Mathtrace – Handbuch

IV. Differentialgleichungen und höhere Analysis

Inhalt

IV. Differentialgleichungen und höhere Analysis

34. Funktionalanalysis
35. Funktionen einer komplexen Variablen
36. Differentialgleichungen
37. Variationsrechnung
38. Partielle Differentialgleichungen
39. Rekursionen und erzeugende Funktionen
40. Numerische Verfahren

34. Funktionalanalysis

> *„Lineare Funktionalanalysis ist eigentlich lineare Algebra in unendlicher Dimension.“*
>
> – Prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc., in der Einführungsvorlesung

Der rechnerische Teil der linearen Funktionalanalysis. Die Norm eines Vektors schreiben Sie ||(1; -2; 3)||_p (p = 1, 2, ∞ oder eine andere Zahl; ohne Index berechnet die App alle drei), die Norm einer Folge im Raum ℓ^p ||1/n||_2 – die App summiert die Reihe $\Sigma|a_n|^p$, und divergiert sie, liegt die Folge nicht im Raum. Die L^p-Norm einer Funktion ist ||x^2||_{L^2(0; 1)}: Den Betrag beseitigt die App, indem sie das Integral an den Nullstellen der Funktion teilt. Die Supremumsnorm ||f||_{C⟨a; b⟩} ist der größte Wert von |f| aus den stationären Stellen und den Randpunkten. dist(f, g, ⟨a; b⟩) liefert den Abstand zweier Funktionen in der Supremumsnorm und in L^2, holder(...) und minkowski(...) prüfen die Höldersche und die Minkowski-Ungleichung an gegebenen Funktionen oder Vektoren.

Eine Funktionenfolge konvergenz(x^n, ⟨0; 1⟩) (oder f_n(x) = ..., x ∈ ⟨a; b⟩) untersucht die App in drei Schritten: den punktweisen Grenzwert stückweise (eine Potenz q^n geht für |q| < 1 gegen null), die gleichmäßige Konvergenz über $s_n = \sup |f_n - f|$ aus der stationären Stelle x_n (ein unstetiger Grenzwert stetiger Funktionen kann nicht gleichmäßig sein) und die Konvergenz in L^2 über $\int(f_n - f)^2$. Wo keine Formel herauskommt, schätzt die App Supremum und Integral numerisch. Der Graph hat einen Schieberegler über die Glieder f_1 bis f_{20}.

Das Skalarprodukt in L^2 mit Gewicht, inner(f, g, ⟨a; b⟩) (optional w = ...), liefert auch die Normen und den Winkel der Funktionen. gramschmidt(1, x, x^2; ⟨-1; 1⟩) führt das Gram-Schmidt-Verfahren aus und erkennt die klassischen Polynome: Legendre, Tschebyschow mit dem Gewicht $1/\sqrt{(1 - x^2)}$ oder $\sqrt{(1 - x^2)}$, Laguerre mit e^(−x) auf ⟨0; ∞⟩ und Hermite mit e^(−x²); es funktioniert auch für Vektoren. approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩) findet die Bestapproximation durch ein Polynom vom Grad n als Orthogonalprojektion, mit dem Fehler und der Besselschen Ungleichung. Die Parsevalsche Gleichung (und die Herleitung von $\Sigma\, 1/n^2 = \pi^2/6$) steht im Kapitel Fourierreihen.

Matrixnormen schreibt man ||[1 2; 3 4]||_1 (auch _2, _oo und _F für Frobenius; ohne Index berechnet die App alle), die Konditionszahl cond([1 2; 3 4]) (optional p = 1). opnorm(x t, ⟨0; 1⟩) berechnet die Norm eines Integraloperators mit dem Kern K(x, t): auf C⟨a; b⟩ als Maximum von ∫|K| dt, in L^2 exakt für einen ausgearteten Kern, sonst abgeschätzt durch die Hilbert-Schmidt-Norm. fnorm(g, ⟨a; b⟩) liefert die Norm des Funktionals $\varphi(u) = \int u \cdot g$ auf C und auf L^2 (Satz von Riesz), mit p = ... auf L^p.

Eine Integralgleichung 2. Art schreiben Sie so, wie Sie sie sehen: u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt (Fredholm) oder u(x) = 1 + ∫_0^x (x − t) u(t) dt (Volterra); auch vom Foto oder mit den Befehlen fredholm(K; f; λ; ⟨a; b⟩) und volterra(K; f; λ; a). Einen ausgearteten Kern führt die App auf ein lineares Gleichungssystem zurück; mit einem Parameter λ findet sie die charakteristischen Werte und Eigenfunktionen und entscheidet nach der Fredholmschen Alternative. Andere Kerne löst sie mit der Neumannschen Reihe

und dem Nyström-Verfahren, eine Volterrasche Gleichung mit einem Kern k(x − t) mit der Laplace-Transformation.

banach(cos x, ⟨0; 1⟩) prüft die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (g bildet das Intervall in sich ab, q = max |g′| < 1), berechnet die A-priori-Schrittzahl und iteriert mit der A-posteriori-Fehlerabschätzung (optional eps = ..., x0 = ...); banach(A, b) leistet dasselbe für das System x = Ax + b. picard(y' = x + y, y(0) = 1) liefert die Picard-Iteration mit dem Intervall, auf dem der Operator kontrahiert, und einer Fehlerschranke. Funktionalgleichungen vom Cauchyschen Typ – f(x + y) = f(x) + f(y), f(x + y) = f(x)f(y), f(xy) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), die Jensensche und die d'Alembertsche – löst die App mit Herleitung.

Eingabe

`||(1; 2)||_1, ||1/n||_2, ||f||_{L^2(a; b)}, ||f||_{C⟨a; b⟩}`	Normen eines Vektors, einer Folge (ℓ^p) und einer Funktion (L^p, C).
`dist(f, g, ⟨a; b⟩)`	Der Abstand zweier Funktionen in der Supremumsnorm und in L^2.
`holder(f, g, p, ⟨a; b⟩), minkowski(f, g, p, ⟨a; b⟩)`	Höldersche und Minkowski-Ungleichung.
`konvergenz(f_n, ⟨a; b⟩)`	Punktweise, gleichmäßige und L^2-Konvergenz einer Funktionenfolge.
`inner(f, g, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Skalarprodukt, Normen und Winkel von Funktionen.
`gramschmidt(1, x, x^2; ⟨a; b⟩; w = ...)`	Gram-Schmidt-Verfahren für Funktionen und Vektoren.
`approx(f, n, ⟨a; b⟩, w = ...)`	Bestapproximation durch ein Polynom vom Grad n.
`||[1 2; 3 4]||_1, ||A||_2, ||A||_oo, ||A||_F, cond(A)`	Matrixnormen 1, 2, ∞, Frobenius und die Konditionszahl.
`opnorm(K(x, t), ⟨a; b⟩), fnorm(g, ⟨a; b⟩)`	Die Norm eines Integraloperators und des Funktionals ∫u·g.
`u(x) = f(x) + λ∫_a^b K(x, t) u(t) dt`	Fredholmsche und Volterrasche Integralgleichungen 2. Art.

`banach(g, ⟨a; b⟩), banach(A, b), picard(y' = f, y(x0) = y0)`	Banachscher Fixpunktsatz und Picard-Iteration.
`f(x + y) = f(x) + f(y)`	Funktionalgleichungen vom Cauchyschen Typ.

Beispiele

Die Normen 1, 2 und ∞ eines Vektors.

Eingabe: `||(1; -2; 3)||`

Ergebnis

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 6,\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 3$$

Lösungsweg

- Die drei gebräuchlichsten Normen des Vektors $\mathbf{x} = (1;\ -2;\ 3)$: die Summe der Beträge der Komponenten ($\|\cdot\|_1$), die euklidische Länge ($\|\cdot\|_2$) und der größte Betrag einer Komponente ($\|\cdot\|_\infty$)

  $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$

  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}7417$

  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|,\ |-2|,\ |3|\} = 3$

‖1/n‖₂ = π/√6 – das Basler Problem.

Eingabe: `||1/n||_2`

Ergebnis

$$\|a\|_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$$

Lösungsweg

- Die Norm der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ im Raum ℓ² für p = 2: Wir summieren die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ und ziehen die Wurzel

  $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} \doteq 1{,}2825$

Die harmonische Reihe divergiert – 1/n liegt nicht in ℓ^1.

Eingabe: `||1/n||_1`

Ergebnis

Die Folge (Funktion) liegt nicht in diesem Raum – ihre Norm ist unendlich.

Lösungsweg

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ – die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ hat keine endliche Norm, sie liegt nicht im Raum ℓ^p für p = 1

Der Betrag durch Teilen des Integrals beseitigt.

Eingabe: `||x - 1/2||_{L^3(0; 1)}`

Ergebnis

$$\|f\|_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}315$$

Lösungsweg

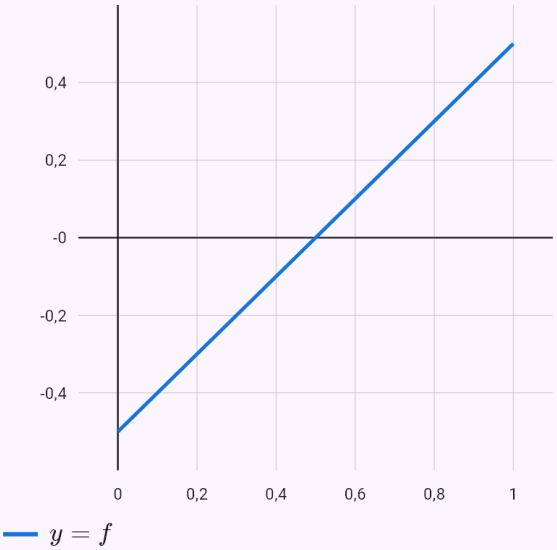
- Den Betrag beseitigen wir, indem wir das Integral an den Nullstellen der Funktion $x = \frac{1}{2}$ teilen – auf jedem Stück hat die Funktion ein festes Vorzeichen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx$$

- Die Norm im Raum L^p für p = 3: das Integral $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = \frac{1}{32}$, also

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}31$$

Graph



Die Funktion auf dem gegebenen Intervall.

Die Supremumsnorm aus den stationären Stellen und den Randpunkten.

Eingabe: `||x^3 - 3x||_{C⟨-2; 3⟩}`

Ergebnis

$$\|f\|_\infty = 18$$

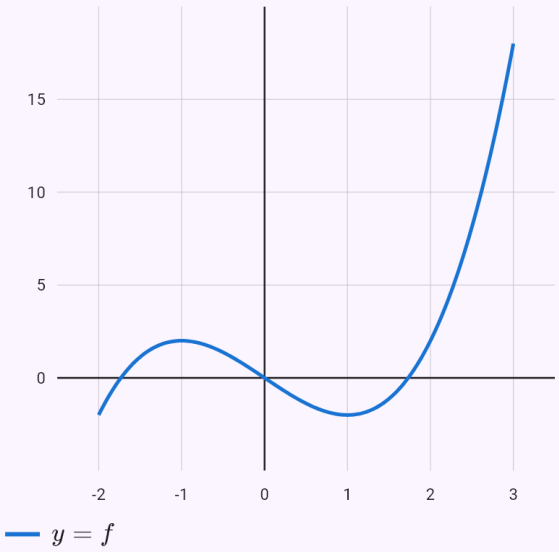
Lösungsweg

- Die Supremumsnorm einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist der größte Wert von |f|. Wir suchen ihn an den Randpunkten und an den stationären Stellen im Inneren: die Ableitung $f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$, die stationären Stellen $x = -1,\ x = 1$
- Die Werte von |f| an diesen Stellen

x	-2	-1	1	3
$\lvert f(x)\rvert$	2	2	2	18

- Der größte davon ist die Supremumsnorm
  $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle -2;\,3\rangle} |f(x)| = |f(3)| = 18$

Graph



Die Funktion auf dem gegebenen Intervall.

Der Abstand in der Supremumsnorm und in L².

Eingabe: `dist(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

$$\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{4}, \quad \rho_2(f,g) = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$$

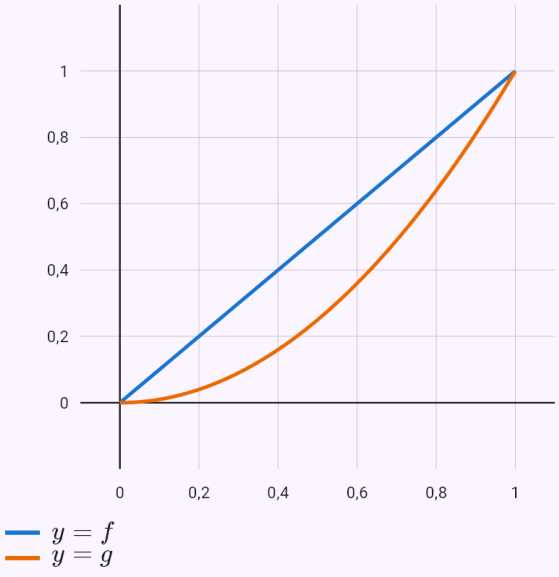
Lösungsweg

- Der Abstand zweier Funktionen ist die Norm ihrer Differenz: $f - g = x(1 - x)$
- Die Supremumsnorm einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist der größte Wert von |f|. Wir suchen ihn an den Randpunkten und an den stationären Stellen im Inneren: die Ableitung $(f - g)'(x) = 1 - 2x$, die stationären Stellen $x = \frac{1}{2}$
- Die Werte von |f| an diesen Stellen

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert(f-g)(x)\rvert$	0	$\frac{1}{4}$	0

- Der größte davon ist die Supremumsnorm
  $\|(f-g)\|_\infty = \max\limits_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |(f-g)(x)| = \left|(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$
- Die Norm im Raum L² für p = 2: das Integral
  $\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = \frac{1}{30}$, also
  $\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30} \doteq 0,$

Graph



Beide Funktionen auf dem gegebenen Intervall.

Höldersche Ungleichung mit dem konjugierten Exponenten q = 3/2.

Eingabe: `holder(x, 1 - x, 3, ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

$$\left|\int_0^1 f\,g\,dx\right| = \frac{1}{6} \le \|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} =$$

Lösungsweg

- Die Höldersche Ungleichung arbeitet mit dem konjugierten Exponenten q: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; q = \frac{3}{2}$
- Die Norm im Raum L□ für p = 3: das Integral $\int_0^1 |x|^3\,dx = \frac{1}{4}$, also
  $\|f\|_3 = \left(\int_0^1 |x|^3\,dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \doteq 0{,}63$
- Die Norm im Raum L□ für p = $\frac{3}{2}$: das Integral $\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$, also
  $\|g\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_0^1 |1-x|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \doteq 0{,}5$
- Linke Seite $\left|\int_0^1 f\,g\,dx\right| = \frac{1}{6}$, rechte Seite $\|f\|_3 \|g\|_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \doteq 0{,}342$ – die Höldersche Ungleichung gilt.

x^n – punktweise ja, gleichmäßig nein, in L^2 ja.

