(2Rh - h^2\right)$
- Sonnenblumenöl bei 20 °C:
  $\rho = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \eta = 50\,\text{mPa}\cdot\text{s}$. Erstarrt um −17 °C, siedet nicht – über 200 °C zersetzt es sich; die Viskosität sinkt stark mit der Temperatur.
- Trennung der Variablen: $dt = -\dfrac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Die Ausflussgeschwindigkeit hängt kompliziert vom Pegel ab, das Integral wird daher numerisch berechnet.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $T = \displaystyle\int_0^{h_0} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh$
- Einsetzen: $T = \displaystyle\int_0^{0{,}3} \frac{S(h)}{s\,v(h)}\,dh \approx 329{,}1\,\text{s}$
- Einheiten umrechnen: $T \approx 329{,}1\,\text{s} = 5{,}485\,\text{min}$

Graph

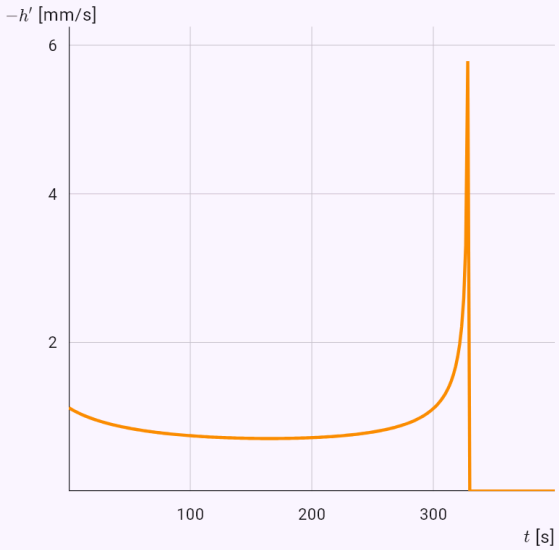




v – Ausflussgeschwindigkeit aus der Öffnung



Q – Durchfluss durch die Öffnung



$-h'$ – Sinkgeschwindigkeit des Spiegels

Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Form des Gefäßes, aus dem der Pegel gleichmäßig sinkt.

Eingabe: `model(vessel; find=k[cm]; a=1[cm2]; mu=0.6; h0=50[cm]; g=9.81[m_s2]; v=0.001[m_s])`

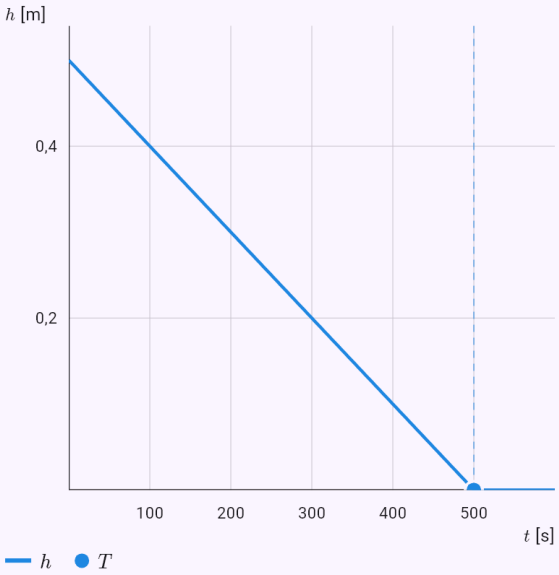
Ergebnis

$$r(h_0) \approx 24{,}46\,\mathrm{cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht $r(h_0)$; gegeben
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2, \quad \mu = 0{,}6, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm}, \quad g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2,$
- Einheiten umrechnen
  $s = 1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2, \quad h_0 = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}5\,\mathrm{m}$
- Ein Rotationsgefäß der gewählten Form hat ein Loch im Boden. Die Flüssigkeit fließt mit einer Geschwindigkeit aus der Energiebilanz aus: Torricellis v = μ√(2gh), korrigiert um ein großes Loch (Term s²/S²), ein Auslaufrohr der Länge L (zusätzliche Höhe L, aber auch Reibung nach der Viskosität – laminar oder turbulent) und beim geschlossenen Gefäß um den Unterdruck der Luft über dem Pegel, der den Ausfluss bremst bis stoppt. In dt fließt s·v·dt aus, der Pegel sinkt um dh, also dt = −S(h)/(s·v) dh, die Zeit folgt durch Integration. Der Graph zeigt Pegel, Ausflussgeschwindigkeit und Durchfluss. Bei r = R·(h/H)^p ohne Rohr und Deckel steht zum Vergleich auch die Formel da. Bei r = k·h^(1/4) sinkt der Pegel gleichmäßig, so funktionierten Wasseruhren. Gleichung des Modells: $\pi r^2(h)\, v = \mu s \sqrt{2gh}$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $r(h) = k\, h^{1/4}, \quad k = \sqrt{\dfrac{\mu s \sqrt{2g}}{\pi v}} \approx 0{,}2909$
- Der Pegel sinkt gleichmäßig, wenn der Querschnitt proportional zu √h ist, also r = k·h^(1/4). Diese Form hatten Wasseruhren.
- Einsetzen: $r(h_0) = 0{,}2909 \cdot 0{,}5^{1/4} \approx 0{,}2446\,\mathrm{m}$
- Einheiten umrechnen: $r(h_0) \approx 0{,}2446\,\mathrm{m} = 24{,}46\,\mathrm{cm}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

43. Physik

Physikalische Berechnungen finden Sie im Bereich „Anwendungen“, Fach Physik. Das Raketentriebwerk hat fünf Modi: Schub, spezifischer Impuls, Raketengleichung von Ziolkowski, mehrstufige Rakete und Austrittsgeschwindigkeit aus der Thermodynamik einer idealen Düse.

Der Schub wird aus Massendurchsatz und Austrittsgeschwindigkeit berechnet, wahlweise mit Druckanteil; das Diagramm zeigt dann, wie er in der Standardatmosphäre mit der Höhe wächst. In der Raketengleichung lassen sich Geschwindigkeitszuwachs, benötigter Treibstoff, Start- oder Endmasse und Austrittsgeschwindigkeit bestimmen. Die Ergebnisse sind ideal, ohne Gravitations- und Luftwiderstandsverluste.

Die Keplerschen Gesetze haben ein eigenes Formular mit fünf Modi: Ellipse, Flächen, Ort zur Zeit, Umlaufzeit und Geschwindigkeit aus der Vis-Viva-Gleichung. Der Graph zeichnet die Bahn in wahrem Maßstab, und der Körper bewegt sich darauf per Schieberegler oder Wiedergabetaste. Beim zweiten Gesetz zeigt er farbige, in gleichen Zeiten überstrichene Sektoren.

Das Formular zur gegenseitigen Beeinflussung berechnet den Schwerpunkt, Lagrange-Punkte, Gezeiten, Bahnresonanzen und die Periheldrehung. Die Grafik des Schwerpunkts zeigt beide Körper um den [[barycenter|Schwerpunkt]] B in wahrem Maßstab. Ist der Kreis des größeren Körpers im Ganzen unsichtbar klein (die Sonne um den Schwerpunkt von Sonne und Jupiter), zeigt ihn der Schalter „Detail am Schwerpunkt“ vergrößert, mit dem Radius R auch den Umriss des Körpers – der Schwerpunkt liegt knapp über der Sonnenoberfläche. Eine berühmte Geschichte: Uranus wich von seiner vorhergesagten Bahn ab, und Le Verrier berechnete 1846 aus diesen Störungen, wo ein unbekannter Planet stehen musste. Neptun wurde dann fast genau dort gefunden.

Das Dreikörperproblem wird numerisch in Einheiten mit G = 1 berechnet: die periodische Achterlösung, das chaotische pythagoreische Problem, bei dem zwei fast gleiche Läufe auseinanderlaufen, und eigene Werte. Die Änderung der Gesamtenergie prüft die Genauigkeit.

Kernphysik gibt es in den Anwendungen nur für die friedliche Nutzung: Labor, Medizin und Energie. Das Formular Kernphysik berechnet die Aktivität einer Probe, das radioaktive Gleichgewicht, die Bateman-Gleichungen einer Zerfallsreihe, die Bindungsenergie mit einem Graphen nach Massenzahl, die Reaktionsenergie und die Brennstoffenergie im Vergleich mit Kohle.

Das Formular Kernreaktor zeigt Neutronengenerationen als geometrische Folge, die Reaktorperiode mit verzögerten Neutronen und die Größe des Kerns im Eingruppen-Diffusionsmodell, nur für moderierte Gitter (Graphit, Leichtwasser).

Die Ballistik berechnet den schiefen Wurf für Schulphysik, Sport und Jagd. Im Vakuum gibt es genaue Formeln mit Rechenweg, mit Luftwiderstand eine numerische Runge-Kutta-Lösung einschließlich Gegen-

und Seitenwind, Luftdichte nach Höhe und Corioliskraft. Das Diagramm zeigt die Seitenansicht und den Vergleich mit dem Vakuum, bei seitlicher Abdrift auch die Draufsicht. Bei Überschallgeschossen stammt der Widerstandsbeiwert aus einer Näherungskurve nach der Machzahl. Berechnet wird nur der Flug, nicht die Wirkung im Ziel; der Drall des Geschosses ist nicht enthalten. Die Umkehraufgabe findet für eine gegebene Entfernung beide Abschusswinkel, den flachen und den steilen.

Flugzeug berechnet Flugleistungen für die Zivilluftfahrt und den Unterricht: Horizontalflug mit parabolischer Polare, Start- und Landerollstrecke numerisch mit Wind und Höhe, Kurve und Gleitflug. Ein wählbarer Bodeneffekt verringert den induzierten Widerstand. Die Kompressibilität der Luft fehlt im Modell, bei Verkehrsflugzeugen im Reiseflug ist das Ergebnis daher nur ein Anhaltswert. Geschwindigkeiten und Längen lassen sich auch in Knoten und Fuß angeben.

Wiedereintritt in die Atmosphäre berechnet den Durchflug eines Raumschiffs numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren: Geschwindigkeit, Bahnwinkel und Höhe über einer runden Erde mit der Standardatmosphäre. Ergebnis ist eine Landung, ein Abprall zurück ins All oder eine überschrittene Grenze, die größte Belastung (geprüft mit der Formel von Allen und Eggers), der Wärmestrom im [[stagnationPoint|Staupunkt]] und die Schildtemperatur aus dem [[radiativeEquilibrium|Strahlungsgleichgewicht]]. Der Modus Eintrittskorridor findet die flache und die steile Grenze des Eintrittswinkels durch Intervallhalbierung – für die Rückkehr vom Mond ist der [[entryCorridor|Korridor]] etwa 2° breit, mit einer Anmerkung zu Apollo 13. Voreinstellungen: Wostok, Apollo, Sojus und Space Shuttle (mit einer sachlichen Anmerkung zum Verlust der Columbia). Die einzige Steuerung ist ein konstanter [[bankAngle|Rollwinkel]]; die Erde dreht sich im Modell nicht. Eine interaktive Demo, in der Sie den Auftrieb während des Flugs drehen, gibt es auf mathtrace.app unter „Selbst ausprobieren“.

Körper im Wasser ist ein Formular für Unterricht und zivile Nutzung: Auftrieb und Schwimmen einschließlich Ballon, Druck und Tiefe, Bernoulli-Gleichung, Sinken und Steigen mit hydrodynamischer Masse, Reichweite und Absinken einer Harpune für das Sportfischen, ein angetriebenes Unterwasserfahrzeug, Ballast und ein Schiff. Der Widerstandsbeiwert einer Kugel folgt der Reynolds-Zahl, eine Blase hat eine eigene Korrelation. Der Schiffswiderstand ist die Reibung nach der ITTC-57-Linie plus ein gegebener Restbeiwert, außerhalb der Verdrängerfahrt also nur eine Orientierung. Beim Schiff lässt sich ein Vergleich mit dem Ekranoplan KM einschalten: Arbeit gegen den Widerstand je Tonne und Kilometer und ein Diagramm der Leistung über der Geschwindigkeit.

Die Kernfusion hat zwei Formulare, beide nur für zivile Zwecke (Kraftwerke, Labore, Sonne und Sterne). Das Formular Kernfusion berechnet die Energie einer Reaktion (D-T, D-D, D-³He und die p-p-Kette der Sonne) samt ihrer Aufteilung auf die Produkte, die Energie des Brennstoffs im Vergleich mit Uranspaltung und Kohle, die Höhe der [[coulombBarrier|Coulombbarriere]] und den [[gamowPeak|Gamow-Peak]]. Ein Fusionsreaktor kann nicht durchgehen wie ein Spaltreaktor: Fusion hat keine kritische Masse, bei einer Störung kühlt das Plasma ab und die Reaktion hört von selbst auf.

Das Formular Fusionsplasma berechnet das [[lawsonCriterion|Lawson-Kriterium]] mit einem Graphen des nötigen Tripelprodukts über der Temperatur, den Gewinn Q, die Reaktionsrate ⟨σv⟩ als Integral über die Maxwell-Verteilung mit der Simpsonregel (verglichen mit der Anpassung von Bosch und Hale), die Fusionsleistungsdichte, den Bremsstrahlungsverlust und den Larmorradius eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Die Plasmadynamik (Magnetohydrodynamik) berechnet die App nicht.

Teilchenbeschleuniger haben zwei Formulare. Relativistische Kinematik berechnet [[lorentzFactor|Lorentzfaktor]], Geschwindigkeit, Energie und Impuls aus der Geschwindigkeit oder der kinetischen Energie sowie die Zeitdilatation mit der Reichweite instabiler Teilchen (Myon, Pion, Kaon). Das Formular Teilchenbeschleuniger vergleicht die Stoßenergie √s gegenläufiger Strahlen und eines festen Targets, berechnet Bahnradius und nötiges Magnetfeld sowie den Verlust durch Synchrotronstrahlung. Die Auswahl setzt die Werte von LHC, LEP oder Tevatron ein.

Beispiele

Triebwerksschub auf Meereshöhe und Vergleich mit dem Vakuum.

Eingabe: `model(rocket; find=F[kN]; mdot=250[kg_s]; ve=3000[m_s]; pe=70[kPa];`

```
pa=101.325[kPa]; Ae=1.5[m2]; mode=thrust; pressure=full)
```

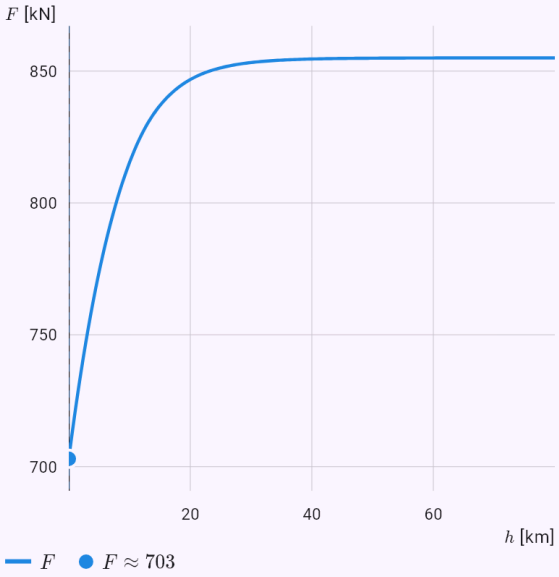
Ergebnis

$$F \approx 703\,\mathrm{kN}$$

Lösungsweg

- Gesucht F; gegeben
  $\dot{m} = 250\,\mathrm{kg/s}, \quad v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad p_e = 70\,\mathrm{kPa}, \quad p_a =$
- Einheiten umrechnen
  $p_e = 70\,\mathrm{kPa} = 70\,000\,\mathrm{Pa}, \quad p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 101\,300$
- Eine Rakete treibt sich an, indem sie Masse ausstößt: Pro Sekunde verlässt die Masse Δm/Δt das Triebwerk mit der Geschwindigkeit v_e, und aus der Impulserhaltung folgt der Schub F = (Δm/Δt)·v_e. Weicht der Gasdruck am Düsenaustritt p_e vom Umgebungsdruck p_a ab, kommt der Term (p_e − p_a)·A_e hinzu – deshalb wächst der Schub mit der Höhe. Gleichung des Modells:
  $F = \dot{m} v_e + (p_e - p_a) A_e$
- Druckanteil des Schubs
  $(p_e - p_a) A_e = (70\,000 - 101\,300) \cdot 1{,}5 \approx -46\,990\,\mathrm{N}$
- Das Gas ist in der Düse überexpandiert (p_e < p_a) – der Umgebungsdruck verringert den Schub. Typisch beim Start eines für große Höhen ausgelegten Triebwerks.
- Impulsanteil des Schubs:
  $\dot{m} v_e = 250 \cdot 3000 \approx 750\,000\,\mathrm{N}$
- Einsetzen: $F = 750\,000 - 46\,990 \approx 703\,000\,\mathrm{N}$
- Spezifischer Impuls
  $$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} = \frac{703\,000}{250 \cdot 9{,}80665} \approx 286{,}7\,\mathrm{s}$$
- Schub im Vakuum: $F_{vac} = \dot{m} v_e + p_e A_e \approx 855\,000\,\mathrm{N}$
- Einheiten umrechnen: $F \approx 703\,000\,\mathrm{N} = 703\,\mathrm{kN}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Austrittsgeschwindigkeit aus dem spezifischen Impuls von RP-1/LOX.

Eingabe: `model(rocket; find=ve[m_s]; Isp=340[s]; mode=isp; propellant=kerosene)`

Ergebnis

$$v_e \approx 3334\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_e; gegeben: $I_{sp} = 340\,\mathrm{s}$
- Der spezifische Impuls I_sp = v_e/g_0 gibt an, wie viele Sekunden 1 kg Treibstoff einen Schub gleich der Gewichtskraft von 1 kg liefern kann, und vergleicht so Treibstoffe. Gleichung des Modells: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} = \dfrac{F}{\dot{m} g_0}$
- Normfallbeschleunigung: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $v_e = I_{sp} g_0$
- Einsetzen: $v_e = 340 \cdot 9{,}80665 \approx 3334\,\mathrm{m/s}$
- Je größer der spezifische Impuls, desto weniger Treibstoff braucht das Triebwerk für denselben Schub. Typisch im Vakuum: Festtreibstoff ≈ 265 s, RP-1/LOX ≈ 340 s, CH_4/LOX ≈ 365 s, LH_2/LOX ≈ 450 s.

Geschwindigkeitszuwachs nach der Raketengleichung.

Eingabe: `model(rocket; find=dv[m_s]; ve=3000[m_s]; m0=1000[kg]; mf=250[kg]; mode=tsiolkovsky)`

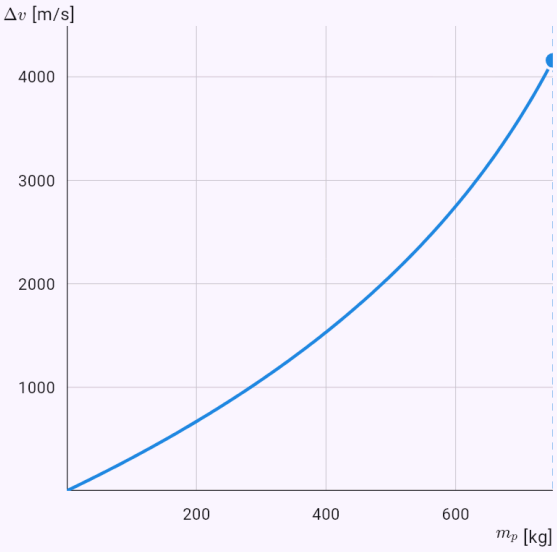
Ergebnis

$$\Delta v \approx 4159\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht Δv; gegeben: $v_e = 3000\,\mathrm{m/s}, \quad m_0 = 1000\,\mathrm{kg}, \quad m_f = 250\,\mathrm{kg}$
- Der Impuls des ausgestoßenen Treibstoffs beschleunigt die Rakete: Aus m·dv = −v_e·dm folgt durch Integration die Raketengleichung von Ziolkowski Δv = v_e·ln(m_0/m_f). Gleichung des Modells: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Trennung der Variablen: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Wir integrieren beide Seiten: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Einsetzen: $\Delta v = 3000 \cdot \ln \dfrac{1000}{250} \approx 4159\,\mathrm{m/s}$
- Massenverhältnis: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 4$
- Treibstoffanteil an der Startmasse: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 75\,\%$
- Idealer Wert ohne Gravitations- und Luftwiderstandsverluste. Für eine niedrige Erdumlaufbahn sind tatsächlich etwa 9,4 km/s nötig.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Wie viel Treibstoff 1 t Rakete für eine niedrige Umlaufbahn braucht.

Eingabe: `model(rocket; find=mp[kg]; dv=9400[m_s]; ve=4400[m_s]; mf=1000[kg]; mode=tsiolkovsky)`

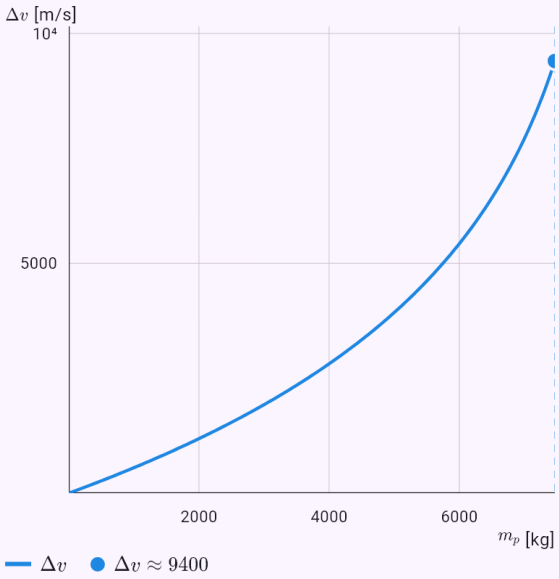
Ergebnis

$$m_p \approx 7469\,\mathrm{kg}$$

Lösungsweg

- Gesucht m_p; gegeben: $\Delta v = 9400\,\mathrm{m/s}, \quad v_e = 4400\,\mathrm{m/s}, \quad m_f = 1000\,\mathrm{kg}$
- Der Impuls des ausgestoßenen Treibstoffs beschleunigt die Rakete: Aus m·dv = −v$_e$·dm folgt durch Integration die Raketengleichung von Ziolkowski Δv = v$_e$·ln(m$_0$/m_f). Gleichung des Modells: $m\,dv = -v_e\,dm$
- Trennung der Variablen: $dv = -v_e \dfrac{dm}{m}$
- Wir integrieren beide Seiten: $\Delta v = -v_e \displaystyle\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $m_p = m_0 - m_f = m_f \left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1 \right)$
- Einsetzen: $m_p = 1000 \cdot \left(e^{\frac{9400}{4400}} - 1 \right) \approx 7469\,\mathrm{kg}$
- Massenverhältnis: $\dfrac{m_0}{m_f} \approx 8{,}469$
- Treibstoffanteil an der Startmasse: $\dfrac{m_0 - m_f}{m_0} \approx 88{,}2\,\%$
- Idealer Wert ohne Gravitations- und Luftwiderstandsverluste. Für eine niedrige Erdumlaufbahn sind tatsächlich etwa 9,4 km/s nötig.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Dreistufige Rakete der Saturn-V-Klasse und der Gewinn durch Stufen.

Eingabe: `model(rocket; find=dv[m_s]; mps=2077 444 107[t]; mss=130 36 11[t]; isps=263 421`

`421[s]; mL=45[t]; mode=staging)`

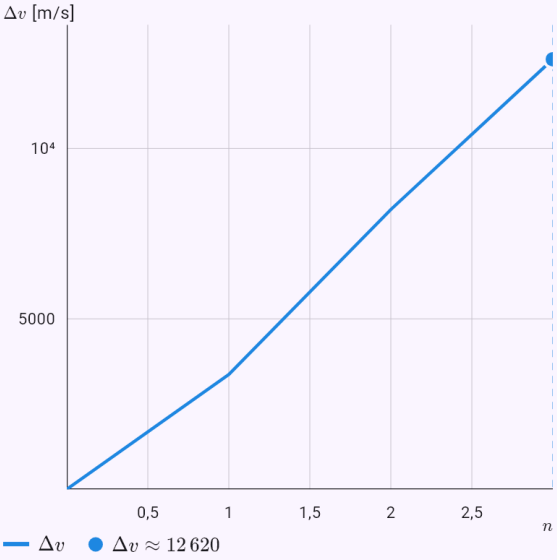
Ergebnis

$$\Delta v \approx 12\,620\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht Δv; gegeben
  $m_p = (2077;\ 444;\ 107)\,\mathrm{t}, \quad m_s = (130;\ 36;\ 11)\,\mathrm{t}, \quad I_{sp}$
- Einheiten umrechnen
  $m_p = (2\,077\,000;\ 444\,000;\ 107\,000)\,\mathrm{kg}, \quad m_s = (130\,0($
- Jede Stufe liefert Geschwindigkeit nach der Raketengleichung, leere Tanks werden abgeworfen, sodass die nächste Stufe keine unnötige Masse mehr trägt. Die Geschwindigkeitszuwächse addieren sich.
  Gleichung des Modells: $\Delta v = \sum_i I_{sp,i}\, g_0 \ln \frac{m_{0,i}}{m_{f,i}}$
- Normfallbeschleunigung: $g_0 = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$
- Geschwindigkeitszuwachs der Stufe
  $\Delta v_1 = 263 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{773\,000} \approx 3365\,\mathrm{m/s}$
- Geschwindigkeitszuwachs der Stufe
  $\Delta v_2 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{643\,000}{199\,000} \approx 4842\,\mathrm{m/s}$
- Geschwindigkeitszuwachs der Stufe
  $\Delta v_3 = 421 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{163\,000}{56\,000} \approx 4411\,\mathrm{m/s}$
- Zum Vergleich eine Stufe mit gleicher Masse und gleichem Treibstoff
  $\Delta v^* = 296{,}1 \cdot 9{,}80665 \cdot \ln \frac{2\,850\,000}{222\,000} \approx 7412\,\mathrm{m/s}$
- Durch das Abwerfen leerer Stufen gewinnt die Rakete zusätzlich $\Delta v - \Delta v^* \approx 5206\,\mathrm{m/s}$ gegenüber einer Stufe mit gleichem Treibstoff.
- Idealer Wert ohne Gravitations- und Luftwiderstandsverluste. Für eine niedrige Erdumlaufbahn sind tatsächlich etwa 9,4 km/s nötig.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Austrittsgeschwindigkeit eines Wasserstofftriebwerks aus der Düsenthermodynamik.

Eingabe: `model(rocket; find=ve[m_s]; Tc=3250[K]; M=13[g_mol]; kappa=1.2[one]; pr=1000[one];`

```
mode=nozzle; propellant=hydrogen)
```

Ergebnis

$$v_e \approx 4130\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_e; gegeben

  $$T_c = 3250\,\mathrm{K}, \quad M = 13\,\mathrm{g/mol}, \quad \kappa = 1{,}2, \quad \frac{p_c}{p_e} = 100$$

- Einheiten umrechnen: $M = 13\,\mathrm{g/mol} = 0{,}013\,\mathrm{kg/mol}$
- Die Austrittsgeschwindigkeit folgt aus der Thermodynamik einer idealen Düse: Sie wächst mit der Brennkammertemperatur und sinkt mit der molaren Masse der Abgase. Gleichung des Modells

  $$v_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

- Universelle Gaskonstante: $R = 8{,}31446\,\mathrm{J/(mol\,K^{-1})}$
- Expansionsterm

  $$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{0{,}1667} \approx 0{,}3162$$

- Einsetzen

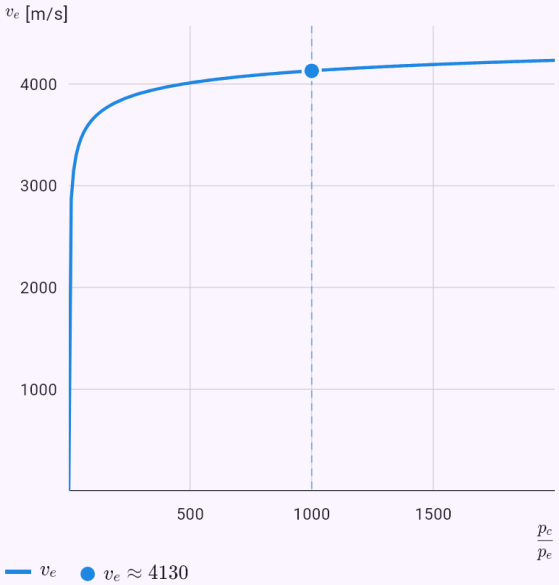
  $$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2-1}\cdot\frac{8{,}31446\cdot 3250}{0{,}013}\cdot(1-0{,}3162)} \approx 4130$$

- Spezifischer Impuls: $I_{sp} = \dfrac{v_e}{g_0} \approx 421{,}1\,\mathrm{s}$
- Grenzgeschwindigkeit bei Expansion ins Vakuum:

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{RT_c}{M}} \approx 4994\,\mathrm{m/s}$$

- Die Austrittsgeschwindigkeit wächst mit √(T/M) – deshalb hat Wasserstoff (leichte Abgase) den größten spezifischen Impuls.
- Ideale isentrope Strömung; eine reale Düse erreicht etwa 92–98 % dieses Werts.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Perihel des Halleyschen Kometen aus großer Halbachse und Exzentrizität.

Eingabe: `model(orbit; find=rp[au]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; mode=ellipse; body=halley)`

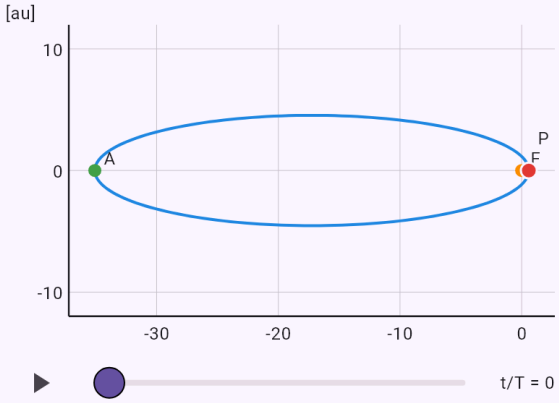
Ergebnis

$$r_p \approx 0{,}586\,\text{au}$$

Lösungsweg

- Gesucht r_p; gegeben: $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671$
- 1. Keplersches Gesetz: Ein Planet bewegt sich auf einer Ellipse, in deren Brennpunkt der Zentralkörper steht. Der Abstand r hängt vom Winkel θ zum Perihel ab; am kleinsten ist er im Perihel r_p = a(1 − e), am größten im Aphel r_a = a(1 + e). Die Exzentrizität e sagt, wie gestreckt die Ellipse ist. Gleichung des Modells: $r(\theta) = \dfrac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $r_p = a(1-e)$
- Einsetzen: $r_p = 17{,}83(1 - 0{,}9671) \approx 0{,}586\,\text{au}$
- Abstand im Aphel: $r_a = a(1+e) \approx 35{,}08\,\text{au}$

Graph



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Die Geschwindigkeit der Erde im Aphel aus dem zweiten Keplerschen Gesetz; Sektoren gleicher Zeit.

Eingabe: `model(orbit; find=va[km_s]; rp=0.9833[au]; ra=1.0167[au]; vp=30.29[km_s]; mode=areas; body=earth)`

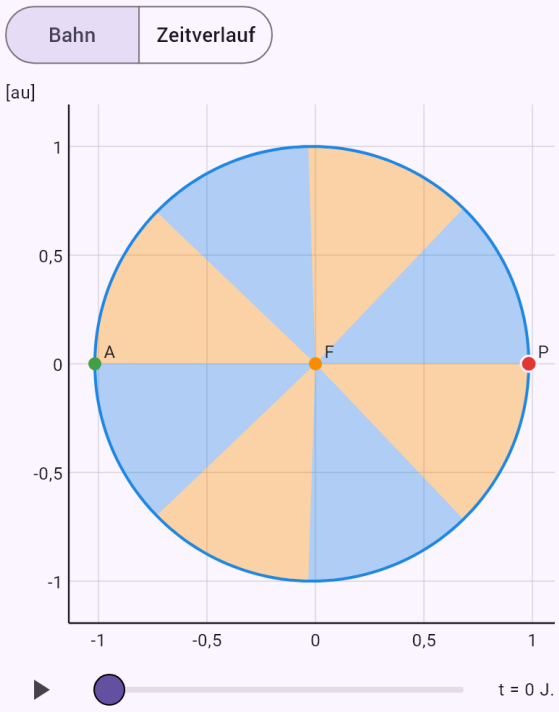
Ergebnis

$$v_a \approx 29{,}29\,\text{km/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_a; gegeben $r_p = 0{,}9833\,\text{au}, \quad r_a = 1{,}017\,\text{au}, \quad v_p = 30{,}29\,\text{km/s}$
- 2. Keplersches Gesetz: Der Fahrstrahl vom Brennpunkt überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, weil der Drehimpuls erhalten bleibt. Die Flächengeschwindigkeit ist konstant, daher ist ein Körper im Perihel am schnellsten: v_p·r_p = v_a·r_a. Die farbigen Sektoren im Graphen entstanden in gleicher Zeit und sind gleich groß. Gleichung des Modells: $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \quad v_p r_p = v_a r_a$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $v_a = v_p \dfrac{r_p}{r_a}$
- Einsetzen: $v_a = 30{,}29 \cdot \dfrac{0{,}9833}{1{,}017} \approx 29{,}29\,\text{km/s}$
- Verhältnis der Geschwindigkeiten: $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} \approx 1{,}034$
- Ein Körper ist im Perihel am schnellsten und im Aphel am langsamsten; die Erde läuft daher im Januar am schnellsten.

Graph



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Wo der Halleysche Komet 10 Jahre nach dem Perihel steht (Newton-Verfahren).

Eingabe: `model(orbit; find=theta[deg]; a=17.834[au]; e=0.96714[one]; T=75.32[yr]; t=10[yr]; mode=position; body=halley)`

Ergebnis

$$\theta \approx 168\,^\circ$$

Lösungsweg

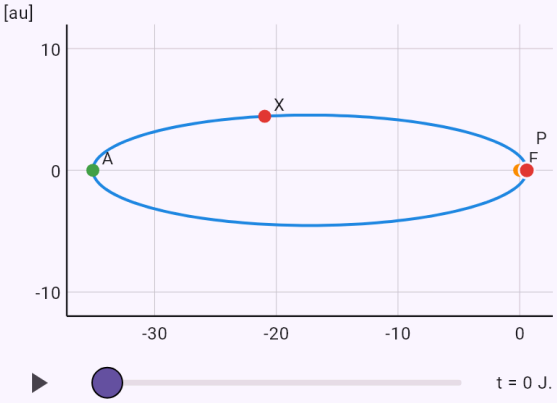
- Gesucht θ; gegeben
  $a = 17{,}83\,\text{au}, \quad e = 0{,}9671, \quad T = 75{,}32\,\text{J.}, \quad t = 10\,\text{J}$
- Wo ein Körper zur Zeit t ist, folgt aus der Kepler-Gleichung M = E − e·sin E. Die mittlere Anomalie M wächst gleichmäßig mit der Zeit; die exzentrische Anomalie E lässt sich daraus nicht als Formel ausdrücken und wird mit dem Newton-Verfahren gesucht. Gleichung des Modells:
  $M = E - e\sin E, \quad M = \dfrac{2\pi t}{T}$
- Mittlere Anomalie: $M = \dfrac{2\pi \cdot 10}{75{,}32} \approx 0{,}8342$
- Die Kepler-Gleichung hat keine Lösung in Formeln, E wird daher numerisch gesucht.
- Newton-Iteration: $E_{k+1} = E_k - \dfrac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}$
- Schritt: $E_0 \approx 3{,}1415927$
- Schritt: $E_1 \approx 1{,}9686238$
- Schritt: $E_2 \approx 1{,}7919915$
- Schritt: $E_3 \approx 1{,}7802638$
- Schritt: $E_4 \approx 1{,}7802097$
- Schritt: $E_5 \approx 1{,}7802097$
- Schritt: $E_6 \approx 1{,}7802097$
- Exzentrische Anomalie: $E \approx 1{,}78021$
- Wahre Anomalie

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}, \quad \theta \approx 168^\circ$$

- Abstand vom Brennpunkt:
  $r = a(1 - e\cos E) \approx 21{,}42\,\text{au}$

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Die Höhe der geostationären Bahn aus dem dritten Keplerschen Gesetz.

Eingabe: `model(orbit; find=h[km]; T=86164[s]; M=5.972e24[kg]; R=6378[km]; mode=period;`

`central=earth)`

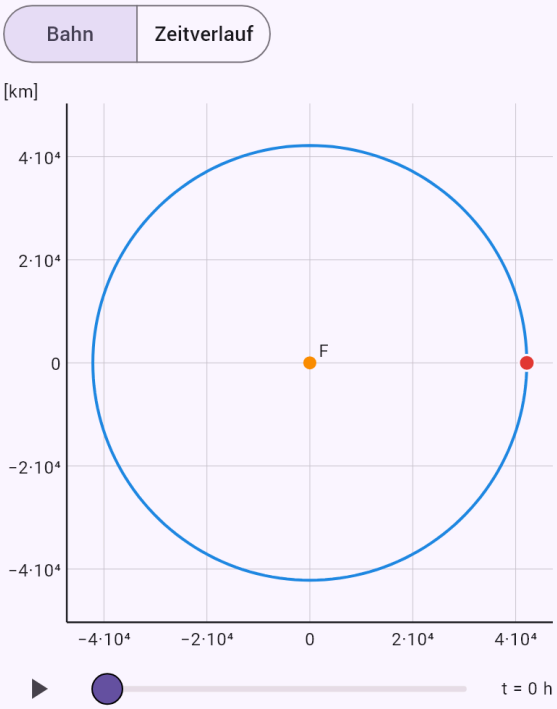
Ergebnis

$$h \approx 35\,790\,\mathrm{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht h; gegeben
  $T = 86\,160\,\mathrm{s}, \quad M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6378\,\mathrm{km}$
- Einheiten umrechnen: $R = 6378\,\mathrm{km} = 6\,378\,000\,\mathrm{m}$
- 3. Keplersches Gesetz: Das Verhältnis T²/a³ hängt nur von der Masse des Zentralkörpers ab. Aus der Bahn eines Mondes folgt so die Masse des Planeten und aus einer gewünschten Umlaufzeit die Bahnhöhe, etwa die geostationäre. Gleichung des Modells: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
- Einsetzen
  $a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot (86\,160)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}216 \cdot$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $h = a - R$
- Einsetzen: $h = 4{,}216 \cdot 10^7 - 6\,378\,000 \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Das gilt für eine neben M vernachlässigbare umlaufende Masse; sonst steht dort M + m.
- Einheiten umrechnen: $h \approx 3{,}579 \cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35\,790\,\mathrm{km}$

Graph



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Die Geschwindigkeit des Halleyschen Kometen im Perihel aus der Vis-Viva-Gleichung.

Eingabe: `model(orbit; find=v[km_s]; r=0.586[au]; a=17.834[au]; M=1.989e30[kg];`

`mode=visviva; central=sun)`

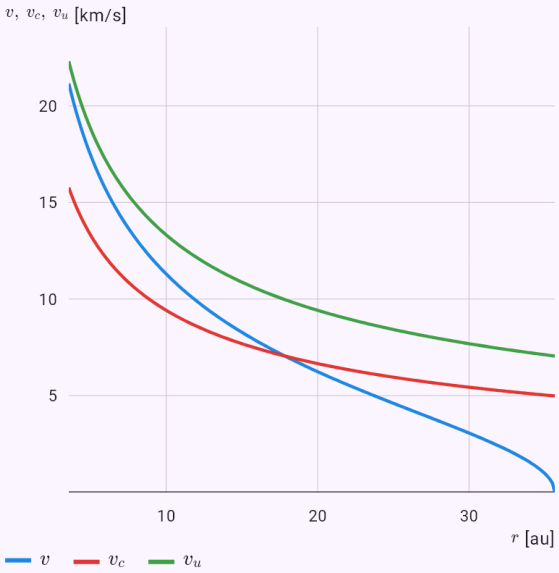
Ergebnis

$$v \approx 54{,}58\,\mathrm{km/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v; gegeben
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au}, \quad M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Einheiten umrechnen
  $r = 0{,}586\,\mathrm{au} = 8{,}766 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad a = 17{,}83\,\mathrm{au} = 2{,}668$
- Die Vis-Viva-Gleichung v² = GM(2/r − 1/a) folgt aus der Energieerhaltung und liefert die Geschwindigkeit an jeder Bahnstelle. Die Kreisbahngeschwindigkeit hält einen Körper auf dem Kreis; die Fluchtgeschwindigkeit ist √2-mal so groß, und der Körper kehrt nicht zurück.
  Gleichung des Modells: $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
- Einsetzen
  $v = \sqrt{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\left(\frac{2}{8{,}766 \cdot 10^{10}} - \frac{}{2{,}668}\right.}$
- Kreisbahngeschwindigkeit in diesem Abstand:
  $v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 38\,910\,\mathrm{m/s}$
- Fluchtgeschwindigkeit in diesem Abstand:
  $v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \approx 55\,030\,\mathrm{m/s}$
- Einheiten umrechnen: $v \approx 54\,580\,\mathrm{m/s} = 54{,}58\,\mathrm{km/s}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Schwerpunkt von Sonne und Jupiter liegt knapp über der Sonnenoberfläche; „Detail am Schwerpunkt“ zeigt, wie die Sonne ihn umkreist.

Eingabe: `model(twobody; find=rb[km]; M=1.989e30[kg]; m=1.898e27[kg]; a=778500000[km];`

`R=696000[km]; mode=barycenter; system=sunJupiter)`

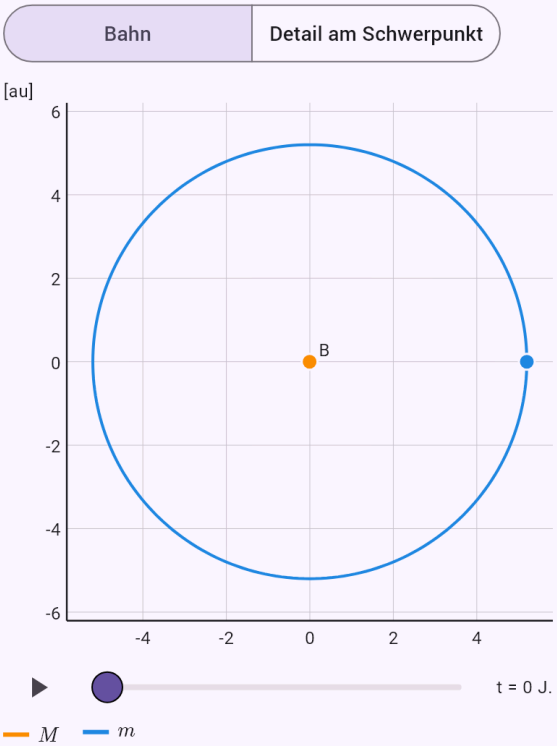
Ergebnis

$$r_b \approx 742\,200\,\text{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht r_b; gegeben
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 1{,}898 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \quad a = 7{,}78$
- Einheiten umrechnen
  $a = 7{,}785 \cdot 10^{8}\,\text{km} = 7{,}785 \cdot 10^{11}\,\text{m}, \quad R = 696\,000\,\text{km}$
- In Wirklichkeit umkreisen beide Körper ihren gemeinsamen Schwerpunkt (Baryzentrum). Das Zweikörperproblem führt auf die Bewegung eines Körpers mit der reduzierten Masse, und im 3. Keplerschen Gesetz steht die Summe M + m. Das Taumeln eines Sterns um den Schwerpunkt verrät Exoplaneten. Gleichung des Modells
  $$r_b = \frac{am}{M+m}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$$
- Einsetzen
  $$r_b = \frac{7{,}785 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}898 \cdot 10^{27}}{1{,}989 \cdot 10^{30} + 1{,}898 \cdot 10^{27}} \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m}$$
- Abstand des anderen Körpers vom Schwerpunkt:
  $a - r_b \approx 7{,}778 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
- Der Schwerpunkt liegt außerhalb des Körpers:
  $\frac{r_b}{R} \approx 1{,}066$. Der größere Körper beschreibt selbst einen sichtbaren Kreis.
- Einheiten umrechnen: $r_b \approx 7{,}422 \cdot 10^{8}\,\text{m} = 742\,200\,\text{km}$

Graph



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Der Abstand von L2, wo das James-Webb-Teleskop arbeitet.

Eingabe: `model(twobody; find=rL[Mkm]; M=1.989e30[kg]; m=6.05e24[kg]; a=149.6[Mkm];`

`mode=lagrange; point=L2; system=sunEarth)`

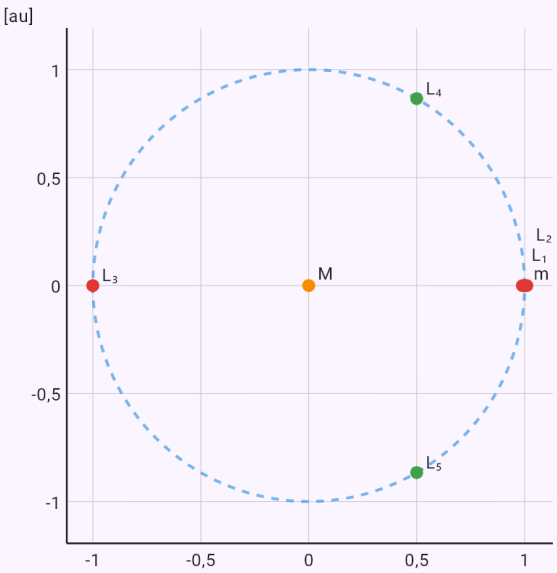
Ergebnis

$$r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{Mio. km}$$

Lösungsweg

- Gesucht r_{L_2}; gegeben
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad m = 6{,}05 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad a = 149{,}6$
- Im mit dem Körper m rotierenden System gibt es fünf Stellen, an denen sich die Gravitation beider Körper und die Fliehkraft ausgleichen. L1, L2 und L3 liegen auf der Verbindungslinie und werden numerisch bestimmt; L4 und L5 bilden mit beiden Körpern gleichseitige Dreiecke. Gleichung des Modells
  $$x = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3}$$
- Massenverhältnis: $\mu = \frac{m}{M+m} \approx 3{,}042 \cdot 10^{-6}$
- Näherung für kleines m:
  $r_{L_2} \approx a\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \approx 1{,}503\,\text{Mio. km}$
- Der Lagrange-Punkt ist eine Nullstelle der Gleichung auf der Verbindungslinie und wird durch Intervallhalbierung bestimmt.
- Genau aus der Gleichung: $r_{L_2} \approx 1{,}508\,\text{Mio. km}$
- L1, L2 und L3 sind instabil: Ein Körper muss seine Position durch Korrekturen halten, wie das James-Webb-Teleskop in L2.
- L4 und L5 sind stabil, weil M/m > 25; bei Jupiter halten sich dort die Trojaner.

