Mathtrace – Handbuch

III. Analysis

Inhalt

III. Analysis

25. Grenzwerte
26. Ableitungen
27. Kurvendiskussion
28. Funktionen mehrerer Variablen
    - Übersicht der Integralsätze
    - Physikalische Anwendungen der Integralsätze
29. Taylorpolynom
30. Unbestimmte Integrale
    - Grundintegrale und Substitution
    - Partielle Integration
    - Gebrochenrationale Funktionen
    - Trigonometrische Funktionen
    - Hyperbelfunktionen
    - Wurzeln
31. Bestimmte Integrale und ihre Anwendungen
    - Bestimmtes Integral
    - Uneigentliche Integrale
    - Fläche unter einer Kurve und zwischen Kurven
    - Bogenlänge
    - Volumen eines Rotationskörpers
    - Mantelfläche eines Rotationskörpers
    - Anwendungen mit Parametern
    - Schwerpunkt
    - Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten
    - Durch eine Gleichung gegebene Kurven
32. Unendliche Reihen
    - Zahlenreihen

- Potenzreihen
- Taylorreihe

33. Fourierreihen

25. Grenzwerte

Mathtrace berechnet den Grenzwert einer Funktion einer Variablen an einer Stelle, im Unendlichen und einseitige Grenzwerte und geht vor wie in der Schule: zuerst versucht er einzusetzen. Der Grenzwert einer Folge (n → ∞) geht genauso – auch die Form 1^∞ oder eine Summe von Potenzen, aus der das am schnellsten wachsende Glied ausgeklammert wird.

Ergibt das Einsetzen einen unbestimmten Ausdruck (0/0, ∞/∞, …), wählt er eine Umformung nach der Form der Funktion – Faktorisieren und Kürzen, Erweitern mit dem konjugierten Term, Division durch die höchste Potenz, einen bekannten Grenzwert (sin x / x) oder die Regel von L'Hospital, auch wiederholt. Eine Potenz mit der Variablen in Basis und Exponent (die Formen 0^0, ∞^0, 1^∞) schreibt er als e^(g·ln f) und berechnet den Grenzwert im Exponenten; ist die Funktion nur auf einer Seite des Punktes definiert (x^(ln(x+1)) nur für x > 0), berechnet er den Grenzwert von dieser Seite und sagt es dazu. Mit dem Chip „Regel von L'Hospital“ wählen Sie die Regel direkt; ergibt das Einsetzen keinen unbestimmten Ausdruck, erklärt der Lösungsweg, warum sie nicht anwendbar ist.

Weitere Buchstaben in der Aufgabe (k in (1 + k/x)^x) sind Parameter – Konstanten, mit denen allgemein gerechnet wird; gilt das Ergebnis nur für positive Werte des Parameters, wird das gesagt. Der Buchstabe kann auch in der Stelle des Grenzwerts stehen: lim (x² − a²)/(x − a) für x → a = 2a. Zu einem Grenzwert mit Parameter gibt es keinen Graphen.

Einen unendlichen Grenzwert oder einen, der nicht existiert (die einseitigen Grenzwerte unterscheiden sich), gibt er nie als Zahl aus – er sagt es in Worten und zeigt die einseitigen Grenzwerte. Zum Ergebnis gehört ein Graph der Funktion in der Nähe der Stelle mit markiertem Grenzwert.

Beim Grenzwert einer Folge zeigt der Graph die Punkte a_1, a_2, a_3, … statt einer stetigen Kurve.

Eingabe

`lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`	Ein eingetippter Grenzwert: nach dem Wort lim in Klammern die Variable, der Pfeil -> und die Stelle, dann die Funktion.
`lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`	Ein Grenzwert im Unendlichen: unendlich schreibt man oo (minus unendlich -oo).
`lim(x->0+) 1/x`	Ein einseitiger Grenzwert: + (von rechts) oder − (von links) nach der Stelle.
`\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}`	Vom Foto oder in LaTeX, wie die Kamera es erkennt.

`lim(n->oo) ((n+2)/(n+1))^(2n+3)`	Der Grenzwert einer Folge im Unendlichen.

Beispiele

Der unbestimmte Ausdruck 0/0 – den Zähler faktorisieren und kürzen.

Eingabe: `lim(x->2) (x^2-4)/(x-2)`

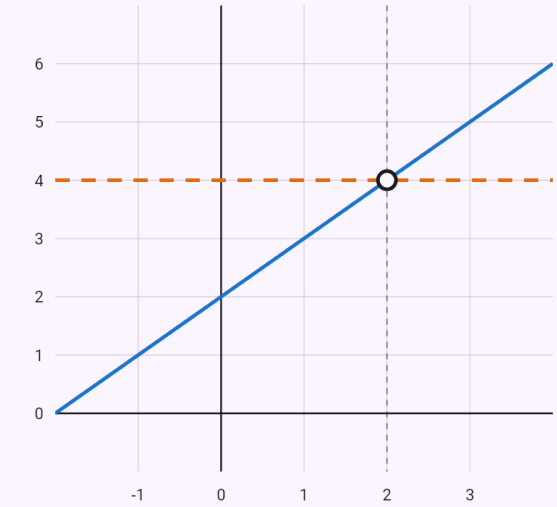
Ergebnis

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Umformen und kürzen
  $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$
- Einsetzen: $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graph



$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
$y = 4$

Grenzwert:
○ $(2|4)$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Ein Grenzwert im Unendlichen – Zähler und Nenner durch die höchste Potenz dividiert.

Eingabe: `lim(x->oo) (3x^2+1)/(x^2-5)`

Ergebnis

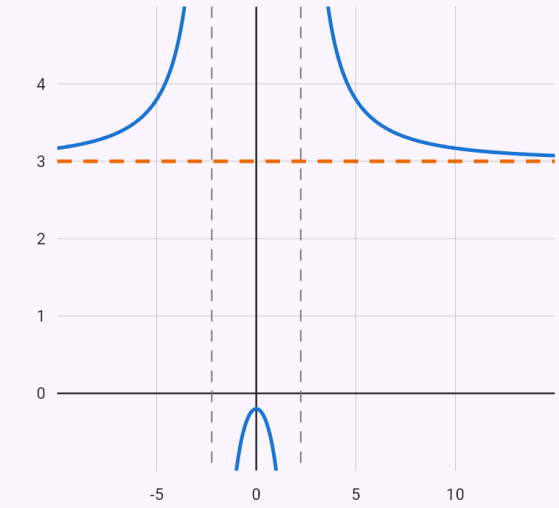
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = 3$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Zähler und Nenner durch x^2 teilen – Terme wie c/x^n gehen gegen null

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$$

Graph



$y = \frac{3x^2+1}{x^2-5}$

$y = 3$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Der bekannte Grenzwert sin x / x.

Eingabe: `lim(x->0) sin(3x)/x`

Ergebnis

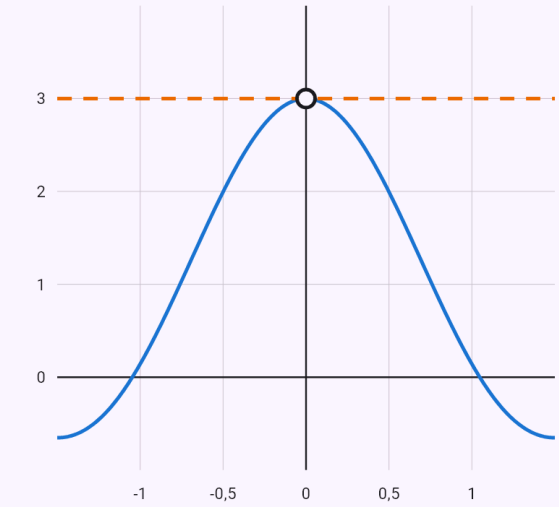
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Wir verwenden den bekannten Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graph



$y = \frac{\sin(3x)}{x}$

$y = 3$

Grenzwert:

○ $(0|3)$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Die Regel von L'Hospital, zweimal nacheinander angewendet.

Eingabe: `lim(x->0) (e^x-1-x)/x^2`

Ergebnis

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

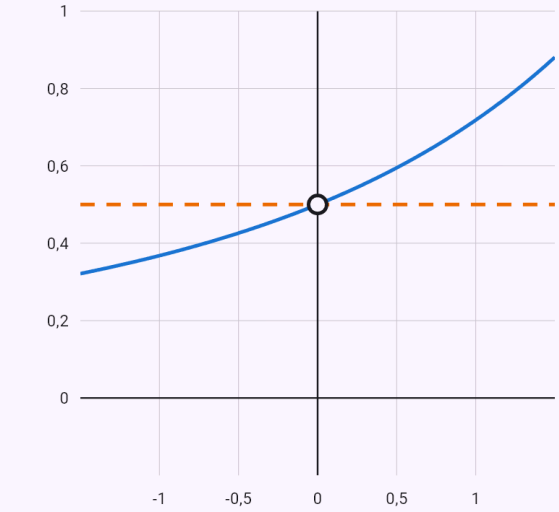
  $$\lim_{x\to 0}\frac{-x+e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x+e^x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

  $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

- Einsetzen: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$

Graph



$y=\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$y=\frac{1}{2}$

Grenzwert:

$\circ\ \left(0\middle|\frac{1}{2}\right)$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Der unbestimmte Ausdruck 0^0 – die Potenz als e^(g·ln f); die Funktion ist nur für x > 0 definiert, daher

der rechtsseitige Grenzwert.

Eingabe: `lim(x->0) x^(ln(x+1))`

Ergebnis

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = 1$$

Lösungsweg

- Links von 0 ist die Funktion nicht definiert, wir berechnen daher den rechtsseitigen Grenzwert.
- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck 0^0 – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Basis und Exponent enthalten die Variable – die Potenz als e hoch (Exponent mal Logarithmus der Basis) schreiben und den Grenzwert im Exponenten berechnen

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x \cdot \ln(x+1)}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Das Produkt als Quotient schreiben

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Der Faktor $x+1$ hat an der Stelle den Wert 1 – vor den Grenzwert ziehen

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{(\ln(x+1))^2}{x}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-(\ln(x+1))^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-(\ln(x+1))^2\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}$$

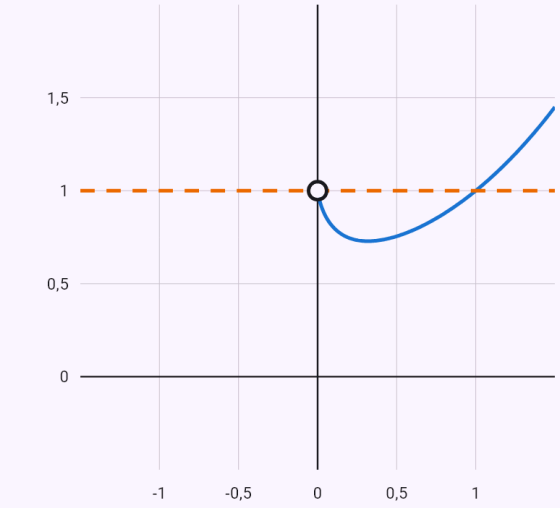
- Einsetzen

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\ln(x+1)}{x+1} = -\frac{2\ln(1+0)}{1+0} = 0$$

- Den Grenzwert des Exponenten einsetzen:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(x+1)} = e^0 = 1$$

Graph



$y = x^{\ln(x+1)}$
$y = 1$

Grenzwert:

$\circ\ (0|1)$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Die einseitigen Grenzwerte unterscheiden sich – der Grenzwert existiert nicht.

Eingabe: `lim(x->0) 1/x`

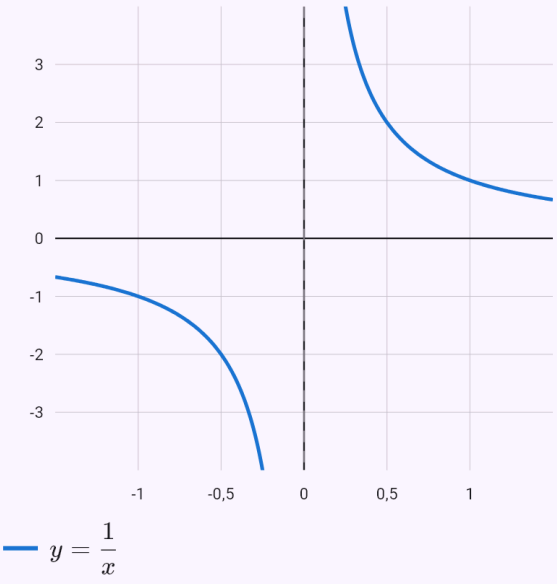
Ergebnis

Der Grenzwert existiert nicht – die einseitigen Grenzwerte sind verschieden.

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt eine Zahl ungleich null durch null – der Grenzwert ist unendlich, das Vorzeichen von links und von rechts: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \to \frac{1}{0}$
- Einseitige Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Graph



Grenzwert einer Folge – das am schnellsten wachsende Glied 9^n ausklammern.

Eingabe: `lim(n->oo) (6^n+7^n+9^n)^(1/(2n))`

Ergebnis

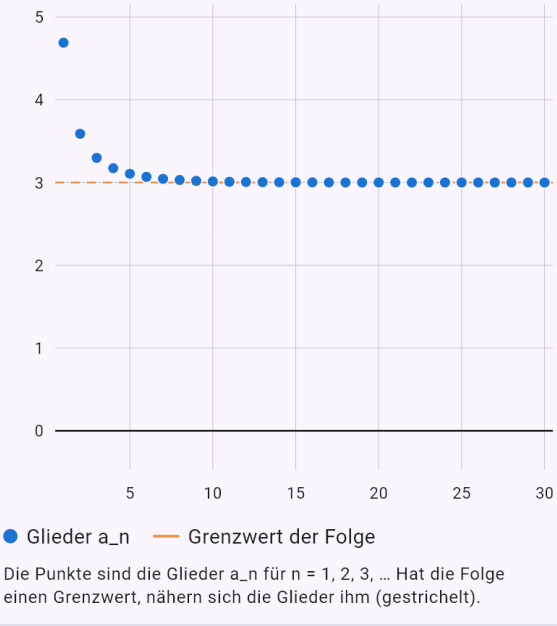
$$\lim_{n \to \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Lösungsweg

- Den am schnellsten wachsenden Term 9^n ausklammern – die anderen durch ihn geteilt gehen gegen null

$$\lim_{n \to \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{9} \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1 \right)^{\frac{1}{2n}} =$$

Graph



Die Punkte sind die Glieder a_n für n = 1, 2, 3, … Hat die Folge einen Grenzwert, nähern sich die Glieder ihm (gestrichelt).

Grenzwert mit Parameter k – der bekannte Grenzwert (1 + 1/x)^x = e ergibt e^k.

Eingabe: `lim(x->oo) (1+k/x)^x`

Ergebnis

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Lösungsweg

- Andere Buchstaben als die Variable sind Parameter – feste Zahlen, mit denen wir wie mit Konstanten rechnen: k
- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck 1^{∞} – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Wir schreiben die Basis als $1+\frac{1}{t}$ mit t = $\frac{x}{k}$ und die Potenz als $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ hoch k. Der Ausdruck in eckigen Klammern strebt gegen e – der bekannte Grenzwert $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$. Es bleibt der Grenzwert des Exponenten

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

26. Ableitungen

Die App leitet nach den Regeln ab – Summen-, Faktor-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel – und sagt bei jedem Schritt, welche Regel sie verwendet hat. Sie kann auch höhere Ableitungen und den Wert der Ableitung an einer Stelle. Grundfunktionen (x^2, sin x, e^x, …) leitet sie auch nach Definition ab, als Grenzwert des Differenzenquotienten. Zum Ergebnis gehört ein Graph der Funktion und ihrer Ableitung.

Bei einer durch eine Gleichung in x und y implizit gegebenen Funktion ($x^3 + y^3 = 3xy$) leitet sie beide Seiten nach x ab (y als Funktion von x) und drückt y' aus, oder verwendet die Formel $y' = -F_x / F_y$; sie bestimmt auch y'' und in einem gegebenen Punkt Tangente und Normale und zeichnet die Kurve.

In einem singulären Punkt (die Kurve schneidet sich oder hat eine Spitze) bestimmt sie die Tangenten aus den Gliedern niedrigsten Grades – beim kartesischen Blatt im Ursprung x = 0 und y = 0.

Das Differential df = f′(x) dx, an einer Stelle mit Schrittweite („Differential √x, x0 = 4, dx = 0.1“) mit dem Näherungswert $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. „ungefähr √4.1“ wählt die Stelle $x_0 = 4$, wo der Wert genau bekannt ist, und vergleicht die Schätzung mit dem wahren Wert.

Eingabe

`(x^2 sin x)'`	Die Ableitung mit einem Strich nach der Klammer.
`d/dx (e^x / x)`	Die Schreibweise d/dx, auch vom Foto (\frac{d}{dx}).
`(x^3 ln x)''`	Höhere Ableitungen mit mehreren Strichen oder mit der Ordnung beim Chip „Ableiten“.
`(x^2 + 1)'|_{x=2}`	Die Ableitung an einer Stelle, oder die Stelle beim Chip eintragen.
`x^2 sin x`	Ein Term mit dem Chip „Ableiten“ – dort wählen Sie auch die Ordnung, die Stelle und den Weg (nach den Regeln / nach Definition).
`x^3 + y^3 = 3xy`	Eine Gleichung in x und y – der Chip „Implizite Ableitung“ (Ordnung 1 oder 2, Verfahren, Punkt $[x_0; y_0]$) oder „Graph der Kurve“; geschrieben diff(x^3+y^3=3xy, x).
`Differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`	Das Differential an einer Stelle mit Schrittweite.

`ungefähr √4.1`	Ein Näherungswert mit dem Differential.

Beispiele

Die Produktregel.

Eingabe: `(x^2 sin x)'`

Ergebnis

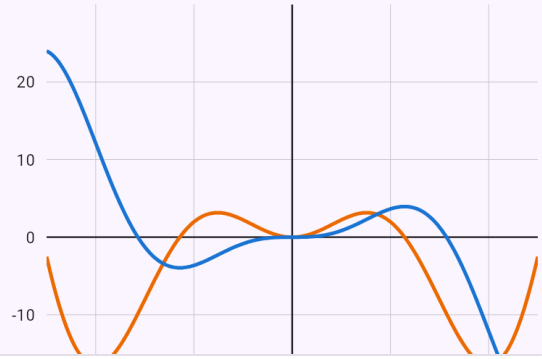
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

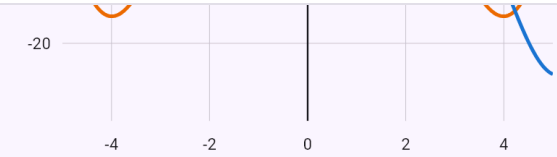
Lösungsweg

- Produktregel (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2$$

Graph





$y = x^2 \sin x$

$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Die Quotientenregel.

Eingabe: `d/dx (e^x / x)`

Ergebnis

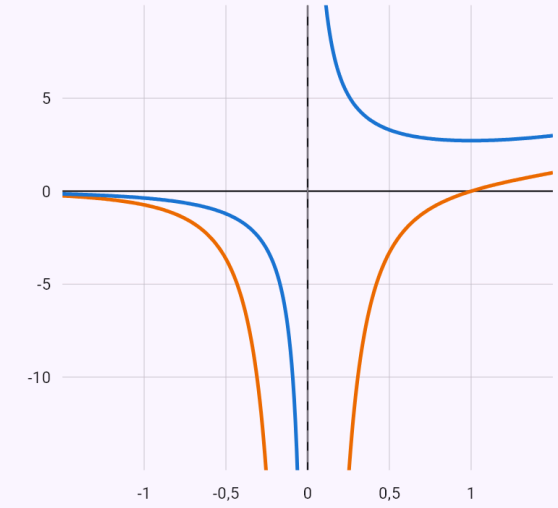
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Lösungsweg

- Quotientenregel (u/v)' = (u'·v − u·v')/v²

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graph



$y = \frac{e^x}{x}$

$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Die zweite Ableitung.

Eingabe: `(x^3 ln x)''`

Ergebnis

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Lösungsweg

- 1. Ableitung: $y' = \left(x^3 \ln x\right)'$
- Produktregel (u·v)' = u'·v + u·v'

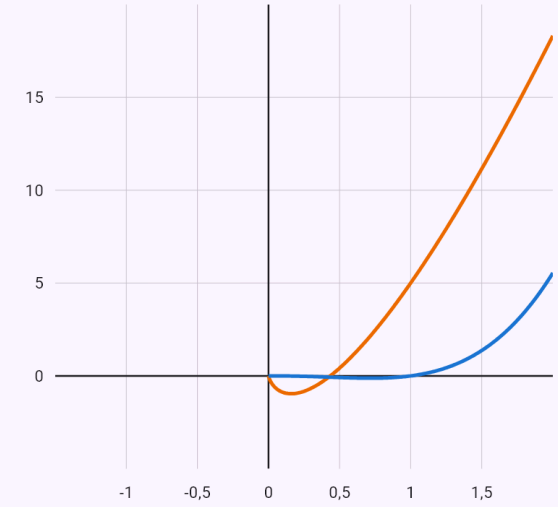
$$\left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$$

- 2. Ableitung: $y'' = \left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)'$
- Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(3x^2 \ln x\right)'$
- Den konstanten Faktor vor die Ableitung ziehen: $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot \left(x^2 \ln x\right)'$
- Produktregel (u·v)' = u'·v + u·v'

$$\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$$

- Einsetzen: $\left(3x^2 \ln x\right)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Einsetzen: $\left(x^2 + 3x^2 \ln x\right)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Vereinfachen: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graph



$y = x^3 \ln x$

$y'' = 5x + 6x \ln x$

Wo die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo sie negativ ist, konkav (rechtsgekrümmt).

Die Ableitung nach Definition als Grenzwert.

Eingabe: `x^2` Ableiten → Nach Definition

Ergebnis

$$y' = 2x$$

Lösungsweg

- Ableitung nach der Definition

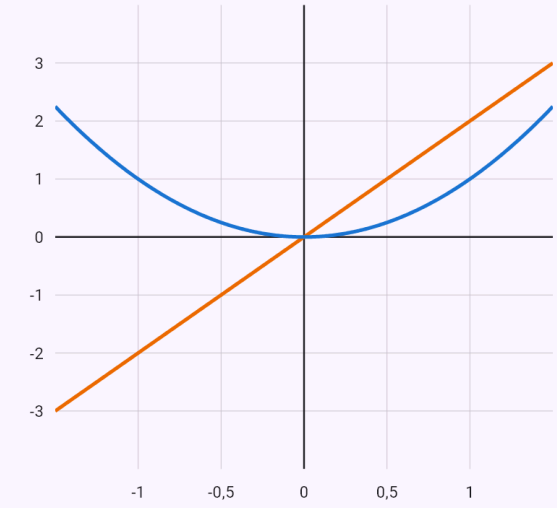
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Umformen und kürzen

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

- Einsetzen: $\lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Graph



$y = x^2$
$y' = 2x$

Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Implizite Ableitung – das kartesische Blatt, Tangente und Normale in [3/2; 3/2], die zweite Ableitung.

Eingabe: `x^3 + y^3 = 3xy` Implizite Ableitung, Ordnung 2, Punkt [3/2; 3/2]

Ergebnis

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

t: $y = 3 - x$

n: $y = x$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Bedingungen: $y^2 - x \neq 0$

Lösungsweg

- Die Funktion y = y(x) ist durch die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ gegeben – wir leiten beide Seiten nach x ab, y als Funktion von x (Kettenregel: z. B. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Beide Seiten abgeleitet: $\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \;\Rightarrow\; 3y^2y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Die Terme mit y' nach links, der Rest nach rechts, y' ausgeklammert: $y'\left(3y^2 - 3x\right) = -3x^2 + 3y$
- y' ausgedrückt: $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- Die zweite Ableitung – y' noch einmal nach x abgeleitet (y und y' sind Funktionen von x)

  $$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2yy' - 2xy^2 - y^2y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

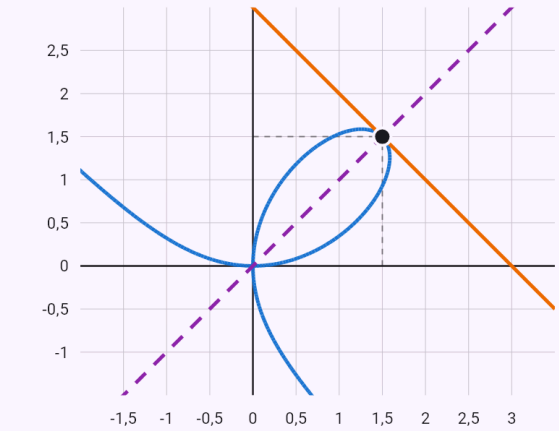
- y' eingesetzt

  $$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{\left(-y^2 + x\right)^3}$$

- Auf der Kurve gilt $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – das vereinfacht den Ausdruck: $y'' = -\frac{2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$

- Der Punkt $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ liegt auf der Kurve: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}} = 0$
- Die Ableitung im Punkt $[\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}]$ – die Steigung der Tangente: $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- Die Tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- Die Normale steht senkrecht auf der Tangente, ihre Steigung ist 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- Die zweite Ableitung im Punkt: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graph



$x^3 + y^3 = 3xy$
t: $y = 3 - x$
n: $y = x$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve. Im gegebenen Punkt die Tangente (durchgezogen) und die Normale (gestrichelt).

Das Differential von √x an der Stelle 4 mit der Schrittweite 0,1.

Eingabe: `Differential √x, x0 = 4, dx = 0.1`

Ergebnis

$$f(4{,}1) \approx \frac{81}{40} = 2{,}025$$

Lösungsweg

- Das Differential – der lineare Anteil des Zuwachses der Funktion: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Das Differential an der Stelle x_0 für die Schrittweite h

  $\mathrm{d}f(4) = f'(4) \cdot h = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{40} = 0{,}025$
- Wir ersetzen den Zuwachs durch das Differential. Der genaue Wert ist $2{,}0248457$, der Fehler der Schätzung $0{,}00015$

  $f(4{,}1) \approx f(4) + \mathrm{d}f(4) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40} = 2{,}025$

Ein Näherungswert von $\sqrt[3]{27{,}1}$ mit dem Differential.

Eingabe: `ungefähr \sqrt[3]{27.1}`

Ergebnis

$$f(27{,}1) \approx \frac{811}{270} = 3{,}0037$$

Lösungsweg

- Wir schreiben die Zahl als Wert der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nahe $x_0 = 27$, wo wir ihn genau kennen; die Schrittweite ist $h = 27{,}1 - 27 = 0{,}1$
- Das Differential – der lineare Anteil des Zuwachses der Funktion: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
- Das Differential an der Stelle x_0 für die Schrittweite h

  $\mathrm{d}f(27) = f'(27) \cdot h = \frac{1}{27} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{270} = 0{,}0037$
- Wir ersetzen den Zuwachs durch das Differential. Der genaue Wert ist $3{,}0036991$, der Fehler der Schätzung $0{,}0000046$

  $f(27{,}1) \approx f(27) + \mathrm{d}f(27) = 3 + \frac{1}{270} = \frac{811}{270} = 3{,}0037$

27. Kurvendiskussion

Die App untersucht eine Funktion in der üblichen Reihenfolge: Definitionsmenge, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Achsen, Vorzeichen der Funktion, Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge und Asymptoten, die erste Ableitung – Monotonie und Extrema (auch über höhere Ableitungen), die zweite Ableitung – Krümmung und Wendepunkte, schließlich die Wertemenge. Alles fasst sie in einer Übersicht zusammen und zeichnet einen Graphen mit den markierten Punkten.

Bei einer trigonometrischen Funktion bestimmt die App die Periode, untersucht die Funktion auf einer Periode und schreibt die Ergebnisse mit der Periode (Maximum bei x = π/2 + 2kπ); ist nur die Ableitung periodisch (x + 2 sin x), wiederholen sich Extrema und Monotonie mit der Periode. Beträge werden nach den Vorzeichen auf den Intervallen aufgelöst und an Knickstellen die einseitigen Ableitungen verglichen; wo die Ableitung unendlich ist, wird eine senkrechte Tangente gezeigt. Verschachtelte Beträge und Summen von Beträgen werden stückweise untersucht; wo die Funktion auf einem Intervall konstant ist, wird das mit ihrem Wert angegeben (ein Minimum in jedem Punkt des Intervalls).

Absolute (globale) Extrema auf einem abgeschlossenen Intervall: „Extrema x^3 - 3x auf [-2; 3]“ – die App findet die stationären Stellen und die Stellen ohne Ableitung im Intervall und vergleicht die Funktionswerte dort und an den Rändern. Ohne Intervall untersucht „Extrema …“ die Funktion. Die Umkehrfunktion („Umkehrfunktion f(x) = …“) entsteht durch Auflösen von y = f(x) nach x, mit Probe durch Verkettung; der Graph zeigt f, f^{-1} und die Gerade y = x.

Den Scheitel einer Parabel („Scheitelpunkt der Parabel y = x^2 - 4x + 7“, auch nur y = …) findet die App durch quadratische Ergänzung – mit Achse, Wertebereich und Verschiebung des Graphen von $y = ax^2$. Eine verkettete Funktion schreiben Sie mit den Definitionen: „f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))“.

Ein Graph durch Verschieben, Strecken und Spiegeln: „posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1“ (englisch „graph transformations …“) – die App geht von der Grundfunktion aus (sin, cos, tan, cot, e^x, a^x, ln, $\log_a$, Wurzel, Potenz, 1/x, |x|) und staucht oder streckt sie Schritt für Schritt in x-Richtung, verschiebt sie nach rechts oder links, streckt sie in y-Richtung, spiegelt sie und verschiebt sie nach oben oder unten; auch |f(x)| und f(|x|). Im Graphen stehen Grund- und Ergebnisfunktion.

Eingabe

`Kurvendiskussion y = x^3 - 3x`	Mit dem Wort „Kurvendiskussion“ vor der Funktion.
`x^3 - 3x`	Eine Funktion mit dem Chip „Kurvendiskussion“.

`Extrema x^3 - 3x auf [-2; 3]`	Absolute Extrema auf einem abgeschlossenen Intervall.
`Umkehrfunktion f(x) = (2x+1)/(x-3)`	Die Umkehrfunktion (auch „f^{-1}, f(x) = …“).

Beispiele

Ein Polynom – Extrema und ein Wendepunkt.

Eingabe: `x^3 - 3x` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$
Symmetrie: ungerade
Nullstellen: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
Steigend: $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$
Fallend: $[-1;\ 1]$
Lokales Maximum: $[-1;\ 2]$
Lokales Minimum: $[1;\ -2]$
Konvex: $[0;\ \infty)$
Konkav: $(-\infty;\ 0]$
Wendepunkte: $[0;\ 0]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).
- Schnittpunkte mit der x-Achse:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$, also
  $\left[-\sqrt{3};\ 0\right]$, $[0;\ 0]$, $\left[\sqrt{3};\ 0\right]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\ -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  Die Funktion ist positiv für $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ \infty\right)$ und negativ für $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Keine Asymptote für x → ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

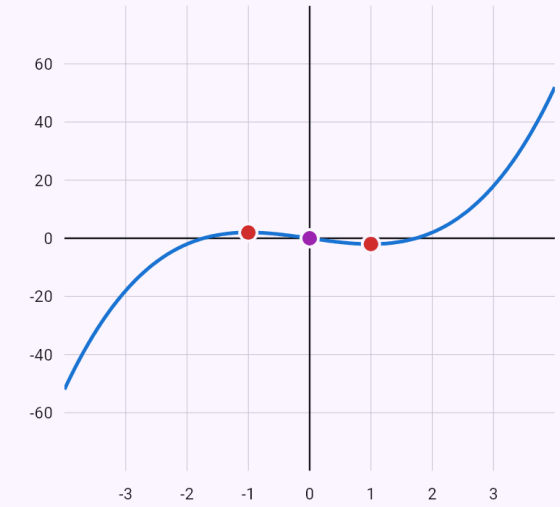
	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

  Die Funktion ist steigend auf $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$ und fallend auf $[-1;\ 1]$
- An der Stelle $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – lokales Minimum.
- Lokales Maximum $[-1;\ 2]$, lokales Minimum $[1;\ -2]$
- Zweite Ableitung: $f''(x) = 6x$
- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

  Die Funktion ist konvex auf $[0;\ \infty)$ und konkav auf $(-\infty;\ 0]$
- An der Stelle $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – die erste von null verschiedene Ableitung (ab der dritten) hat ungerade Ordnung: Wendestelle.
- Wendepunkte: $[0;\ 0]$
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



$y = x^3 - 3x$

Besondere Punkte:

- Maximum $(-1|2)$
- Wendepunkt $(0|0)$
- Minimum $(1|-2)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Eine gebrochenrationale Funktion – Asymptoten.