Eingabe: `convergence(x^n, ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Lösungsweg

- Über den Grenzwert entscheidet die Potenz q^n mit der Basis $q = x$: Für |q| < 1 geht $q^n \to 0$ (schneller, als jede Potenz von n wächst), für |q| > 1 wächst sie über alle Grenzen. Die Stellen mit |q| = 1 rechnen wir gesondert.
- Der punktweise Grenzwert: Für jedes feste x ist $f_n(x) = x^n$ eine Zahlenfolge, wir berechnen ihren Grenzwert für $n \to \infty$

$$x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$
$$x \in (0;\, 1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

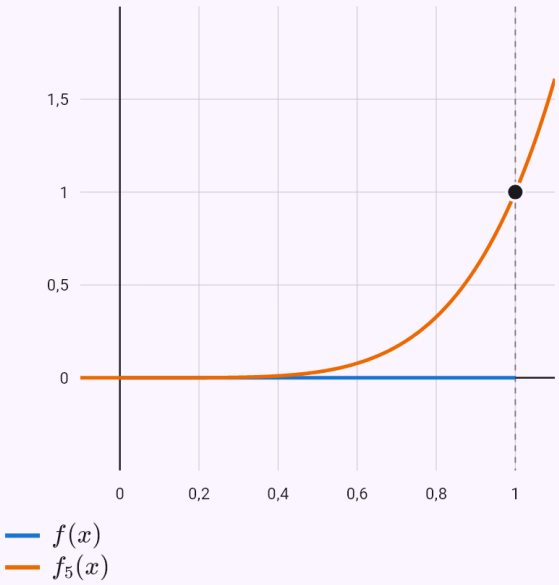
- Die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0;\, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- Alle Funktionen f_n sind stetig, die Grenzfunktion ist an der Stelle $x = 1$ nicht stetig. Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig – die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig.
- Konvergenz in L^2: $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (x^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$ – die Folge konvergiert in L^2.

Graph

Glied f_n: n = 5



Die Grenzfunktion f und das gewählte Glied f_n – mit dem Schieberegler sieht man, wie sich f_n an f annähert.

Gleichmäßige Konvergenz: $s_n = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

Eingabe: `convergence(x/(1 + n x^2), ⟨-1; 1⟩)`

Ergebnis

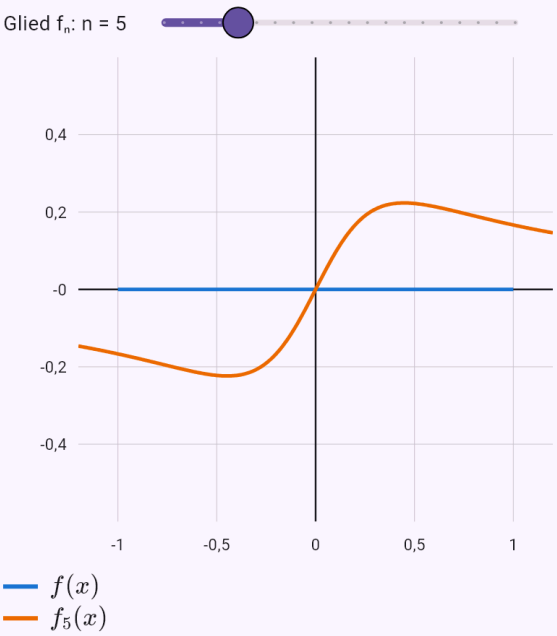
Die Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig.

Lösungsweg

- Der punktweise Grenzwert: Für jedes feste x ist $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ eine Zahlenfolge, wir berechnen ihren Grenzwert für n → ∞
  $x \in \langle -1;\, 1\rangle : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- Die Grenzfunktion: $f(x) = 0$
- Die Gleichmäßigkeit beurteilen wir mit $s_n = \sup |f_n - f|$. Die Differenz $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ hat die Ableitung $-\dfrac{2nx^2}{(nx^2+1)^2} + \dfrac{1}{nx^2+1}$; Kandidaten für den größten Wert sind $x = -1,\ x = 1,\ x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $s_n = \sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, ist die Konvergenz gleichmäßig.
- Konvergenz in L² – das Integral $\|f_n - f\|_2^2$ berechnen wir numerisch. Die Werte fallen gegen null – die Folge konvergiert in L².

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,0309	0,0014	$4{,}767 \cdot 10^{-5}$

Graph



Die Grenzfunktion f und das gewählte Glied f_n – mit dem Schieberegler sieht man, wie sich f_n an f annähert.

Der wandernde Buckel – punktweise gegen null, aber s_n und $\|f_n\|_2$ wachsen.

Eingabe: `convergence(n x e^(-n x^2), ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Lösungsweg

- Über den Grenzwert entscheidet die Potenz q^n mit der Basis $q = e^{-x^2}$: Für |q| < 1 geht $q^n \to 0$ (schneller, als jede Potenz von n wächst), für |q| > 1 wächst sie über alle Grenzen. Die Stellen mit |q| = 1 rechnen wir gesondert.
- Der punktweise Grenzwert: Für jedes feste x ist $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ eine Zahlenfolge, wir berechnen ihren Grenzwert für $n \to \infty$

  $$x \in \langle 0;\, 1\rangle : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

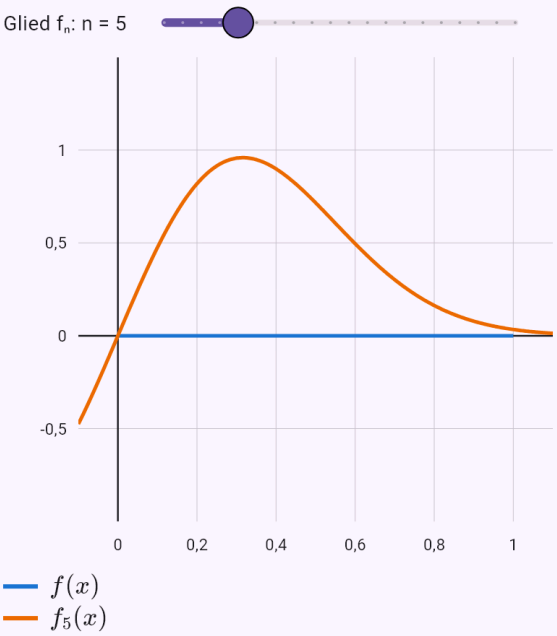
- Die Grenzfunktion: $f(x) = 0$
- Die Gleichmäßigkeit beurteilen wir mit $s_n = \sup |f_n - f|$. Die Differenz $f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2}$ hat die Ableitung $ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right)$; Kandidaten für den größten Wert sind $x = 0,\ x = 1,\ x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$. Da $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (nicht 0), ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

  $$s_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$$

- Konvergenz in L^2 – das Integral $\|f_n - f\|_2^2$ berechnen wir numerisch. Die Werte fallen nicht gegen null – die Folge konvergiert in L^2 nicht.

n	10	100	1000
$\|\|f_n - f\|\|_2^2$	0,4954	1,5666	4,9542

Graph



Die Grenzfunktion f und das gewählte Glied f_n – mit dem Schieberegler sieht man, wie sich f_n an f annähert.

Skalarprodukt, Normen und Winkel zweier Funktionen.

Eingabe: `inner(x, x^2, ⟨0; 1⟩)`

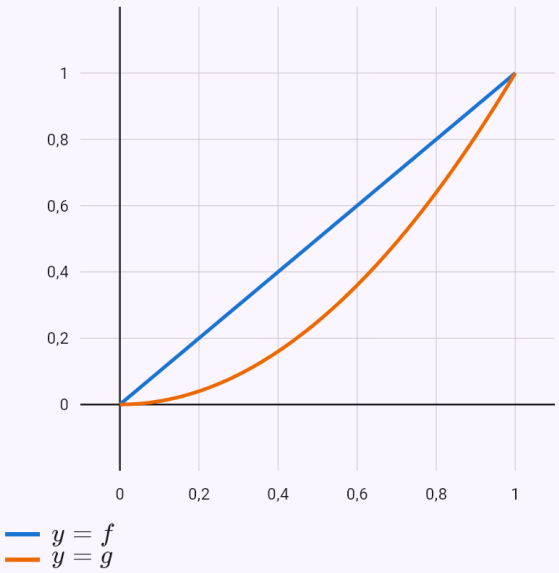
Ergebnis

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}$$

Lösungsweg

- Das Skalarprodukt im Raum L²:
  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4}$$
- Die Normen beider Funktionen aus dem Skalarprodukt
  $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774, \quad \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \frac{\sqrt{}}{}$$
- Der Winkel zwischen den Funktionen (die Cauchy-Schwarz-Ungleichung garantiert |cos φ| ≤ 1)
  $$\cos\varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4} \doteq 0{,}9682, \quad \varphi \doteq 14{,}4775^\circ$$

Graph



Beide Funktionen auf dem gegebenen Intervall.

Legendre-Polynome aus 1, x, x², x³.

Eingabe: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩)`

Ergebnis

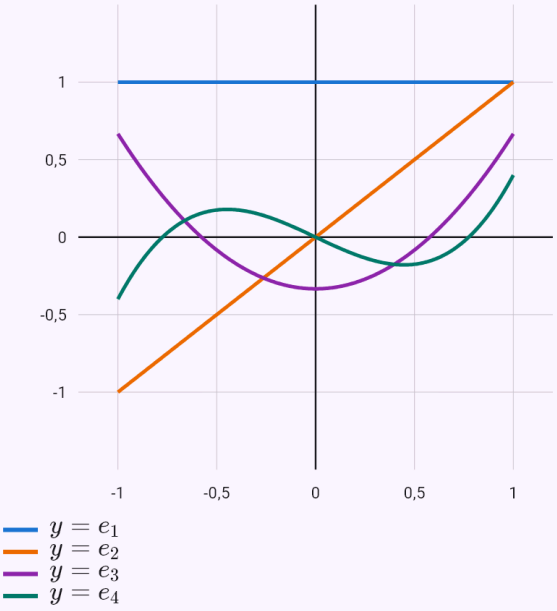
$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ e_4 = x^3$$

Lösungsweg

- Das Gram-Schmidt-Verfahren – die erste Funktion behalten wir: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = 2$
- Schritt 2: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{2}{3}$. Die nötigen Skalarprodukte: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$
- Schritt 3: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$. Die nötigen Skalarprodukte: $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle f_3, e_2\rangle = 0$
- Schritt 4: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x = x^3 - \frac{3x}{5}$, $\|e_4\|^2 = \frac{8}{175}$. Die nötigen Skalarprodukte $\langle f_4, e_1\rangle = 0$, $\langle f_4, e_2\rangle = \frac{2}{5}$, $\langle f_4, e_3\rangle = 0$
- Teilen durch die Normen ergibt ein Orthonormalsystem $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_2 = \frac{e_2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, $\hat{e}_3 = \frac{e_3}{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$, $\hat{e}_4 = \frac{e_4}{\frac{2\sqrt{14}}{35}}$
- Das sind die Legendre-Polynome – in der üblichen Form mit $P_k(1) = 1$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}e_3 = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}e_4 = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Graph



Die orthogonalen Funktionen auf dem gegebenen Intervall.

Tschebyschow-Polynome – die Integrale aus den Momenten des Gewichts.

Eingabe: `gramschmidt(1, x, x^2, x^3; ⟨-1; 1⟩; w = 1/sqrt(1 - x^2))`

Ergebnis

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{2},\ e_4 = x^3$$

Lösungsweg

- Die Skalarprodukte von Polynomen mit dem Gewicht $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ergeben sich aus den Momenten des Gewichts $\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k\, w(x) dx$

  $\mu_0 = \pi,\ \mu_2 = \frac{\pi}{2},\ \mu_4 = \frac{3\pi}{8},\ \mu_6 = \frac{5\pi}{16}$

- Das Gram-Schmidt-Verfahren – die erste Funktion behalten wir: $e_1 = 1$, $\|e_1\|^2 = \pi \doteq 3{,}1416$

- Schritt 2: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_2 = x$, $\|e_2\|^2 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$. Die nötigen Skalarprodukte: $\langle f_2, e_1\rangle = 0$

- Schritt 3: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_3 = x^2 - \frac{1}{2}$, $\|e_3\|^2 = \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}3927$. Die nötigen Skalarprodukte $\langle f_3, e_1\rangle = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708,\ \langle f_3, e_2\rangle = 0$

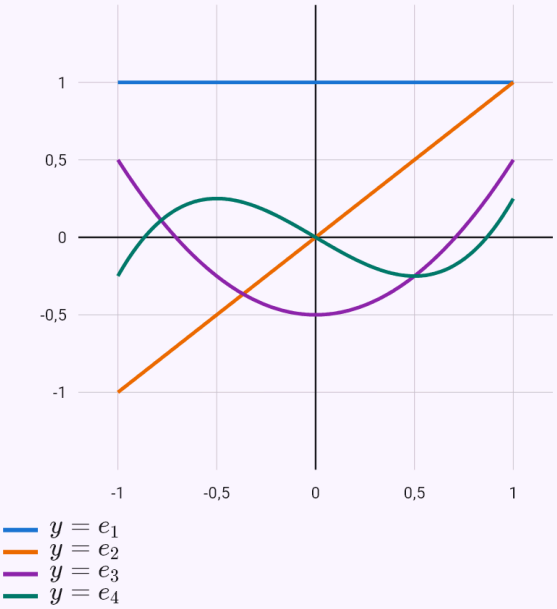
- Schritt 4: Von der Funktion ziehen wir ihre Projektionen auf die vorherigen ab: $e_4 = x^3 - \frac{3}{4}x = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\|e_4\|^2 = \frac{\pi}{32} \doteq 0{,}0982$. Die nötigen Skalarprodukte $\langle f_4, e_1\rangle = 0,\ \langle f_4, e_2\rangle = \frac{3\pi}{8} \doteq 1{,}1781,\ \langle f_4, e_3\rangle = 0$

- Teilen durch die Normen ergibt ein Orthonormalsystem $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}},\ \hat{e}_4 = \frac{e_4}{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}$

- Das sind die Tschebyschow-Polynome erster Art, $T_k(\cos t) = \cos kt$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2e_3 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4e_4 = 4x^3 - 3x$$

Graph



Die orthogonalen Funktionen auf dem gegebenen Intervall.

Die beste quadratische Approximation von e^x auf $\langle -1; 1 \rangle$.