Graph



Die Körper und die besonderen Punkte in wahrem Maßstab.

Die vom Mond verursachte Gezeitenbeschleunigung.

Eingabe: `model(twobody; find=at[m_s2]; M=7.342e22[kg]; R=6371[km]; d=384400[km]; mode=tide;`

`tideSource=moon)`

Ergebnis

$$a_s \approx 1{,}099 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$$

Lösungsweg

- Gesucht a_s; gegeben
  $M = 7{,}342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km}$
- Einheiten umrechnen
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad d = 384\,400\,\mathrm{km} = 3{,}84$
- Die nahe Seite eines Körpers wird stärker angezogen als die ferne. Die Gezeitenbeschleunigung 2GMR/d³ fällt mit der dritten Potenz des Abstands, deshalb wirkt der Mond stärker als die viel massereichere Sonne. Gleichung des Modells: $a_s \approx \dfrac{2GMR}{d^3}$
- Einsetzen
  $a_s = \dfrac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}342 \cdot 10^{22} \cdot 6\,371\,000}{\left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right)^3} \approx 1{,}099$
- Exakt, Differenz der Gravitation auf der nahen Seite und im Zentrum
  $\dfrac{GM}{(d-R)^2} - \dfrac{GM}{d^2} \approx 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$
- Der anziehende Körper erzeugt zwei Flutberge, auf der nahen und der gegenüberliegenden Seite, daher zwei Hochwasser pro Umdrehung.
- Gezeitenreibung bremst die Rotation: Der Mond zeigt der Erde stets dieselbe Seite und entfernt sich um etwa 3,8 cm pro Jahr.

Die Resonanz der Monde Io, Europa und Ganymed.

Eingabe: `model(twobody; find=ratio; Ts=1.769 3.551 7.155[d]; mode=resonance)`

Ergebnis

$$T_1 : T_2 : T_3 \approx 1 : 2 : 4$$

Lösungsweg

- Gegeben: $T = (1{,}769;\ 3{,}551;\ 7{,}155)\,\mathrm{d}$
- Eine Bahnresonanz entsteht, wenn Umlaufzeiten im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen; die Körper begegnen sich dann regelmäßig und beeinflussen sich. Beispiele: Io, Europa und Ganymed 1 : 2 : 4, Neptun und Pluto 2 : 3. Die Kirkwoodlücken im Asteroidengürtel liegen bei Resonanzen mit Jupiter. Gleichung des Modells: $T_1 : T_2 : \ldots \approx p_1 : p_2 : \ldots$
- Größte Abweichung vom ganzzahligen Verhältnis: $\delta \approx 1{,}1\,\%$
- Die Umlaufzeiten stehen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen: eine Bahnresonanz.

Die Periheldrehung des Merkur nach der allgemeinen Relativitätstheorie.

Eingabe: `model(twobody; find=dphi[arcsec_cy]; M=1.989e30[kg]; a=57909000[km];`

```
e=0.2056[one]; mode=precession)
```

Ergebnis

$$\Delta\varphi \approx 43\,''/100\ \text{Jahre}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\Delta\varphi$; gegeben
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}, \quad a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km}, \quad e = 0{,}205$
- Einheiten umrechnen:
  $a = 5{,}791 \cdot 10^{7}\,\text{km} = 5{,}791 \cdot 10^{10}\,\text{m}$
- Nach der allgemeinen Relativitätstheorie dreht sich das Perihel einer Bahn langsam um 6πGM/(c²a(1 − e²)) pro Umlauf. Bei Merkur sind das 43" im Jahrhundert, die Differenz, die die Newtonsche Mechanik nicht erklären konnte. Gleichung des Modells: $\Delta\varphi = \dfrac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}$
- Drehung pro Umlauf
  $\Delta\varphi_1 = \dfrac{6\pi \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2 \cdot 5{,}791 \cdot 10^{10}\left(1-(0{,}2056)^2\right)} \approx$
- Umläufe in 100 Jahren: $N = \dfrac{100\,\text{J.}}{T} \approx 415{,}3$
- Einsetzen: $\Delta\varphi = N\Delta\varphi_1 \approx 43\,''/100\ \text{Jahre}$
- Die Newtonsche Mechanik sagt für Merkur eine kleinere Drehung voraus; die restlichen 43" im Jahrhundert erklärte erst die allgemeine Relativitätstheorie.

Die periodische Achterlösung dreier gleicher Körper.

Eingabe: `model(threebody; find=E; tEnd=6.32591398[one]; scenario=figure8)`

Ergebnis

$$E \approx -1{,}28714$$

Lösungsweg

- Gesucht E; gegeben: $t_k = 6{,}326$
- Drei Körper haben im Allgemeinen keine Lösung in Formeln. Es gibt aber besondere periodische Bahnen: In der Achterlösung (Chenciner und Montgomery, 2000) laufen drei gleiche Körper auf einer einzigen achtförmigen Kurve. Gleichung des Modells

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Im Allgemeinen haben drei Körper keine Lösung in Formeln, die Bewegung wird daher numerisch berechnet, in Einheiten mit G = 1.
- Anzahl der Rechenschritte: $N = 2748$
- Gesamtenergie:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -1{,}28714$$

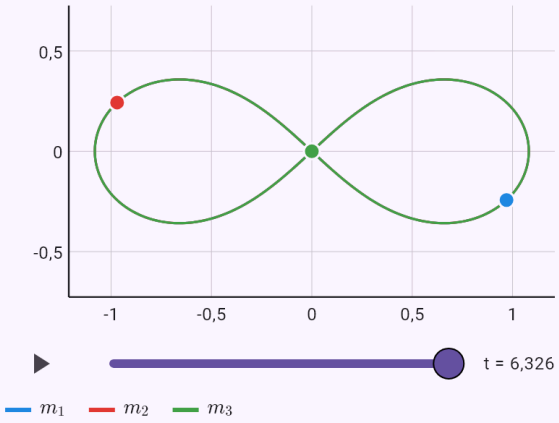
- Relative Energieänderung (Genauigkeitskontrolle):

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$$

- Drei gleiche Körper laufen auf einer achtförmigen Kurve und kehren nach einer Periode an ihre Plätze zurück.

- Größter Abstand vom Start nach einer Periode:
$\max_i |\vec{r}_i(T) - \vec{r}_i(0)| \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$

Graph



Die Körper in wahrem Maßstab. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie der Bewegung.

Chaos: wann zwei fast gleiche Läufe auseinanderlaufen.

Eingabe: `model(threebody; find=ts; tEnd=60[one]; delta=0.001[one]; scenario=chaos)`

Ergebnis

$$t_s \approx 42{,}9$$

Lösungsweg

- Gesucht t_s; gegeben: $t_k = 60, \quad \delta = 0{,}001$
- Das Dreikörperproblem ist chaotisch: Eine winzige Änderung am Anfang wächst, bis die Bahnen nichts mehr gemeinsam haben. Das pythagoreische Problem mit den Massen 3, 4 und 5 wird zweimal gerechnet, beim zweiten Mal mit kleiner Abweichung δ. Gleichung des Modells

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad G = 1$$

- Im Allgemeinen haben drei Körper keine Lösung in Formeln, die Bewegung wird daher numerisch berechnet, in Einheiten mit G = 1.
- Anzahl der Rechenschritte: $N = 52\,307$
- Gesamtenergie:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -12{,}8167$$

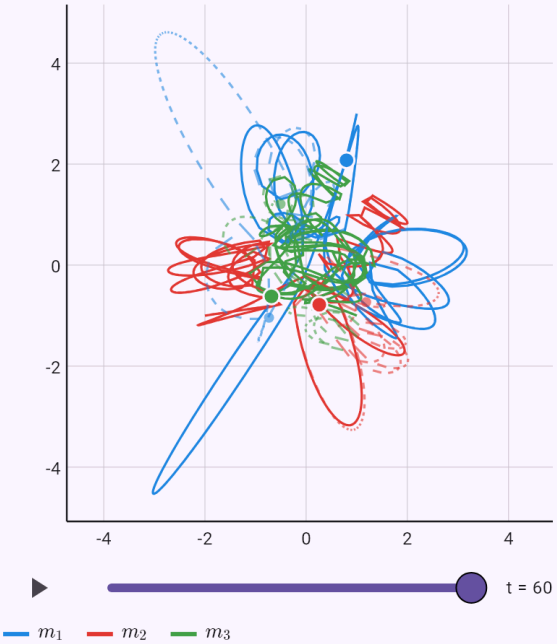
- Relative Energieänderung (Genauigkeitskontrolle):

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

- Zusätzlich wird ein zweiter Lauf mit der Abweichung $\delta = 0{,}001$ berechnet. Die gestrichelten Linien sind dieser Lauf; das Auseinanderlaufen zeigt Chaos. Eine Gerade des Logarithmus in der Zeit bedeutet exponentielles Wachstum.
- Zur Zeit t_s unterscheidet sich der Ort eines Körpers in den beiden Läufen um mehr als 1.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Durchgezogene und gestrichelte Linien sind zwei Läufe mit minimal verschiedenem Anfang.

Die Aktivität von 1 g Radium, etwa ein Curie.

Eingabe: `model(nuclear; find=A[Bq]; m=1[g]; Mm=226[g_mol]; T12=1600[yr]; mode=activity;`

`isotope=ra226)`

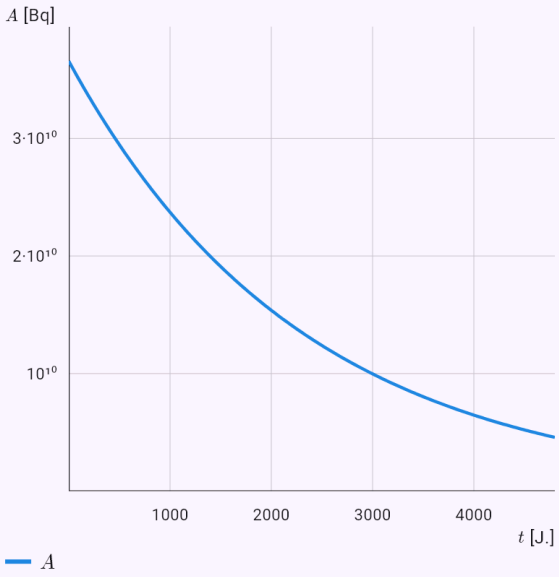
Ergebnis

$$A \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

Lösungsweg

- Gesucht A; gegeben:
  $m = 1\,\mathrm{g}, \quad M = 226\,\mathrm{g/mol}, \quad T_{1/2} = 1600\,\mathrm{J}.$
- Einheiten umrechnen: $T_{1/2} = 1600\,\mathrm{J}. = 5{,}049 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s}$
- Die Aktivität A = λN gibt an, wie viele Kerne pro Sekunde zerfallen. Die Kernzahl N folgt aus Masse, molarer Masse und Avogadro-Konstante, die Zerfallskonstante λ aus der Halbwertszeit. Gleichung des Modells:
  $A = \lambda N, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N = \frac{m}{M} N_A$
- In einer Halbwertszeit halbiert sich die Menge – die Zerfallskonstante: $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 1{,}373 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$
- Anzahl der Kerne: $N = \frac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}665 \cdot 10^{21}$
- Einsetzen
  $A = 1{,}373 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \approx 3{,}658 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$
- Ein Becquerel ist ein Zerfall pro Sekunde. Die historische Einheit Curie entspricht etwa der Aktivität von 1 g Radium, 3,7·10¹⁰ Bq.

Graph



Wie sich die Größen mit der Zeit ändern.

Das Aktivitätsverhältnis in einem Mo-99/Tc-99m-Generator aus der Klinik.

Eingabe: `model(nuclear; find=ratio; A0=100[GBq]; TA=66[h]; TB=6.01[h]; mode=equilibrium;`

`generator=moTc)`

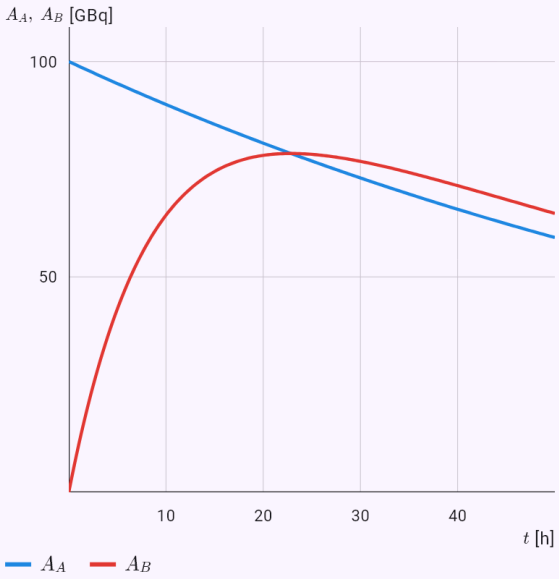
Ergebnis

$$\frac{A_B}{A_A} \approx 1{,}1$$

Lösungsweg

- Gesucht $\frac{A_B}{A_A}$; gegeben:
  $A_{A,0} = 100\,\text{GBq}, \quad T_A = 66\,\text{h}, \quad T_B = 6{,}01\,\text{h}$
- Entsteht ein kurzlebiger Tochternuklid aus einem langlebigen Mutternuklid, holt seine Aktivität die der Mutter ein und folgt ihr dann in festem Verhältnis. Darauf beruhen Radionuklidgeneratoren in Kliniken. Gleichung des Modells
  $$A_B(t) = A_{A,0}\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$
- In einer Halbwertszeit halbiert sich die Menge – die Zerfallskonstante: $\lambda_A \approx 0{,}0105, \quad \lambda_B \approx 0{,}1153$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$$
- Einsetzen: $\frac{A_B}{A_A} = \frac{66}{66 - 6{,}01} \approx 1{,}1$
- Transientes Gleichgewicht: Nach mehreren Halbwertszeiten des Tochternuklids ist das Aktivitätsverhältnis konstant.

Graph



Wie sich die Größen mit der Zeit ändern.

Eine dreigliedrige Zerfallsreihe nach den Bateman-Gleichungen.

Eingabe: `model(nuclear; find=N[pct]; N0=100[pct]; Ts=10 2 5[h]; t=4[h]; mode=bateman)`

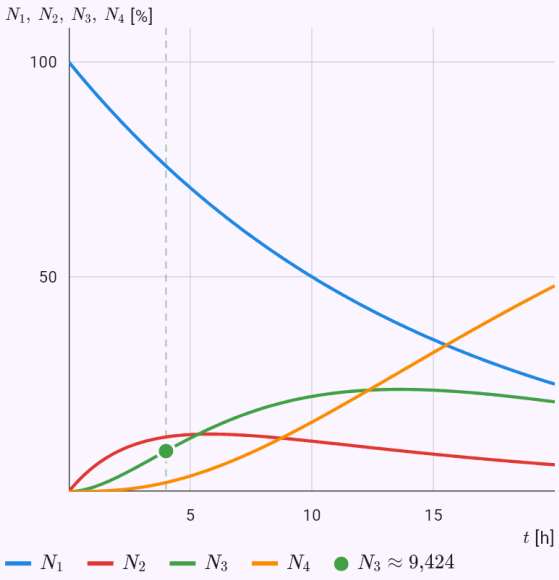
Ergebnis

$$N_n \approx 9{,}424\,\%$$

Lösungsweg

- Gesucht N_n; gegeben:
  $N_0 = 100\,\%, \quad T_i = (10;\ 2;\ 5)\,\mathrm{h}, \quad t = 4\,\mathrm{h}$
- Die Bateman-Gleichungen beschreiben eine Zerfallsreihe: Jedes Glied entsteht aus dem vorigen und zerfällt in das nächste. Es ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit geschlossener Lösung. Gleichung des Modells:
  $N_k' = \lambda_{k-1} N_{k-1} - \lambda_k N_k$
- In einer Halbwertszeit halbiert sich die Menge – die Zerfallskonstante
  $\lambda_1 \approx 0{,}06931, \quad \lambda_2 \approx 0{,}3466, \quad \lambda_3 \approx 0{,}1386$
- Gesuchte Größe ausdrücken
  $$N_n = N_0 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{l \neq j} (\lambda_l - \lambda_j)}$$
- Einsetzen: $N_3(4) \approx 9{,}424\,\%$
- Der Graph zeigt auch das stabile Endprodukt; die Summe aller Glieder ist konstant.

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Die Bindungsenergie pro Nukleon von Eisen-56.

Eingabe: `model(nuclear; find=BA[MeV]; Z=26[one]; Anum=56[one]; Ma=55.93493633[u]; mode=binding; nuclide=fe56)`

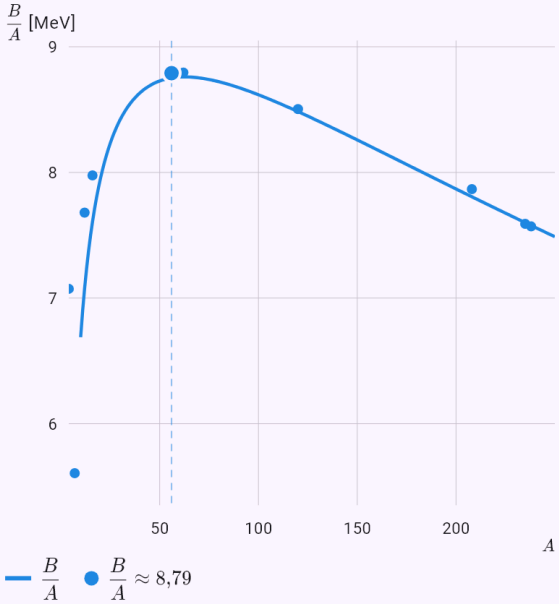
Ergebnis

$$\frac{B}{A} \approx 8{,}7903\,\mathrm{MeV}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\frac{B}{A}$; gegeben:
  $Z = 26, \quad A = 56, \quad M_a = 55{,}93\,\mathrm{u}$
- Ein Kern wiegt weniger als seine freien Protonen und Neutronen. Die Differenz Δm entspricht nach E = mc² der Bindungsenergie. Ihre Kurve pro Nukleon hat ihr Maximum bei Eisen, daher setzen sowohl die Spaltung schwerer als auch die Verschmelzung leichter Kerne Energie frei. Gleichung des Modells:
  $\Delta m = Z m_H + (A - Z) m_n - M_a, \quad B = \Delta m\, c^2$
- Massendefekt
  $\Delta m = 26 \cdot 1{,}00782503 + 30 \cdot 1{,}00866492 - 55{,}934936$
- Energieäquivalent: $1\,\mathrm{u} \cdot c^2 = 931{,}494\,\mathrm{MeV}$
- Einsetzen: $B \approx 0{,}528462 \cdot 931{,}494 \approx 492{,}26\,\mathrm{MeV}$
- Bindungsenergie pro Nukleon: $\frac{B}{A} \approx 8{,}79\,\mathrm{MeV}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Energie der Spaltung von Uran-235.

Eingabe: `model(nuclear; find=Q[MeV]; mode=reaction; reaction=u235ba)`

Ergebnis

$$Q \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Lösungsweg

- Die Reaktionsenergie Q ist die Massendifferenz vor und nach der Reaktion, umgerechnet mit E = mc². Positives Q bedeutet, dass Energie frei wird. Gleichung des Modells: $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reaktion: ${}^{235}\mathrm{U} + n \to {}^{141}\mathrm{Ba} + {}^{92}\mathrm{Kr} + 3n$
- Summe der Massen: $\sum m_r \approx 236{,}0526\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 235{,}86657\,\mathrm{u}$
- Einsetzen: $Q \approx 0{,}18602 \cdot 931{,}494 \approx 173{,}3\,\mathrm{MeV}$
- Diese Energie wird sofort frei; mit den Zerfällen der Spaltprodukte sind es etwa 200 MeV pro Spaltung.

Wie viel Kohle 1 g Uran-235 ersetzt.

Eingabe: `model(nuclear; find=coal[kg]; m=1[g]; Ef=200[MeV]; Mm=235[g_mol]; q=29[MJ_kg]; mode=fuel)`

Ergebnis

$$m_c \approx 2832\,\mathrm{kg}$$

Lösungsweg

- Gesucht m_c; gegeben $m = 1\,\mathrm{g}, \quad E_f = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M = 235\,\mathrm{g/mol}, \quad q = 2$
- Aus der Brennstoffmasse folgt die Kernzahl und aus der Energie einer Spaltung die Gesamtenergie, die sich mit der Verbrennung von Kohle vergleichen lässt. Gleichung des Modells: $E = \frac{m}{M} N_A E_f$
- Anzahl der Kerne: $N = \frac{1}{235} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 2{,}563 \cdot 10^{21}$
- Einsetzen $E = 2{,}563 \cdot 10^{21} \cdot 200 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 8{,}212 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$
- Einsetzen $m_c = \frac{E}{q} = \frac{8{,}212 \cdot 10^{10}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 2832\,\mathrm{kg}$
- Ideale Rechnung: Ein realer Reaktor nutzt nur wenige Prozent des Brennstoffs und wandelt etwa ein Drittel der Wärme in Strom um.

Die Neutronenzahl nach 10 Generationen bei k = 1,05.

Eingabe: `model(reactor; find=N; k=1.05[one]; N0=1000[one]; n=10[one]; mode=generations)`

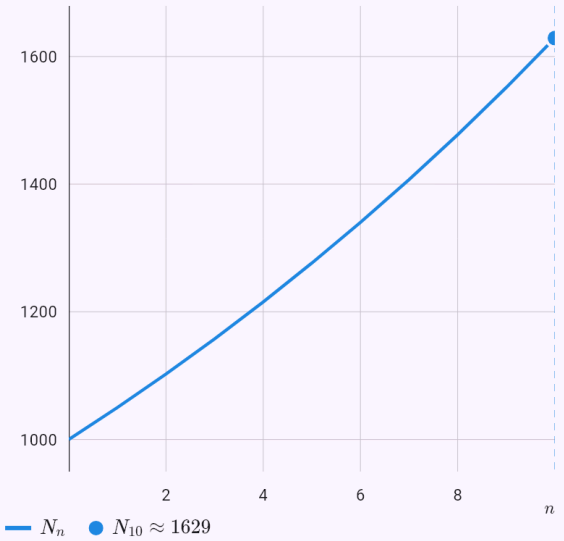
Ergebnis

$$N_n \approx 1629$$

Lösungsweg

- Gesucht N_n; gegeben: $k = 1{,}05, \quad N_0 = 1000, \quad n = 10$
- Der Multiplikationsfaktor k gibt an, wie viele Neutronen der nächsten Generation ein Neutron auslöst. Die Neutronenzahl ist die geometrische Folge N_0k^n: Bei k < 1 erlischt die Reaktion, bei k = 1 läuft sie stationär, bei k > 1 wächst sie. Gleichung des Modells: $N_n = N_0 k^n$
- Überkritischer Zustand: k > 1, die Leistung wächst. Ein Reaktor geht nur kurz und minimal in diesen Zustand, wenn die Leistung erhöht werden soll.
- Einsetzen: $N_n = 1000 \cdot (1{,}05)^{10} \approx 1629$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Summe aller Generationen im unterkritischen Zustand.

Eingabe: `model(reactor; find=Sinf; k=0.9[one]; N0=1000[one]; mode=generations)`

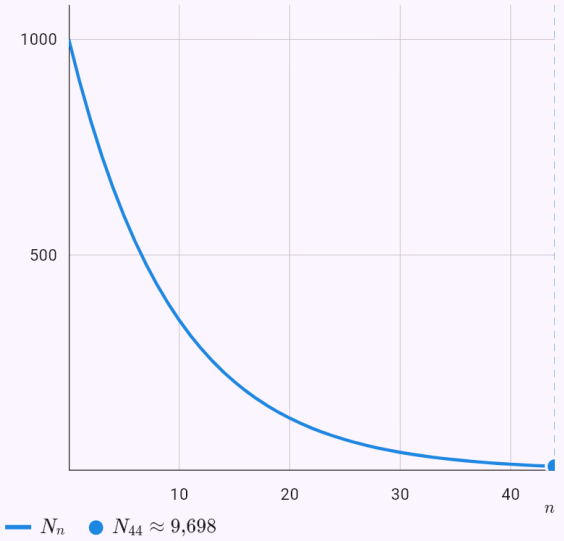
Ergebnis

$$S \approx 10\,000$$

Lösungsweg

- Gesucht S; gegeben: $k = 0{,}9, \quad N_0 = 1000$
- Der Multiplikationsfaktor k gibt an, wie viele Neutronen der nächsten Generation ein Neutron auslöst. Die Neutronenzahl ist die geometrische Folge N_0k^n: Bei k < 1 erlischt die Reaktion, bei k = 1 läuft sie stationär, bei k > 1 wächst sie. Gleichung des Modells: $N_n = N_0 k^n$
- Unterkritischer Zustand: k < 1, die Reaktion erlischt.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $S = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 k^n = \frac{N_0}{1-k}$
- Einsetzen: $S = \frac{1000}{1-0{,}9} \approx 10\,000$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Reaktorperiode mit verzögerten Neutronen.

Eingabe: `model(reactor; find=T[s]; k=1.001[one]; l=0.0001[s]; beta=0.0065[one]; tau=13[s];`

`mode=kinetics)`

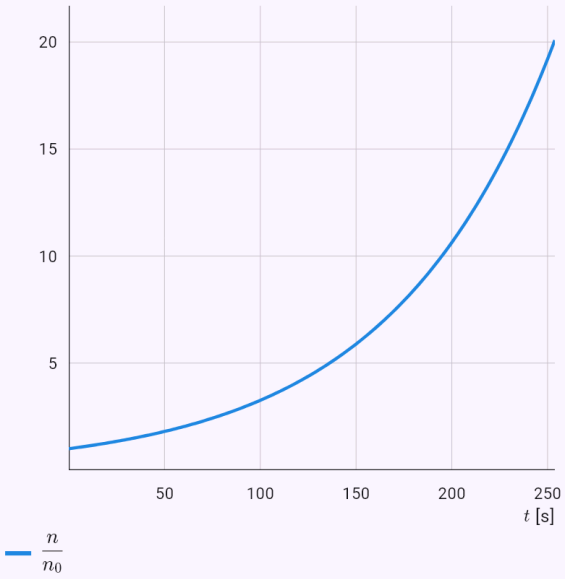
Ergebnis

$$T \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$$

Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben
  $k = 1{,}001, \quad \ell = 10^{-4}\,\mathrm{s}, \quad \beta = 0{,}0065, \quad \tau = 13\,\mathrm{s}$
- Die Leistung eines Reaktors ändert sich exponentiell mit der Periode T = ℓ/(k − 1). Verzögerte Neutronen verlängern die mittlere Generationsdauer etwa tausendfach, deshalb ist ein Reaktor regelbar. Gleichung des Modells: $n(t) = n_0 e^{t/T}, \quad T = \dfrac{\ell}{k-1}$
- Reaktivität: $\rho = \dfrac{k-1}{k} \approx 9{,}99 \cdot 10^{-4}$
- Einsetzen: $T_p = \dfrac{10^{-4}}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$
- Mittlere Generationsdauer mit verzögerten Neutronen: $\ell_{ef} = (1-\beta)\ell + \beta\tau \approx 0{,}0846\,\mathrm{s}$
- Einsetzen: $T = \dfrac{0{,}0846}{1{,}001 - 1} \approx 84{,}6\,\mathrm{s}$
- Ohne verzögerte Neutronen wäre die Periode ein Bruchteil einer Sekunde. Dank ihnen können Regelstäbe auf Leistungsänderungen reagieren.
- Die Leistung wächst mit dieser Periode.

Graph



Wie sich die Größen mit der Zeit ändern.

Der Radius eines kugelförmigen Graphitkerns.

Eingabe: `model(reactor; find=R[m]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=sphere)`

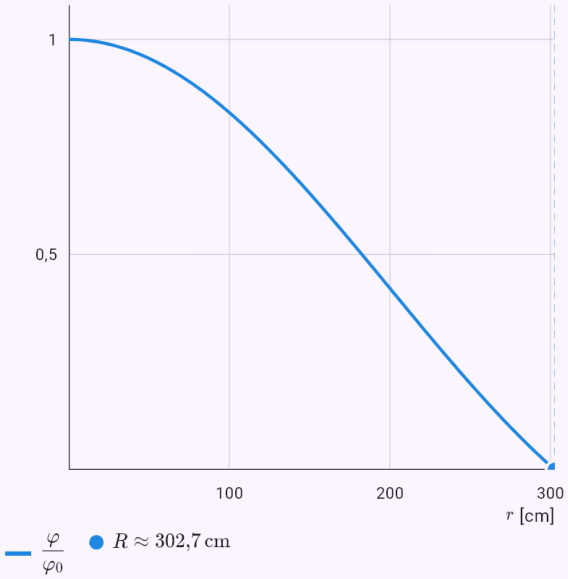
Ergebnis

$$R \approx 3{,}027\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\mathrm{cm}^2$
- Im Eingruppen-Diffusionsmodell muss die Form des Neutronenflusses $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0$ erfüllen. Die Größe des Reaktorkerns folgt daraus, dass der Fluss am Rand auf null fällt. Es ist ein Eigenwertproblem, gedacht für moderierte Gitter von Leistungsreaktoren. Gleichung des Modells: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrischer Parameter: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-2}$
- Gleichung mit Kugelsymmetrie: $\varphi'' + \dfrac{2}{r}\varphi' + B^2\varphi = 0$
- Substitution: $u = r\varphi \Rightarrow u'' + B^2 u = 0 \Rightarrow \varphi = C\dfrac{\sin Br}{r}$
- Randbedingung: $\varphi(R) = 0 \Rightarrow BR = \pi$
- Einsetzen: $R = \dfrac{\pi}{B} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 302{,}7\,\mathrm{cm}$
- Eingruppen-Diffusionsmodell ohne Reflektor: Reale Reaktoren haben einen Reflektor und sind daher kleiner. Eine allgemeine Form führt auf eine partielle Differentialgleichung.
- Einheiten umrechnen: $R \approx 302{,}7\,\mathrm{cm} = 3{,}027\,\mathrm{m}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Kantenlänge eines würfelförmigen Graphitkerns.

Eingabe: `model(reactor; find=a[cm]; kinf=1.07[one]; M2=650[cm2]; mode=core;`

`lattice=graphite; shape=cube)`

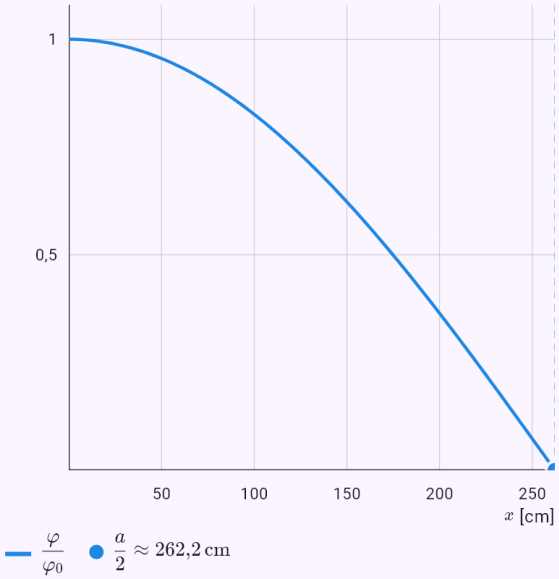
Ergebnis

$$a \approx 524{,}3\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht a; gegeben: $k_\infty = 1{,}07, \quad M^2 = 650\,\text{cm}^2$
- Im Eingruppen-Diffusionsmodell muss die Form des Neutronenflusses $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0$ erfüllen. Die Größe des Reaktorkerns folgt daraus, dass der Fluss am Rand auf null fällt. Es ist ein Eigenwertproblem, gedacht für moderierte Gitter von Leistungsreaktoren. Gleichung des Modells: $\nabla^2\varphi + B^2\varphi = 0, \quad B^2 = \dfrac{k_\infty - 1}{M^2}$
- Geometrischer Parameter: $B^2 = \dfrac{1{,}07 - 1}{650} \approx 1{,}077 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}$
- Separation der Variablen in x, y, z $\varphi = \cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos\dfrac{\pi z}{a}, \quad B^2 = 3\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$
- Einsetzen $a = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{B} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{1{,}077 \cdot 10^{-4}}} \approx 524{,}3\,\text{cm}$
- Eingruppen-Diffusionsmodell ohne Reflektor: Reale Reaktoren haben einen Reflektor und sind daher kleiner. Eine allgemeine Form führt auf eine partielle Differentialgleichung.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Kupferstab mit 100 °C, Enden auf 20 °C – die Mitte nach 10 Minuten.

Eingabe: `model(heatrod; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; L=50[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=25[cm]; t=10[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Ergebnis

$$T \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$$

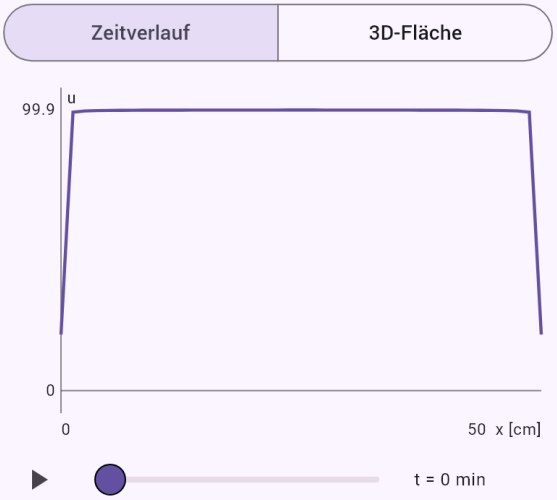
Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_e =$
- Einheiten umrechnen
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad L = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}$
- Die Temperatur in einem Stab folgt der Wärmeleitungsgleichung T_t = α·T_xx; die Temperaturleitfähigkeit α = λ/(ρc) sagt, wie schnell sich die Temperatur ausgleicht. Anfangs hat der Stab überall die Temperatur T_0; ab t = 0 werden seine Enden auf T_e gehalten (oder ein Ende ist isoliert). Die Lösung durch Separation der Variablen ist eine Fourierreihe; jedes Glied klingt exponentiell ab, das erste am langsamsten mit der Zeitkonstante τ. Beide Enden werden auf T_e gehalten; die Stabmitte behält ihre Temperatur am längsten. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = T_e, \quad T(x,0) = T_0$
- Lösung durch Separation der Variablen (Fourierreihe)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{}$
- Zeitkonstante des langsamsten Glieds
  $\tau = \frac{L^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(0{,}5)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2} \approx 216{,}5\,\mathrm{s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken

$$T(x,t) = T_e + (T_0 - T_e)S, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-}$$

- Summe der Reihe im Punkt: $S \approx 0{,}07967$
- Einsetzen: $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}07967 \approx 26{,}37\,^\circ\mathrm{C}$

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Stahlstab mit einem isolierten Ende – wann noch 5 % der Temperaturdifferenz übrig sind.

Eingabe: `model(heatrod; find=teq[min]; alpha=11.7[mm2_s]; L=30[cm]; T0=200[degC];`

`Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=steel)`

Ergebnis

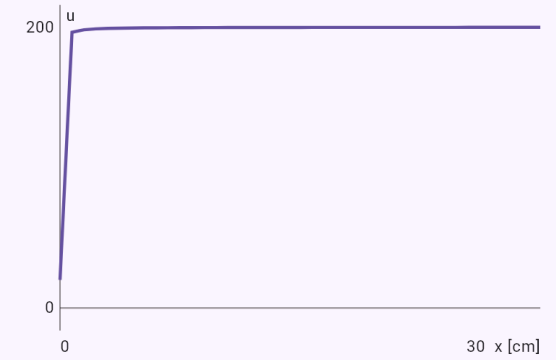
$t \approx 168{,}2\,\text{min}$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm}, \quad T_0 = 200\,^\circ\text{C}, \quad T_e =$
- Einheiten umrechnen
  $\alpha = 11{,}7\,\text{mm}^2/\text{s} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad L = 30\,\text{cm} = 0,$
- Die Temperatur in einem Stab folgt der Wärmeleitungsgleichung T_t = α·T_xx; die Temperaturleitfähigkeit α = λ/(ρc) sagt, wie schnell sich die Temperatur ausgleicht. Anfangs hat der Stab überall die Temperatur T_0; ab t = 0 werden seine Enden auf T_e gehalten (oder ein Ende ist isoliert). Die Lösung durch Separation der Variablen ist eine Fourierreihe; jedes Glied klingt exponentiell ab, das erste am langsamsten mit der Zeitkonstante τ. Das Ende x = 0 wird auf T_e gehalten, das Ende x = L ist isoliert (keine Wärme tritt hindurch) – der Stab verhält sich wie die Hälfte eines doppelt so langen Stabs; das isolierte Ende behält seine Temperatur am längsten. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_e, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \quad T(x,0)$
- Lösung durch Separation der Variablen (Fourierreihe)
  $T = T_e + (T_0 - T_e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)^2 t/\tau} \sin \frac{(2k-}{2}$
- Zeitkonstante des langsamsten Glieds
  $\tau = \frac{(2L)^2}{\alpha \pi^2} = \frac{(2 \cdot 0{,}3)^2}{1{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot \pi^2} \approx 3118\,\text{s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{4}{\pi} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{4}{\pi p}$
- Einsetzen: $t = 3118 \cdot \ln \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05} \approx 10\,090\,\text{s}$
- Das isolierte Ende ist am heißesten. Nach kurzer Zeit überwiegt das erste Glied der Reihe, daher genügt sein Abklingen; die genaue Zeit ergibt sich aus der ganzen Reihe.
- Einheiten umrechnen: $t \approx 10\,090\,\text{s} = 168{,}2\,\text{min}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0 min

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Kupferplatte 30 × 20 cm von 100 °C mit Rändern auf 20 °C – die Temperatur in der Mitte nach 2 Minuten.

Eingabe: `model(plate; find=T[degC]; alpha=117[mm2_s]; a=30[cm]; b=20[cm]; T0=100[degC];`

`Te=20[degC]; x=15[cm]; y=10[cm]; t=2[min]; mode=held; rodMaterial=copper)`

Ergebnis

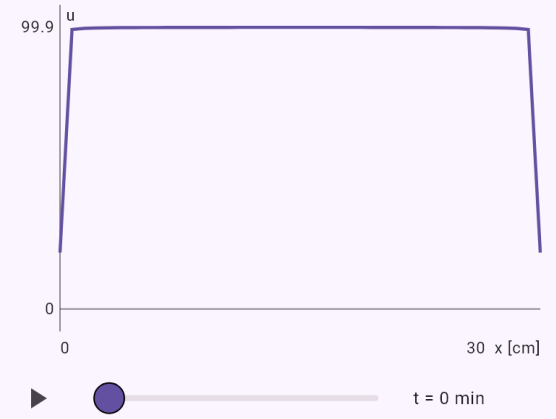
$$T \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$$

Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 10($
- Einheiten umrechnen
  $\alpha = 117\,\mathrm{mm^2/s} = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3$
- Die Temperatur in einer rechteckigen Platte a × b folgt der Wärmeleitungsgleichung T_t = α(T_xx + T_yy). Die Platte hat anfangs überall T_0, ab t = 0 werden ihre Ränder auf T_e gehalten. Die Aufgabe zerfällt in zwei Stäbe: Der verbleibende Anteil der Temperaturdifferenz ist das Produkt der Reihen für einen Stab der Länge a und einen der Länge b – deshalb kühlt eine Platte schneller ab als jeder der beiden Stäbe. Am längsten hält die Mitte der Platte ihre Temperatur. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Zerlegung in zwei Stäbe – Produkt zweier Fourier-Reihen
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_b(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}$
- Zeitkonstante des langsamsten Glieds
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{1}{1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}3^2} + \frac{1}{0{,}2^2}\right)} \approx 2$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $T(x,y,t) = T_e + (T_0 - T_e)S_a(x,t)\,S_b(y,t)$
- Summen beider Reihen im Punkt:
  $S_a \approx 0{,}2731, \quad S_b \approx 0{,}03985$
- Einsetzen
  $T = 20 + (100 - 20) \cdot 0{,}2731 \cdot 0{,}03985 \approx 20{,}87\,^\circ\mathrm{C}$
- Der Graph zeigt die Temperatur entlang der Geraden:
  $y = 10\,\mathrm{cm}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0 min

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Betonplatte mit einem isolierten Rand – nach wie vielen Stunden 5 % der Temperaturdifferenz bleiben.

Eingabe: `model(plate; find=teq[h]; alpha=0.69[mm2_s]; a=40[cm]; b=20[cm]; T0=60[degC];`

```
Te=20[degC]; p=5[pct]; mode=insulated; rodMaterial=concrete)
```

Ergebnis

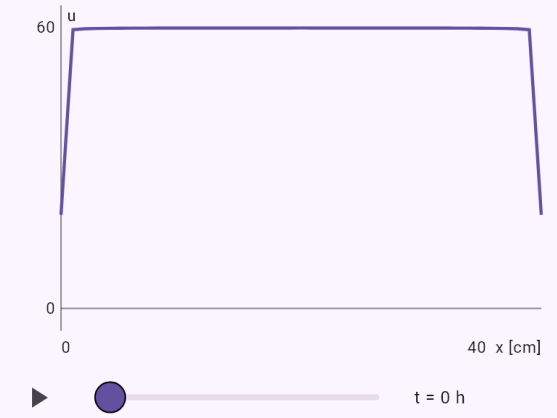
$$t \approx 11{,}35\,\mathrm{h}$$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm}, \quad b = 20\,\mathrm{cm}, \quad T_0 = 60$
- Einheiten umrechnen
  $\alpha = 0{,}69\,\mathrm{mm^2/s} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}, \quad a = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4$
- Die Temperatur in einer rechteckigen Platte a × b folgt der Wärmeleitungsgleichung T_t = α(T_xx + T_yy). Die Platte hat anfangs überall T_0, ab t = 0 werden drei Ränder auf T_e gehalten, der Rand y = b ist isoliert (keine Wärme fließt hindurch). Die Aufgabe zerfällt in zwei Stäbe; der isolierte Rand wirkt wie die Symmetrieachse einer doppelt so hohen Platte. Am längsten hält die Mitte des isolierten Randes ihre Temperatur. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T(0,y) = T(a,y) = T(x,0$
- Zerlegung in zwei Stäbe – Produkt zweier Fourier-Reihen
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = S_a(x,t)\,S_{2b}(y,t), \quad S_L(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\cdot$
- Zeitkonstante des langsamsten Glieds
  $\tau = \frac{1}{\alpha\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2b)^2}\right)} = \frac{1}{6{,}9 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2\left(\frac{1}{0{,}4^2} + \frac{1}{(2\cdot 0{,}2)^2}\right)}$
- Gesuchte Größe ausdrücken
  $\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} \approx \frac{16}{\pi^2} e^{-t/\tau} = p \Rightarrow t \approx \tau \ln \frac{16}{\pi^2 p}$
- Einsetzen: $t = 11\,750 \cdot \ln \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}05} \approx 40\,870\,\mathrm{s}$
- Am heißesten ist die Mitte des isolierten Randes. Nach einer Weile überwiegt das Produkt der ersten Glieder beider Reihen (16/π²)·e^(−t/τ), daher genügt sein Abklingen; die genaue Zeit folgt aus den ganzen Reihen.
- Der Graph zeigt die Temperatur entlang der Geraden: $y = 20\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen: $t \approx 40\,870\,\mathrm{s} = 11{,}35\,\mathrm{h}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Hohe E-Saite einer Gitarre – Grundfrequenz.

Eingabe: `model(string; find=f1[Hz]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m])`

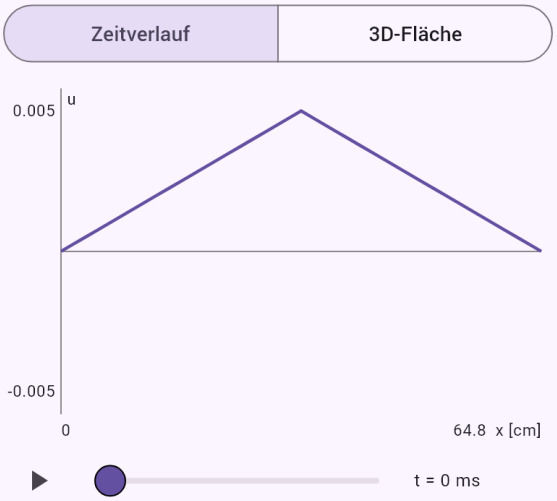
Ergebnis

$$f_1 \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$$

Lösungsweg

- Gesucht f_1; gegeben:
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm}, \quad F = 72\,\mathrm{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m}$
- Einheiten umrechnen
  $L = 64{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}648\,\mathrm{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$
- Eine gespannte Saite mit festen Enden folgt der Wellengleichung u_tt = c²·u_xx; die Wellengeschwindigkeit c = √(F/μ) ergibt sich aus der Spannkraft F und der Längendichte μ. Die Separation der Variablen liefert stehende Wellen sin(nπx/L) mit den Frequenzen f_n = n·c/(2L). Eine gezupfte Saite hat die Form eines Dreiecks – sie wird in eine Fourierreihe entwickelt, und jede Harmonische schwingt mit ihrer eigenen Frequenz. Gleichung des Modells
  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$
- Wellengeschwindigkeit:
  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Eigenschwingungen der Saite (stehende Wellen)
  $X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$
- Einsetzen: $f_1 = \frac{424{,}3}{2 \cdot 0{,}648} \approx 327{,}4\,\mathrm{Hz}$
- Die höheren Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz (Harmonische) – deshalb hat eine Saite eine klare Tonhöhe.