Eingabe: `x^2/(x - 1)` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Wertebereich: $W(f) = (-\infty;\ 0] \cup [4;\ \infty)$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Nullstellen: $[0;\ 0]$

Steigend: $(-\infty;\ 0],\ [2;\ \infty)$

Fallend: $[0;\ 1),\ (1;\ 2]$

Lokales Maximum: $[0;\ 0]$

Lokales Minimum: $[2;\ 4]$

Konvex: $(1;\ \infty)$

Konkav: $(-\infty;\ 1)$

Asymptoten: $x = 1,\ y = x + 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen $x \neq 1$:
  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist nicht symmetrisch zu null – die Funktion ist weder gerade noch ungerade.
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, also $[0;\ 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

Die Funktion ist positiv für $x \in (1;\ \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Senkrechte Asymptoten (dort ist der Grenzwert unendlich): $x = 1$
- Asymptote für x → ±∞: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$,
  $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – die Gerade $y = x + 1$
- Erste Ableitung
  $$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$
- Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0,\ x = 2$
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

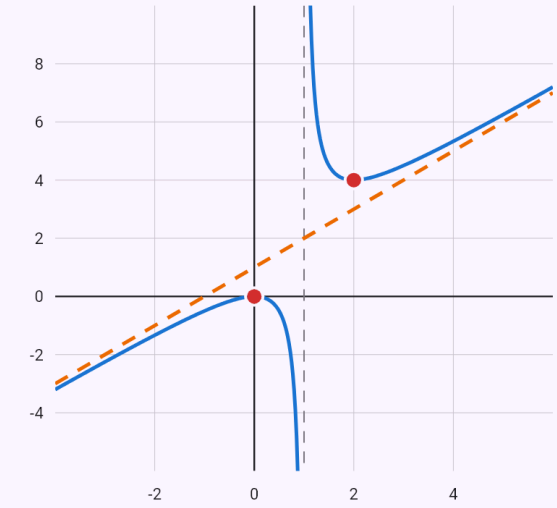
  Die Funktion ist steigend auf $(-\infty;\ 0],\ [2;\ \infty)$ und fallend auf $[0;\ 1),\ (1;\ 2]$
- An der Stelle $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – lokales Minimum.

- Lokales Maximum $[0;\ 0]$, lokales Minimum $[2;\ 4]$
- Zweite Ableitung: $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

  Die Funktion ist konvex auf $(1;\ \infty)$ und konkav auf $(-\infty;\ 1)$
- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = (-\infty;\ 0] \cup [4;\ \infty)$

Graph



$y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$y = x + 1$

Besondere Punkte:

- Maximum $(0|0)$
- Minimum $(2|4)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Periodische Funktion – alles auf einer Periode, die Ergebnisse mit der Periode.

Eingabe: `sin 2x + 2cos x` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Periode: $p = 2\pi$

Nullstellen: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$

Steigend: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Fallend: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Lokales Maximum: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Lokales Minimum: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Konvex:
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\right.$

Konkav:
$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\right.\right.$

Wendepunkte:
$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Die Funktion ist periodisch mit der Periode 2π – wir untersuchen sie auf einer Periode (von 0 bis 2π) und wiederholen die Ergebnisse mit der Periode, k ∈ ℤ.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – weder f(x) noch -f(x): die Funktion ist weder gerade noch ungerade.
- Schnittpunkte mit der x-Achse:
  $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, also $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ 0\right]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2$, also $[0;\ 2]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f(x)$	+	−	+

  Die Funktion ist positiv für $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ und negativ für $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
- Eine periodische Funktion (die nicht konstant ist) hat keinen Grenzwert bei ±∞.
- Erste Ableitung: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Stationäre Stellen
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(0;\ \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

  Die Funktion ist steigend auf $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ und fallend auf $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$
- Lokales Maximum $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, lokales Minimum $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
- Zweite Ableitung: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$
- Kandidaten für Wendestellen
  $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right))$	$(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right);\ \frac{3}{4}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Die Funktion ist konvex auf und konkav auf

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right],\ \left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi-\right.$$

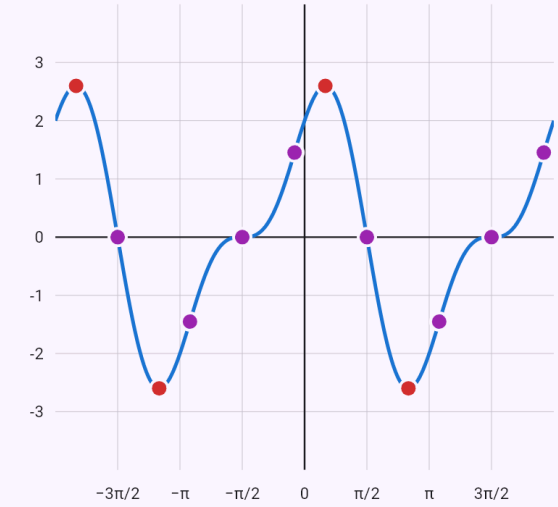
$$\left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],\ \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right.$$

- Wendepunkte

$$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right],\ \left[\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],\ [2\pi$$

- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f)=\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Graph



$y=\sin 2x+2\cos x$

Besondere Punkte:

- Maximum $\left(-\frac{11\pi}{6}\middle|\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(-\frac{3\pi}{2}\middle|0\right)$
- Minimum $\left(-\frac{7\pi}{6}\middle|-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\middle|-\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Wendepunkt $\left(-\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$
- Wendepunkt $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\middle|\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Maximum $\left(\frac{\pi}{6}\middle|\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$
- Minimum $\left(\frac{5\pi}{6}\middle|-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\middle|-\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Wendepunkt $\left(\frac{3\pi}{2}\middle|0\right)$
- Wendepunkt $\left(2\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\middle|\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Tangens – senkrechte Asymptoten, Wertebereich $\mathbb{R}$.

Eingabe: `tg x` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Periode: $p = \pi$

Nullstellen: $[k\pi;\ 0]$

Steigend: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Konvex: $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Konkav: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right]$

Wendepunkte: $[k\pi;\ 0]$

Asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Die Funktion ist periodisch mit der Periode π – wir untersuchen sie auf einer Periode (von 0 bis π) und wiederholen die Ergebnisse mit der Periode, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi$, also $[k\pi;\ 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$

  Die Funktion ist positiv für $x \in \left(k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ und negativ für $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right)$
- Eine periodische Funktion (die nicht konstant ist) hat keinen Grenzwert bei ±∞.
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$
  $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Senkrechte Asymptoten (dort ist der Grenzwert unendlich): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Erste Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

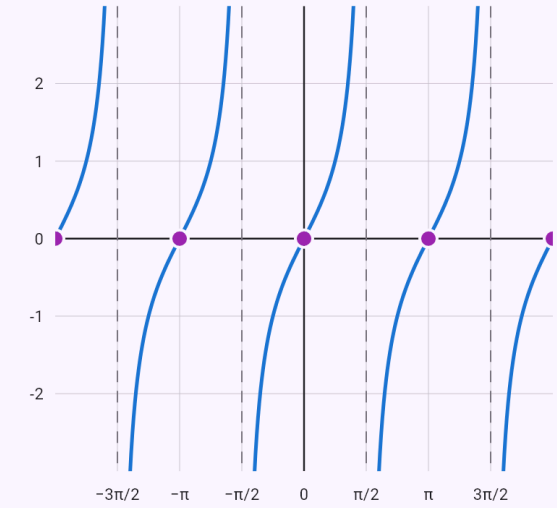
  Die Funktion ist steigend auf $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- Die Funktion hat keine lokalen Extrema.

- Zweite Ableitung: $f''(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$
- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0;\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2};\ \pi)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  Die Funktion ist konvex auf $\left[k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ und konkav auf $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + k\pi\right]$
- Wendepunkte: $[k\pi;\ 0]$
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



$y = \operatorname{tg} x$

Besondere Punkte:

- Wendepunkt $(-2\pi|0)$
- Wendepunkt $(-\pi|0)$
- Wendepunkt $(0|0)$
- Wendepunkt $(\pi|0)$
- Wendepunkt $(2\pi|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Tangens hyperbolicus – waagerechte Asymptoten y = ±1.

Eingabe: `tanh x` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = (-1;\ 1)$

Symmetrie: ungerade

Nullstellen: $[0;\ 0]$

Steigend: $\mathbb{R}$

Konvex: $(-\infty;\ 0]$

Konkav: $[0;\ \infty)$

Wendepunkte: $[0;\ 0]$

Asymptoten: $y = -1,\ y = 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, also $[0;\ 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Die Funktion ist positiv für $x \in (0;\ \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty;\ 0)$
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$
- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Asymptote für x → -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ – die Gerade $y = -1$
- Asymptote für x → +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ – die Gerade $y = 1$
- Erste Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

  Die Funktion ist steigend auf $\mathbb{R}$
- Die Funktion hat keine lokalen Extrema.
- Zweite Ableitung: $f''(x) = -\dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x}$
- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

  Die Funktion ist konvex auf $(-\infty;\ 0]$ und konkav auf $[0;\ \infty)$
- An der Stelle $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – die erste von null verschiedene Ableitung (ab der dritten) hat ungerade Ordnung: Wendestelle.
- Wendepunkte: $[0;\ 0]$
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = (-1;\ 1)$

Nur die Ableitung ist periodisch – die Werte der Extrema wachsen mit k.

Eingabe: `x + 2sin x` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Periode: $p = 2\pi$

Nullstellen: $[0;\ 0]$

Steigend: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Fallend: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokales Maximum: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokales Minimum: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Konvex: $[\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$

Konkav: $[2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Wendepunkte: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Die Funktion selbst ist nicht periodisch, ihre Ableitung aber schon (Periode 2π) – Monotonie, Extrema und Krümmung wiederholen sich mit dieser Periode, k ∈ $\mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, also $[0;\ 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Erste Ableitung: $f'(x) = 2\cos x + 1$
- Stationäre Stellen
  $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

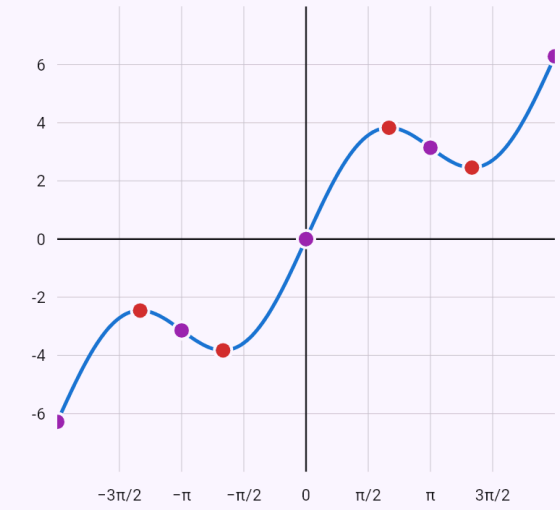
	$(0;\ \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

  Die Funktion ist steigend auf $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ und fallend auf $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$
- Lokales Maximum $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, lokales Minimum $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$
- Zweite Ableitung: $f''(x) = -2\sin x$
- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = k\pi$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0;\ \pi)$	$(\pi;\ 2\pi)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

  Die Funktion ist konvex auf $[\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$ und konkav auf $[2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$
- Wendepunkte: $[2k\pi;\ 2k\pi],\ [\pi + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$

Graph



$y = x + 2\sin x$

Besondere Punkte:

- Wendepunkt $(-2\pi|-2\pi)$
- Maximum $\left(-\frac{4\pi}{3}|\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(-\pi|-\pi)$
- Minimum $\left(-\frac{2\pi}{3}|-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(0|0)$
- Maximum $\left(\frac{2\pi}{3}|\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(\pi|\pi)$
- Minimum $\left(\frac{4\pi}{3}|\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- Wendepunkt $(2\pi|2\pi)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Betrag – Knickstellen, einseitige Ableitungen.

Eingabe: `|x^2 - 1|` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W(f) = [0;\, \infty)$
Symmetrie: gerade
Nullstellen: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$
Steigend: $[-1;\, 0],\ [1;\, \infty)$
Fallend: $(-\infty;\, -1],\ [0;\, 1]$
Lokales Maximum: $[0;\, 1]$
Lokales Minimum: $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$
Konvex: $(-\infty;\, -1],\ [1;\, \infty)$
Konkav: $[-1;\, 1]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty;\, -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1;\, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1;\, \infty) \end{cases}$$

- – die Funktion ist gerade (der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse).

$$f(-x) = \left|(-x)^2 - 1\right| = \left|x^2 - 1\right| = f(x)$$

- Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$, also $[-1;\, 0],\ [1;\, 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$, also $[0;\, 1]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\, -1)$	$(-1;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Die Funktion ist positiv für
$x \in (-\infty;\, -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, \infty)$ und negativ für
$x \in \emptyset$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Keine Asymptote für x → -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Keine Asymptote für x → +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{\left|x^2 - 1\right|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{\left|x^2 - 1\right|}$$

- Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$
- An der Stelle $x = -1$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 1$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\, -1)$	$(-1;\, 0)$	$(0;\, 1)$	$(1;\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Die Funktion ist steigend auf $[-1;\,0],\ [1;\,\infty)$ und fallend auf $(-\infty;\,-1],\ [0;\,1]$

- An der Stelle $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- Lokales Maximum $[0;\ 1]$, lokales Minimum $[-1;\ 0],\ [1;\ 0]$
- Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)^3}{\left|x^2-1\right|^3} = \frac{2(x-1)^3(x+1)^3}{\left|x^2-1\right|^3}$$

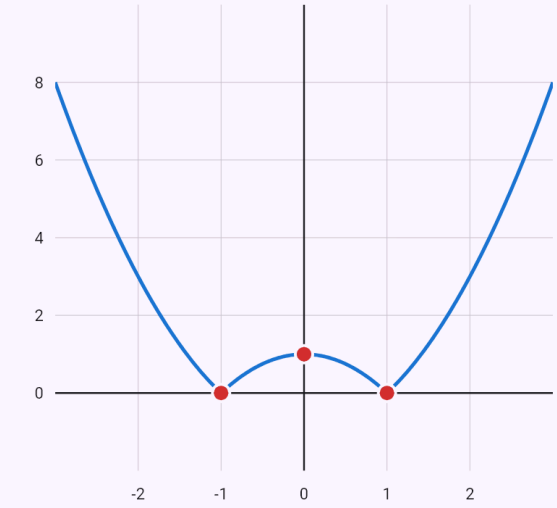
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\,-1)$	$(-1;\,1)$	$(1;\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

  Die Funktion ist konvex auf $(-\infty;\,-1],\ [1;\,\infty)$ und konkav auf $[-1;\,1]$

- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [0;\,\infty)$

Graph



$y = |x^2 - 1|$

Besondere Punkte:

- Minimum $(-1|0)$
- Maximum $(0|1)$
- Minimum $(1|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Kubikwurzel – senkrechte Tangente bei null.

Eingabe: `x^(1/3)` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Nullstellen: $[0;\ 0]$

Steigend: $\mathbb{R}$

Konvex: $(-\infty;\ 0]$

Konkav: $[0;\ \infty)$

Wendepunkte: $[0;\ 0]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = \sqrt[3]{-x} = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$, also $[0;\ 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0;\ 0]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

  Die Funktion ist positiv für $x \in (0;\ \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty;\ 0)$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Keine Asymptote für x → -∞: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, aber $q = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Keine Asymptote für x → +∞: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, aber $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Erste Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.
- An der Stelle $x = 0$ ist die Ableitung unendlich ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – der Graph hat dort eine senkrechte Tangente.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

  Die Funktion ist steigend auf $\mathbb{R}$

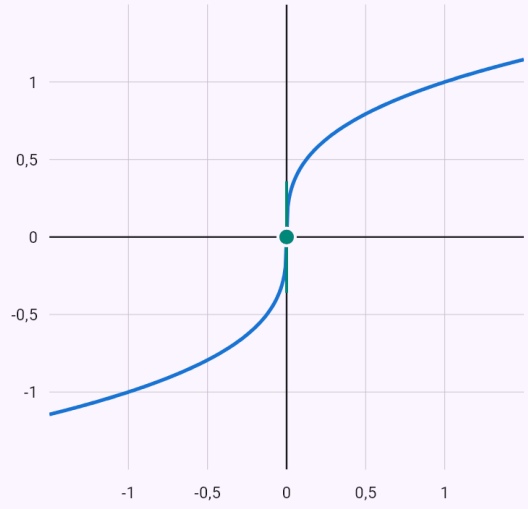
- Die Funktion hat keine lokalen Extrema.
- Zweite Ableitung: $f''(x) = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

  Die Funktion ist konvex auf $(-\infty;\ 0]$ und konkav auf $[0;\ \infty)$

- Wendepunkte: $[0;\ 0]$
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Besondere Punkte:

● Wendepunkt $(0|0)$ ● senkrechte Tangente $(0|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Verschachtelter Betrag – stückweise, gerade Funktion.

Eingabe: `|-x^2 + 2|x| + 3|` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = [0;\, \infty)$

Symmetrie: gerade

Nullstellen: $[-3;\, 0],\ [3;\, 0]$

Steigend: $[-3;\, -1],\ [0;\, 1],\ [3;\, \infty)$

Fallend: $(-\infty;\, -3],\ [-1;\, 0],\ [1;\, 3]$

Lokales Maximum: $[-1;\, 4],\ [1;\, 4]$

Lokales Minimum: $[-3;\, 0],\ [0;\, 3],\ [3;\, 0]$

Konvex: $(-\infty;\, -3],\ [3;\, \infty)$

Konkav: $[-3;\, 0],\ [0;\, 3]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty;\, -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3;\, 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0;\, 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3;\, \infty) \end{cases}$$

- – die Funktion ist gerade (der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse).

$$f(-x) = \left|-(-x)^2 + 2|(-x)| + 3\right| = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right| =$$

- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -3,\ x = 3$, also $[-3;\, 0],\ [3;\, 0]$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 3$, also $[0;\, 3]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\, -3)$	$(-3;\, 3)$	$(3;\, \infty)$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$

Die Funktion ist positiv für $x \in (-\infty;\, -3) \cup (-3;\, 3) \cup (3;\, \infty)$ und negativ für $x \in \emptyset$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Keine Asymptote für x → -∞: $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- Keine Asymptote für x → +∞: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
- Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|\left|-x^2 + 2|x| + 3\right|} = \frac{2x(x-1)(x+$$

- Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 1$
- An der Stelle $x = -3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 0$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), der Graph hat dort einen Knick.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\, -3)$	$(-3;\, -1)$	$(-1;\, 0)$	$(0;\, 1)$	$(1;\, 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Die Funktion ist steigend auf $[-3;\, -1],\ [0;\, 1],\ [3;\, \infty)$ und fallend auf $(-\infty;\, -3],\ [-1;\, 0],\ [1;\, 3]$

- An der Stelle $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- Lokales Maximum $[-1;\ 4]$, $[1;\ 4]$, lokales Minimum $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$, $[3;\ 0]$
- Zweite Ableitung

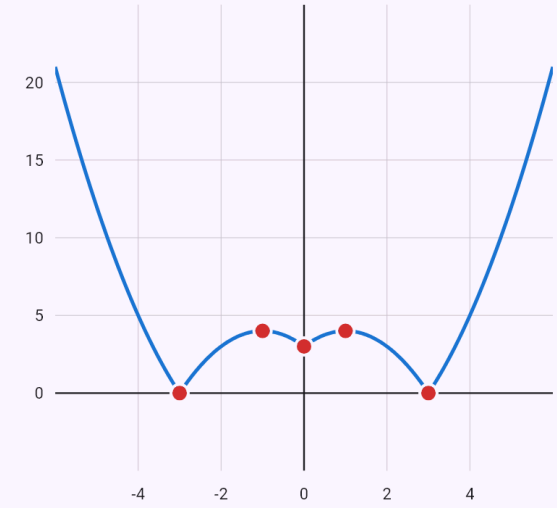
$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty;\ -3)$	$(-3;\ 0)$	$(0;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

  Die Funktion ist konvex auf $(-\infty;\ -3]$, $[3;\ \infty)$ und konkav auf $[-3;\ 0]$, $[0;\ 3]$
- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [0;\ \infty)$

Graph



$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Besondere Punkte:

- Minimum $(-3|0)$
- Maximum $(-1|4)$
- Minimum $(0|3)$
- Maximum $(1|4)$
- Minimum $(3|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Summe von Beträgen – ein konstantes Stück und zwei schiefe Asymptoten.

Eingabe: `|x - 2| + |x + 3|` Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = [5;\, \infty)$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Steigend: $[2;\, \infty)$

Fallend: $(-\infty;\, -3]$

Konstant: $[-3;\, 2]$

Lokales Minimum: $f(x) = 5,\ x \in [-3;\, 2]$

Asymptoten: $y = -2x - 1,\ y = 2x + 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty;\, -3) \\ 5, & x \in [-3;\, 2) \\ 2x + 1, & x \in [2;\, \infty) \end{cases}$$

- − weder f(x) noch −f(x): die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x$$

- Die Gleichung $f(x) = 0$ hat keine Lösung – der Graph schneidet die x-Achse nicht.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 5$, also $[0;\ 5]$
- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty;\, \infty)$
$f(x)$	$+$

Die Funktion ist positiv für $x \in \mathbb{R}$ und negativ für $x \in \emptyset$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

- Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.
- Asymptote für x → −∞: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – die Gerade $y = -2x - 1$
- Asymptote für x → +∞: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – die Gerade $y = 2x + 1$
- Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x -}$$

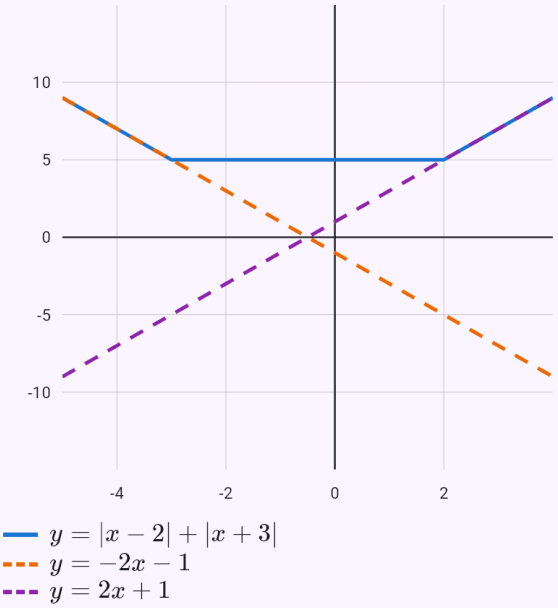
- Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.
- An der Stelle $x = -3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-3) = -2$, $f'_+(-3) = 0$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 2$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.
- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty;\, -3)$	$(-3;\, 2)$	$(2;\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	→	↗

Die Funktion ist steigend auf $[2;\, \infty)$ und fallend auf $(-\infty;\, -3]$. Auf $[-3;\, 2]$ ist sie konstant (f' = 0).

- Lokales Minimum $f(x) = 5,\ x \in [-3;\, 2]$, kein lokales Maximum.
- Zweite Ableitung: $f''(x) = 0$
- Die zweite Ableitung ist null – der Graph ist (Teil) einer Geraden, weder konvex noch konkav.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [5;\, \infty)$

Graph



$y = |x - 2| + |x + 3|$
$y = -2x - 1$
$y = 2x + 1$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Absolute Extrema auf einem Intervall – stationäre Stellen und Ränder.

Eingabe: `Extrema x^3 - 3x auf [-2; 3]`

Ergebnis

$$\max f = 18, \quad \min f = -2$$

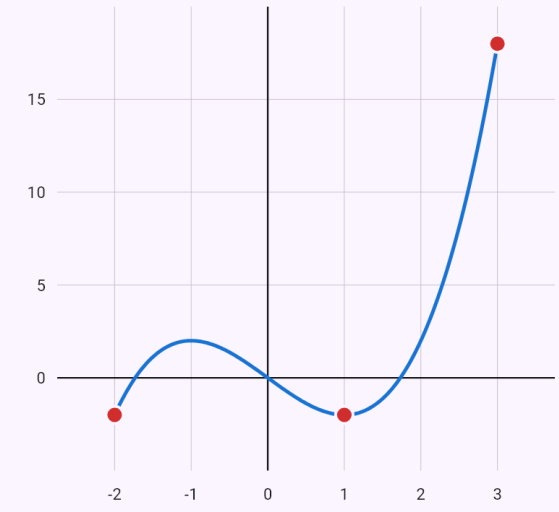
Lösungsweg

- Die Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Stationäre Stellen ($f'(x) = 0$): $x = -1,\ x = 1$; alle liegen im Intervall $\langle -2;\ 3 \rangle$
- Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall ihren größten und kleinsten Wert an (Satz vom Maximum und Minimum) – an einer stationären Stelle, an einer Stelle ohne Ableitung oder am Rand. Wir vergleichen die Funktionswerte

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

- Der größte Wert auf $\langle -2;\ 3 \rangle$ ist $f(3) = 18$, der kleinste $f(-2) = f(1) = -2$

Graph



$y = x^3 - 3x$

Besondere Punkte:

- Maximum $(3|18)$
- Minimum $(-2|-2)$
- Minimum $(1|-2)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Die Umkehrfunktion einer gebrochen linearen Funktion, mit Probe.

Eingabe: `Umkehrfunktion f(x) = (2x+1)/(x-3)`

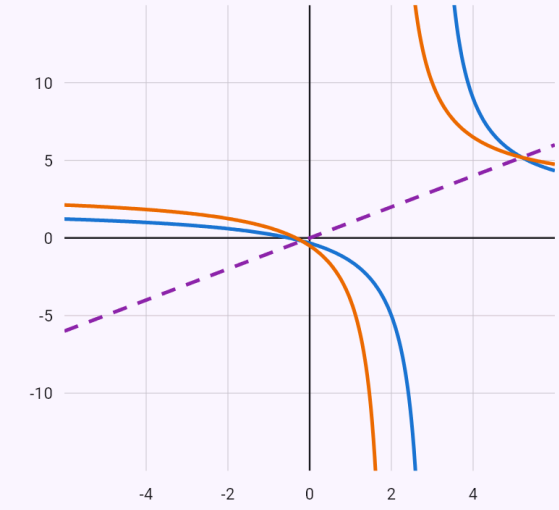
Ergebnis

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Lösungsweg

- Die Funktion $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, Bedingungen des Definitionsbereichs: $x - 3 \neq 0$
- Wir lösen $y = f(x)$ nach x auf: $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$
- Wir vertauschen x und y: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich von f: $x - 2 \neq 0$
- Probe durch Verkettung: $f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = x$ ✓

Graph



$y = \frac{2x+1}{x-3}$

f^{-1}

$y = x$

Der Graph der Umkehrfunktion ist zum Graphen von f symmetrisch bezüglich der Geraden y = x.

Der Scheitel einer Parabel durch quadratische Ergänzung.

Eingabe: `Scheitelpunkt der Parabel y = x^2 - 4x + 7`

Ergebnis

$$V = [2;\ 3],\ y = (x-2)^2 + 3$$

Lösungsweg

- Quadratische Ergänzung: $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$
- Scheitel $V = [2;\ 3]$, Achse $x = 2$; die Parabel ist nach oben geöffnet, Wertebereich $H(f) = \langle 3; \infty)$
- Der Graph entsteht durch Verschiebung des Graphen von $y = x^2$ um den Vektor $(2;\ 3)$

Eine Sinuskurve durch Stauchen, Verschieben und Strecken.

Eingabe: `posuny grafu y = 2sin(3(x - 1)) + 1`

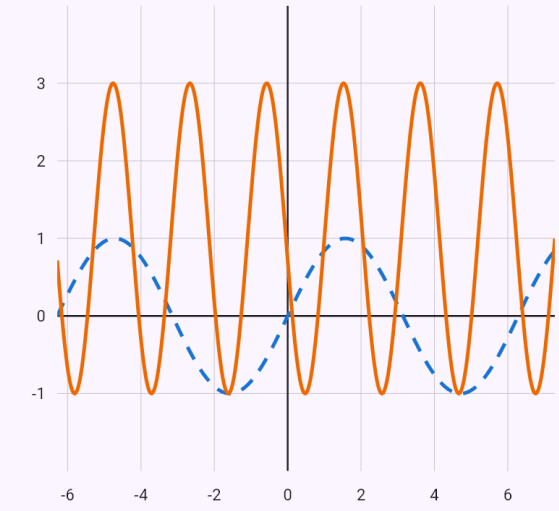
Ergebnis

$$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$$

Lösungsweg

- Wir gehen vom Graphen der Grundfunktion $y = \sin x$ aus.
- Wir stauchen den Graphen in Richtung der x-Achse mit dem Faktor 3 (zur y-Achse hin): $y = \sin\left(3x\right)$
- Wir verschieben den Graphen um 1 nach rechts in Richtung der x-Achse: $y = \sin\left(3(x-1)\right)$
- Wir strecken den Graphen in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 2: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right)$
- Wir verschieben den Graphen um 1 nach oben in Richtung der y-Achse: $y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Graph



$y = \sin x$

$y = 2\sin\left(3(x-1)\right) + 1$

Gestrichelt der Graph der Grundfunktion, durchgezogen der entstandene Graph.

Eine Wurzel, verschoben und an der x-Achse gespiegelt.

Eingabe: `posuny grafu y = -sqrt(x + 2) + 3`

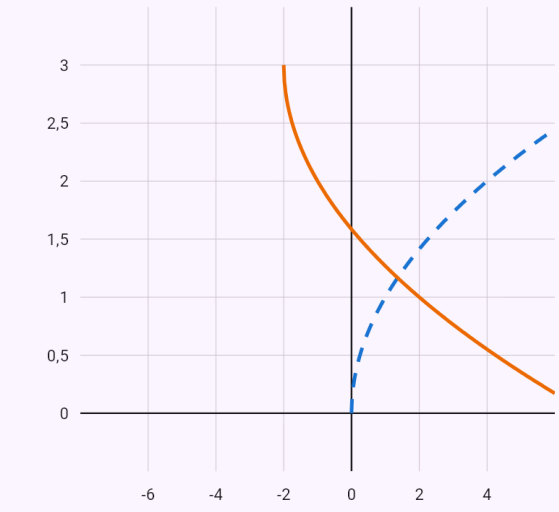
Ergebnis

$$y = -\sqrt{x+2} + 3$$

Lösungsweg

- Wir gehen vom Graphen der Grundfunktion $y = \sqrt{x}$ aus.
- Wir verschieben den Graphen um 2 nach links in Richtung der x-Achse: $y = \sqrt{x+2}$
- Wir spiegeln den Graphen an der x-Achse: $y = -\sqrt{x+2}$
- Wir verschieben den Graphen um 3 nach oben in Richtung der y-Achse: $y = -\sqrt{x+2} + 3$

Graph



$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x+2} + 3$

Gestrichelt der Graph der Grundfunktion, durchgezogen der entstandene Graph.

Eine verkettete Funktion f(g(x)).

Eingabe: `f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3, f(g(x))`

Ergebnis

$$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 10$$

Lösungsweg

- In die äußere Funktion f setzen wir für x die innere Funktion g ein:
  $f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

Bekannte Einschränkungen

- Eine Funktion, die nicht einmal eine periodische Ableitung hat (x·sin x), wird nur numerisch auf ⟨−2π; 2π⟩ und ohne Periode untersucht; Arkusfunktionen (arcsin, arctan) werden noch nicht unterstützt.
- Absolute Extrema nur auf einem abgeschlossenen Intervall und für eine stetige Funktion; die Umkehrfunktion nur, wo eine Formel sie ausdrückt – für eine nicht injektive Funktion (x²) wird die Umkehrung auf einem Teil des Definitionsbereichs noch nicht gesucht.

28. Funktionen mehrerer Variablen

Partielle Ableitungen (erste und zweite, gemischte) und der Gradient einer Funktion von zwei oder drei Variablen – beim Ableiten nach einer Variablen sind die anderen Konstanten.

Lokale Extrema einer Funktion von zwei Variablen: die stationären Punkte aus f_x = 0, f_y = 0, jeder entschieden durch die Determinante der Hesse-Matrix D = f_xx·f_yy − f_xy² (Minimum, Maximum, Sattel). Extrema unter einer Nebenbedingung („Extrema xy, x + y = 1“) mit der Lagrange-Methode und der geränderten Hesse-Determinante.

Die Richtungsableitung (Gradient mal Einheitsvektor), das totale Differential mit Näherungswert und die Tangentialebene einer Fläche. Ein Doppelintegral gibt man mit iterierten Grenzen oder als Gebiet aus Ungleichungen ein; die App zerlegt das Gebiet in Normalbereiche, zeigt das innere und das äußere Integral und zeichnet das Gebiet; der Schalter 3D zeigt die Fläche des Integranden darüber. Die Chips unter dem Ergebnis ändern die Integrationsreihenfolge und wechseln zu Polarkoordinaten.

Vektoranalysis: die Divergenz, die Rotation (bei einem ebenen Feld eine einzige Zahl ∂Q/∂x − ∂P/∂y), der Laplace-Operator und das Potential eines konservativen Feldes – die App prüft zuerst, dass die Rotation null ist, findet dann φ durch schrittweise Integration der Komponenten und macht die Probe ∇φ = F. Ein Feld wird als Vektor (P; Q; R) oder (P; Q) eingegeben, auch mit den Einheitsvektoren i, j, k oder benannt „F = …“ in einer eigenen Zeile. Bei einem ebenen Feld zeigt der Graph die Pfeile des Feldes und die Höhenlinien des Potentials. Chips unter dem Ergebnis wechseln zwischen Divergenz, Rotation und Potential desselben Feldes.

Kurvenintegrale: 1. Art ∫_C f ds (Länge einer Kurve, Masse eines Drahtes) und 2. Art ∫_C F·dr (Arbeit einer Kraft, Zirkulation ∮ längs einer geschlossenen Kurve). Die Kurve wird durch eine Parametrisierung r(t) oder eine Vorlage angegeben – Strecke, Kreis, Graph y = f(x), Streckenzug; die Schritte zeigen den Tangentenvektor, das Einsetzen ins Feld und das Integral nach t. Bei einem konservativen Feld prüft die App das Ergebnis mit dem Potential φ(B) − φ(A) (Wegunabhängigkeit), bei einer geschlossenen ebenen Kurve (Kreis, Ellipse, konvexes Vieleck) mit dem Satz von Green – sie berechnet auch das Doppelintegral über das Gebiet innen. Chips unter dem Ergebnis wählen, welcher Weg der Hauptweg ist. Das Formular „Kurvenintegral“ (Bereich „Anwendungen“, Fachgebiet Mehrdimensionale Analysis) bietet Vorlagen für die Kurve; der Graph zeigt die Kurve mit ihrer Orientierung über den Pfeilen des Feldes und dem Gebiet aus dem Satz von Green, eine Raumkurve in 3D, mit dem Finger drehbar.