Eingabe: `approx(e^x, 2, ⟨-1; 1⟩)`

Ergebnis

$$p(x) = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11}{}$$

Lösungsweg

- Die Bestapproximation in L² ist die Orthogonalprojektion auf die Polynome vom Grad höchstens n. Eine Orthogonalbasis liefert das Gram-Schmidt-Verfahren aus 1, x, x², …: $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$;
  $\|e_1\|^2 = 2,\ \|e_2\|^2 = \frac{2}{3},\ \|e_3\|^2 = \frac{8}{45}$
- Die Koeffizienten der Projektion

$$c_1 = \frac{\langle f, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \doteq 1{,}1752$$

$$c_2 = \frac{\langle f, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = \frac{3}{e} \doteq 1{,}1036$$

$$c_3 = \frac{\langle f, e_3\rangle}{\|e_3\|^2} = \frac{15\left(e - \frac{7}{e}\right)}{4} \doteq 0{,}5367$$

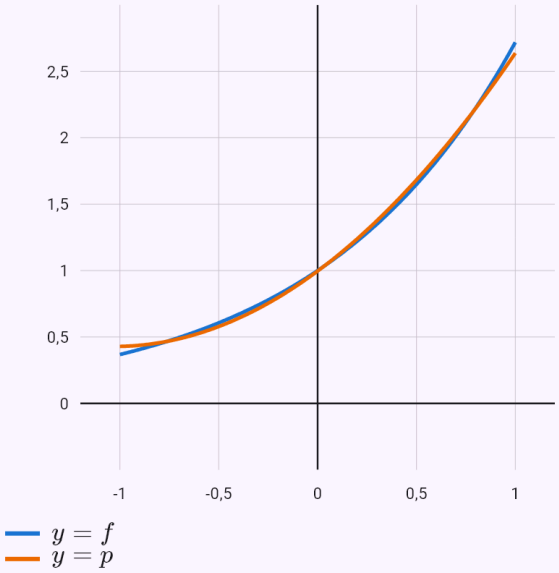
- Die Bestapproximation

$$p(x) = \sum c_k e_k = \left(\frac{15(e^2-7)}{4e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{3(11 - e^2}{4e}$$

- Der Fehler nach dem Satz des Pythagoras: $\|f\|^2 = \sinh 2 \doteq 3{,}6269$. Besselsche Ungleichung: $\sum c_k^2 \|e_k\|^2 \doteq 3{,}6254 \le \|f\|^2 \doteq 3{,}6269$. Für ein vollständiges System (n → ∞) wird sie zur Gleichung – der Parsevalschen Gleichung.

$$\|f - p\|^2 = \|f\|^2 - \sum c_k^2 \|e_k\|^2 = 36 - 132\cosh 2 + 12$$

Graph



Die Funktion f und ihre Bestapproximation p.

Die Normen 1, 2, ∞ und Frobenius einer Matrix.

Eingabe: `||[1 2; 3 4]||`

Ergebnis

$$\|A\|_1 = 6,\ \|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5,$$

Lösungsweg

- Die Matrix
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Die Spaltensummennorm ist die größte Summe der Beträge in einer Spalte:
  $s_1 = 1+3 = 4, \quad s_2 = 2+4 = 6$, also
  $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6$
- Die Spektralnorm ist die Wurzel aus dem größten Eigenwert von. Die Eigenwerte also
  $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = 15+\sqrt{221} \doteq 29{,}8661,\ \lambda_2 = 15-\sqrt{221} \doteq 0{,}133$
  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)} = \sqrt{15+\sqrt{221}} \doteq 5{,}465$
- Die Zeilensummennorm ist die größte Summe der Beträge in einer Zeile: $r_1 = 1+2 = 3, \quad r_2 = 3+4 = 7$, also $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 7$
- Die Frobeniusnorm ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate aller Einträge
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \doteq 5{,}4$

Eine fast singuläre Matrix – κ ≈ 4·10⁴.

Eingabe: `cond([1 1; 1 1.0001])`

Ergebnis

$$\kappa_2(A) \doteq 40002{,}0014$$

Lösungsweg

- Die Matrix
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10001}{10000} \end{pmatrix}$
- Die Spektralnorm ist die Wurzel aus dem größten Eigenwert von. Die Eigenwerte also
  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{20001}{10000} \\ \frac{20001}{10000} & \frac{200020001}{100000000} \end{pmatrix}$
  $\lambda_1 = \frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000} \doteq 4{,}0002,\ \lambda_2 =$
  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400000001}}{200000000}}, \quad \sigma_{\min} =$
- Die Konditionszahl. Sie gibt an, um welchen Faktor der relative Fehler der Eingabe wachsen kann; beim Lösen eines Systems können etwa $4{,}6$ gültige Stellen verloren gehen – die Matrix ist schlecht konditioniert.
  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \sqrt{\frac{400020001+20001\sqrt{400}}{200000000}}$

Der Kern wechselt das Vorzeichen – das Integral bei t = x geteilt.

Eingabe: `opnorm(x - t, ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

$$\|K\|_C = \frac{1}{2}, \quad \|K\|_{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

Lösungsweg

- Die Norm eines Integraloperators auf C⟨a; b⟩ ist der größte Wert von φ(x) = ∫|K(x, t)| dt. Der Kern $K(x,t) = x - t$ wechselt sein Vorzeichen bei K = 0 – dort teilen wir das Integral

$$\varphi(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

- Die Supremumsnorm einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist der größte Wert von |f|. Wir suchen ihn an den Randpunkten und an den stationären Stellen im Inneren: die Ableitung $\varphi'(x) = 2x - 1$, die stationären Stellen $x = \frac{1}{2}$
- Die Werte von |f| an diesen Stellen

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\lvert\varphi(x)\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Der größte davon ist die Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |\varphi(x)| = |\varphi(0)| = \frac{1}{2}$$

- Der Kern ist ausgeartet, $K(x,t) = -t + x$. Seine L²-Norm ergibt sich dann aus den Gram-Matrizen der Funktionen a⃞(x) und b⃞(t). Zum Vergleich: die Hilbert-Schmidt-Norm ist nie kleiner.

$$G_a = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|K\|_{L^2} = \sqrt{\lambda_{\max}\left(G_b G_a\right)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}2887$$

$$\|K\|_{HS} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\,dt\,dx} = \frac{\sqrt{6}}{6} \doteq 0{,}4082$$

Die Norm eines Funktionals auf C und auf L² (Satz von Riesz).

Eingabe: `fnorm(x^2, ⟨0; 1⟩)`

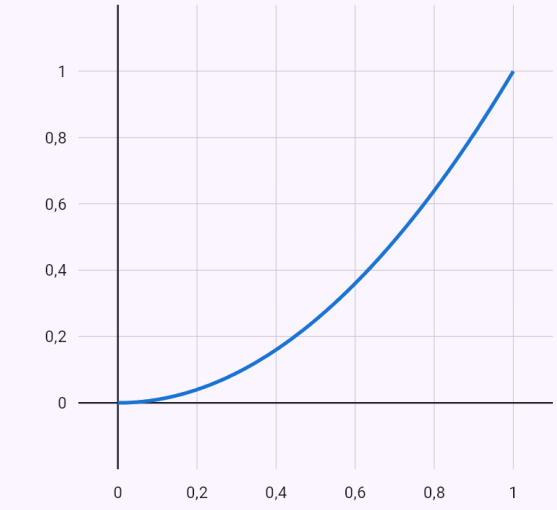
Ergebnis

$$\|\varphi\|_{(C)^*} = \frac{1}{3}, \quad \|\varphi\|_{(L^2)^*} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}44$$

Lösungsweg

- Das Funktional φ(u) = ∫u·g auf $C\langle 0;\,1\rangle$ mit der Supremumsnorm: seine Norm ist das Integral von |g|, angenähert durch stetige u ≈ sgn g:
  $$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1}\left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_1$$
- Die Norm im Raum L¹ für p = 1: das Integral
  $$\int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}, \text{ also } \|g\|_1 = \int_0^1 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}$$
- Auf $L^2\langle 0;\,1\rangle$ ist das Funktional φ(u) = ∫u·g das Skalarprodukt mit g (Satz von Riesz). Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist seine Norm $\|g\|_2$, erreicht für u = g/$\|g\|_2$: $\|\varphi\| = \sup_{\|u\|\le 1}\left|\int_0^1 u\,g\,dx\right| = \|g\|_2$
- Die Norm im Raum L² für p = 2: das Integral
  $$\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{1}{5}, \text{ also}$$
  $$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}4472$$

Graph



Die Funktion auf dem gegebenen Intervall.

Ein ausgearteter Kern mit dem Parameter λ.

Eingabe: `u(x) = x + λ∫_0^1 x t u(t) dt`

Ergebnis

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Bedingungen: $\lambda \neq 3$

Lösungsweg

- Eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art (feste Grenzen): $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\,u(t)\,dt$, der Kern $K(x,t) = xt$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Der Kern ist ausgeartet – ein Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von t: $K(x,t) = x \cdot t$
- Die Integrale mit der unbekannten Funktion sind Zahlen – wir nennen sie unbekannte Konstanten $c = \int_0^1 t\,u(t)\,dt$. Die Lösung hat daher die Form $u(x) = x + \lambda(c \cdot x)$
- Einsetzen dieser Form in die Definitionen der Konstanten ergibt ein lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}$

  $c - \frac{c\lambda}{3} = \frac{1}{3}$
- Das System hat genau eine Lösung, wo seine Determinante ungleich null ist: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \frac{\lambda}{3}$. Ihre Nullstellen sind die charakteristischen Werte des Kerns: $\lambda_1 = 3$
- Für $\lambda \neq 3$ ist die Lösung des Systems $c = \frac{1}{3-\lambda}$, also $u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$
- Für $\lambda_1 = 3$ hat die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen – die Eigenfunktionen $\varphi_1(x) = x$
- Fredholmsche Alternative für $\lambda_1 = 3$: das System ist unlösbar ($h(I - \lambda A) = 0 < h(I - \lambda A \mid \beta) = 1$), die Gleichung hat für dieses λ keine Lösung (die Eigenfunktion $\varphi(x) = x$).

Charakteristische Werte und Eigenfunktionen.

Eingabe: `u(x) = λ∫_0^1 (x + t) u(t) dt`

Ergebnis

$$\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}: \; u(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

Lösungsweg

- Eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art (feste Grenzen): $u(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)\,u(t)\,dt$, der Kern $K(x,t) = x + t$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Der Kern ist ausgeartet – eine Summe von 2 Produkten einer Funktion von x und einer Funktion von t: $K(x,t) = t + x$
- Die Integrale mit der unbekannten Funktion sind Zahlen – wir nennen sie unbekannte Konstanten $c_1 = \int_0^1 t\,u(t)\,dt, \quad c_2 = \int_0^1 u(t)\,dt$. Die Lösung hat daher die Form $u(x) = \lambda(c_1 + c_2 \cdot x)$
- Einsetzen dieser Form in die Definitionen der Konstanten ergibt ein lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten

  $a_{11} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \int_0^1 t \cdot t\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_{21} =$

  $c_1 - \frac{c_1\lambda}{2} - \frac{c_2\lambda}{3} = 0$

  $c_2 - c_1\lambda - \frac{c_2\lambda}{2} = 0$
- Das System hat genau eine Lösung, wo seine Determinante ungleich null ist: $D(\lambda) = \det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$. Ihre Nullstellen sind die charakteristischen Werte des Kerns: $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3} \doteq -12{,}9282, \; \lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3} \doteq 0{,}9282$
- Für $\lambda_1 = -6 - 4\sqrt{3}$ hat die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen – die Eigenfunktionen $\varphi_1(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Für $\lambda_2 = -6 + 4\sqrt{3}$ hat die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen – die Eigenfunktionen $\varphi_2(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ein nicht ausgearteter Kern – Neumannsche Reihe und Nyström-Verfahren.

Eingabe: `u(x) = 1 + 1/2 ∫_0^1 e^(x t) u(t) dt`

Ergebnis

$$u(0) \doteq 2{,}517,\ u(0{,}5) \doteq 2{,}9997,\ u(1)$$

Lösungsweg

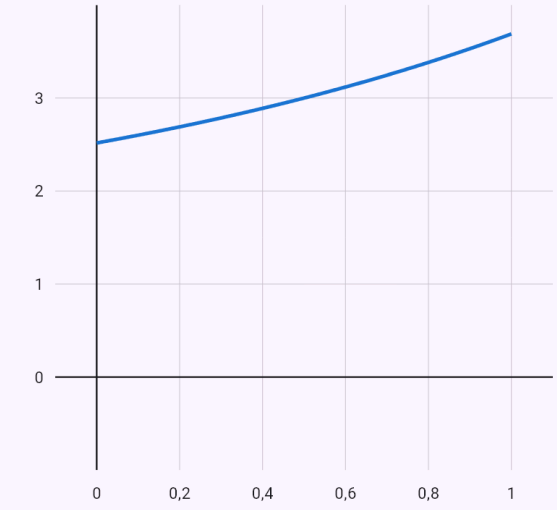
- Eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art (feste Grenzen): $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{xt}\right) u(t)\,dt$, der Kern $K(x,t) = e^{xt}$, $\lambda = \frac{1}{2}$
- Der Kern ist nicht ausgeartet. Die Neumannsche Reihe – die sukzessiven Näherungen $u_{k+1} = f + \lambda \int K\, u_k\, dt$ – konvergiert, weil

$$|\lambda| \max_x \int_0^1 |K(x,t)|dt \doteq 0{,}5 \cdot 1{,}7183 \doteq 0{,}8591 < 1$$

- Nyström-Verfahren: Das Integral wird durch eine Gauß-Quadratur mit 32 Knoten ersetzt, die Gleichung in den Knoten wird zu einem linearen System, und die Werte dazwischen folgen aus der Gleichung selbst.Im Vergleich mit halb so vielen Knoten beträgt die Genauigkeit etwa 10^{-8}. Die Werte der Lösung

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$u(x)$	2,517	2,7372	2,9997	3,3134	3,6894

Graph



Die Lösung der Integralgleichung.

Eine Volterrasche Gleichung mit der Laplace-Transformation – cos x.