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Gezupfte Saite – Auslenkung in der Mitte nach 1 ms.

Eingabe: `model(string; find=u[mm]; L=64.8[cm]; F=72[N]; mu=0.4[g_m]; p=10[cm]; h=3[mm];`

`x=32.4[cm]; t=1[ms])`

Ergebnis

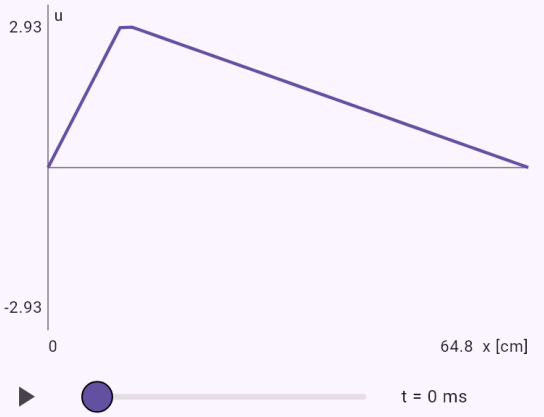
$$u \approx -1{,}774\,\text{mm}$$

Lösungsweg

- Gesucht u; gegeben
  $L = 64{,}8\,\text{cm}, \quad F = 72\,\text{N}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m}, \quad p = 10\,\text{cm}$
- Einheiten umrechnen
  $L = 64{,}8\,\text{cm} = 0{,}648\,\text{m}, \quad \mu = 0{,}4\,\text{g/m} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/}$
- Eine gespannte Saite mit festen Enden folgt der Wellengleichung u_tt = c²·u_xx; die Wellengeschwindigkeit c = √(F/μ) ergibt sich aus der Spannkraft F und der Längendichte μ. Die Separation der Variablen liefert stehende Wellen sin(nπx/L) mit den Frequenzen f_n = n·c/(2L). Eine gezupfte Saite hat die Form eines Dreiecks – sie wird in eine Fourierreihe entwickelt, und jede Harmonische schwingt mit ihrer eigenen Frequenz. Gleichung des Modells
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Wellengeschwindigkeit:
  $$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{72}{4 \cdot 10^{-4}}} \approx 424{,}3\,\text{m/s}$$
- Eigenschwingungen der Saite (stehende Wellen)
  $$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$$
- Gezupfte Saite – Fourierreihe
  $$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 p(L-p)} \sin\frac{n\pi p}{L}, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos$$
- Einsetzen: $u(0{,}324, 0{,}001) \approx -0{,}001774\,\text{m}$
- Nach einer Periode kehrt die Form der Saite zurück:
  $$T = \frac{2L}{c} \approx 0{,}003055\,\text{s}$$
- Einheiten umrechnen: $u \approx -0{,}001774\,\text{m} = -1{,}774\,\text{mm}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Trommel – Frequenz der Mode (1, 1) mit einem Knotendurchmesser.

Eingabe: `model(membrane; find=fmn[Hz]; a=33[cm]; T=3000[N_m]; sigma=0.26[kg_m2]; m=1[one];`

```
n=1[one])
```

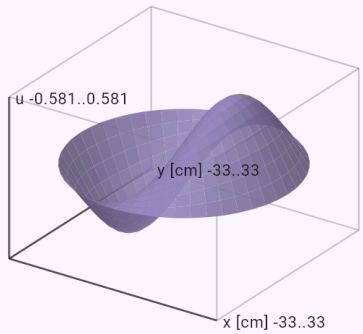
Ergebnis

$$f_{mn} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Lösungsweg

- Gesucht f_{mn}; gegeben
  $a = 33\,\mathrm{cm}, \quad T = 3000\,\mathrm{N/m}, \quad \sigma = 0{,}26\,\mathrm{kg/m^2}, \quad m =$
- Einheiten umrechnen: $a = 33\,\mathrm{cm} = 0{,}33\,\mathrm{m}$
- Eine am Rand eingespannte Kreismembran (ein Trommelfell) folgt der Wellengleichung u_tt = c²·Δu mit der Geschwindigkeit c = √(T/σ). In Polarkoordinaten trennen sich die Variablen: Der Winkelanteil ist cos(mφ), der radiale eine Bessel-Funktion J_m(kr). Die Randbedingung J_m(ka) = 0 ergibt k = j_mn/a, wobei j_mn die n-te Nullstelle von J_m ist, und die Frequenzen f_mn = j_mn·c/(2πa). Die Mode (m, n) hat m Knotendurchmesser und n − 1 Knotenkreise. Gleichung des Modells
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad u(a,\varphi,t) = 0$$
- Wellengeschwindigkeit in der Membran:
  $$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{3000}{0{,}26}} \approx 107{,}4\,\mathrm{m/s}$$
- Separation in Polarkoordinaten – Bessel-Gleichung
  $u = R(r)\cos(m\varphi)\cos(\omega t): \quad r^2 R'' + rR' + \left(k^2 r^2 - \right.$
- Der Membranrand ist eingespannt:
  $$J_1(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{11}}{a}, \quad j_{11} \approx 3{,}83171$$
- Einsetzen: $f_{11} = \dfrac{3{,}832 \cdot 107{,}4}{2\pi \cdot 0{,}33} \approx 198{,}5\,\mathrm{Hz}$
- Die höheren Moden sind keine ganzzahligen Vielfachen der Grundmode. Deshalb hat eine Trommel keine so klare Tonhöhe wie eine Saite.
  $$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1{,}59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2{,}14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2{,}3$$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Reichweite eines Wurfs im Vakuum.

Eingabe: `model(ballistics; find=R[m]; v0=20[m_s]; alpha=45[deg]; mode=vacuum)`

Ergebnis

$$R \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben: $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 45\,^\circ$
- Ohne Luftwiderstand zerfällt die Bewegung in zwei unabhängige: waagerecht gleichförmig, senkrecht gleichmäßig beschleunigt. Die Bahn ist eine Parabel, und alle Werte folgen aus genauen Formeln. Gleichung des Modells: $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit

  $v_{0x} = 20 \cos 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 45^\circ \approx 14{,}14\,\mathrm{m/s}$
- Flugzeit

  $$T = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2g(h_0 - h_k)}}{g} = \frac{14{,}14 + \sqrt{(14{,}14)^2 + 2 \cdot 9{,}81(0-0)}}{9{,}81} \approx 2{,}883\,\mathrm{s}$$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $R = v_{0x} T$
- Einsetzen: $R = 14{,}14 \cdot 2{,}883 \approx 40{,}77\,\mathrm{m}$
- Bei gleicher Abwurf- und Auftreffhöhe gelten die Schulformeln

  $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
  $$H - h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$
  $$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

- Die größte Reichweite ergibt sich bei 45°; die Winkel α und 90° − α ergeben dieselbe Reichweite.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Auftreffgeschwindigkeit bei einem Wurf aus der Höhe.

Eingabe: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=20[m_s]; alpha=30[deg]; h0=10[m]; mode=vacuum)`

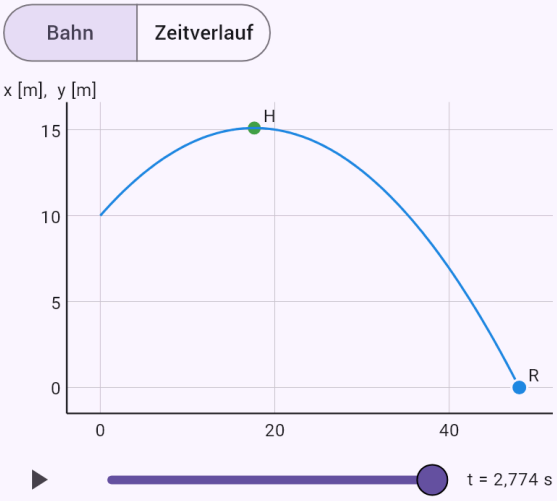
Ergebnis

$$v_k \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_k; gegeben:
  $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 10\,\mathrm{m}$
- Ohne Luftwiderstand zerfällt die Bewegung in zwei unabhängige: waagerecht gleichförmig, senkrecht gleichmäßig beschleunigt. Die Bahn ist eine Parabel, und alle Werte folgen aus genauen Formeln. Gleichung des Modells: $x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit
  $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ \approx 17{,}32\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 20 \sin 30^\circ \approx 10\,\mathrm{m/s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_k)}$
- Einsetzen
  $v_k = \sqrt{(20)^2 + 2 \cdot 9{,}81(10 - 0)} \approx 24{,}42\,\mathrm{m/s}$
- Das folgt aus der Erhaltung der mechanischen Energie und hängt nicht vom Winkel ab.

Graph



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Zwei Abschusswinkel für 200 m Entfernung.

Eingabe: `model(ballistics; find=alpha; v0=50[m_s]; d=200[m]; mode=aim)`

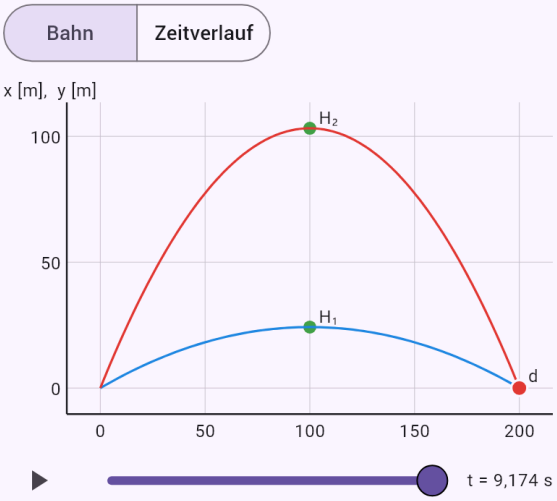
Ergebnis

$$\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ$$
$$\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ$$

Lösungsweg

- Gesucht α; gegeben: $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}, \quad d = 200\,\mathrm{m}$
- Entfernung und Höhe des Ziels werden in die Bahngleichung eingesetzt. Mit u = tan α entsteht eine quadratische Gleichung, meist mit zwei Lösungen: einer flachen und einer steilen Bahn. Gleichung des Modells:
  $h_k = h_0 + d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$
- Quadratische Gleichung für tan α
  $u = \tan\alpha: \quad au^2 - du + c = 0$
  $a = \frac{gd^2}{2v_0^2} = \frac{9{,}81\cdot(200)^2}{2(50)^2} \approx 78{,}48$
  $c = a + h_k - h_0 \approx 78{,}48$
- Diskriminante:
  $D = d^2 - 4ac = (200)^2 - 4\cdot 78{,}48\cdot 78{,}48 \approx 15\,360$
- Lösungen: $u_{1,2} = \frac{d \mp \sqrt{D}}{2a} \approx 0{,}4845;\ 2{,}064$
- Lösung
  $\alpha_1 \approx 25{,}85^\circ, \quad T_1 \approx 4{,}445\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Lösung
  $\alpha_2 \approx 64{,}15^\circ, \quad T_2 \approx 9{,}174\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 50\,\mathrm{m/s}$
- Auf ebenem Gelände ergeben beide Winkel zusammen 90°.

Graph



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Reichweite eines Fußballs mit Luftwiderstand und Vergleich mit dem Vakuum.

Eingabe: `model(ballistics; find=R[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Ergebnis

$$R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$$

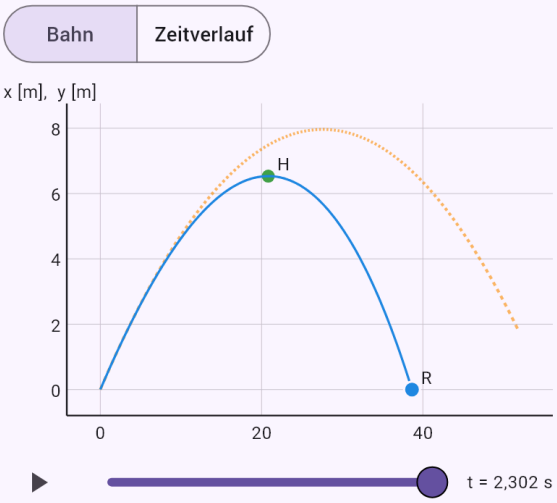
Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ‹
- Einheiten umrechnen
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm^2} = 0{,}038\,\mathrm{m^2}$
- Auf den Körper wirken die Schwerkraft und der Luftwiderstand entgegen der Geschwindigkeit relativ zur Luft, sodass auch der Wind in die Gleichungen eingeht. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gekoppelt und es gibt keine genaue Lösung, daher wird das System numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit
  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Das System von sechs Gleichungen für x, y, z und die Geschwindigkeitskomponenten wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; Anzahl der Schritte:
  $N = 1807$
- Flugverlauf

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	0	25
0,46	9,358	4,405	20,31
0,921	17,72	6,367	17,37
1,38	25,32	6,163	15,99
1,84	32,28	3,985	15,96
2,3	38,65	0	16,88

- Wichtige Werte
  $H \approx 6{,}534\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}302\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}65\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}88\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}44^\circ$
- Derselbe Wurf im Vakuum
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$
- Anteil der Reichweite in Luft an der im Vakuum:
  $\frac{R}{R_v} \approx 70\,\%$

Graph



Die durchgezogene Linie ist die Bahn in Luft, die gestrichelte die Bahn im Vakuum. Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Seitliche Abweichung eines Balls im Wind, mit Seiten- und Draufsicht.

Eingabe: `model(ballistics; find=z[m]; v0=25[m_s]; alpha=30[deg]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; wc=5[m_s]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Ergebnis

$$z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht z; gegeben

  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g}, \quad$ ‹

- Einheiten umrechnen

  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm^2} = 0{,}038\,\mathrm{m^2}$

- Auf den Körper wirken die Schwerkraft und der Luftwiderstand entgegen der Geschwindigkeit relativ zur Luft, sodass auch der Wind in die Gleichungen eingeht. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gekoppelt und es gibt keine genaue Lösung, daher wird das System numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$

- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit

  $v_{0x} = 25\cos 30^\circ \approx 21{,}65\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 25\sin 30^\circ \approx 12{,}5\,\mathrm{m/s}$

- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$

- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$

- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}789$

- Das System von sechs Gleichungen für x, y, z und die Geschwindigkeitskomponenten wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; Anzahl der Schritte:
  $N = 1804$

- Flugverlauf

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	0	25	0
0,46	9,33	4,393	20,27	0,143
0,919	17,65	6,346	17,33	0,519
1,38	25,19	6,139	15,96	1,07
1,84	32,09	3,968	15,95	1,78
2,3	38,4	0	16,89	2,62

- Wichtige Werte
  $H \approx 6{,}51\,\mathrm{m}$
  $T \approx 2{,}298\,\mathrm{s}$
  $R \approx 38{,}4\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 16{,}89\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 38{,}29^\circ$
  $z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

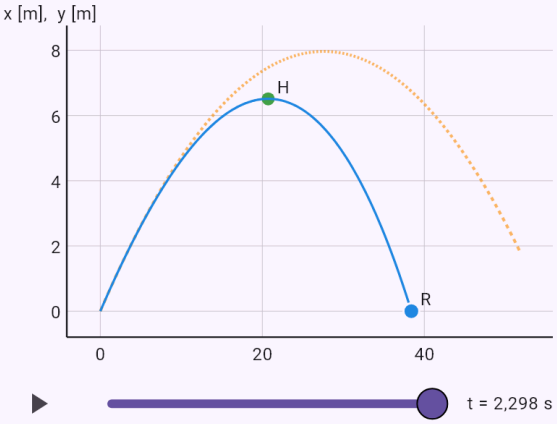
- Derselbe Wurf im Vakuum
  $R_v \approx 55{,}17\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 7{,}964\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 2{,}548\,\mathrm{s}$

- Anteil der Reichweite in Luft an der im Vakuum:
  $\frac{R}{R_v} \approx 69{,}6\,\%$

- Einfluss des Windes: $\Delta R \approx -0{,}2474\,\mathrm{m}, \quad z \approx 2{,}621\,\mathrm{m}$

Graph

Seitenansicht | Draufsicht | Zeitverlauf



Die durchgezogene Linie ist die Bahn in Luft, die gestrichelte die Bahn im Vakuum. Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Sportliches Kleinkaliber: Geschwindigkeit am Flugende, G1-Kurve.

Eingabe: `model(ballistics; find=v[m_s]; v0=326[m_s]; alpha=0.5[deg]; h0=1.4[m]; m=2.59[g]; S=25.2[mm2]; i=0.96[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=drag; draglaw=quadratic;`

`projectile=smallbore; cdlaw=bullet; air=constant; coriolis=off)`

Ergebnis

$$v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

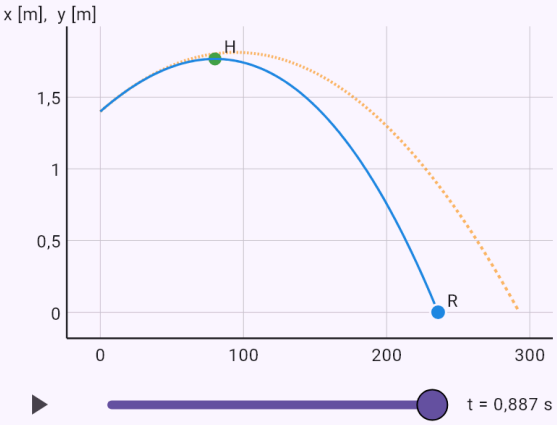
- Gesucht v_k; gegeben
  $v_0 = 326\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 0{,}5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}4\,\mathrm{m}, \quad m = 2{,}59\,\mathrm{g}$
- Einheiten umrechnen
  $m = 2{,}59\,\mathrm{g} = 0{,}00259\,\mathrm{kg}, \quad S = 25{,}2\,\mathrm{mm}^2 = 2{,}52 \cdot 10^{-}$
- Auf den Körper wirken die Schwerkraft und der Luftwiderstand entgegen der Geschwindigkeit relativ zur Luft, sodass auch der Wind in die Gleichungen eingeht. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gekoppelt und es gibt keine genaue Lösung, daher wird das System numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit
  $v_{0x} = 326\cos 0{,}5^\circ \approx 326\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 326\sin 0{,}5^\circ \approx 2{,}845\,\mathrm{m/s}$
- Machzahl und Widerstandsbeiwert beim Start:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 0{,}958, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}4031$
- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 6{,}223 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 80{,}76\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 26{,}03$
- Das System von sechs Gleichungen für x, y, z und die Geschwindigkeitskomponenten wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; Anzahl der Schritte:
  $N = 73$
- Flugverlauf

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,4	326
0,177	54,58	1,727	292,2
0,355	104,4	1,729	270,3
0,532	150,8	1,431	253,5
0,71	194,5	0,8512	239,6
0,887	236	0	227,7

- Wichtige Werte
  $H \approx 1{,}767\,\mathrm{m}$
  $T \approx 0{,}8874\,\mathrm{s}$
  $R \approx 236\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 227{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 1{,}394^\circ$
- Derselbe Wurf im Vakuum
  $R_v \approx 292{,}7\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 1{,}812\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 0{,}8979\,\mathrm{s}$
- Anteil der Reichweite in Luft an der im Vakuum:
  $\frac{R}{R_v} \approx 80{,}6\,\%$
- Der Widerstandsbeiwert stammt aus einer Näherungskurve nach der Machzahl, beim Geschoss die G1-Kurve mal Formfaktor. Herstellertabellen haben Vorrang. Der Drall des Geschosses wird nicht berücksichtigt.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die durchgezogene Linie ist die Bahn in Luft, die gestrichelte die Bahn im Vakuum. Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Jagdbüchse: Reichweite mit der Luftdichte nach Höhe.

Eingabe: `model(ballistics; find=R[m]; v0=860[m_s]; alpha=5[deg]; h0=1.5[m]; m=9.72[g]; S=48.1[mm2]; i=0.554[one]; alt=300[m]; mode=drag; draglaw=quadratic; projectile=rifle;`

cdlaw=bullet; air=altitude; coriolis=off)

Ergebnis

$$R \approx 2365\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

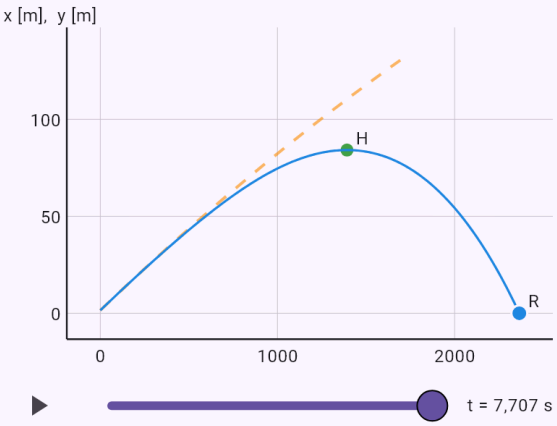
- Gesucht R; gegeben
  $v_0 = 860\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 5\,^\circ, \quad h_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad m = 9{,}72\,\mathrm{g},$
- Einheiten umrechnen
  $m = 9{,}72\,\mathrm{g} = 0{,}00972\,\mathrm{kg}, \quad S = 48{,}1\,\mathrm{mm}^2 = 4{,}81 \cdot 10^{-}$
- Auf den Körper wirken die Schwerkraft und der Luftwiderstand entgegen der Geschwindigkeit relativ zur Luft, sodass auch der Wind in die Gleichungen eingeht. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gekoppelt und es gibt keine genaue Lösung, daher wird das System numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit
  $v_{0x} = 860 \cos 5^\circ \approx 856{,}7\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 860 \sin 5^\circ \approx 74{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Luftdichte nach der Standardatmosphäre:
  $\rho(h_n + h_0) \approx 1{,}19\,\mathrm{kg/m^3}$
- Machzahl und Widerstandsbeiwert beim Start:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 2{,}536, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}2979$
- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 8{,}527 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg/m}$
- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 151{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 66{,}14$
- Das System von sechs Gleichungen für x, y, z und die Geschwindigkeitskomponenten wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; Anzahl der Schritte:
  $N = 335$
- Flugverlauf

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]
0	0	1,5	860
1,54	847,3	66,67	367,7
3,08	1325	83,84	274
4,62	1715	76,3	236,4
6,17	2058	47,72	211,3
7,71	2365	0	192,8

- Wichtige Werte
  $H \approx 84{,}15\,\mathrm{m}$
  $T \approx 7{,}707\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2365\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 192{,}8\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 11{,}02^\circ$
- Derselbe Wurf im Vakuum
  $R_v \approx 13\,110\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 287{,}8\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 15{,}3\,\mathrm{s}$
- Anteil der Reichweite in Luft an der im Vakuum:
  $\frac{R}{R_v} \approx 18\,\%$
- Der Widerstandsbeiwert stammt aus einer Näherungskurve nach der Machzahl, beim Geschoss die G1-Kurve mal Formfaktor. Herstellertabellen haben Vorrang. Der Drall des Geschosses wird nicht berücksichtigt.
- Im Flug sank die Geschwindigkeit unter die Schallgeschwindigkeit; dort ändert sich der Widerstandsbeiwert am stärksten.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die durchgezogene Linie ist die Bahn in Luft, die gestrichelte die Bahn im Vakuum. Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Eine Kanonenkugel aus der Schulphysik: Abweichung durch die Corioliskraft.

Eingabe: model(ballistics; find=z[m]; v0=439[m_s]; alpha=30[deg]; h0=1[m]; m=5580[g]; S=10200[mm2]; i=1[one]; rho=1.225[kg_m3]; lat=50[deg]; az=0[deg]; mode=drag;

`draglaw=quadratic; projectile=cannonball; cdlaw=sphere; air=constant; coriolis=on)`

Ergebnis

$$z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

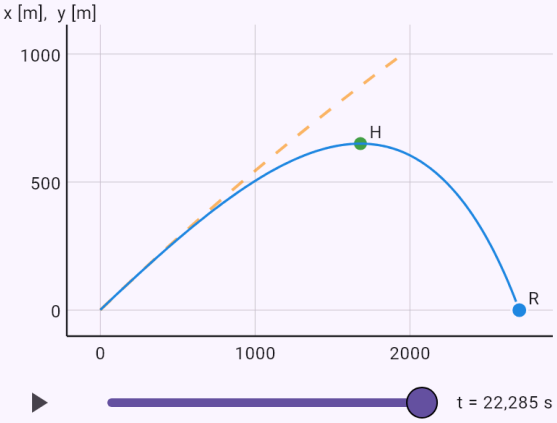
- Gesucht z; gegeben
  $v_0 = 439\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30\,^\circ, \quad h_0 = 1\,\mathrm{m}, \quad m = 5580\,\mathrm{g},$
- Einheiten umrechnen
  $m = 5580\,\mathrm{g} = 5{,}58\,\mathrm{kg}, \quad S = 10\,200\,\mathrm{mm^2} = 0{,}0102\,\mathrm{m^2}$
- Auf den Körper wirken die Schwerkraft und der Luftwiderstand entgegen der Geschwindigkeit relativ zur Luft, sodass auch der Wind in die Gleichungen eingeht. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gekoppelt und es gibt keine genaue Lösung, daher wird das System numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w}) - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$
- Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit
  $v_{0x} = 439 \cos 30^\circ \approx 380{,}2\,\mathrm{m/s}$
  $v_{0y} = 439 \sin 30^\circ \approx 219{,}5\,\mathrm{m/s}$
- Machzahl und Widerstandsbeiwert beim Start:
  $M_0 = \frac{v_0}{a} \approx 1{,}29, \quad c_d(M_0) \approx 0{,}9795$
- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}006119\,\mathrm{kg/m}$
- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 137{,}1\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 21{,}54$
- Winkelgeschwindigkeit der Erde (Corioliskraft):
  $\Omega \approx 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
- Das System von sechs Gleichungen für x, y, z und die Geschwindigkeitskomponenten wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; Anzahl der Schritte:
  $N = 1023$
- Flugverlauf

t [s]	x [m]	y [m]	v [m/s]	z [m]
0	0	1	439	0
4,46	1014	509,8	172,8	0,122
8,91	1617	648,6	115	0,408
13,4	2069	580,7	95,94	0,839
17,8	2425	353	97,3	1,41
22,3	2706	0	106,4	2,12

- Wichtige Werte
  $H \approx 650{,}1\,\mathrm{m}$
  $T \approx 22{,}28\,\mathrm{s}$
  $R \approx 2706\,\mathrm{m}$
  $v_k \approx 106{,}4\,\mathrm{m/s}$
  $\varphi \approx 58{,}47^\circ$
  $z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Derselbe Wurf im Vakuum
  $R_v \approx 17\,020\,\mathrm{m}, \quad H_v \approx 2457\,\mathrm{m}, \quad T_v \approx 44{,}75\,\mathrm{s}$
- Anteil der Reichweite in Luft an der im Vakuum:
  $\frac{R}{R_v} \approx 15{,}9\,\%$
- Einfluss der Corioliskraft
  $\Delta R \approx -6{,}153 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad \Delta z \approx 2{,}119\,\mathrm{m}$
- Der Widerstandsbeiwert stammt aus einer Näherungskurve nach der Machzahl, beim Geschoss die G1-Kurve mal Formfaktor. Herstellertabellen haben Vorrang. Der Drall des Geschosses wird nicht berücksichtigt.
- Im Flug sank die Geschwindigkeit unter die Schallgeschwindigkeit; dort ändert sich der Widerstandsbeiwert am stärksten.

Graph

Seitenansicht | Draufsicht | Zeitverlauf



Die durchgezogene Linie ist die Bahn in Luft, die gestrichelte die Bahn im Vakuum. Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Flacher und steiler Winkel für einen Ball mit Luftwiderstand.

Eingabe: `model(ballistics; find=alpha; v0=25[m_s]; d=35[m]; h0=0[m]; m=430[g]; S=38000[mm2]; cd=0.22[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=aimdrag; draglaw=quadratic;`

`projectile=ball; cdlaw=constant; air=constant; coriolis=off)`

Ergebnis

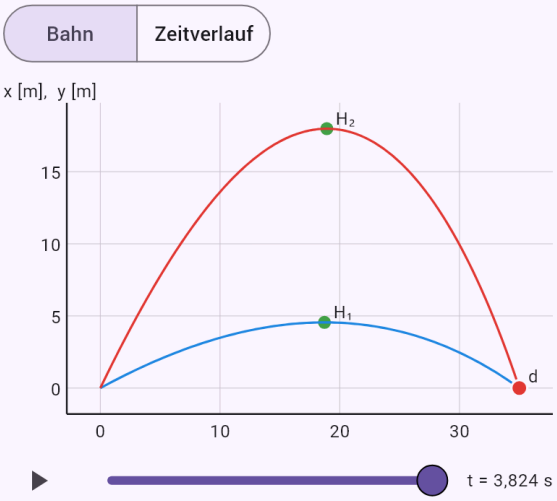
$\alpha_1 \approx 24{,}3°$

$\alpha_2 \approx 59{,}84°$

Lösungsweg

- Gesucht α; gegeben
  $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad d = 35\,\mathrm{m}, \quad h_0 = 0\,\mathrm{m}, \quad m = 430\,\mathrm{g},$
- Einheiten umrechnen
  $m = 430\,\mathrm{g} = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad S = 38\,000\,\mathrm{mm^2} = 0{,}038\,\mathrm{m^2}$
- Mit Luftwiderstand gibt es keine Formel. Die Rechnung probiert verschiedene Winkel und verfolgt, wie hoch der Körper in der Entfernung des Ziels fliegt. Die Winkel, bei denen er genau durch das Ziel geht, findet die Intervallhalbierung. Gleichung des Modells:
  $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - k|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$
- Luftwiderstandskonstante (Widerstandsbeiwert):
  $k = \frac{1}{2}\rho c_d S \approx 0{,}005121\,\mathrm{kg/m}$
- Grenzgeschwindigkeit des freien Falls:
  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 28{,}7\,\mathrm{m/s}$
- Luftwiderstand im Verhältnis zur Schwerkraft beim Start:
  $\frac{F_o}{F_g} \approx 0{,}7587$
- Die Winkel wurden mit dem Schießverfahren gefunden: Intervallhalbierung nach der Höhe in der Entfernung d, also als Nullstelle von $y(d;\,\alpha) - h_k = 0$
- Lösung
  $\alpha_1 \approx 24{,}3°, \quad T_1 \approx 1{,}922\,\mathrm{s}, \quad v_1 \approx 17{,}2\,\mathrm{m/s}$
- Lösung
  $\alpha_2 \approx 59{,}84°, \quad T_2 \approx 3{,}824\,\mathrm{s}, \quad v_2 \approx 17{,}98\,\mathrm{m/s}$

Graph



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Überziehgeschwindigkeit eines Leichtflugzeugs.

Eingabe: `model(aircraft; find=vs[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; CLmax=1.54[one];`

`rho=1.225[kg_m3]; mode=level; aircraft=light; air=constant)`

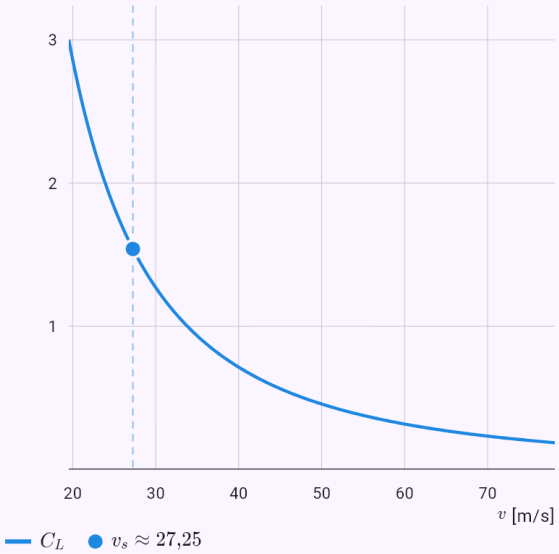
Ergebnis

$$v_s \approx 98{,}11\,\mathrm{km/h}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_s; gegeben
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad C_{L,max} = 1{,}54, \quad \rho = 1$
- Im Horizontalflug ist der Auftrieb gleich dem Gewicht und der Schub gleich dem Widerstand. Der Widerstand hat zwei Teile: Der schädliche wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, der induzierte nimmt mit ihr ab, also gibt es eine Geschwindigkeit des geringsten Widerstands. Gleichung des Modells:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Gewicht des Flugzeugs:
  $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rhoSC_{L,max}}}
- Einsetzen
  $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}54}} \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s}$
- Einheiten umrechnen: $v_s \approx 27{,}25\,\mathrm{m/s} = 98{,}11\,\mathrm{km/h}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Widerstand im Horizontalflug und Diagramm des schädlichen und induzierten Widerstands.

Eingabe: `model(aircraft; find=D[kN]; v=200[km_h]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; CLmax=1.54[one]; mode=level; aircraft=light;`

`air=constant; ground=off)`

Ergebnis

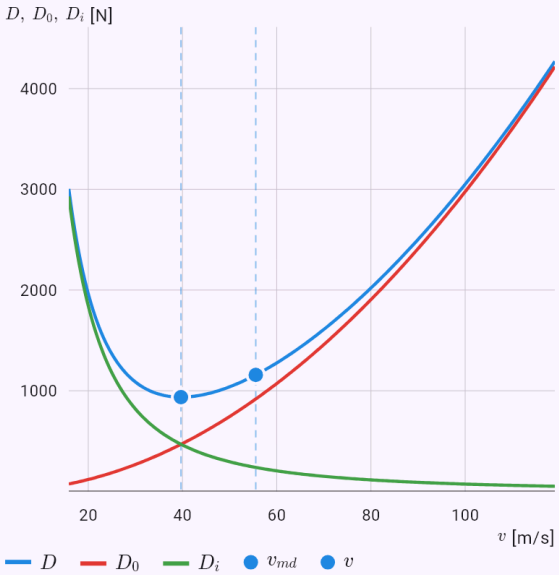
$$D \approx 1{,}158\,\mathrm{kN}$$

Lösungsweg

- Gesucht D; gegeben
  $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m^2}, \quad b = 1$
- Einheiten umrechnen: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- Im Horizontalflug ist der Auftrieb gleich dem Gewicht und der Schub gleich dem Widerstand. Der Widerstand hat zwei Teile: Der schädliche wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, der induzierte nimmt mit ihr ab, also gibt es eine Geschwindigkeit des geringsten Widerstands. Gleichung des Modells:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Gewicht des Flugzeugs:
  $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Flügelstreckung: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Faktor des induzierten Widerstands (Oswald-Faktor e, Polare): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Staudruck
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (55{,}56)^2 \approx 1890\,\mathrm{Pa}$
- Nötiger Auftriebsbeiwert:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{11\,350}{1890 \cdot 16{,}2} \approx 0{,}3706$
- Schädlicher und induzierter Widerstand:
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 918{,}8\,\mathrm{N}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 239\,\mathrm{N}$
- Gleitzahl bei dieser Geschwindigkeit:
  $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 9{,}803$

- Gesuchte Größe ausdrücken: $D = D_0 + D_i$
- Einsetzen: $D \approx 1158\,\mathrm{N}$
- Einheiten umrechnen: $D \approx 1158\,\mathrm{N} = 1{,}158\,\mathrm{kN}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Ekranoplan KM: wie viel Widerstand der Bodeneffekt spart.

Eingabe: `model(aircraft; find=D[kN]; v=430[km_h]; m=544000[kg]; S=662.5[m2]; b=37.6[m]; CD0=0.03[one]; e=0.8[one]; CLmax=1.5[one]; hw=4[m]; rho=1.225[kg_m3]; mode=level;`

`aircraft=km; air=constant; ground=on)`

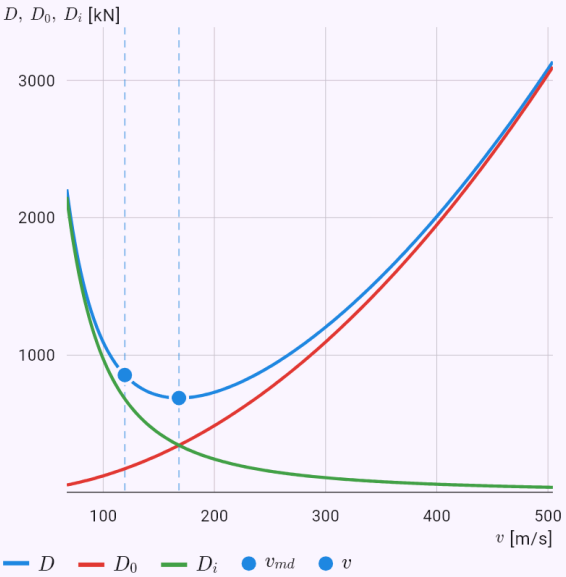
Ergebnis

$$D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$$

Lösungsweg

- Gesucht D; gegeben
  $v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad S = 662{,}5\,\mathrm{m^2}, \quad b$
- Einheiten umrechnen: $v = 430\,\mathrm{km/h} = 119{,}4\,\mathrm{m/s}$
- Im Horizontalflug ist der Auftrieb gleich dem Gewicht und der Schub gleich dem Widerstand. Der Widerstand hat zwei Teile: Der schädliche wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, der induzierte nimmt mit ihr ab, also gibt es eine Geschwindigkeit des geringsten Widerstands. Gleichung des Modells:
  $L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = W, \quad D = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0} + k C_L^2\right)$
- Gewicht des Flugzeugs:
  $W = mg = 544\,000 \cdot 9{,}81 \approx 5337\,\mathrm{kN}$
- Flügelstreckung: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(37{,}6)^2}{662{,}5} \approx 2{,}134$
- Faktor des induzierten Widerstands (Oswald-Faktor e, Polare): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}134} \approx 0{,}1865$
- Der Bodeneffekt verringert den induzierten Widerstand
  $\phi_g = \frac{(16h_w/b)^2}{1 + (16h_w/b)^2} \approx 0{,}7434, \quad k_g = \phi_g k \approx 0{,}1386$
- Auftriebszuwachs beim gleichen Anstellwinkel (Schätzung nach der Traglinientheorie)
  $\frac{C_{L\alpha,g}}{C_{L\alpha}} \approx \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + 2\phi_g/\Lambda} \approx 1{,}142$
- Empirische Formel von McCormick für gewöhnliche Flügel. Bei einem Flügel geringer Streckung mit Endscheiben wie beim Ekranoplan ist der wirkliche Effekt stärker.
- Staudruck
  $q = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot (119{,}4)^2 \approx 8739\,\mathrm{Pa}$
- Nötiger Auftriebsbeiwert:
  $C_L = \frac{W}{qS} = \frac{5\,337\,000}{8739 \cdot 662{,}5} \approx 0{,}9218$
- Schädlicher und induzierter Widerstand
  $D_0 = qSC_{D0} \approx 173{,}7\,\mathrm{kN}, \quad D_i = qSkC_L^2 \approx 681{,}9\,\mathrm{kN}$
- Gleitzahl bei dieser Geschwindigkeit:
  $E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \approx 6{,}238$
- Widerstandsersparnis durch den Bodeneffekt:
  $\Delta D \approx 235{,}4\,\mathrm{kN}, \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 21{,}6\,\%$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $D = D_0 + D_i$
- Einsetzen: $D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}$
- Einheiten umrechnen: $D \approx 855\,600\,\mathrm{N} = 855{,}6\,\mathrm{kN}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Startrollstrecke eines Leichtflugzeugs mit Diagramm von Geschwindigkeit und Weg.

Eingabe: `model(aircraft; find=s[m]; m=1157[kg]; S=16.2[m2]; b=11[m]; CD0=0.03[one]; e=0.75[one]; rho=1.225[kg_m3]; dCD=0.022[one]; CLto=1.73[one]; CLg=0.4[one]; kv=1.1[one];`

```
T=2.1[kN]; mu=0.03[one]; mode=takeoff; aircraft=light; air=constant; ground=off)
```

Ergebnis

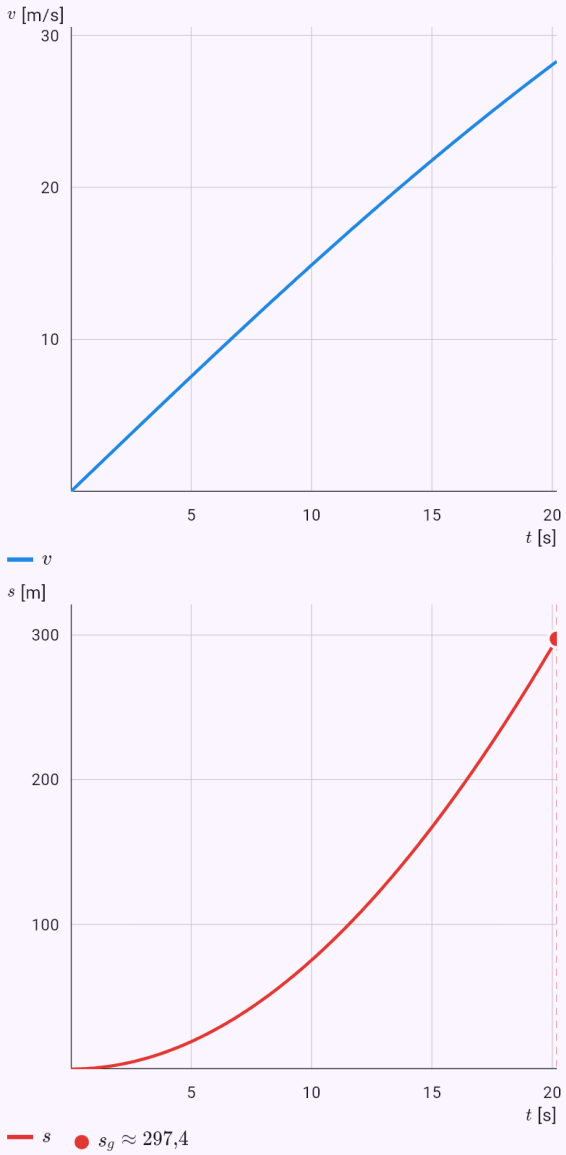
$$s_g \approx 297{,}4\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht s_g; gegeben
  $m = 1157\,\mathrm{kg}, \quad S = 16{,}2\,\mathrm{m}^2, \quad b = 11\,\mathrm{m}, \quad C_{D0} = 0{,}0$
- Einheiten umrechnen: $T = 2{,}1\,\mathrm{kN} = 2100\,\mathrm{N}$
- Das Flugzeug beschleunigt aus dem Stand auf die Abhebegeschwindigkeit. Es wirken Schub, Luftwiderstand und Rollreibung, die mit wachsendem Auftrieb abnimmt. Die Gleichung wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst; der Schub ist ein konstanter Mittelwert. Gleichung des Modells
  $m\dot{v} = T - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_D - \mu\left(W - \frac{1}{2}\rho v_a^2 S C_{Lg}\right), \quad v_a = v$
- Gewicht des Flugzeugs:
  $W = mg = 1157 \cdot 9{,}81 \approx 11{,}35\,\mathrm{kN}$
- Überziehgeschwindigkeit
  $v_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11\,350}{1{,}225 \cdot 16{,}2 \cdot 1{,}73}} \approx 25{,}71\,\mathrm{m/s}$
- Abhebegeschwindigkeit gegenüber der Luft:
  $v_{LOF} = k_v v_s = 1{,}1 \cdot 25{,}71 \approx 28{,}29\,\mathrm{m/s}$
- Flügelstreckung: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(11)^2}{16{,}2} \approx 7{,}469$
- Faktor des induzierten Widerstands (Oswald-Faktor e, Polare): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}75 \cdot 7{,}469} \approx 0{,}05682$
- Widerstandsbeiwert auf der Bahn:
  $C_D = C_{D0} + \Delta C_D + k C_{Lg}^2 \approx 0{,}06109$
- Beschleunigung am Anfang und am Ende
  $a_0 \approx 1{,}521\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_k \approx 1{,}184\,\mathrm{m/s^2}$
- Die Gleichung wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst, Schritte: $N = 2172$
- Verlauf auf der Bahn

t [s]	s [m]	v [m/s]
0	0	0
4,04	12,38	6,12
8,08	49,25	12,11
12,1	109,9	17,87
16,2	193,1	23,28
20,2	297,4	28,29

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Kurvenradius bei 30° Querlage.