Dreifachintegrale: mit iterierten Grenzen, über einen Körper aus Ungleichungen (∭_V, auch vom Foto) oder mit dem Formular „Dreifachintegral“ (Bereich „Anwendungen“, Fachgebiet Mehrdimensionale Analysis) mit den Vorlagen Quader, Kugel, Zylinder, Kegel, Körper zwischen Graphen und Ungleichungen. Die App beschreibt den Körper als Normalbereich – die innerste Variable zwischen zwei Flächen über der Projektion – und berechnet drei Integrale nacheinander (Satz von Fubini). In Zylinder- und

Kugelkoordinaten zeigt sie die Substitution mit der Jacobi-Determinante (r, ρ² sin θ) und die Grenzen in den neuen Variablen; wenn kartesische Koordinaten kein exaktes Ergebnis liefern, wechselt sie selbst dorthin, und bei einer Kugel, einem Zylinder oder x² + y² in der Aufgabe bietet ein Chip sie an. Das Formular berechnet auch das Volumen, die Masse mit einer Dichte ρ, den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse. Ein drehbarer 3D-Graph zeigt den Körper.

Buchstaben außer x, y, z (ein Radius r, eine Höhe h, Kanten a, b, c) sind positive Parameter: Das Ergebnis ist eine Formel, etwa V = 4/3 πr³ für die Kugel ball(r) – neben dem Radius r heißt die Zylinderkoordinate ϱ – oder V = abc für einen Quader. Die App prüft die Formel numerisch für mehrere Werte der Parameter; das 3D-Bild des Körpers zeigt den Wert 1.

Oberflächenintegrale: erster Art ∬_S f dS (Flächeninhalt, Masse einer Schale) und zweiter Art – der Fluss ∬_S F·n dS. Die Fläche wird durch eine Vorgabe eingegeben – ein Graph z = g(x, y) über einem Gebiet D, eine Sphäre, eine Halbsphäre, ein Zylinder, ein Kegel (die ganze Oberfläche mit den Kreisscheiben oder nur der Mantel) – oder durch eine Parametrisierung r(u, v). Die Schritte zeigen die Tangentenvektoren r_u, r_v, den Normalenvektor r_u × r_v mit seiner Orientierung (bei einer geschlossenen Fläche nach außen, bei einem Graphen nach oben, sonst nach der Parametrisierung; wählbar mit outward, inward, up, down), das Flächenelement und das Doppelintegral über die Parameter; eine geschlossene Fläche wird aus ihren Teilen addiert. Den Fluss durch eine geschlossene Fläche prüft die App mit dem Satz von Gauß (Dreifachintegral der Divergenz), den Fluss einer Rotation mit dem Satz von Stokes – dem Kurvenintegral längs des Randes; Chips unter dem Ergebnis wechseln den Hauptweg. Das Formular „Oberflächenintegral“ (Bereich „Anwendungen“, Gebiet Mehrdimensionale Analysis) bietet Vorgaben der Fläche; ein drehbarer 3D-Graph zeigt die Fläche mit Normalen, Pfeilen des Feldes und dem Rand.

Draht und Schale: die Formulare des Kurven- und des Oberflächenintegrals (die Wahl „Was berechnen“) und die Schreibweise quantity=mass / centroid / inertia berechnen die Masse eines Drahts oder einer Schale mit der Dichte f (leer = 1), den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse (axis=x, y, z). Das Planimeter lineint(area; C) berechnet den Flächeninhalt innerhalb einer geschlossenen ebenen Kurve als ½∮ x dy − y dx und prüft ihn mit dem Satz von Green.

Eingabe

`partielle Ableitungen x^2 y + y^3`	Alle ersten partiellen Ableitungen (mit „zweite“ die zweiten).
`∂/∂x (x^2 y + y^3)`	Eine partielle Ableitung (auch \frac{\partial}{\partial x}).
`gradient x^2 y + y^3`	Der Gradient.

`Extrema x^2 + y^2 - 2x + 4y`	Lokale Extrema einer Funktion von zwei Variablen.
`Extrema xy, x + y = 1`	Extrema unter Nebenbedingung – die Funktion, nach einem Komma die Bedingung.
`directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`	Richtungsableitung: Funktion, Punkt, Richtung (auch in Worten).
`totaldiff(x^2 y; [1; 2]; h=0.1 0.2)`	Totales Differential; Punkt und Zuwächse h sind optional (auch in Worten).
`tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`	Tangentialebene in einem Punkt, für z = f(x, y) oder F(x, y, z) = 0 (auch in Worten).
`∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`	Doppelintegral mit iterierten Grenzen (auch \int_0^1 dx \int_0^x ... dy).
`iint(x y; 0 <= x <= 1; 0 <= y <= x)`	Doppelintegral über ein Gebiet aus Ungleichungen (auch \iint_D ..., D: ...); order=dxdy oder polar können ergänzt werden.
`div(x y; y z; z x)`	Die Divergenz eines Feldes (auch ∇·F, \nabla \cdot, \operatorname{div}, in Worten „Divergenz“).
`∇×(y z; x z; x y)`	Die Rotation (auch rot, curl, \nabla \times); bei einem Feld (P; Q) eine einzige Zahl.
`Δ(x^2 y + y^3)`	Der Laplace-Operator einer Funktion von zwei oder drei Variablen (auch laplace(...), ∇², \Delta).
`Potential (2x + y; x + 2y)`	Das Potential eines konservativen Feldes (auch potential(...)); das Feld darf benannt sein: „div F, F = (y; x; 0)“.
`lineint((y; -x); circle([0; 0]; 1))`	Ein Kurvenintegral – ein Feld (P; Q) oder eine Funktion f, dann die Kurve: r(t) = (…); t = a..b, segment(A; B), circle(S; r), graph(y = …; x = a..b), polyline(A; B; …); auch cw (im Uhrzeigersinn), method=green / method=potential (auch in Worten „Kurvenintegral … entlang …“). Nach der Kurve auch quantity=mass / centroid / inertia (mit axis=…); area statt der Funktion

	berechnet den Inhalt innerhalb einer geschlossenen Kurve.
`lineint(1; circle([0; 0]; 2); quantity=mass)`	Die Masse eines Drahts mit der Dichte f, quantity=centroid sein Schwerpunkt, quantity=inertia sein Trägheitsmoment (axis=x, y, z).
`lineint(area; polyline([0; 0]; [2; 0]; [2; 1]; [0; 1]; [0; 0]))`	Das Planimeter – der Flächeninhalt innerhalb einer geschlossenen ebenen Kurve aus dem Integral über ihren Rand (Satz von Green).
`\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`	Vom Foto ∮_C oder ∫_C mit P dx + Q dy, F·dr oder f ds; die Kurve nach einem Komma oder auf der nächsten Zeile (C: …).
`\int_C x y \, ds, C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2`	Ein Integral 1. Art – die Kurve parametrisch mit dem Bereich des Parameters (auch t ∈ [a, b]).
`tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`	Ein Dreifachintegral – die Funktion, dann der Körper durch Ungleichungen oder eine Vorlage ball(R), ball(R; a; b; c), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h); Koordinaten cart, cyl, sph, die Reihenfolge order=dzdydx, quantity=volume / mass / centroid / inertia (mit axis=x). In Worten „Dreifachintegral z über V: …“, „Volumen des Körpers …“, „Masse des Körpers … mit Dichte …“, „Schwerpunkt des Körpers …“, „Trägheitsmoment des Körpers … bezüglich der z-Achse“.
`\iiint_V z \, dV, V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0`	Vom Foto ∭ (\iiint_V) mit dV oder dx dy dz; der Körper nach einem Komma (V: …) oder unter dem Integral.
`\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`	Mit iterierten Grenzen – drei Integrale hintereinander, die Differentiale am Ende oder direkt nach ihrem Integral.
`surfint((x; y; z); cylinder(1; 2))`	Ein Oberflächenintegral – eine Funktion f, ein Feld (P; Q; R) oder curl(P; Q; R), dann die Fläche: graph(z = …; Ungleichungen von D), sphere(R), sphere(R; a; b; c), hemisphere(R), cylinder(R; h), cylinder(R; h1; h2), cone(R; h), r(u, v) = (…); u = a..b; v = c..d; lateral (nur der Mantel), closed (Halbsphäre mit Grundfläche), outward

	/ inward / up / down, method=gauss / method=stokes. In Worten „Oberflächenintegral von … über …“, „Fluss von … durch …“. Bei einer Funktion f auch quantity=mass / centroid / inertia (mit axis=…).
`\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \vec{F} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 1`	Vom Foto ∬_S oder ∯_S mit f dS, F·dS oder F·n dS; die Fläche nach einem Komma oder in der nächsten Zeile: S: x² + y² + z² = R² (mit z ≥ 0 eine Halbsphäre), x² + y² = R² mit Grenzen für z (Zylindermantel), z = g(x, y) mit Ungleichungen, r(u, v) mit den Bereichen der Parameter.
`\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS, \vec{F} = (y, -x, z), S: z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0`	Der Fluss einer Rotation (∇ × F, rot F, curl F) – das Feld getrennt benannt; Probe mit dem Satz von Stokes.
`surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`	Masse, Schwerpunkt oder Trägheitsmoment einer Schale mit der Flächendichte f.

Beispiele

Zweite partielle Ableitungen, auch die gemischte.

Eingabe: `zweite partielle Ableitungen x^2 y + y^3`

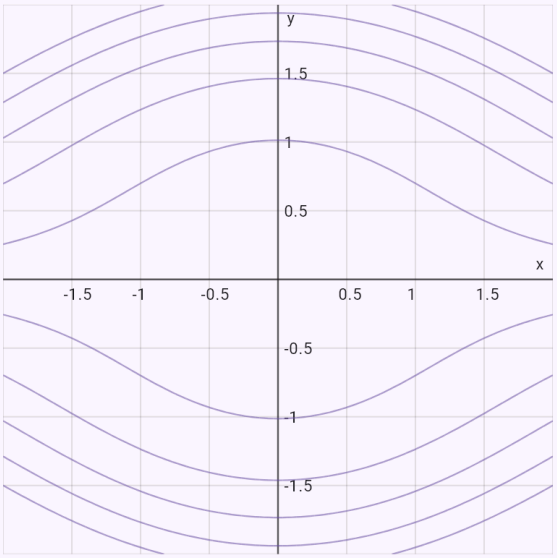
Ergebnis

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2, \quad f_{xx} = 2$$

Lösungsweg

- Die partielle Ableitung nach x – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$
- Die partielle Ableitung nach y – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$
- Die partielle Ableitung nach xx – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$
- Die partielle Ableitung nach xy – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$
- Die partielle Ableitung nach yy – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Graph



Höhenlinien von f.

Lokale Extrema – ein Sattelpunkt und ein Minimum.

Eingabe: `Extrema x^3 - 3xy + y^3`

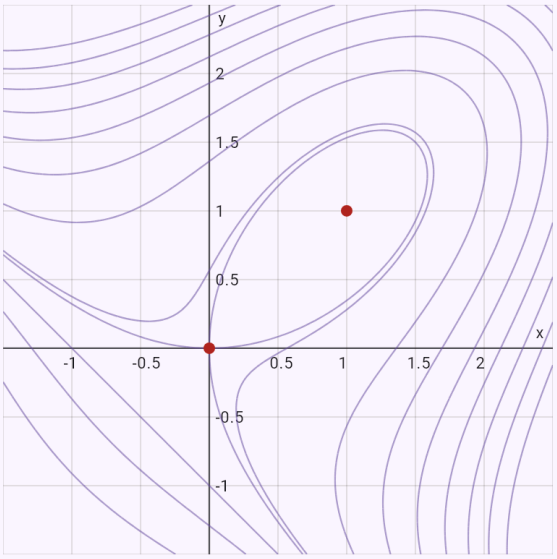
Ergebnis

$$\min f(1;\ 1) = -1$$

Lösungsweg

- Die partielle Ableitung nach x – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_x = 3\left(x^2 - y\right)$
- Die partielle Ableitung nach y – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_y = 3\left(y^2 - x\right)$
- Die stationären Punkte $[0;\ 0]$, $[1;\ 1]$ lösen das System, in dem beide partiellen Ableitungen null sind
  $3\left(x^2 - y\right) = 0$
  $3\left(y^2 - x\right) = 0$
- Die zweiten partiellen Ableitungen $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ und die Determinante der Hesse-Matrix
  $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$
- Im Punkt $[0;\ 0]$: $D = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – ein Sattelpunkt, kein Extremum ($f(0;\ 0) = 0$).
- Im Punkt $[1;\ 1]$: $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ und $f_{xx} = 6 > 0$ – ein lokales Minimum $f(1;\ 1) = -1$

Graph



Höhenlinien von f.

Ein Extremum unter Nebenbedingung mit der Lagrange-Methode.

Eingabe: `Extrema xy, x + y = 1`

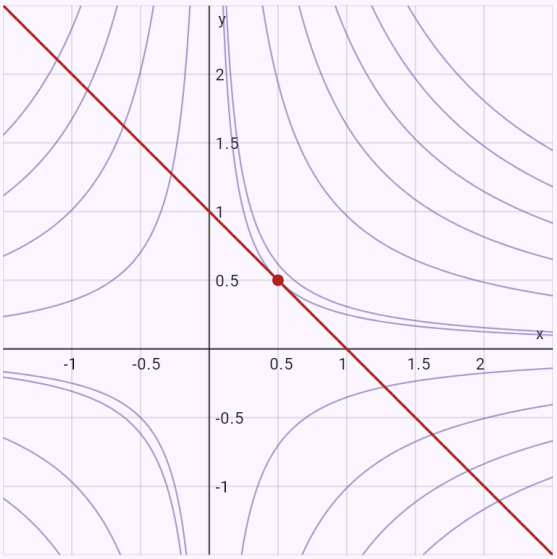
Ergebnis

$$\max f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Lösungsweg

- Die Lagrange-Funktion mit dem Multiplikator λ: $L = xy - \lambda(x + y - 1)$. Ihre partiellen Ableitungen sind null und die Nebenbedingung gilt
  $L_x = y - \lambda = 0$
  $L_y = x - \lambda = 0$
  $x + y - 1 = 0$
- Kandidaten für ein Extremum unter Nebenbedingung (Lösungen des Systems): $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
- Im Punkt $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ ($\lambda = \frac{1}{2}$) ist die geränderte Hesse-Determinante positiv – ein lokales Maximum unter Nebenbedingung $f\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
  $\bar{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

Graph



Höhenlinien von f.

Richtungsableitung und stärkster Anstieg.

Eingabe: `directional(x^2 y; [1; 2]; (3; 4))`

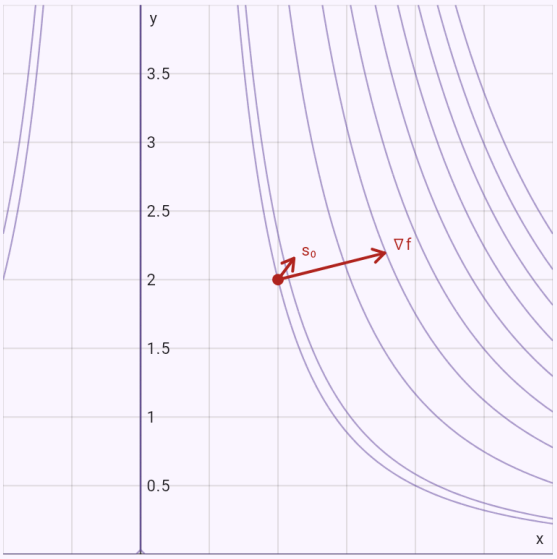
Ergebnis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \frac{16}{5}$$

Lösungsweg

- Die partielle Ableitung nach x – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_x = 2xy$
- Die partielle Ableitung nach y – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_y = x^2$
- Die Richtung als Einheitsvektor: $|\vec{s}| = 5, \quad \vec{s}_0 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$
- Der Gradient im Punkt $[1;\ 2]$: $\nabla f[1;\ 2] = (4;\ 1)$
- Die Richtungsableitung ist das Skalarprodukt aus Gradient und Einheitsvektor $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}[1;\ 2] = \nabla f \cdot \vec{s}_0 = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
- Der stärkste Anstieg liegt in Richtung des Gradienten, sein Betrag ist $|\nabla f[1;\ 2]| = \sqrt{17}$

Graph



Höhenlinien von f. Der Pfeil ∇f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs.

Tangentialebene eines Paraboloids.

Eingabe: `tangentplane(z = x^2 + y^2; [1; 2])`

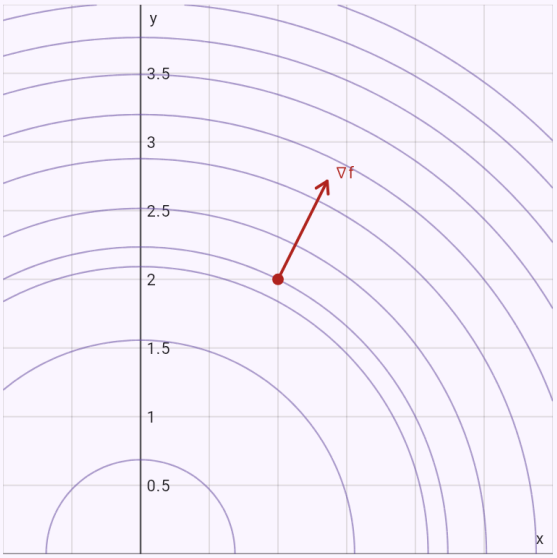
Ergebnis

$$z = 2x + 4y - 5$$

Lösungsweg

- Die partielle Ableitung nach x – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_x = 2x$
- Die partielle Ableitung nach y – die anderen Variablen sind Konstanten: $f_y = 2y$
- Die dritte Koordinate des Berührpunkts: $z_0 = f[1;\ 2] = 5$
- Einsetzen in die Tangentialebene z − z_0 = f_x·(x − x_0) + f_y·(y − y_0): $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$
- Der Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = (2;\ 4;\ -1)$

Graph



Höhenlinien von f. Der Pfeil ∇f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs.

Doppelintegral über ein Dreieck.

Eingabe: `∫_0^1 ∫_0^x x y dy dx`

Ergebnis

$$\frac{1}{8}$$

Integrationsreihenfolge:

✓ dy dx | dx dy

Koordinaten:

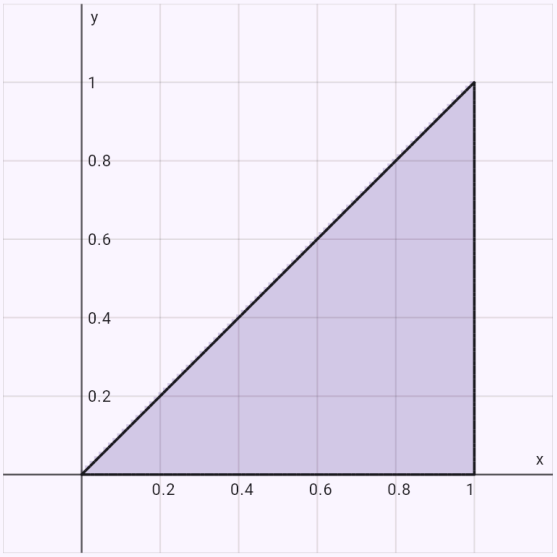
✓ Kartesisch | Polar

Lösungsweg

- Das Gebiet als Normalbereich: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral: $\int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx$
- Das innere Integral nach y (die andere Variable ist konstant): $\int_0^x xy\, dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$
- Das äußere Integral nach x: $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$

Graph

✓ 2D | 3D



Das Integrationsgebiet.

Das innere Integral ist nicht elementar – die App vertauscht die Reihenfolge selbst.

Eingabe: `∫_0^1 ∫_x^1 e^(y^2) dy dx`

Ergebnis

$$\frac{e-1}{2}$$

Integrationsreihenfolge:

✓ dx dy | dy dx

Koordinaten:

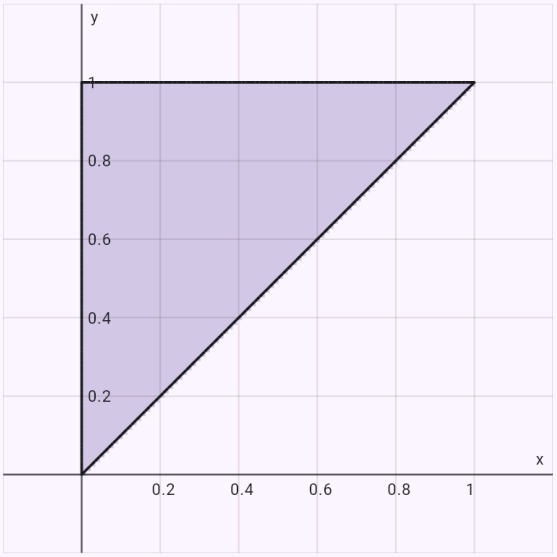
✓ Kartesisch | Polar

Lösungsweg

- Das innere Integral nach y hat keine elementare Stammfunktion, daher vertauschen wir die Integrationsreihenfolge.
- Das Gebiet als Normalbereich: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral:
  $$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\, dx \right) dy$$
- Das innere Integral nach x (die andere Variable ist konstant):
  $$\int_0^y e^{y^2}\, dx = \left[x e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} = y e^{y^2}$$
- Das äußere Integral nach y:
  $$\int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Graph

✓ 2D | 3D



Das Integrationsgebiet.

Viertelkreis in Polarkoordinaten.

Eingabe: `iint(x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1; x >= 0; y >= 0; polar)`

Ergebnis

$$\frac{\pi}{8}$$

Koordinaten:

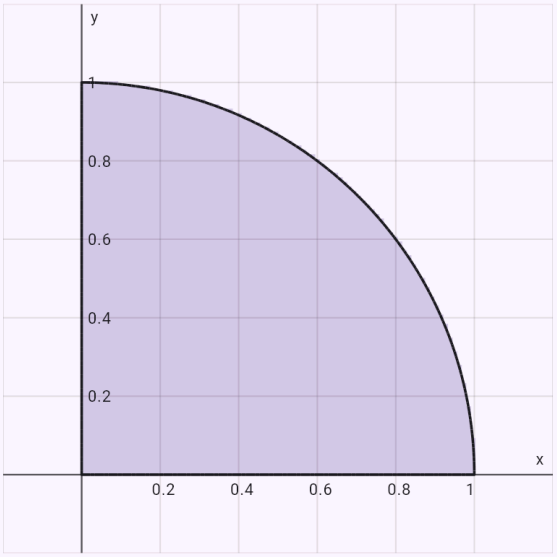
Kartesisch | ✓ Polar

Lösungsweg

- Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, dabei ist r die Funktionaldeterminante. Der Integrand: $f \cdot r = r^3$
- Das Gebiet in Polarkoordinaten: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$
- Das innere Integral nach r (die andere Variable ist konstant): $\int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$
- Das äußere Integral nach φ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

Graph

✓ 2D | 3D



Das Integrationsgebiet.

Die Divergenz eines räumlichen Feldes als Summe dreier partieller Ableitungen.

Eingabe: `div(x y; y z; z x)`

Ergebnis

$$\nabla \cdot \vec{F} = x + y + z$$

Für dieses Feld berechnen:

✓ Divergenz | Rotation | Potential

Lösungsweg

- Das Vektorfeld und seine Komponenten:
  $\vec{F} = (xy;\ yz;\ xz), \quad P = xy,\ Q = yz,\ R = xz$
- Die partielle Ableitung nach x – die anderen Variablen sind Konstanten: $\frac{\partial P}{\partial x} = y$
- Die partielle Ableitung nach y – die anderen Variablen sind Konstanten: $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$
- Die partielle Ableitung nach z – die anderen Variablen sind Konstanten: $\frac{\partial R}{\partial z} = x$
- Die Divergenz ist die Summe der partiellen Ableitungen der Komponenten, jede nach „ihrer“ Variablen
  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x = x + y + z$

Die Rotation eines ebenen Wirbels – die Pfeile kreisen um den Ursprung.

Eingabe: `rot(-y; x)`

Ergebnis

$$(\nabla \times \vec{F})_z = 2$$

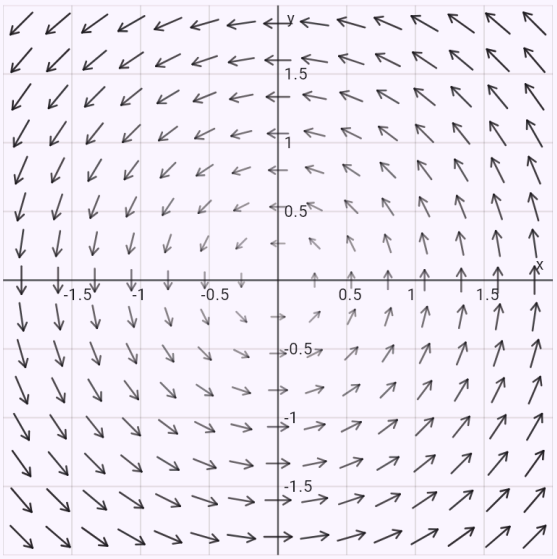
Für dieses Feld berechnen:

Divergenz | ✓ Rotation | Potential

Lösungsweg

- Das Vektorfeld und seine Komponenten:
  $\vec{F} = (-y;\ x), \quad P = -y,\ Q = x$
- Bei einem ebenen Feld ist die Rotation eine einzige Zahl – die z-Komponente ∂Q/∂x − ∂P/∂y
  $(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

Graph



Die Pfeile zeigen Richtung und Stärke des Feldes (länger und dunkler = stärker).

Eine harmonische Funktion – der Laplace-Operator ist null.

Eingabe: `Δ(x^2 - y^2)`

Ergebnis

$$\Delta f = 0$$

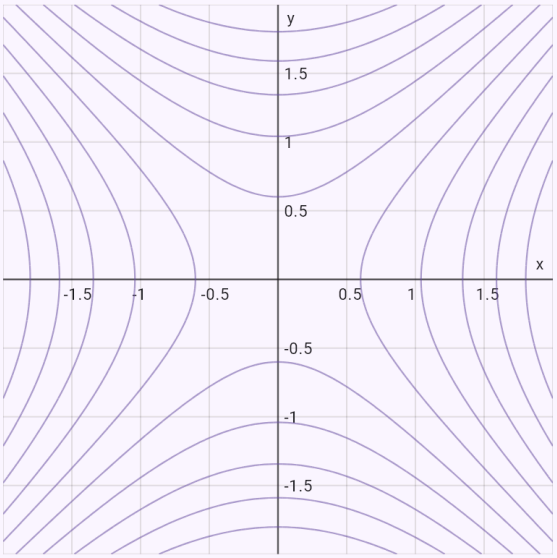
Für diese Funktion berechnen:

✓ Laplace-Operator Δf | Gradient ∇f

Lösungsweg

- Die erste und zweite partielle Ableitung nach x:
  $f_x = 2x, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$
- Die erste und zweite partielle Ableitung nach y:
  $f_y = -2y, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
- Der Laplace-Operator ist die Summe der zweiten partiellen Ableitungen: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Δf = 0 – die Funktion ist harmonisch.

Graph



Höhenlinien von f.

Das Potential nach Schulmethode: P nach x integriert, mit Q verglichen, Probe; Graph mit

Äquipotentiallinien.

Eingabe: `potential(2x y; x^2)`

Ergebnis

$$\varphi = x^2 y + C$$

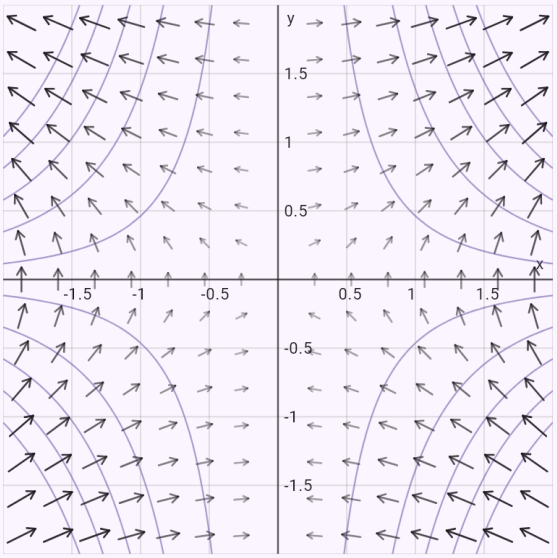
Für dieses Feld berechnen:

Divergenz | Rotation | ✓ Potential

Lösungsweg

- Das Vektorfeld und seine Komponenten: $\vec{F} = (2xy;\ x^2), \quad P = 2xy,\ Q = x^2$
- Die Rotation ist null (in der Ebene ∂Q/∂x = ∂P/∂y), das Feld ist konservativ, ein Potential zu suchen ist sinnvoll: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$
- Wir suchen φ mit ∇φ = F. Wir integrieren P nach x; die Integrationskonstante darf von den übrigen Variablen abhängen: $\varphi = \int P\,dx = \int 2xy\,dx = x^2 y + C_1(y)$
- Wir leiten φ nach y ab und vergleichen mit der Komponente Q – es bleibt die Ableitung der „Konstante“ $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C_1'(y) = x^2 \ \Rightarrow\ C_1'(y) = 0$
- Die „Konstante“ integrieren wir nach y; die neue darf nur von den restlichen Variablen abhängen, am Ende ist es eine Zahl C: $C_1(y) = \int 0\,dy = C$
- Probe – der Gradient des Potentials ist das gegebene Feld: $\nabla\varphi = (2xy;\ x^2) = \vec{F}$

Graph



Die Pfeile zeigen Richtung und Stärke des Feldes (länger und dunkler = stärker). Höhenlinien des Potentials φ (Äquipotentiallinien) – das Feld steht überall senkrecht auf ihnen.

Die Arbeit eines konservativen Feldes – über die Parametrisierung, Probe mit dem Potential φ = x²y.

Eingabe: `lineint((2x y; x^2); r(t) = (t; t^3); t = 0..1)`

Ergebnis

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

Berechnen:

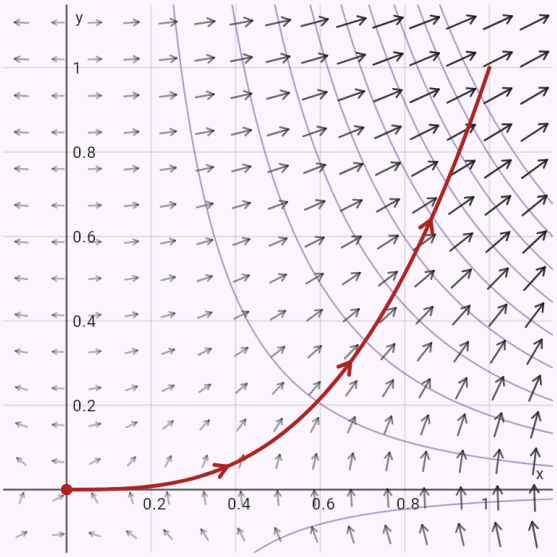
✓ über die Parametrisierung | über das Potential

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Kurvenintegral 2. Art eines Vektorfeldes längs der orientierten Kurve C (zum Beispiel die Arbeit einer Kraft längs eines Weges): $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (2xy;\ x^2)$
- Parametrisierung der Kurve: $\vec{r}(t) = (t;\ t^3), \quad 0 \le t \le 1$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}'(t) = (1;\ 3t^2)$
- Wir setzen die Parametrisierung in das Feld ein und bilden das Skalarprodukt mit dem Tangentenvektor
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = 2t^4 + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters: $\int_0^1 5t^4\,dt = 1$
- Probe: das Feld ist konservativ, hat ein Potential φ und das Integral ist wegunabhängig – die Differenz φ(B) − φ(A) genügt
  $\varphi = x^2y, \quad A = [0;\ 0],\ B = [1;\ 1], \quad \varphi(B) - \varphi(A) =$

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt). Die Pfeile zeigen Richtung und Stärke des Feldes (länger und dunkler = stärker). Höhenlinien des Potentials φ (Äquipotentiallinien) – das Feld steht überall senkrecht auf ihnen.

Eine Zirkulation längs des Einheitskreises vom Foto, Probe mit dem Satz von Green in

Polarkoordinaten.