Eingabe: `u(x) = 1 - ∫_0^x (x - t) u(t) dt`

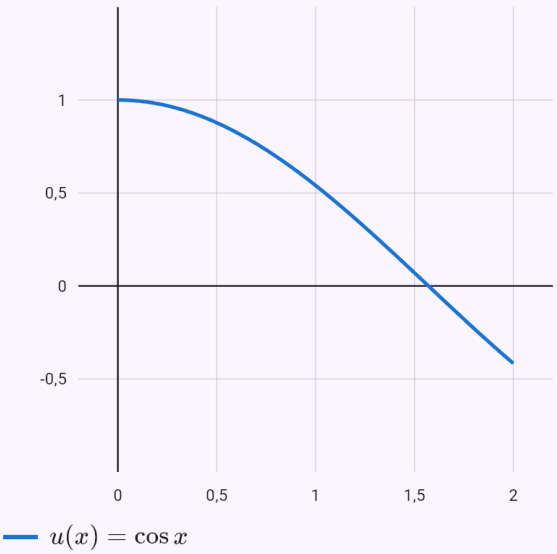
Ergebnis

$$u(x) = \cos x$$

Lösungsweg

- Eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art (die obere Grenze ist x): $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$, der Kern $K(x,t) = x - t$, $\lambda = -1$
- Der Kern hängt nur von x − t ab ($K(x,t) = k(x-t), \quad k(x) = x$) – das Integral ist eine Faltung, die die Laplace-Transformation in ein Produkt verwandelt. Die Bildfunktionen. Die Gleichung für die Bilder $U(s) = F(s) - \hat{k}(s)\,U(s)$, daraus $U(s) = \frac{F(s)}{1+\hat{k}(s)} = \frac{s}{s^2+1}$. Rücktransformation ergibt $u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \cos x$
  $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \hat{k}(s) = \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$

Graph



Die Lösung der Integralgleichung.

Der Fixpunkt von cos x mit A-priori- und A-posteriori-Abschätzung.

Eingabe: `banach(cos x, ⟨0; 1⟩)`

Ergebnis

$$x^* \doteq 0{,}7390851$$

Lösungsweg

- Der Banachsche Fixpunktsatz verlangt, dass $g(x) = \cos x$ das Intervall $I = \langle 0;\ 1\rangle$ in sich abbildet. Der Wertebereich (aus den Rändern und den stationären Punkten) ist $g(I) = \langle \cos 1 \doteq 0{,}5403;\ 1\rangle$ – er liegt in I.
- Die Supremumsnorm einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist der größte Wert von |f|. Die Ableitung $g''(x) = -\cos x$ hat im Inneren des Intervalls keine Nullstelle – die Randpunkte genügen.
- Die Werte von |f| an diesen Stellen

x	0	1
$\lvert g'(x)\rvert$	0	$\sin 1 \doteq 0{,}8415$

- Der größte davon ist die Supremumsnorm

$$\|g'\|_\infty = \max_{x\in\langle 0;\,1\rangle} |g'(x)| = |g'(1)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415$$

- Nach dem Mittelwertsatz ist |g(x) − g(y)| ≤ q·|x − y|, wobei q der größte Wert von |g'| ist: $q = \max_{x\in I} |g'(x)| = \sin 1 \doteq 0{,}8415 < 1$ – g ist eine Kontraktion.
- Die A-priori-Abschätzung: Start bei $x_0 = 0{,}5, \quad x_1 = g(x_0) \doteq 0{,}8776$. Aus mit $\varepsilon = 10^{-6}$ und $q = \sin 1$ folgen n ≥ 86 Schritte.

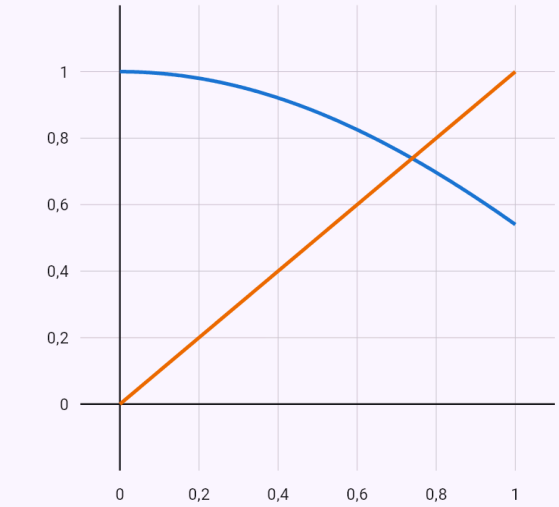
$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\ln q}$$

- Wir iterieren $x_{n+1} = g(x_n)$; die letzte Spalte ist die A-posteriori-Abschätzung des Fehlers, die Rechnung endet, sobald sie unter ε fällt

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\frac{q}{1-q}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5		
1	0,8775826	0,3776	2,0042
2	0,6390125	0,2386	1,2663
3	0,8026851	0,1637	0,8688
4	0,694778	0,1079	0,5728
5	0,7681958	0,0734	0,3897
6	0,7191654	0,049	0,2603
7	0,7523558	0,0332	0,1762
⋮			
33	0,7390856	$1{,}145\cdot 10^{-6}$	$6{,}075\cdot 10^{-6}$
34	0,7390848	$7{,}710\cdot 10^{-7}$	$4{,}092\cdot 10^{-6}$
35	0,7390853	$5{,}193\cdot 10^{-7}$	$2{,}757\cdot 10^{-6}$
36	0,739085	$3{,}498\cdot 10^{-7}$	$1{,}857\cdot 10^{-6}$
37	0,7390852	$2{,}356\cdot 10^{-7}$	$1{,}251\cdot 10^{-6}$
38	0,7390851	$1{,}587\cdot 10^{-7}$	$8{,}426\cdot 10^{-7}$

- Der Fixpunkt: $x^* \doteq 0{,}7390851, \quad |x_{38} - x^*| \le 8{,}426\cdot 10^{-7}$. Es genügten 38 Schritte statt der 86 aus der A-priori-Abschätzung – die A-posteriori-Abschätzung ist meist viel schärfer.

Graph



$g(x) = \cos x$
$y = x$

Die Funktion g und die Gerade y = x – der Fixpunkt ist ihr Schnittpunkt.

Das System x = Ax + b, eine Kontraktion in der ∞-Norm.

Eingabe: `banach([0.5 0.1; 0.2 0.3], (1; 2))`

Ergebnis

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Lösungsweg

- Das System in der Form für die Iteration

  $$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1;\, 2)$$

- Die Spaltensummennorm ist die größte Summe der Beträge in einer Spalte also $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \frac{7}{10}$

  $$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

- Die Zeilensummennorm ist die größte Summe der Beträge in einer Zeile also $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{3}{5}$

  $$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

- Die Abbildung x ↦ Ax + b ist eine Kontraktion, wenn eine Norm von A kleiner als 1 ist. Wir nehmen die kleinste: $q = \|A\|_\infty = \frac{3}{5} < 1$

- Die A-priori-Abschätzung: Start bei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Aus mit $\varepsilon = 10^{-6}$ und $q = 0{,}6$ folgen n ≥ 31 Schritte.

  $$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le \varepsilon \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\mathbf{b}\|}}{\ln q}$$

- Wir iterieren $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$; die letzte Spalte ist die A-posteriori-Abschätzung des Fehlers, die Rechnung endet, sobald sie unter ε fällt

n	x_1	x_2	$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty$
0	0	0	
1	1	2	2
2	1,7	2,8	0,8
3	2,13	3,18	0,43
4	2,383	3,38	0,253
5	2,5295	3,4906	0,1465
6	2,61381	3,55308	0,0843
7	2,662213	3,588686	0,0484
⋮			
23	2,7272639	3,6363572	$6{,}581 \cdot 10^{-6}$
24	2,7272677	3,6363599	$3{,}772 \cdot 10^{-6}$
25	2,7272698	3,6363615	$2{,}162 \cdot 10^{-6}$
26	2,7272711	3,6363624	$1{,}239 \cdot 10^{-6}$
27	2,7272718	3,6363629	$7{,}104 \cdot 10^{-7}$
28	2,7272722	3,6363632	$4{,}072 \cdot 10^{-7}$

- Der Fixpunkt. Es genügten 28 Schritte statt der 31 aus der A-priori-Abschätzung – die A-posteriori-Abschätzung ist meist viel schärfer.

  $$\mathbf{x}^* \doteq (2{,}7272722;\, 3{,}6363632), \quad \|\mathbf{x}_{28} - \mathbf{x}^*\| \le 6{,}108 \cdot 1$$

- Zum Vergleich der exakte Fixpunkt aus dem linearen System

  $$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^* = \left(\frac{30}{11}; \frac{40}{11}\right)$$

Picard-Iteration und exakte Lösung.

Eingabe: `picard(y' = x + y, y(0) = 1)`

Ergebnis

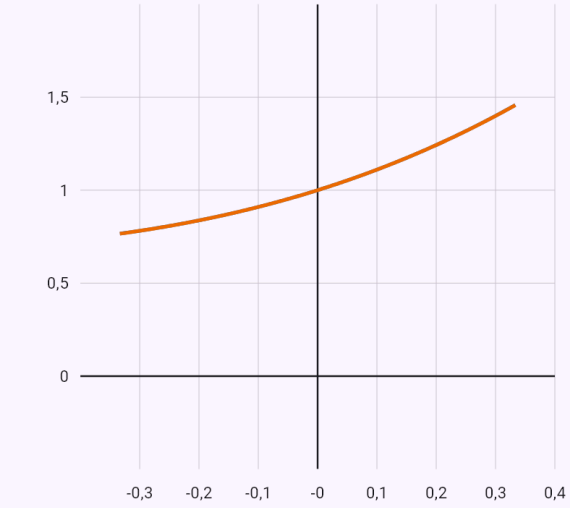
$$y_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

Lösungsweg

- Die Aufgabe $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ wird zur Integralgleichung y = T(y); die Picard-Iteration iteriert den Operator T:
  $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt, \quad y_0(x) = 1$
- Näherung 1: $y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1$
- Näherung 2
  $y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)dt = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1$
- Näherung 3
  $y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + t^2 + 2t + 1\right)dt = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^$
- Wo T eine Kontraktion ist (Satz von Picard-Lindelöf): auf dem Rechteck $R:\ |x| \le 1,\ |y-1| \le 1$ gilt $M = \max_R |f| \doteq 3$ und. Auf dem Intervall mit $h = \min\left(1, \frac{1}{M}\right) \doteq 0{,}3333$ bleiben die Näherungen im Rechteck und $q = Lh \doteq 0{,}3333 < 1$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad L = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \doteq 1$
- Die Fehlerschranke der letzten Näherung für $|x| \le 0{,}3333$: $|y_3(x) - y(x)| \le \frac{ML^3h^4}{4!} \doteq 0{,}0015$
- Die exakte Lösung zum Vergleich: $y(x) = -x + 2e^x - 1$;

der tatsächliche Fehler am Intervallrand
$|y_3(0{,}3333) - y(0{,}3333)| \doteq 0{,}0006$

Graph



Die Picard-Näherung und die exakte Lösung (falls bekannt).

Die Cauchysche Gleichung – f(x) = cx.

Eingabe: `f(x + y) = f(x) + f(y)`

Ergebnis

$$f(x) = c\,x$$

Lösungsweg

- Die Cauchysche Funktionalgleichung einer additiven Funktion: $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Wir setzen voraus, dass die Funktion f stetig ist. Ohne das hat die Cauchysche Gleichung auch unstetige „pathologische“ Lösungen (mit einer Hamel-Basis konstruiert).
- Einsetzen: $x = y = 0: \quad f(0) = 2f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$
- Einsetzen von y = −x zeigt, dass die Funktion ungerade ist:
  $y = -x: \quad 0 = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x)$
- Durch Induktion für natürliche n:
  $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = n\,f(x)$
- Für rationale r = m/n
  $n\,f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) = m\,f(1) \;\Rightarrow\; f(r) = c\,r,\; c = f(1),$
- Die rationalen Zahlen liegen dicht und die Funktion ist stetig, also gilt das für alle reellen x:
  $f(x) = \lim_{r\to x} f(r) = \lim_{r\to x} c\,r = c\,x$
- Alle stetigen Lösungen (a, b, c beliebige Konstanten):
  $f(x) = c\,x$
- Probe durch Einsetzen: $c(x+y) = c\,x + c\,y$

Die d’Alembertsche Gleichung – cos und cosh.

Eingabe: `f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)`

Ergebnis

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) =$$

Lösungsweg

- Die d’Alembertsche Funktionalgleichung:
  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y), x, y \in \mathbb{R}$
- Wir setzen voraus, dass die Funktion f stetig ist. Ohne das hat die Cauchysche Gleichung auch unstetige „pathologische“ Lösungen (mit einer Hamel-Basis konstruiert).
- Einsetzen
  $x = y = 0: \quad 2f(0) = 2f(0)^2 \;\Rightarrow\; f(0) \in \{0, 1\}; \quad f($
- Einsetzen von x = 0 zeigt, dass die Funktion gerade ist:
  $x = 0: \quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \;\Rightarrow\; f(-y) = f(y)$
- Stetige Lösungen sind glatt; zweimaliges Ableiten nach y an der Stelle y = 0 ergibt eine Differentialgleichung
  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}|_{y=0}: \quad 2f''(x) = 2f''(0)\,f(x) \;\Rightarrow\; f'' = k\,f,\; f(0)$
- Nach dem Vorzeichen der Konstanten k:
  $k = -c^2: \cos(cx), \qquad k = 0: 1, \qquad k = c^2: \cosh(cx)$
- Alle stetigen Lösungen (a, b, c beliebige Konstanten):
  $f(x) = 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx)$
- Probe durch Einsetzen:
  $\cos(cx + cy) + \cos(cx - cy) = 2\cos(cx)\cos(cy)$

Bekannte Einschränkungen

- Den punktweisen Grenzwert findet die App bei Folgen, deren Grenzwert eine Potenz q^n oder ein rationaler Ausdruck in n bestimmt; kompliziertere (sin nx ohne Division durch n) lehnt sie unter Umständen ab.
- Konvergenz untersucht sie auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall; ein unendliches Intervall noch nicht.
- Das Gram-Schmidt-Verfahren für höchstens 6 Funktionen, die Approximation durch ein Polynom höchstens 5. Grades.
- Ein ausgearteter Kern mit höchstens 4 Termen; mit einem Parameter λ nur ausgeartete Kerne, andere werden für ein numerisches λ numerisch gelöst. Eine Volterrasche Gleichung exakt nur mit einem Kern k(x − t) ab null oder a(x)·b(t), sonst mit sukzessiven Näherungen und numerisch.
- Matrizen bis 6 × 6, höchstens 6 Picard-Näherungen. Funktionalgleichungen nur der genannten Typen (und die Cauchysche mit einem zusätzlichen Polynomterm), stets mit stetigen Lösungen.

35. Funktionen einer komplexen Variablen

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen von f(z) prüfen Sie mit cr(z^2 + 3z); die Funktion darf in z, z̄ (conj(z)), |z|, Re z, Im z oder direkt in x und y geschrieben sein. Die App zerlegt f = u + iv, berechnet die partiellen Ableitungen und setzt in u_x = v_y, u_y = −v_x ein. Gelten sie überall, ist die Funktion holomorph und das Ergebnis ist die Ableitung f'(z) in z; sonst gibt die App an, wo sie gelten (Punkte oder eine Kurve), und die Funktion ist nicht holomorph. Zu einer harmonischen Funktion harmonic(u = x^2 - y^2) bestimmt sie die harmonisch konjugierte Funktion durch Integration der Gleichungen und die ganze f(z) durch Einsetzen von x = z, y = 0; auch der Imaginärteil kann gegeben sein, harmonic(v = 2xy).