Eingabe: `model(aircraft; find=R[m]; v=200[km_h]; phi=30[deg]; mode=turn)`

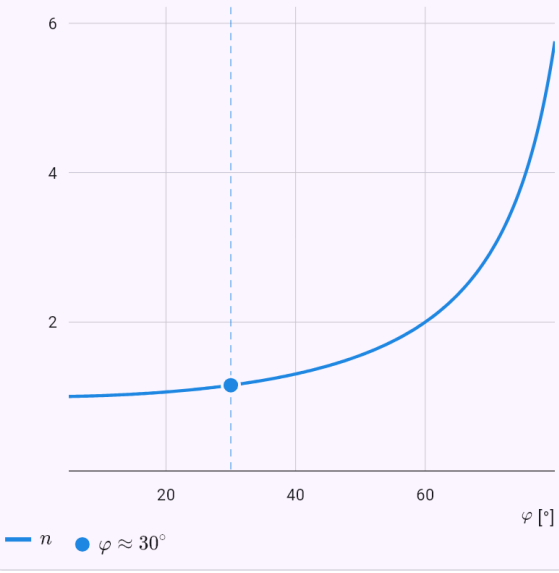
Ergebnis

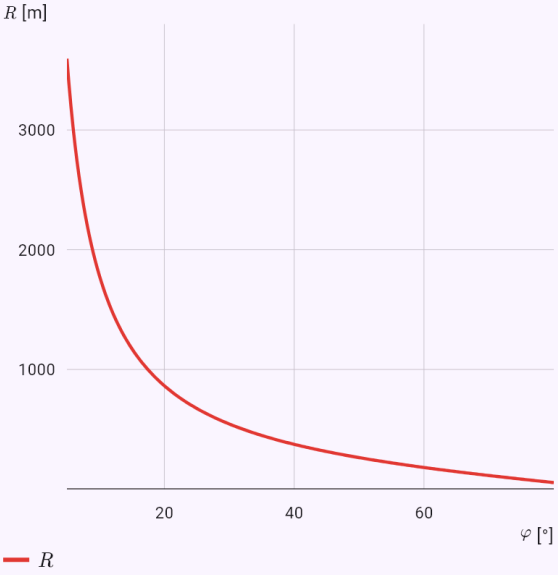
$$R \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben: $v = 200\,\mathrm{km/h}, \quad \varphi = 30\,^\circ$
- Einheiten umrechnen: $v = 200\,\mathrm{km/h} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}$
- In einer koordinierten Kurve trägt der senkrechte Teil des Auftriebs das Gewicht und der waagerechte krümmt die Bahn. Das Lastvielfache hängt nur von der Querlage ab, der Radius auch von der Geschwindigkeit. Gleichung des Modells: $L\cos\varphi = W, \quad L\sin\varphi = \dfrac{mv^2}{R}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $R = \dfrac{v^2}{g\tan\varphi}$
- Einsetzen: $R = \dfrac{(55{,}56)^2}{9{,}81\cdot\tan 30^\circ} \approx 544{,}9\,\mathrm{m}$

Graph





Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Reichweite eines Segelflugzeugs aus 1000 m Höhe.

Eingabe: `model(aircraft; find=R[km]; h=1000[m]; m=600[kg]; S=17.95[m2]; b=17[m]; CD0=0.0088[one]; e=0.8[one]; rho=1.225[kg_m3]; mode=glide; aircraft=glider; air=constant;`

`glidespeed=best)`

Ergebnis

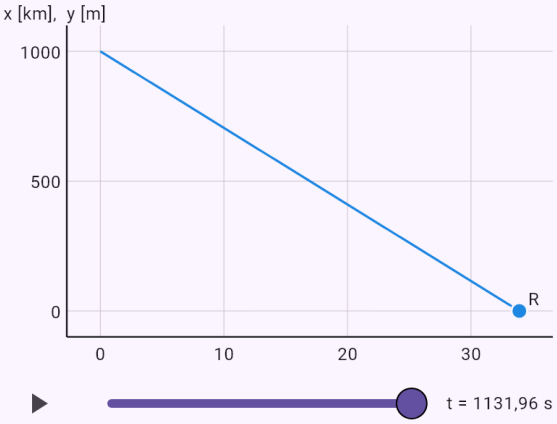
$$R \approx 33{,}91\,\mathrm{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben
  $h = 1000\,\mathrm{m}, \quad m = 600\,\mathrm{kg}, \quad S = 17{,}95\,\mathrm{m}^2, \quad b = 17\,\mathrm{m}$
- Ohne Schub sinkt das Flugzeug auf einer Geraden, deren Neigung das Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand bestimmt. Die Reichweite aus einer Höhe ist Höhe mal Gleitzahl und bei der Geschwindigkeit des besten Gleitens am größten. Gleichung des Modells:
  $\tan\gamma = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}, \quad R = hE, \quad v_y = \frac{v}{E}$
- Gewicht des Flugzeugs:
  $W = mg = 600 \cdot 9{,}81 \approx 5886\,\mathrm{N}$
- Flügelstreckung: $\Lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{(17)^2}{17{,}95} \approx 16{,}1$
- Faktor des induzierten Widerstands (Oswald-Faktor e, Polare): $k = \frac{1}{\pi e \Lambda} = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 16{,}1} \approx 0{,}02471$
- Auftriebsbeiwert beim besten Gleiten:
  $C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}0088}{0{,}02471}} \approx 0{,}5967$
- Geschwindigkeit des besten Gleitens
  $v = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5886}{1{,}225 \cdot 17{,}95 \cdot 0{,}5967}} \approx 29{,}95\,\mathrm{m/s}$
- Beste Gleitzahl und geringster Widerstand
  $E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} k}} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}0088 \cdot 0{,}02471}} \approx 33{,}91$
- Gleitwinkel: $\gamma = \arctan\frac{1}{E} \approx 1{,}689^\circ$
- Angenommen werden ein kleiner Gleitwinkel, bei dem der Auftrieb praktisch dem Gewicht entspricht, und eine konstante Luftdichte.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $R = hE$
- Einsetzen: $R = 1000 \cdot 33{,}91 \approx 33\,910\,\mathrm{m}$
- Einheiten umrechnen: $R \approx 33\,910\,\mathrm{m} = 33{,}91\,\mathrm{km}$

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Apollo 13: die Belastung beim Eintritt unter −6,20°.

Eingabe: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn]; gamma=-6.2[deg]; sigma=55[deg])`

Ergebnis

$$a_{max} \approx 6{,}53\,\mathrm{g}$$

Lösungsweg

- Gesucht a_{max}; gegeben
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Ein Durchflug durch die Atmosphäre von der Eintrittshöhe h_0 (standardmäßig 122 km) mit dem gegebenen Bahnwinkel γ_0 und konstantem Rollwinkel σ bis zur Höhe h_k (Öffnen der Fallschirme, beim Shuttle der Gleitflug). Die größte Belastung wird mit der Formel von Allen und Eggers für einen ballistischen Eintritt verglichen. Den Wärmestrom im Staupunkt gibt die Sutton-Graves-Formel q = k·√(ρ/R_n)·v³, die Oberflächentemperatur des Schilds das Strahlungsgleichgewicht εσT⁴ = q. Gleichung des Modells
  $\dot v = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot\gamma = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Stirnfläche und ballistischer Koeffizient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Luftdichte nach der Standardatmosphäre (über 86 km isotherm)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Senkrechte Komponente des Auftriebs beim Rollwinkel σ: $L\cos\sigma = 0{,}172\,D \quad (\sigma = 55^\circ)$
- Einfang: das Raumschiff sank auf die Höhe h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 848{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 4869\,\mathrm{km}$
- Größte Belastung (numerisch)
  $a_{max} \approx 6{,}53\,g \quad (t \approx 90{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 56{,}4\,\mathrm{km})$
- Ein ballistischer Eintritt ohne Auftrieb ergäbe nach Allen und Eggers viel mehr – Auftrieb senkt die Belastung
  $a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{11\,030^2 \sin 6{,}2^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 34{,}2\,g$
- Größter Wärmestrom im Staupunkt (Sutton-Graves) und die gesamte Wärme pro m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}63\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 58{,}2\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Oberflächentemperatur des Schilds aus dem Strahlungsgleichgewicht (ε = 0,85)
  $\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2410\,\mathrm{K} \approx 2137\,^\circ\mathrm{C}$
- Vereinfachungen: die Erde ist rund und dreht sich nicht, C_D und L/D sind konstant und der Rollwinkel σ ist den ganzen Flug gleich (die echte Steuerung ändert ihn). Der Wärmestrom ist nur konvektiv; bei der Rückkehr vom Mond kommt die Strahlung der glühenden Stoßschicht hinzu. Ein ablativer Schild trägt einen Teil der Wärme durch Verdampfen ab, die Strahlungsgleichgewichtstemperatur ist daher eine obere Schätzung.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Der Eintrittskorridor der Apollo-Kapsel bei der Rückkehr vom Mond.

Eingabe: `model(reentry; mode=corridor; find=width[deg]; vehicle=apollo; body=capsule; m=5500[kg]; d=3.91[m]; CD=1.29[one]; LD=0.3[one]; Rn=4.69[m]; v0=11.03[km_s]; hk=7[km];`

`nlim=10[gn])`

Ergebnis

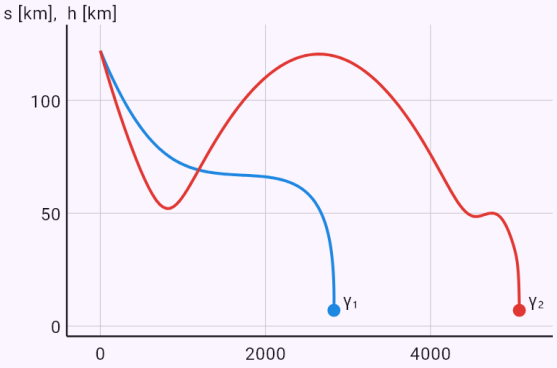
$\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ$
$\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ$
$\Delta\gamma \approx 2{,}22^\circ$

Lösungsweg

- Gesucht $\Delta\gamma$; gegeben
  $m = 5500\,\mathrm{kg}, \quad d = 3{,}91\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1{,}29, \quad L/D = 0,$
- Die Grenzen des Eintrittswinkels durch Intervallhalbierung. Die flache Grenze ist der flachste Eintritt, der mit nach unten gedrehtem Auftrieb (σ = 180°) nicht wieder über die Eintrittshöhe steigt; die steile Grenze der steilste Eintritt, der mit Auftrieb nach oben (σ = 0°) die gegebene Belastung (und den Wärmestrom, falls gegeben) nicht überschreitet. Für die Rückkehr vom Mond ist der Korridor nur etwa 2° breit. Apollo 13 (April 1970) kehrte nach der Explosion des Sauerstofftanks mit abgeschaltetem Kommandomodul zurück, um Energie zu sparen. Die Besatzung korrigierte die Bahn durch eine manuelle Zündung des Mondlandefähren-Triebwerks, ausgerichtet nach der Erde im Visier am Fenster, und die letzte Korrektur zielte auf die Mitte des Korridors. Der geplante Eintrittswinkel war −6,20°; der Rechner des Kommandomoduls wurde erst vor dem Eintritt wieder eingeschaltet. Gleichung des Modells
  $\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$
- Stirnfläche und ballistischer Koeffizient
  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}01\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 355{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$
- Luftdichte nach der Standardatmosphäre (über 86 km isotherm)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-}$
- Flache Grenze des Korridors (Auftrieb nach unten):
  $\gamma_1 \approx -4{,}98^\circ \quad (\sigma = 180^\circ)$
- Steile Grenze des Korridors (Auftrieb nach oben):
  $\gamma_2 \approx -7{,}2^\circ \quad (\sigma = 0^\circ,\ a_{max} = 10\,g)$
- Breite des Eintrittskorridors: $\Delta\gamma = |\gamma_2| - |\gamma_1| \approx 2{,}22^\circ$
- Vereinfachungen: die Erde ist rund und dreht sich nicht, C_D und L/D sind konstant und der Rollwinkel σ ist den ganzen Flug gleich (die echte Steuerung ändert ihn). Der Wärmestrom ist nur konvektiv; bei der Rückkehr vom Mond kommt die Strahlung der glühenden Stoßschicht hinzu. Ein ablativer Schild trägt einen Teil der Wärme durch Verdampfen ab, die Strahlungsgleichgewichtstemperatur ist daher eine obere Schätzung.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe.

Wostok: ballistischer Abstieg ohne Auftrieb und 8–9 g.

Eingabe: `model(reentry; mode=flight; find=amax[gn]; vehicle=vostok; body=capsule; m=2460[kg]; d=2.3[m]; CD=1[one]; LD=0[one]; Rn=1.15[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.5[deg];`

sigma=0[deg]; hk=7[km]; nlim=10[gn])

Ergebnis

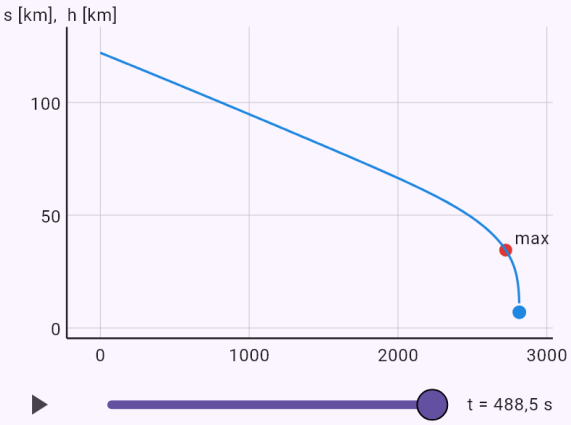
$$a_{max} \approx 8{,}98\,\mathrm{g}$$

Lösungsweg

- Gesucht a_{max}; gegeben
  $m = 2460\,\mathrm{kg}, \quad d = 2{,}3\,\mathrm{m}, \quad C_D = 1, \quad L/D = 0, \quad R$
- Ein Durchflug durch die Atmosphäre von der Eintrittshöhe h_0 (standardmäßig 122 km) mit dem gegebenen Bahnwinkel γ_0 und konstantem Rollwinkel σ bis zur Höhe h_k (Öffnen der Fallschirme, beim Shuttle der Gleitflug). Die größte Belastung wird mit der Formel von Allen und Eggers für einen ballistischen Eintritt verglichen. Den Wärmestrom im Staupunkt gibt die Sutton-Graves-Formel q = k·√(ρ/R_n)·v³, die Oberflächentemperatur des Schilds das Strahlungsgleichgewicht εσT⁴ = q. Gleichung des Modells
  $$\dot v = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot\gamma = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Stirnfläche und ballistischer Koeffizient
  $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 4{,}155\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 592{,}1\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Luftdichte nach der Standardatmosphäre (über 86 km isotherm)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Einfang: das Raumschiff sank auf die Höhe h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 488{,}5\,\mathrm{s}, \quad s \approx 2815\,\mathrm{km}$
- Größte Belastung (numerisch)
  $a_{max} \approx 8{,}98\,g \quad (t \approx 375{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 34{,}4\,\mathrm{km})$
- Kontrolle mit der Formel von Allen und Eggers für einen ballistischen Eintritt (ohne Schwerkraft, exponentielle Atmosphäre mit Skalenhöhe H)
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}5^\circ}{2e\cdot 7200} \approx 4{,}15\,g$$
- Größter Wärmestrom im Staupunkt (Sutton-Graves) und die gesamte Wärme pro m²
  $q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 1{,}42\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 49{,}4\,\mathrm{km},\ v \approx$
- Oberflächentemperatur des Schilds aus dem Strahlungsgleichgewicht (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 2329\,\mathrm{K} \approx 2055\,^\circ\mathrm{C}$$
- Vereinfachungen: die Erde ist rund und dreht sich nicht, C_D und L/D sind konstant und der Rollwinkel σ ist den ganzen Flug gleich (die echte Steuerung ändert ihn). Der Wärmestrom ist nur konvektiv; bei der Rückkehr vom Mond kommt die Strahlung der glühenden Stoßschicht hinzu. Ein ablativer Schild trägt einen Teil der Wärme durch Verdampfen ab, die Strahlungsgleichgewichtstemperatur ist daher eine obere Schätzung.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Space Shuttle: die Schildtemperatur aus dem Strahlungsgleichgewicht.

Eingabe: model(reentry; mode=flight; find=Tmax[degC]; vehicle=shuttle; body=winged; m=90000[kg]; A=250[m2]; CD=0.84[one]; LD=1[one]; Rn=1[m]; v0=7.8[km_s]; gamma=-1.2[deg];

`sigma=60[deg]; hk=25[km]; nlim=10[gn])`

Ergebnis

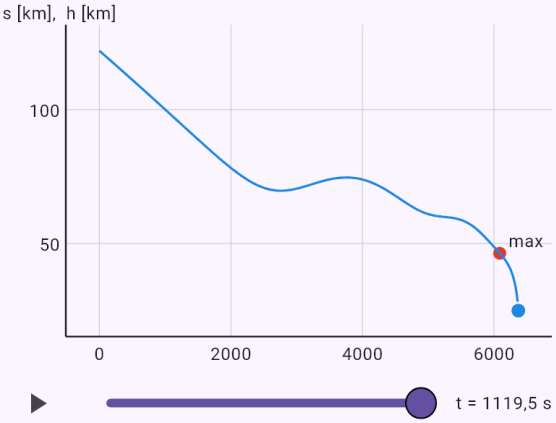
$$T_{max} \approx 1660\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Lösungsweg

- Gesucht T_{max}; gegeben
  $m = 90\,000\,\mathrm{kg}, \quad A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad C_D = 0{,}84, \quad L/D =$
- Ein Durchflug durch die Atmosphäre von der Eintrittshöhe h_0 (standardmäßig 122 km) mit dem gegebenen Bahnwinkel γ_0 und konstantem Rollwinkel σ bis zur Höhe h_k (Öffnen der Fallschirme, beim Shuttle der Gleitflug). Die größte Belastung wird mit der Formel von Allen und Eggers für einen ballistischen Eintritt verglichen. Den Wärmestrom im Staupunkt gibt die Sutton-Graves-Formel q = k·√(ρ/R_n)·v³, die Oberflächentemperatur des Schilds das Strahlungsgleichgewicht εσT⁴ = q. Gleichung des Modells
  $$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma,$$
- Das Space Shuttle trat mit einem Anstellwinkel von etwa 40° ein und baute überschüssigen Auftrieb durch Rollen um die Längsachse ab (bis etwa 70°); es landete als Gleiter ohne Antrieb. Die Werte der Voreinstellung sind ungefähr. Wie extrem der Hitzeschutz beansprucht wird, zeigte der Verlust der Columbia (Mission STS-107). Beim Start am 16. Januar 2003 durchschlug ein Stück Isolierschaum vom Außentank eine Platte aus kohlenstofffaserverstärktem Kohlenstoff (RCC) an der Vorderkante des linken Flügels. Die Vorderkanten erhitzen sich beim Wiedereintritt auf etwa 1 650 °C (rund 3 000 °F). Am 1. Februar 2003 drang heißes Plasma durch das Loch in den Flügel, die Struktur schmolz und der Orbiter zerbrach über Texas; alle sieben Besatzungsmitglieder kamen ums Leben.
- Stirnfläche und ballistischer Koeffizient
  $$A = 250\,\mathrm{m}^2, \quad \beta = \frac{m}{C_D A} = 428{,}6\,\mathrm{kg/m}^2$$
- Luftdichte nach der Standardatmosphäre (über 86 km isotherm)
  $\rho(122\,\mathrm{km}) \approx 1{,}19\cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg/m}^3, \quad \rho(60\,\mathrm{km}) \approx 3{,}1\cdot 10^{-}$
- Senkrechte Komponente des Auftriebs beim Rollwinkel σ: $L\cos\sigma = 0{,}5\,D \quad (\sigma = 60^{\circ})$
- Einfang: das Raumschiff sank auf die Höhe h_k:
  $h = h_k, \quad t \approx 1120\,\mathrm{s}, \quad s \approx 6371\,\mathrm{km}$
- Größte Belastung (numerisch)
  $a_{max} \approx 2{,}34\,g \quad (t \approx 941{,}5\,\mathrm{s},\ h \approx 46{,}2\,\mathrm{km})$
- Ein ballistischer Eintritt ohne Auftrieb ergäbe nach Allen und Eggers viel mehr – Auftrieb senkt die Belastung
  $$a_{max} \approx \frac{v_0^2 \sin|\gamma_0|}{2eH} = \frac{7800^2 \sin 1{,}2^{\circ}}{2e\cdot 7200} \approx 3{,}32\,g$$
- Größter Wärmestrom im Staupunkt (Sutton-Graves) und die gesamte Wärme pro m²
  $$q_{max} = k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}\,v^3 \approx 0{,}667\,\mathrm{MW/m}^2 \quad (h \approx 70\,\mathrm{km},\ v \approx$$
- Oberflächentemperatur des Schilds aus dem Strahlungsgleichgewicht (ε = 0,85)
  $$\varepsilon\sigma T^4 = q_{max}: \quad T = \sqrt[4]{\frac{q_{max}}{\varepsilon\sigma}} \approx 1928\,\mathrm{K} \approx 1655\,^{\circ}\mathrm{C}$$
- Vereinfachungen: die Erde ist rund und dreht sich nicht, C_D und L/D sind konstant und der Rollwinkel σ ist den ganzen Flug gleich (die echte Steuerung ändert ihn). Der Wärmestrom ist nur konvektiv; bei der Rückkehr vom Mond kommt die Strahlung der glühenden Stoßschicht hinzu. Ein ablativer Schild trägt einen Teil der Wärme durch Verdampfen ab, die Strahlungsgleichgewichtstemperatur ist daher eine obere Schätzung.

Graph

Bahn | Zeitverlauf



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Wie viel von einem Eisberg unter Wasser liegt.

Eingabe: `model(water; find=phi[pct]; rhob=917[kg_m3]; rhof=1025[kg_m3]; mode=float;`

`fluid=sea; body=ice)`

Ergebnis

$$\varphi \approx 89{,}46\,\%$$

Lösungsweg

- Gesucht φ; gegeben:
  $\rho_t = 917\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Auf einen Körper in einem Fluid wirkt eine Auftriebskraft gleich dem Gewicht des verdrängten Fluids. Ein schwimmender Körper taucht im Verhältnis der Dichten ein. Dasselbe Gesetz trägt auch den Ballon in der Luft. Gleichung des Modells: $F_b = \rho_f V g$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $\varphi = \dfrac{\rho_t}{\rho_f}$
- Einsetzen: $\varphi = \dfrac{917}{1025} \approx 0{,}8946$
- Einheiten umrechnen: $\varphi \approx 0{,}8946 \;= 89{,}46\,\%$

Was ein Heißluftballon tragen kann.

Eingabe: `model(water; find=mp[kg]; V=2800[m3]; rhog=0.946[kg_m3]; m0=350[kg]; rhof=1.225[kg_m3]; mode=float; fluid=air; gas=hotair)`

Ergebnis

$$m_p \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$$

Lösungsweg

- Gesucht m_p; gegeben
  $V = 2800\,\mathrm{m^3}, \quad \rho_g = 0{,}946\,\mathrm{kg/m^3}, \quad m_0 = 350\,\mathrm{kg}, \quad \rho$
- Auf einen Körper in einem Fluid wirkt eine Auftriebskraft gleich dem Gewicht des verdrängten Fluids. Ein schwimmender Körper taucht im Verhältnis der Dichten ein. Dasselbe Gesetz trägt auch den Ballon in der Luft. Gleichung des Modells: $F_b = \rho_f V g$
- Masse, die das Gas tragen kann
  $m_v = V(\rho_f - \rho_g) = 2800(1{,}225 - 0{,}946) \approx 781{,}2\,\mathrm{kg}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $m_p = m_v - m_0$
- Einsetzen: $m_p = 781{,}2 - 350 \approx 431{,}2\,\mathrm{kg}$

Der Druck am Grund des Marianengrabens.

Eingabe: `model(water; find=p[bar]; h=10935[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=pressure; water=sea)`

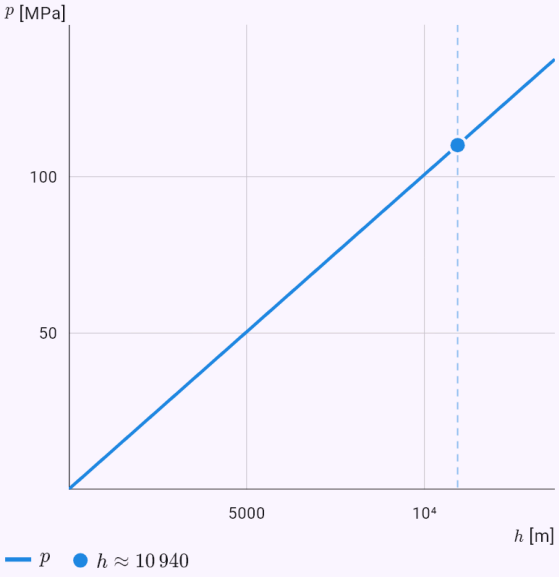
Ergebnis

$$p \approx 1101\,\text{bar}$$

Lösungsweg

- Gesucht p; gegeben: $h = 10\,940\,\text{m}, \quad \rho_f = 1025\,\text{kg/m}^3$
- Der Druck wächst linear mit der Tiefe, um Dichte mal g mal Tiefe. An der Oberfläche kommt der Luftdruck hinzu. Wasser gilt als inkompressibel. Gleichung des Modells: $p = p_0 + \rho_f g h$
- In großer Tiefe wird Wasser leicht komprimiert und die Dichte ändert sich auch mit Temperatur und Salzgehalt; das Ergebnis kann um etwa 2 % abweichen.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $p = p_0 + \rho_f g h$
- Einsetzen: $p = 101\,300 + 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10\,940 \approx 110{,}1\,\text{MPa}$
- Vielfaches des Atmosphärendrucks: $\frac{p}{p_{atm}} \approx 1086$
- Einheiten umrechnen: $p \approx 1{,}101 \cdot 10^8\,\text{Pa} = 1101\,\text{bar}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Druck in einer Rohrverengung.

Eingabe: `model(water; find=p2[kPa]; A1=20[cm2]; A2=5[cm2]; v1=2[m_s]; p1=200[kPa];`

`rhof=998[kg_m3]; mode=bernoulli; water=fresh)`

Ergebnis

$$p_2 \approx 170{,}1\,\mathrm{kPa}$$

Lösungsweg

- Gesucht p_2; gegeben
  $A_1 = 20\,\mathrm{cm}^2, \quad A_2 = 5\,\mathrm{cm}^2, \quad v_1 = 2\,\mathrm{m/s}, \quad p_1 = 200$
- Einheiten umrechnen
  $A_1 = 20\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}002\,\mathrm{m}^2, \quad A_2 = 5\,\mathrm{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2,$
- Entlang einer Stromlinie einer idealen Flüssigkeit bleibt die Summe aus Druck, kinetischer und potentieller Energie eines Volumens erhalten. In einer Verengung steigt die Geschwindigkeit und der Druck fällt; erreicht er den Dampfdruck, setzt Kavitation ein. Gleichung des Modells: $p + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g h = \mathrm{const}$
- Kontinuitätsgleichung:
  $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 2 \cdot \frac{0{,}002}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 8\,\mathrm{m/s}$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_f \left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho_f g (h_1 - h_2)$
- Einsetzen
  $p_2 = 200\,000 + \frac{1}{2} \cdot 998 \left((2)^2 - (8)^2\right) + 998 \cdot 9{,}81(0 - (\ldots$
- Einheiten umrechnen: $p_2 \approx 170\,100\,\mathrm{Pa} = 170{,}1\,\mathrm{kPa}$

Endgeschwindigkeit eines Steins im Wasser und Diagramm des Anlaufs.

Eingabe: `model(water; find=vt[m_s]; d=50[mm]; rhob=2700[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

```
nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=stone; shape=sphere)
```

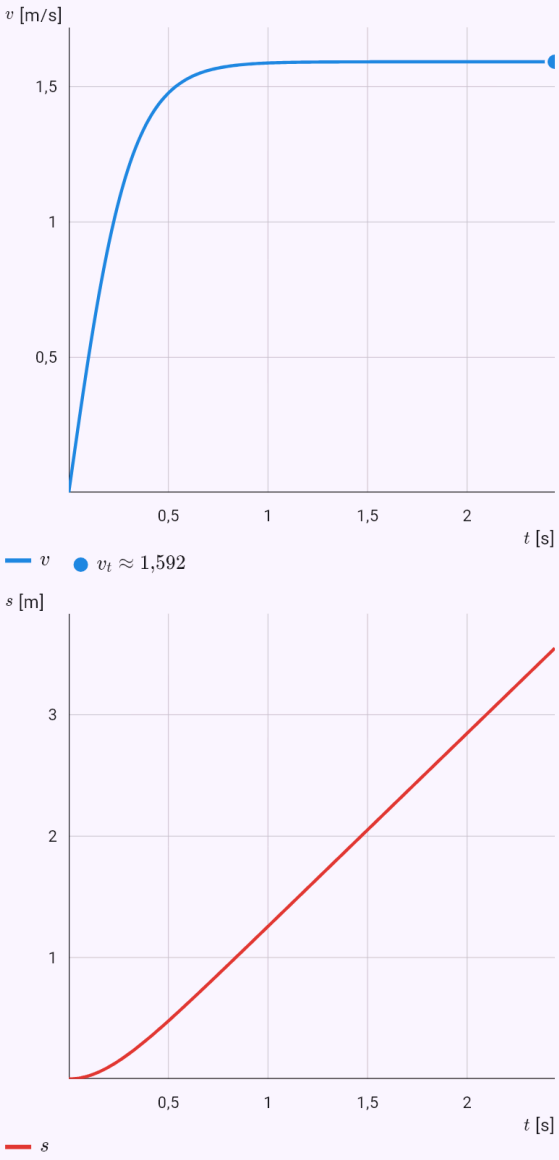
Ergebnis

$$v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_t; gegeben
  $d = 50\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 2700\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998\,\mathrm{kg/m^3},$
- Einheiten umrechnen: $d = 50\,\mathrm{mm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Ein Körper sinkt oder steigt, bis der Widerstand die Differenz aus Gewicht und Auftrieb ausgleicht und er seine Endgeschwindigkeit erreicht. Beim Anfahren muss er auch das umgebende Wasser bewegen, das beschreibt die hydrodynamische Masse. Die Gleichung wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $(m + C_a\rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volumen, Querschnitt und Masse der Kugel
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}001963\,\mathrm{m}$
- Die resultierende Kraft zeigt nach unten, der Körper sinkt:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 1{,}093\,\mathrm{N}$
- Masse samt hydrodynamischer Masse:
  $m^* = m + C_a\rho_f V \approx 0{,}2094\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Reynolds-Zahl und Widerstandsbeiwert bei Endgeschwindigkeit: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 79\,610, \quad C_d \approx 0{,}44$
- Endgeschwindigkeit: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$
- Zeitkonstante des Anlaufs mit und ohne hydrodynamische Masse
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}305\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 0{,}2575\,\mathrm{s}$
- Die hydrodynamische Masse ändert nur den Anlauf. Die Endgeschwindigkeit hängt nicht von ihr ab, denn in stationärer Bewegung wird nichts mehr beschleunigt.
- Einsetzen: $v_t \approx 1{,}592\,\mathrm{m/s}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Wie lange eine Blase aus 10 m Tiefe steigt.

Eingabe: `model(water; find=t[s]; H=10[m]; d=5[mm]; rhob=1.2[kg_m3]; rhof=998[kg_m3];`

```
nu=0.000001[m2_s]; Ca=0.5[one]; mode=motion; water=fresh; object=bubble; shape=bubble)
```

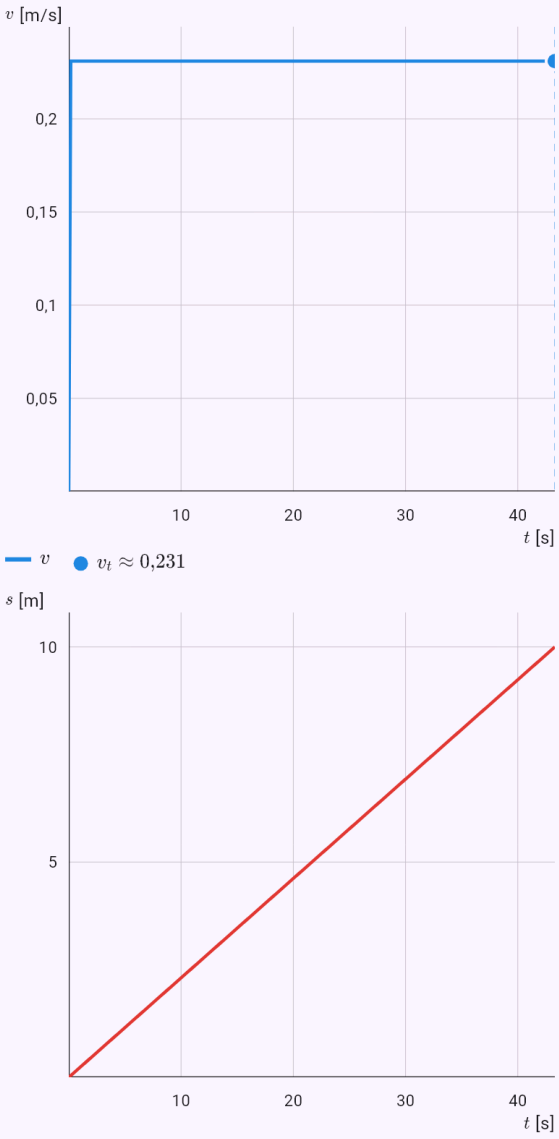
Ergebnis

$t \approx 43{,}3\,\mathrm{s}$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $H = 10\,\mathrm{m}, \quad d = 5\,\mathrm{mm}, \quad \rho_t = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_f = 998$
- Einheiten umrechnen: $d = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}005\,\mathrm{m}$
- Ein Körper sinkt oder steigt, bis der Widerstand die Differenz aus Gewicht und Auftrieb ausgleicht und er seine Endgeschwindigkeit erreicht. Beim Anfahren muss er auch das umgebende Wasser bewegen, das beschreibt die hydrodynamische Masse. Die Gleichung wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Gleichung des Modells:
  $(m + C_a \rho_f V)\dot{v} = |mg - \rho_f V g| - \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d$
- Volumen, Querschnitt und Masse der Kugel
  $V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}545 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1{,}963 \cdot 10^{-5}$
- Die resultierende Kraft zeigt nach oben, der Körper steigt:
  $F = |mg - \rho_f V g| \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$
- Masse samt hydrodynamischer Masse:
  $m^* = m + C_a \rho_f V \approx 3{,}274 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}, \quad C_a = 0{,}5$
- Die Eötvös-Zahl gibt an, wie stark sich die Blase verformt: $Eo = \frac{g \Delta\rho d^2}{\sigma} \approx 3{,}395$
- Reynolds-Zahl und Widerstandsbeiwert bei Endgeschwindigkeit: $Re = \frac{v_t d}{\nu} \approx 1155, \quad C_d \approx 1{,}224$
- Endgeschwindigkeit: $v_t \approx 0{,}231\,\mathrm{m/s}$
- Zeitkonstante des Anlaufs mit und ohne hydrodynamische Masse
  $\tau = \frac{m^* v_t}{F} \approx 0{,}01182\,\mathrm{s}, \quad \tau_0 = \frac{m v_t}{F} \approx 2{,}835 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$
- Die hydrodynamische Masse ändert nur den Anlauf. Die Endgeschwindigkeit hängt nicht von ihr ab, denn in stationärer Bewegung wird nichts mehr beschleunigt.
- Die Korrelation von Tomiyama gilt für gewöhnliches, leicht verunreinigtes Wasser. In reinem Wasser steigen kleine Blasen schneller, große zerfallen oder schwanken.
- Die Gleichung wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst, Anzahl der Schritte: $N = 3363$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Das Absinken eines Harpunenschafts auf 5 m.

Eingabe: `model(water; find=drop[cm]; x=5[m]; v0=20[m_s]; m=0.39[kg]; d=7[mm]; L=1.3[m];`

rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=harpoon; water=sea)

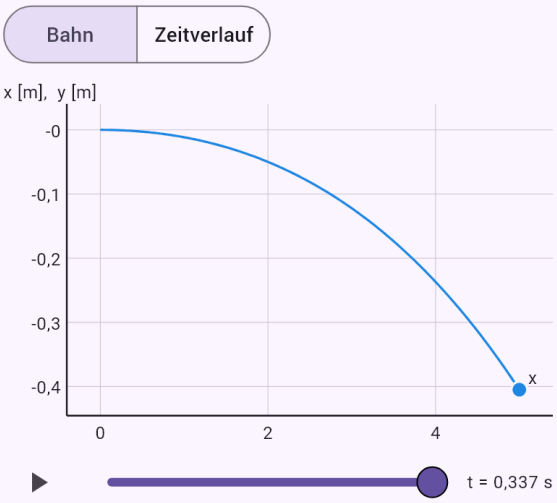
Ergebnis

$$\Delta y \approx 40{,}5\,\mathrm{cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht Δy; gegeben
  $x = 5\,\mathrm{m}, \quad v_0 = 20\,\mathrm{m/s}, \quad m = 0{,}39\,\mathrm{kg}, \quad d = 7\,\mathrm{mm},$
- Einheiten umrechnen: $d = 7\,\mathrm{mm} = 0{,}007\,\mathrm{m}$
- Harpune für das Sportfischen: Der schlanke Schaft wird vor allem durch die Reibung an seiner Oberfläche gebremst und verliert daher binnen weniger Meter an Geschwindigkeit. Das Absinken bestimmt das um den Auftrieb verminderte Gewicht. Die Gleichungen werden numerisch gelöst. Gleichung des Modells
  $$m\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{2}\rho_f A C_d |\vec{v}|\vec{v} - mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\vec{j}$$
- Reibungsbeiwert nach der ITTC-57-Linie
  $Re = \frac{v_0 L}{\nu} \approx 2{,}185 \cdot 10^7, \quad C_f = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}($
- Widerstandsbeiwert des Schafts: Spitze und Reibung entlang der Länge: $C_d = C_n + 4C_f\frac{L}{d} \approx 2{,}254$
- Strecke, auf der die Geschwindigkeit auf etwa 37 % fällt, und Beschleunigung nach unten im Wasser
  $\ell = \frac{2m}{\rho_f A C_d} \approx 8{,}772\,\mathrm{m}, \quad g^* = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \approx 8{,}529\,\mathrm{m/}$
- Die Gleichung wurde mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst, Anzahl der Schritte: $N = 1538$
- Das Modell lässt den Widerstand der Leine weg, der die reale Reichweite weiter verkürzt. Die hydrodynamische Masse des Schafts in Längsrichtung ist vernachlässigbar.
- Einheiten umrechnen: $\Delta y \approx 0{,}405\,\mathrm{m} = 40{,}5\,\mathrm{cm}$

Graph



Die Achsen haben unterschiedliche Maßstäbe. Mit dem Schieberegler oder der Wiedergabetaste folgen Sie dem Flug in der Zeit.

Die Reichweite einer Unterwasserdrohne mit Akku.

Eingabe: `model(water; find=Rg[km]; v=1.5[m_s]; A=0.02835[m2]; Cd=0.23[one]; eta=0.6[one];`

`Ph=26[W]; En=1[kWh]; rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=auv)`

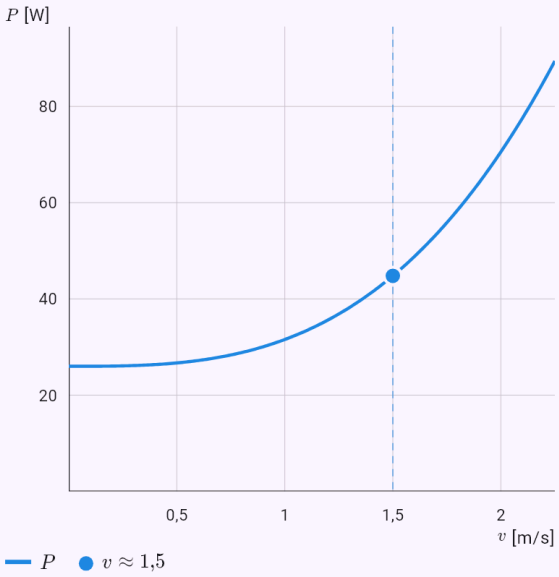
Ergebnis

$$R \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben $v = 1{,}5\,\mathrm{m/s}, \quad A = 0{,}02835\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}23, \quad \eta = 0,$
- Einheiten umrechnen: $E = 1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$
- Bei stationärer Fahrt ist der Schub gleich dem Widerstand. Der Widerstand wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, die Leistung mit der dritten Potenz. Bei Akkus zählt auch der konstante Verbrauch der Geräte, daher gibt es eine Geschwindigkeit größter Reichweite. Gleichung des Modells: $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Faktor K im Widerstand D = Kv²: $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 0{,}02835 \cdot 0{,}23 \approx 3{,}342\,\mathrm{kg/m}$
- Benötigte Leistung: $P = \frac{K v^3}{\eta} + P_h \approx 44{,}8\,\mathrm{W}$
- Geschwindigkeit größter Reichweite: $v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{P_h \eta}{2K}} \approx 1{,}326\,\mathrm{m/s}$
- Laufzeit des Akkus: $t_E = \frac{E}{P} \approx 22{,}32\,\mathrm{h}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $R = v t_E$
- Einsetzen: $R = 1{,}5 \cdot 80\,360 \approx 120{,}5\,\mathrm{km}$
- Einheiten umrechnen: $R \approx 120\,500\,\mathrm{m} = 120{,}5\,\mathrm{km}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Ein historisches U-Boot: Die Leistung wächst mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit.

Eingabe: `model(water; find=P[kW]; v=20.7[m_s]; A=70.9[m2]; Cd=0.065[one]; eta=0.7[one];`

`rhof=1025[kg_m3]; mode=powered; water=sea; vehicle=lira)`

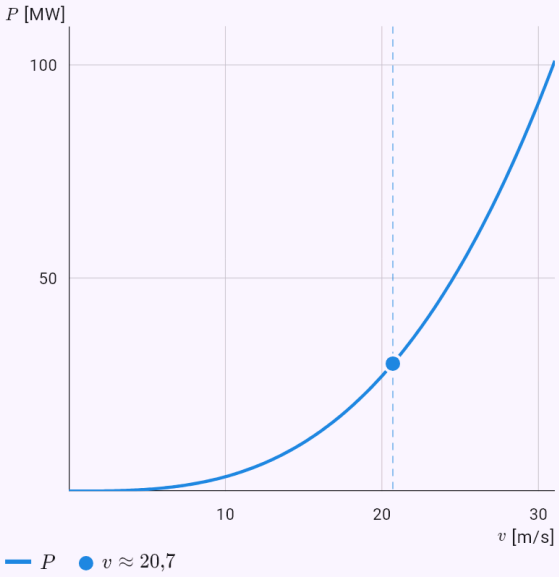
Ergebnis

$$P \approx 29\,930\,\mathrm{kW}$$

Lösungsweg

- Gesucht P; gegeben
  $v = 20{,}7\,\mathrm{m/s}, \quad A = 70{,}9\,\mathrm{m^2}, \quad C_d = 0{,}065, \quad \eta = 0{,}7$
- Bei stationärer Fahrt ist der Schub gleich dem Widerstand. Der Widerstand wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, die Leistung mit der dritten Potenz. Bei Akkus zählt auch der konstante Verbrauch der Geräte, daher gibt es eine Geschwindigkeit größter Reichweite. Gleichung des Modells:
  $T = D = \frac{1}{2}\rho_f v^2 A C_d, \quad P = \frac{Dv}{\eta} + P_h$
- Faktor K im Widerstand D = Kv²
  $K = \frac{1}{2}\rho_f A C_d = \frac{1}{2}\cdot 1025 \cdot 70{,}9 \cdot 0{,}065 \approx 2362\,\mathrm{kg/m}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $P = \frac{Kv^3}{\eta} + P_h$
- Einsetzen: $P = \frac{2362 \cdot (20{,}7)^3}{0{,}7} + 0 \approx 29{,}93\,\mathrm{MW}$
- Die Leistung wächst mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit: doppelte Geschwindigkeit braucht achtfache Leistung: $\frac{P(2v) - P_h}{P(v) - P_h} = 2^3 = 8$
- Einheiten umrechnen: $P \approx 2{,}993 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,930\,\mathrm{kW}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Wie viel Wasser ein U-Boot zum Schweben aufnehmen muss.

Eingabe: `model(water; find=mb[t]; V=3073[m3]; m0=2300000[kg]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ballast; water=sea; boat=lira)`

Ergebnis

$$m_b \approx 849{,}8\,\mathrm{t}$$

Lösungsweg

- Gesucht m_b; gegeben
  $V = 3073\,\mathrm{m^3}, \quad m_0 = 2\,300\,000\,\mathrm{kg}, \quad \rho_f = 1025\,\mathrm{kg/m}$
- Ein getauchtes Fahrzeug schwebt, wenn seine Masse samt Ballast der Masse des verdrängten Wassers gleicht. Durch Ablassen oder Aufnehmen von Wasser steigt oder sinkt es. Das Ausblasen eines Tanks in der Tiefe braucht mehr Luft, da sie den Umgebungsdruck überwinden muss. Gleichung des Modells:
  $\rho_f V = m_0 + m_b$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $m_b = \rho_f V - m_0$
- Einsetzen: $m_b = 1025 \cdot 3073 - 2\,300\,000 \approx 849\,800\,\mathrm{kg}$
- Volumen des Ballastwassers: $V_b = \frac{m_b}{\rho_f} \approx 829{,}1\,\mathrm{m^3}$
- Einheiten umrechnen: $m_b \approx 849\,800\,\mathrm{kg} = 849{,}8\,\mathrm{t}$

Leistung eines Containerschiffs mit Aufteilung des Widerstands.