Eingabe: `\oint_C x^2 y \, dx + x \, dy, C: x^2 + y^2 = 1`

Ergebnis

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$$

Berechnen:

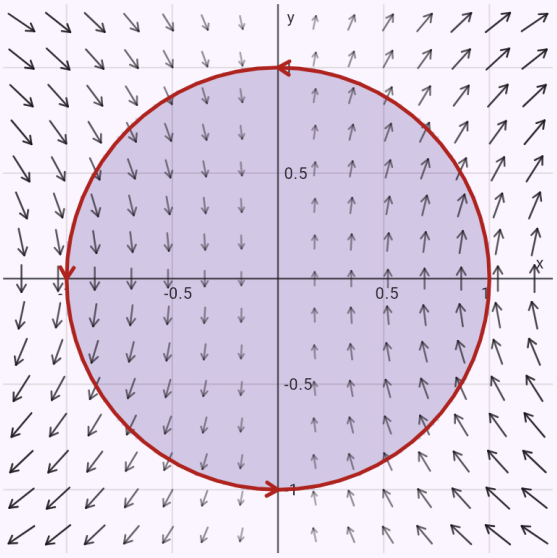
- ✓ über die Parametrisierung
- mit dem Satz von Green

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Die Kurve ist geschlossen – das Integral 2. Art längs ihr ist die Zirkulation des Feldes:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (x^2 y;\ x)$
- Der Kreis mit Mittelpunkt S und Radius r, einmal durchlaufen (Parametrisierung durch den Winkel t)
  $S = [0;\ 0],\ r = 1: \quad \vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Wir setzen die Parametrisierung in das Feld ein und bilden das Skalarprodukt mit dem Tangentenvektor
  $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P\,x' + Q\,y' = \cos^2 t \sin t \cdot (-\sin t) + c$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters: $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3\pi}{4}$
- Probe mit dem Satz von Green: die Kurve ist positiv orientiert (gegen den Uhrzeigersinn), das Integral längs ihr ist gleich dem Doppelintegral über das Gebiet D innen
  $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- Das Gebiet D innerhalb der Kurve – darüber das Doppelintegral: $D:\ x^2 + y^2 \le 1$
- Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r$, dabei ist r die Funktionaldeterminante. Der Integrand: $f \cdot r = -r^3 \cos^2\varphi + r$
- Das Gebiet in Polarkoordinaten: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr \right) d\varphi$
- Das innere Integral nach r (die andere Variable ist konstant)
  $\int_0^1 \left(-r^3 \cos^2\varphi + r\right) dr = \left[-\frac{r^4 \cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2 -}{}$
- Das äußere Integral nach φ
  $\int_0^{2\pi} \left(\frac{2 - \cos^2\varphi}{4}\right) d\varphi = \left[\frac{3\varphi}{8} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$
- Beide Seiten des Satzes von Green stimmen überein:
  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{4}$

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt). Die Pfeile zeigen Richtung und Stärke des Feldes (länger und dunkler = stärker). Eingefärbt ist das Gebiet D innerhalb der Kurve aus dem Satz von Green.

Die Länge einer Parabel – das Integral 1. Art von 1.

Eingabe: `lineint(1; graph(y = x^2; x = 0..1))`

Ergebnis

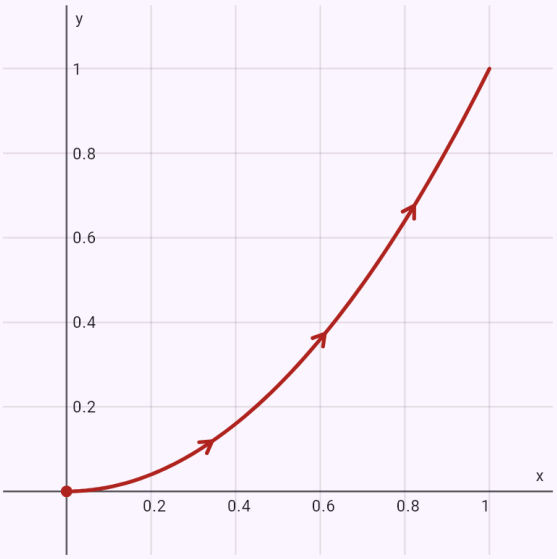
$$\int_C ds = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4}$$

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Kurvenintegral 1. Art der Funktion f längs der Kurve C – wir summieren f mal die Länge ds kleiner Kurvenstücke:
  $\int_C ds$
- Ein Funktionsgraph – x selbst ist der Parameter (Parametrisierung r(x) = (x; f(x))):
  $y = x^2: \quad \vec{r}(x) = \left(x;\ x^2\right), \quad 0 \le x \le 1$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}'(x) = (1;\ 2x)$
- Seine Länge; das Bogenelement ist ds = |r'(t)| dt:
  $|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1^2 + 2x^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Wir setzen die Parametrisierung in f ein und multiplizieren mit der Länge des Tangentenvektors:
  $f(\vec{r}(x)) \cdot |\vec{r}'(x)| = \sqrt{4x^2 + 1}$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters
  $\int_0^1 \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right) dx = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4}$
- Das Integral von 1 ds ist die Länge der Kurve (mit einer Dichte f statt 1 wäre es die Masse eines Drahtes).

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt).

Eine Schraubenlinie im Raum – ein drehbarer 3D-Graph mit den Pfeilen des Feldes.

Eingabe: `lineint((-y; x; z); r(t) = (cos t; sin t; t); t = 0..2π)`

Ergebnis

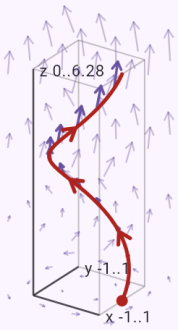
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi^2$$

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Kurvenintegral 2. Art eines Vektorfeldes längs der orientierten Kurve C (zum Beispiel die Arbeit einer Kraft längs eines Weges): $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ z)$
- Parametrisierung der Kurve: $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t;\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t;\ \cos t;\ 1)$
- Wir setzen die Parametrisierung in das Feld ein und bilden das Skalarprodukt mit dem Tangentenvektor $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' + R\,z' = (-\sin t) \cdot (-\sin$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters: $\int_0^{2\pi} (t+1)\,dt = 2\pi(\pi+1)$

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt). Die Pfeile zeigen das Feld, auf der Kurve kräftiger. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Schwerpunkt eines Halbkreises – die Masse und zwei statische Momente.

Eingabe: `lineint(1; r(t) = (cos t; sin t); t = 0..π; quantity=centroid)`

Ergebnis

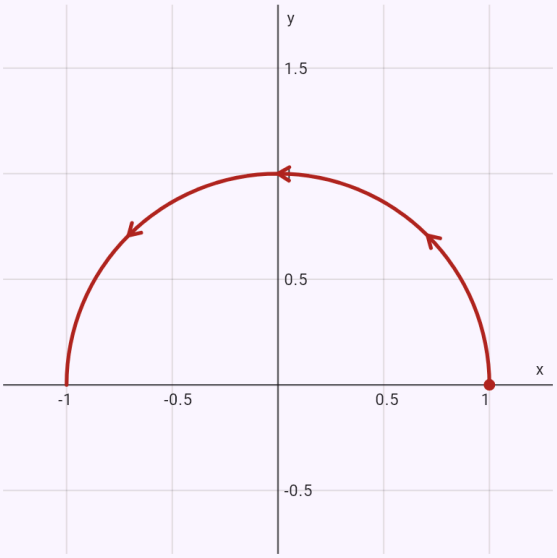
$$T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$$

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Kurvenintegral 1. Art der Funktion f längs der Kurve C – wir summieren f mal die Länge ds kleiner Kurvenstücke: $\int_C ds$
- Der Schwerpunkt des Drahtes: die statischen Momente (Integral einer Koordinate mal Dichte) durch die Masse, für y (und z) ebenso $T = \left[\frac{S_x}{m};\ \frac{S_y}{m}\right], \quad m = \int_C ds, \quad S_x = \int_C x ds$
- Parametrisierung der Kurve: $\vec{r}(t) = (\cos t;\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}'(t) = (-\sin t;\ \cos t)$
- Seine Länge; das Bogenelement ist ds = |r'(t)| dt: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
- Wir setzen die Parametrisierung in f ein und multiplizieren mit der Länge des Tangentenvektors: $f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| = 1$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters: $\int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$
- Das statische Moment für die Koordinate x – derselbe Weg mit dem Integranden $x \cdot \rho$: $S_x = \int_C x\, ds = 0$
- Das statische Moment für die Koordinate y – derselbe Weg mit dem Integranden $y \cdot \rho$: $S_y = \int_C y\, ds = 2$
- Die Koordinaten des Schwerpunkts sind die Momente durch die Masse: $T = \left[0;\ \frac{2}{\pi}\right]$

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt).

Der Inhalt einer Ellipse mit dem Planimeter: ½∮ x dy − y dx = πab.

Eingabe: `lineint(area; r(t) = (3 cos t; 2 sin t); t = 0..2π)`

Ergebnis

$$A = 6\pi$$

Berechnen:

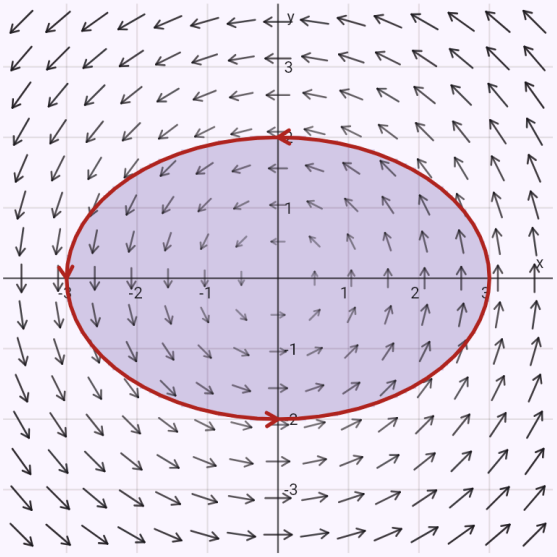
- ✓ über die Parametrisierung
- mit dem Satz von Green

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Die Kurve ist geschlossen – das Integral 2. Art längs ihr ist die Zirkulation des Feldes:
  $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{y}{2};\ \frac{x}{2}\right)$$
- Der Flächeninhalt innerhalb einer geschlossenen Kurve als Kurvenintegral längs des Randes (Planimeter) – nach dem Satz von Green mit Q_x − P_y = 1:
  $$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$
- Parametrisierung der Kurve:
  $\vec{r}(t) = (3\cos t;\ 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
- Der Tangentenvektor – die Ableitung der Parametrisierung: $\vec{r}\,'(t) = (-3\sin t;\ 2\cos t)$
- Wir setzen die Parametrisierung in das Feld ein und bilden das Skalarprodukt mit dem Tangentenvektor
  $$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = P\,x' + Q\,y' = (-\sin t)\cdot(-3\sin t) + \dots$$
- Es bleibt ein gewöhnliches bestimmtes Integral über das Intervall des Parameters: $\int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi$
- Probe mit dem Satz von Green: die Kurve ist positiv orientiert (gegen den Uhrzeigersinn), das Integral längs ihr ist gleich dem Doppelintegral über das Gebiet D innen
  $$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$
- Das Gebiet D innerhalb der Kurve – darüber das Doppelintegral: $D:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$
- Das Gebiet als Normalbereich:
  $$-3 \le x \le 3, \ -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral
  $$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy\right)dx$$
- Das innere Integral nach y (die andere Variable ist konstant)
  $$\int_{-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} 1\,dy = [y]_{y=-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}}^{y=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$$
- Das äußere Integral nach x
  $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} + 6\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$
- Beide Seiten des Satzes von Green stimmen überein:
  $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$$

Graph



Die Kurve C mit Pfeilen in Richtung ihrer Orientierung (Punkt = Anfangspunkt). Die Pfeile zeigen Richtung und Stärke des Feldes (länger und dunkler = stärker). Eingefärbt ist das Gebiet D innerhalb der Kurve aus dem Satz von Green.

Die obere Halbkugel in Kugelkoordinaten – die Jacobi-Determinante ρ² sin θ, die Grenzen von ρ, θ, φ.

Eingabe: `tint(z; x^2 + y^2 + z^2 <= 4; z >= 0; sph)`

Ergebnis

$$4\pi \approx 12{,}566$$

In Koordinaten rechnen:

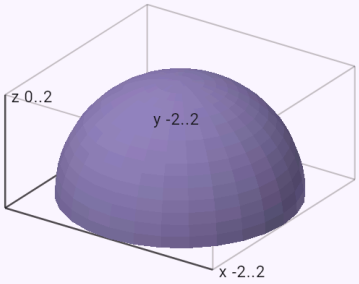
kartesisch | Zylinder | ✓ Kugel

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Dreifachintegral der Funktion über den Körper V:
$$\iiint_V z \, dV$$
- Kugelkoordinaten – J = ρ² sin θ ist die Jacobi-Determinante der Transformation (dV = ρ² sin θ dρ dθ dφ); Substitution und Integrand
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \; y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \; z = \rho \cos\theta$$
$$f \cdot \rho^2 \sin\theta = \rho^3 \cos\theta \cdot \sin\theta$$
- Der Körper in Kugelkoordinaten:
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \; 0 \le \rho \le 2$$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^3 \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$
- Das innerste Integral nach ρ (die anderen Variablen sind Konstanten)
$$\int_0^2 \rho^3 \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\rho = \left[\frac{\rho^4 \cos\theta \cdot \sin\theta}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4 \cos\theta \cdot s$$
- Das mittlere Integral nach θ
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta = \left[2 \sin^2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2$$
- Das äußere Integral nach φ: $\int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi = [2\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$

Graph



Der Körper V, über den integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Ein Tetraeder mit iterierten Grenzen – drei Integrale nacheinander.

Eingabe: `\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx`

Ergebnis

$$\frac{1}{24}$$

In Koordinaten rechnen:

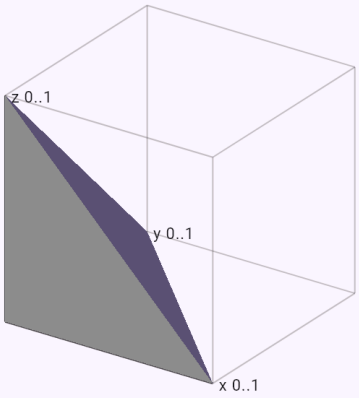
✓ kartesisch | Zylinder | Kugel

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Dreifachintegral der Funktion über den Körper V:
  $$\iiint_V x \, dV$$
- Wir beschreiben den Körper als Normalbereich – z liegt zwischen zwei Flächen über der Projektion des Körpers:
  $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le -x - y + 1$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral:
  $$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x \, dz \, dy \, dx$$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten):
  $$\int_0^{-x-y+1} x \, dz = [xz]_{z=0}^{z=-x-y+1} = x(-x - y + 1)$$
- Das mittlere Integral nach y
  $$\int_0^{1-x} (x(-x - y + 1)) \, dy = \left[-\frac{x(x + y - 1)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$
- Das äußere Integral nach x
  $$\int_0^1 \left(\frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Graph



Der Körper V, über den integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Das Volumen eines Kegels in Zylinderkoordinaten.

Eingabe: `tint(1; cone(1; 2); cyl; quantity=volume)`

Ergebnis

$$V = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$$

In Koordinaten rechnen:

kartesisch | ✓ Zylinder

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Volumen des Körpers ist das Dreifachintegral von eins: $V = \iiint_V dV$
- Zylinderkoordinaten – J = r ist die Jacobi-Determinante der Transformation (dV = r dr dφ dz); Substitution und Integrand

  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

  $f \cdot r = r$

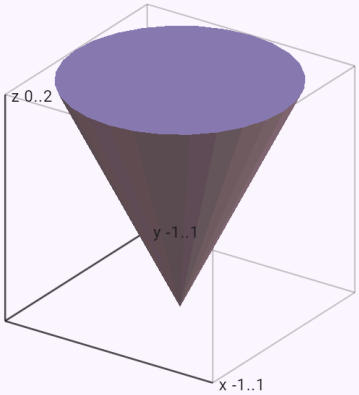
- Der Körper in Zylinderkoordinaten:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 2r \le z \le 2$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 r\,dz\,dr\,d\varphi$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten): $\int_{2r}^2 r\,dz = [zr]_{z=2r}^{z=2} = r(2-2r)$
- Das mittlere Integral nach r

  $\int_0^1 (r(2-2r))\,dr = \left[-\frac{2r^3}{3} + r^2\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$

- Das äußere Integral nach φ

  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Graph



Der Körper V, über den integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Schwerpunkt einer Halbkugel – die Masse und drei statische Momente.

Eingabe: `tint(1; x^2 + y^2 + z^2 <= 1; z >= 0; quantity=centroid)`

Ergebnis

$$T\left[0;\ 0;\ \frac{3}{8}\right]$$

Der Körper oder die Funktion enthält x² + y² + z² – Kugelkoordinaten sind oft einfacher:

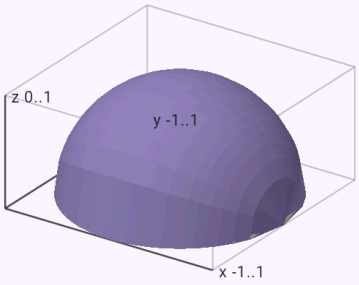
✓ kartesisch | Zylinder | Kugel

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Der Schwerpunkt des Körpers: jede Koordinate ist ein statisches Moment (das Integral der Koordinate mal der Dichte) geteilt durch die Masse m, für y und z ebenso:
  $x_T = \frac{1}{m}\iiint_V x\,dV,\ m = \iiint_V dV$
- Wir beschreiben den Körper als Normalbereich – z liegt zwischen zwei Flächen über der Projektion des Körpers
  $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{-}$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral
  $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz\,dy\,dx$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten)
  $\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} dz = [z]_{z=0}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+1}} = \sqrt{-x^2-y^2+1}$
- Das mittlere Integral nach y
  $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{-x^2-y^2+1}\right) dy = \left[\frac{(1-x^2)\arcsin\left(\frac{\sqrt{}}{2}\right.\right.$
- Das äußere Integral nach x
  $\int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi(1-x^2)}{2}\right)dx = \left[-\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}$
- Das statische Moment für die Koordinate x – dieselben Schritte mit dem Integranden $x \cdot \rho$
  $\iiint_V x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} x\,dz\,dy\,dx = 0$
- Das statische Moment für die Koordinate y – dieselben Schritte mit dem Integranden $y \cdot \rho$
  $\iiint_V y\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} y\,dz\,dy\,dx = 0$
- Das statische Moment für die Koordinate z – dieselben Schritte mit dem Integranden $z \cdot \rho$
  $\iiint_V z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{-x^2-y^2+1}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$
- Die Koordinaten des Schwerpunkts sind die Momente geteilt durch die Masse
  $x_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$
  $y_T = \frac{0}{\frac{2\pi}{3}} = 0$
  $z_T = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{8}$

Graph



Der Körper V, über den integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich seiner Achse.

Eingabe: `tint(1; cylinder(1; 2); cyl; quantity=inertia; axis=z)`

Ergebnis

$$I_z = \pi \approx 3{,}1416$$

In Koordinaten rechnen:

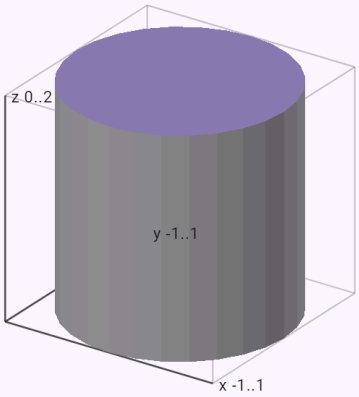
kartesisch | ✓ Zylinder

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse – die Dichte mal dem Quadrat des Abstands d von der Achse:
  $I_z = \iiint_V d^2\,dV = \iiint_V (x^2+y^2)\,dV$
- Zylinderkoordinaten – J = r ist die Jacobi-Determinante der Transformation (dV = r dr dφ dz); Substitution und Integrand
  $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$
  $f \cdot r = r^3$
- Der Körper in Zylinderkoordinaten:
  $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 2$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 r^3\,dz\,dr\,d\varphi$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten): $\int_0^2 r^3\,dz = \left[zr^3\right]_{z=0}^{z=2} = 2r^3$
- Das mittlere Integral nach r: $\int_0^1 2r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}$
- Das äußere Integral nach φ
  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$

Graph



Der Körper V, über den integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Fluss nach außen durch eine Sphäre – Parametrisierung durch die Winkel θ, φ und Probe mit dem

Satz von Gauß.

Eingabe: `surfint((x; y; z); sphere(2))`

Ergebnis

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 32\pi$$

Berechnen:

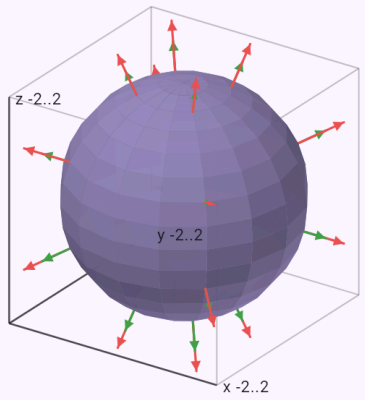
- ✓ durch Parametrisierung
- mit dem Satz von Gauß

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Der Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche S – ein Oberflächenintegral zweiter Art:
  $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Parametrisierung der Sphäre durch die Winkel θ (von der positiven z-Achse) und φ (um die z-Achse)
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \leq$
- Die partiellen Ableitungen nach den Parametern – die Tangentenvektoren der Fläche
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Der Normalenvektor (Kreuzprodukt der Tangentenvektoren), aus dem Körper heraus orientiert
  $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \text{si}\right.$
- Die Parametrisierung in das Feld einsetzen und mit dem Normalenvektor skalar multiplizieren (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = 8\sin\theta$
- Das Doppelintegral über das Rechteck der Parameter
  $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 8\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 16\pi\sin\theta\, d\theta = 32\pi$
- Probe mit dem Satz von Gauß: der Fluss nach außen durch die geschlossene Fläche ist das Dreifachintegral der Divergenz über den Körper innen
- Das Dreifachintegral der Funktion über den Körper V:
  $\iiint_V 3\, dV$
- Wir beschreiben den Körper als Normalbereich – z liegt zwischen zwei Flächen über der Projektion des Körpers
  $-2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ -\sqrt{-x^2-y}$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral
  $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\, dz\, dy\, dx$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten)
  $\int_{-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{\sqrt{-x^2-y^2+4}} 3\, dz = [3z]_{z=-\sqrt{-x^2-y^2+4}}^{z=\sqrt{-x^2-y^2+4}} = 6\sqrt{-x^2-y^2}$
- Das mittlere Integral nach y
  $\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(6\sqrt{-x^2-y^2+4}\right) dy = \left[\left(12-3x^2\right)\arcsin\right.$
- Das äußere Integral nach x
  $\int_{-2}^{2} \left(\pi\left(12-3x^2\right)\right) dx = \left[-\pi x^3 + 12\pi x\right]_{-2}^{2} = 32\pi$
- Der Satz von Gauß ergibt denselben Wert:
  $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 32\pi$

Graph



Die Fläche S mit ihren Normalen (grün) und den Pfeilen des Feldes (rot). Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Flächeninhalt eines Paraboloids – Flächenelement des Graphen, Doppelintegral in

Polarkoordinaten.

Eingabe: `surfint(1; graph(z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 <= 1))`

Ergebnis

$$\iint_S dS = \frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\pi}{6}$$

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

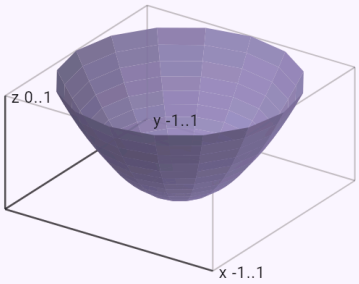
- Der Flächeninhalt von S ist das Oberflächenintegral der Eins: $\iint_S dS$
- Die Fläche ist der Graph von z = g(x, y) über dem Gebiet D der xy-Ebene:
  $z = g(x,y) = x^2 + y^2, \quad D: \; x^2 + y^2 \leq 1$
- Die partiellen Ableitungen von g: $g_x = 2x, \quad g_y = 2y$
- Das Flächenelement des Graphen:
  $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$
- Die Parametrisierung in f einsetzen und mit dem Flächenelement multiplizieren:
  $f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
- Das Oberflächenintegral über einen Graphen ist ein Doppelintegral über seine Projektion D:
  $\iint_S \cdots = \iint_D \left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right) dA$
- Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; J = r$, dabei ist r die Funktionaldeterminante. Der Integrand:
  $f \cdot r = r\sqrt{4r^2 + 1}$
- Das Gebiet in Polarkoordinaten: $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; 0 \leq r \leq 1$
- Nach dem Satz von Fubini als iteriertes Integral:
  $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1}\right) dr \right) d\varphi$
- Das innere Integral nach r (die andere Variable ist konstant)

$$\int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2+1}\right) dr = \left[\frac{\sqrt{\left(4r^2+1\right)^3}}{12}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{-1+5\sqrt{}}{12}$$

- Das äußere Integral nach φ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1+5\sqrt{5}}{12}\right) d\varphi = \left[\frac{\left(-1+5\sqrt{5}\right)\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{(-1+}{}$$

Graph



Die Fläche S, über die integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Fluss durch einen geschlossenen Zylinder mit dem Satz von Gauß, Probe Teil für Teil – Mantel und

zwei Kreisscheiben.

Eingabe: `surfint((x; y; z); cylinder(1; 2); method=gauss)`

Ergebnis

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$$

Berechnen:

durch Parametrisierung

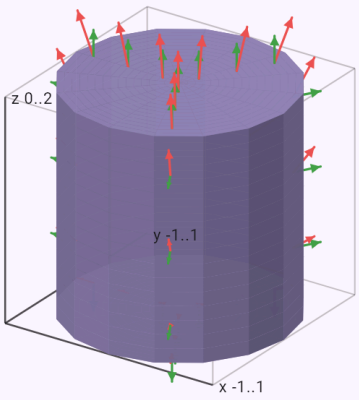
✓ mit dem Satz von Gauß

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Der Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche S – ein Oberflächenintegral zweiter Art:
  $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (x;\ y;\ z)$
- Nach dem Satz von Gauß ist der Fluss nach außen durch eine geschlossene Fläche gleich dem Dreifachintegral der Divergenz über den Körper V innen
- Das Dreifachintegral der Funktion über den Körper V:
  $\iiint_V 3\, dV$
- Wir beschreiben den Körper als Normalbereich – z liegt zwischen zwei Flächen über der Projektion des Körpers:
  $-1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 2$
- Nach dem Satz von Fubini schreiben wir es als dreifaches iteriertes Integral:
  $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} 3\, dz\, dy\, dx$
- Das innerste Integral nach z (die anderen Variablen sind Konstanten):
  $\int_0^2 3\, dz = [3z]_{z=0}^{z=2} = 6$
- Das mittlere Integral nach y
  $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dy = [6y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 12\sqrt{1-x^2}$
- Das äußere Integral nach x
  $\int_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[6x\sqrt{1-x^2} + 6\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$
- Die Probe mit der Parametrisierung der Fläche ergibt denselben Wert: $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 6\pi$

Graph



Die Fläche S mit ihren Normalen (grün) und den Pfeilen des Feldes (rot). Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Der Fluss einer Rotation durch eine Halbsphäre – Probe mit dem Satz von Stokes längs des Äquators.

Eingabe: `surfint(curl((-y; x; 0)); hemisphere(1))`

Ergebnis

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Berechnen:

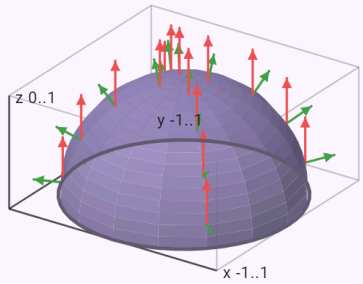
- ✓ durch Parametrisierung
- mit dem Satz von Stokes

Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Der Fluss der Rotation durch S – ein Oberflächenintegral zweiter Art, auch mit dem Satz von Stokes berechenbar
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS, \quad \vec{F} = (-y;\ x;\ 0)$$
- Die Rotation des Feldes
$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0;$$
- Parametrisierung der oberen Halbsphäre – θ nur bis π/2
$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$$
- Die partiellen Ableitungen nach den Parametern – die Tangentenvektoren der Fläche
$$\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\text{sir}$$
- Der Normalenvektor (Kreuzprodukt der Tangentenvektoren), aus dem Körper heraus orientiert
$$\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right)$$
- Die Parametrisierung in das Feld einsetzen und mit dem Normalenvektor skalar multiplizieren (F · n dS = F · N du dv): $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{N} = \sin(2\theta)$
- Das Doppelintegral über das Rechteck der Parameter
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(2\theta)\, d\theta = 2\pi$$
- Probe mit dem Satz von Stokes: der Fluss der Rotation ist gleich der Zirkulation des Feldes längs des Randes (Rechte-Hand-Regel)
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- Die Seiten des Parameterrechtecks, die auf einen Punkt abgebildet oder zweimal gegenläufig durchlaufen werden (eine Naht), heben sich auf – der echte Rand der Fläche bleibt.
- Ein Teil des Randes
$$\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi;\ \sin\varphi;\ 0), \quad \varphi:\ 0 \to 2\pi$$
- Das Kurvenintegral längs dieses Teils:
$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}' = 1, \quad \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$$
- Der Satz von Stokes ergibt denselben Wert:
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi$$

Graph



Die Fläche S mit ihren Normalen (grün) und den Pfeilen des Feldes (rot). Der Rand mit einem Pfeil seiner Richtung. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Ein Oberflächenintegral erster Art über eine durch ihre Gleichung gegebene Halbsphäre.

Eingabe: `\iint_S z \, dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0`

Ergebnis

$$\iint_S z \, dS = 8\pi$$

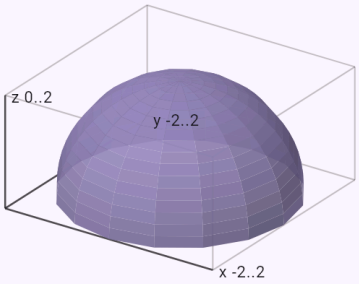
Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Oberflächenintegral erster Art von f über die Fläche S: $\iint_S z \, dS$
- Parametrisierung der oberen Halbsphäre – θ nur bis π/2
  $\vec{r}(\theta, \varphi) = (2\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\sin\varphi \cdot \sin\theta;\ 2\cos\theta), \quad 0 \le$
- Die partiellen Ableitungen nach den Parametern – die Tangentenvektoren der Fläche
  $\vec{r}_\theta = (2\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ 2\cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -2\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = ($
- Das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren ist ein Normalenvektor, seine Länge ergibt das Flächenelement dS = |r_u × r_v| du dv
  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(4\sin^2\theta\cos\varphi;\ 4\sin^2\theta\sin\varphi;\ 4\cos\theta \cdot \sin\theta\right),$
- Die Parametrisierung in f einsetzen und mit dem Flächenelement multiplizieren:
  $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = 8\cos\theta \cdot \sin\theta$
- Das Doppelintegral über das Rechteck der Parameter

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 8\cos\theta \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin(2\theta) \, d\theta = 8\pi$$

Graph



Die Fläche S, über die integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Das Trägheitsmoment einer Kugelschale bezüglich der z-Achse.

Eingabe: `surfint(1; sphere(1); quantity=inertia; axis=z)`

Ergebnis

$$I_z = \frac{8\pi}{3}$$

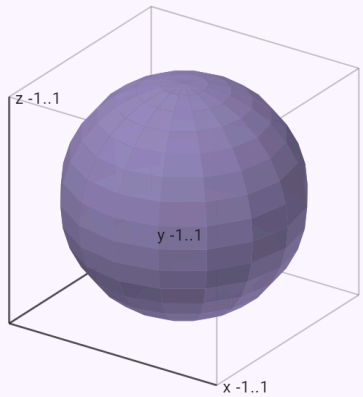
Im Formular bearbeiten

Lösungsweg

- Das Oberflächenintegral erster Art von f über die Fläche S: $\oiint_S (x^2 + y^2)\, dS$
- Das Trägheitsmoment der Schale bezüglich der Achse z – Dichte mal Quadrat des Abstands d von der Achse: $I_z = \oiint_S d^2\, dS, \quad d^2 = x^2 + y^2$
- Parametrisierung der Sphäre durch die Winkel θ (von der positiven z-Achse) und φ (um die z-Achse) $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cdot \sin\theta;\ \sin\varphi \cdot \sin\theta;\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le$
- Die partiellen Ableitungen nach den Parametern – die Tangentenvektoren der Fläche $\vec{r}_\theta = (\cos\varphi \cdot \cos\theta;\ \cos\theta \cdot \sin\varphi;\ -\sin\theta), \quad \vec{r}_\varphi = (-\sin$
- Das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren ist ein Normalenvektor, seine Länge ergibt das Flächenelement dS = |r_u × r_v| du dv $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi;\ \sin^2\theta\sin\varphi;\ \cos\theta \cdot \sin\theta\right), \quad |\vec{r}_\theta$
- Die Parametrisierung in f einsetzen und mit dem Flächenelement multiplizieren: $f(\vec{r})\,|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| = \sin^3\theta$
- Das Doppelintegral über das Rechteck der Parameter

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Graph



Die Fläche S, über die integriert wird. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Übersicht der Integralsätze

Alle Integralsätze sagen dasselbe: das Integral einer Ableitung über ein Gebiet ist gleich einem Integral über seinen Rand. Der Rand einer Strecke sind zwei Punkte, der einer Fläche eine Kurve, der eines Körpers eine geschlossene Fläche; der allgemeine Satz von Stokes ∫_Ω dω = ∫_∂Ω ω fasst alles zusammen. Die App nutzt die Sätze als zweiten Rechenweg und als Probe (Chips unter dem Ergebnis); im Glossar steht dieselbe Übersicht unter „Integralsätze“.

Eingabe

`∫ f'(x) dx (a..b) = f(b) − f(a)`	Hauptsatz (Newton–Leibniz) – innen: die Ableitung auf [a, b], am Rand: die Werte in den Endpunkten.
`∫_C ∇ϕ · dr = ϕ(B) − ϕ(A)`	Gradientensatz (Potential, Wegunabhängigkeit) – innen: der Gradient längs einer Kurve, am Rand: das

	Potential in den Endpunkten.
`∬_D (Q_x − P_y) dA = ∮_∂D P dx + Q dy`	Satz von Green – innen: ∂Q/∂x − ∂P/∂y über ein ebenes Gebiet, am Rand: die Zirkulation längs der geschlossenen Kurve.
`∬_S (∇ × F) · n dS = ∮_∂S F · dr`	Satz von Stokes – innen: der Fluss der Rotation durch eine Fläche, am Rand: die Zirkulation längs ihrer Randkurve.
`∭_V div F dV = ∯_∂V F · n dS`	Satz von Gauß – innen: die Divergenz über einen Körper, am Rand: der Fluss nach außen durch die geschlossene Fläche.