Werte der elementaren Funktionen in $\mathbb{C}$: der Hauptwert des Logarithmus ln(1 + i) = ln|w| + i Arg w mit allen Werten, die sich um 2kπi unterscheiden, eine Potenz mit komplexem Exponenten i^i = e^(i Log i), sin, cos, sinh und cosh einer komplexen Zahl mit den Additionstheoremen. Das Argument liegt im selben Intervall wie bei komplexen Zahlen (Chip „Hauptwert des Arguments“). Die Gleichungen sin z = 2, cos z = 3, sinh z = i, cosh z = 2 löst die App mit der Substitution w = e^(iz) (e^z) und einer quadratischen Gleichung, e^z = 1 + i durch Logarithmieren; das Ergebnis ist die allgemeine Lösung mit k ∈ $\mathbb{Z}$ und einige Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene. Eine Gleichung in x ohne reelle Lösung (sin x = 2) bietet die Schaltfläche für die komplexe Lösung an.

Singularitäten und Residuen: singularities(f) findet die Nullstellen des Nenners und die wesentlichen Singularitäten (e^(1/z), sin(1/z)), bestimmt ihre Art – hebbar, Pol der Ordnung m, wesentlich – und berechnet die Residuen: im einfachen Pol g(a)/q'(a), im Pol höherer Ordnung über die Ableitung von (z − a)^m f(z), in der wesentlichen Singularität aus der Laurent-Reihe. Res(f, z = a) berechnet ein Residuum. Die Laurent-Reihe einer rationalen Funktion im Kreisring laurent(f, 1 < |z| < 2) (oder |z| > 1, 0 < |z − a| < r, um einen Punkt laurent(f, z = a)) entsteht aus den Partialbrüchen über $\mathbb{C}$ und der geometrischen Reihe jedes Bruchs – je nachdem, ob sein Pol innerhalb oder außerhalb des Kreisrings liegt. Das Integral über einen Kreis oint(f, |z − a| = r) (vom Foto \oint_{|z−a|=r}) berechnet die App mit dem Residuensatz; ohne Singularität im Inneren ist es null, eine Singularität auf dem Kreis wird gemeldet.

Residuen in der reellen Analysis: ein uneigentliches Integral einer rationalen Funktion über die ganze Achse, mit cos ax oder sin ax (Lemma von Jordan) und von 0 bis ∞ einer geraden Funktion; ein Integral einer rationalen Funktion von cos t und sin t über ⟨0; 2π⟩ mit z = e^(it). Integrale mit Kosinus oder Sinus und über ⟨0; 2π⟩ gehen sofort über Residuen, für die übrigen wählen Sie den Chip „Mit Residuen“ (zurück „Der übliche Weg“). Mit demselben Chip summieren Sie bei einer Reihe Σ R(n) ab 1 (ab 0 oder einer anderen ganzen Zahl) mit dem Kern π cot πz, eine alternierende Reihe mit π/sin πz; die Summe über alle ganzen Zahlen ab −∞ geht sofort. Die inverse Laplace-Transformation einer rationalen Funktion invlaplace(F) (vom Foto \mathcal{L}^{-1}\{F\}) berechnet die App als Summe der Residuen von F(s)e^(st).

Der Satz von Rouché rouche(p, |z| < r) bestimmt die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einer Kreisscheibe nach dem Glied, das auf dem Kreis die Summe der übrigen überwiegt, im Kreisring r < |z| < R als Differenz zweier Kreisscheiben; die Nullstellen zeigt die Gaußsche Zahlenebene. Eine konforme Abbildung w = f(z) zerlegt die App in u und v, gibt an, wo sie konform ist (f' ≠ 0), und findet bei einer Möbius-Transformation (αz + β)/(γz + δ) die Fixpunkte und die Bilder der reellen und imaginären Achse und des Einheitskreises. Der Graph zeigt das Bild des Gitters der Geraden x = c und y = c.

Die Fourier-Transformation einer rationalen Funktion ftransform(1/(1 + t^2)) (vom Foto \mathcal{F}\{f\}) berechnet die App über Residuen - für ω > 0 schließt sie den Weg in der unteren, für ω < 0 in der oberen Halbebene - und schreibt das Ergebnis bei gerader (ungerader) Funktion mit |ω|. Für eine Dichte in x ergibt sich die charakteristische Funktion der Verteilung bis auf das Vorzeichen von ω, bei der symmetrischen Cauchy-Verteilung direkt e^(−|t|). Die inverse Z-Transformation invz(F) (\mathcal{Z}^{-1}\{F\}) ist die Summe der Residuen von $F(z)z^{n-1}$ mit dem Anfangswert x[0] = lim F(z) für z → ∞. Die Anwendung in Filtern, Regelung und Optik zeigt das Kapitel Anwendungen der Funktionentheorie.

Eingabe

`cr(z^2 + 3z), cr(conj(z))`	Die Cauchy-Riemann-Gleichungen und die Ableitung.
`harmonic(u = x^2 - y^2), harmonic(v = 2xy)`	Die harmonisch konjugierte Funktion zum Real- (Imaginär-)teil.
`ln(1 + i), i^i, sin(1 + i), sin z = 2`	Logarithmus, Potenzen, trigonometrische Funktionen und Gleichungen in $\mathbb{C}$.
`Res(f, z = a), singularities(f)`	Ein Residuum in einem Punkt, alle Singularitäten.
`laurent(f, 1 < |z| < 2), laurent(f, z = a)`	Eine Laurent-Reihe im Kreisring oder um einen Punkt.
`oint(f, |z - a| = r)`	Ein Integral über einen Kreis mit dem Residuensatz.
`int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo), int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`	Reelle Integrale mit Residuen.
`residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))`	Die Summe einer Reihe mit Residuen.
`rouche(z^5 + 3z + 1, |z| < 1)`	Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Kreisscheibe oder Kreisring.

`w = (z - i)/(z + i)`	Eine konforme Abbildung, eine Möbius-Transformation.
`invlaplace(s/(s^2 + 4))`	Die inverse Laplace-Transformation mit Residuen.
`ftransform(1/(1 + t^2))`	Fourier-Transformation über Residuen.
`invz(z/(z - 1/2))`	Inverse Z-Transformation über Residuen.

Beispiele

Eine holomorphe Funktion – die Gleichungen gelten überall, die Ableitung in z.

Eingabe: `cr(z^2 + 3z)`

Ergebnis

$$f'(z) = 2z + 3$$

Lösungsweg

- Wir zerlegen die Funktion in Real- und Imaginärteil, f = u + iv mit z = x + iy: $u = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = y(2x + 3)$
- Die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y
  $u_x = 2x + 3,\ u_y = -2y$
  $v_x = 2y,\ v_y = 2x + 3$
- Wir setzen in die Cauchy-Riemann-Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ ein
  $u_x = v_y:\ 2x + 3 = 2x + 3$
  $u_y = -v_x:\ -2y = -2y$
- Beide Gleichungen gelten in der ganzen Ebene und die partiellen Ableitungen sind stetig – die Funktion ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph.
- Die Ableitung der holomorphen Funktion, in z geschrieben: $f'(z) = u_x + i\,v_x = 2z + 3$

Die Gleichungen gelten nur auf der Geraden y = x – die Funktion ist nicht holomorph.

Eingabe: `cr(x^2 + i y^2)`

Ergebnis

Die Funktion ist nicht holomorph – die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten auf keinem Gebiet.

Lösungsweg

- Wir zerlegen die Funktion in Real- und Imaginärteil, f = u + iv mit z = x + iy: $u = x^2, \quad v = y^2$
- Die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y
  $u_x = 2x,\ u_y = 0$
  $v_x = 0,\ v_y = 2y$
- Wir setzen in die Cauchy-Riemann-Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ ein
  $u_x = v_y:\ 2x = 2y$
  $u_y = -v_x:\ 0 = 0$
- Beide Gleichungen gelten nur dort, wo $2(x - y) = 0$. Dort ist die Funktion differenzierbar, aber keine Umgebung eines Punktes erfüllt sie ganz – die Funktion ist nirgends holomorph.

Die harmonisch konjugierte Funktion und f(z) = z² + z.

Eingabe: `harmonic(u = x^2 - y^2 + x)`

Ergebnis

$v = 2xy + y + C, \quad f(z) = z^2 + z +$

Lösungsweg

- Gegeben ist der Realteil u: $u = x^2 - y^2 + x$
- Wir prüfen, dass sie harmonisch ist – ihr Laplace-Operator ist null: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$
- Aus der ersten Cauchy-Riemann-Gleichung $v_y = u_x$ erhalten wir v durch Integration nach y – die „Konstante“ darf von x abhängen:
  $v_y = u_x = 2x + 1 \ \Rightarrow\ v = \int 2x + 1\, dy = 2xy + y + C(x)$
- C(x) bestimmen wir aus der zweiten Gleichung $v_x = -u_y$:
  $v_x = 2y + C'(x) = -u_y = 2y \ \Rightarrow\ C'(x) = 0,\ C(x) = 0 + C$
- Die harmonisch konjugierte Funktion: $v = 2xy + y + C$
- Wir schreiben f(z) = u + iv in z – es genügt, x = z und y = 0 einzusetzen:
  $f = u + i\,v,\ x = z,\ y = 0:\ f(z) = z^2 + z + iC$

Der Hauptwert des Logarithmus und alle seine Werte.

Eingabe: `ln(1 + i)`

Ergebnis

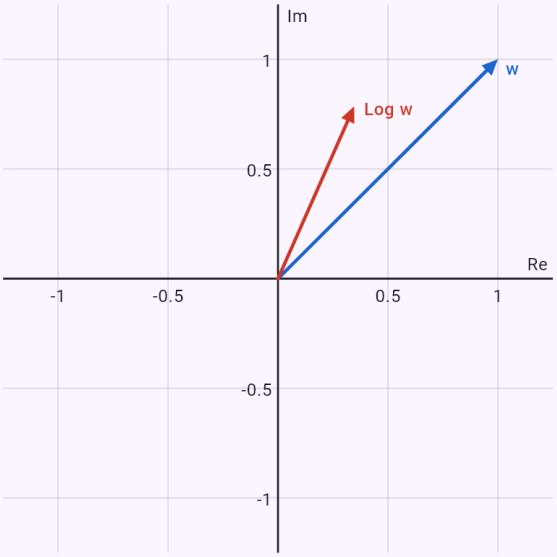
$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}i, \quad \log(1+i)$$

Lösungsweg

- Der Hauptwert des Logarithmus ist $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$, das Argument in $\langle 0; 2\pi)$: $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w$
- Betrag und Hauptargument der Zahl: $|1+i| = \sqrt{2}, \ \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Die Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode 2πi, deshalb hat der Logarithmus unendlich viele Werte – sie unterscheiden sich um Vielfache von 2πi

$$\log(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

i^i ist die reelle Zahl e^(−π/2).

Eingabe: `i^i`

Ergebnis

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$$

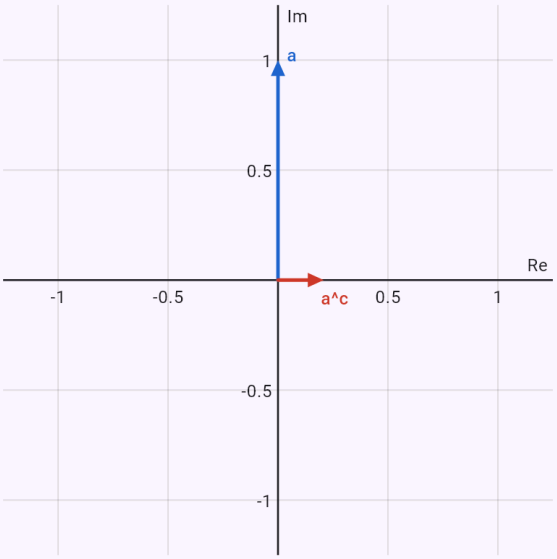
Lösungsweg

- Eine Potenz mit komplexem Exponenten definieren wir über den Hauptwert des Logarithmus (Argument in $\langle 0; 2\pi)$)

$$a^c = e^{c \operatorname{Log} a}, \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i$$

- Wir zerlegen den Exponenten in Real- und Imaginärteil: $c \operatorname{Log} a = i\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Der Hauptwert der Potenz, $e^{X+iY} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}208$
- Mit den übrigen Werten des Logarithmus erhalten wir alle Werte der Potenz: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die gegebenen Zahlen blau, das Ergebnis rot, das Argument φ als Bogen von der positiven reellen Achse.

Die Gleichung sin z = 2 – Substitution w = e^(iz) und eine quadratische Gleichung.

Eingabe: `sin z = 2`

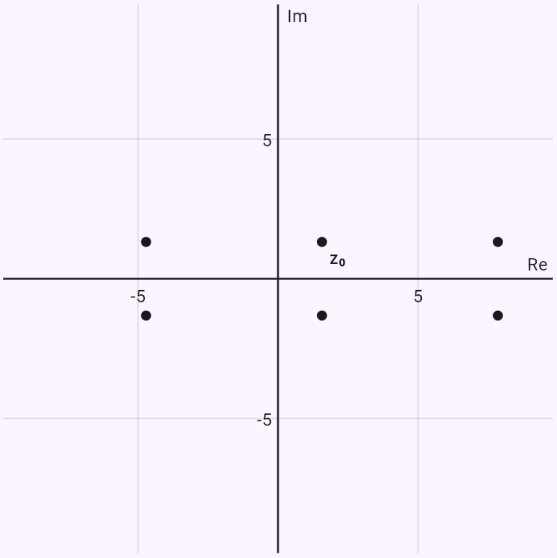
Ergebnis

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Wir schreiben die Funktion mit Exponentialfunktionen und substituieren: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad w = e^{iz}$
- Multiplizieren mit w ergibt eine quadratische Gleichung: $w^2 - 4iw - 1 = 0$
- Ihre Lösungen: $D = -12,\ w_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)i,\ w_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)i$
- Zurück zu z: $iz = \log w$, also $z = -i \log w = \operatorname{Arg} w + 2k\pi - i \ln|w|$ (Argument in $\langle 0; 2\pi)$): $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Lösungen als Punkte: auf der waagerechten Achse der Realteil, auf der senkrechten der Imaginärteil.

Ein Pol niedrigerer Ordnung dank einer Nullstelle des Zählers und ein einfacher Pol.