Eingabe: `model(water; find=P[kW]; v=12.35[m_s]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one]; S=9424[m2]; k=0.1[one]; Cr=0.000444[one]; eta=0.7[one]; rhof=1025[kg_m3]; nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=kcs; compare=off)`

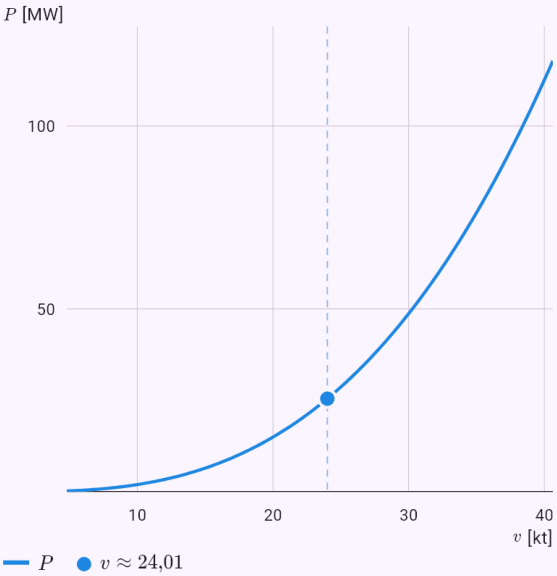
Ergebnis

$$P \approx 25\,470\,\mathrm{kW}$$

Lösungsweg

- Gesucht P; gegeben
  $v = 12{,}35\,\mathrm{m/s}, \quad L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10.$
- Der Tiefgang folgt aus der Verdrängung, die Querstabilität aus dem Metazentrum. Der Widerstand hat einen Reibungsanteil nach der ITTC-57-Linie und einen Restanteil aus einem gegebenen Beiwert. Froude-Zahl und Rumpfgeschwindigkeit zeigen, wann die Wellen am Rumpf den Widerstand stark erhöhen. Gleichung des Modells
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froude- und Reynolds-Zahl
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}26, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}387 \cdot 10^9$$
- Reibungsbeiwert nach der ITTC-57-Linie:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}001378$$
- Reibungs- und Restwiderstand
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 1{,}116\,\mathrm{MN}, \quad R_R = qSC_R \approx 327$
- Der Restbeiwert wird als konstant angenommen. In Wirklichkeit ändert er sich mit der Geschwindigkeit und stammt aus Modellversuchen.
- Gesamtwiderstand: $R = R_F + R_R \approx 1{,}444\,\mathrm{MN}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Einsetzen: $P = \frac{1\,444\,000 \cdot 12{,}35}{0{,}7} \approx 25{,}47\,\mathrm{MW}$
- Einheiten umrechnen: $P \approx 2{,}547 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 25\,470\,\mathrm{kW}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Metazentrische Höhe: die Stabilität eines Schiffs.

Eingabe: `model(water; find=GM[m]; L=230[m]; B=32.2[m]; Tdr=10.8[m]; Cb=0.6505[one];`

`Cw=0.82[one]; KG=13.81[m]; rhof=1025[kg_m3]; mode=ship; water=sea; ship=kcs)`

Ergebnis

$$GM \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht GM; gegeben
  $L = 230\,\mathrm{m}, \quad B = 32{,}2\,\mathrm{m}, \quad T = 10{,}8\,\mathrm{m}, \quad C_B = 0{,}65$
- Der Tiefgang folgt aus der Verdrängung, die Querstabilität aus dem Metazentrum. Der Widerstand hat einen Reibungsanteil nach der ITTC-57-Linie und einen Restanteil aus einem gegebenen Beiwert. Froude-Zahl und Rumpfgeschwindigkeit zeigen, wann die Wellen am Rumpf den Widerstand stark erhöhen. Gleichung des Modells
  $Fn = \dfrac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \dfrac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$
- Verdrängungsvolumen und Wasserlinienfläche (Völligkeitsgrad)
  $\nabla = C_B LBT \approx 52\,030\,\mathrm{m}^3, \quad A_W = C_W LB \approx 6073\,\mathrm{m}^2$
- Höhe des Auftriebsschwerpunkts über dem Kiel (Formel von Morrish)
  $KB = T - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{T}{2} + \dfrac{\nabla}{A_W}\right) \approx 6{,}144\,\mathrm{m}$
- Höhe des Metazentrums über dem Auftriebsschwerpunkt: $BM = \dfrac{I}{\nabla} = \dfrac{C_W^2 LB^3}{12\nabla} \approx 8{,}27\,\mathrm{m}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $GM = KB + BM - KG$
- Einsetzen: $GM = 6{,}144 + 8{,}27 - 13{,}81 \approx 0{,}6038\,\mathrm{m}$
- Das Metazentrum liegt über dem Schwerpunkt: Das Schiff ist querstabil.
- Gilt für kleine Krängungswinkel. Das Flächenmoment der Wasserlinie ist aus ihrem Beiwert geschätzt und nur für ein Rechteck exakt; bei einem echten Schiff ist das Ergebnis nur eine erste Schätzung.

Fahrt eines 544-t-Schiffs und Flug des Ekranoplans KM knapp über dem Wasser.

Eingabe: `model(water; find=P[kW]; v=6.17[m_s]; m=544000[kg]; L=40[m]; B=9[m]; Tdr=2.6[m]; Cb=0.567[one]; S=381[m2]; k=0.2[one]; Cr=0.0015[one]; eta=0.55[one]; rhof=1025[kg_m3];`

```
nu=0.00000119[m2_s]; mode=ship; water=sea; ship=coaster; compare=on)
```

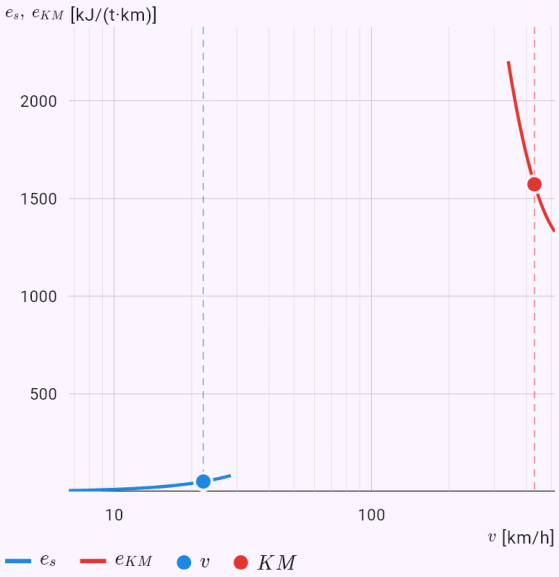
Ergebnis

$$P \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$$

Lösungsweg

- Gesucht P; gegeben
  $v = 6{,}17\,\mathrm{m/s}, \quad m = 544\,000\,\mathrm{kg}, \quad L = 40\,\mathrm{m}, \quad B = 9$
- Der Tiefgang folgt aus der Verdrängung, die Querstabilität aus dem Metazentrum. Der Widerstand hat einen Reibungsanteil nach der ITTC-57-Linie und einen Restanteil aus einem gegebenen Beiwert. Froude-Zahl und Rumpfgeschwindigkeit zeigen, wann die Wellen am Rumpf den Widerstand stark erhöhen. Gleichung des Modells
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad R = \frac{1}{2}\rho_f v^2 S((1+k)C_F + C_R)$$
- Froude- und Reynolds-Zahl
  $$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \approx 0{,}3115, \quad Re = \frac{vL}{\nu} \approx 2{,}074 \cdot 10^8$$
- Reibungsbeiwert nach der ITTC-57-Linie:
  $$C_F = \frac{0{,}075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \approx 0{,}00188$$
- Reibungs- und Restwiderstand
  $R_F = qS(1+k)C_F \approx 16{,}77\,\mathrm{kN}, \quad R_R = qSC_R \approx 11{,}1$
- Der Restbeiwert wird als konstant angenommen. In Wirklichkeit ändert er sich mit der Geschwindigkeit und stammt aus Modellversuchen.
- Ekranoplan KM bei Reisegeschwindigkeit (gleiche Berechnung wie im Formular Flugzeug)
  $m = 544\,\mathrm{t}, \quad v = 430\,\mathrm{km/h}, \quad D \approx 855{,}6\,\mathrm{kN}, \quad Dv \approx$
- Arbeit gegen den Widerstand je Tonne und Kilometer: Schiff und KM
  $$e_s = \frac{R}{m} \approx 51{,}32\,\mathrm{kJ/(t \cdot km)}, \quad e_{KM} = \frac{D}{m} \approx 1573\,\mathrm{kJ/(}$$
- Wievielmal mehr Energie KM braucht und wievielmal schneller er ist: $\frac{e_{KM}}{e_s} \approx 30{,}6, \quad \frac{v_{KM}}{v} \approx 19{,}4$
- KM wird im Bodeneffekt mit dem Faktor von McCormick berechnet. Verglichen wird die Arbeit gegen den Widerstand, ohne Wirkungsgrad der Motoren, Wellen und Wetter.
- Gesamtwiderstand: $R = R_F + R_R \approx 27{,}92\,\mathrm{kN}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $P = \frac{Rv}{\eta}$
- Einsetzen: $P = \frac{27\,920 \cdot 6{,}17}{0{,}55} \approx 313{,}2\,\mathrm{kW}$
- Einheiten umrechnen: $P \approx 313\,200\,\mathrm{W} = 313{,}2\,\mathrm{kW}$

Graph



Die waagerechte Achse ist logarithmisch, weil sich die Geschwindigkeiten um ein Vielfaches unterscheiden. Die Punkte sind die gegebene Geschwindigkeit des Schiffs und die Reisegeschwindigkeit des Ekranoplans.

Die Energie des Neutrons aus D-T – aufgeteilt nach dem Impulserhaltungssatz.

Eingabe: `model(fusion; find=En[MeV]; mode=fusionq; fusion=dt)`

Ergebnis

$$E_n \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$$

Lösungsweg

- Die Energie einer Reaktion aus den Atommassen. Bei zwei Produkten teilt sich die Energie nach dem Impulserhaltungssatz: Das leichtere Teilchen erhält den größeren Teil. Gleichung des Modells:
  $Q = \left(\sum m_r - \sum m_p\right)c^2$
- Reaktion: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Massen vorher und nachher:
  $\sum m_r \approx 5{,}03015106\,\mathrm{u}, \quad \sum m_p \approx 5{,}01126817\,\mathrm{u}$
- Einsetzen:
  $Q = \Delta m\,c^2 \approx 0{,}018883 \cdot 931{,}494 \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV}$
- Die Produkte fliegen mit entgegengesetzten, gleich großen Impulsen auseinander, ihre kinetischen Energien stehen daher im umgekehrten Verhältnis der Massen.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $E_n = Q\dfrac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_n}$
- Einsetzen:
  $E_n = 17{,}59 \cdot \dfrac{4{,}0026}{4{,}0026 + 1{,}00866} \approx 14{,}05\,\mathrm{MeV}$
- Energie des Heliumkerns: $E_{\mathrm{He}} = Q - E_n \approx 3{,}54\,\mathrm{MeV}$

Wie viel Kohle 1 g D-T-Brennstoff ersetzt.

Eingabe: `model(fusion; find=coal[t]; m=1[g]; q=29[MJ_kg]; mode=fusionfuel; fusion=dt)`

Ergebnis

$$m_c \approx 11{,}63\,\mathrm{t}$$

Lösungsweg

- Gesucht m_c; gegeben: $m = 1\,\mathrm{g}, \quad q = 29\,\mathrm{MJ/kg}$
- Einheiten umrechnen: $m = 1\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
- Wie viel Energie eine Menge Brennstoff liefert – im Vergleich mit der Spaltung von Uran-235 (etwa 200 MeV je Kern) und mit Kohle. Gleichung des Modells:
  $e_f = \dfrac{Q}{\sum m_r}, \quad E = e_f\, m$
- Reaktion: ${}^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n$
- Energie einer Reaktion:
  $Q \approx 17{,}59\,\mathrm{MeV} = 2{,}818 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$
- Einsetzen
  $e_f = \dfrac{2{,}818 \cdot 10^{-12}}{8{,}353 \cdot 10^{-27}} \approx 3{,}374 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J/kg}$
- Einsetzen: $E = 3{,}374 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001 \approx 3{,}374 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J}$
- Einsetzen: $m_c = \dfrac{3{,}374 \cdot 10^{11}}{2{,}9 \cdot 10^{7}} \approx 11\,630\,\mathrm{kg}$
- Fusion hat keine kritische Masse. Bei einer Störung kühlt das Plasma ab und die Reaktion hört von selbst auf; der Reaktor kann nicht durchgehen wie ein Spaltreaktor.
- Einheiten umrechnen: $m_c \approx 11\,630\,\mathrm{kg} = 11{,}63\,\mathrm{t}$

Der Gamow-Peak der p-p-Kette im Sonnenkern.

Eingabe: `model(fusion; find=E0[keV]; Z1=1[one]; Z2=1[one]; A1=1[one]; A2=1[one];`

`T=1.34[keV]; mode=gamow; fusion=pp)`

Ergebnis

$$E_0 \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

Lösungsweg

- Gesucht E_0; gegeben:
  $Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad k_B T = 1{,}34\,\mathrm{keV}$
- Tatsächlich tunneln die Kerne durch die Barriere. Die Tunnelwahrscheinlichkeit e^(−√(E_G/E)) wächst steil mit der Energie, schnelle Kerne der Maxwell-Verteilung werden steil seltener. Ihr Produkt hat einen scharfen Gamow-Peak E_0, dort finden die Reaktionen statt. Der Gamow-Faktor wird als fertige Formel verwendet, seine Herleitung gehört zur Quantenmechanik. Gleichung des Modells

  $$P(E) \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}, \quad E_G = 2\mu c^2 (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2, \quad E_0 = \left($$

- Reduzierte Masse

  $$\mu c^2 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot 931\,494\,\mathrm{keV} \approx 465\,700\,\mathrm{keV}$$

- Einsetzen

  $$E_G = 2 \cdot 465\,700 \cdot (\pi \cdot 0{,}007297 \cdot 1 \cdot 1)^2 \approx 489{,}6\,\mathrm{keV}$$

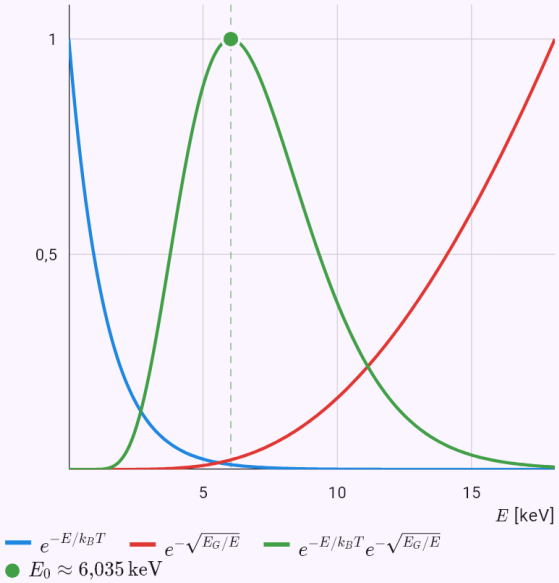
- Einsetzen

  $$E_0 = \left(\frac{489{,}6 \cdot (1{,}34)^2}{4} \right)^{1/3} \approx 6{,}035\,\mathrm{keV}$$

- Breite des Peaks: $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{E_0 k_B T} \approx 6{,}567\,\mathrm{keV}$
- Lage des Peaks in Vielfachen von k_BT: $\frac{E_0}{k_B T} \approx 4{,}503$
- Die Reaktionen finden meist in einem schmalen

Energieband um E_0 statt, ein Mehrfaches der mittleren Energie k_BT. Der Graph zeigt beide Funktionen und ihr Produkt, jede durch ihr Maximum geteilt.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Tripelprodukt mit den Parametern von ITER im Vergleich mit der Zündbedingung.

Eingabe: `model(plasma; find=ntt[keVs_m3]; n=1e20[per_m3]; T=13[keV]; tau=3.7[s];`

mode=lawson)

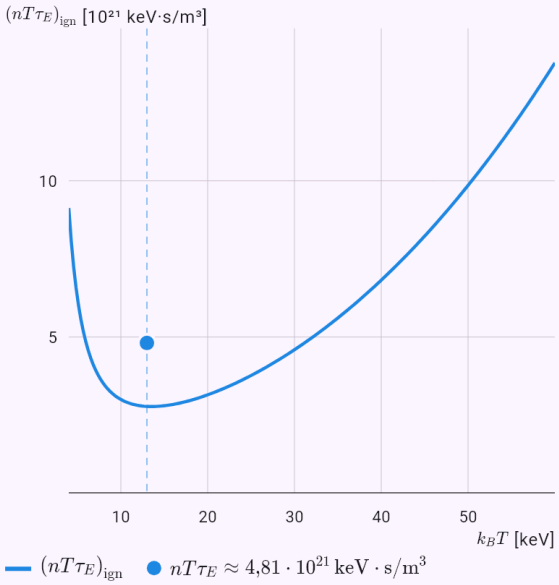
Ergebnis

$$nT\tau_E \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV \cdot s/m^3}$$

Lösungsweg

- Gesucht $nT\tau_E$; gegeben
  $n = 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}, \quad k_BT = 13\,\mathrm{keV}, \quad \tau_E = 3{,}7\,\mathrm{s}$
- Das Lawson-Kriterium: Das Plasma hält sich selbst heiß (Zündung), wenn die Heizung durch die Alphateilchen der D-T-Reaktionen die Wärmeverluste 3nk_BT/τ_E ausgleicht. Entscheidend ist das Tripelprodukt aus Dichte n, Temperatur T und Energieeinschlusszeit τ_E. Sein Minimum, etwa 3·10²¹ keV·s/m³, liegt bei etwa 14 keV. Gleichung des Modells
  $$\frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle E_\alpha \geq \frac{3nk_BT}{\tau_E} \Rightarrow nT\tau_E \geq \frac{12(k_BT)^2}{E_\alpha\langle\sigma v\rangle}$$
- Reaktionsrate D-T (Anpassung)
  $\langle\sigma v\rangle(13\,\mathrm{keV}) \approx 2{,}073 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$
- Einsetzen
  $$(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}} = \frac{12 \cdot (13)^2}{3520 \cdot 2{,}073 \cdot 10^{-22}} \approx 2{,}779 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV \cdot s}$$
- Einsetzen
  $nT\tau_E = 10^{20} \cdot 13 \cdot 3{,}7 \approx 4{,}81 \cdot 10^{21}\,\mathrm{keV \cdot s/m^3}$
- Das Tripelprodukt reicht zur Zündung: Die Alpha-Heizung deckt die Verluste – $\frac{nT\tau_E}{(nT\tau_E)_{\mathrm{ign}}} \approx 1{,}731$
- Das kleinste nötige Tripelprodukt, etwa 3·10²¹ keV·s/m³, liegt bei etwa 14 keV. Die Bremsstrahlungsverluste werden hier vernachlässigt.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die D-T-Reaktionsrate bei 10 keV als Integral mit der Simpsonregel.

Eingabe: `model(plasma; find=sv[m3_s]; T=10[keV]; mode=reactivity; fuelmix=dt)`

Ergebnis

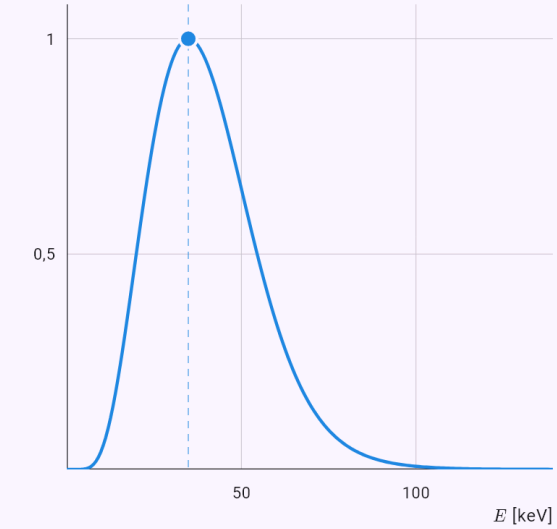
$$\langle \sigma v \rangle \approx 1{,}142 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\langle \sigma v \rangle$; gegeben: $k_B T = 10\,\mathrm{keV}$
- Die Reaktionsrate ⟨σv⟩ ist der Wirkungsquerschnitt σ(E), gemittelt über die Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeiten. Sie wird als Integral mit der Simpsonregel berechnet und mit einer veröffentlichten Anpassung verglichen. Die Wirkungsquerschnitte stammen von Bosch und Hale (Nuclear Fusion, 1992). Gleichung des Modells
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE$$
- Reaktion: ${}^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n$
- Wirkungsquerschnitt (Bosch-Hale):
  $$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E\, e^{B_G/\sqrt{E}}}, \quad B_G \approx 34{,}38\,\sqrt{\mathrm{keV}}$$
- Simpsonregel: $n = 100, \quad h = \frac{40 k_B T}{n} = 4\,\mathrm{keV}$
- Integral
  $$I = \int_0^{40 k_B T} \sigma(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\, dE \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 +$$
- Werte in SI
  $$\mu \approx 2{,}005 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}, \quad k_B T \approx 1{,}602 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}, \quad I \approx 2,$$
- Einsetzen
  $$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \cdot 2{,}005 \cdot 10^{-27}}} \cdot \left(1{,}602 \cdot 10^{-15}\right)^{-3/2} \cdot 2{,}055$$
- Vergleich mit der Anpassung
  $\langle \sigma v \rangle_{\mathrm{BH}} \approx 1{,}136 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{m^3/s}, \quad \delta \approx 0{,}5\,\%$

- Der Integrand zählt vor allem um den Gamow-Peak, deshalb reicht die Integration bis 40 k_BT. Der Unterschied zur Anpassung liegt im Prozentbereich.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Larmorradius eines Alphateilchens aus der Fusion in 5 T.

Eingabe: `model(plasma; find=rL[cm]; m=4.00151[u]; Z=2[one]; Ek=3520[keV]; B=5[T];`

`mode=larmor; particle=alpha)`

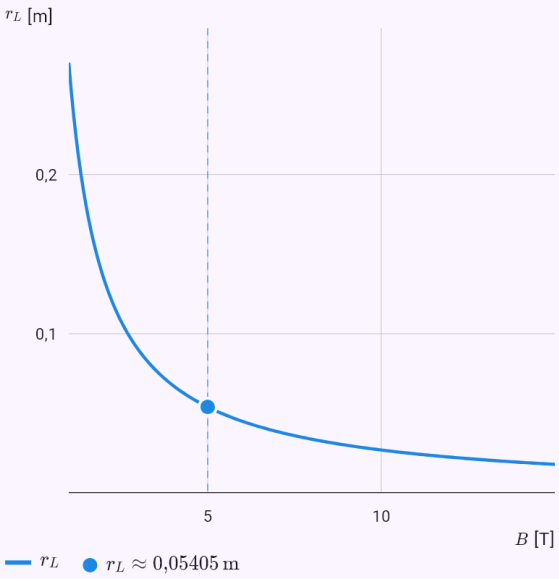
Ergebnis

$$r_L \approx 5{,}405\,\text{cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht r_L; gegeben:
  $m = 4{,}002\,\text{u}, \quad Z = 2, \quad E_k = 3520\,\text{keV}, \quad B = 5\,\text{T}$
- Ein geladenes Teilchen im Magnetfeld kreist um eine Feldlinie (Larmorradius), deshalb hält ein Magnetfeld das heiße Plasma von den Wänden fern. Die Rechnung ist relativistisch, bei langsamen Ionen ist γ ≈ 1. Gleichung des Modells: $r_L = \dfrac{p}{|Z|eB} = \dfrac{\gamma m v}{|Z|eB}, \quad f_c = \dfrac{|Z|eB}{2\pi\gamma m}$
- Masse: $m \approx 6{,}645 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- Lorentzfaktor und Geschwindigkeit
  $\gamma = 1 + \dfrac{E_k}{mc^2} \approx 1{,}00094, \quad v \approx 1{,}302 \cdot 10^{7}\,\text{m/s} \approx 0{,}04$
- Impuls
  $p = \dfrac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}{c} \approx 8{,}659 \cdot 10^{-20}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
- Einsetzen
  $r_L = \dfrac{8{,}659 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \approx 0{,}05405\,\text{m}$
- Ionen im Tokamak kreisen auf Radien von Millimetern bis Zentimetern, deshalb hält das Magnetfeld sie von den Wänden fern.
- Einheiten umrechnen: $r_L \approx 0{,}05405\,\text{m} = 5{,}405\,\text{cm}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Lorentzfaktor eines Protons im LHC.

Eingabe: `model(relativity; find=gamma[one]; m=938.272[MeV_c2]; Ek=6800[GeV]; mode=lorentz;`

`given=kinetic; particle=proton)`

Ergebnis

$$\gamma \approx 7248{,}37$$

Lösungsweg

- Gesucht γ; gegeben:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 6800\,\mathrm{GeV}$
- Einheiten umrechnen:
  $m = 938{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Aus der Geschwindigkeit (als Bruchteil von c) oder der kinetischen Energie werden γ, Geschwindigkeit, Gesamtenergie und Impuls berechnet. Ein Proton im LHC (6,8 TeV) ist nur einige Meter pro Sekunde langsamer als das Licht. Gleichung des Modells
  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \gamma m c^2, \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)$
- Ruheenergie: $mc^2 \approx 0{,}9383\,\mathrm{GeV}$
- Einsetzen: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{6800}{0{,}9383} \approx 7248$
- Geschwindigkeit: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}9999999905$
- Wie viel langsamer als das Licht:
  $1 - \beta \approx 9{,}517 \cdot 10^{-9}, \quad c - v \approx 2{,}853\,\mathrm{m/s}$
- Ein ultrarelativistisches Teilchen: Die Energie ist fast ganz kinetisch, die Geschwindigkeit weicht von c nur minimal ab.

Wie viele Myonen aus 15 km Höhe dank Zeitdilatation den Boden erreichen.

Eingabe: `model(relativity; find=surv[pct]; m=105.658[MeV_c2]; Ek=4[GeV]; tau=2.197[us];`

`d=15[km]; mode=dilation; given=kinetic; unstable=muon)`

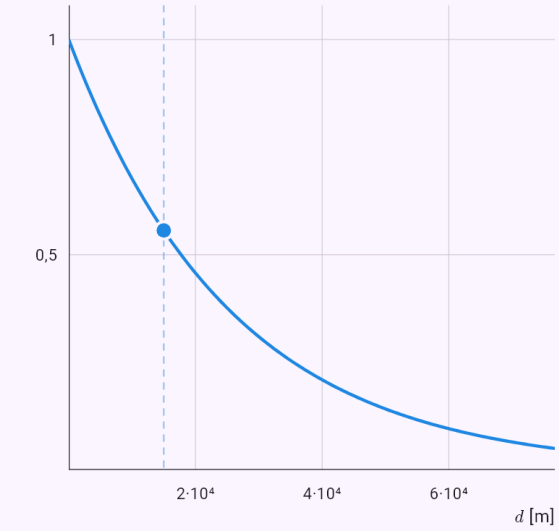
Ergebnis

$$\frac{N}{N_0} \approx 55{,}64\,\%$$

Lösungsweg

- Gesucht $\frac{N}{N_0}$; gegeben
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2, \quad E_k = 4\,\mathrm{GeV}, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s},$
- Einheiten umrechnen
  $m = 105{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 = 0{,}1057\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad \tau_0 = 2{,}197\,\mu\mathrm{s}$
- Ein instabiles Teilchen zerfällt mit seiner eigenen mittleren Lebensdauer τ_0. Im Labor vergeht seine Zeit γ-mal langsamer, es fliegt also γ-mal weiter. Ohne Zeitdilatation würden die in 15 km Höhe entstehenden Myonen den Boden kaum erreichen. Gleichung des Modells: $\tau = \gamma\tau_0, \quad L = \gamma\beta c\tau_0, \quad \frac{N}{N_0} = e^{-d/L}$
- Einsetzen: $\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{4}{0{,}1057} \approx 38{,}86$
- Geschwindigkeit: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0{,}999668807$
- Einsetzen
  $L = 38{,}86 \cdot 0{,}9997 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 2{,}197 \cdot 10^{-6} \approx 25\,590\,\mathrm{1}$
- Einsetzen: $\frac{N}{N_0} = e^{-15\,000/25\,590} \approx 0{,}5564$
- Ohne Zeitdilatation käme der Anteil an:
  $\frac{N}{N_0}|_{\gamma=1} = e^{-d/(\beta c\tau_0)} \approx 1{,}277 \cdot 10^{-10}$
- Im eigenen System des Teilchens vergeht die Zeit nicht langsamer, aber die Strecke verkürzt sich (Längenkontraktion). Beide Sichten ergeben dieselbe Zahl der Zerfälle.
- Einheiten umrechnen: $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}5564 \; = 55{,}64\,\%$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Stoßenergie eines LHC-Strahls auf ein festes Target.

Eingabe: `model(accelerator; find=fixed[GeV]; E=6800[GeV]; m=0.938272[GeV_c2];`

`mode=collision; machine=lhc)`

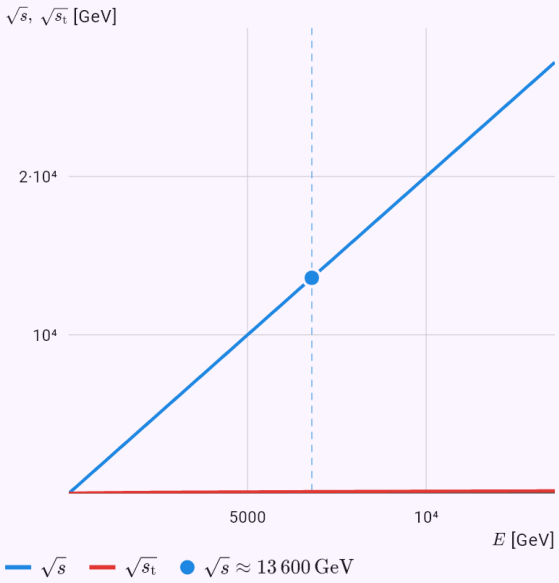
Ergebnis

$$\sqrt{s_t} \approx 113\,\mathrm{GeV}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\sqrt{s_t}$; gegeben:
  $E = 6800\,\mathrm{GeV}, \quad m = 0{,}9383\,\mathrm{GeV}/c^2$
- Bei gegenläufigen Strahlen geht die ganze Energie beider Teilchen in den Stoß: √s = 2E. Ein Strahl auf ein festes Target verbraucht den Großteil seiner Energie für die Bewegung des Schwerpunkts, √s wächst nur mit der Wurzel aus E. Deshalb baut man Collider. Gleichung des Modells: $\sqrt{s} = 2E, \quad \sqrt{s_t} = \sqrt{2\left(mc^2\right)^2 + 2E\,mc^2}$
- √s ist die invariante Masse des Systems: die Energie, die für neue Teilchen zur Verfügung steht.
- Einsetzen
  $\sqrt{s_t} = \sqrt{2 \cdot (0{,}9383)^2 + 2 \cdot 6800 \cdot 0{,}9383} \approx 113\,\mathrm{GeV}$
- Gegenläufige Strahlen: $\sqrt{s} = 2E \approx 13\,600\,\mathrm{GeV}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Energieverlust eines Elektrons je Umlauf im LEP.

Eingabe: `model(accelerator; find=U0[GeV]; E=104.5[GeV]; m=0.000511[GeV_c2]; R=3.096[km];`

```
mode=synchrotron; machine=lep)
```

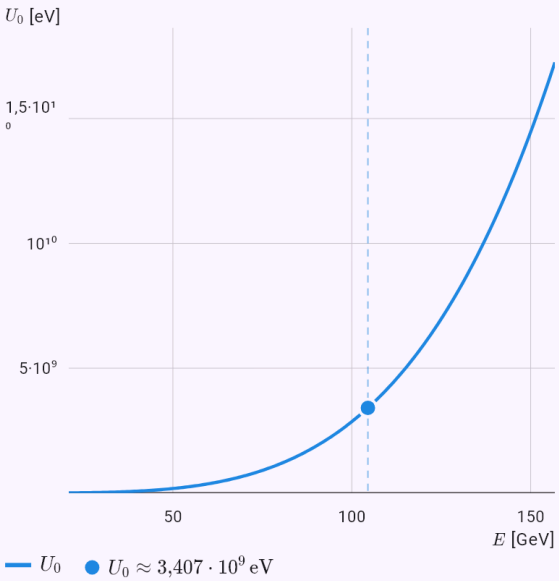
Ergebnis

$$U_0 \approx 3{,}407\,\mathrm{GeV}$$

Lösungsweg

- Gesucht U_0; gegeben
  $E = 104{,}5\,\mathrm{GeV}, \quad m = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/c^2, \quad R = 3{,}0$
- Einheiten umrechnen: $R = 3{,}096\,\mathrm{km} = 3096\,\mathrm{m}$
- Ein geladenes Teilchen auf einer gekrümmten Bahn strahlt (Synchrotronstrahlung). Der Verlust je Umlauf wächst mit γ⁴, bei gleicher Energie also mit 1/m⁴. Ein Elektron verliert 10¹³-mal mehr als ein Proton, deshalb endete LEP bei 104 GeV und der LHC beschleunigt Protonen. Gleichung des Modells:
  $U_0 = \dfrac{e^2 \beta^3 \gamma^4}{3\varepsilon_0 R}, \quad P = \dfrac{U_0}{e} I$
- Lorentzfaktor: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \approx 204\,500$
- Einsetzen
  $U_0 = \dfrac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1)^3 \cdot (204\,500)^4}{3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3096} \approx 5{,}459 \cdot 10^{-1}$
- In Elektronenvolt: $U_0 \approx 3{,}407 \cdot 10^9\,\mathrm{eV}$
- Elektronen strahlen 10¹³-mal mehr als Protonen gleicher Energie: $\dfrac{U_{0,e}}{U_{0,p}} = \left(\dfrac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1{,}137 \cdot 10^{13}$
- Die andere Teilchenart bei gleicher Energie und Bahn:
  $U_0' \approx 2{,}998 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$
- Einheiten umrechnen:
  $U_0 \approx 5{,}459 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3{,}407\,\mathrm{GeV}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

44. Statik und Festigkeitslehre

Das Formular Statik (Anwendungen, Bereich Technik) hat drei Modi. Ein Träger liegt auf der x-Achse von 0 bis L und wird von einem Festlager, einem Loslager oder einer Einspannung gehalten; belasten können Sie ihn mit senkrechten und schrägen Kräften, Momenten und einer Streckenlast – gleichmäßig, dreieckig oder trapezförmig. Mehrere Kräfte kommen in ein Feld, durch Leerzeichen getrennt, ihre Lagen und Winkel in derselben Reihenfolge. Innere Gelenke machen einen [[gerberBeam|Gerberträger]].

Der Lösungsweg beginnt mit dem [[freeBody|Freischneiden]]: die Reaktionen ersetzen die Lager, und der Rang der Gleichgewichtsbedingungen zeigt die [[staticDeterminacy|statische Bestimmtheit]]. Ist der Träger statisch unbestimmt oder unbrauchbar gelagert, sagt die App es mit dem Grad der Unbestimmtheit. Die Gleichungen werden nacheinander gelöst – immer die mit nur einer übrigen Unbekannten (ein Moment um ein Lager, beim Gerberträger zuerst der Teil hinter dem Gelenk) –, eine nicht benutzte Gleichung dient als Probe.

Die Schnittgrößen N, T und M listet die App abschnittsweise zwischen den markanten Punkten auf und findet das größte Biegemoment nach dem [[schwedlerTheorem|Satz von Schwedler]]: dort, wo die Querkraft null ist oder springt. Unter der Skizze des Trägers mit Lasten und Reaktionen stehen die Verläufe von N, T und M im selben Längenmaßstab.

Der Modus Körper in der Ebene berechnet die Reaktionen eines Körpers, gegeben durch die Lagerpunkte und die Angriffspunkte der Kräfte – zum Beispiel einer Leiter an der Wand. Beim Loslager wählen Sie die Richtung der Reaktion mit dem Winkel β.

Die Querschnittswerte sind die Fläche, der [[centroid|Schwerpunkt]], die Flächenträgheitsmomente nach dem [[parallelAxisTheorem|Satz von Steiner]], die [[sectionModulus|Widerstandsmomente]] und bei unsymmetrischen Querschnitten die [[principalAxes|Hauptachsen]] – für Rechteck, Rohr, T-, I-, U-, L-Profile und einen aus Rechtecken und Kreisen mit Löchern zusammengesetzten Querschnitt. Das Bild zeigt den Querschnitt maßstäblich mit Schwerpunkt und Achsen. Die Ausrundungen der Walzprofile werden vernachlässigt.

Das Formular Tankwagen mit Flüssigkeit berechnet einen teilweise gefüllten Tankwagen beim Bremsen, Anfahren und in der Kurve. Die Oberfläche neigt sich senkrecht zur Resultierenden aus Gewicht und Trägheitskraft (tan θ = a/g), der Schwerpunkt der Flüssigkeit wandert und mit ihm der des Ganzen. Die Achslasten sind die Reaktionen eines Trägers auf zwei Lagern; in der Kurve berechnet die App die [[loadTransferRatio|Lastverlagerung]] auf die äußeren Räder und die kritische Geschwindigkeit, bei der der Tankwagen kippt – im Vergleich mit fester Ladung und mit der Eigenfrequenz des [[sloshing|Schwappens]]. Eine interaktive Demo gibt es auf mathtrace.app unter „Probier es aus“.

Das Formular Trägerauslegung vergleicht drei Varianten eines Biegeträgers: das leichteste Normprofil aus den Tabellen (IPE, HEB, Rund- und Rechteckrohre), den optimalen konstanten Querschnitt einer

gewählten Form (Rechteck, Kreis, Rohr mit begrenzter Wandschlankheit) und einen [[uniformStrengthBeam|Träger gleicher Festigkeit]]. Es prüft die Festigkeit, die zulässige Durchbiegung L/n und den Schub am freien Ende; der Lösungsweg zeigt, welche Bedingung [[activeConstraint|aktiv]] ist, das Diagramm den Querschnitt, das Moment und die Durchbiegung über die Länge. Anregung war eine Diplomarbeit zur Optimierung: ein durch Optimierung ausgelegter Arm war deutlich leichter als einer nach Tabellen.

Beispiele

Ein Einfeldträger mit Einzelkraft und Streckenlast auf einem Teil: Reaktionen, Abschnitte und größtes Moment.

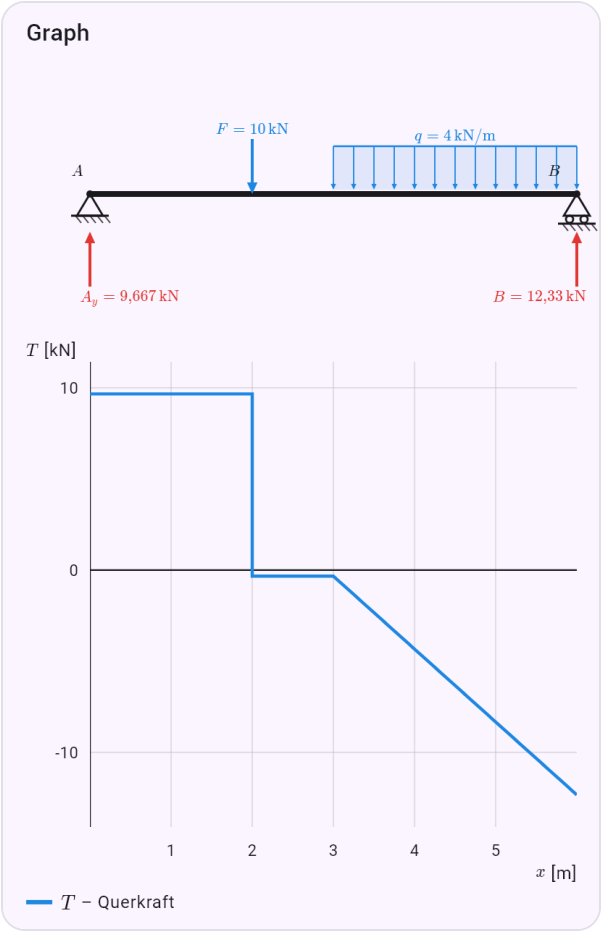
Eingabe: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=6[m]; supA=pin; supB=roller; F=10[kN]; xF=2[m]; q=4[kN_m]; qa=3[m]; qb=6[m])`

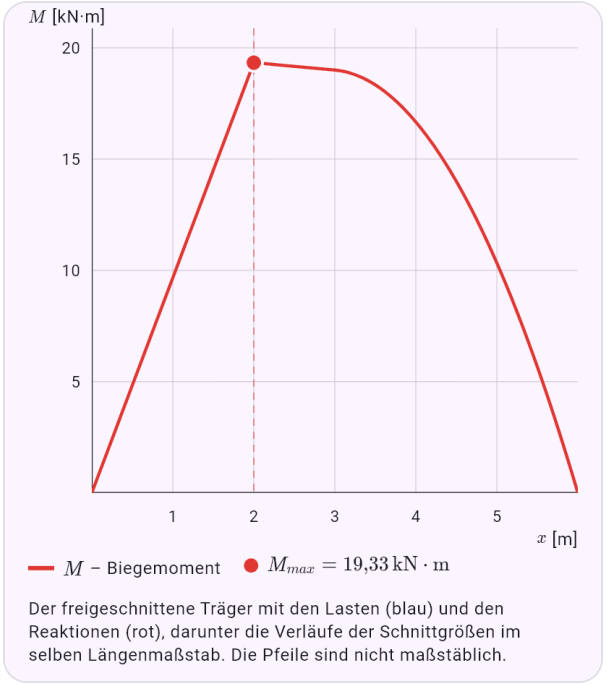
Ergebnis

$M_{max} \approx 19{,}33\,\mathrm{kN \cdot m}$
$x \approx 2\,\mathrm{m}$

Lösungsweg

- Gesucht M_{max}; gegeben
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}, \quad q_a = 4\,\mathrm{kN/m},$
- Der Träger liegt auf der x-Achse von 0 bis L. Ein Festlager überträgt eine waagrechte und eine senkrechte Kraft, ein Loslager nur die Kraft senkrecht zur Unterlage, eine Einspannung zusätzlich ein Moment. Eine Kraft schließt mit dem Träger den Winkel α ein (90° = senkrecht nach unten), ein Moment ist gegen den Uhrzeigersinn positiv, eine Streckenlast nach unten positiv. Innere Gelenke machen daraus einen Gerberträger: Im Gelenk ist das Biegemoment null, das gibt eine Gleichung mehr. Die Verläufe von N, T und M entstehen abschnittsweise nach dem Satz von Schwedler. Gleichung des Modells:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultierende der Streckenlast (im Schwerpunkt der Lastfläche):
  $Q = q\,l = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m}$
- Unbekannte Reaktionen: $A_x,\ A_y,\ B$
- Statisch bestimmt: so viele Unbekannte wie unabhängige Gleichungen (n Unbekannte, e Gleichungen, h Rang): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$
- Summe der waagrechten Kräfte:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Probe mit einer nicht benutzten Gleichung:
  $\sum F_y = 9{,}667 + 12{,}33 - 10 - 12 = 0$
- Satz von Schwedler: Die Ableitung des Biegemoments ist die Querkraft, die Ableitung der Querkraft die negative Streckenlast. Wo T null ist, hat M ein Extremum.
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [0;\ 2]: \quad T = 9{,}667, \quad M = 9{,}667x$
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [2;\ 3]: \quad T = -0{,}3333, \quad M = 20 - 0{,}3333x$
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [3;\ 6]: \quad T = 11{,}67 - 4x, \quad M = 2 + 11{,}67x - 2x^2$
- Das größte Biegemoment liegt beim Sprung der Querkraft: $M_{max} = M(2) = 19{,}33\,\mathrm{kN \cdot m}$
- Ein positives Biegemoment biegt den Träger nach unten (die unteren Fasern unter Zug), ein negatives nach oben, typisch über einem Lager oder an der Einspannung.





Der freigeschnittene Träger mit den Lasten (blau) und den Reaktionen (rot), darunter die Verläufe der Schnittgrößen im selben Längenmaßstab. Die Pfeile sind nicht maßstäblich.

Ein Kragträger mit schräger Kraft am Ende und gleichmäßiger Last: waagrechte und senkrechte Reaktion und Einspannmoment.