Physikalische Anwendungen der Integralsätze

Im Bereich „Anwendungen“ (Fachgebiete Physik und Mehrdimensionale Analysis, Elektrizität auch in Elektrotechnik, Strömung und Wärme in Technik) gibt es Modelle mit Einheiten: das Gaußsche Gesetz (Kugel, Gerade, Ebene), das Ampèresche und das Biot-Savart-Gesetz (Draht, Solenoid, Toroid, Leiterschleife), die elektromagnetische Induktion (magnetischer Fluss, veränderliches Feld, Generator), den Kondensator (Platten-, Kugel-, Zylinderkondensator), die Energie eines Felds, die Arbeit im Kraftfeld (Gravitation, Feder, Coulomb-Kraft), die Strömung einer Flüssigkeit (Volumenstrom, parabolisches Profil, Kontinuitätsgleichung, Zirkulation und Rotation), die Wärmeleitung (ebene und zylindrische Wand) und das Gravitationsfeld nach dem Gaußschen Gesetz.

Die Schritte beginnen mit dem integralen Gesetz, begründen dann die Symmetrie (auf der gewählten Fläche oder Kurve ist das Feld konstant und zeigt längs der Normale oder Tangente), zeigen das ausgewertete Integral, die eingeschlossene Ladung, den Strom oder die Masse und die Formel zum Einsetzen. Zu den elektromagnetischen Gesetzen kommt ihre differentielle Form – der Glossarbegriff „Maxwell-Gleichungen“ stellt beide Formen nebeneinander. Der Graph zeigt das Feld über dem Abstand (E(r), B(r), g(r)), ein Geschwindigkeitsprofil, die Temperatur in einer Wand oder die Spannung eines Generators.

Beispiele

Das Feld in einer gleichmäßig geladenen Kugel – die eingeschlossene Ladung Q r³/R³, das Feld wächst

linear.

Eingabe: `model(gauss; find=E[V_m]; Q=1[nC]; R=10[cm]; r=5[cm]; mode=sphere; charge=ball)`

Ergebnis

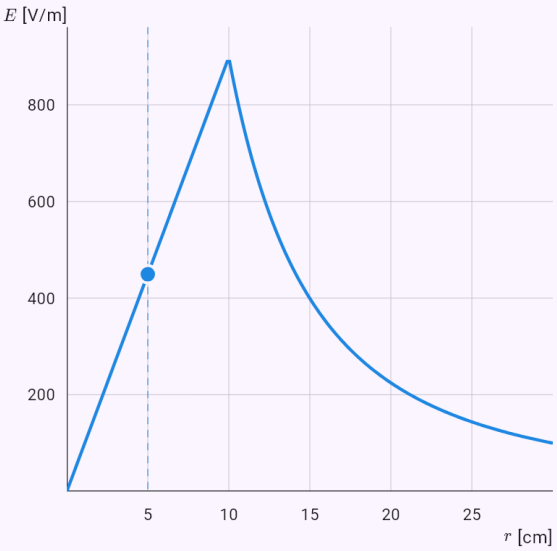
$$E \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$$

Lösungsweg

- Gesucht E; gegeben:
  $Q = 1\,\mathrm{nC}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen
  $Q = 1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}, \quad R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Eine Ladung Q symmetrisch um den Mittelpunkt verteilt – auf der Kugeloberfläche (leitende Kugel, Schale) oder gleichmäßig im ganzen Volumen. Die Gaußsche Fläche ist eine konzentrische Sphäre mit Radius r; außen wirkt die Ladung wie eine Punktladung. Gleichung des Modells: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}$
- Symmetrie: das Feld ist radial und auf jeder konzentrischen Sphäre gleich stark. Als Gaußsche Fläche nehmen wir eine Sphäre mit Radius r – auf ihr ist das Feld parallel zur Normale und konstant.
- Das Integral ausgewertet:
  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E \cdot 4\pi r^2$
- Die eingeschlossene Ladung
  $Q_{\mathrm{in}} = Q\frac{r^3}{R^3} = 10^{-9} \cdot \frac{(0{,}05)^3}{(0{,}1)^3} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$
- Gesuchte Größe ausdrücken
  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- Einsetzen
  $E = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05)^2} \approx 449{,}4\,\mathrm{V/m}$

- Dasselbe Gesetz in differentieller Form (Maxwell-Gleichungen): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Magnetfeld eines geraden Drahts mit dem Ampèreschen Gesetz längs eines Kreises um die Achse.

Eingabe: `model(ampere; find=B[uT]; I=10[A]; R=1[mm]; r=5[cm]; mode=wire)`

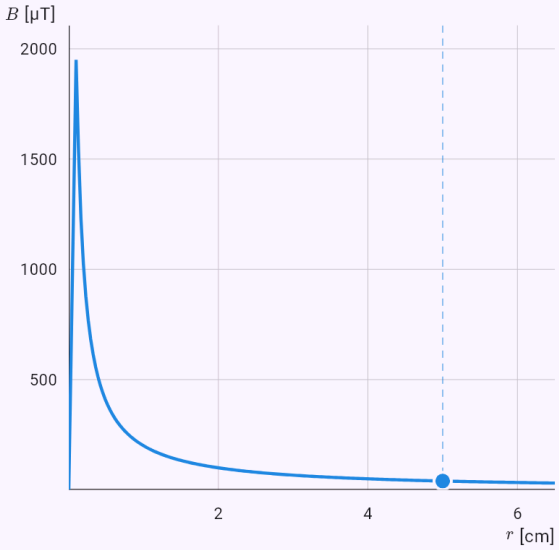
Ergebnis

$$B \approx 40\,\mu\mathrm{T}$$

Lösungsweg

- Gesucht B; gegeben:
  $I = 10\,\mathrm{A}, \quad R = 1\,\mathrm{mm}, \quad r = 5\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen:
  $R = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Ein langer gerader Draht mit Radius R und einem gleichmäßig über den Querschnitt verteilten Strom I. Die Kurve ist ein Kreis um die Drahtachse; im Draht umschließt sie nur einen Teil des Stroms. Gleichung des Modells: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathrm{in}}$
- Symmetrie: die Feldlinien sind Kreise um die Drahtachse; B ist tangential zu ihnen und auf einem Kreis mit Radius r konstant.
- Das Integral ausgewertet:
  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B \cdot 2\pi r$
- Der umschlossene Strom: $I_{\mathrm{in}} = I$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\mathrm{in}} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_{\mathrm{in}}}{2\pi r}$
- Einsetzen
  $B = \dfrac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Dasselbe Gesetz in differentieller Form (Maxwell-Gleichungen): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
- Einheiten umrechnen: $B \approx 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} = 40\,\mu\mathrm{T}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Feld auf der Achse einer Leiterschleife mit dem Biot-Savart-Gesetz.

Eingabe: `model(ampere; find=B[uT]; I=5[A]; Rl=10[cm]; z=10[cm]; mode=loop)`

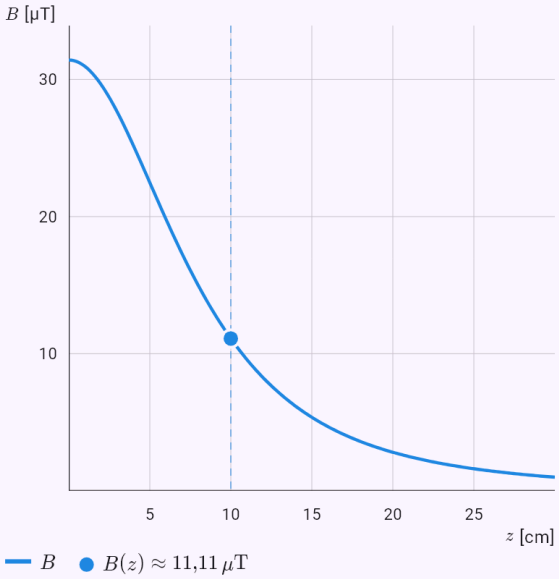
Ergebnis

$$B \approx 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$$

Lösungsweg

- Gesucht B; gegeben:
  $I = 5\,\mathrm{A}, \quad R = 10\,\mathrm{cm}, \quad z = 10\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen:
  $R = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad z = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
- Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius R und Strom I. Das Feld auf ihrer Achse im Abstand z vom Mittelpunkt liefert das Biot-Savart-Gesetz – die senkrechten Anteile heben sich auf, die axialen addieren sich. Gleichung des Modells: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{e}}{\rho^2}$
- Jedes Stück dl der Schleife ist von einem Punkt der Achse gleich weit entfernt, ρ = √(R² + z²), und steht senkrecht auf der Verbindungslinie. Die zur Achse senkrechten Anteile heben sich ringsum auf; nur die axialen, dB · R/ρ, addieren sich.
- Das Integral ausgewertet
  $$B = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot$$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$
- Einsetzen
  $$B = \frac{1{,}257\cdot10^{-6}\cdot5\cdot(0{,}1)^2}{2\left((0{,}1)^2+(0{,}1)^2\right)^{3/2}} \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$$
- Im Mittelpunkt der Schleife (z = 0):
  $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \approx 3{,}142\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Einheiten umrechnen: $B \approx 1{,}111\cdot10^{-5}\,\mathrm{T} = 11{,}11\,\mu\mathrm{T}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Spannungsamplitude eines Generators ε = NBAω und ihr sinusförmiger Verlauf im Graphen.

Eingabe: `model(induction; find=emf[V]; N=200[one]; B=0.1[T]; A=500[cm2];`

`omega=314.16[rad_s]; mode=rotating)`

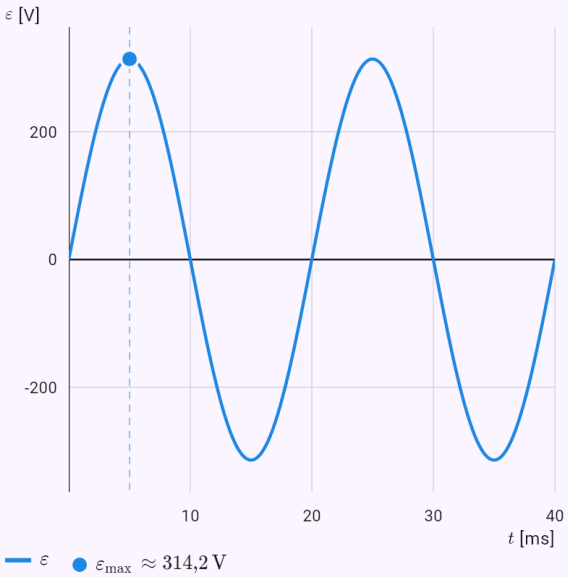
Ergebnis

$\varepsilon_{\max} \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$

Lösungsweg

- Gesucht $\varepsilon_{\max}$; gegeben $N = 200, \quad B = 0{,}1\,\mathrm{T}, \quad A = 500\,\mathrm{cm}^2, \quad \omega = 314{,}2\,\mathrm{ra}$
- Einheiten umrechnen: $A = 500\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$
- Eine Schleife mit N Windungen dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω im homogenen Feld B – das Prinzip des Wechselstromgenerators. Die Spannung ist sinusförmig mit der Amplitude NBAω. Gleichung des Modells: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- Der magnetische Fluss durch eine Windung: $\Phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA\cos\omega t$
- Das Integral ausgewertet: $\varepsilon(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$
- Gesuchte Größe ausdrücken: $\varepsilon_{\max} = NBA\omega$
- Einsetzen: $\varepsilon_{\max} = 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 314{,}2 \approx 314{,}2\,\mathrm{V}$
- Die Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 50\,\mathrm{Hz}$
- Dasselbe Gesetz in differentieller Form (Maxwell-Gleichungen): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Die Kapazität eines Meters Koaxialkabel – das Feld nach dem Gaußschen Gesetz, die Spannung als Integral des Felds.

Eingabe: `model(capacitor; find=C[pF]; epsr=2.3[one]; r1=1[mm]; r2=3.5[mm]; L=1[m];`

`mode=cylindrical)`

Ergebnis

$$C \approx 102{,}1\,\mathrm{pF}$$

Lösungsweg

- Gesucht C; gegeben
  $\varepsilon_r = 2{,}3, \quad R_1 = 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}, \quad L = 1\,\mathrm{m}$
- Einheiten umrechnen
  $R_1 = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}, \quad R_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm} = 0{,}0035\,\mathrm{m}$
- Zwei koaxiale Zylinderelektroden mit Radien $R_1 < R_2$ und Länge L – zum Beispiel ein Koaxialkabel. Gleichung des Modells
  $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \quad C = \frac{Q}{U}$$
- Die Gaußsche Fläche ist ein koaxialer Zylinder mit Radius r und Länge L zwischen den Elektroden; er schließt die Ladung Q der inneren Elektrode ein, durch seine Grundflächen geht kein Feld.
- Das Feld zwischen den Elektroden nach dem Gaußschen Gesetz
  $$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}$$
- Die Spannung als Kurvenintegral des Felds
  $$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$
- Die Kapazität
  $$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}3\cdot 1}{\ln\frac{0{,}0035}{0{,}001}} \approx 1{,}0$$
- Einheiten umrechnen: $C \approx 1{,}021\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 102{,}1\,\mathrm{pF}$

Die Energie eines Magnetfelds von 1 T in einem Liter Volumen.

Eingabe: `model(fieldenergy; find=W[J]; B=1[T]; V=1[l]; mode=magnetic)`

Ergebnis

$$W \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$$

Lösungsweg

- Gesucht W; gegeben: $B = 1\,\mathrm{T}, \quad V = 1\,\mathrm{l}$
- Einheiten umrechnen: $V = 1\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
- Die Energiedichte eines Magnetfelds im Vakuum, w = B²/(2μ₀) – zum Beispiel das Feld in einer Spule. Gleichung des Modells: $W = \iiint_V w\,dV, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Einsetzen
  $$w = \frac{(1)^2}{2\cdot 1{,}257\cdot 10^{-6}} \approx 397\,900\,\mathrm{J/m^3}$$
- Im homogenen Feld ist die Energiedichte überall gleich; das Volumenintegral ist Dichte mal Volumen.
- Gesuchte Größe ausdrücken: $W = \iiint_V w\,dV = wV$
- Einsetzen: $W = 397\,900\cdot 0{,}001 \approx 397{,}9\,\mathrm{J}$
- So speichert eine stromdurchflossene Spule ihre Energie: $W = \frac{1}{2}LI^2$

Die Arbeit der Gravitation, wenn 1 kg von der Erdoberfläche auf die Höhe eines Erdradius gehoben wird.

Eingabe: `model(fieldwork; find=W[MJ]; M=5.972e24[kg]; m=1[kg]; r1=6371[km]; r2=12742[km]; mode=gravity)`

Ergebnis

$$W \approx -31{,}28\,\mathrm{MJ}$$

Lösungsweg

- Gesucht W; gegeben
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad r_1 = 6371\,\mathrm{km}, \quad r_2$
- Einheiten umrechnen
  $r_1 = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 12\,740\,\mathrm{km} = 1{,}27$
- Die Kraft ist konservativ (sie hat ein Potential): die Arbeit ist wegunabhängig, sie hängt nur von Anfang und Ende ab. Wir rechnen daher längs des einfachsten Wegs – der Verbindungslinie.
- Die Gravitation eines Körpers der Masse M wirkt auf einen Körper m, der vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 vom Mittelpunkt gebracht wird. Negative Arbeit des Felds bedeutet, dass der Körper angehoben werden musste. Gleichung des Modells:
  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r$
- Das Integral ausgewertet
  $W = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right.$
- Einsetzen
  $W = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}274 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6\,3}\right.$
- Die potentielle Energie
  $E_p = -\frac{GMm}{r}: \quad E_{p1} \approx -6{,}256 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}, \quad E_{p2} \approx -3{,}1$
- Die Arbeit einer konservativen Kraft ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie:
  $\Delta E_p = -W \approx 3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J}$
- Einheiten umrechnen:
  $W \approx -3{,}128 \cdot 10^{7}\,\mathrm{J} = -31{,}28\,\mathrm{MJ}$

Der Volumenstrom einer laminaren Strömung – das Integral des parabolischen Profils in

Polarkoordinaten.

Eingabe: `model(flow; find=Q[l_s]; vmax=2[m_s]; R=5[cm]; mode=parabolic)`

Ergebnis

$$Q \approx 7{,}854\,\mathrm{l/s}$$

Lösungsweg

- Gesucht Q; gegeben: $v_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}, \quad R = 5\,\mathrm{cm}$
- Einheiten umrechnen: $R = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$
- Laminare (Poiseuille-)Strömung: an der Wand ruht die Flüssigkeit, in der Achse fließt sie am schnellsten; das Geschwindigkeitsprofil ist die Parabel v = v_max(1 − r²/R²). Gleichung des Modells

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad v(r) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- Die Geschwindigkeit hängt nur vom Abstand r zur Achse ab, deshalb integrieren wir über den Querschnitt in Polarkoordinaten (dS = r dr dφ).
- Das Integral ausgewertet

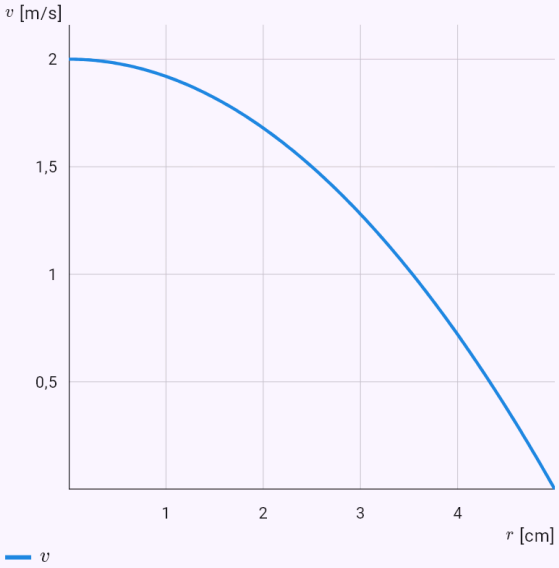
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi v_{\max}\left[\frac{r^2}{2} - \right.$$

- Einsetzen

$$Q = \frac{\pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 2}{2} \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s}$$

- Die mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt: $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \approx 1\,\mathrm{m/s}$
- Einheiten umrechnen: $Q \approx 0{,}007854\,\mathrm{m^3/s} = 7{,}854\,\mathrm{l/s}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Wärmeverlust eines isolierten Rohrs – die Temperatur fällt in der Wand logarithmisch.

Eingabe: `model(heatflux; find=P[W]; k=0.04[W_mK]; L=1[m]; r1=2[cm]; r2=4[cm]; T1=80[degC];`

`T2=20[degC]; mode=cylinder)`

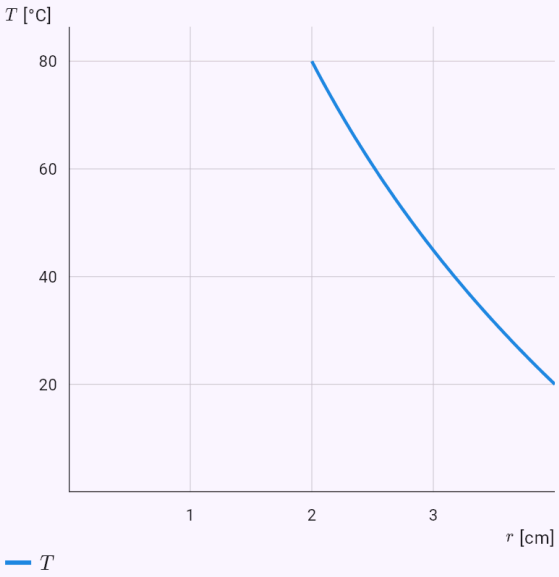
Ergebnis

$$P \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$$

Lösungsweg

- Gesucht P; gegeben
  $k = 0{,}04\,\mathrm{W/(m \cdot K)}, \quad L = 1\,\mathrm{m}, \quad r_1 = 2\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = 4$
- Einheiten umrechnen:
  $r_1 = 2\,\mathrm{cm} = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad r_2 = 4\,\mathrm{cm} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- Eine zylindrische Wand – die Isolierung eines Rohrs mit Innenradius r_1, Außenradius r_2 und Länge L. Die Wärme geht durch Zylinder wachsender Fläche, daher fällt die Temperatur logarithmisch. Gleichung des Modells:
  $\vec{q} = -k\nabla T, \quad P = \iint_S \vec{q} \cdot d\vec{S}$
- Stationärer Zustand ohne Wärmequellen – durch jede Schicht geht derselbe Wärmestrom: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$
- Das Integral ausgewertet
  $P = \iint_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = -k\frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r L \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{P}{2\pi k L}$
- Gesuchte Größe ausdrücken
  $T_2 - T_1 = -\frac{P}{2\pi k L} \ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow P = \frac{2\pi k L (T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$
- Einsetzen
  $P = \frac{2\pi \cdot 0{,}04 \cdot 1 \cdot (80 - 20)}{\ln\frac{0{,}04}{0{,}02}} \approx 21{,}76\,\mathrm{W}$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Die Fallbeschleunigung auf halbem Weg zum Erdmittelpunkt.

Eingabe: `model(gravityfield; find=g[m_s2]; M=5.972e24[kg]; R=6371[km]; r=3185.5[km];`

mode=ball)

Ergebnis

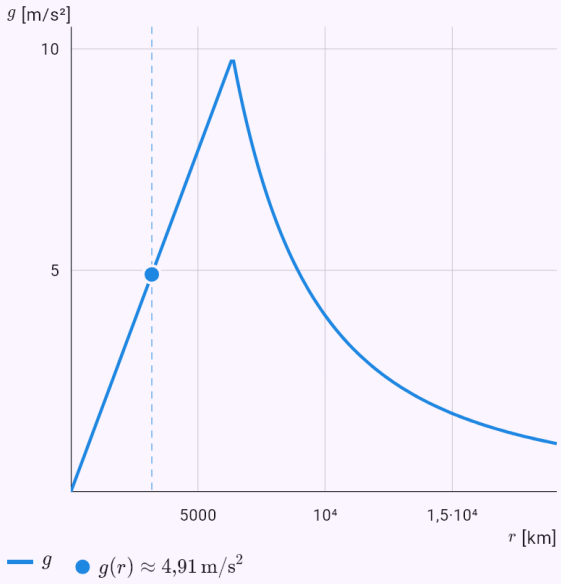
$$g \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$$

Lösungsweg

- Gesucht g; gegeben
  $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R = 6371\,\mathrm{km}, \quad r = 3186\,\mathrm{km}$
- Einheiten umrechnen
  $R = 6371\,\mathrm{km} = 6\,371\,000\,\mathrm{m}, \quad r = 3186\,\mathrm{km} = 3\,186\,0($
- Eine homogene Kugel (ein Planet konstanter Dichte). Innen wächst die Fallbeschleunigung linear mit dem Abstand vom Mittelpunkt. Gleichung des Modells:
  $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\mathrm{in}}$
- Symmetrie: das Feld ist radial und auf jeder konzentrischen Sphäre gleich stark. Als Gaußsche Fläche nehmen wir eine Sphäre mit Radius r – auf ihr ist das Feld parallel zur Normale und konstant.
- Das Integral ausgewertet: $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -g \cdot 4\pi r^2$
- Die eingeschlossene Masse
  $M_{\mathrm{in}} = M\dfrac{r^3}{R^3} = 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot \dfrac{(3\,186\,000)^3}{(6\,371\,000)^3} \approx 7{,}465 \cdot 10^{}$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
  $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\mathrm{in}} \Rightarrow g = \dfrac{G M_{\mathrm{in}}}{r^2}$
- Einsetzen
  $g = \dfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}465 \cdot 10^{23}}{(3\,186\,000)^2} \approx 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$

- Dasselbe Gesetz in differentieller Form (nach dem Gaußschen Satz): $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Bekannte Einschränkungen

- Extrema nur für Funktionen zweier Variablen, gebundene mit einer Nebenbedingung. Ein Doppelintegral nur über ein beschränktes Gebiet, dessen Rand in einer Variablen höchstens quadratisch ist; die Fläche z = f(x, y) wird in 3D bisher nur beim Doppelintegral gezeichnet. Vektorfelder nur in den Variablen x, y (z), andere Buchstaben sind Konstanten; Pfeile nur bei einem ebenen Feld. Das Potential wird durch Integration der Komponenten gesucht – ist ein Integral nicht elementar, wird es nicht gefunden. Kurvenintegrale: den Satz von Green prüft die App nur bei Kreis, Ellipse und konvexem Vieleck; eine geschlossene Kurve aus einem Graphen und einer Strecke lässt sich nur als Streckenzug oder stückweise parametrisch eingeben. Ein Dreifachintegral nur über einen beschränkten Körper, der bezüglich einer Variablen normal ist (eine untere und eine obere Fläche über der ganzen Projektion) und dessen Ungleichungen in ihr höchstens quadratisch sind; Kugelkoordinaten nur bei einem Körper, dessen Winkel θ und φ ein Rechteck bilden.

- Oberflächenintegrale: den Satz von Gauß prüft die App nur bei den Vorgaben (Sphäre, geschlossene Halbsphäre, Zylinder, Kegel), den Satz von Stokes nur beim Fluss einer Rotation, geschrieben als curl oder $\nabla \times F$; ein Graph $z = g(x, y)$ nur über einem Gebiet, das das Doppelintegral beherrscht; eine Sphäre mit einer anderen Grenze als $z \geq 0$ als Graph oder parametrisch eingeben.
- Die physikalischen Anwendungen der Integralsätze rechnen nur symmetrische Fälle (Kugel, unendliche Gerade und Ebene, lange Spule, homogenes Feld), in denen das Integral zum Produkt wird; eine allgemeine Ladungs- oder Stromverteilung geben Sie als Kurven- oder Oberflächenintegral ein. Den Verschiebungsstrom im Ampère-Maxwell-Gesetz vernachlässigen sie, Materialien berücksichtigen sie nur über die relative Permittivität eines Kondensators.

29. Taylorpolynom

Die App stellt das Taylorpolynom (an der Stelle 0 das Maclaurin-Polynom) vom gegebenen Grad auf: eine Tabelle der Ableitungen an der Stelle, Einsetzen in die Formel und das Restglied in Lagrange-Form. Den Grad kann sie auch selbst bestimmen – den kleinsten, bei dem der Fehler an einer Stelle oder auf einem Intervall eine gegebene Schranke nicht überschreitet. Der Graph zeigt Funktion und Polynom; mit einem Schieberegler ändern Sie den Grad und sehen, wie die Näherung besser wird.

Hohe Grade (bis etwa 1000) werden genau berechnet und in Lösung und Graph gekürzt; der Gradregler ist dann logarithmisch. Funktionen mit schnell wachsenden Ableitungen (tan x) werden durch Reihendivision berechnet, der Fehler mit der Cauchy-Abschätzung in der komplexen Ebene oder mit der Abschätzung der alternierenden Reihe. Geht auch das nicht, erklärt die App den Grund und gibt Rat.

Eingabe

`taylor(sin x, 0, 5)`	Funktion, Stelle und Grad.
`maclaurin(e^x, 4)`	Das Maclaurin-Polynom – die Stelle ist 0.
`taylor(e^x, 0, fehler=0.001, x=0.5)`	Der Grad nach dem Fehler an der Stelle x (auf einem Intervall statt x r=… eingeben).
`ln(1 + x)`	Eine Funktion mit dem Chip „Taylorpolynom“ – Stelle, Grad oder Genauigkeit tragen Sie dort ein.

Beispiele

Ein Polynom vom Grad 4 mit Restglied.

Eingabe: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Ergebnis

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle 0): $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$
- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

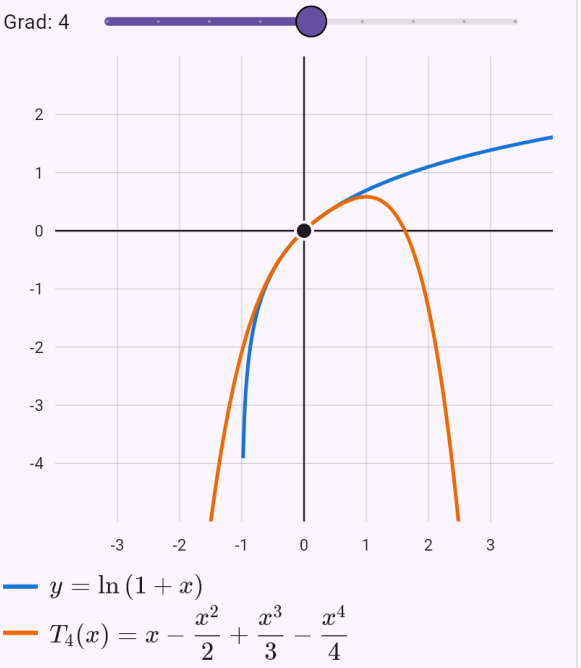
$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

- Die Werte der Ableitungen eingesetzt

$$T_4(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- Das Restglied (der Fehler) in Lagrange-Form, ξ zwischen a und x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

Graph



$y = \ln(1+x)$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Die Stelle, um die das Polynom die Funktion annähert:

- $(0|0)$

Mit dem Schieberegler über dem Graphen wählst du den Grad – je höher, desto besser und weiter um die Stelle nähert das Polynom die Funktion an.

Der Grad nach der geforderten Genauigkeit – ein Näherungswert von e^0,5.

Eingabe: `taylor(e^x, 0, fehler=0.001, x=0.5)`

Ergebnis

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0{,}5) \approx 1{,}6484$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle 0): $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$
- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Die Werte der Ableitungen eingesetzt

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Das Restglied (der Fehler) in Lagrange-Form, ξ zwischen a und x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5$
- Der kleinste Grad n, dessen Restgliedabschätzung an der Stelle x den Fehler nicht überschreitet

$$M_k = \max_{t \in [0;\, 0{,}5]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 0{,}5$$

$$n = 1: \quad |R_1| \le \frac{1{,}6487}{2!} \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: \quad |R_2| \le \frac{1{,}6487}{3!} \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}0344 > 10^{-3}$$

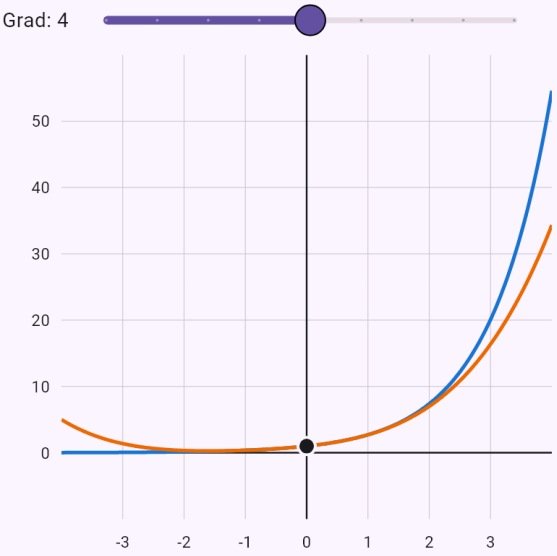
$$n = 3: \quad |R_3| \le \frac{1{,}6487}{4!} \cdot 0{,}5^4 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: \quad |R_4| \le \frac{1{,}6487}{5!} \cdot 0{,}5^5 \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4} \le 10^{-3}$$

- Der Näherungswert: $f(0{,}5) \approx T_4(0{,}5) = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484$

Graph

Grad: 4



$y = e^x$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Die Stelle, um die das Polynom die Funktion annähert:

- $(0|1)$

Mit dem Schieberegler über dem Graphen wählst du den Grad – je höher, desto besser und weiter um die Stelle nähert das Polynom die Funktion an.

Grad 999 – ein hoher Grad wird in der Lösung gekürzt.

Eingabe: `taylor(ln(1 + x), 0, chyba=0.001, x=1)`

Ergebnis

$$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$$

$$f(1) \approx 0{,}6936$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle 0): $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 999$
- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\
&\vdots \\
f^{(998)}(x) &= -\frac{997!}{(x+1)^{998}} & f^{(998)}(0) &= -997! \\
f^{(999)}(x) &= \frac{998!}{(x+1)^{999}} & f^{(999)}(0) &= 998!
\end{aligned}$$

- Das Restglied (der Fehler) in Lagrange-Form, ξ zwischen a und x

$$R_{999}(x) = \frac{f^{(1000)}(\xi)}{1000!} x^{1000} = \frac{-999!}{(\xi+1)^{1000} \cdot 1000!} x^{1000}$$

- Der kleinste Grad n, dessen Restgliedabschätzung an der Stelle x den Fehler nicht überschreitet

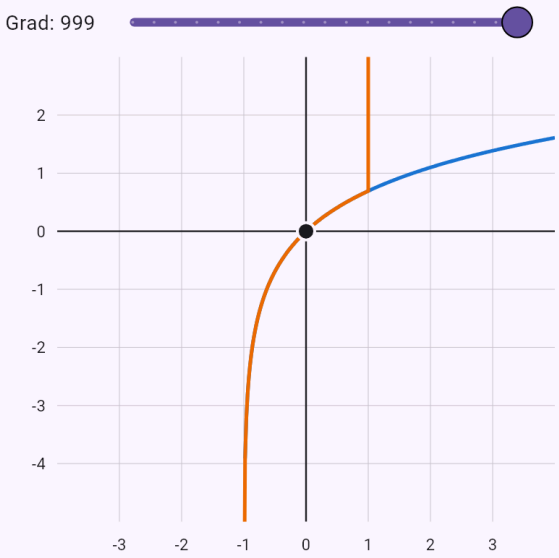
$$M_k = \max_{t \in [0;\,1]} \left| f^{(k)}(t) \right|, \quad h = |x - a| = 1$$

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad |R_0| \le \frac{1}{1!} \cdot 1^1 \approx 1{,}001 > 10^{-3} \\
n = 1: &\quad |R_1| \le \frac{1}{2!} \cdot 1^2 \approx 0{,}5005 > 10^{-3} \\
&\dots \\
n = 998: &\quad |R_{998}| \le \frac{4{,}03 \cdot 10^{2561}}{999!} \cdot 1^{999} \approx 1{,}001 \cdot 10^{-3} \\
n = 999: &\quad |R_{999}| \le \frac{4{,}02 \cdot 10^{2564}}{1000!} \cdot 1^{1000} \approx 10^{-3} \le 10^{-}
\end{aligned}$$

- Der Näherungswert: $f(1) \approx T_{999}(1) = 0{,}6936$

Graph

Grad: 999



$y = \ln(1 + x)$

$T_{999}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{998}}{998} + \frac{x^{999}}{999}$

Die Stelle, um die das Polynom die Funktion annähert:

- $(0|0)$

Mit dem Schieberegler über dem Graphen wählst du den Grad – je höher, desto besser und weiter um die Stelle nähert das Polynom die Funktion an.