Eingabe: `singularities(sin(z)/(z^3 (z - 1)))`

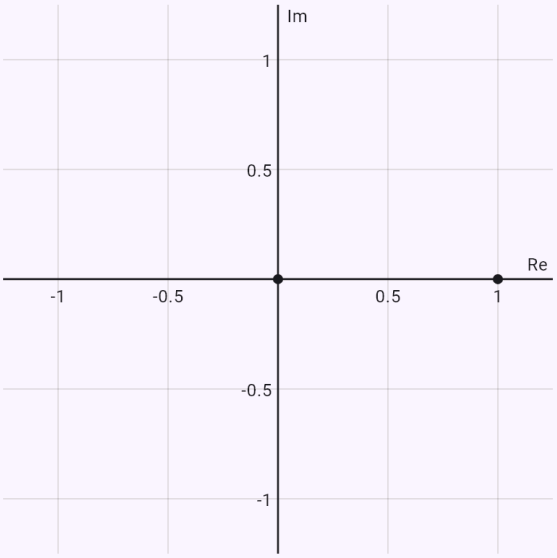
Ergebnis

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f = \sin 1$$

Lösungsweg

- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $z^4 - z^3 = 0:\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$
- In 0 hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 3, der Zähler der Vielfachheit 1 – ein Pol der Ordnung 2
- Das Residuum in einem Pol der Ordnung 2 $\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right], \quad z^2 f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)},$ I
- In 1 hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q $\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1, \quad g = \sin z,\ q' = 4z^$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die singulären Punkte der Funktion.

Eine wesentliche Singularität – das Residuum aus der Laurent-Reihe.

Eingabe: `Res(z^2 e^(1/z), z = 0)`

Ergebnis

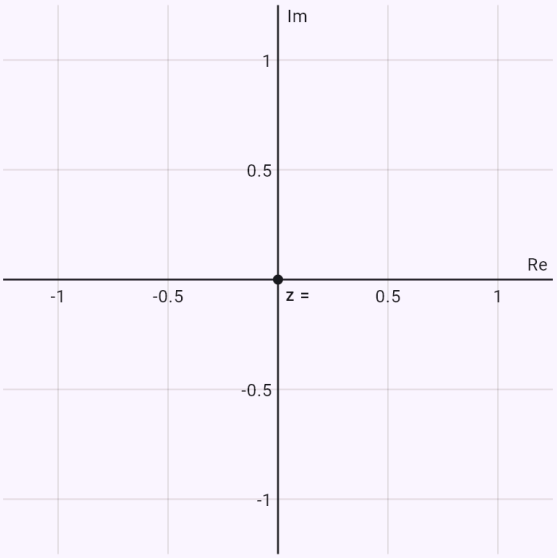
$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{1}{6}$$

Lösungsweg

- In 0 liegt eine wesentliche Singularität – der Exponent (das Argument) hat dort einen Pol und der Hauptteil der Laurent-Reihe ist unendlich.
- Das Residuum ist der Koeffizient c_{-1} von $\frac{1}{z-a}$ in der Laurent-Reihe um 0

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{120z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{2} + z + z^2, \quad c_{-1}$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die singulären Punkte der Funktion.

Die Laurent-Reihe im Kreisring 1 < |z| < 2 – ein Bruch in Potenzen von 1/z, der andere in Potenzen von

z.

Eingabe: `laurent(1/((z - 1)(z - 2)), 1 < |z| < 2)`

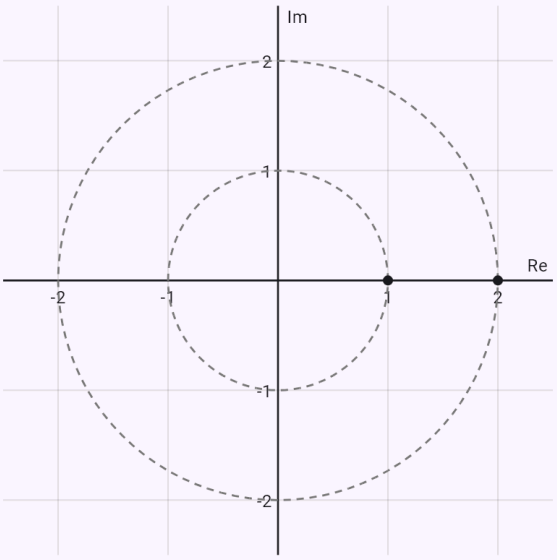
Ergebnis

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z$$

Lösungsweg

- Singuläre Punkte: $z_1 = 1,\ z_2 = 2$. Wir suchen die Laurent-Reihe im Kreisring $1 < |z| < 2$ – darin liegt kein singulärer Punkt.
- Wir zerlegen die Funktion in Partialbrüche (über $\mathbb{C}$):
  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$
- Der Pol des Bruchs liegt innerhalb des inneren Kreises – wir klammern $\frac{1}{z-c}$ aus und verwenden die geometrische Reihe in Potenzen von $\frac{1}{z-c}$
  $$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
- Der Pol des Bruchs liegt außerhalb des Kreisrings – wir klammern eine Konstante aus und verwenden die geometrische Reihe in Potenzen von z − c
  $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$
- Wir addieren die Reihen gliedweise
  $f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 +$
- Das allgemeine Glied: $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – der Kreisring der Laurent-Reihe (gestrichelt) und die singulären Punkte.

Der Residuensatz bei einem Pol 2. Ordnung.

Eingabe: `oint(e^z/(z - i)^2, |z - i| = 1)`

Ergebnis

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, e^i$$

Lösungsweg

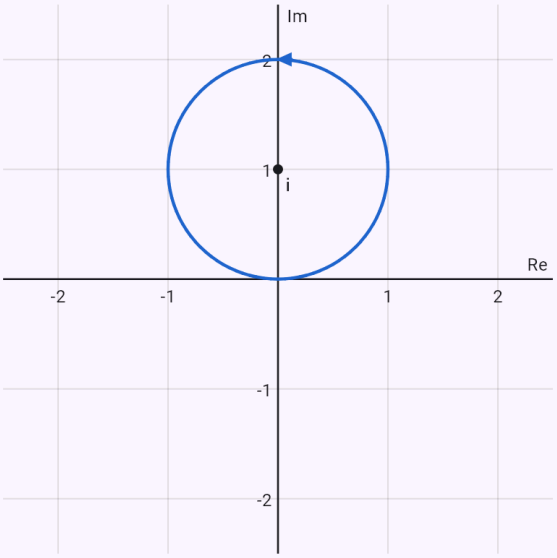
- Wir integrieren über den Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 1, gegen den Uhrzeigersinn: $|z-i|=1$
- Innerhalb des Kreises liegen die singulären Punkte $z_0 = i$, außerhalb $\emptyset$
- In i hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 2, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 2
- Das Residuum in einem Pol der Ordnung 2

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big[(z-i)^2 f(z)\Big], \quad (z-i)^2 f(z) = \,$$

- Nach dem Residuensatz

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f = 2\pi i\big(e^i\big) = 2\pi i\, e^i$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – der Kreis, über den wir integrieren (der Pfeil zeigt die Richtung), und die singulären Punkte.

Ein uneigentliches Integral mit Kosinus – Lemma von Jordan.

Eingabe: `int(cos(x)/(x^2 + 1), x, -oo, oo)`

Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \approx 1{,}1557$$

Lösungsweg

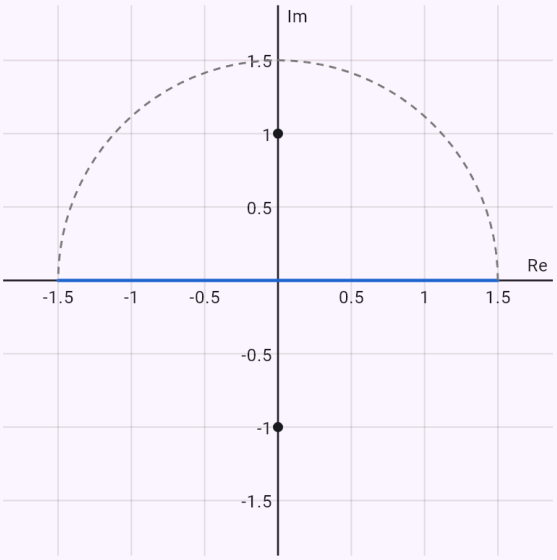
- Mit Kosinus oder Sinus genügt $\deg Q \geq \deg P + 1$ und Q ohne reelle Nullstellen – das Integral über den Halbkreis geht dann nach dem Lemma von Jordan gegen null: $R(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Der Kosinus ist der Realteil von e^{iax}
- Wir schließen die reelle Achse mit einem großen Halbkreis in der oberen Halbebene. Darin liegen die Pole $z_0 = i$, das Integral über den Halbkreis geht gegen null.
- In i hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{\frac{1}{e}}{2i} = \frac{-\frac{1}{2}i}{e}, \quad g = e^{iz},\ q' = 2z$$

- Nach dem Residuensatz ist das Integral 2πi mal die Summe der Residuen in der oberen Halbebene:

$$2\pi i\left(\frac{-\frac{1}{2}i}{e}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{e}$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die reelle Achse, mit einem Halbkreis in der oberen Halbebene geschlossen (gestrichelt), und die Pole des Integranden.

Ein Integral über ⟨0; 2π⟩ als Integral über den Einheitskreis.

Eingabe: `int(1/(2 + cos(t)), t, 0, 2pi)`

Ergebnis

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + 2}\, dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3{,}6276$$

Lösungsweg

- Das Integral über ⟨0; 2π⟩ wird durch die Substitution zu einem Integral über den Einheitskreis

  $$z = e^{it},\ \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ dt = \frac{dz}{iz}$$

- Nach Einsetzen und Vereinfachen erhalten wir ein Integral einer rationalen Funktion über |z| = 1:

  $$\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}\, dz$$

- Innerhalb des Kreises liegen die singulären Punkte $z_0 = -2 + \sqrt{3}$, außerhalb $z_0 = -2 - \sqrt{3}$

- In $-2 + \sqrt{3}$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1

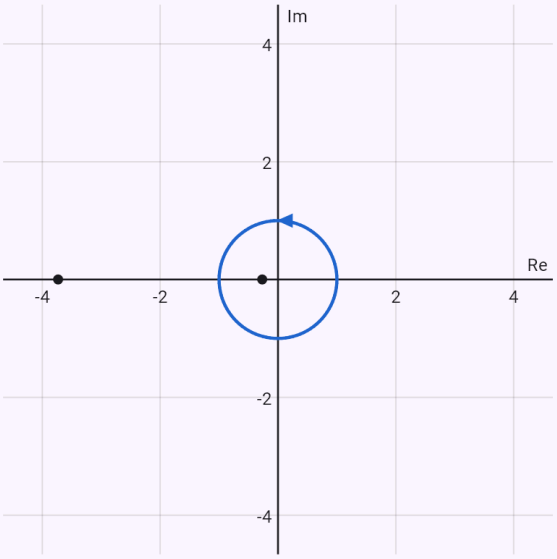
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

  $$\operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f = \frac{g(-2+\sqrt{3})}{q'(-2+\sqrt{3})} = \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3}, \quad g =$$

- Nach dem Residuensatz

  $$\oint_C f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f = 2\pi i \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – der Einheitskreis z = e^(it) und die Pole des Integranden.

Σ 1/n² = π²/6 – das Residuum in null, wo auch der Kern einen Pol hat.

Eingabe: `residues(sum(1/n^2, n, 1, oo))` Mit Residuen

Ergebnis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Berechnung des Integrals oder der Summe

Der übliche Weg | ✓ Mit Residuen

Lösungsweg

- Die Funktion π cot πz hat in jeder ganzen Zahl n einen einfachen Pol mit Residuum 1. Das Integral über ein großes Quadrat geht gegen null, also ist die Reihensumme minus die Summe der Residuen in den Polen von R

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum \operatorname{Res}\left[\pi \cot \pi z \cdot R(z)\right], \quad R(z) = \frac{1}{z^2}$$

- Die Bedingung $\deg Q \geq \deg P + 2$ gilt: $\deg Q = 2,\ \deg P = 0$
- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $z^2 = 0 :\ z_0 = 0$
- In 0 haben R und der Kern einen Pol – das Residuum ist der Koeffizient von 1/z ihres Produkts

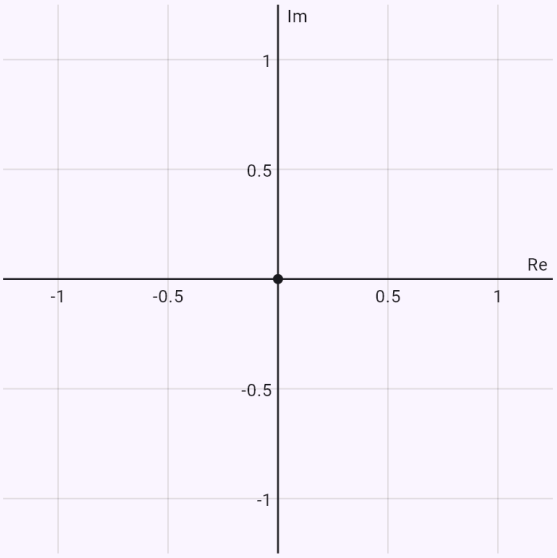
$$\pi \cot \pi z \cdot R(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} + \cdots, \quad \operatorname{Res}_{z=0} = -$$

- Die Summe über alle ganzen Zahlen:

$$\sum_{n \neq 0} R(n) = -\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

- R ist gerade, R(−n) = R(n), also ist die Summe ab 1 die Hälfte (ohne das Glied n = 0): $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} = \frac{\pi^2}{6}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Pole von R(z); der Kern π cot πz hat zusätzlich Pole in allen ganzen Zahlen.

Satz von Rouché – vier Nullstellen im Kreisring 1 < |z| < 2.