Eingabe: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=3[m]; supA=fixed; supB=none; F=8[kN];`

```
xF=3[m]; aF=60[deg]; q=2[kN_m])
```

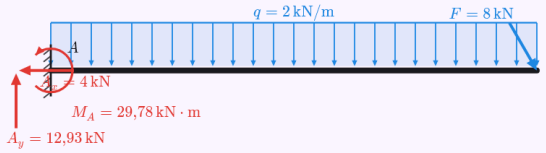
Ergebnis

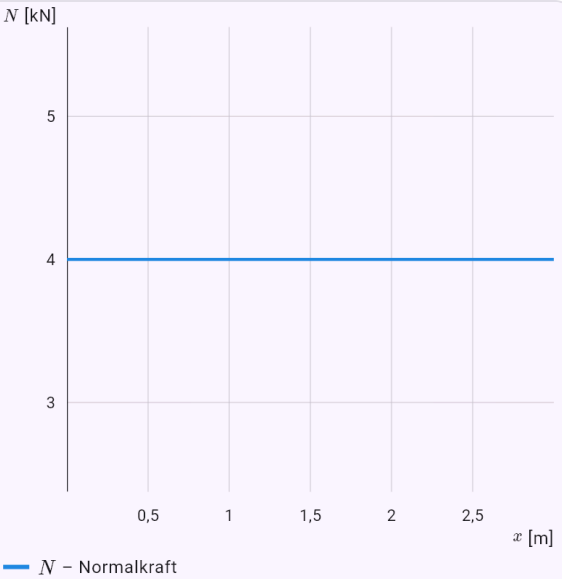
$$A_x = -4\,\mathrm{kN}$$
$$A_y = 12{,}93\,\mathrm{kN}$$
$$M_A = 29{,}78\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$

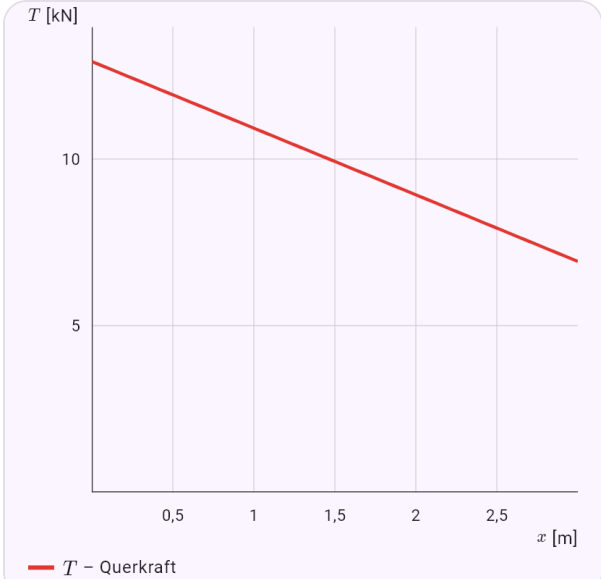
Lösungsweg

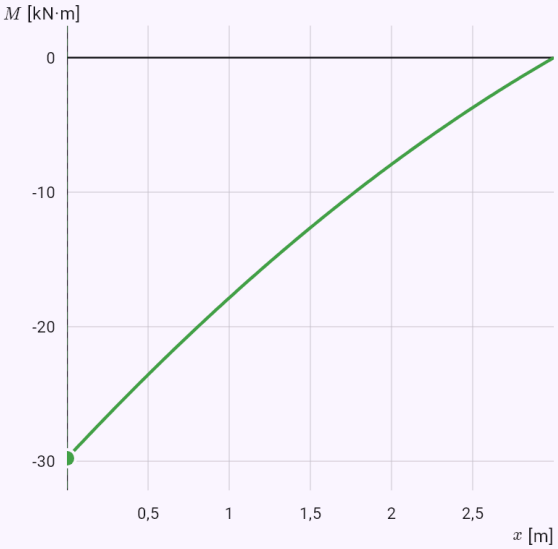
- Gesucht R; gegeben
  $L = 3\,\mathrm{m},\quad F = 8\,\mathrm{kN},\quad x_F = 3\,\mathrm{m},\quad \alpha = 60\,^\circ,\quad q_a =$
- Der Träger liegt auf der x-Achse von 0 bis L. Ein Festlager überträgt eine waagrechte und eine senkrechte Kraft, ein Loslager nur die Kraft senkrecht zur Unterlage, eine Einspannung zusätzlich ein Moment. Eine Kraft schließt mit dem Träger den Winkel α ein (90° = senkrecht nach unten), ein Moment ist gegen den Uhrzeigersinn positiv, eine Streckenlast nach unten positiv. Innere Gelenke machen daraus einen Gerberträger: Im Gelenk ist das Biegemoment null, das gibt eine Gleichung mehr. Die Verläufe von N, T und M entstehen abschnittsweise nach dem Satz von Schwedler. Gleichung des Modells:
  $\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M = 0$
- Resultierende der Streckenlast (im Schwerpunkt der Lastfläche):
  $Q = q\,l = 2\cdot 3 = 6\,\mathrm{kN},\quad x_Q = 0 + \dfrac{3}{2} = 1{,}5\,\mathrm{m}$
- Zerlegung der schrägen Kraft:
  $F_x = F\cos\alpha = 4\,\mathrm{kN},\quad F_y = -F\sin\alpha = -6{,}928\,\mathrm{kN}$
- Unbekannte Reaktionen: $A_x,\ A_y,\ M_A$
- Statisch bestimmt: so viele Unbekannte wie unabhängige Gleichungen (n Unbekannte, e Gleichungen, h Rang): $n = 3,\quad e = 3,\quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_A = 0:\quad M_A - 6{,}928\cdot 3 - 6\cdot 1{,}5 = 0 \quad\Rightarrow\quad M$
- Summe der waagrechten Kräfte:
  $\sum F_x = 0:\quad A_x + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad A_x = -4\,\mathrm{kN}$
- Summe der senkrechten Kräfte
  $\sum F_y = 0:\quad A_y - 6{,}928 - 6 = 0 \quad\Rightarrow\quad A_y = 12{,}93$

Graph









Der freigeschnittene Träger mit den Lasten (blau) und den Reaktionen (rot), darunter die Verläufe der Schnittgrößen im selben Längenmaßstab. Die Pfeile sind nicht maßstäblich.

Ein Gerberträger auf drei Lagern mit Gelenk: die Rechnung beginnt mit dem Teil hinter dem Gelenk.

Eingabe: `model(statics; mode=beam; find=Mmax[kNm]; L=12[m]; supA=pin; supB=roller; xB=6[m];`

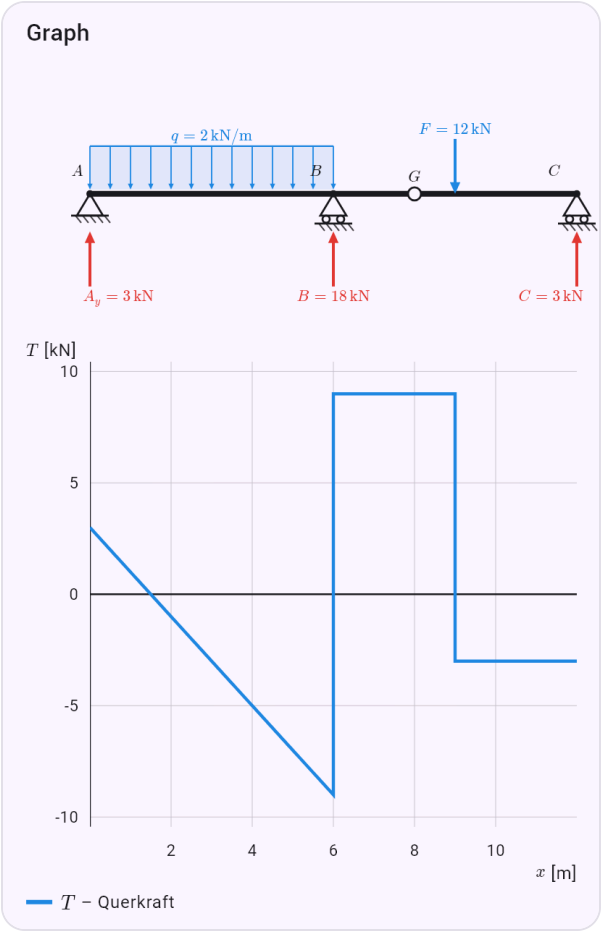
```
xs=12[m]; xh=8[m]; F=12[kN]; xF=9[m]; q=2[kN_m]; qa=0[m]; qb=6[m])
```

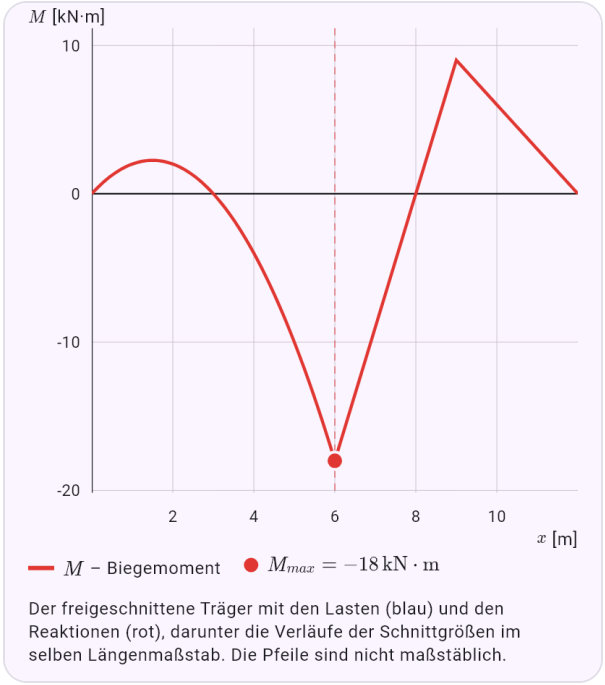
Ergebnis

$$M_{max} \approx -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$
$$x \approx 6\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht M_{max}; gegeben
  $L = 12\,\mathrm{m}, \quad x_B = 6\,\mathrm{m}, \quad x_s = 12\,\mathrm{m}, \quad x_G = 8\,\mathrm{m}, \quad F$
- Der Träger liegt auf der x-Achse von 0 bis L. Ein Festlager überträgt eine waagrechte und eine senkrechte Kraft, ein Loslager nur die Kraft senkrecht zur Unterlage, eine Einspannung zusätzlich ein Moment. Eine Kraft schließt mit dem Träger den Winkel α ein (90° = senkrecht nach unten), ein Moment ist gegen den Uhrzeigersinn positiv, eine Streckenlast nach unten positiv. Innere Gelenke machen daraus einen Gerberträger: Im Gelenk ist das Biegemoment null, das gibt eine Gleichung mehr. Die Verläufe von N, T und M entstehen abschnittsweise nach dem Satz von Schwedler. Gleichung des Modells:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Resultierende der Streckenlast (im Schwerpunkt der Lastfläche):
  $Q = q\,l = 2\cdot 6 = 12\,\mathrm{kN}, \quad x_Q = 0 + \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{m}$
- Unbekannte Reaktionen: $A_x,\ A_y,\ B,\ C$
- Statisch bestimmt: so viele Unbekannte wie unabhängige Gleichungen (n Unbekannte, e Gleichungen, h Rang): $n = 4, \quad e = 3 + 1 = 4, \quad h(\mathbf{A}) = 4$
- Das Moment des Teils rechts vom Gelenk um das Gelenk ist null:
  $\sum M_G = 0: \quad C\cdot 4 - 12\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3\,\mathrm{kN}$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_A = 0: \quad B\cdot 6 + 3\cdot 12 - 12\cdot 9 - 12\cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- Das Moment des Teils links vom Gelenk um das Gelenk ist null
  $\sum M_G = 0: \quad -A_y\cdot 8 - 18\cdot 2 + 12\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A$
- Summe der waagrechten Kräfte:
  $\sum F_x = 0: \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$
- Probe mit einer nicht benutzten Gleichung:
  $\sum F_y = 3 + 18 + 3 - 12 - 12 = 0$
- Satz von Schwedler: Die Ableitung des Biegemoments ist die Querkraft, die Ableitung der Querkraft die negative Streckenlast. Wo T null ist, hat M ein Extremum.
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [0;\,6]: \quad T = 3 - 2x, \quad M = 3x - x^2$
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [6;\,9]: \quad T = 9, \quad M = -72 + 9x$
- Schnittgrößen im Abschnitt (x in m, Kräfte in kN, Momente in kN·m):
  $x \in [9;\,12]: \quad T = -3, \quad M = 36 - 3x$
- Das größte Biegemoment liegt beim Sprung der Querkraft: $M_{max} = M(6) = -18\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Ein positives Biegemoment biegt den Träger nach unten (die unteren Fasern unter Zug), ein negatives nach oben, typisch über einem Lager oder an der Einspannung.





Der freigeschnittene Träger mit den Lasten (blau) und den Reaktionen (rot), darunter die Verläufe der Schnittgrößen im selben Längenmaßstab. Die Pfeile sind nicht maßstäblich.

Eine Leiter an einer glatten Wand mit dem Gewicht der Leiter und einer Person: Reaktionen am Boden und an der Wand.

Eingabe: `model(statics; mode=body; find=R[kN]; supA=pin; Ax=0[m]; Ay=0[m]; supB=roller;`

`Bx=3[m]; By=4[m]; Ba=180[deg]; P=0.2 0.8[kN]; Px=1.5 2.25[m]; Py=2 3[m])`

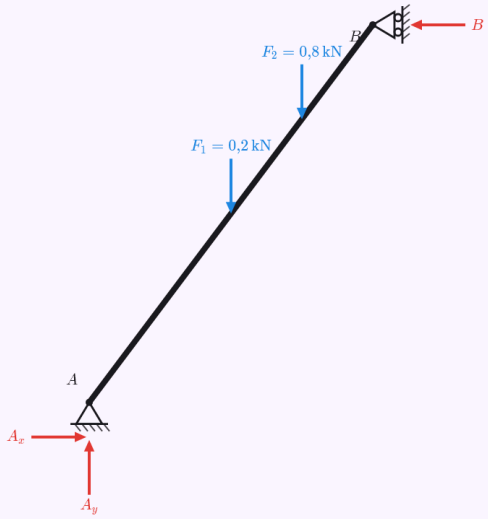
Ergebnis

$$A_x = 0{,}525\,\text{kN}$$
$$A_y = 1\,\text{kN}$$
$$B = 0{,}525\,\text{kN}$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben
  $x_A = 0\,\text{m}, \quad y_A = 0\,\text{m}, \quad x_B = 3\,\text{m}, \quad y_B = 4\,\text{m}, \quad \beta_B$
- Ein Körper in der Ebene, gegeben durch die Punkte der Lager und die Angriffspunkte der Kräfte (x nach rechts, y nach oben). Beim Loslager gibt der Winkel β die Richtung der Reaktion an: 90° von unten, 0° von einer Wand links nach rechts, 180° von einer Wand rechts nach links. Beispiel: eine Leiter an einer glatten Wand – der Fuß wird durch Reibung am Boden gehalten (Festlager), das obere Ende gleitet an der Wand (Loslager). Gleichung des Modells:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Unbekannte Reaktionen: $A_x,\ A_y,\ B$
- Statisch bestimmt: so viele Unbekannte wie unabhängige Gleichungen (n Unbekannte, e Gleichungen, h Rang): $n = 3, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_A = 0: \quad B \cdot 4 - 0{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$
- Summe der waagrechten Kräfte
  $\sum F_x = 0: \quad A_x - 0{,}525 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0{,}525\,\text{kN}$
- Momentensumme um ein Lager – eine Gleichung mit einer Unbekannten
  $\sum M_B = 0: \quad 0{,}525 \cdot 4 - A_y \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}7$
- Probe mit einer nicht benutzten Gleichung:
  $\sum F_y = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

Graph



Der freigeschnittene Körper: Lasten blau, Lagerreaktionen rot. Die Pfeile sind nicht maßstäblich. Die Werte der Reaktionen stehen im Ergebnis.

Eine Einspannung mit Loslager ist einfach statisch unbestimmt.

Eingabe: `model(statics; mode=beam; find=R[kN]; L=5[m]; supA=fixed; supB=roller; F=10[kN];`

xF=2[m])

Ergebnis

$$s = n - h = 1$$

Lösungsweg

- Gesucht R; gegeben:
  $L = 5\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad x_F = 2\,\mathrm{m}$
- Der Träger liegt auf der x-Achse von 0 bis L. Ein Festlager überträgt eine waagrechte und eine senkrechte Kraft, ein Loslager nur die Kraft senkrecht zur Unterlage, eine Einspannung zusätzlich ein Moment. Eine Kraft schließt mit dem Träger den Winkel α ein (90° = senkrecht nach unten), ein Moment ist gegen den Uhrzeigersinn positiv, eine Streckenlast nach unten positiv. Innere Gelenke machen daraus einen Gerberträger: Im Gelenk ist das Biegemoment null, das gibt eine Gleichung mehr. Die Verläufe von N, T und M entstehen abschnittsweise nach dem Satz von Schwedler. Gleichung des Modells:
  $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$
- Unbekannte Reaktionen: $A_x,\ A_y,\ M_A,\ B$
- Statisch unbestimmt: mehr Unbekannte als unabhängige Gleichungen:
  $n = 4, \quad e = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad s = n - h = 1$
- Es gibt mehr unbekannte Reaktionen, als die Gleichgewichtsbedingungen liefern. Die fehlenden Gleichungen kommen aus der Verformung (z. B. keine Durchbiegung über einem Lager) – statisch unbestimmte Träger berechnet die App noch nicht. Der Grad s sagt, wie viele Lager überzählig sind.

Graph



Der freigeschnittene Träger mit den Lasten (blau) und den Reaktionen (rot), darunter die Verläufe der Schnittgrößen im selben Längenmaßstab. Die Pfeile sind nicht maßstäblich.

T-Querschnitt: Schwerpunkt, Flächenträgheitsmoment und Widerstandsmoment.

Eingabe: `model(statics; mode=section; shape=T; find=Wy[mm3]; b=100[mm]; h=120[mm];`

`tf=20[mm]; tw=20[mm])`

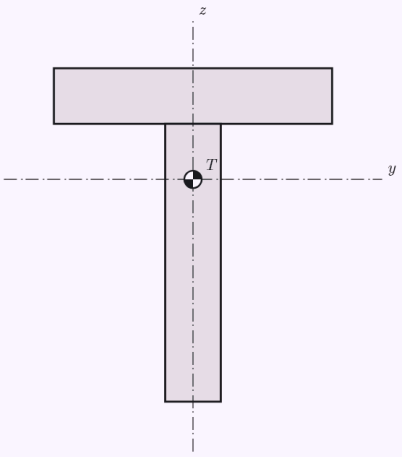
Ergebnis

$$W_y \approx 66\,670\,\mathrm{mm}^3$$

Lösungsweg

- Gesucht W_y; gegeben
  $b = 100\,\mathrm{mm}, \quad h = 120\,\mathrm{mm}, \quad t_f = 20\,\mathrm{mm}, \quad t_w = 20$
- Wir zerlegen den Querschnitt in Rechtecke und Kreise und ziehen die Löcher ab. Der Schwerpunkt ist der gewichtete Mittelwert der Teilschwerpunkte, die Flächenträgheitsmomente um die Schwerachsen liefert der Satz von Steiner. Die y-Achse ist waagrecht, z senkrecht, I_y bestimmt also die Biegung in der senkrechten Ebene. Aus dem Moment und dem Abstand der Randfasern folgt das Widerstandsmoment W, bei einem unsymmetrischen Querschnitt (L) auch die Hauptachsen. Die Ausrundungen der Walzprofile vernachlässigen wir, die Werte weichen daher etwas von den Tabellen ab. Gleichung des Modells
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \mathbf{\Lambda}$
- Teil des Querschnitts
  $1: \quad A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_1 =$
- Teil des Querschnitts
  $2: \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_2 =$
- Querschnittsfläche: $A = A_1 + A_2 = 4000\,\mathrm{mm}^2$
- Schwerpunkt als gewichteter Mittelwert der Teilschwerpunkte
  $y_T = \frac{2000 \cdot 50 + 2000 \cdot 50}{4000} = 50\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{2000 \cdot 11}{}$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $I_{y,1} = \left(\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot 30^2\right) = 1\,867\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $I_{y,2} = \left(\frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2\right) = 3\,467\,000\,\mathrm{mm}^4,$
- Flächenträgheitsmomente des ganzen Querschnitts
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 5\,333\,000\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$
- Widerstandsmomente (e = Abstand der Randfasern vom Schwerpunkt)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{5\,333\,000}{80} = 66\,670\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$
- Trägheitsradien
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 36{,}51\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 20{,}82\,\mathrm{mm}$

Graph



Der Querschnitt maßstäblich mit dem Schwerpunkt T und den Achsen y, z durch ihn; bei einem unsymmetrischen Querschnitt auch die Hauptachsen 1, 2.

Gleichschenkliger Winkel L: Deviationsmoment und Hauptachsen unter 45°.

Eingabe: `model(statics; mode=section; shape=L; find=I1[mm4]; b=100[mm]; h=100[mm];`

`t=10[mm])`

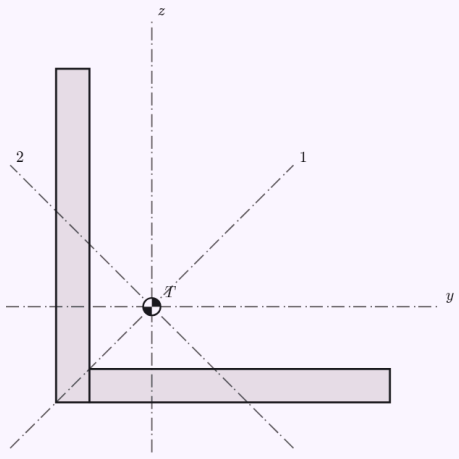
Ergebnis

$$I_1 \approx 2\,866\,000\,\text{mm}^4$$
$$I_2 \approx 734\,300\,\text{mm}^4$$
$$\alpha \approx 45^\circ$$

Lösungsweg

- Gesucht I_1; gegeben:
  $b = 100\,\text{mm}, \quad h = 100\,\text{mm}, \quad t = 10\,\text{mm}$
- Wir zerlegen den Querschnitt in Rechtecke und Kreise und ziehen die Löcher ab. Der Schwerpunkt ist der gewichtete Mittelwert der Teilschwerpunkte, die Flächenträgheitsmomente um die Schwerachsen liefert der Satz von Steiner. Die y-Achse ist waagrecht, z senkrecht, I_y bestimmt also die Biegung in der senkrechten Ebene. Aus dem Moment und dem Abstand der Randfasern folgt das Widerstandsmoment W, bei einem unsymmetrischen Querschnitt (L) auch die Hauptachsen. Die Ausrundungen der Walzprofile vernachlässigen wir, die Werte weichen daher etwas von den Tabellen ab. Gleichung des Modells
  $$A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \text{Σ}$$
- Teil des Querschnitts
  $$1: \quad A_1 = 10 \cdot 100 = 1000\,\text{mm}^2, \quad y_1 = 5\,\text{mm}, \quad z_1 =$$
- Teil des Querschnitts
  $$2: \quad A_2 = 90 \cdot 10 = 900\,\text{mm}^2, \quad y_2 = 55\,\text{mm}, \quad z_2 =$$
- Querschnittsfläche: $A = A_1 + A_2 = 1900\,\text{mm}^2$
- Schwerpunkt als gewichteter Mittelwert der Teilschwerpunkte
  $$y_T = \frac{1000 \cdot 5 + 900 \cdot 55}{1900} = 28{,}68\,\text{mm}, \quad z_T = \frac{1000 \cdot 5}{1}$$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $$I_{y,1} = \left(\frac{10 \cdot 100^3}{12} + 1000 \cdot 21{,}32^2\right) = 1\,288\,000\,\text{mm}^4,$$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $$I_{y,2} = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{12} + 900 \cdot (-23{,}68)^2\right) = 512\,300\,\text{mm}^4,$$
- Flächenträgheitsmomente des ganzen Querschnitts
  $$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1\,800\,000\,\text{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 1$$
- Deviationsmoment
  $$D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = -1\,066\,000\,\text{mm}^4$$
- Hauptträgheitsmomente
  $$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 2\,866\,0$$
- Drehung der Hauptachse 1 gegen die y-Achse:
  $$\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$
- Widerstandsmomente (e = Abstand der Randfasern vom Schwerpunkt)
  $$W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1\,800\,000}{71{,}32} = 25\,240\,\text{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} = \frac{1}{}$$
- Trägheitsradien
  $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 30{,}78\,\text{mm}$$

Graph



Der Querschnitt maßstäblich mit dem Schwerpunkt T und den Achsen y, z durch ihn; bei einem unsymmetrischen Querschnitt auch die Hauptachsen 1, 2.

Eine Platte mit außermittigem Rundloch: zusammengesetzter Querschnitt und verschobener Schwerpunkt.

Eingabe: `model(statics; mode=section; shape=composite; find=Iy[mm4]; rb=200[mm];`

```
rh=100[mm]; ry=0[mm]; rz=0[mm]; hd=40[mm]; hcy=60[mm]; hcz=60[mm])
```

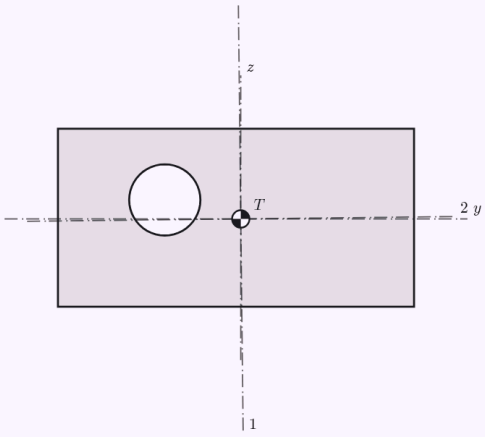
Ergebnis

$$I_y \approx 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4$$

Lösungsweg

- Gesucht I_y; gegeben
  $b = 200\,\mathrm{mm}, \quad h = 100\,\mathrm{mm}, \quad y = 0\,\mathrm{mm}, \quad z = 0\,\mathrm{mm}$
- Wir zerlegen den Querschnitt in Rechtecke und Kreise und ziehen die Löcher ab. Der Schwerpunkt ist der gewichtete Mittelwert der Teilschwerpunkte, die Flächenträgheitsmomente um die Schwerachsen liefert der Satz von Steiner. Die y-Achse ist waagrecht, z senkrecht, I_y bestimmt also die Biegung in der senkrechten Ebene. Aus dem Moment und dem Abstand der Randfasern folgt das Widerstandsmoment W, bei einem unsymmetrischen Querschnitt (L) auch die Hauptachsen. Die Ausrundungen der Walzprofile vernachlässigen wir, die Werte weichen daher etwas von den Tabellen ab. Gleichung des Modells
  $A = \sum A_i, \quad y_T = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_T = \frac{\sum A_i z_i}{A}, \quad I_y = \sum$
- Teil des Querschnitts
  $1: \quad A_1 = 200 \cdot 100 = 20\,000\,\mathrm{mm}^2, \quad y_1 = 100\,\mathrm{mm},$
- Loch (wird abgezogen)
  $2: \quad A_2 = -\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = -1257\,\mathrm{mm}^2, \quad y_2 = 60\,\mathrm{mm},$
- Querschnittsfläche: $A = A_1 - A_2 = 18\,740\,\mathrm{mm}^2$
- Schwerpunkt als gewichteter Mittelwert der Teilschwerpunkte
  $y_T = \frac{20\,000 \cdot 100 - 1257 \cdot 60}{18\,740} = 102{,}7\,\mathrm{mm}, \quad z_T = \frac{20}{}$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $I_{y,1} = \left(\frac{200 \cdot 100^3}{12} + 20\,000 \cdot 0{,}6704^2\right) = 1{,}668 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$
- Satz von Steiner: Eigenträgheitsmoment des Teils + Fläche × Quadrat des Achsabstands
  $I_{y,2} = -\left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1257 \cdot 10{,}67^2\right) = -268\,700\,\mathrm{mm}^4,$
- Flächenträgheitsmomente des ganzen Querschnitts
  $I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 1{,}641 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^4, \quad I_z = I_{z,1} + I_{z,2} =$
- Deviationsmoment
  $D_{yz} = \sum A_i (y_i - y_T)(z_i - z_T) = 536\,400\,\mathrm{mm}^4$
- Hauptträgheitsmomente
  $I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}: \quad I_1 = 6{,}44 \cdot 1$
- Drehung der Hauptachse 1 gegen die y-Achse
  $\tan 2\alpha = \frac{-2D_{yz}}{I_y - I_z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -89{,}36^\circ$
- Widerstandsmomente (e = Abstand der Randfasern vom Schwerpunkt)
  $W_y = \frac{I_y}{e_z} = \frac{1{,}641 \cdot 10^7}{50{,}67} = 323\,800\,\mathrm{mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{e_y} =$
- Trägheitsradien
  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 29{,}59\,\mathrm{mm}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 58{,}61\,\mathrm{mm}$

Graph



Der Querschnitt maßstäblich mit dem Schwerpunkt T und den Achsen y, z durch ihn; bei einem unsymmetrischen Querschnitt auch die Hauptachsen 1, 2.

Ein halb mit Wasser gefüllter Tankwagen bremst mit 5 m/s²: die Vorderachse trägt Dutzende Prozent mehr.

Eingabe: `model(tanker; mode=brake; find=Nf[kN]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; a=5[m_s2]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m]; W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t];`

`xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])`

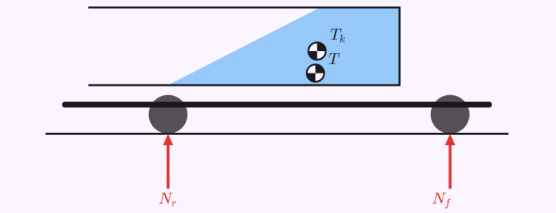
Ergebnis

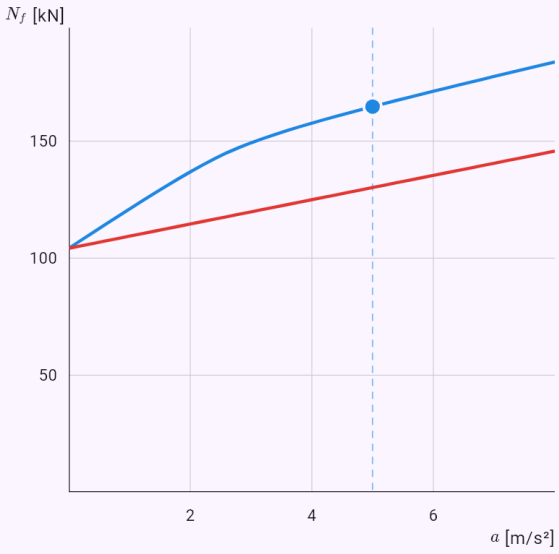
$$N_f \approx 164{,}7\,\mathrm{kN}$$

Lösungsweg

- Gesucht N_f; gegeben
  $\varphi = 50\,\%, \quad a = 5\,\mathrm{m/s^2}, \quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad L_n = 8$
- Bremsen mit der Verzögerung a: die Flüssigkeit drängt nach vorn, die Oberfläche neigt sich um θ und der Schwerpunkt wandert nach vorn und oben. Die Achslasten sind die Reaktionen eines Trägers auf zwei Lagern mit der Trägheitskraft m·a im Schwerpunkt.
  Gleichung des Modells: $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$
- Volumen des Tanks und der Flüssigkeit
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Neigung der Oberfläche – senkrecht zur Resultierenden aus Gewicht und Trägheitskraft
  $\tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{5}{9{,}81} = 0{,}5097 \quad \Rightarrow \quad \theta = 27{,}01^\circ$
- Der Schwerpunkt der Flüssigkeit wandert nach vorn und oben
  $x_k : 4{,}6 \to 6{,}481\,\mathrm{m}, \quad z_k : 1{,}825 \to 2{,}127\,\mathrm{m}, \quad \Delta x_k =$
- Schwerpunkt des ganzen Fahrzeugs
  $x_T = \dfrac{m_0 x_0 + m_k x_k}{m_0 + m_k} = 6{,}438\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}56\,\mathrm{m}$
- Achslasten aus dem Momentengleichgewicht um die Hinterachse (Trägheitskraft im Schwerpunkt)
  $\sum M_r = 0: \quad N_f \cdot 7{,}25 = mg(x_T - x_r) + maz_T \quad \Rightarrow$
- Vorderachse in Ruhe und in Fahrt; mit fester Ladung
  $N_f : 104{,}2 \to 164{,}7\,\mathrm{kN}\ (+58{,}12\,\%), \quad N_{f,\,\mathrm{rigid}} = 130{,}2$
- Eigenfrequenz der ersten Welle (Schwappen)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 1{,}073\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5{,}85$
- Das quasistatische Modell gilt für gleichmäßiges Bremsen. Nach einer Vollbremsung schwingt die Flüssigkeit mit der Periode T und ihre Stöße gegen die Stirnwand können die Last kurz noch weiter erhöhen; deshalb haben Tankwagen Schwallwände.

Graph





Seitenansicht mit geneigter Oberfläche, Schwerpunkt der Flüssigkeit T_k, des Ganzen T und den Achslasten; das Diagramm zeigt die Vorderachslast über der Verzögerung für Flüssigkeit und feste Ladung.

Derselbe Tankwagen in einer Kurve mit R = 60 m: die kritische Geschwindigkeit mit Flüssigkeit und mit fester Ladung.

Eingabe: `model(tanker; mode=curve; find=vcrit[km_h]; shape=cylinder; liquid=water; f=50[pct]; R=60[m]; v=60[km_h]; tw=2[m]; k=7[deg]; zr=0.9[m]; rho=1000[kg_m3]; Lt=8[m];`

```
W=2[m]; H=2[m]; xt=0.6[m]; zt=1.25[m]; M=14[t]; xM=6.4[m]; zM=1.05[m]; xr=2.65[m]; xf=9.9[m])
```

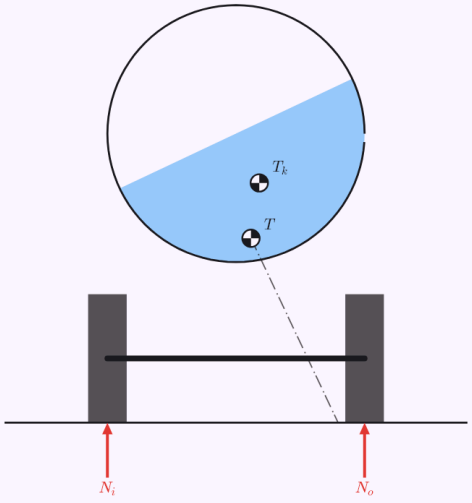
Ergebnis

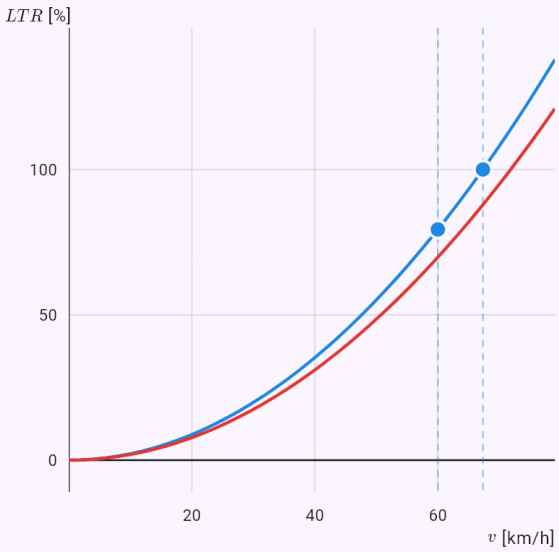
$$v_{krit} \approx 67{,}33\,\mathrm{km/h}$$

Lösungsweg

- Gesucht v_{krit}; gegeben
  $\varphi = 50\,\%, \quad R = 60\,\mathrm{m}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h}, \quad s = 2\,\mathrm{m}, \quad k$
- Eine Kurve mit dem Radius R bei der Geschwindigkeit v: die Zentripetalbeschleunigung a = v²/R, die Flüssigkeit schwappt nach außen und mit ihr der Schwerpunkt. Das Fahrzeug kippt, wenn die Resultierende aus Gewicht und Fliehkraft durch die äußeren Räder geht (LTR = 100 %). Die Wankneigung des Aufbaus (k_r Grad je g) schiebt den Schwerpunkt weiter nach außen. Gleichung des Modells: $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g}, \quad a_y = \dfrac{v^2}{R}$
- Volumen des Tanks und der Flüssigkeit
  $V = 25{,}13\,\mathrm{m^3}, \quad V_k = \varphi V = 12{,}57\,\mathrm{m^3}, \quad m_k = \rho V_k =$
- Zentripetalbeschleunigung in der Kurve
  $a_y = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{16{,}67^2}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4719\,g$
- Neigung der Oberfläche – senkrecht zur Resultierenden aus Gewicht und Trägheitskraft:
  $\tan\theta = \dfrac{a_y}{g} = 0{,}4719 \quad \Rightarrow \quad \theta = 25{,}26^\circ$
- Schwerpunkt der Flüssigkeit im Querschnitt (y aus der Kurve heraus): $y_k = 0{,}1811\,\mathrm{m}, \quad z_k = 1{,}866\,\mathrm{m}$
- Das Wanken des Aufbaus schiebt den Gesamtschwerpunkt weiter nach außen
  $\varphi_r = k_r \dfrac{a_y}{g} = 3{,}304^\circ, \quad y_T = 0{,}1165\,\mathrm{m}, \quad z_T = 1{,}435\,\mathrm{m}$
- Lastverlagerung auf die äußeren Räder
  $LTR = \dfrac{N_o - N_i}{N_o + N_i} = \dfrac{a_y z_T/g + y_T}{s/2} = 79{,}39\,\%$
- Kippgrenze: die Resultierende geht durch die äußeren Räder
  $\dfrac{a_y}{g} z_T(a_y) + y_T(a_y) = \dfrac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{y,\lim} = 5{,}83\,\mathrm{m/s^2} = 0$
- Feste Ladung zum Vergleich:
  $a_{y,\lim} = 0{,}6765\,g, \quad v_{krit} = 71{,}84\,\mathrm{km/h}$
- Eigenfrequenz der ersten Welle (Schwappen)
  $\omega^2 = \dfrac{\pi g}{L}\tanh\dfrac{\pi h}{L}: \quad \omega = 3{,}606\,\mathrm{s^{-1}}, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}74$
- Echte Tankwagen kippen schon bei etwa 0,35–0,45 g: außer dem Wanken auf den Federn geben die Reifen nach und die Flüssigkeit schwingt in der Kurve zusätzlich. Die quasistatische Grenze ist eine obere Schätzung.

Graph





Ansicht von hinten in der Kurve (außen rechts) mit geneigter Oberfläche, Schwerpunkt und Resultierender; das Diagramm zeigt die Lastverlagerung auf die äußeren Räder über der Geschwindigkeit – bei 100 % heben die inneren Räder ab.

Ein 2-m-Kragträger mit 10 kN: IPE 200 aus den Tabellen, das optimale Rohr und ein Rohr gleicher

Festigkeit.

Eingabe: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=tube; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3]; n=250; lambda=50)`

Ergebnis

$$m_{tab} \approx 44{,}75\,\mathrm{kg}\ (\mathrm{IPE}\,200)$$
$$m_{opt} \approx 44{,}79\,\mathrm{kg}$$
$$m_{st} \approx 24{,}1\,\mathrm{kg}$$

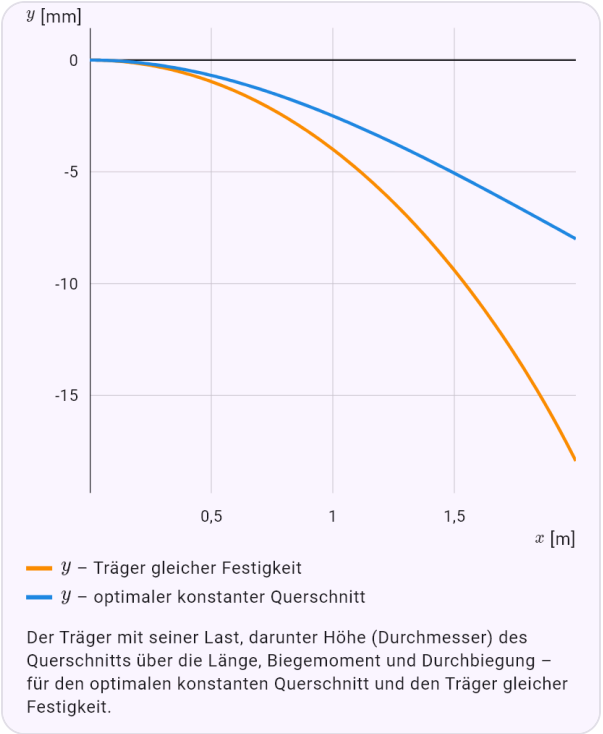
Lösungsweg

- Gesucht m; gegeben
  $L = 2\,\mathrm{m}, \quad F = 10\,\mathrm{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\mathrm{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Ein Kragträger der Länge L mit einer Kraft F am freien Ende oder einer Streckenlast q über die ganze Länge. Das größte Moment liegt an der Einspannung. Gleichung des Modells
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Größtes Biegemoment: $M_{max} = FL = 20\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$
- Festigkeitsbedingung – kleinstes Widerstandsmoment
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\mathrm{cm}^3$$
- Durchbiegungsbedingung (Integration von E·I·y'' = −M) – kleinstes Flächenträgheitsmoment
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 8\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 1587\,\mathrm{cm}^4$$
- Das leichteste geeignete Profil jeder Reihe
  $\mathrm{IPE}\,200:\ W = 194\,\mathrm{cm}^3,\ I = 1943\,\mathrm{cm}^4,\ 22{,}37\,\mathrm{kg/m},$
- 1. Nach Tabellen – das leichteste von allen
  $\mathrm{IPE}\,200: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 28{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 44{,}75$
- Eine dünnere Wand gibt bei gleichem W eine kleinere Fläche, das Optimum liegt daher an der Schlankheitsgrenze: $\frac{D}{t} = \lambda = 50$
- 2. Optimaler konstanter Querschnitt – die kleinste Größe, die beide Bedingungen erfüllt
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 203{,}7\,\mathrm{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 215{,}2\,\mathrm{mm}$$
- Aktiv ist die Durchbiegungsbedingung (die Spannung bleibt unter der zulässigen): $y_{max} = \frac{L}{n}$
- Fläche und Masse des optimalen Querschnitts:
  $A = 28{,}53\,\mathrm{cm}^2, \quad m = 44{,}79\,\mathrm{kg}$
- 3. Träger gleicher Festigkeit – σ(x) = σ_zul überall, am freien Ende der kleinste Querschnitt wegen des Schubs
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 58{,}47\,\mathrm{mm}$$
- Masse und Durchbiegung des Trägers gleicher Festigkeit
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 24{,}1\,\mathrm{kg}, \quad y_{max} = 17{,}94\,\mathrm{mm}$$
- Ein Träger gleicher Festigkeit achtet nur auf die Spannung, ist daher weicher und überschreitet die zulässige Durchbiegung. In der Praxis wird sein Querschnitt vergrößert oder er wird nur dort eingesetzt, wo die Festigkeit entscheidet.
- Masse der Varianten gegenüber dem Tabellenprofil:
  $\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 100{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 53{,}86\,\%$
- Das Eigengewicht des Trägers ist vernachlässigt; bei langen und schweren Trägern kommt es zur Streckenlast hinzu.

Graph







Der Träger mit seiner Last, darunter Höhe (Durchmesser) des Querschnitts über die Länge, Biegemoment und Durchbiegung – für den optimalen konstanten Querschnitt und den Träger gleicher Festigkeit.

Ein Rechteck gleicher Festigkeit mit konstanter Breite: die Höhe als Parabel, ein Drittel weniger Werkstoff.