Tangens – Koeffizienten aus Reihen, Fehler nach Cauchy.

Eingabe: `taylor(tan x, 0, chyba=0.000001, x=1)`

Ergebnis

$$T_{43}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$f(1) \approx 1{,}5574077$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle 0): $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 43$
- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{2\tan x}{\cos^2 x} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{4\tan^2 x}{\cos^2 x} & f'''(0) &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Die Koeffizienten berechnen wir mit der Arithmetik der Reihen, die höheren Ableitungen wären riesig

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_n = \frac{s_n - \sum_{k=1}^{n} q_k\, c_{n-k}}{q_0}$$

- Die Ableitungen sind zu groß, daher verwenden wir die Cauchy-Abschätzung auf einem Kreis in der komplexen Ebene

$$|R_n| \le \frac{M\, q^{n+1}}{1-q}, \quad q = \frac{h}{\rho}, \quad M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$$

$$R \approx 1{,}569, \quad \rho = 1{,}49, \quad M \approx 12{,}369, \quad h = 1$$

$$n = 43: \quad |R_{43}| \le 8{,}91 \cdot 10^{-7} \le 10^{-6}$$

- Der Näherungswert: $f(1) \approx T_{43}(1) = 1{,}5574077$

Bekannte Einschränkungen

- Grade über 1000 berechnet die App nicht; ein Punkt am Rand des Konvergenzbereichs oder dahinter lässt sich mit der Cauchy-Abschätzung nicht behandeln.

30. Unbestimmte Integrale

Die App integriert mit den Verfahren aus der Schule und sagt bei jedem Schritt, was sie tut. Das Ergebnis prüft sie – sie leitet es gliedweise nach den Regeln ab und formt die Summe zum Integranden um (Hauptnenner, Identitäten wie sin²x + cos²x = 1) – und zeichnet den Integranden und die Stammfunktion.

Wurzeln aus Potenzen der Variablen (∛(x⁴), √(x³)) werden als Potenzen mit rationalem Exponenten geschrieben; ein Betrag (|cos x|, √(1 − sin²x)) mit der Signumfunktion sgn.

Hat ein Integral keine elementare Stammfunktion (etwa e^(−x²)), sagt die App es und gibt sie mit einer speziellen Funktion an (erf, Si, …).

Eingabe

`int(x e^x, x)`	Ein Integral mit der Variablen – Grenzen oder eine Anwendung (Fläche, Volumen, …) lassen sich in den Feldern unter der Eingabe ergänzen.
`int(x^2 sin x)`	Ohne Variable, wenn es nur eine gibt.
`∫ x^2 dx`	Mit dem Integralzeichen, auch vom Foto.
`x e^x`	Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“.

Grundintegrale und Substitution

Das Integral einer Summe gliedweise, Konstanten vor das Integral, Grundintegrale aus der Tabelle (auch mit linearer innerer Funktion) und Substitution, wenn im Integranden eine Funktion zusammen mit der Ableitung ihres Inneren steht.

Beispiele

Gliedweise nach der Tabelle.

Eingabe: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

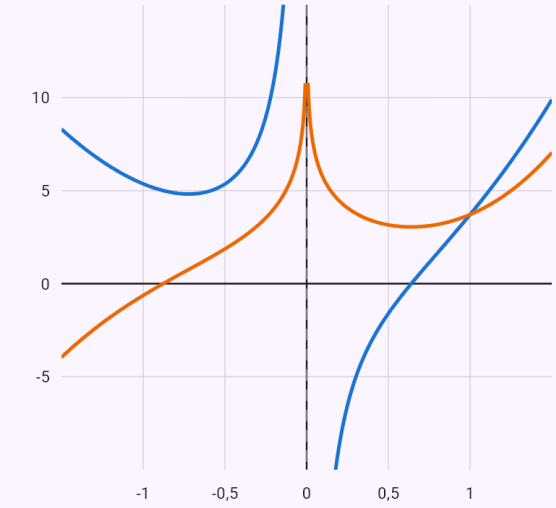
Ergebnis

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Lösungsweg

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx + \int -\frac{2}{x}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int e^x\,dx = e^x$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand:
  $\left(x^3 + e^x - 2\ln|x|\right)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

Graph



$f(x) = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

$F(x) = x^3 + e^x - 2\ln|x|$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Die Substitution t = x².

Eingabe: `int(2x cos(x^2))`

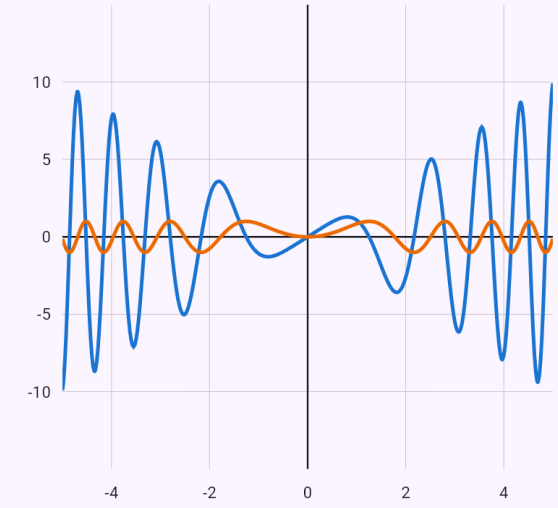
Ergebnis

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = \sin\left(x^2\right) + C$$

Lösungsweg

- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 2x\cos\left(x^2\right)\,dx = 2\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$
- Substitution $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$: $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{2}\,dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \frac{\cos t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2}$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$

Graph



$f(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$
$F(x) = \sin\left(x^2\right)$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Integral mit Konstanten a, b.

Eingabe: `int(1/(a - bx)^3)`

Ergebnis

$$\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2} + C$$

Bedingungen: $b \neq 0$

Lösungsweg

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \frac{1}{(a-bx)^3}\,dx = \frac{1}{2b(bx-a)^2}$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand $\left(\frac{1}{2b(bx-a)^2}\right)' = \frac{1}{2b}\cdot\left(-\frac{2}{(a-bx)^3}\right)\cdot(-b) = \frac{1}{(a-$

Partielle Integration

Ein Produkt aus einem Polynom und einer Exponential-, trigonometrischen oder Logarithmusfunktion integriert die App partiell, bei Bedarf mehrfach; Integrale wie $e^x \sin x$ durch zyklische partielle Integration.

Beispiele

Zweimal hintereinander partiell integriert.

Eingabe: `int(x^2 e^x)`

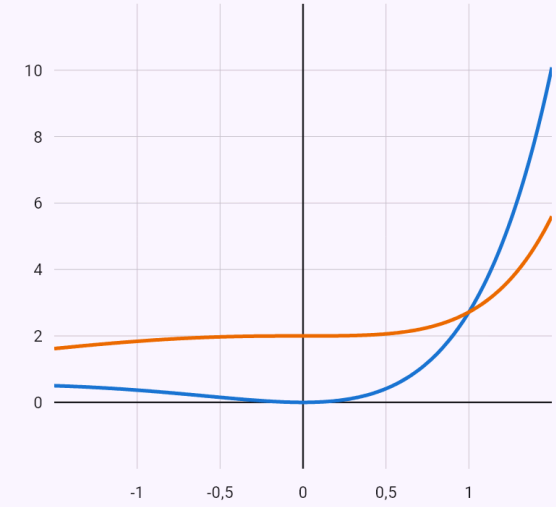
Ergebnis

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Lösungsweg

- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = e^x, also u' = $2x$, v = e^x: $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 2xe^x \, dx = 2 \int xe^x \, dx$
- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = e^x, also u' = 1, v = e^x: $\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int e^x \, dx = e^x$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand: $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab: $\left(x^2e^x\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = x^2e^x + 2xe^x$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab: $\left(-2xe^x\right)' = -2 \cdot \left(e^x \cdot x + e^x\right) = -2xe^x - 2e^x$
- Addiert und vereinfacht $\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)' = x^2e^x + 2xe^x - 2xe^x - 2e^x + 2$

Graph



Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion dividiert die App bei Bedarf, zerlegt den Nenner und die Funktion in Partialbrüche, die sie zu Logarithmen und Arkustangens integriert.

Einen Nenner, der sich über den rationalen Zahlen nicht zerlegen lässt ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), zerlegt sie über den reellen Zahlen – jedes Paar konjugiert komplexer Nullstellen ergibt einen quadratischen Faktor ohne reelle Nullstellen.

Beispiele

Partialbruchzerlegung.

Eingabe: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

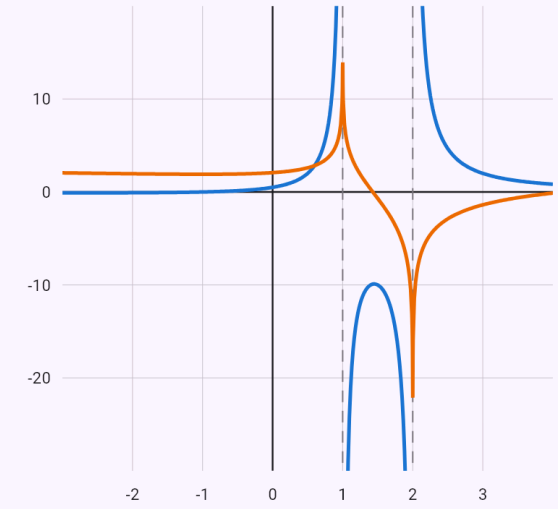
Ergebnis

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln|x-2| - 2\ln$$

Lösungsweg

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt:
  $$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int -\frac{2}{x-1}\,d$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:
  $$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $$\int -\frac{2}{x-1}\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:
  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand:
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab:
  $$(3\ln|x-2|)' = 3\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab:
  $$(-2\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}$$
- Addiert und vereinfacht
  $$(3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-}{(x-}$$

Graph



$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$F(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1|$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Zerlegung des Nenners x⁴ + 1 über den reellen Zahlen.

Eingabe: `int(1/(x^4 + 1))`

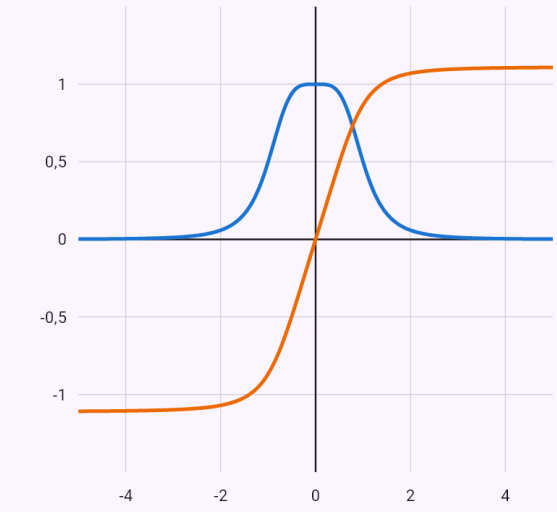
Ergebnis

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \right.\right.$$

Lösungsweg

- Den Nenner über ℝ in Faktoren zerlegen: Seine komplexen Nullstellen bilden konjugierte Paare r, r̄, und jedes Paar ergibt einen quadratischen Faktor (x − r)(x − r̄) = x² − 2·Re r·x + |r|² ohne reelle Nullstellen:
  $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$
- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt
  $$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x\right.\right.$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $$\int \left(\frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\right)dx = \int$$
- Der Nenner hat keine reellen Nullstellen: ein Vielfaches seiner Ableitung im Zähler ergibt ln, der Rest nach quadratischer Ergänzung arctan
  $$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx +$$
- Der Nenner hat keine reellen Nullstellen: ein Vielfaches seiner Ableitung im Zähler ergibt ln, der Rest nach quadratischer Ergänzung arctan
  $$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$$

Graph



$f(x) = \frac{1}{x^4+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}\,\text{ar}$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Probe der Partialbrüche über den Hauptnenner.

Eingabe: `int(1/(x^3 + 1))`

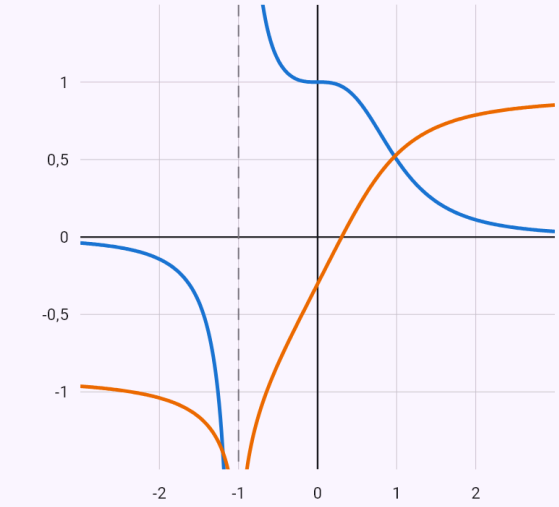
Ergebnis

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-$$

Lösungsweg

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
$$\int \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right) dx = \int \frac{2-x}{3(x^2-x+$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$
- Der Nenner hat keine reellen Nullstellen: ein Vielfaches seiner Ableitung im Zähler ergibt ln, der Rest nach quadratischer Ergänzung arctan
$$\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{}{(x-}$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:
$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x}{}$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{3}+1}\cdot\frac{2}{}$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
$$\left(-\frac{\ln(x^2-x+1)}{6}\right)' = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\cdot(2x-1) =$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
$$\left(\frac{\ln|x+1|}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3(x+1)}$$
- Addiert und vereinfacht
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{\ln|x}{}$$

Graph



$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{\ln(x^2-}{6}$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Trigonometrische Funktionen

Vorrangig Formeln (sin²x = (1 − cos 2x)/2, Produkte in Summen), bei einer ungeraden Potenz die Substitution t = sin x oder t = cos x, bei einer rationalen Funktion von Sinus und Kosinus eine Substitution nach der Parität, die Weierstraß-Substitution t = tan(x/2) erst zuletzt.

Beispiele

Eine ungerade Potenz des Sinus – die Substitution t = cos x.

Eingabe: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

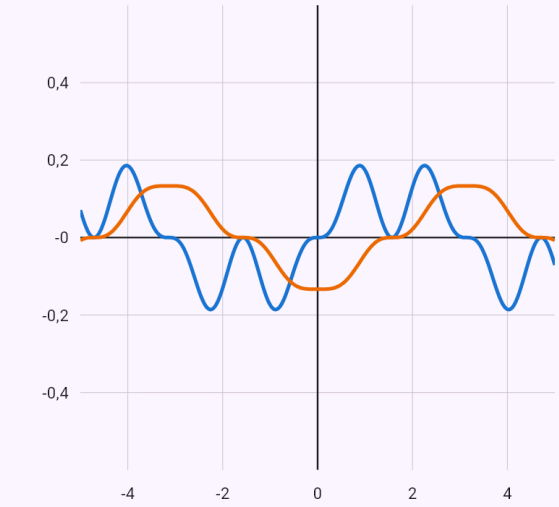
Ergebnis

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Lösungsweg

- Eine ungerade Potenz – die Substitution $t = \cos x$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
  $dt = -\sin x \, dx$
  $$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \left(t^4 - t^2\right) dt$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:
  $$\int \left(t^4 - t^2\right) dt = \int t^4 \, dt + \int -t^2 \, dt$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $$\int -t^2 \, dt = -\int t^2 \, dt$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3}$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen:
  $t = \cos x$: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand:
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x) = -\cos^4 x \sin x$$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
  $$\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x \sin x$$
- Addiert und mit der Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vereinfacht
  $$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = ($$

Graph



$f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

$F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Die Probe: gliedweise Ableitung, umgeformt mit der Identität 1 + tan²x = 1/cos²x.

Eingabe: `int(1/cos(x)^4)`

Ergebnis

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

Lösungsweg

- Die Funktion ändert sich nicht, wenn Sinus und Kosinus zugleich das Vorzeichen wechseln – die Substitution $t = \tan x$

  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1+t^2)}$

  $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale: $\int (t^2+1)\,dt = \int t^2\,dt + \int 1\,dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1\,dt = t$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen: $t = \tan x:\quad \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand: $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^4 x}$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab $\left(\frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$
- Addiert und mit der Identität $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ vereinfacht $\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\cos^2 x} =$

Hyperbelfunktionen

Grundintegrale (∫sinh x dx = cosh x + C, ∫1/cosh²x dx = tanh x + C, …), ∫tanh x dx über den Logarithmus der Ableitung, partielle Integration (x sinh x, arsinh x), Quadrate mit den Formeln sinh²x = (cosh 2x − 1)/2, tanh²x = 1 − 1/cosh²x; der Rest nach der Definition über Exponentialfunktionen.

Beispiele

Die Formel sinh²x = (cosh 2x − 1)/2.

Eingabe: `int(sinh(x)^2)`

Ergebnis

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Lösungsweg

- Wir verwenden die Formel $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:
  $\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand:
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \sinh^2 x$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab
  $\left(\frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = \frac{\cosh(2x)}{2}$
- Addiert und mit der Identität $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$ vereinfacht
  $\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2x)}{2} = \sinh^2 x$

Wurzeln

Integrale mit der Wurzel einer linearen gebrochenen Funktion durch Substitution, mit der Wurzel eines quadratischen Terms durch eine Eulersche Substitution und binomische Integrale nach den Bedingungen von Tschebyschow – gilt keine davon, sagt die App, dass das Integral nicht elementar ist.

Beispiele

Eine Eulersche Substitution.

Eingabe: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Ergebnis

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+}{}$$

Lösungsweg

- Eulersche Substitution (Typ 1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ – das Integral wird zu einem einer gebrochenrationalen Funktion von t

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt$$

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \int t\,dt + \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^3}\,dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t}\,dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen

$$t = x + \sqrt{x^2+1}: \quad \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2} + \frac{}{(-x^2-1)(6}$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses (der Stammfunktion) ist der Integrand

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{2\sqrt{}}$$

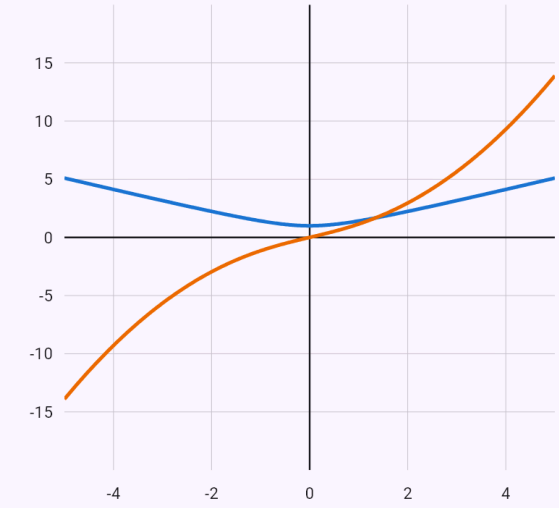
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab

$$\left(\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right.$$

- Addiert und vereinfacht

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}\right)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{}{2\sqrt{}}$$

Graph



$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}{2}$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Bekannte Einschränkungen

- Bei manchen Integralen finden wir das Ergebnis ohne Lösungsweg – die App sagt es im Lösungsweg.
- Eine Berechnung ohne Lösungsweg, die zu lange dauert, bricht die App ab und sagt es.
- Bei langen Ergebnissen, bei denen die Umformung zum Integranden nicht lesbar wäre (mehrere Glieder mit Wurzeln aus Zahlen, etwa $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$), lässt die App die Probe weg.

31. Bestimmte Integrale und ihre Anwendungen

Ein bestimmtes Integral berechnet die App mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und zeichnet die Fläche unter dem Graphen – den Teil oberhalb der x-Achse in einer anderen Farbe als den Teil darunter. Sie kann auch uneigentliche Integrale und Anwendungen: Fläche, Bogenlänge, Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers, auch für Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten.

Bestimmtes Integral

Die App findet die Stammfunktion wie beim unbestimmten Integral und setzt die Grenzen ein. Bei einer Substitution rechnet sie die Grenzen gleich um. Auf einem zu null symmetrischen Intervall nutzt sie die Symmetrie: Das Integral des ungeraden Teils ist null ohne Stammfunktion, und √(r² − x²) erkennt sie als Fläche eines Halbkreises. Ohne elementare Stammfunktion gibt sie die exakte Form mit einer höheren Funktion an (etwa 2 Si(π)) und berechnet die Zahl dazu aus einer Potenzreihe mit Fehlerabschätzung; findet sie keine exakte Form, berechnet sie den Wert numerisch und nennt das Verfahren.

Buchstaben in der Aufgabe (∫ √(r² − x²) dx von −r bis r) sind positive Parameter: Das Ergebnis ist eine Formel (πr²/2), numerisch für verschiedene Werte der Parameter geprüft, und der Graph hat für jeden Buchstaben einen Schieberegler.

Eingabe

`int(x^2, x, 0, 3)`	Ein Integral mit Variable und Grenzen.
`\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx`	Vom Foto oder in LaTeX.
`x^2`	Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“ – die Grenzen in die Felder eintragen.

Beispiele

Substitution mit umgerechneten Grenzen.

Eingabe: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Ergebnis

$$\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \sin 1 \approx 0{,}8415$$

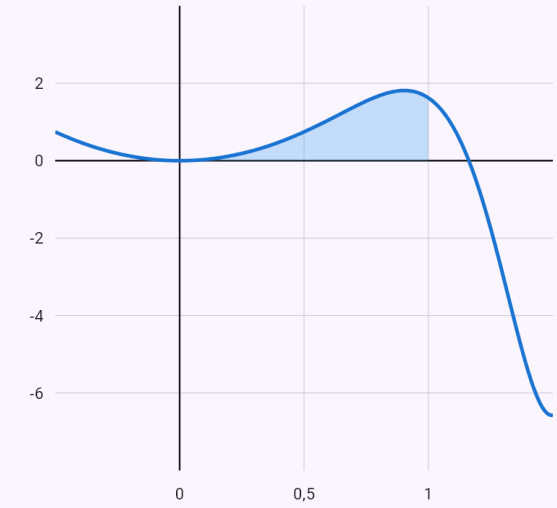
Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Simpson | Σ Trapez | Σ Romberg

Lösungsweg

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = 3\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx$
- Substitution $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$:
  $\int x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = \int \frac{\cos t}{3}\,dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cos t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t\,dt = \sin t$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:
  $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right)\,dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$

Graph



$f(x) = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Der ungerade Teil ist auf dem symmetrischen Intervall null, der Rest ist die Fläche eines Halbkreises –

Ergebnis π.

Eingabe: `int((x^3*cos(x/2) + 1/2)*sqrt(4 - x^2), x, -2, 2)`

Ergebnis

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx =$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Simpson | Σ Trapez | Σ Romberg

Lösungsweg

- Das Intervall ist symmetrisch zu null, wir teilen das Integral in den ungeraden Teil und den Rest

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{c}$$

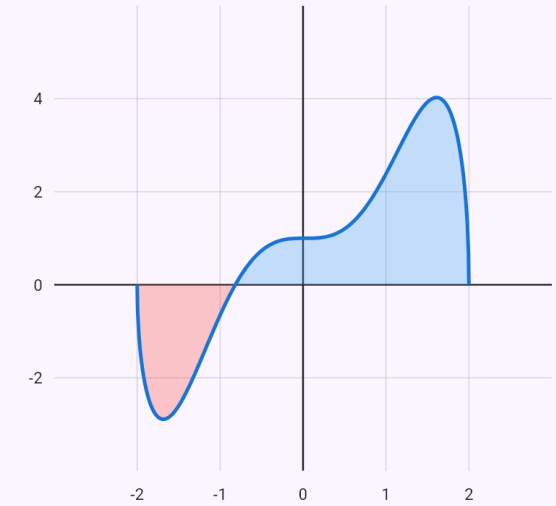
- Die Funktion $x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ist ungerade (f(−x) = −f(x)): auf ⟨−2; 2⟩ heben sich die Flächen über und unter der Achse auf, das Integral ist null ohne Stammfunktion:

$$\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0$$

- Der Graph von √(r² − x²) ist der obere Halbkreis mit dem Radius r = 2, das Integral ist die Fläche des Halbkreises πr²/2

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = \pi$$

Graph



$f(x) = \sqrt{4-x^2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Die Stammfunktion ist nicht elementar: exakt 2 Si(π), der Wert aus einer Potenzreihe.

Eingabe: `int(sin(x)/x, x, -pi, pi)`

Ergebnis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$

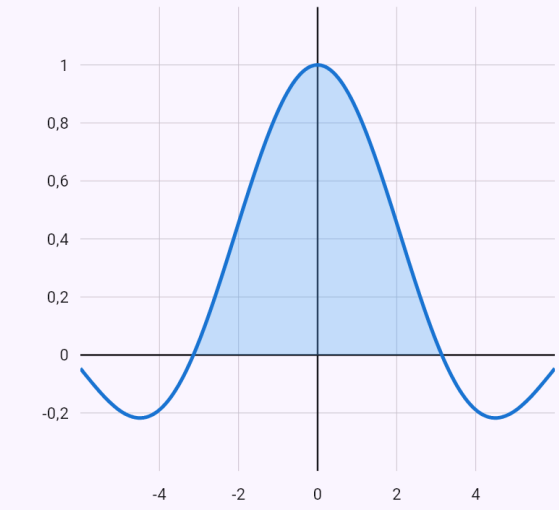
Die Zahl zur exakten Form berechnet auch ein numerisches Verfahren:

Σ Simpson | Σ Trapez | Σ Romberg

Lösungsweg

- Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ ist gerade (f(−x) = f(x)), ihr Graph ist symmetrisch zur y-Achse, das Integral über $\langle -\pi;\,\pi\rangle$ ist also das Doppelte des Integrals über $\langle 0;\,\pi\rangle$:
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
- Die Stammfunktion ist nicht elementar, sie ist eine höhere Funktion – das exakte Ergebnis schreiben wir mit ihr
  $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 3{,}7039$$
- Die Zahl zur exakten Form berechnen wir aus der Potenzreihe der höheren Funktion: $\mathrm{Si}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$. Für t = π addieren wir 6 Glieder. Die Reihe ist alternierend, der Fehler ist kleiner als das erste weggelassene Glied, $3{,}6\cdot 10^{-5}$ (Abschätzung der alternierenden Reihe): $\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1{,}8519$

Graph



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Integral mit Parameter r – die Fläche eines Halbkreises, πr²/2; der Schieberegler im Graphen ändert r.

Eingabe: `int(sqrt(r^2-x^2), x, -r, r)`

Ergebnis

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

Lösungsweg

- Andere Buchstaben als die Variable sind positive Parameter: $r > 0$
- Eine Wurzel aus einer Differenz von Quadraten – die trigonometrische Substitution $x = r \sin t$, $dx = r \cos t\, dt$, die Wurzel $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2 \cos^2 t\, dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int r^2 \cos^2 t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt$
- Wir verwenden die Formel $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

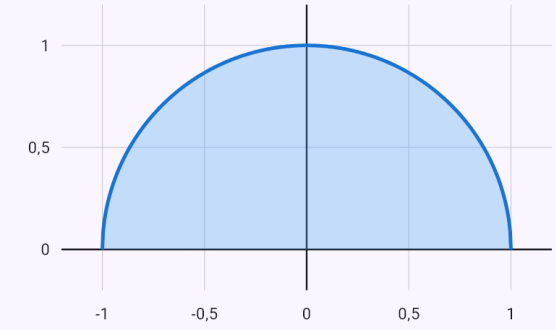
$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($$

Werte der Parameter

$r = 1$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \approx 1{,}571$$

Graph



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Uneigentliche Integrale

Eine unendliche Grenze oder eine unbeschränkte Funktion behandelt die App mit einem Grenzwert der Stammfunktion und sagt, ob das Integral konvergiert oder divergiert. Lässt sich dieser Grenzwert nicht berechnen, entscheidet sie mit einem Vergleichskriterium.

Integrale ∫₀^∞ x^(s − 1) lnᵏx/(xⁿ + aⁿ)^m dx (0 < s < mn, k = 0 bis 3) berechnet die App auch ohne Stammfunktion exakt: als k-te Ableitung des Parameterintegrals I(s) nach s. I(s) findet sie mit der Substitution t = xⁿ/(xⁿ + aⁿ) über die Betafunktion und den Ergänzungssatz (Chip „Betafunktion“) oder über einen Schlüssellochweg um die positive Halbachse mit Residuen (Chip „Residuen“). Wo es eine

Stammfunktion gibt, bleibt die Newton-Leibniz-Formel voreingestellt (Chip „Stammfunktion“). Der Wert wird immer numerisch geprüft.

Ein anderes uneigentliches Integral ohne Stammfunktion vergleicht die App an jedem Ende (an einer unendlichen Grenze und an einem Punkt, an dem die Funktion über alle Grenzen wächst) mit 1/x^α nach dem Grenzwertkriterium. Erst wenn es an allen Enden konvergiert, berechnet sie den Wert numerisch (≈); ein divergentes Integral meldet sie als divergent.

Beispiele

Eine unendliche obere Grenze.

Eingabe: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Ergebnis

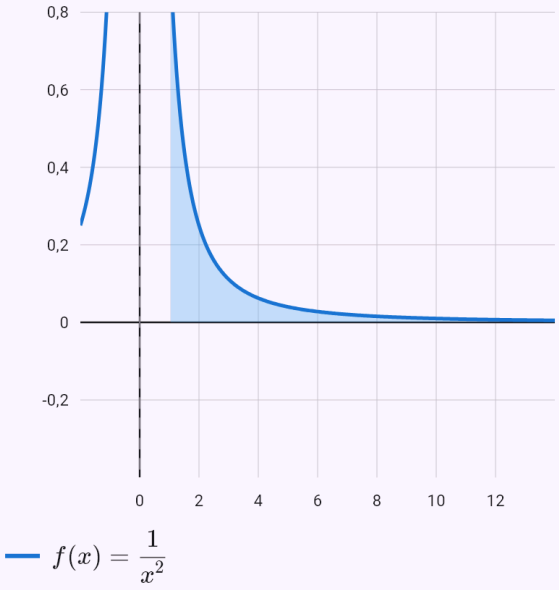
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Lösungsweg

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graph



Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Eine an der unteren Grenze unbeschränkte Funktion.

Eingabe: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Ergebnis

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

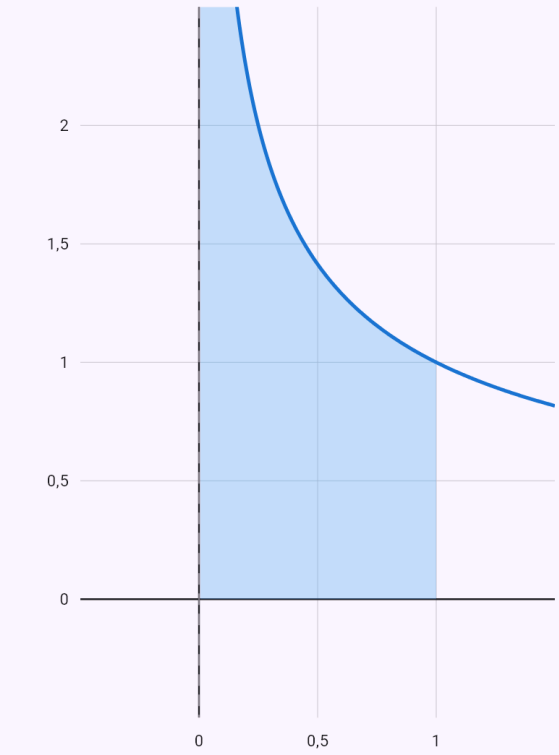
Σ Simpson | Σ Trapez | Σ Romberg

Lösungsweg

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graph



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

∫₀^∞ x³ ln²x/(1 + x⁶) dx = I''(4) über die Betafunktion – 5√3π³/972.