Eingabe: `rouche(z^5 + 3z + 1, 1 < |z| < 2)`

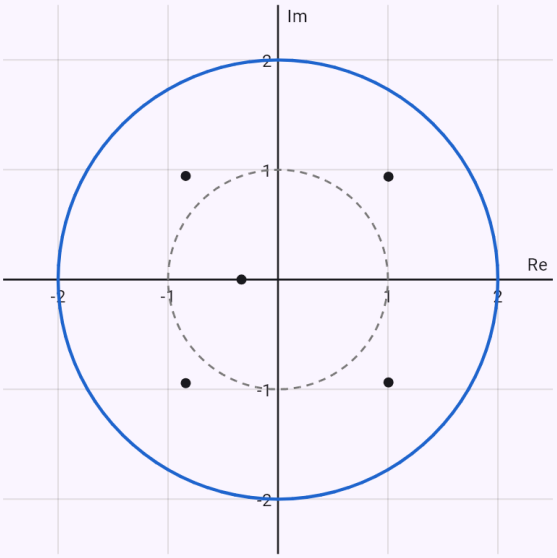
Ergebnis

$$N(1 < |z| < 2) = 4$$

Lösungsweg

- Auf dem Kreis |z| = 2 überwiegt das Glied z^5 die Summe der übrigen – nach dem Satz von Rouché hat das Polynom in der Kreisscheibe so viele Nullstellen wie z^5, also 5: $|1| = 1,\ |3z| = 6,\ |z^5| = 32, \quad 32 > 7$
- Auf dem Kreis |z| = 1 überwiegt das Glied $3z$ die Summe der übrigen – nach dem Satz von Rouché hat das Polynom in der Kreisscheibe so viele Nullstellen wie $3z$, also 1: $|1| = 1,\ |3z| = 3,\ |z^5| = 1, \quad 3 > 2$
- Im Kreisring ist es die Differenz der Anzahlen in der größeren und der kleineren Kreisscheibe: $5 - 1 = 4$
- Zur Kontrolle die Nullstellen numerisch $-0{,}839 - 0{,}944i,\ -0{,}839 + 0{,}944i,\ -0{,}332,\ 1{,}005 + 0$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Kreise und die Nullstellen des Polynoms (numerisch berechnet).

Eine Möbius-Transformation – die obere Halbebene auf den Einheitskreis.

Eingabe: `w = (z - i)/(z + i)`

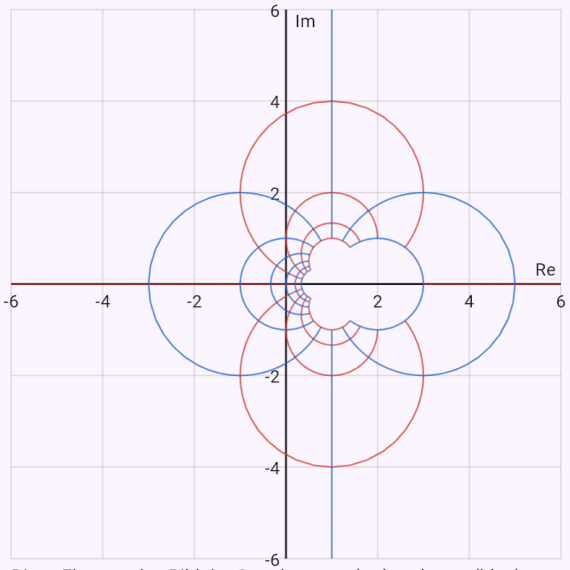
Ergebnis

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Lösungsweg

- Wir schreiben die Abbildung komponentenweise $w = u + iv, \quad u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},\ v = -\frac{2x}{x^2 + y^2 +}$
- Die Abbildung ist überall außer im Pol $z_0 = -i$ konform: $f'(z) = \frac{2i}{z^2 + 2iz - 1}$
- Es ist eine Möbius-Transformation $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ $\alpha = 1,\ \beta = -i,\ \gamma = 1,\ \delta = i, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 2i \neq 0$
- Die Fixpunkte lösen die Gleichung f(z) = z $z^2 + (-1 + i)z + i = 0 :\ z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i,\ z$
- Die reelle Achse wird abgebildet auf $|w| = 1$
- Die imaginäre Achse wird abgebildet auf $\mathrm{Im}\, w = 0$
- Der Einheitskreis wird abgebildet auf $\mathrm{Re}\, w = 0$
- Der Graph zeigt das Bild eines Gitters – der Geraden x = c (rot) und y = c (blau) für |c| ≤ 2 in Schritten von $0{,}5$

Graph



Die w-Ebene – das Bild der Geraden x = c (rot) und y = c (blau) unter w = f(z).

Die inverse Laplace-Transformation als Summe von Residuen.

Eingabe: `invlaplace(s/((s + 1)(s^2 + 4)))`

Ergebnis

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$$

Lösungsweg

- Die inverse Laplace-Transformation einer rationalen Funktion ist die Summe der Residuen von $F(s)\,e^{st}$ in allen Polen von F

  $$f(t) = \sum \mathrm{Res}\left[F(s)\,e^{st}\right], \quad F(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0:\ s_1 = -1,\ s_2 = -2i,\ s_3 = 2i$
- In -1 hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=-1} f = \frac{g(-1)}{q'(-1)} = \frac{\sinh t - \cosh t}{5} = -\frac{e^{-t}}{5}, \quad g =$$

- In $-2i$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

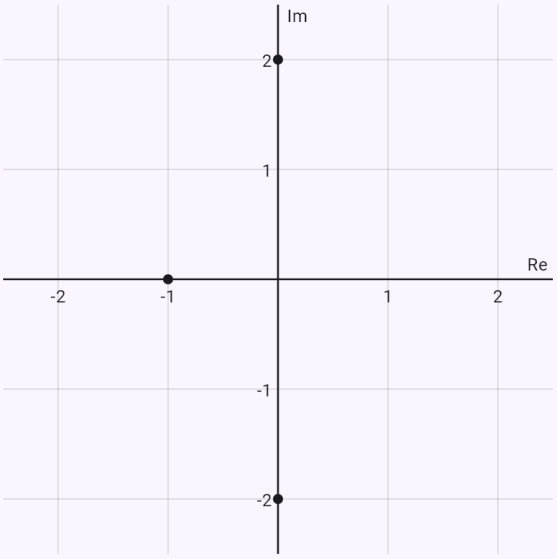
  $$\mathrm{Res}_{s=-2i} f = \frac{g(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2ie^{-2it}}{-8 - 4i} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right)e^{-2it},$$

- In $2i$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

  $$\mathrm{Res}_{s=2i} f = \frac{g(2i)}{q'(2i)} = \frac{2ie^{2it}}{-8 + 4i} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\right)e^{2it}, \quad g =$$

- Wir addieren die Residuen und schreiben das Ergebnis reell: $f(t) = -\frac{e^{-t}}{5} + \frac{\cos(2t)}{5} + \frac{2\sin(2t)}{5}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Pole von F(s).

Fourier-Transformation der Lorentz-Funktion: π·e^(−|ω|).

Eingabe: `ftransform(1/(1 + t^2))`

Ergebnis

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Lösungsweg

- Fourier-Transformation einer rationalen Funktion: Wir schließen das Integral mit einem großen Halbkreis (Jordan-Lemma) und addieren die Residuen

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $t^2 + 1 = 0:\ t_1 = -i,\ t_2 = i$
- In $-i$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{1}{2} i e^{-w}, \quad g = e^{-itw},\ q' =$$

- In i hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{t=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2i} = -\frac{1}{2} i e^{w}, \quad g = e^{-itw},\ q' = 2t$$

- Für ω > 0 schließen wir den Weg in der unteren Halbebene (negativer Umlauf, −2πi)

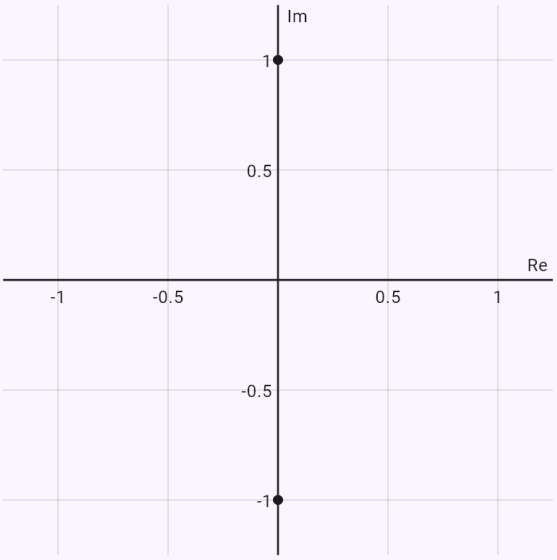
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k < 0} \mathrm{Res} = \pi e^{-\omega}$$

- Für ω < 0 schließen wir den Weg in der oberen Halbebene (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, t_k > 0} \mathrm{Res} = \pi e^{\omega}$$

- Ergebnis - die Fourier-Transformation: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Pole von F(s).

Charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung e^(−|t|).

Eingabe: `ftransform(1/(pi (1 + x^2)))`

Ergebnis

$$F(\omega) = e^{-|\omega|}$$

Lösungsweg

- Fourier-Transformation einer rationalen Funktion: Wir schließen das Integral mit einem großen Halbkreis (Jordan-Lemma) und addieren die Residuen

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi x^2 + \pi}$$

- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $\pi x^2 + \pi = 0: \; x_1 = -i, \; x_2 = i$
- In $-i$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=-i} f = \frac{g(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-w}}{-2\pi i} = \frac{\frac{1}{2}ie^{-w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q$$

- In i hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{x=i} f = \frac{g(i)}{q'(i)} = \frac{e^{w}}{2\pi i} = \frac{-\frac{1}{2}ie^{w}}{\pi}, \quad g = e^{-iwx}, \; q' = 2$$

- Für ω > 0 schließen wir den Weg in der unteren Halbebene (negativer Umlauf, −2πi)

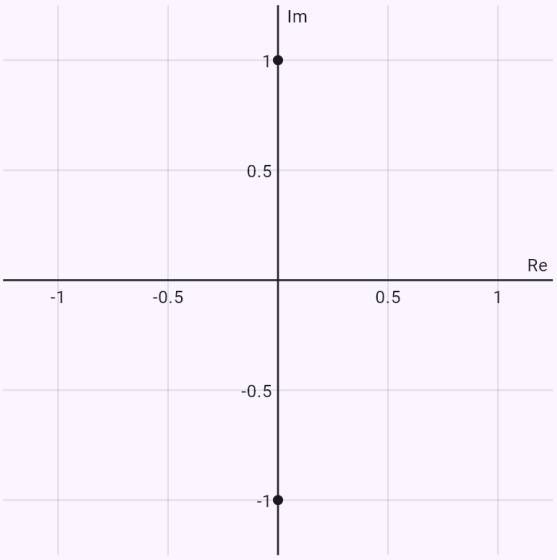
$$\omega > 0: \quad F(\omega) = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k < 0} \mathrm{Res} = e^{-\omega}$$

- Für ω < 0 schließen wir den Weg in der oberen Halbebene (+2πi)

$$\omega < 0: \quad F(\omega) = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, x_k > 0} \mathrm{Res} = e^{\omega}$$

- Ergebnis - die Fourier-Transformation: $F(\omega) = e^{-|\omega|}$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Pole von F(s).

Inverse Z-Transformation mit zwei Polen: x[n] = 2 − 2⁻ⁿ.

Eingabe: `invz(z^2/((z - 1)(z - 1/2)))`

Ergebnis

$$x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

Lösungsweg

- Die inverse Z-Transformation ist die Summe der Residuen von $F(z)z^{n-1}$ in den Polen von F

$$x[n] = \sum \mathrm{Res}\left[F(z)\, z^{n-1}\right], \quad F(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Die singulären Punkte – die Nullstellen des Nenners: $2z^2 - 3z + 1 = 0 : \; z_1 = \frac{1}{2}, \; z_2 = 1$
- In $\frac{1}{2}$ hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

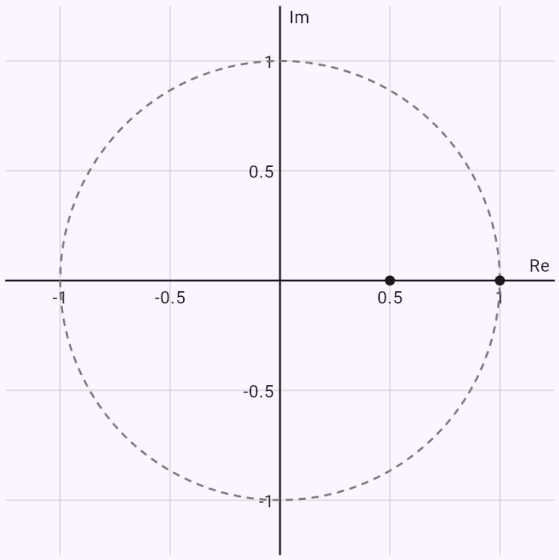
$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}} f = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{q'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{-n}}{-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4$$

- In 1 hat der Nenner eine Nullstelle der Vielfachheit 1, der Zähler der Vielfachheit 0 – ein Pol der Ordnung 1
- Das Residuum in einem einfachen Pol, f = g/q

$$\mathrm{Res}_{z=1} f = \frac{g(1)}{q'(1)} = \frac{2}{1} = 2, \quad g = 2z^{n+1}, \; q' = 4z - 3$$

- Den Anfangswert liefert der Grenzwert für z → ∞: $x[0] = \lim_{z \to \infty} F(z) = 1$
- Wir addieren die Residuen: $x[n] = 2 - 2^{-n}, \quad n \geq 0$

Graph



Gaußsche Zahlenebene – die Pole von F(s).

Bekannte Einschränkungen

- Singularitäten findet die App bei Funktionen mit einem Polynom im Nenner (und den wesentlichen Singularitäten von e^h, sin h, cos h); ein Nenner wie sin z (unendlich viele Pole) geht noch nicht.
- Die Laurent-Reihe im Kreisring geht bei rationalen Funktionen, bei einer wesentlichen Singularität nur um den Punkt, wenn die Funktion keine andere Singularität hat.
- Integrale über andere Kurven als Kreise (Quadrat, Ellipse), der Hauptwert eines Integrals mit Pol auf der Achse und das allgemeine Argumentprinzip gehen noch nicht.
- Die Summe einer Reihe ab 1 mit Residuen geht nur für eine gerade rationale Funktion R; Pole von R in ganzen Zahlen außer null sind nicht zulässig.
- Eine konforme Abbildung zeigt das Bild eines Gitters; das Bild eines gegebenen Gebiets (Halbebene, Streifen) nur für die Achsen und den Einheitskreis einer Möbius-Transformation.
- Die Fourier-Transformation geht für rationale Funktionen ohne Pole auf der reellen Achse, die inverse Z-Transformation für rationale Funktionen ohne Pol in null.

36. Differentialgleichungen

Die App löst gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung: separierbare, lineare, exakte, homogene ($y' = f(y/x)$), Bernoullische Gleichungen und Gleichungen $y' = f(ax + by + c)$. Sie erkennt den Typ selbst und zeigt den Lösungsweg wie in der Schule – Trennung der Variablen, Variation der Konstanten oder integrierender Faktor, Substitution, Stammfunktion einer exakten Gleichung. Die Integrale im Lösungsweg haben eigene Schritte. Die Lösung prüft sie: Lösung und Ableitung werden in die Gleichung eingesetzt und beide Seiten auf dieselbe Form gebracht.