Eingabe: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=cantilever; load=force; shape=rect; material=s235; L=2[m]; F=10[kN]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=50; k=2)
```

Ergebnis

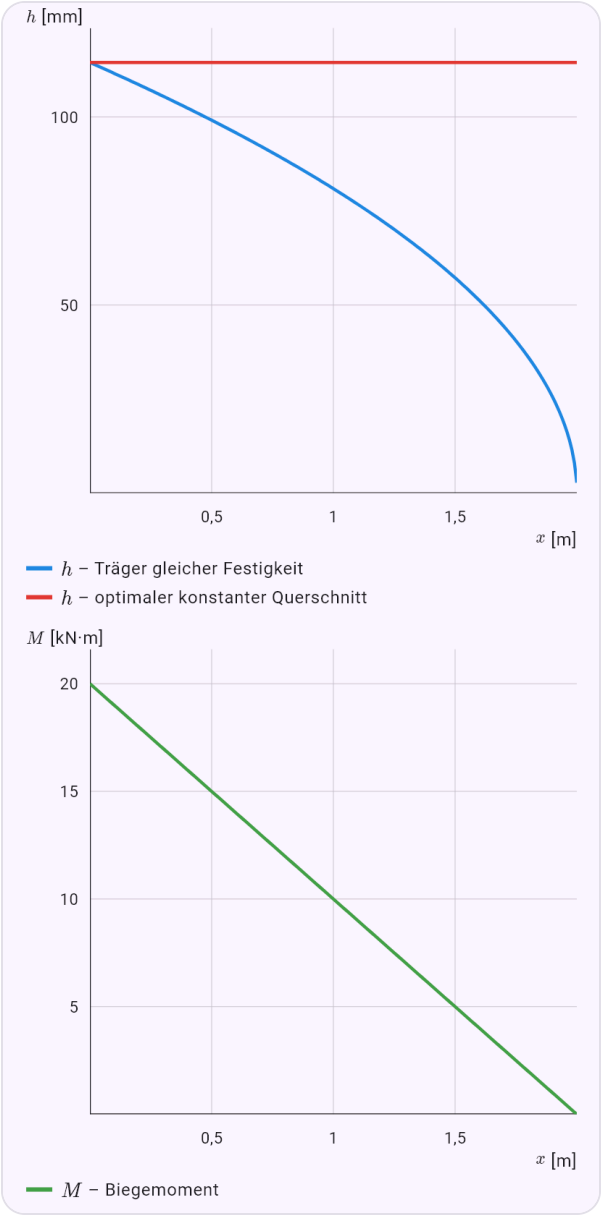
$$m_{tab} \approx 37{,}52\,\text{kg}\ (\text{IPE}\,180)$$
$$m_{opt} \approx 102{,}9\,\text{kg}$$
$$m_{st} \approx 68{,}58\,\text{kg}$$

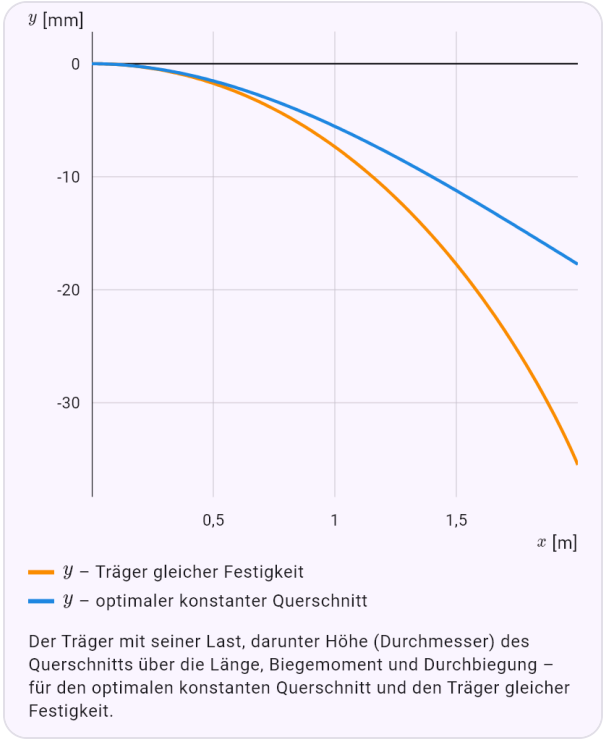
Lösungsweg

- Gesucht m; gegeben
  $L = 2\,\text{m}, \quad F = 10\,\text{kN}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\text{MPa}, \quad \tau_{dov} = 95$
- Ein Kragträger der Länge L mit einer Kraft F am freien Ende oder einer Streckenlast q über die ganze Länge. Das größte Moment liegt an der Einspannung. Gleichung des Modells
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Größtes Biegemoment: $M_{max} = FL = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$
- Festigkeitsbedingung – kleinstes Widerstandsmoment
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{20\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 125\,\text{cm}^3$$
- Durchbiegungsbedingung (Integration von E·I·y'' = −M) – kleinstes Flächenträgheitsmoment
  $$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \le \frac{L}{n} = 40\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 317{,}5\,\text{cm}^4$$
- Das leichteste geeignete Profil jeder Reihe
  $\text{IPE}\,180:\ W = 146\,\text{cm}^3,\ I = 1317\,\text{cm}^4,\ 18{,}76\,\text{kg/m},$
- 1. Nach Tabellen – das leichteste von allen
  $\text{IPE}\,180: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 23{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 37{,}52$
- 2. Optimaler konstanter Querschnitt – die kleinste Größe, die beide Bedingungen erfüllt
  $$b_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 57{,}24\,\text{mm}, \quad b_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 46{,}71\,\text{mm} \quad =$$
- Aktiv ist die Festigkeitsbedingung (die Durchbiegung bleibt unter der zulässigen): $\sigma = \sigma_{dov}$
- Fläche und Masse des optimalen Querschnitts:
  $A = 65{,}52\,\text{cm}^2, \quad m = 102{,}9\,\text{kg}$
- 3. Träger gleicher Festigkeit – σ(x) = σ_zul überall, am freien Ende der kleinste Querschnitt wegen des Schubs
  $$h(x) = \sqrt{\frac{6M(x)}{b\sigma_{dov}}}, \quad h_{min} = \frac{1{,}5T}{b\tau_{dov}} = 2{,}759\,\text{mm}$$
- Masse und Durchbiegung des Trägers gleicher Festigkeit
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 68{,}58\,\text{kg}, \quad y_{max} = 35{,}5\,\text{mm}$$
- Masse der Varianten gegenüber dem Tabellenprofil:
  $$\frac{m_{opt}}{m_{tab}} = 274{,}1\,\%, \quad \frac{m_{st}}{m_{tab}} = 182{,}8\,\%$$
- Das Eigengewicht des Trägers ist vernachlässigt; bei langen und schweren Trägern kommt es zur Streckenlast hinzu.

Graph







Der Träger mit seiner Last, darunter Höhe (Durchmesser) des Querschnitts über die Länge, Biegemoment und Durchbiegung – für den optimalen konstanten Querschnitt und den Träger gleicher Festigkeit.

Ein 6-m-Einfeldträger mit Streckenlast: die Durchbiegung entscheidet.

Eingabe: `model(beamdesign; find=m[kg]; support=simple; load=uniform; shape=tube; material=s235; L=6[m]; q=8[kN_m]; sigma=160[MPa]; tau=95[MPa]; E=210[GPa]; rho=7850[kg_m3];`

```
n=300; lambda=40)
```

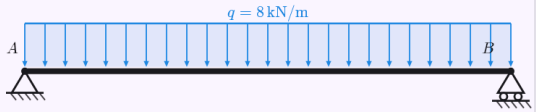
Ergebnis

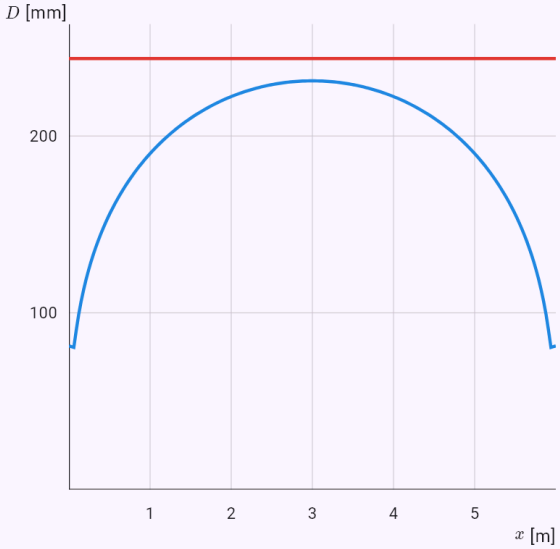
$$m_{tab} \approx 184{,}2\,\mathrm{kg}\ (\mathrm{IPE}\,240)$$
$$m_{opt} \approx 214{,}3\,\mathrm{kg}$$
$$m_{st} \approx 142{,}7\,\mathrm{kg}$$

Lösungsweg

- Gesucht m; gegeben
  $L = 6\,\mathrm{m}, \quad q = 8\,\mathrm{kN/m}, \quad \sigma_{dov} = 160\,\mathrm{MPa}, \quad \tau_{dov} = 9$
- Ein Einfeldträger der Länge L mit einer Kraft F in der Mitte oder einer Streckenlast q über die ganze Länge. Das größte Moment liegt in der Mitte. Gleichung des Modells
  $$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \le \sigma_{dov}, \quad y_{max} \le \frac{L}{n}, \quad EIy'' = -M$$
- Größtes Biegemoment: $M_{max} = \dfrac{qL^2}{8} = 36\,\mathrm{kN\cdot m}$
- Festigkeitsbedingung – kleinstes Widerstandsmoment
  $$W \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{dov}} = \frac{36\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 225\,\mathrm{cm}^3$$
- Durchbiegungsbedingung (Integration von E·I·y'' = −M) – kleinstes Flächenträgheitsmoment
  $$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \le \frac{L}{n} = 20\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad I \ge 3214\,\mathrm{cm}^4$$
- Das leichteste geeignete Profil jeder Reihe
  $\mathrm{IPE}\,240:\ W = 324\,\mathrm{cm}^3,\ I = 3892\,\mathrm{cm}^4,\ 30{,}69\,\mathrm{kg/m},$
- 1. Nach Tabellen – das leichteste von allen
  $\mathrm{IPE}\,240: \quad m = \rho AL = 7850\cdot 39{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 6 = 184{,}2$
- Eine dünnere Wand gibt bei gleichem W eine kleinere Fläche, das Optimum liegt daher an der Schlankheitsgrenze: $\dfrac{D}{t} = \lambda = 40$
- 2. Optimaler konstanter Querschnitt – die kleinste Größe, die beide Bedingungen erfüllt
  $$D_\sigma = \sqrt[3]{\frac{W}{c_W}} = 231{,}2\,\mathrm{mm}, \quad D_y = \sqrt[4]{\frac{I}{c_I}} = 243{,}8\,\mathrm{mm}$$
- Aktiv ist die Durchbiegungsbedingung (die Spannung bleibt unter der zulässigen): $y_{max} = \dfrac{L}{n}$
- Fläche und Masse des optimalen Querschnitts:
  $A = 45{,}5\,\mathrm{cm}^2, \quad m = 214{,}3\,\mathrm{kg}$
- 3. Träger gleicher Festigkeit – σ(x) = σ_zul überall, am freien Ende der kleinste Querschnitt wegen des Schubs
  $$D(x) = \sqrt[3]{\frac{M(x)}{c_W\sigma_{dov}}}, \quad D_{min} = \sqrt{\frac{2T}{c_A\tau_{dov}}} = 81{,}23\,\mathrm{mm}$$
- Masse und Durchbiegung des Trägers gleicher Festigkeit
  $$m = \rho\int_0^L A(x)dx = 142{,}7\,\mathrm{kg}, \quad y_{max} = 32{,}22\,\mathrm{mm}$$
- Ein Träger gleicher Festigkeit achtet nur auf die Spannung, ist daher weicher und überschreitet die zulässige Durchbiegung. In der Praxis wird sein Querschnitt vergrößert oder er wird nur dort eingesetzt, wo die Festigkeit entscheidet.
- Masse der Varianten gegenüber dem Tabellenprofil:
  $\dfrac{m_{opt}}{m_{tab}} = 116{,}4\,\%, \quad \dfrac{m_{st}}{m_{tab}} = 77{,}48\,\%$
- Das Eigengewicht des Trägers ist vernachlässigt; bei langen und schweren Trägern kommt es zur Streckenlast hinzu.

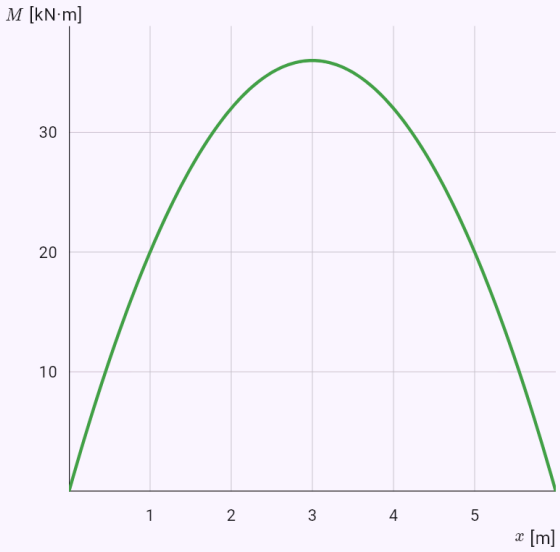
Graph



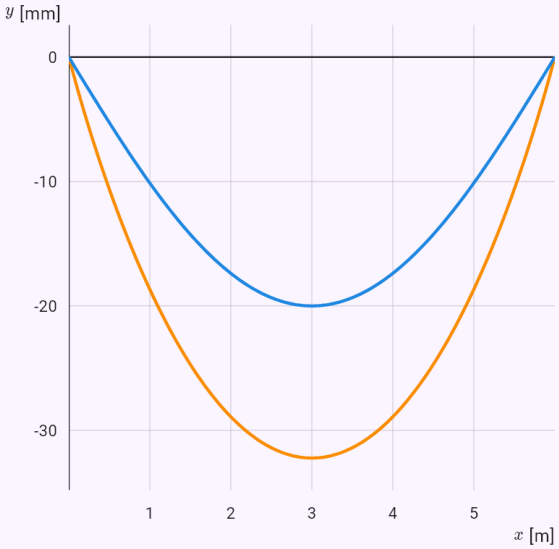


D – Träger gleicher Festigkeit

D – optimaler konstanter Querschnitt



M – Biegemoment



y – Träger gleicher Festigkeit

y – optimaler konstanter Querschnitt

Der Träger mit seiner Last, darunter Höhe (Durchmesser) des Querschnitts über die Länge, Biegemoment und Durchbiegung – für den optimalen konstanten Querschnitt und den Träger gleicher Festigkeit.

45. Astronomie und Astrophysik

Das Fachgebiet Astronomie und Astrophysik finden Sie im Bereich „Anwendungen“. Neben den Keplerschen Gesetzen, der gegenseitigen Beeinflussung von Körpern und dem Dreikörperproblem (im Kapitel Physik beschrieben) gibt es die Formulare Schwarze Löcher, Neutronensterne, Gravitationswellen, Helligkeiten und Entfernungen, Strahlung der Sterne, Rotverschiebung und Hubble-Gesetz sowie Exoplaneten. Die Formeln sind fertig, der Lösungsweg zeigt das Einsetzen. Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie löst die App nicht, sie verwendet nur deren Ergebnisse für ein nicht rotierendes Schwarzes Loch.

Das Formular Schwarze Löcher berechnet den [[schwarzschildRadius|Schwarzschildradius]], die Photonensphäre und die innerste stabile Bahn, die „Dichte“ eines Schwarzen Lochs mit einem Graphen über der Masse in logarithmischem Maßstab, die Fluchtgeschwindigkeit, die gravitative Zeitdilatation und Rotverschiebung (auch für zwei Uhren, etwa GPS), die Gezeitenkraft, die Hawking-Temperatur mit der Verdampfungszeit und die Masse von Sgr A* aus der Bahn des Sterns S2. Die Objektauswahl setzt Sonne, Erde, Neutronenstern, stellares Schwarzes Loch, Sgr A* oder M87* ein.

Neutronensterne haben Dichte, Schwerkraft an der Oberfläche, die beschleunigte Rotation beim Kollaps aus der Drehimpulserhaltung und die kürzeste mögliche Rotationsperiode. Gravitationswellen ergeben die Frequenz aus dem Abstand eines kreisenden Paares (und umgekehrt) und die bei einer Verschmelzung wie GW150914 abgestrahlte Energie.

Grundlagen eines Einführungskurses in Astronomie: Pogson-Gleichung, Entfernungsmodul mit der [[absoluteMagnitude|absoluten Helligkeit]] und Parallaxe; Wiensches und Stefan-Boltzmann-Gesetz eines [[blackBody|schwarzen Körpers]], Solarkonstante und Gleichgewichtstemperatur eines Planeten; Doppler-[[redshift|Rotverschiebung]] und Hubble-Gesetz mit der Hubble-Zeit; bei Exoplaneten Transittiefe, Radialgeschwindigkeitsmethode und [[habitableZone|habitable Zone]].

Zu den Keplerschen Gesetzen kam der Hohmann-Transfer zwischen zwei Kreisbahnen (Δv und Flugdauer) hinzu, zur gegenseitigen Beeinflussung der Körper die [[rocheLimit|Roche-Grenze]] und die Hill-Sphäre.

Beispiele

In wie kleine Kugel die Erde gepresst werden müsste, um ein Schwarzes Loch zu werden.

Eingabe: `model(blackhole; find=rs[mm]; M=3.0035e-6[Msun]; mode=horizon; astro=earth)`

Ergebnis

$$r_s \approx 8{,}87\,\mathrm{mm}$$

Lösungsweg

- Gesucht r_s; gegeben: $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot$
- Einheiten umrechnen:
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Der Schwarzschildradius r_s = 2GM/c² ist der Radius des Ereignishorizonts. Die Erde müsste in eine Kugel von etwa 18 mm Durchmesser gepresst werden, die Sonne in eine Kugel von 3 km Radius. Licht kann auf der Photonensphäre bei 1,5 r_s kreisen, die innerste stabile Bahn der Materie (ISCO) liegt bei 3 r_s. Gleichung des Modells
  $$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2} r_s, \quad r_{\mathrm{ISCO}} = 3 r_s$$
- Einsetzen
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\mathrm{m}$$
- Für ein nicht rotierendes Schwarzes Loch. Bei einem rotierenden (Kerr) liegen ISCO und Photonensphäre näher.
- Einheiten umrechnen: $r_s \approx 0{,}00887\,\mathrm{m} = 8{,}87\,\mathrm{mm}$

Die „Dichte“ des Schwarzen Lochs M87* – dünner als Luft.

Eingabe: `model(blackhole; find=rho[kg_m3]; M=6.5e9[Msun]; mode=bhdensity; astro=m87)`

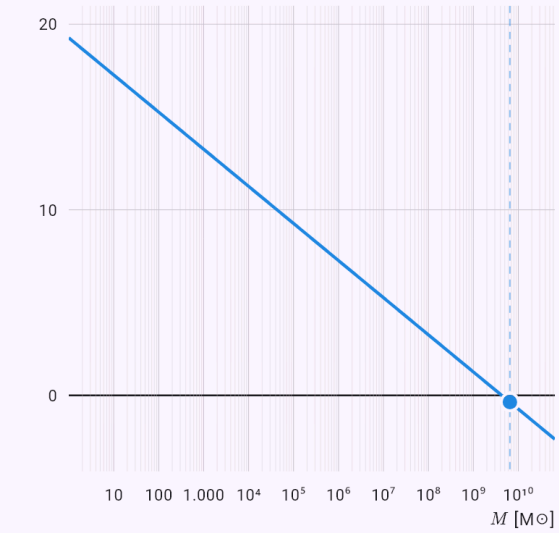
Ergebnis

$$\rho \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg/m^3}$$

Lösungsweg

- Gesucht ρ; gegeben: $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot$
- Einheiten umrechnen:
  $M = 6{,}5 \cdot 10^9\, M_\odot = 1{,}293 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg}$
- Die mittlere „Dichte“ innerhalb des Horizonts: Masse geteilt durch das Volumen einer Kugel mit Radius r_s. Sie fällt mit 1/M². Ein stellares Schwarzes Loch ist dichter als ein Atomkern, eines mit 10^8 Sonnenmassen hat die Dichte von Wasser, M87* ist dünner als Luft. Der Graph zeigt die Masse logarithmisch. Gleichung des Modells:
  $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3} = \dfrac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}$
- Einsetzen
  $\rho = \dfrac{3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}674 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (1{,}293 \cdot 10^{40})^2} \approx 0{,}4362\,\mathrm{kg}$
- Zum Vergleich: Atomkern, Wasser und Luft (etwa 1,2 kg/m³)
  $\rho_{\mathrm{nucl}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Dünner als Luft – die „Dichte“ ist nur ein Mittel über das Volumen des Horizonts.

Graph



Die waagerechte Achse ist logarithmisch – jede Marke ist das Zehnfache der vorigen. Der Punkt ist der gegebene Wert oder die Antwort.

Wie viel die Uhren der GPS-Satelliten wegen der Gravitation täglich vorgehen.

Eingabe: `model(blackhole; find=dt[us]; M=3.0035e-6[Msun]; r=6371[km]; r2=26571[km]; t=1[d];`

`mode=gravdilation; astro=earth)`

Ergebnis

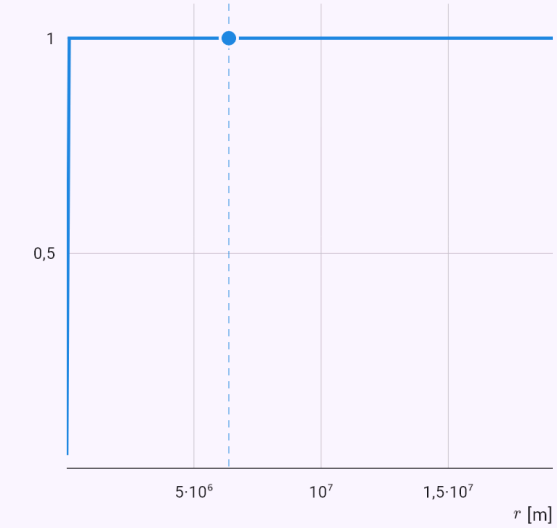
$$\Delta t \approx 45{,}7257\,\mu\text{s}$$

Lösungsweg

- Gesucht Δt; gegeben
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot, \quad r = 6371\,\text{km}, \quad r_2 = 26\,570\,\text{k}$
- Einheiten umrechnen
  $M = 3{,}004 \cdot 10^{-6}\,M_\odot = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad r = 6371\,\text{km}$
- Uhren nahe einer großen Masse gehen langsamer: dτ/dt = √(1 − r_s/r). Licht von dort kommt rotverschoben an. Mit einem zweiten Abstand r_2 werden zwei Uhren verglichen. Die GPS-Satelliten (r_2 = 26 571 km) gehen gegenüber dem Boden etwa 45,7 µs am Tag vor. Gleichung des Modells
  $$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}, \quad 1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1}$$
- Einsetzen
  $$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 0{,}00887\,\text{m}$$
- Nachgehen je Zeiteinheit: $1 - \frac{d\tau}{dt} \approx 5{,}292 \cdot 10^{-10}$
- Einsetzen
  $$\Delta t = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \cdot 86\,400 \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$$
- Vergleich zweier Uhren in verschiedenen Abständen; ein positiver Unterschied heißt, dass die nähere Uhr langsamer geht.

- Einheiten umrechnen: $\Delta t \approx 4{,}573 \cdot 10^{-5}\,\text{s} = 45{,}73\,\mu\text{s}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Gezeitenkraft auf einen Menschen am Horizont eines stellaren Schwarzen Lochs.

Eingabe: `model(blackhole; find=dFh[N]; M=10[Msun]; m=70[kg]; L=2[m]; mode=tidal;`

`astro=stellar)`

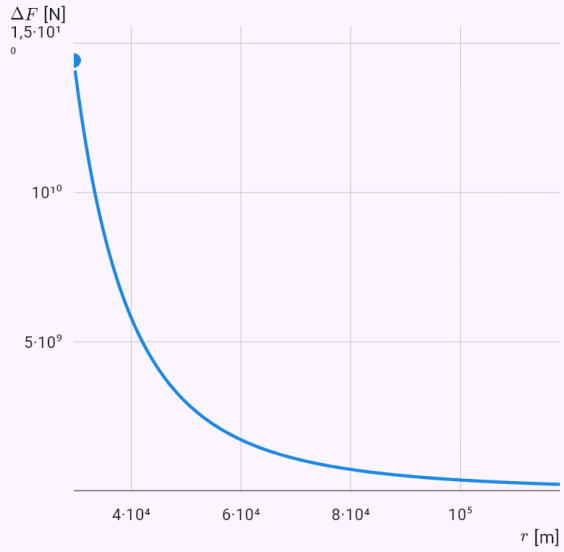
Ergebnis

$$\Delta F_s \approx 1{,}443 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Lösungsweg

- Gesucht ΔF_s; gegeben: $M = 10\,M_\odot, \quad m = 70\,\mathrm{kg}, \quad L = 2\,\mathrm{m}$
- Einheiten umrechnen: $M = 10\,M_\odot = 1{,}988 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$
- Die Gezeitenkraft ist der Unterschied der Schwerkraft am Kopf und an den Füßen. Ein stellares Schwarzes Loch zerreißt einen Menschen lange vor dem Horizont („Spaghettisierung“), am Horizont eines großen (Sgr A*) ist sie winzig. Gleichung des Modells: $\Delta F \approx \frac{2GMm\,L}{r^3}$
- Einsetzen
$$r_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31}}{\left(2{,}998 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 29\,530\,\mathrm{m}$$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
$$\Delta F_s = \frac{2GMm\,L}{r_s^3} = \frac{mLc^6}{4G^2M^2}$$
- Einsetzen
$$\Delta F_s = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{31} \cdot 70 \cdot 2}{(29\,530)^3} \approx 1{,}443 \cdot 1$$
- In Vielfachen des Körpergewichts: $\frac{\Delta F}{mg} \approx 2{,}101 \cdot 10^{7}$
- Die Gezeitenkraft ist weit größer, als ein Körper aushält – „Spaghettisierung“.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Masse von Sgr A* aus der Bahn des Sterns S2.

Eingabe: `model(blackhole; find=M[Msun]; a=1019[au]; T=16.05[yr]; mode=s2)`

Ergebnis

$$M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$$

Lösungsweg

- Gesucht M; gegeben: $a = 1019\,\mathrm{au}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{J}.$
- Einheiten umrechnen
$$a = 1019\,\mathrm{au} = 1{,}524 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}, \quad T = 16{,}05\,\mathrm{J}. = 5{,}065 \cdot$$
- Der Stern S2 umkreist das Zentrum der Galaxis auf einer Ellipse mit einer großen Halbachse von etwa 1 019 AE in 16,05 Jahren. Aus dem dritten Keplerschen Gesetz folgt die Masse von Sgr A*: etwa 4 Millionen Sonnen in einem Gebiet kleiner als das Sonnensystem. Dafür gab es den Physik-Nobelpreis 2020. Gleichung des Modells:
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$
- Einsetzen
$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}524 \cdot 10^{14})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}065 \cdot 10^{8}\right)^2} \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg}$$
- In Sonnenmassen: $M \approx 4\,107\,000\,M_\odot$
- Horizont von Sgr A*
$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 1{,}213 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}, \quad \frac{a}{r_s} \approx 12\,570$$
- Physik-Nobelpreis 2020 (Genzel, Ghez) für die Entdeckung eines supermassereichen kompakten Objekts im Zentrum der Galaxis.
- Einheiten umrechnen:
$M \approx 8{,}168 \cdot 10^{36}\,\mathrm{kg} = 4\,107\,000\,M_\odot$

Die Rotationsperiode des Kerns nach dem Kollaps zum Neutronenstern.

Eingabe: `model(neutronstar; find=T2[ms]; T1=25.4[d]; R1=696000[km]; R2=12[km]; mode=collapse)`

Ergebnis

$$T_2 \approx 0{,}6524\,\mathrm{ms}$$

Lösungsweg

- Gesucht T_2; gegeben:
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km}, \quad R_2 = 12\,\mathrm{km}$
- Einheiten umrechnen
  $T_1 = 25{,}4\,\mathrm{d} = 2\,195\,000\,\mathrm{s}, \quad R_1 = 696\,000\,\mathrm{km} = 6{,}96 \cdot$
- Drehimpulserhaltung: Schrumpft der Kern, dreht er sich schneller, die Periode fällt mit dem Quadrat des Radius (wie eine Eiskunstläuferin mit angezogenen Armen). So entstehen Pulsare mit Perioden von Millisekunden bis Sekunden. Gleichung des Modells
  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad I = \frac{2}{5}MR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right.$
- Der Stern wird als homogene Kugel ohne Massenverlust angenommen.
- Einsetzen
  $T_2 = 2\,195\,000 \cdot \left(\frac{12\,000}{6{,}96 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$
- Wie viel schneller er sich dreht:
  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx 3{,}364 \cdot 10^9$
- Echte Pulsare drehen sich langsamer (Millisekunden bis Sekunden): Der Kern rotiert vor dem Kollaps langsamer, und die abgestoßene Hülle nimmt Drehimpuls mit.
- Einheiten umrechnen: $T_2 \approx 6{,}524 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}6524\,\mathrm{ms}$

Die bei der Verschmelzung GW150914 als Gravitationswellen abgestrahlte Energie.

Eingabe: `model(gwave; find=E[J]; M1=36[Msun]; M2=29[Msun]; Mf=62[Msun]; mode=gwenergy)`

Ergebnis

$$E \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Lösungsweg

- Gesucht E; gegeben:
  $M_1 = 36\,M_\odot, \quad M_2 = 29\,M_\odot, \quad M_f = 62\,M_\odot$
- Einheiten umrechnen
  $M_1 = 36\,M_\odot = 7{,}158 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_2 = 29\,M_\odot = 5{,}767$
- Bei der Verschmelzung entsteht ein Schwarzes Loch, leichter als beide zusammen. Den Massenunterschied tragen die Gravitationswellen als Energie E = Δm·c² fort. Gleichung des Modells:
  $\Delta m = M_1 + M_2 - M_f, \quad E = \Delta m\,c^2$
- Einsetzen
  $\Delta m = 7{,}158 \cdot 10^{31} + 5{,}767 \cdot 10^{31} - 1{,}233 \cdot 10^{32} \approx 5{,}96$
- Anteil der abgestrahlten Masse:
  $\frac{\Delta m}{M_1 + M_2} \approx 4{,}62\,\%, \quad \Delta m \approx 3\,M_\odot$
- Einsetzen
  $E = 5{,}965 \cdot 10^{30} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\right)^2 \approx 5{,}361 \cdot 10^{47}\,\mathrm{J}$
- Im Vergleich mit dem ganzen Leben der Sonne:
  $\frac{E}{L_\odot \cdot 10^{10}\,\mathrm{J.}} \approx 4438$
- LIGO fing die Wellen von GW150914 aus 1,3 Milliarden Lichtjahren auf; sie verschoben die Spiegel um ein Tausendstel eines Protondurchmessers.

Die Entfernung des Sirius aus dem Entfernungsmodul.

Eingabe: `model(magnitude; find=d[pc]; mapp=-1.46[one]; Mabs=1.42[one]; mode=distmod;`

`star=sirius)`

Ergebnis

$$d \approx 2{,}655\,\mathrm{pc}$$

Lösungsweg

- Gesucht d; gegeben: $m = -1{,}46, \quad M = 1{,}42$
- Die absolute Helligkeit M ist die, die der Stern aus 10 pc hätte. Der Entfernungsmodul m − M ergibt die Entfernung, wenn die wahre Leuchtkraft bekannt ist (Cepheiden, Supernovae Ia). Gleichung des Modells: $m - M = 5 \log \frac{d}{10\,\mathrm{pc}}$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $d = 10\,\mathrm{pc} \cdot 10^{(m-M)/5}$
- Einsetzen: $d = 10 \cdot 10^{(-1{,}46-1{,}42)/5} \approx 2{,}655\,\mathrm{pc}$
- In Lichtjahren: $d \approx 8{,}658\,\mathrm{Lj}$
- Die Lichtabschwächung durch interstellaren Staub wird vernachlässigt; mit ihr wirkt ein Stern weiter entfernt.

Die Wellenlänge des Strahlungsmaximums der Sonne.

Eingabe: `model(starlight; find=lambda[nm]; T=5772[K]; mode=wien; star=sun)`

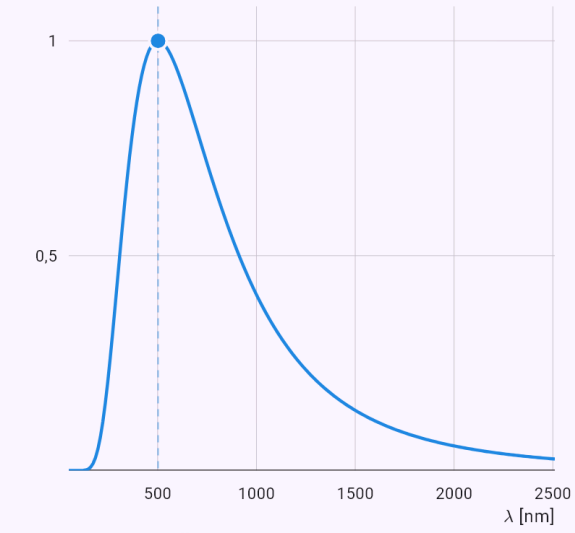
Ergebnis

$$\lambda_{\max} \approx 502\,\mathrm{nm}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\lambda_{\max}$; gegeben: $T = 5772\,\mathrm{K}$
- Das Wiensche Verschiebungsgesetz: Die Wellenlänge der stärksten Abstrahlung ist umgekehrt proportional zur Temperatur. Die Sonne hat ihr Maximum im Grünen (etwa 500 nm), die kühle Beteigeuze im Infraroten, die heiße Wega im Blauen. Gleichung des Modells: $\lambda_{\max} T = b, \quad b \approx 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$
- Wiensche Konstante in nm·K: $b \approx 2{,}898 \cdot 10^{6}\,\mathrm{nm \cdot K}$
- Einsetzen: $\lambda_{\max} = \frac{2\,898\,000}{5772} \approx 502\,\mathrm{nm}$
- Das Maximum liegt im sichtbaren Licht.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Gleichgewichtstemperatur der Erde ohne Treibhauseffekt.

Eingabe: `model(starlight; find=Teq[K]; L=1[Lsun]; a=1[au]; A=0.306[one]; mode=equilibrium;`

`planet=earth)`

Ergebnis

$$T_{\mathrm{eq}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

Lösungsweg

- Gesucht T_{eq}; gegeben: $L = 1\,L_{\odot}, \quad a = 1\,\mathrm{au}, \quad A = 0{,}306$
- Einheiten umrechnen $L = 1\,L_{\odot} = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}, \quad a = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{n}$
- Die Solarkonstante S ist die Leistung auf 1 m² im Abstand a vom Stern. Ein Planet absorbiert S(1 − A) auf seiner Querschnittsfläche πR² und strahlt σT⁴ von der ganzen Oberfläche 4πR² ab. Das Gleichgewicht ergibt die Temperatur ohne Treibhauseffekt. Gleichung des Modells: $S = \dfrac{L}{4\pi a^2}, \quad \pi R^2 S(1-A) = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{eq}}^4$
- Einsetzen

$$S = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2} \approx 1361\,\mathrm{W/m^2}$$

- Gesuchte Größe ausdrücken: $T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\dfrac{S(1-A)}{4\sigma}}$
- Einsetzen

$$T_{\mathrm{eq}} = \sqrt[4]{\frac{1361 \cdot (1 - 0{,}306)}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} \approx 254\,\mathrm{K}$$

- Ohne Treibhauseffekt. Die wirkliche mittlere Temperatur der Erde ist höher: $T_{\oplus} \approx 288\,\mathrm{K}$

Die Hubble-Zeit als Schätzung des Alters des Universums.

Eingabe: `model(redshift; find=age[Gyr]; H0=70[km_s_Mpc]; mode=hubble)`

Ergebnis

$$t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Mrd.\ J.}$$

Lösungsweg

- Gesucht t_H; gegeben: $H_0 = 70\,\mathrm{km/(s \cdot Mpc)}$
- Das Hubble-Gesetz v = H_0·d. Der Kehrwert der Hubble-Konstante (Hubble-Zeit) schätzt das Alter des Universums auf etwa 14 Milliarden Jahre; das genaue Alter von 13,8 Milliarden Jahren folgt aus einem Modell der Expansion. Gleichung des Modells: $v = H_0 d, \quad t_H = \dfrac{1}{H_0}$
- Hubble-Konstante in s⁻¹ $H_0 = \dfrac{70}{3{,}086 \cdot 10^{19}}\,\mathrm{s^{-1}} \approx 2{,}269 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$
- Einsetzen: $t_H = \dfrac{1}{2{,}269 \cdot 10^{-18}} \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}$
- In Milliarden Jahren: $t_H \approx 13{,}97\,\mathrm{Mrd.\ J.}$
- Die Hubble-Zeit ist nur eine Schätzung des Alters; die Expansion verlangsamte sich und beschleunigt sich jetzt.
- Einheiten umrechnen: $t_H \approx 4{,}408 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13{,}97\,\mathrm{Mrd.\ J.}$

Die Transittiefe der Erde vor der Sonne.

Eingabe: `model(exoplanet; find=depth[ppm]; Rp=1[Rearth]; Rs=1[Rsun]; mode=transit;`

`exo=earth)`

Ergebnis

$$\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\mathrm{ppm}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\frac{\Delta F}{F}$; gegeben: $R_p = 1\,R_\oplus, \quad R_* = 1\,R_\odot$
- Einheiten umrechnen:
  $R_p = 1\,R_\oplus = 6371\,\mathrm{km}, \quad R_* = 1\,R_\odot = 695\,700\,\mathrm{km}$
- Zieht ein Planet vor seinem Stern vorbei, bedeckt er einen Teil der Sternscheibe, und die Helligkeit sinkt um das Flächenverhältnis (R_p/R_*)². Jupiter würde die Sonne um 1 % abschwächen, die Erde nur um 84 Millionstel (ppm). Gleichung des Modells:
  $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$
- Einsetzen: $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{6371}{695\,700}\right)^2 \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5}$
- In Millionsteln (ppm): $\frac{\Delta F}{F} \approx 83{,}86\,\mathrm{ppm}$
- Einen Transit sieht man nur, wenn man fast genau seitlich auf die Planetenbahn blickt.
- Einheiten umrechnen: $\frac{\Delta F}{F} \approx 8{,}386 \cdot 10^{-5} = 83{,}86\,\mathrm{ppm}$

Die Dauer eines Hohmann-Transfers von der Erde zum Mars.

Eingabe: `model(orbit; find=tt[d]; M=1.989e30[kg]; r1=1[au]; r2=1.524[au]; mode=hohmann;`

`central=sun)`

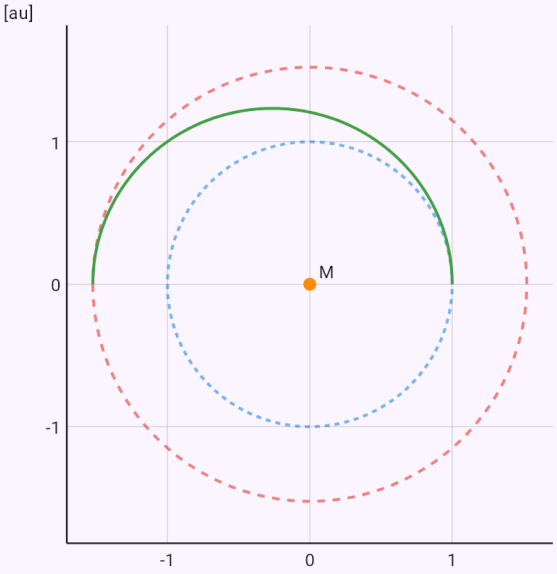
Ergebnis

$$t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$$

Lösungsweg

- Gesucht t; gegeben
  $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 1\,\mathrm{au}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au}$
- Einheiten umrechnen
  $r_1 = 1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 1{,}524\,\mathrm{au} = 2{,}28 \cdot 10$
- Die Hohmann-Transferbahn ist eine halbe Ellipse, die Start- und Zielkreisbahn berührt. Mit zwei Zündungen (Δv) gelangt man mit dem geringsten Treibstoffverbrauch von einer zur anderen. Ein Flug von der Erde zum Mars dauert so etwa 259 Tage. Gleichung des Modells
  $a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right), \quad \Delta v$
- Einsetzen
  $a_t = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} + 2{,}28 \cdot 10^{11}}{2} \approx 1{,}888 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Einsetzen
  $t = \pi\sqrt{\frac{\left(1{,}888 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}} \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
- In Tagen: $t \approx 258{,}9\,\mathrm{d}$
- Nach außen: in Flugrichtung beschleunigen, auf der Zielbahn erneut beschleunigen.
- Einheiten umrechnen: $t \approx 2{,}237 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s} = 258{,}9\,\mathrm{d}$

Graph



Die Körper und die besonderen Punkte in wahrem Maßstab.

Saturns Roche-Grenze für einen Eismond – warum dort die Ringe sind.

Eingabe: `model(twobody; find=dR[km]; R=58232[km]; rhoM=0.687[g_cm3]; rhom=0.917[g_cm3];`

`mode=roche; satellite=fluid)`

Ergebnis

$$d_R \approx 129\,000\,\mathrm{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht d_R; gegeben
  $R = 58\,230\,\mathrm{km}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3}, \quad \rho_m = 0{,}917\,\mathrm{g/}$
- Einheiten umrechnen
  $R = 58\,230\,\mathrm{km} = 5{,}823 \cdot 10^7\,\mathrm{m}, \quad \rho_M = 0{,}687\,\mathrm{g/cm^3} =$
- Die Roche-Grenze: Näher am Planeten zerreißen Gezeitenkräfte einen Mond, den nur seine eigene Schwerkraft zusammenhält. Deshalb liegen Saturns Ringe innerhalb seiner Roche-Grenze. Ein starrer Mond hält näher aus als ein flüssiger. Gleichung des Modells:
  $d_R \approx 2{,}44\,R\sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$
- Einsetzen
  $d_R = 2{,}44 \cdot 5{,}823 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{\frac{687}{917}} \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
- In Planetenradien: $\frac{d_R}{R} \approx 2{,}216$
- Innerhalb der Roche-Grenze entsteht kein großer Mond, dort gibt es Ringe (Saturn).
- Einheiten umrechnen: $d_R \approx 1{,}29 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 129\,000\,\mathrm{km}$

46. Anwendungen der Funktionentheorie

Formulare unter Anwendungen (Physik, Elektrotechnik, Technik, Geometrie und Analysis) nutzen die Funktionen einer komplexen Variablen aus dem vorigen Kapitel. Jedes hat einen Rechenweg mit komplexem Potenzial, Abbildung oder Polen und ein Diagramm in der Gaußschen Ebene.

Ideale Strömung und Tragflügelprofil: das [[complexPotential|komplexe Potenzial]] w(z), [[streamline|Stromlinien]] als Höhenlinien von Im w und der Druck aus der Bernoulli-Gleichung. Zylinderumströmung auch mit Zirkulation (Staupunkte, Magnus-Effekt, Auftrieb $L' = \rho U \Gamma$), Rankine-Körper, Strömung in eine Ecke und Wirbel. Das Joukowski-Profil entsteht durch die konforme Abbildung $z = \zeta + b^2/\zeta$, die [[kuttaCondition|Kutta-Bedingung]] legt die Zirkulation fest und der Satz von Kutta–Joukowski den Auftrieb; das Diagramm zeigt die Stromlinien um das Profil und C_L über dem Anstellwinkel.

Felder durch konforme Abbildung: Koaxialkabel ($w = \ln z$ macht daraus einen Plattenkondensator - Kapazität, Induktivität, Wellenwiderstand), Zweidrahtleitung über eine Möbius-Abbildung, Potenzial im Keil zwischen Platten und stationäre Temperatur in der Halbebene; Feldlinien und Äquipotentiallinien im Diagramm. Die Spannung um ein kreisrundes Loch in einer Platte nach Kirsch mit den Potenzialen von Kolosov und Muskhelishvili ergibt eine [[stressConcentration|Kerbwirkung]] von 3 bei Zug, 2 bei gleichem Zug in zwei Richtungen und 4 bei Schub. Die Mercator-Karte ist der komplexe Logarithmus der stereografischen Projektion: Maßstab $1/\cos\varphi$, Tissot-Kreise und die [[loxodrome|Loxodrome]] als Gerade gegenüber der Orthodrome.

Regelung und Signale: Stabilität eines Regelkreises $K \cdot e^{(-s\tau)}/(s^q(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ mit dem [[nyquistCriterion|Nyquist-Kriterium]] (Argumentprinzip, Amplituden- und Phasenreserve, Bode-Diagramm) und der [[rootLocus|Wurzelortskurve]] (Asymptoten, Verzweigungspunkt, kritische Verstärkung). Entwurf eines [[butterworthFilter|Butterworth-]] und eines Tschebyschow-Filters aus Polen auf Kreis und Ellipse, ein digitales Filter 2. Ordnung mit Polen und Nullstellen in der z-Ebene, Impulsantwort über Residuen und Frequenzgang auf dem Einheitskreis. Resonanzkurve eines mechanischen Schwingers oder RLC-Kreises aus den Abständen von $i\omega$ zu den Polen, [[qualityFactor|Güte]] und Bandbreite. Wechselstromkreise mit Zeigern stehen im Kapitel Elektrotechnik.

Antwort und Leitungen: Der Lorentz-Oszillator liefert Brechungsindex und Absorption eines Mediums; Pole in der unteren Halbebene bedeuten Kausalität und die [[kramersKronig|Kramers-Kronig-Beziehungen]], die die App mit einem numerischen Hauptwertintegral prüft. Die natürliche Breite einer Spektrallinie folgt aus der Fourier-Transformation einer gedämpften Welle. Das [[smithChart|Smith-Diagramm]]: Reflexionsfaktor als Möbius-Transformation, Stehwellenverhältnis, Eingangsimpedanz einer Leitung, Viertelwellentransformator und Stichleitungsanpassung.

Spielereien auf mathtrace.app unter „Probier es aus“: Mandelbrot- und Julia-Menge und Newton-Becken - eine Iteration in der komplexen Ebene, die man verschieben und vergrößern kann.

Beispiele

Rotierender Zylinder: Die Zirkulation verschiebt die Staupunkte unter die waagerechte Achse.

Eingabe: `model(potentialflow; mode=flowcylinder; find=stag[deg]; U=10[m_s]; R=0.5[m]; G=20[m2_s])`

Ergebnis

$$\theta_s \approx -18{,}56\,^\circ$$

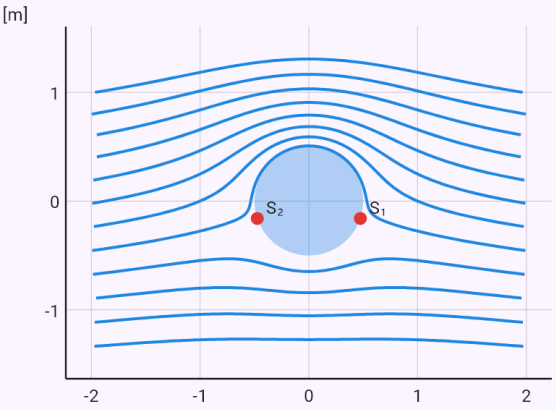
Lösungsweg

- Gesucht θ_s; gegeben
  $U = 10\,\mathrm{m/s}, \quad R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \Gamma = 20\,\mathrm{m^2/s}$
- Umströmung eines Zylinders: die Strömung U(z + R²/z), wahlweise mit einem Wirbel der Zirkulation Γ (rotierender Zylinder). An der Oberfläche ist die Geschwindigkeit 2U·sin θ, an den Seiten also doppelt so groß. Die Zirkulation verschiebt die Staupunkte nach unten und erzeugt Auftrieb nach dem Satz von Kutta–Joukowski, L' = ρUΓ je Meter Länge. Gleichung des Modells: $w(z) = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
- Die konjugierte Geschwindigkeit ist die Ableitung des Potenzials
  $\overline{\mathbf{v}} = w'(z) = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$
- An der Zylinderoberfläche ist die Geschwindigkeit tangential
  $z = Re^{i\theta}: \quad v_\theta = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right), \quad v_r = 0$
- Größte Geschwindigkeit an der Oberfläche:
  $v_{max} = 2U + \frac{|\Gamma|}{2\pi R} = 26{,}37\,\mathrm{m/s}$
- Staupunkte (v = 0)
  $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi U R} = -0{,}3183 \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18{,}56^\circ,\ 19$
- Druckbeiwert aus der Bernoulli-Gleichung
  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U R}\right)^2$

- Auftrieb je Meter Länge (Satz von Kutta–Joukowski):
  $L' = \rho U\Gamma = 1{,}225 \cdot 10 \cdot 20 = 245\,\mathrm{N/m}$
- Ein rotierender Zylinder oder Ball mit Zirkulation erfährt Auftrieb quer zur Strömung - der Magnus-Effekt, der angeschnittene Bälle ablenkt. Flettner-Schiffe nutzen ihn als Antrieb.

Graph

Stromlinien | Diagramm



Durchgezogene Linien sind Stromlinien, gestrichelte Äquipotentiallinien (nur ohne Zirkulation). Wo die Stromlinien dichter liegen, strömt das Fluid schneller.

Joukowski-Profil mit 12 % Dicke und 2 % Wölbung bei 4° Anstellwinkel.

Eingabe: `model(potentialflow; mode=joukowski; find=CL[one]; U=50[m_s]; ch=1.5[m];`