Eingabe: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)`

Ergebnis

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Lösungsweg

- Der Logarithmus entsteht durch Ableiten nach dem Parameter s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Das Integral ist also eine Ableitung des Parameterintegrals $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, das für $0 < s < 6$ konvergiert: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Wir berechnen I(s) für allgemeines s, leiten ab und setzen ein.
- Die Substitution führt das Integral auf ⟨0; 1⟩ und ergibt die Eulersche Betafunktion B(p, q) = ∫₀¹ t□⁻¹(1 − t)^(q − 1) dt

$$t = \frac{x^6}{x^6+1} \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad dx = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}\sqrt[6]{(1-t)^7}}$$

$$I(s) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{s}{6}-1}(1-t)^{-\frac{s}{6}}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right)$$

- Die Betafunktion drücken wir durch die Gammafunktion aus, B(p, q) = Γ(p)Γ(q)/Γ(p + q), und verwenden den Ergänzungssatz Γ(p)Γ(1 − p) = π/sin πp

$$\mathrm{B}\left(\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

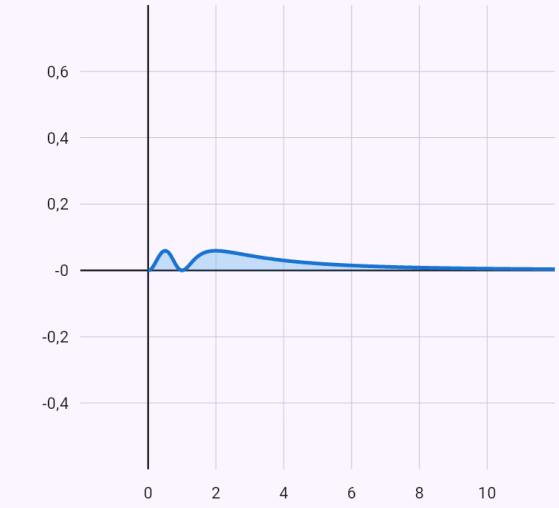
- Die Ableitung nach dem Parameter s (der Ordnung 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Wir setzen s_0 ein

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graph



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Dasselbe Integral über einen Schlüssellochweg mit Residuen.

Eingabe: `int(x^3*ln(x)^2/(1+x^6), x, 0, oo)` Residuen

Ergebnis

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Lösungsweg

- Der Logarithmus entsteht durch Ableiten nach dem Parameter s: $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\, x^{s-1} = x^{s-1}\ln^2 x$. Das Integral ist also eine Ableitung des Parameterintegrals $I(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^6+1}\,dx$, das für $0 < s < 6$ konvergiert: $\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4)$. Wir berechnen I(s) für allgemeines s, leiten ab und setzen ein.

- Die Potenz z^(s − 1) = e^((s − 1) ln z) nehmen wir mit dem Argument von z in (0; 2π) und integrieren über den Schlüssellochweg C um die positive reelle Halbachse. Am oberen Ufer ist z^(s − 1) = x^(s − 1), am unteren x^(s − 1)·e^(2πis); der große und der kleine Kreis tragen im Grenzwert nichts bei, weil $0 < s < 6$. Innen liegen die Pole $z_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ der Ordnung 1, und nach dem Residuensatz (für nicht ganzzahliges s)

$$\oint_C \frac{z^{s-1}}{z^6+1}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) I(s) = 2\pi i \sum_{j=0}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z^{s-1}}{z^6+}$$

- Die Pole sind einfach; das Residuum ist der Zähler durch die Ableitung des Nenners im Pol, mit z⁶ⁿ = −aⁿ

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} = \frac{z_j^{s-1}}{6z_j^5} = \frac{z_j^s}{6z_j^6} = -\frac{z_j^s}{6}$$

- Wir setzen die Potenzen der Pole ein, summieren die geometrische Reihe und vereinfachen. Die Formel wurde für nicht ganzzahliges s hergeleitet (sonst ist 1 − e^(2πis) = 0). Beide Seiten sind aber stetig in s, also gilt sie auch für s = 4 − durch den Grenzwert s → 4

$$z_j^s = e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}}$$

$$\sum_{j=0}^{5} e^{\frac{(2j+1)\pi i s}{6}} = \frac{e^{\frac{\pi i s}{6}}\left(1 - e^{2\pi i s}\right)}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}}$$

$$\frac{2\pi i\, e^{\frac{\pi i s}{6}}}{1 - e^{\frac{\pi i s}{3}}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{6}}$$

$$I(s) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi s}{6}}$$

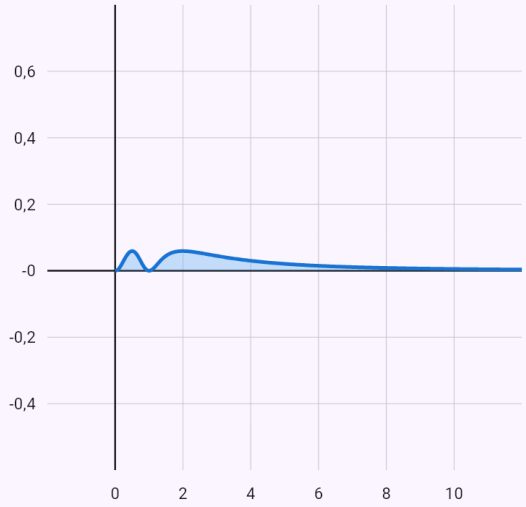
- Die Ableitung nach dem Parameter s (der Ordnung 2)

$$I''(s) = \frac{\pi^3\left(\cot^2\left(\frac{\pi s}{6}\right) + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi s}{6}\right)}\right)}{216\sin\left(\frac{\pi s}{6}\right)}$$

- Wir setzen s_0 ein

$$\int_0^\infty \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}\,dx = I''(4) = \frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972} \approx 0{,}2763$$

Graph



$f(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{x^6+1}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Ohne Stammfunktion: Konvergenz durch Vergleich mit 1/x³, dann der Wert numerisch.

Eingabe: `int(1/(x^3+ln(x)), x, 2, oo)`

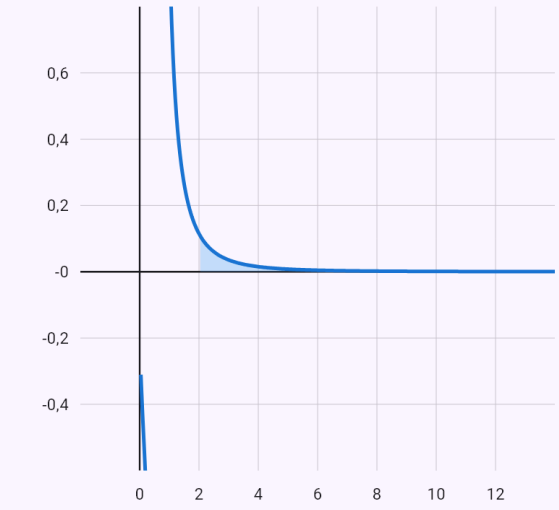
Ergebnis

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3+\ln x}\,dx \approx 0{,}1197$$

Lösungsweg

- Für $x \to \infty$ vergleichen wir den Integranden mit $\frac{1}{x^3}$ (Grenzwertkriterium): $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\ln x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$. Der Grenzwert ist eine positive Zahl, das Integral verhält sich dort also wie das Integral von $\frac{1}{x^3}$, und dieses konvergiert für $\alpha = 3 > 1$
- Das Integral konvergiert an allen Enden, sein Wert: $\int_2^\infty \frac{1}{x^3+\ln x}\,dx \approx 0{,}1197$
- Eine exakte Form wurde nicht gefunden, der Wert des uneigentlichen Integrals ist numerisch mit der adaptiven Gauß-Kronrod-Quadratur berechnet.

Graph



$f(x) = \frac{1}{x^3+\ln x}$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (−)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Fläche unter einer Kurve und zwischen Kurven

Die Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse oder zwischen zwei Kurven berechnet die App als Integral des Betrags der Differenz – Teile oberhalb und unterhalb zählen beide positiv. Die Grenzen müssen Sie nicht angeben: sie findet sie als Schnittpunkte der Kurven.

Eingabe

`fläche(x^2, x)`	Die Fläche zwischen zwei Kurven, Grenzen aus den Schnittpunkten.
`fläche(sin x, 0, pi)`	Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse auf einem Intervall.
`x^2`	Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“ → „Fläche zwischen Kurven“; zweite Kurve und Grenzen in die Felder eintragen.

Beispiele

Die Fläche zwischen einer Parabel und einer Geraden.

Eingabe: `x^2` Fläche zwischen Kurven, zweite Kurve x

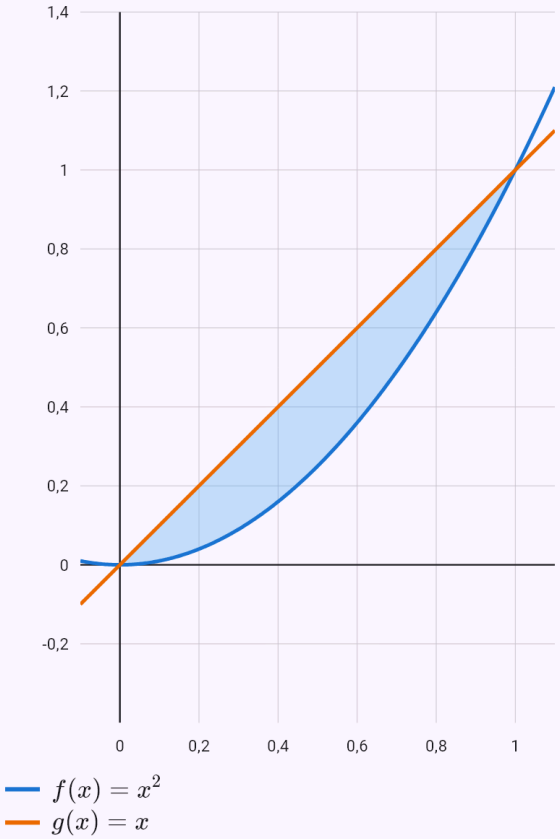
Ergebnis

$$S = \frac{1}{6}$$

Lösungsweg

- Die Grenzen sind die Schnittpunkte der Kurven: $x^2 = x \Rightarrow x = 0,\ x = 1$
- Der Flächeninhalt zwischen den Kurven (Teile oberhalb und unterhalb zählen positiv), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx$
- Der Ausdruck im Betrag wechselt auf dem Intervall sein Vorzeichen nicht – der Betrag danach aufgelöst: $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale: $\int (-x^2 + x)\,dx = \int -x^2\,dx + \int x\,dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

Graph



Die schattierte Fläche – ihr Inhalt ist das Ergebnis (Teile ober- und unterhalb der Achse zählen positiv).

Bogenlänge

Die Länge eines Graphen auf einem Intervall berechnet die App mit der Formel l = ∫√(1 + f′²) dx. Sie versucht, die Wurzel zu vereinfachen (beim Halbkreis ergibt sich der Arkussinus); hat das Integral keine elementare Stammfunktion, ist das Ergebnis numerisch.

Eingabe

`länge(x^(3/2), 0, 4)`	Die Bogenlänge auf einem Intervall.

Beispiele

Die Länge eines Halbkreises.

Eingabe: `sqrt(1 - x^2)` Bogenlänge, Grenzen −1 und 1

Ergebnis

$$l = \pi \approx 3{,}1416$$

Lösungsweg

- Die Bogenlänge

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

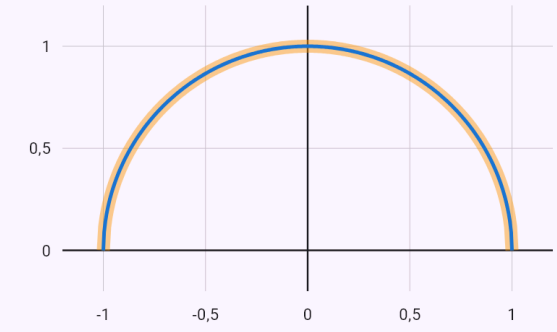
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$$

- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x - \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graph



$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Der hervorgehobene Bogen – seine Länge ist das Ergebnis.

Volumen eines Rotationskörpers

Das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse berechnet die App mit der Formel V = π∫f² dx (zwischen zwei Kurven als Kreisringe), um die y-Achse mit der Zylindermantelmethode. Den Körper zeigt sie auch in 3D – drehen Sie ihn mit dem Finger.

Eingabe

`volumen(sqrt(x), 0, 4)`	Das Volumen des Körpers bei Rotation um die x-Achse.
`volumen(x^2, 0, 2, y)`	Rotation um die y-Achse.

Beispiele

Ein Rotationsparaboloid.

Eingabe: `sqrt(x)` Volumen eines Körpers, Grenzen 0 und 4

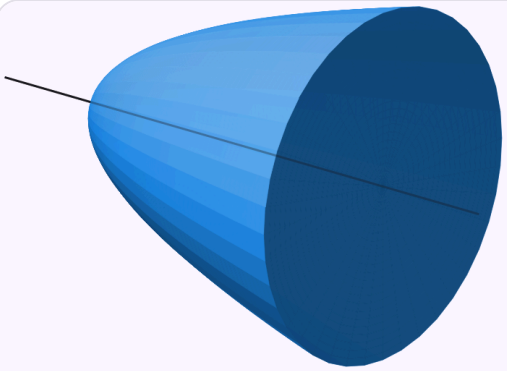
Ergebnis

$$V = 8\pi \approx 25{,}1327$$

Lösungsweg

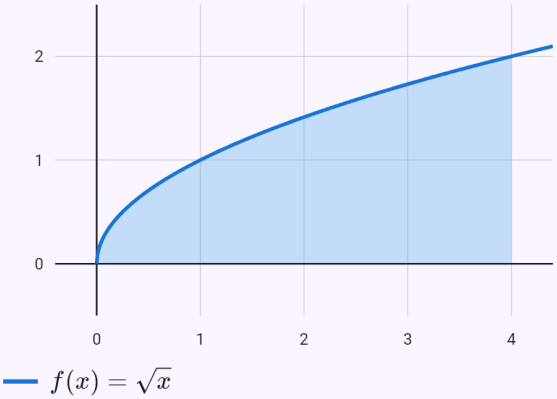
- Das Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a): $\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor: $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die Mantelfläche berechnet die App mit der Formel S = 2π∫f√(1 + f′²) dx; das Produkt unter der Wurzel vereinfacht sich oft (bei der Kugel ergibt sich eine Konstante).

Eingabe

`oberfläche(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`	Die Mantelfläche bei Rotation um die x-Achse.

Beispiele

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius 2.

Eingabe: `sqrt(4 - x^2)` Oberfläche eines Körpers, Grenzen −2 und 2

Ergebnis

$$S = 16\pi \approx 50{,}2655$$

Lösungsweg

- Die Mantelfläche des Rotationskörpers um die x-Achse

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x}}$$

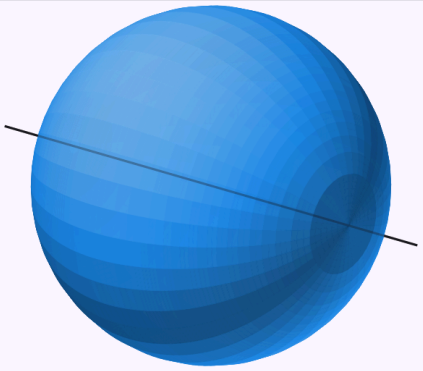
$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2}$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2\,dx = 2x$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a):

$$\int_{-2}^{2} 2\,dx = [2x]_{-2}^{2} = 4 - (-4) = 8$$

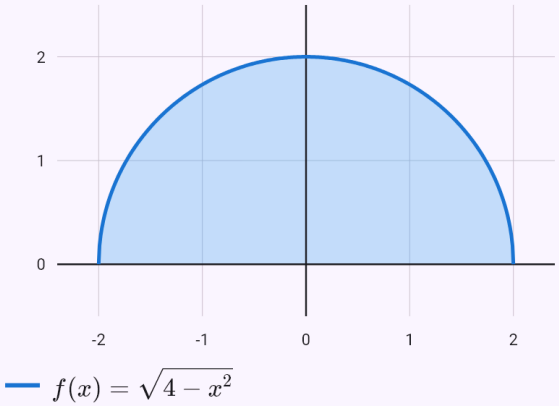
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor:
  $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



Anwendungen mit Parametern

Jeder Buchstabe außer x ist ein positiver Parameter, das Ergebnis eine Formel, etwa das Kugelvolumen 4πr³/3. Numerische Kontrollen laufen mit eingesetzten Werten. Graph und 3D-Körper haben einen Regler je Parameter.

Eingabe

`objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`	Volumen der Kugel mit Radius r.

Beispiele

Volumen der Kugel mit Radius r.

Eingabe: `objem(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Ergebnis

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Lösungsweg

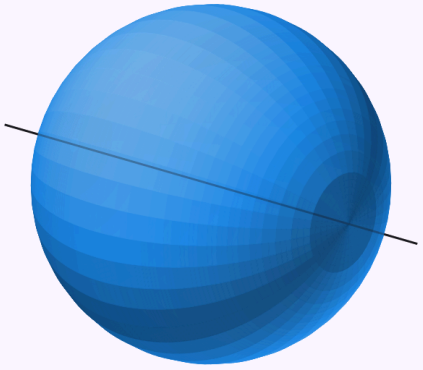
- Andere Buchstaben als die Variable sind positive Parameter: $r > 0$
- Das Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse,
  $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$
  $V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:
  $\int \left(r^2 - x^2\right) dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int r^2\,dx = r^2 x$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + r^2 x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor:
  $V = \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Werte der Parameter

$r = 1$

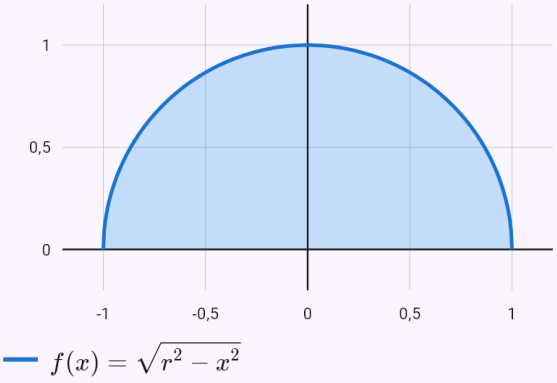
$V \approx 4{,}189$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



Kegelstumpf mit Radien a, b und Höhe h.

Eingabe: `objem(a+(b-a)*x/h, 0, h)`

Ergebnis

$$V = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Lösungsweg

- Andere Buchstaben als die Variable sind positive Parameter: $a > 0,\ b > 0,\ h > 0$
- Das Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse, $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$: $V = \pi \int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt

$$\int \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \frac{h\left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^3}{3(b-a)}$$

- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_0^h \left(\frac{(b-a)x}{h} + a\right)^2 dx = \left[\frac{(-ax + bx + ah)^3}{3h^2(b-a)}\right]_0^h = \frac{}{3}$$

- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor

$$V = \pi \cdot \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{\pi h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Werte der Parameter

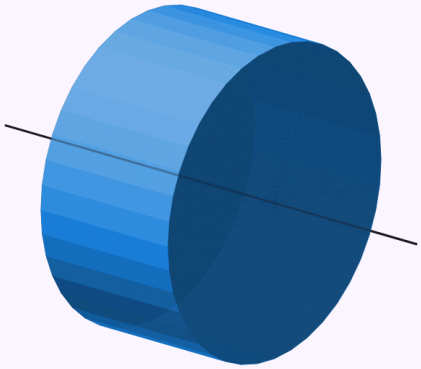
$a = 1$

$b = 1$

$h = 1$

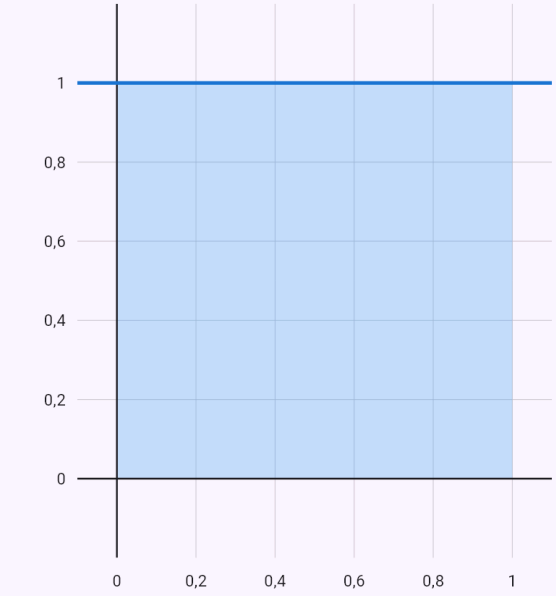
$V \approx 3{,}142$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



$f(x) = \frac{(b-a)x}{h} + a$

Schwerpunkt

Der Schwerpunkt einer Fläche unter oder zwischen Kurven, eines Bogens und eines Rotationskörpers wird mit Integralen samt Lösungsweg berechnet und im Graph markiert. Buchstaben wirken als Parameter.

Eingabe

`teziste(x^2, 0, 1)`	Fläche unter der Kurve; eine zweite Funktion ergibt die Fläche zwischen Kurven.

`teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r, oblouk)`	Das letzte Wort oblouk oder teleso wählt Bogen oder Rotationskörper.

Beispiele

Schwerpunkt des Halbkreises 4r/(3π).

Eingabe: `teziste(sqrt(r^2-x^2), -r, r)`

Ergebnis

$$T\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$$

Lösungsweg

- Andere Buchstaben als die Variable sind positive Parameter: $r > 0$
- Den Schwerpunkt berechnen wir mit Integralen
  $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b x\, f(x)\, dx$
  $y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\, dx$
- Wir berechnen das Integral: $S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Eine Wurzel aus einer Differenz von Quadraten – die trigonometrische Substitution $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\, dt$, die Wurzel $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$:
  $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int r^2\cos^2 t\, dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int r^2\cos^2 t\, dt = r^2\int \cos^2 t\, dt$
- Wir verwenden die Formel $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:
  $x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left($
- Wir berechnen das Integral: $M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$
- Substitution $t = r^2 - x^2$, $dt = -2x\, dx$:
  $\int x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{\sqrt{t}}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:
  $x = -r \Rightarrow t = 0, \quad x = r \Rightarrow t = 0$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^0 = 0-0=0$$

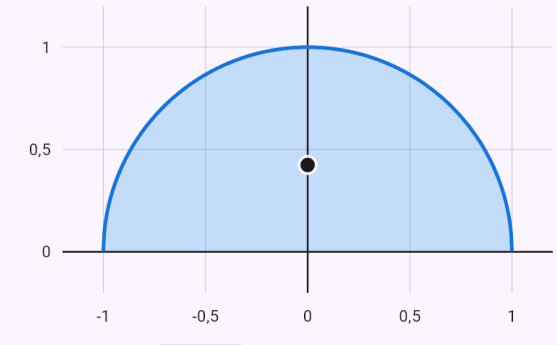
- Wir berechnen das Integral: $M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:
  $\int\left(r^2-x^2\right)dx = \int -x^2\,dx + \int r^2\,dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int r^2\,dx = r^2x$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)$
- Die Koordinaten des Schwerpunkts sind Quotienten der Integrale
  $x_T = \frac{M_y}{S} = 0$
  $y_T = \frac{M_x}{S} = \frac{4r}{3\pi}$

Werte der Parameter

$r = 1$

$T \approx [0;\,0{,}424]$

Graph



$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

Der Punkt T ist der Schwerpunkt.

Schwerpunkt des Kegels bei 3/4 der Höhe ab der Spitze.

Eingabe: `teziste(r*x/h, 0, h, teleso)`

Ergebnis

$$T\left[\frac{3h}{4};\ 0\right]$$

Lösungsweg

- Andere Buchstaben als die Variable sind positive Parameter: $h > 0,\ r > 0$
- Den Schwerpunkt berechnen wir mit Integralen

$$x_T = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\, dx}{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$
$$y_T = 0$$

- Wir berechnen das Integral: $J = \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^2\, dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{hr^2}{3} - 0 = \frac{hr^2}{3}$$

- Wir berechnen das Integral: $M_y = \int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \frac{r^2}{h^2}\int x^3\, dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

$$\int_0^h \frac{r^2x^3}{h^2}\, dx = \left[\frac{r^2x^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{h^2r^2}{4} - 0 = \frac{h^2r^2}{4}$$

- Die Koordinaten des Schwerpunkts sind Quotienten der Integrale

$$x_T = \frac{M_y}{J} = \frac{3h}{4}$$
$$y_T = 0$$

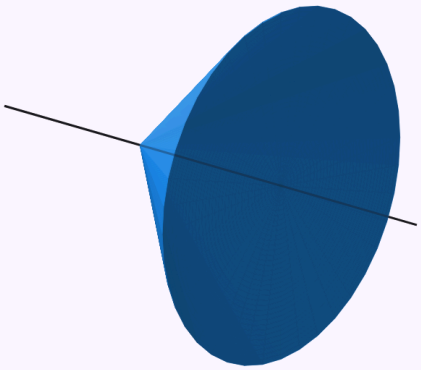
Werte der Parameter

$h = 1$

$r = 1$

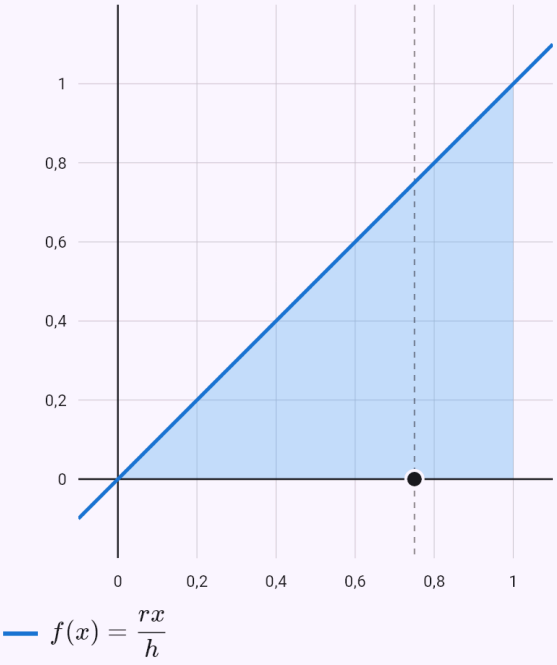
$T \approx [0{,}75;\ 0]$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



Der Punkt T ist der Schwerpunkt.

Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten

Eine Kurve x = φ(t), y = ψ(t) schreiben Sie auf zwei Zeilen, eine Kurve in Polarkoordinaten als r = ρ(φ). Der Chip „Integrieren“ bietet dann Fläche, Länge, Volumen und Mantelfläche an; die Grenzen des Parameters sind optional (ohne sie von 0 bis 2π). Der Graph färbt die Fläche ein, Volumen und Mantel erscheinen als 3D-Körper. Gedreht wird um die x- oder y-Achse, für die y-Achse als letztes Argument y.

Eingabe

`x = t - sin(t)` `y = 1 - cos(t)`	Eine Kurve in Parameterform auf zwei Zeilen.
`r = 1 + cos(phi)`	Eine Kurve in Polarkoordinaten (auch r^2 = … für eine Lemniskate).
`länge(x=cos(t)^3, y=sin(t)^3, t, 0, 2pi)`	Die geschriebene Form mit Parameter und Grenzen.

Beispiele

Die Fläche unter einem Zykloidenbogen.

Eingabe: `x = t - sin(t)`

`y = 1 - cos(t)` Fläche

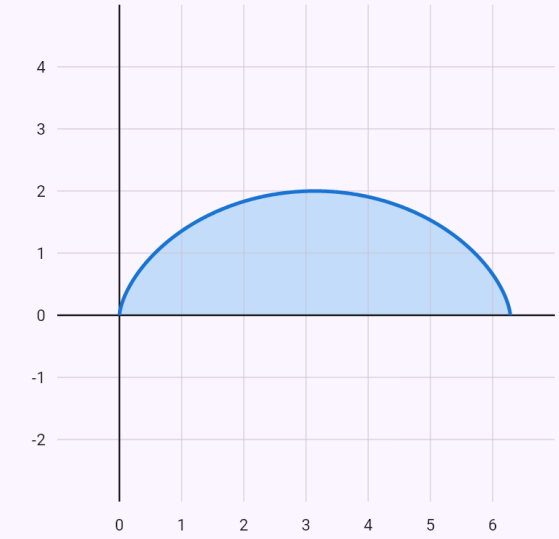
Ergebnis

$$S = 3\pi \approx 9{,}4248$$

Lösungsweg

- Die Ableitungen nach dem Parameter:
  $x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$
- Der Flächeninhalt unter einer Parameterkurve (bei einer geschlossenen Kurve innerhalb) für $t \in [0;\ 2\pi]$,
  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$:
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt \right|$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \int 1\, dt + \int -2\cos t\, dt$ -
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1\, dt = t$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -2\cos t\, dt = -2 \int \cos t\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t\, dt = \sin t$
- Wir verwenden die Formel $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) – F(a)
  $\int_{0}^{2\pi} \left(-2\cos t + \cos^2 t + 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin(2t}{4}\right.$

Graph



$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

Die parametrisch (oder in Polarkoordinaten) gegebene Kurve, gezeichnet für die gewählten Grenzen des Parameters.

Die Länge einer Kardioide.

Eingabe: `r = 1 + cos(phi)` Bogenlänge

Ergebnis

$$l = 8$$

Lösungsweg

- Die Ableitungen nach dem Parameter: $\rho'(\varphi) = -\sin\varphi$
- Die Länge einer Kurve in Polarkoordinaten für $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$

  $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\varphi + 1)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$
- Wir teilen das Intervall an den Nullstellen der Ausdrücke im Betrag (π) und lösen den Betrag in jedem Teil nach dem Vorzeichen auf

  $\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos$
- Die Konstante vor das Integral gezogen

  $\int 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

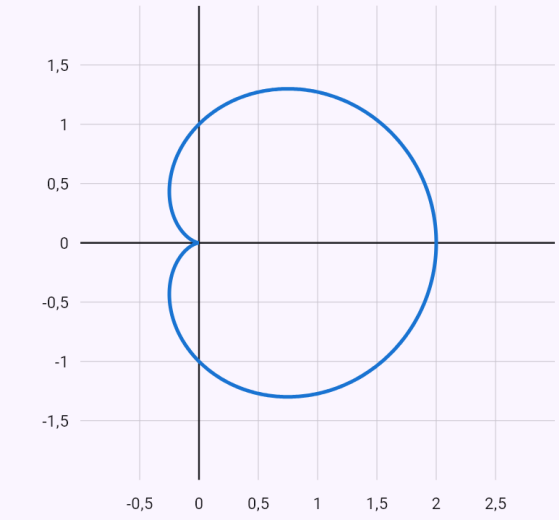
  $\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$
- Die Konstante vor das Integral gezogen

  $\int -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)

  $\int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[-4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) =$
- Die Werte der Teile addiert:

  $\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4 + 4 = 8$

Graph



$r = \cos\varphi + 1$

Die parametrisch (oder in Polarkoordinaten) gegebene Kurve, gezeichnet für die gewählten Grenzen des Parameters.

Astroide, um die y-Achse gedreht.

Eingabe: `x = cos(t)^3`

```
y = sin(t)^3
```

Ergebnis

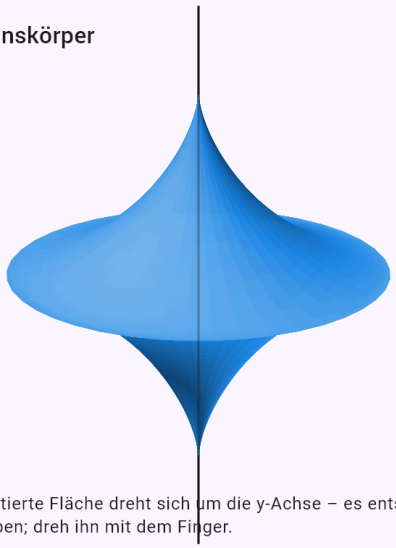
$$V = \frac{32\pi}{105} \approx 0{,}9574$$

Lösungsweg

- Die Ableitungen nach dem Parameter:
  $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$
- Den Körper erzeugt der Teil der Kurve rechts der y-Achse (x ≥ 0): $t \in \left[0;\, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};\, 2\pi\right]$
- Volumen des Rotationskörpers um die y-Achse für
  $t \in [0;\, 2\pi]$, $V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \right|$
  $V = \pi \left(\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt \right| \right)$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Eine ungerade Potenz – die Substitution $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^6\, dw = \frac{w^7}{7}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -3w^4\, dw = -3 \int w^4\, dw$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^4\, dw = \frac{w^5}{5}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^2\, dw = \frac{w^3}{3}$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:
  $t = 0 \Rightarrow w = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 1$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3\cos^7 t \sin^2 t\, dt = 3 \int \cos^7 t \sin^2 t\, dt$
- Eine ungerade Potenz – die Substitution $w = \sin t$,
  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$
  $dw = \cos t\, dt$
  $\int \cos^7 t \sin^2 t\, dt = \int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(-w^8 + 3w^6 - 3w^4 + w^2\right) dw = \int -w^8\, dw + \int 3w$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -w^8\, dw = -\int w^8\, dw$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^8\, dw = \frac{w^9}{9}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int 3w^6\, dw = 3 \int w^6\, dw$

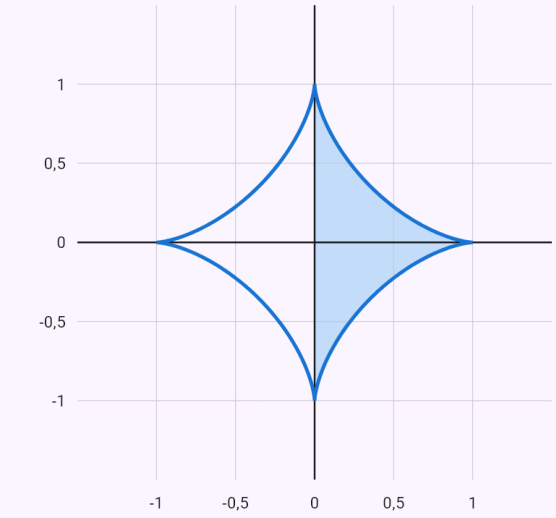
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^6\,dw = \frac{w^7}{7}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -3w^4\,dw = -3\int w^4\,dw$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int w^2\,dw = \frac{w^3}{3}$
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig: $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow w = -1, \quad t = 2\pi \Rightarrow w = 0$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos^7 t \sin^2 t\,dt = \left[3\left(-\frac{w^9}{9} + \frac{3w^7}{7} - \frac{3w^5}{5} + \frac{w^3}{3}\right)\right.$
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor: $V = \pi \cdot \frac{32}{105} = \frac{32\pi}{105}$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die y-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

Die parametrisch (oder in Polarkoordinaten) gegebene Kurve, gezeichnet für die gewählten Grenzen des Parameters.