```
tc=12[pct]; fc=2[pct]; aoa=4[deg])
```

Ergebnis

$$C_L \approx 0{,}7243$$

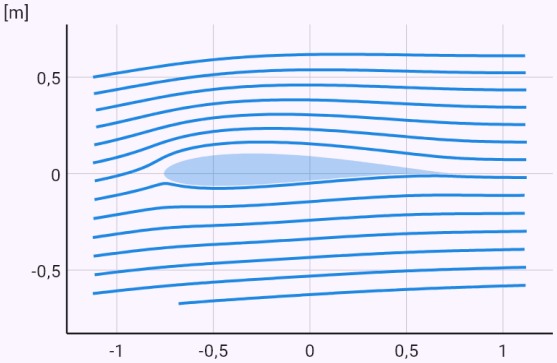
Lösungsweg

- Gesucht C_L; gegeben
  $U = 50\,\mathrm{m/s}, \quad c = 1{,}5\,\mathrm{m}, \quad t/c = 12\,\%, \quad f/c = 2\,\%,$
- Das Joukowski-Profil entsteht durch die konforme Abbildung z = ζ + b²/ζ eines Kreises durch den Punkt ζ = b. Den Mittelpunkt nach links verschieben gibt Dicke, nach oben Wölbung. Die Kreisumströmung überträgt sich auf das Profil, die Zirkulation legt die Kutta-Bedingung fest (die Strömung verlässt die scharfe Hinterkante glatt) und den Auftrieb der Satz von Kutta–Joukowski. Es ergibt sich das bekannte C_L ≈ 2π(α + β) wie beim dünnen Profil. Die Flugleistungen berechnet das Formular Flugzeug. Gleichung des Modells
  $$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta}, \quad w(\zeta) = U\left((\zeta-\mu)e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\mu}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}$$
- Der Kreis in der ζ-Ebene, aus dem das Profil entsteht
  $b = 0{,}3723\,\mathrm{m}, \quad \mu = -0{,}03439 + 0{,}01489i, \quad a = |b -$
- Zirkulation aus der Kutta-Bedingung an der Hinterkante
  $|w'(b)| < \infty: \quad \Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha+\beta) = 27{,}16\,\mathrm{m^2/s}$
- Auftrieb je Meter Länge (Satz von Kutta–Joukowski):
  $L' = \rho U \Gamma = 1664\,\mathrm{N/m}$
- Auftriebsbeiwert, in Klammern die Theorie dünner Profile
  $$C_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \frac{8\pi a}{c}\sin(\alpha+\beta) = 0{,}7243 \quad (2\pi(\alpha+\beta$$

- Ideales Fluid: gilt für kleine Anstellwinkel ohne Ablösung (bei üblichen Profilen etwa bis 10–15°). Ein echter Flügel endlicher Spannweite hat wegen des induzierten Widerstands weniger Auftrieb (Formular Flugzeug).

Graph

Stromlinien | Diagramm



Stromlinien um das Profil im wahren Maßstab. Die Hinterkante liegt rechts - die Strömung verlässt sie glatt (Kutta-Bedingung); über dem Profil liegen die Stromlinien dichter und der Druck ist niedriger.

Rankine-Körper - die Breite weit stromab ist Q/U.

Eingabe: `model(potentialflow; mode=rankine; find=width[m]; U=5[m_s]; Q=10[m2_s])`

Ergebnis

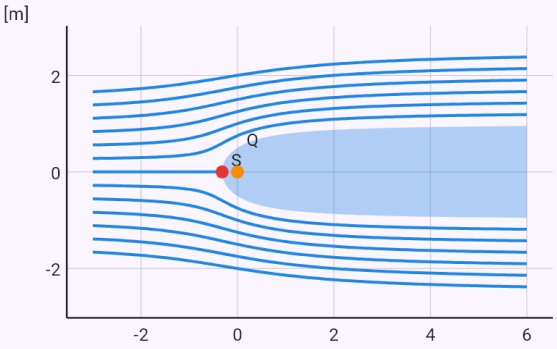
$$d \approx 2\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht d; gegeben: $U = 5\,\mathrm{m/s}, \quad Q = 10\,\mathrm{m^2/s}$
- Eine Quelle der Ergiebigkeit Q (m²/s je Meter Tiefe) in einer Strömung der Geschwindigkeit U. Die Trennstromlinie ψ = Q/2 umschließt den Rankine-Halbkörper, der der Vorderseite eines Brückenpfeilers oder eines Bugs ähnelt. Vorn liegt ein Staupunkt, weit hinten ist der Körper Q/U breit. Gleichung des Modells:
  $w(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln z$
- Die konjugierte Geschwindigkeit ist die Ableitung des Potenzials: $w'(z) = U + \frac{Q}{2\pi z}$
- Staupunkt vor der Quelle:
  $w'(z) = 0: \quad z_s = -\frac{Q}{2\pi U} = -0{,}3183\,\mathrm{m}$
- Trennstromlinie - die Kontur des Körpers:
  $\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$
- Breite des Körpers weit stromab:
  $y \to \pm\frac{Q}{2U}: \quad d = \frac{Q}{U} = 2\,\mathrm{m}$
- Größte Geschwindigkeit an der Körperoberfläche (numerisch)
  $v_{max} \approx 1{,}26\,U = 6{,}298\,\mathrm{m/s} \quad (\theta \approx 63^\circ)$

- Der Rankine-Körper ist eine erste Schätzung der Umströmung einer abgerundeten Vorderseite (Pfeiler, Rumpf, Vorderkante). In einer idealen Flüssigkeit fehlt hinter dem Körper der Nachlauf.

Graph



Durchgezogene Linien sind Stromlinien, gestrichelte Äquipotentiallinien (nur ohne Zirkulation). Wo die Stromlinien dichter liegen, strömt das Fluid schneller.

Koaxialkabel RG-58: Wellenwiderstand etwa 50 Ω.

Eingabe: `model(conformal; mode=coax; find=Z[ohm]; a=0.45[mm]; b=1.475[mm]; er=2.25[one])`

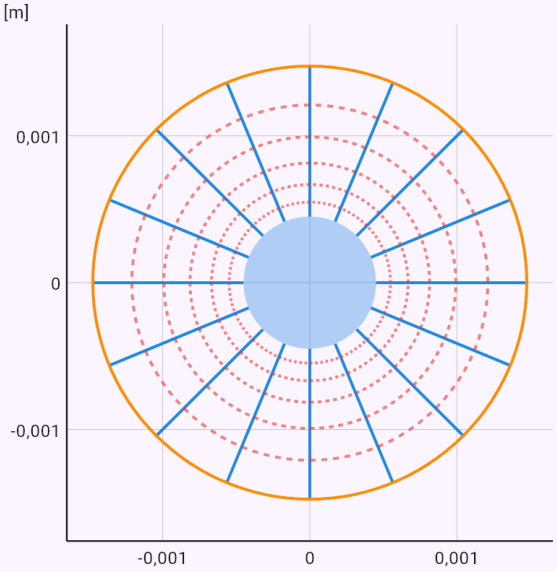
Ergebnis

$$Z_0 \approx 47{,}45\,\Omega$$

Lösungsweg

- Gesucht Z_0; gegeben:
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm}, \quad \varepsilon_r = 2{,}25$
- Einheiten umrechnen
  $a = 0{,}45\,\mathrm{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}, \quad b = 1{,}475\,\mathrm{mm} = 0{,}0014$
- Koaxialkabel: Der Logarithmus w = ln z wickelt den Kreisring a < |z| < b zu einem Rechteck der Breite 2π und Höhe ln(b/a) ab. Aus dem Kabel wird ein Plattenkondensator, Kapazität, Induktivität und Wellenwiderstand folgen sofort. Gleichung des Modells:
  $w = \ln z = \ln r + i\theta$
- Bild des Kreisrings in der Ebene w = ln z - ein Rechteck
  $a < |z| < b \;\mapsto\; \ln a < u < \ln b, \quad 0 \le v < 2\pi : \quad \ln \frac{b}{a}$
- Das Potenzial ist linear in Re w
- Kapazität wie beim Plattenkondensator:
  $C' = \varepsilon \frac{2\pi}{\ln(b/a)} = 105{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Induktivität und Wellenwiderstand der Leitung
  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0{,}2374\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln$
- Das Kabel RG-58 (Leiter 0,9 mm, Polyethylen 2,95 mm) hat etwa 50 Ω und 100 pF/m. Der Wellenwiderstand hängt nur vom Verhältnis b/a ab, deshalb haben dünne wie dicke Kabel dieselben 50 oder 75 Ω.

Graph



Durchgezogene Linien sind Feldlinien, gestrichelte Äquipotentiallinien; sie schneiden sich rechtwinklig. Leiter sind gefüllt oder dick.

Kapazität einer Zweidrahtleitung über die Möbius-Abbildung.

Eingabe: `model(conformal; mode=twowire; find=C[pF_m]; a=1[mm]; d=10[mm])`

Ergebnis

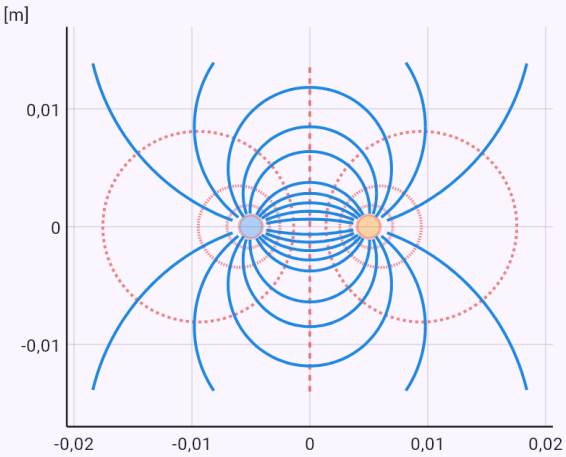
$$C' \approx 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$

Lösungsweg

- Gesucht C'; gegeben: $a = 1\,\mathrm{mm}, \quad d = 10\,\mathrm{mm}$
- Einheiten umrechnen:
  $a = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad d = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
- Zweidrahtleitung (zwei parallele Drähte): Die Möbius-Abbildung w = (z − h)/(z + h) macht aus den Drahtkreisen konzentrische Kreise - ein Koaxialkabel. Die Äquipotentiallinien sind Apollonius-Kreise, die Feldlinien Kreise durch die Punkte ±h. Gleichung des Modells
  $$w = \frac{z-h}{z+h}, \quad h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2} = 0{,}004899\,\mathrm{m}$$
- Die Bilder der Drähte sind konzentrische Kreise
  $$|w| = \left|\frac{z-h}{z+h}\right| = k: \quad \ln\frac{|w|_2}{|w|_1} = 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 4{,}585$$
- Kapazität der Zweidrahtleitung
  $$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\mathrm{arcosh}\,(d/2a)} = 12{,}13\,\mathrm{pF/m}$$
- Induktivität und Wellenwiderstand der Leitung
  $$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\,\mathrm{arcosh}\,\frac{d}{2a} = 0{,}917\,\mu\mathrm{H/m}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{12}{\sqrt{}}$$
- Flachband-Antennenleitungen hatten 300 Ω, verdrillte Paare in Datenkabeln etwa 100 Ω. Die Formel gilt für

Drähte weit weg von anderen Leitern.

Graph



Durchgezogene Linien sind Feldlinien, gestrichelte Äquipotentiallinien; sie schneiden sich rechtwinklig. Leiter sind gefüllt oder dick.

Stationäre Temperatur in der Halbebene mit heißem und kaltem Randabschnitt.

Eingabe: `model(conformal; mode=halfplane; find=T[degC]; T1=100[degC]; T2=20[degC];`

`x=0.5[m]; y=1[m])`

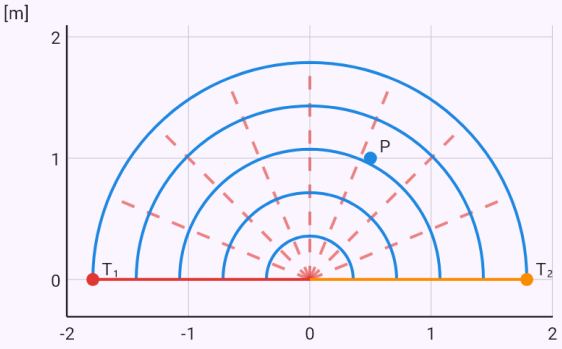
Ergebnis

$$T \approx 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$$

Lösungsweg

- Gesucht T; gegeben
  $T_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad x = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad y = 1\,\mathrm{m}$
- Stationäre Wärmeleitung in der Halbebene y > 0, deren Rand links die Temperatur T_1 und rechts T_2 hat. Die Temperatur ist harmonisch wie das Potenzial im 180°-Keil: $T = T_2 + (T_1 - T_2)\cdot\theta/\pi$. Die Isothermen sind Strahlen aus dem Ursprung, der Wärmestrom fließt auf Halbkreisen. Gleichung des Modells
  $$\Delta T = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$
- Harmonische Funktion mit den gegebenen Randwerten
- Winkel des Punkts: $\theta = \arg(0{,}5 + i) = 63{,}43^\circ$
- Temperatur im Punkt: $T = 20 + \dfrac{80}{\pi} \cdot 1{,}107 = 48{,}19\,^\circ\mathrm{C}$
- Zum Beispiel der Boden unter der Grenze zweier Oberflächen unterschiedlicher Temperatur. Im Ursprung springt die Randtemperatur von T_1 auf T_2, deshalb wächst der Strom dort über alle Grenzen.

Graph



Gestrichelte Strahlen sind Isothermen, durchgezogene Halbkreise Wärmestromlinien.

Kreisloch in einer gezogenen Platte: Formzahl 3.

Eingabe: `model(hole; mode=uniaxial; find=Kt[one]; sx=100[MPa]; a=10[mm])`

Ergebnis

$$K_t \approx 3$$

Lösungsweg

- Gesucht K_t; gegeben: $\sigma_x = 100\,\mathrm{MPa}, \quad a = 10\,\mathrm{mm}$
- Zug σ_x in einer Richtung: am Lochrand quer zur Last 3σ_x, in Lastrichtung −σ_x (Druck). Gleichung des Modells

  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'$
- Komplexe Potenziale nach Kolosov–Muskhelishvili für den Zug σ

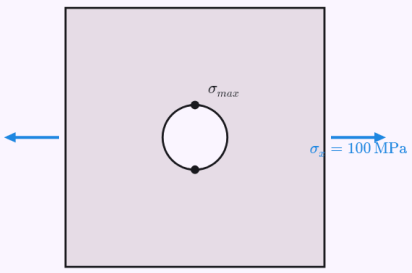
  $$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4}\left(z + \frac{2a^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{\sigma}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}\right)$$
- Am Lochrand ist die Radialspannung null, die Umfangsspannung

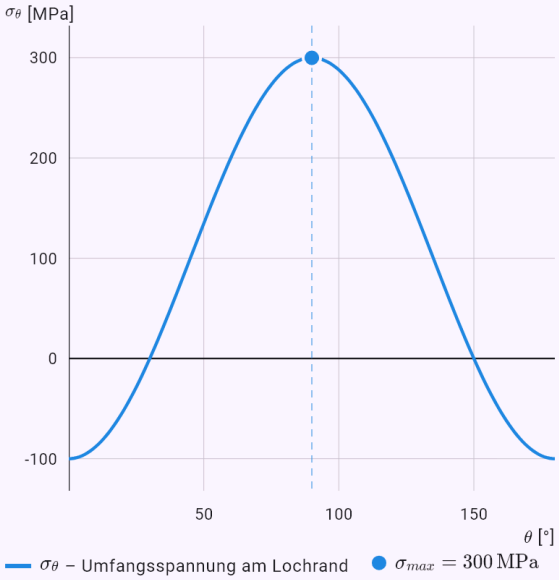
  $r = a: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_x + \sigma_y - 2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$
- Umfangsspannung um das Loch (Kirsch)

  $$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$
- Größte Spannung und Formzahl

  $$\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, 90^\circ) = 300\,\mathrm{MPa}, \quad K_t = \frac{|\sigma_{max}|}{100} = 3$$
- Zwei Radien vom Mittelpunkt entfernt liegt die Spannung nur 22 % über der in der Platte - die Konzentration ist örtlich.
- Gilt für elastischen Werkstoff und ein Loch, das klein gegen die Platte ist (Breite mindestens das Fünffache des Durchmessers). Bei einem schmalen Streifen ist K_t kleiner, die Spannung im geschwächten Querschnitt aber größer.

Graph





Die Platte mit dem Loch und der Spannung, die sie belastet (Pfeile nicht maßstäblich). Das Diagramm zeigt die Umfangsspannung am Lochrand über dem Winkel θ zur x-Achse; die Punkte am Loch markieren die größte Spannung.

Bei 60° Breite sind Längen auf der Karte verdoppelt.

Eingabe: `model(mercator; mode=point; find=k[one]; lat=60[deg])`

Ergebnis

$$k \approx 2$$

Lösungsweg

- Gesucht k; gegeben: $\varphi = 60^\circ$
- Abstand des Breitenkreises φ vom Äquator auf einer Karte der Breite W und Maßstab k = 1/cos φ. Die Tissot-Kreise im Diagramm sind auf dem Globus gleich groß. Gleichung des Modells

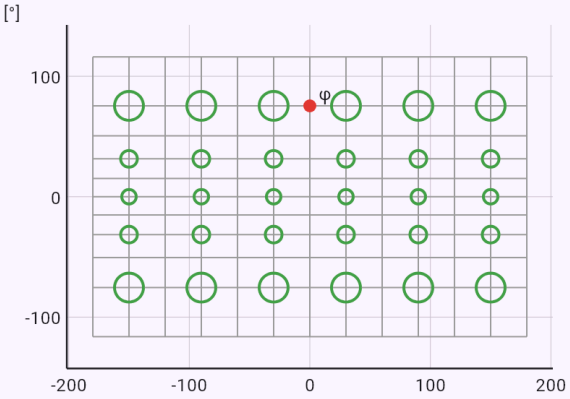
$$x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$$

- Die Abbildung ist konform, Längen wachsen in allen Richtungen gleich: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos \varphi}$
- Maßstab auf dem Breitenkreis φ:

$$k = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2, \quad k^2 = 4$$

- Flächen wachsen mit k², bei 60° auf das Vierfache. Die Pole liegen nicht auf der Karte, sondern im Unendlichen.

Graph



Meridiane alle 30°, Breitenkreise alle 15°. Die Tissot-Kreise sind auf dem Globus gleich groß und wachsen auf der Karte mit 1/cos φ - die Form bleibt, die Fläche nicht.

Prag – New York: Orthodrome und längere Loxodrome.

Eingabe: `model(mercator; mode=rhumb; find=d[km]; lat1=50.08[deg]; lon1=14.42[deg];`

`lat2=40.71[deg]; lon2=-74.01[deg])`

Ergebnis

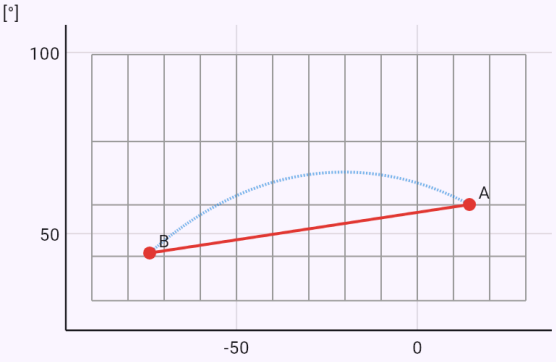
$$d \approx 6572\,\mathrm{km}$$

Lösungsweg

- Gesucht d; gegeben
  $\varphi_1 = 50{,}08\,^\circ, \quad \lambda_1 = 14{,}42\,^\circ, \quad \varphi_2 = 40{,}71\,^\circ, \quad \lambda_2 = -$
- Loxodrome zwischen zwei Orten (Breite und Länge, West negativ): Kurs, Länge und Vergleich mit der Orthodrome - dem kürzesten Weg auf dem Großkreis. Gleichung des Modells
  $x + iy = R\left(\lambda + i \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = -iR \ln \zeta, \quad \zeta =$
- Die Abbildung ist konform, Längen wachsen in allen Richtungen gleich: $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \neq 0: \quad k = \frac{1}{\cos\varphi}$
- Auf der Karte ist die Loxodrome eine Gerade - der Kurs aus den Koordinatendifferenzen
  $\Delta\lambda = -88{,}43^\circ, \quad \Delta\psi = \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} = -0{,}2337,$
- Länge der Loxodrome: $L = \frac{R|\Delta\varphi|}{|\cos\alpha|} = 6960\,\mathrm{km}$
- Orthodrome (kürzester Weg auf der Kugel)
  $d = 2R \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}} = 65$
- Die Loxodrome ist länger als die Orthodrome, lässt sich

aber mit festem Kurs fahren. Langstreckenflugzeuge fliegen Orthodromen und ändern den Kurs laufend.

Graph



Die durchgezogene Gerade ist die Loxodrome (fester Kurs), die gestrichelte Kurve die Orthodrome (kürzester Weg), beide in der Mercator-Projektion.

Phasenreserve eines Kreises mit drei Verzögerungsgliedern.

Eingabe: `model(control; mode=nyquist; integrators=0; find=PM[deg]; K=2[one]; T1=1[s];`

`T2=1[s]; T3=1[s])`

Ergebnis

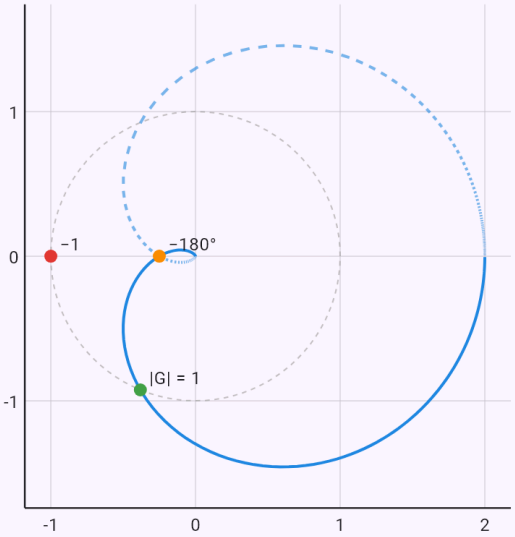
$\varphi_m \approx 67{,}6\,^\circ$

Lösungsweg

- Gesucht φ_m; gegeben:
  $K = 2, \quad T_1 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_2 = 1\,\mathrm{s}, \quad T_3 = 1\,\mathrm{s}$
- Das Nyquist-Kriterium folgt aus dem Argumentprinzip: Die Zahl der Umläufe der Kurve G(iω) um −1 ist die Differenz der instabilen Pole des geschlossenen und des offenen Kreises. Bei stabilem offenem Kreis darf die Kurve −1 nicht umschließen. Wie weit sie wegbleibt, zeigen Amplituden- und Phasenreserve. Gleichung des Modells
  $$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+s)(1+s)}, \quad F(s) = 1 + G(s)$$
- Argumentprinzip: N Umläufe um −1, Z instabile Pole des geschlossenen, P des offenen Kreises:
  $N = Z - P, \quad P = 0 \Rightarrow Z = N$
- Frequenz, bei der die Phase −180° erreicht
  $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ: \quad \omega_\pi = 1{,}732\,\mathrm{rad/s}, \quad |G(i\omega_\pi)|$
- Amplitudenreserve und kritische Verstärkung
  $$A_m = -20\log|G(i\omega_\pi)| = 12{,}04\,\mathrm{dB}, \quad K_{krit} = \frac{K}{|G(i\omega_\pi)|}$$
- Frequenz, bei der |G| = 1:
  $|G(i\omega_c)| = 1: \quad \omega_c = 0{,}7664\,\mathrm{rad/s}$
- Phasenreserve: $\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 67{,}6^\circ$
- Die Kurve umschließt −1 nicht - der geschlossene Kreis ist stabil: $N = 0, \quad Z = N + P = 0$
- Übliche Forderung: Amplitudenreserve mindestens 6 dB, Phasenreserve 30–60°. Eine Totzeit kostet ständig Phase, deshalb ist eine verzögerte Strecke schwerer zu regeln.

Graph

Nyquist-Diagramm | Diagramm



Die durchgezogene Kurve ist G(iω) für ω > 0, die gestrichelte ihr Spiegelbild für negative ω, der gestrichelte Kreis |G| = 1. Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn die Kurve −1 nicht umschließt.

Wurzelortskurve mit Integrator: kritische Verstärkung 3.

Eingabe: `model(control; mode=rootlocus; integrators=1; find=Kcrit[one]; K=1[one]; T1=1[s];`

`T2=0.5[s])`

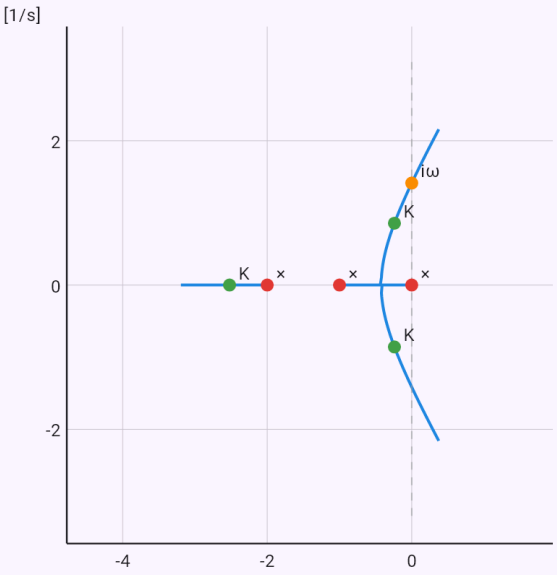
Ergebnis

$K_{krit} \approx 3$

Lösungsweg

- Gesucht K_{krit}; gegeben:
  $K = 1, \quad T_1 = 1\,\text{s}, \quad T_2 = 0{,}5\,\text{s}$
- Die Wurzelortskurve: wie sich die Pole des geschlossenen Kreises bewegen, wenn die Verstärkung K von null an wächst. Die Äste beginnen in den Polen des offenen Kreises, laufen entlang von Asymptoten und auf der imaginären Achse wird das System instabil (kritische Verstärkung aus der Routh-Hurwitz-Bedingung).
  Gleichung des Modells:
  $1 + G(s) = 0: \quad 0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + s + K = 0$
- Pole des offenen Kreises (Anfänge der Äste):
  $s_p = -2,\ -1,\ 0$
- Asymptoten der Äste: Schwerpunkt und Winkel
  $\sigma_a = \frac{\sum s_p}{n} = -1, \quad \theta_a = 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$
- Verzweigungspunkt auf der reellen Achse:
  $\frac{dK}{ds} = -D'(s) = 0: \quad \sigma_b = -0{,}4226, \quad K = 0{,}1925$
- Schnitt mit der imaginären Achse - die Stabilitätsgrenze
  $s = i\omega: \quad \text{Im}\, D(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = 1{,}414\,\text{rad/s}, \quad K_{kr}$
- Die gegebene Verstärkung liegt unter der kritischen - stabil: $K = 1 < K_{krit}$
- Pole des geschlossenen Kreises für das gegebene K:
  $K = 1: \quad s = -2{,}521,\ -0{,}2393 - 0{,}8579i,\ -0{,}2393 + 0{,}8579i$

Graph



Die Äste zeigen die Pole des geschlossenen Kreises für wachsendes K: Sie beginnen in den Polen des offenen Kreises (×), die Punkte K sind die Pole für die gegebene Verstärkung, iω der Schnitt mit der imaginären Achse.

Benötigte Ordnung eines Tschebyschow-Filters für 40 dB eine Oktave höher.

Eingabe: `model(filterdesign; type=chebyshev; find=n[one]; fc=1000[Hz]; Ap=1[dB];`

```
fs=2000[Hz]; As=40[dB])
```

Ergebnis

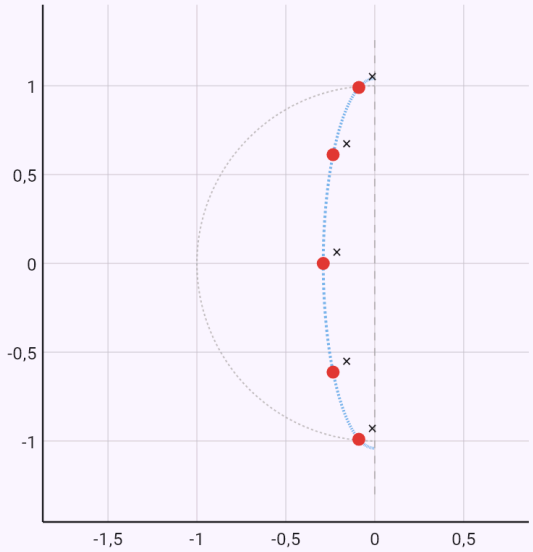
$$n \approx 5$$

Lösungsweg

- Gesucht n; gegeben
  $f_c = 1000\,\mathrm{Hz}, \quad A_p = 1\,\mathrm{dB}, \quad f_s = 2000\,\mathrm{Hz}, \quad A_s = 4($
- Tschebyschow: Welligkeit A_p im Durchlassbereich, dafür ein steilerer Übergang in den Sperrbereich als Butterworth gleicher Ordnung. Gleichung des Modells
  $$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$
- Welligkeitsparameter: $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10}-1} = 0{,}5088$
- Benötigte Ordnung (aufgerundet)
- Pole auf einer Halbellipse
  $$s_k = \omega_c(-\sinh v \sin\theta_k + i\cosh v\cos\theta_k), \quad v = \frac{\operatorname{arsinh}}{n}$$
- Pole (bezogen auf ω_c)
  $$\frac{s_k}{\omega_c} = -0{,}08946 + 0{,}9901i,\ -0{,}2342 + 0{,}6119i,\ -0{,}28$$
- Übertragungsfunktion - alle Pole links, das Filter ist stabil
  $$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{5}(s-s_k)}, \quad \operatorname{Re} s_k < 0$$
- Tschebyschow bezahlt die Steilheit mit Welligkeit und schlechterer Gruppenlaufzeit - Pulsformen werden weniger gut übertragen.

Graph

Pole | Diagramm



Pole in der komplexen Ebene s (×); ein stabiles System hat sie links der imaginären Achse.

Impulsantwort eines digitalen Filters mit komplexen Polen über Residuen.

Eingabe: `model(zfilter; find=h[one]; b0=1[one]; a1=-1.6[one]; a2=0.81[one]; n=10[one])`

Ergebnis

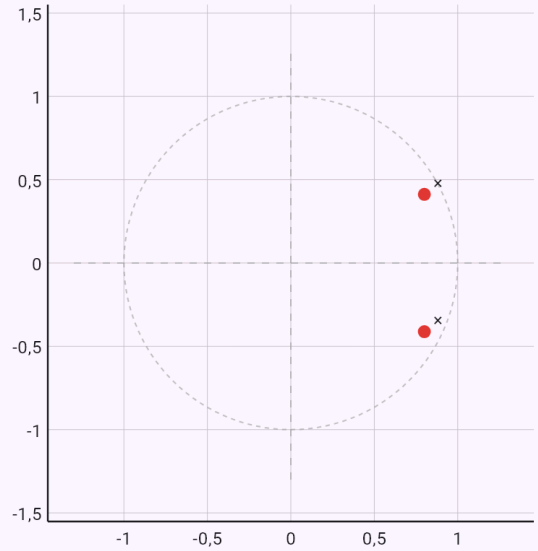
$$h[n] \approx -0{,}6596$$

Lösungsweg

- Gesucht $h[n]$; gegeben:
  $b_0 = 1, \quad a_1 = -1{,}6, \quad a_2 = 0{,}81, \quad n = 10$
- Ein digitales Filter berechnet die Ausgabe aus den letzten Abtastwerten: y[n] = b_0x[n] + b_1x[n−1] + b_2x[n−2] − a_1y[n−1] − a_2y[n−2]. Seine Übertragungsfunktion ist eine rationale Funktion H(z) (Z-Transformation). Das Filter ist stabil, wenn alle Pole im Einheitskreis liegen. Die Impulsantwort liefert die inverse Z-Transformation über Residuen: h[n] = Σ Res[H(z)z^{n-1}]. Der Frequenzgang ist H auf dem Einheitskreis, z = e^(iΩ). Gleichung des Modells
  $$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}81}$$
- Differenzengleichung des Filters:
  $y[n] = x[n] + 1{,}6y[n-1] - 0{,}81y[n-2]$
- Pole der Übertragungsfunktion
  $z^2 - 1{,}6z + 0{,}81 = 0: \quad p = 0{,}8 - 0{,}4123i,\ 0{,}8 + 0{,}41$
- Pole im Einheitskreis - das Filter ist stabil:
  $|p|_{max} = 0{,}9 < 1$
- Inverse Z-Transformation über Residuen:
  $h[n] = \sum \mathrm{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]$
- Konjugiert komplexe Pole ergeben eine gedämpfte Schwingung
  $n \geq 1: \quad h[n] = 2|R|\rho^n \cos(n\vartheta + \arg R), \quad \rho = 0{,}9,\ \imath$
- Wert der Antwort: $h[10] = -0{,}6596$

Graph

Pole und Nullstellen | Diagramm



Pole (×) und Nullstellen (○) der Übertragungsfunktion in der z-Ebene mit dem Einheitskreis. Das Filter ist stabil, wenn alle Pole innen liegen.

Güte eines Schwingers aus der Lage der Pole.

Eingabe: `model(resonancecurve; system=mechanical; find=Q[one]; m=1[kg]; k=100[N_m];`

```
b=2[kg_s])
```

Ergebnis

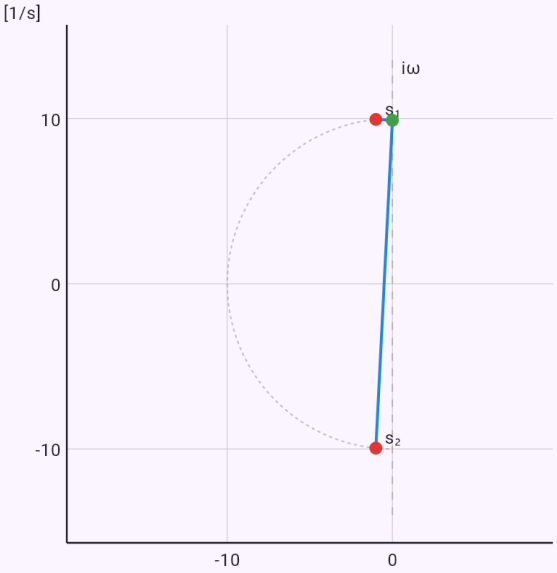
$$Q \approx 5$$

Lösungsweg

- Gesucht Q; gegeben:
  $m = 1\,\mathrm{kg}, \quad k = 100\,\mathrm{N/m}, \quad b = 2\,\mathrm{kg/s}$
- Eine Masse an einer gedämpften Feder, angeregt durch eine harmonische Kraft. X/X_0 ist die Amplitude gegenüber der statischen Auslenkung bei gleicher Kraft.
  Gleichung des Modells: $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$
- Pole der Übertragungsfunktion
  $s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$
- Amplitude aus den Abständen zu den Polen
  $|H(i\omega)| = \dfrac{1}{m|i\omega - s_1||i\omega - s_2|}$
- Spitze der Resonanzkurve
  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 9{,}899\,\mathrm{rad/s}, \quad f_r = 1{,}576\,\mathrm{Hz}$
- Güte und Bandbreite
  $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = 5, \quad \Delta f = \dfrac{2\delta}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = 0{,}3183\,\mathrm{Hz}$
- Nahe der Resonanz hat die Kurve die Form einer Lorentz-Linie
  $\omega \approx \omega_0: \quad |H|^2 \approx \dfrac{1}{4m^2\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$
- Deshalb dürfen Maschinen nicht lange bei der Eigenfrequenz ihres Rahmens laufen, und Brücken werden auf Anregung durch Fußgänger und Wind geprüft.

Graph

Pole | Diagramm



Pole in der komplexen Ebene s (×); ein stabiles System hat sie links der imaginären Achse.

Brechungsindex unterhalb der Resonanz eines Lorentz-Oszillators, geprüft mit der Kramers-Kronig-

Beziehung.

Eingabe: `model(lorentz; mode=medium; find=n[one]; E0=2[eV]; G=0.1[eV]; Ep=1[eV]; E=1.5[eV])`

Ergebnis

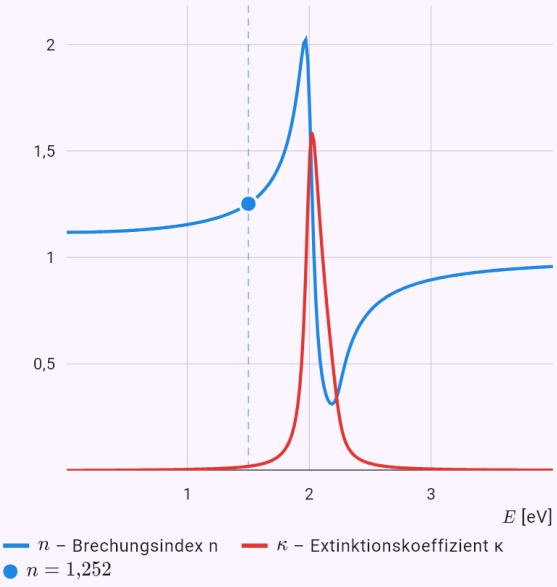
$$n \approx 1{,}252$$

Lösungsweg

- Gesucht n; gegeben
  $E_0 = 2\,\mathrm{eV}, \quad \Gamma = 0{,}1\,\mathrm{eV}, \quad E_p = 1\,\mathrm{eV}, \quad E = 1{,}5\,\mathrm{eV}$
- Brechungsindex n und Extinktionskoeffizient κ aus n + iκ = √(1 + χ). Photonenenergie E, Resonanz E₀, Breite Γ und Oszillatorstärke E_p in Elektronvolt. Gleichung des Modells: $\chi(E) = \dfrac{E_p^2}{E_0^2 - E^2 - i\Gamma E}$
- Die Pole der Suszeptibilität liegen in der unteren Halbebene
  $$E_{1,2} = \pm\sqrt{E_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} - \frac{i\Gamma}{2} = \pm 1{,}999 - 0{,}05i$$
- Kausalität: die Kramers-Kronig-Beziehung
  $$\mathrm{Im}\, E_{1,2} < 0 \Rightarrow \chi'(E) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty \frac{E'\chi''(E')}{E'^2 - E^2}\,dE'$$
- Suszeptibilität bei der gegebenen Energie:
  $\chi = 0{,}5673 + 0{,}04862i$
- Probe: χ' aus dem Integral über χ'' (numerisch) und direkt: $\chi'_{KK} = 0{,}5673, \quad \chi' = 0{,}5673$
- Komplexer Brechungsindex:
  $n + i\kappa = \sqrt{1+\chi} = 1{,}252 + 0{,}01942i$
- Wellenlänge und Absorptionskoeffizient
  $$\lambda = \frac{hc}{E} = 826{,}6\,\mathrm{nm}, \quad \alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} = 295\,200\,\mathrm{m}^{-1}$$
- Unterhalb der Resonanz wächst der Brechungsindex mit der Energie - normale Dispersion, mit der ein Prisma

Licht in Farben zerlegt.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Natürliche Breite der Natrium-D-Linie - etwa 10 MHz.

Eingabe: `model(lorentz; mode=spectralline; find=dnu[MHz]; tau=16[ns])`

Ergebnis

$$\Delta\nu \approx 9{,}947\,\mathrm{MHz}$$

Lösungsweg

- Gesucht $\Delta\nu$; gegeben: $\tau = 16\,\mathrm{ns}$
- Ein angeregtes Atom strahlt eine Welle ab, die mit der Lebensdauer τ exponentiell abklingt. Ihre Fourier-Transformation (Residuum in einem Pol) ergibt die Lorentz-Linienform mit der Halbwertsbreite Δν = 1/(2πτ) - die natürliche Linienbreite. Gleichung des Modells: $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t}\ (t \geq 0)$
- Fourier-Transformation der abklingenden Welle

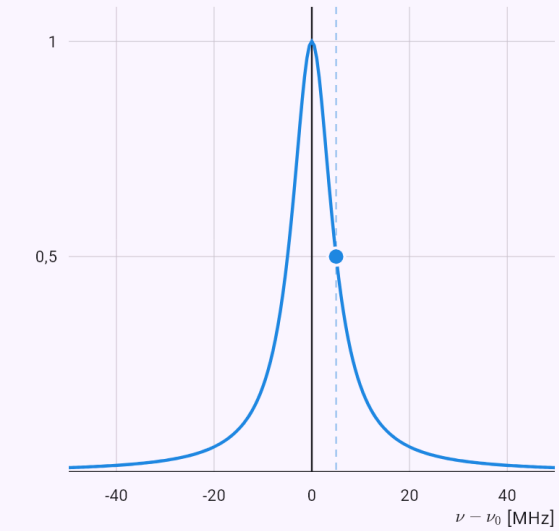
$$\hat{E}(\omega) = \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau} + i(\omega - \omega_0)}$$

- Lorentz-Linienform und ihre Breite

$$I(\omega) \propto \left|\hat{E}\right|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}: \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau},\ \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$

- Natürliche Linienbreite: $\Delta\nu = \dfrac{1}{2\pi \cdot 16\,\mathrm{ns}} = 9{,}947\,\mathrm{MHz}$
- Die Natrium-D-Linie (τ ≈ 16 ns) hat eine natürliche Breite von etwa 10 MHz. Echte Linien im Gas werden zusätzlich durch Doppler-Effekt und Stöße verbreitert.

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Anpassung einer 100-Ω-Last an eine 50-Ω-Leitung mit kurzgeschlossener Stichleitung.

Eingabe: `model(smith; find=stub[m]; Z0=50[ohm]; R=100[ohm]; X=0[ohm]; f=100[MHz])`

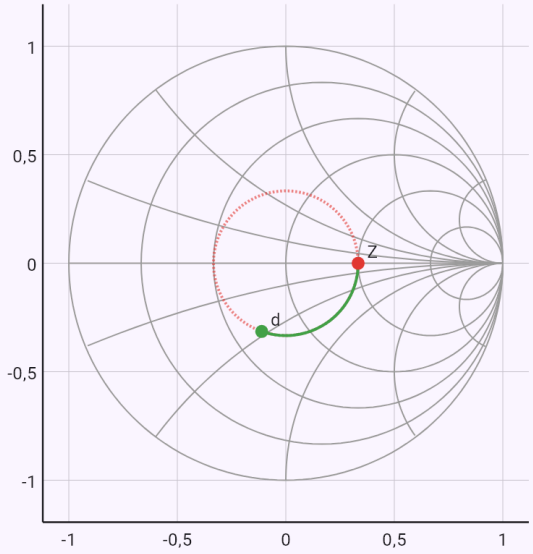
Ergebnis

$$d \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$
$$l_s \approx 0{,}4558\,\mathrm{m}$$

Lösungsweg

- Gesucht d; gegeben
  $Z_0 = 50\,\Omega, \quad R_L = 100\,\Omega, \quad X_L = 0\,\Omega, \quad f = 100\,\mathrm{MH}$
- Der Reflexionsfaktor Γ = (Z − Z_0)/(Z + Z_0) auf einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_0 ist eine Möbius-Transformation. Sie bildet die rechte Halbebene der Impedanzen auf den Einheitskreis ab - das Smith-Diagramm. Entlang der Leitung zum Generator dreht man sich im Uhrzeigersinn auf dem Kreis |Γ| = konst., eine halbe Wellenlänge ist eine volle Umdrehung. Daraus folgen Stehwellenverhältnis, Eingangsimpedanz, Viertelwellentransformator und Stichleitungsanpassung. Gleichung des Modells
  $$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{Z_L}{Z_0}$$
- Normierte Lastimpedanz: $z = \dfrac{100}{50} = 2$
- Reflexionsfaktor:
  $\Gamma = 0{,}3333, \quad |\Gamma| = 0{,}3333, \quad \arg\Gamma = 0^\circ$
- Stehwellenverhältnis und Rückflussdämpfung
  $$PSV = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2, \quad RL = -20\log|\Gamma| = 9{,}542\,\mathrm{dB}$$
- Wellenlänge auf der Leitung: $\lambda = \dfrac{v_f c}{f} = 2{,}998\,\mathrm{m}$
- Normierte Lastadmittanz: $y = \dfrac{1}{z} = 0{,}5$
- Stelle, an der der Realteil der Admittanz 1 ist
  $\mathrm{Re}\,y(d) = 1: \quad d = 0{,}152\lambda = 0{,}4558\,\mathrm{m}, \quad y(d) = 1 +$
- Länge der kurzgeschlossenen Stichleitung, die die Suszeptanz aufhebt
  $y_s = -j\cot\beta l_s = -j\,0{,}7071: \quad l_s = \dfrac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{arccot}\,(0{,}707$
- Eine Stichleitung ist ein kurzgeschlossenes Leitungsstück, parallel angeschlossen. Bei der gewählten Frequenz sieht die Leitung davor dann keine Reflexion.

Graph



Kreise konstanten Widerstands und Bögen konstanter Reaktanz (r, x = 0,2; 0,5; 1; 2; 5). Der gestrichelte Kreis hat den Radius |Γ| (konstantes SWR), der farbige Bogen ist die Verschiebung entlang der Leitung zum Generator.

Bekannte Einschränkungen

- Die Strömung ist ideal: ohne Reibung, Ablösung und Nachlauf. Widerstand und Verhalten bei großen Anstellwinkeln liefert das Modell nicht.
- Die konformen Abbildungen gibt es nur für die genannten Formen; allgemeine Leiter- oder Profilformen (Schwarz-Christoffel-Abbildung) noch nicht.
- Die Übertragungsfunktion des Regelkreises hat eine feste Form mit drei Verzögerungsgliedern und höchstens zwei Integratoren; Nullstellen im Zähler und ein instabiler offener Kreis gehen noch nicht.
- Das digitale Filter ist 2. Ordnung, die analogen Filter nur Tiefpässe.