Durch eine Gleichung gegebene Kurven

Bei einer Gleichung in x und y (x³ + y³ = 3xy) bietet der Chip „Integrieren“ Fläche, Länge, Volumen und Mantelfläche an. Ohne Grenzen nimmt er die ganze geschlossene Kurve: Kreis und Ellipse in Parameterform über cos und sin, eine Schleife durch den Ursprung (das kartesische Blatt) über die Geraden y = tx – den Flächeninhalt der Schleife dann exakt aus den Sektoren, Länge, Volumen und Mantelfläche numerisch. Mit Grenzen in x verwendet er den oberen Zweig y = f(x).

Eingabe

`x^3 + y^3 = 3xy`	Eine geschlossene Kurve – der Chip „Integrieren“ ohne Grenzen.

`y^2 = x^3`	Eine nicht geschlossene Kurve – der Chip „Integrieren“ mit Grenzen in x (der obere Zweig y = x^(3/2)).

Beispiele

Der Flächeninhalt der Schleife des kartesischen Blatts – über die Geraden y = tx und die Sektoren, S = 3/2.

Eingabe: `x^3 + y^3 = 3xy` Integrieren → Fläche

Ergebnis

$$S = \frac{3}{2}$$

Lösungsweg

- Die Schleife durch den Ursprung in Parameterform über die Geraden y = tx – in die Gleichung eingesetzt, x ausgedrückt

$$y = tx \;\Rightarrow\; x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}, \quad t \in \langle 0;\, \infty)$$

- Der Flächeninhalt der Schleife aus den Sektoren vom Ursprung: S = ½∫(x·y' − y·x') dt, auf der Geraden y = tx ist x·y' − y·x' = x²

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \frac{9}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt$$

- Substitution $u = t^3+1,\ du = 3t^2\,dt$:

$$\int \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{3u^2}\,du$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{1}{3u^2}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen:

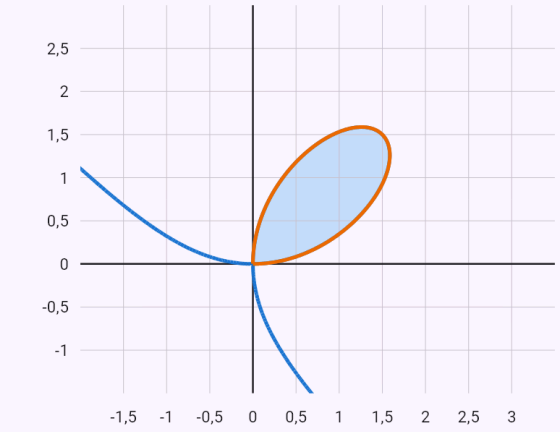
$$-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)}$$

- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte

sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2\left(t^3+1\right)^2}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2\left(t^3+1\right)}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Graph



$x^3 + y^3 = 3xy$

$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}$

Die ganze durch die Gleichung gegebene Kurve; hervorgehoben ist der Teil, mit dem gerechnet wird.

Fläche der Lemniskate – über Polarkoordinaten.

Eingabe: `(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2`

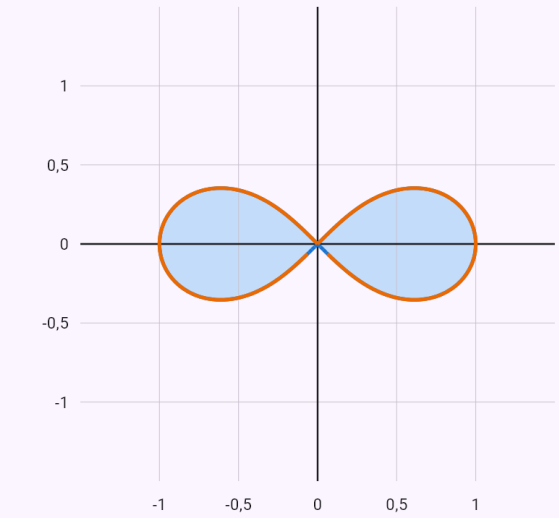
Ergebnis

$$S = 1$$

Lösungsweg

- Wir schreiben die Kurve in Polarkoordinaten
  $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho^2 = \cos(2\varphi)$
- Der Flächeninhalt, den eine Kurve in Polarkoordinaten begrenzt (die Sektoren vom Ursprung aufsummiert), für $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$, $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$
  $S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos(2\varphi)}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{\sin(2\varphi)}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
- Die Kurve hat gleiche Schleifen (2), der Wert einer Schleife wird mit ihrer Anzahl multipliziert: $2 \cdot 1$
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor:
  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Graph



$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$

$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

Die ganze durch die Gleichung gegebene Kurve; hervorgehoben ist der Teil, mit dem gerechnet wird.

Gedrehte Ellipse mit xy-Term.

Eingabe: `x^2+x*y+y^2 = 1`

Ergebnis

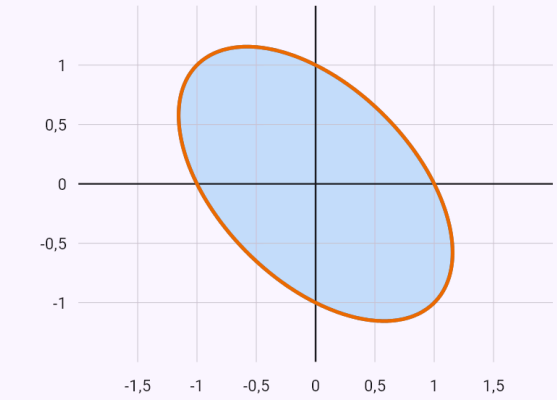
$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Lösungsweg

- Die Kurve ist eine gedrehte Ellipse – die Achsen folgen aus dem Drehwinkel, parametrisch
  $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \quad x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t, \quad y = \frac{\sqrt{3}\cos$
- Die Ableitungen nach dem Parameter:
  $x'(t) = -\cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}, \quad y'(t) = \cos t - \frac{\sqrt{3}\sin t}{3}$
- Der Flächeninhalt unter einer Parameterkurve (bei einer geschlossenen Kurve innerhalb) für $t \in [0;\, 2\pi]$,
  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt \right|$
  $S = \left| \int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) d$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3} \right) dt = \int -$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \cos^2 t\, dt$
- Wir verwenden die Formel $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$:
  $\int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{4\cos t \cdot \sin t}{3}\, dt = -\frac{4}{3} \int \cos t \cdot \sin t\, dt$
- Wir verwenden die Formel $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:
  $\int \cos t \cdot \sin t\, dt = \int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int \sin(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \sin(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int \sin^2 t\, dt$

- Wir verwenden die Formel $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$:
  $\int \sin^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
  $\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2}\, dt = \frac{t}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{\cos(2t)}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), F(b) − F(a)
  $\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}\cos^2 t}{3} - \frac{4\cos t \cdot \sin t}{3} - \frac{\sqrt{3}\sin^2 t}{3}\right) dt = \left[$
- Das Integral ist negativ (die Kurve wird von rechts nach links durchlaufen) – wir nehmen seinen Betrag:
  $S = \left|-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

Graph



$x^2 + xy + y^2 = 1$

$x = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} - \sin t,\ y = \frac{\sqrt{3}\cos t}{3} + \sin t$

Die ganze durch die Gleichung gegebene Kurve; hervorgehoben ist der Teil, mit dem gerechnet wird.

Bekannte Einschränkungen

- Die Bogenlänge von y = ∛x (und ähnlichen Kurven) berechnen wir nur numerisch – sie führt auf ein elliptisches Integral, das keine elementare Stammfunktion hat.
- Rotation um die y-Achse nur für einen Bereich auf einer Seite der Achse.
- Eine Formel mit Parametern gibt es nur, wenn das Ergebnis nicht vom Verhältnis der Parameter abhängt; wechselt das Vorzeichen je nach Werten, gibt die App keine Formel an.
- Bei impliziten Kurven ohne Grenzen gehen Kegelschnitte (auch mit xy-Term), eine Schleife durch den Ursprung und Kurven mit zwei homogenen Teilen (Lemniskate).
- Bestimmtes Integral mit Parameter bisher nur mit endlichen Grenzen.
- Wenn das Grenzwertkriterium nicht entscheidet (der Integrand oszilliert im Unendlichen, etwa cos x/(x + ln x)), gibt die App ohne Konvergenzbeweis keinen Wert an und meldet das Integral als noch nicht gelöst.

32. Unendliche Reihen

Bei einer Zahlenreihe prüft die App zuerst das notwendige Konvergenzkriterium (Nullfolge) und wählt dann ein Kriterium nach der Form der Reihe – geometrische Reihe, $\Sigma\, 1/n^p$, Quotienten-, Wurzel-, Grenzwertvergleichs-, Integral- oder Leibniz-Kriterium; bei einer alternierenden Reihe unterscheidet sie absolute und bedingte Konvergenz. Wo es geht, summiert sie die Reihe. Der Graph zeigt die Glieder und die Partialsummen.

Zahlenreihen

Die Summe findet die App bei geometrischen und Teleskopreihen, bei Reihen $\Sigma\, P(n)q^n$ und bei bekannten Reihen ($\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$); sonst berechnet sie sie numerisch. Eine endliche Summe wird wie in der Schule berechnet – Teleskopsumme, arithmetisch, geometrisch, sonst Glied für Glied. Auch eine Gleichung mit der Summe einer geometrischen Reihe wird gelöst und die Konvergenzbedingung $|q| < 1$ geprüft.

Eine Summe bis zu einem Buchstaben (sum(k^2, k, 1, n)) mit den Formeln der Potenzsummen, eine geometrische mit ihrer Formel und ein rationales Glied mit Partialbrüchen (Teleskopsumme); das Ergebnis wird an den ersten Gliedern geprüft.

Eingabe

`summe(1/n^2)`	Das allgemeine Glied; der Index n ab 1 (auch sum).
`summe(1/n^2, n, 1, oo)`	Mit Index und Startwert.
`\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}`	Vom Foto oder in LaTeX.
`1/n^2`	Das allgemeine Glied mit dem Chip „Reihe“ – den Startindex in das Feld eintragen.
`summe(2k+1, k, 1, 100)`	Eine endliche Summe – mit Index, unterer und oberer Grenze.
`sum(k^2, k, 1, n)`	Eine Summe bis n – die Summenformel.

Beispiele

Die Reihe Σ 1/n² – konvergiert, Summe π²/6.

Eingabe: `sum(1/n^2)`

Ergebnis

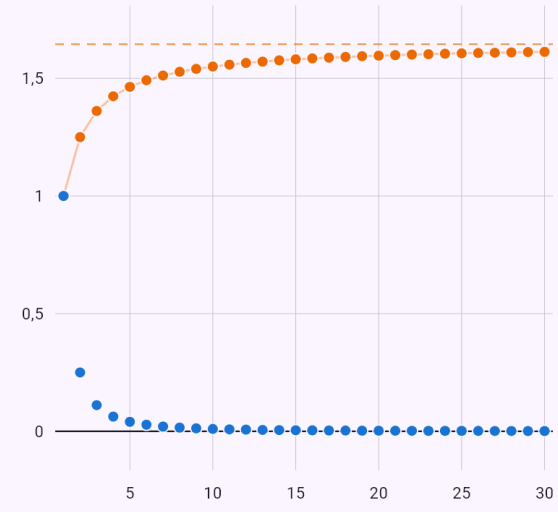
Die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist von der Form Σ 1/n^p mit p = 2 > 1 – sie konvergiert.
- Die Summe einer bekannten Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graph



Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen s_n = a_1 + … + a_n. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das Leibniz-Kriterium – bedingt konvergent.

Eingabe: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Ergebnis

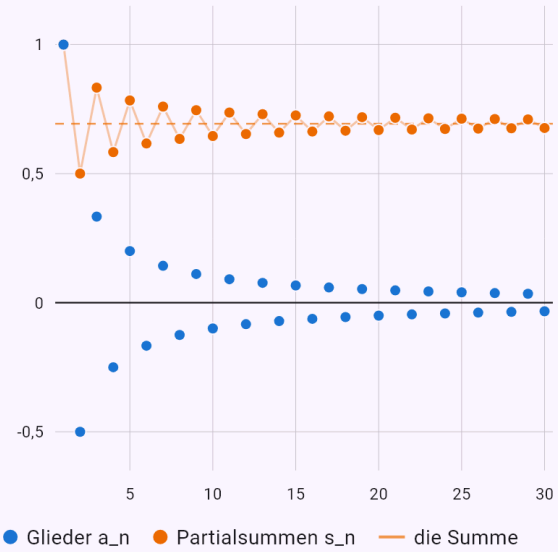
Die Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Die Glieder haben verschiedene Vorzeichen – zuerst die absolute Konvergenz
  $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- Die harmonische Reihe divergiert – die Glieder nach Zweierpotenzen gruppiert, jede Gruppe mindestens 1/2
  $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2}$
- Leibniz-Kriterium: |a_n| = $\frac{1}{n}$ fällt und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – die Reihe konvergiert.
- Ergebnis: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).
- Die Summe einer bekannten Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graph



Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen s_n = a_1 + … + a_n. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das Quotientenkriterium und die Summe.

Eingabe: `sum(n/2^n)`

Ergebnis

Die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

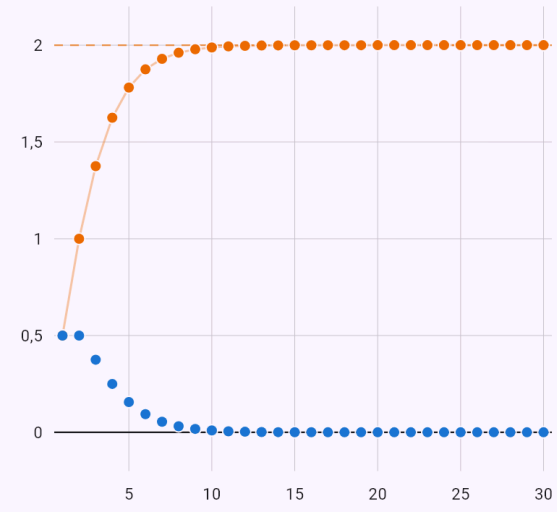
Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Quotientenkriterium (d'Alembert) – die Reihe konvergiert.

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Eine Reihe Σ P(n)·qⁿ, summiert durch Ableiten der geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$

Graph



Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen s_n = a_1 + … + a_n. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das notwendige Kriterium ist nicht erfüllt – die Reihe divergiert.

Eingabe: `sum(n/(n+1))`

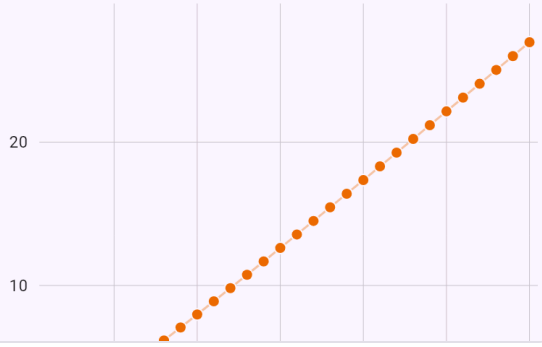
Ergebnis

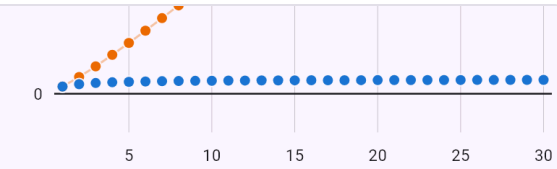
Die Reihe divergiert.

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist nicht erfüllt: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Graph





Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen s_n = a_1 + … + a_n. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Teleskopsumme – das erste und das letzte Glied bleiben.

Eingabe: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 10$$

Lösungsweg

- Teleskopsumme – benachbarte Glieder heben sich auf, nur das erste und das letzte bleiben: $\sum_{i=1}^{60} \left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = 11 - 1 = 10$

Gleichung mit der Summe einer geometrischen Reihe.

Eingabe: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Ergebnis

$$x = -1$$

Lösungsweg

- Die Reihe ist geometrisch mit q = 2^x und konvergiert für $|2^x| < 1$; ihre Summe: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Lösen: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \;\Rightarrow\; x = -1$
- $x = -1$ erfüllt die Konvergenzbedingung: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Die Summe der Quadrate mit der Formel.

Eingabe: `sum(k^2, k, 1, n)`

Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösungsweg

- Wir verwenden die Formeln für Potenzsummen: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Die Summe: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Eine Teleskopsumme bis n – Partialbrüche.

Eingabe: `sum(1/(k(k+1)), k, 1, n)`

Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Lösungsweg

- Wir zerlegen das Glied in Partialbrüche – ihre Teile heben sich in der Summe nacheinander auf (Teleskopsumme): $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
- Die Summe: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Potenzreihen

Bei einer Potenzreihe bestimmt die App den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium, untersucht die Randpunkte als Zahlenreihen und gibt den Konvergenzbereich an; wo es geht, auch die Summe. Der Graph zeigt die Partialsummen mit einem Schieberegler für die Anzahl der Glieder.

Beispiele

Der Konvergenzbereich [−1; 1).

Eingabe: `sum(x^n/n)`

Ergebnis

$$x \in [-1;\ 1)$$

Lösungsweg

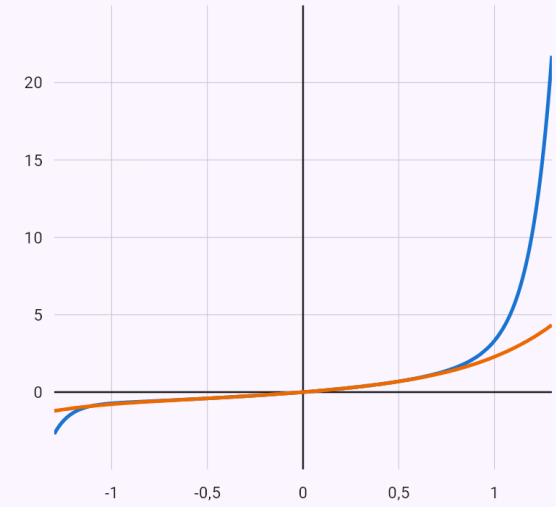
- Der Konvergenzradius R = 1 mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$$

- Der Randpunkt $x = -1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).
- Der Randpunkt $x = 1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert nach der Gruppierung der Glieder der harmonischen Reihe.
- Das Konvergenzintervall: $x \in [-1;\ 1)$

Graph

Glieder: 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Wähle mit dem Schieberegler die Anzahl der Glieder – die Partialsummen nähern sich der Summe nur im Konvergenzintervall.

Taylorreihe

Die Taylorreihe einer Funktion leitet die App aus bekannten Entwicklungen (e^x, sin x, ln(1 + x), …) durch Einsetzen her und bestimmt ihren Konvergenzbereich.

Eingabe

`taylor(e^x, 0, oo)`	Funktion, Stelle und oo statt des Grades; oder der Chip „Taylorpolynom“ → „Reihe“.

Beispiele

Die Reihe von ln(1 + x) und ihr Konvergenzbereich.

Eingabe: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Ergebnis

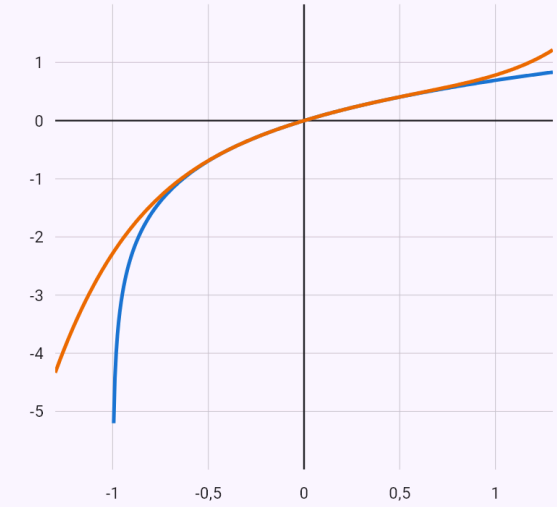
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Lösungsweg

- Aus der bekannten Entwicklung
  $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ mit $u = x$:
  $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Der Konvergenzradius R = 1 mit dem Quotientenkriterium
  $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{xn}{n+1}\right| = |x| < 1$
- Der Randpunkt $x = -1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ divergiert nach der Gruppierung der Glieder der harmonischen Reihe.
- Der Randpunkt $x = 1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).
- Das Konvergenzintervall: $x \in (-1;\ 1]$

Graph

Glieder: 5



$s(x) = \ln(x+1)$

$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Wähle mit dem Schieberegler die Anzahl der Glieder – die Partialsummen nähern sich der Summe nur im Konvergenzintervall.

33. Fourierreihen

Die App stellt die Fourierreihe einer Funktion auf einem Intervall als einer Periode auf (ohne Angabe auf $[-\pi; \pi]$) oder die Sinus- bzw. Kosinusreihe einer Funktion auf $[0; L]$. Die Funktion kann auch stückweise gegeben sein.

Die Koeffizienten berechnet sie über Integrale mit vollständigem Lösungsweg (partielle Integration mit dem Parameter n), setzt $\sin n\pi = 0$ und $\cos n\pi = (-1)^n$ ein und nutzt bei geraden und ungeraden Funktionen die Symmetrie. An Sprungstellen bestimmt sie die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet, und durch Einsetzen eines Punktes und mit der Parsevalschen Gleichung leitet sie Summen von Zahlenreihen her (etwa $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$). Der Graph zeigt die periodische Fortsetzung der Funktion und die Partialsummen mit einem Schieberegler.

Mit dem Chip „Komplex“ (oder fourierc) zeigt die App die Reihe auch in komplexer Form: Koeffizienten c_n, ihren Zusammenhang mit a_n und b_n sowie Amplituden- und Phasenspektrum.

Eingabe

`fourier(x^2, -pi, pi)`	Funktion und Intervall.
`fouriersin(x, 0, pi)`	Die Sinusreihe (fouriercos – die Kosinusreihe).
`-1, -pi < x < 0` `1, 0 < x < pi`	Eine stückweise Funktion zeilenweise, mit dem Chip „Fourierreihe“.
`x^2`	Eine Funktion mit dem Chip „Fourierreihe“ – Art der Reihe und Intervall wählen Sie dort.

Beispiele

Eine gerade Funktion – nur Kosinusse; die Summen Σ 1/n² und Σ 1/n⁴.

Eingabe: `fourier(x^2)`

Ergebnis

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

Lösungsweg

- Das Intervall $[-\pi;\ \pi]$ ist eine Periode: $T = 2\pi$, die halbe Periode $l = \pi$. Wir suchen die Reihe mit den Koeffizienten

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Die Funktion ist gerade, $f(-x) = x^2 = f(x)$, also sind die Sinuskoeffizienten null und die übrigen genügt es über das halbe Intervall zu berechnen

  $$b_n = 0$$
  $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Der Koeffizient a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$

- Wir setzen die Grenzen ein: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

- Der Koeffizient a_n: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$

- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x^2, v' = $\cos(nx)$, also u' = $2x$, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$

  $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $$\int \frac{2x \sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx)\, dx$$

- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, also u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $$\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Wir setzen die Grenzen ein

  $$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{-}$$

- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Die periodische Fortsetzung der Funktion ist stetig, also ist die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet gleich f(x) für $x \in [-\pi;\, \pi]$
- Einsetzen von $x = 0$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Einsetzen von $x = \pi$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

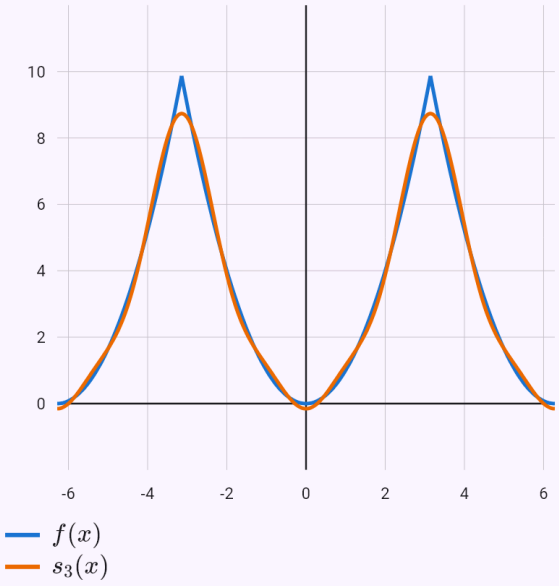
- Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graph

Glieder bis n = 3



Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Eine stückweise Funktion – Sprünge und das Gibbs-Phänomen.

Eingabe: `-1, -pi < x < 0`

`1, 0 < x < pi` Fourierreihe

Ergebnis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)x\right)$$

Lösungsweg

- Das Intervall $[-\pi;\ \pi]$ ist eine Periode: $T = 2\pi$, die halbe Periode $l = \pi$. Wir suchen die Reihe mit den Koeffizienten

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Die Funktion ist ungerade, $f(-x) = -f(x)$, also sind das konstante Glied und die Kosinuskoeffizienten null und die Sinuskoeffizienten genügt es über das halbe Intervall zu berechnen

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Der Koeffizient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Wir setzen die Grenzen ein

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$$

- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$$

- Die Glieder mit geradem n sind null – es bleiben nur die ungeraden n = 2k − 1

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$$

- Nach dem Satz von Dirichlet ist die Summe der Reihe gleich f(x) für $x \in (-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi)$; an einer Unstetigkeitsstelle ist sie der Mittelwert der einseitigen Grenzwerte

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$
$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

- Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

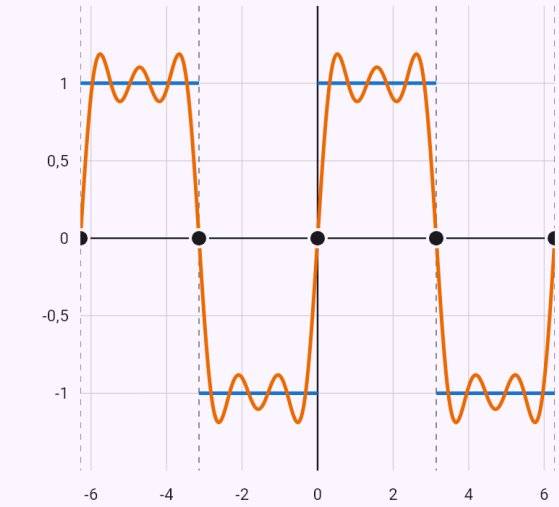
- Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Graph

Glieder bis n = 5



$f(x)$
$s_5(x)$

Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Eine Sinusreihe und die Summe 1 − 1/3³ + 1/5³ − … = π³/32.

Eingabe: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Ergebnis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right.$$

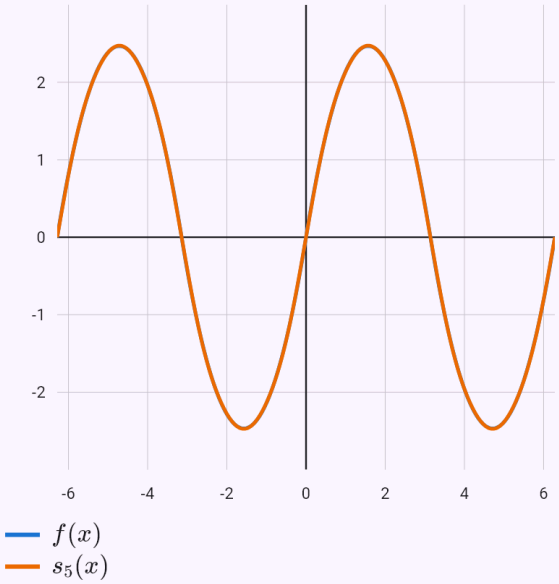
Lösungsweg

- Wir setzen die Funktion von $[0;\ \pi]$ ungerade und dann periodisch fort ($T = 2\pi$) – es entsteht die Sinusreihe
  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, wobei
  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$
- Der Koeffizient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\, dx$
- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $x(\pi - x)$, v' = $\sin(nx)$, also u' = $\pi - 2x$, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$
  $\int x(\pi - x) \sin(nx)\, dx = \frac{x(x-\pi)\cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x$
- Die Konstante vor das Integral gezogen
  $\int \frac{(2x-\pi)\cos(nx)}{n}\, dx = \frac{1}{n} \int (2x-\pi)\cos(nx)\, dx$
- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = $2x - \pi$, v' = $\cos(nx)$, also u' = 2, v = $\frac{\sin(nx)}{n}$
  $\int (2x-\pi)\cos(nx)\, dx = \frac{(2x-\pi)\sin(nx)}{n} - \int \frac{2\sin$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int \frac{2\sin(nx)}{n}\, dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx)\, dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \sin(nx)\, dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$
- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$
- Wir setzen die Grenzen ein
  $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(nx)}{n} - \frac{\pi x\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx$
- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein:
  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi} \sin(nx)$
- Die Glieder mit geradem n sind null – es bleiben nur die ungeraden n = 2k − 1
  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin\left((2k-1)x\right)$

- Die periodische Fortsetzung der Funktion ist stetig, also ist die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet gleich f(x) für $x \in [0;\ \pi]$
- Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe
  $s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
- Aus der Parsevalschen Gleichung
  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ folgt
  $\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Graph

Glieder bis n = 5



$f(x)$
$s_5(x)$

Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Komplexe Form mit Spektrum.

Eingabe: `fourierc(x, -pi, pi)`

Ergebnis

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

$$c_0 = 0, \quad c_n = -i \, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Lösungsweg

- Das Intervall $[-\pi;\, \pi]$ ist eine Periode: $T = 2\pi$, die halbe Periode $l = \pi$. Wir suchen die Reihe mit den Koeffizienten

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Die Funktion ist ungerade, $f(-x) = -x = -f(x)$, also sind das konstante Glied und die Kosinuskoeffizienten null und die Sinuskoeffizienten genügt es über das halbe Intervall zu berechnen

  $$a_0 = a_n = 0$$
  $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Der Koeffizient b_n: $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$

- Partielle Integration (∫u·v' = u·v − ∫u'·v), u = x, v' = $\sin(nx)$, also u' = 1, v = $-\frac{\cos(nx)}{n}$

  $$\int x \sin(nx)\, dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
  $\int -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int \cos(nx)\, dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n$

- Wir setzen die Grenzen ein

  $$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein:

  $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

- Nach dem Satz von Dirichlet ist die Summe der Reihe gleich f(x) für $x \in (-\pi;\, \pi)$; an einer Unstetigkeitsstelle ist sie der Mittelwert der einseitigen Grenzwerte:

  $$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

- Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

  $$s(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

  $$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

  $$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Komplexe Form der Reihe: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$, wobei $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-inx}\, dx$. Zusammenhang mit der reellen Form

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \overline{c_n}$$

- Wir setzen die Koeffizienten der reellen Form ein

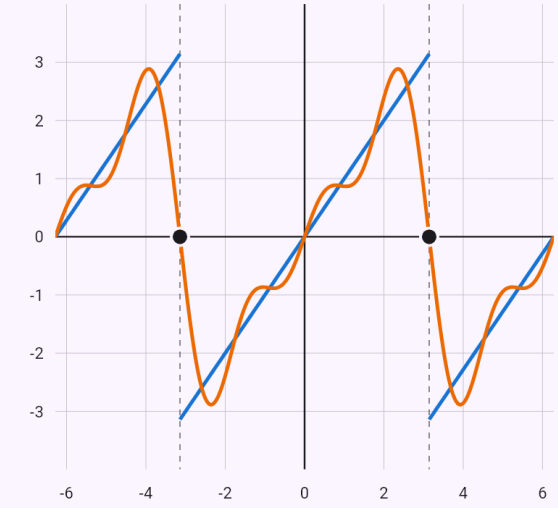
$$c_0 = 0$$

$$c_n = -i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \neq 0$$

$$c_{-n} = i\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

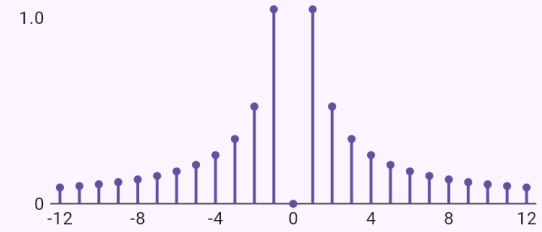
Graph

Glieder bis n = 3

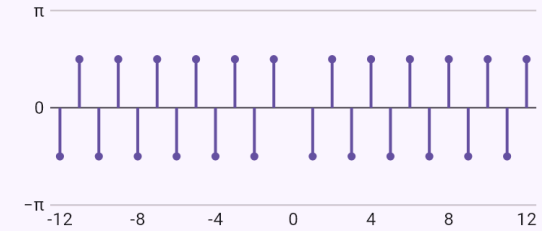


Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Amplitudenspektrum $|c_n|$



Phasenspektrum arg c_n



Auf der waagerechten Achse steht n. Die Höhe zeigt Betrag bzw. Winkel von c_n; Nullkoeffizienten haben keine Phase.

Bekannte Einschränkungen

- Eine am Rand des Intervalls unbeschränkte Funktion (ln x auf [0; 2π]) wird mit numerisch berechneten Koeffizienten entwickelt; im Punkt, wo sie über alle Grenzen wächst, gilt der Satz von Dirichlet nicht. Eine Funktion mit Polstelle (1/x) wird nicht entwickelt – sie ist nicht integrierbar.
- Führen die Koeffizienten auf ein Integral ohne elementare Stammfunktion (ln x auf [1; 3]), werden sie mit dem Integralsinus und Integralkosinus ausgedrückt.

Erzeugt aus der App Mathtrace