Höhere Ordnungen: lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten beliebiger Ordnung über die charakteristische Gleichung (auch mehrfache und komplexe Nullstellen), eine partikuläre Lösung nach der speziellen rechten Seite (auch Resonanz und Summe rechter Seiten) oder durch Variation der Konstanten, ein Anfangswertproblem in null auch mit der Laplace-Transformation (Chip „Methode“). Außerdem die Eulersche Gleichung mit $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ durch wiederholtes Integrieren und die Reduktion der Ordnung – wenn y fehlt ($p = y'$) oder x ($y' = p(y)$).

Die Gleichung $y' = y\cdot(a(x)\cdot\ln y + b(x))$ wird durch die Substitution $z = \ln y$ linear. Eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten wird gelöst, wenn sich eine Lösung erraten lässt (x^k, e^{cx}, …): die zweite durch Reduktion der Ordnung (d'Alembert), die rechte Seite durch Variation der Konstanten. Die Ordnung wird auch um mehr als eins reduziert ($p = y^{(m)}$ mit einer Gleichung 2. Ordnung für p). Bei Parametern werden Fälle unterschieden – ein gedämpfter Oszillator nach dem Vorzeichen von $\delta^2 - \omega^2$ (Kriechfall, aperiodischer Grenzfall, Schwingfall), eine Resonanz ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ für $\omega = 2$) und das Vorzeichen einer Konstanten, von dem das Integral abhängt ($y'' = 2yy'$). Die Laplace-Transformation löst auch Anfangswertprobleme an einer anderen Stelle als 0 (Verschiebung $\tau = t - t_0$) und mit Parametern.

Eine Riccati-Gleichung $y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$ wird gelöst, wenn eine partikuläre Lösung y_1 bekannt ist: in der nächsten Zeile angegeben (y1 = 1/x) oder in einfacher Form erraten (eine Konstante, ax, a/x, ax^2, ae^{±x}, x + a). Die Substitution $y = y_1 + 1/z$ macht sie dann linear. Gleichungen, die in y' nicht linear sind: die Clairautsche $y = x\cdot y' + \psi(y')$ – die Geraden $y = Cx + \psi(C)$ und die singuläre Lösung (ihre Einhüllende) – und die Lagrangesche $y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y')$ mit einer Lösung in Parameterdarstellung (Parameter $p = y'$).

Das Ergebnis ist die allgemeine Lösung mit einer Konstanten C, bei höheren Ordnungen mit Konstanten C_1, C_2, … (explizit, wo das nicht geht, implizit); mit Bedingungen die Lösung, die sie erfüllt – Anfangs- und Randbedingungen, auch die Fälle „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“. Durch Division verlorene konstante Lösungen findet die App ebenfalls. Jede Lösung wird durch Einsetzen in die Gleichung geprüft. Der Graph zeigt bei 1. Ordnung das Richtungsfeld und Lösungen für verschiedene C, bei höheren Ordnungen Lösungen für verschiedene Konstanten; bei einer autonomen Gleichung 2. Ordnung (ohne x) zeigt ein Umschalter auch die Phasenebene (y, y'). Unter dem Graphen können Sie eigene Werte der Konstanten eingeben und ihre Kurve hinzufügen; der Schalter „Standardkurven“ blendet die von der App gewählten aus. Ein Tippen in den Graphen zeichnet die Lösung durch diesen Punkt ein –

bei einer linearen Gleichung 2. Ordnung stellen Sie zusätzlich mit einem Schieberegler die Tangentensteigung im Punkt ein.

Ein System von zwei linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten (x′ = 2x + y, y′ = x + 2y, auch dx/dt) über die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix – reell, komplex und doppelt – mit den Anfangsbedingungen x(0), y(0). Der stationäre Punkt [0; 0] wird eingeordnet (Knoten, Sattel, Strudel, Zentrum), die Phasenebene gezeigt.

Die Oszillation einer linearen Gleichung 2. Ordnung (jede Lösung hat unendlich viele Nullstellen) untersucht der Befehl oscillation(y" + x y = 0), auch für eine Gleichung in selbstadjungierter Form (x y')' + y/x = 0 oder mit y′ (die App bringt sie in diese Form). Der Lösungsweg: exakt für konstantes q und die Eulersche Gleichung y″ + (k/x²)y = 0 mit der Grenze k = 1/4, die Kriterien von Leighton–Wintner und Kneser (im kritischen Fall auch der Vergleich mit der Riemann-Weber-Gleichung), die Riccati-Substitution w = r y′/y, die Prüfer-Transformation und die numerische Zählung der Nullstellen auf einem Intervall (nach einem Semikolon: ; ⟨1; 50⟩) mit der Sturmschen Abschätzung ihres Abstands. Eine halblineare Gleichung (|y'| y')' + q |y| y = 0 (allgemein der Exponent |y'|^(p−2)) wird mit der kritischen Konstante ((p − 1)/p)^p beurteilt, das diskrete Gegenstück Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0 (auch Δ(r_n Δy_n)) nach verallgemeinerten Nullstellen. Der Graph zeigt die Lösung mit ihren Nullstellen und den Prüfer-Winkel φ.

Die Asymptotik der Lösungen einer nichtlinearen Gleichung mit p-Laplace-Operator (a(x)|y′|^α sgn y′)′ = b(x)|y|^β sgn y mit positiven a, b untersucht der Befehl asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3) (tschechisch auch asymptotika(...)); |y'|^k y' und |y|^k y lassen sich auch mit sgn, als ungerade Potenz (y')³, y³ und für α = 1 als (a y')' oder y" schreiben. Die Lösungen werden nach den Grenzwerten von y und der Quasiableitung y^[1] = a|y′|^α sgn y′ in die Klassen M^+ (|y| wächst) und M^- (|y| fällt) eingeteilt. Bei einer halblinearen Gleichung (β = α) berechnet die App die Integrale J_1, J_2, Y_1, Y_2 (mit Symja, sonst durch Vergleich des Potenz- und Logarithmusverhaltens), bestimmt einen der Fälle C1–C8 und die nicht leeren Klassen nach Satz 3.1 von Z. Došlá und M. Marini, Asymptotic Properties of Solutions to Half-Linear Differential Equation with Negative Potential (QUALITDE 2020), und zeigt die reziproke Gleichung. Bei einer Gleichung vom Emden-Fowler-Typ mit β ≠ α verwendet sie die Sätze aus M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation (Georgian Mathematical Journal 7, 2000): superlinearer und sublinearer Fall, stark und schwach wachsende und regulär abklingende Lösungen. Der Graph zeigt numerische Lösungen der nicht leeren Klassen (M^- durch Schießen) und darunter ihre Quasiableitungen. Den Anfang des Intervalls geben Sie nach einem Semikolon an (; x ≥ 1). Bei einer Gleichung mit negativem q bietet die Oszillation den Chip Asymptotik der Lösungen an, die Asymptotik umgekehrt den Chip Oszillation der Gleichung.

Eingabe

`y' = x*y`	Die Ableitung mit Strich.

`dy/dx = x y^2`	Leibniz-Schreibweise – sie nennt auch die Variable (dm/dt, dT/dt).
`\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x`	Schreibweise aus einem Foto.
`(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`	Die Form M dx + N dy = 0 (exakte Gleichung).
`y' = y^2 + 1, y(0) = 1`	Eine Anfangsbedingung nach einem Komma oder in der nächsten Zeile.
`dm/dt = m + 2, m(0) = 0`	Funktion und Variable können beliebige Buchstaben sein.
`y' = y^2 - 2/x^2; y1 = 1/x`	Eine bekannte partikuläre Lösung einer Riccati-Gleichung in der nächsten Zeile (oder nach einem Semikolon).
`y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)`	Eine Gleichung höherer Ordnung – die Ableitungen mit mehreren Strichen.
`y^{(4)} + 2y'' + y = 0`	Höhere Ableitungen als y^{(4)} (auch vom Foto).
`y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2`	Anfangsbedingungen y(0), y′(0) – oder Randbedingungen in verschiedenen Punkten.
`\ddot{x} + \omega^2 x = 0`	Newtons Punkte (Ableitungen nach der Zeit t) und griechische Parameter.
`x' = 2x + y, y' = x + 2y`	Ein System von zwei linearen Gleichungen – nach einem Komma oder auf Zeilen, mit den Bedingungen x(0) = …, y(0) = ….
`oscillation(y'' + q(x) y = 0; ⟨a; b⟩)`	Oszillation einer Gleichung 2. Ordnung, wahlweise mit Intervall für die Nullstellen.
`oscillation((|y'| y')' + q(x) |y| y = 0)`	Eine halblineare Gleichung (hier p = 3).
`oscillation(Δ^2 y_n + q_n y_{n+1} = 0)`	Das diskrete Gegenstück – eine lineare Rekursion 2. Ordnung.
`asymptotics((a(x) |y'|^(α-1) y')' = b(x) |y|^(β-1) y; x ≥ x₀)`	Asymptotik der Lösungen einer Gleichung mit p-Laplace-Operator, wahlweise mit dem Anfang des

Intervalls.

Beispiele

Getrennte Variablen – die allgemeine Lösung und das Richtungsfeld.

Eingabe: `y' = x*y`

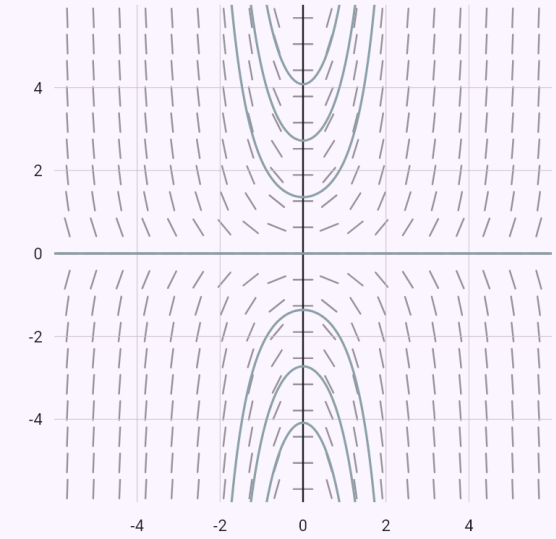
Ergebnis

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = xy$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x\,dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- Die konstante Lösung $y = 0$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für C = 0 enthalten.
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab $\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich: $Cxe^{\frac{x^2}{2}} = xCe^{\frac{x^2}{2}}$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Die Anfangsbedingung bestimmt die Konstante C.

Eingabe: `y' = y^2 + 1, y(0) = 1`

Ergebnis

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

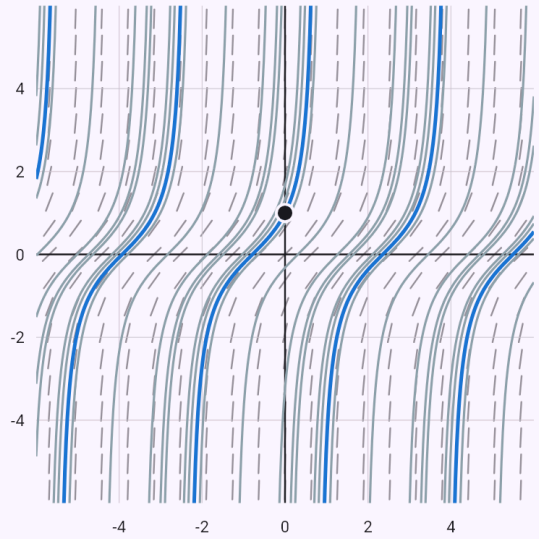
Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Lösungsweg

- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = y^2 + 1$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2+1} = dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1\,dx = x$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $\arctan y = x + C$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = \tan(x + C)$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ein: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab $\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt und mit der Identität $1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ vereinfacht – beide Seiten sind gleich

$$\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall. Hervorgehoben ist die Lösung der Anfangsbedingung; der Punkt ist die Anfangsbedingung.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C | + Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Eine lineare Gleichung durch Variation der Konstanten.

Eingabe: `y' + 2y = e^x` Variation der Konstanten

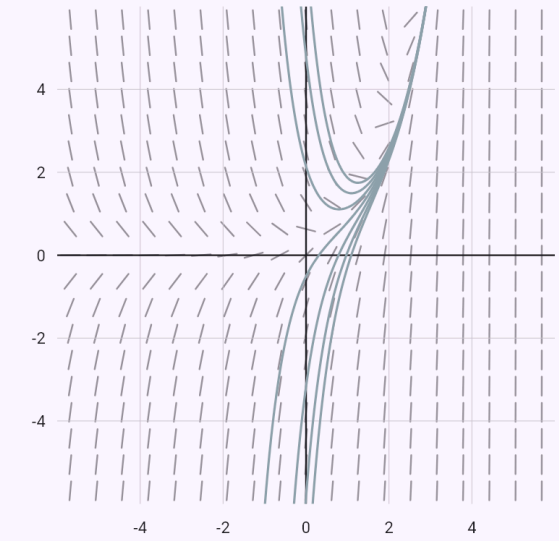
Ergebnis

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 1. Ordnung y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y' + 2y = 0$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2\,dx = 2x$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $y = C(x)\,e^{-2x}$; eingesetzt in die Gleichung: $C'(x)\,e^{-2x} = e^x$
- Daraus $C'(x) = e^{3x}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Wir integrieren: $C(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Dieselbe Gleichung mit integrierendem Faktor.

Eingabe: `y' + 2y = e^x` Integrierender Faktor

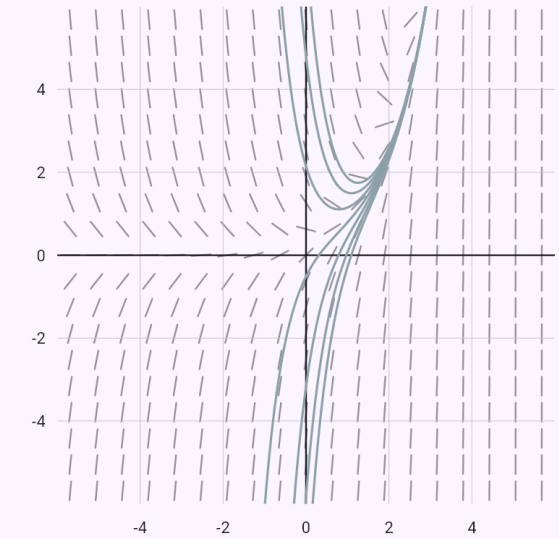
Ergebnis

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 1. Ordnung y' + p(x)·y = q(x): $y' + 2y = e^x$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2\,dx = 2x$
- Der integrierende Faktor: $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$
- Wir multiplizieren mit dem integrierenden Faktor – die linke Seite ist die Ableitung eines Produkts: $\left(ye^{2x}\right)' = e^{3x}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Wir integrieren beide Seiten: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab: $\left(Ce^{-2x}\right)' = C \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -2Ce^{-2x}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich: $\left(\frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}\right) = e^x$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Eine homogene Gleichung – die Substitution u = y/x.

Eingabe: `y' = (x - y)/(x + y)`

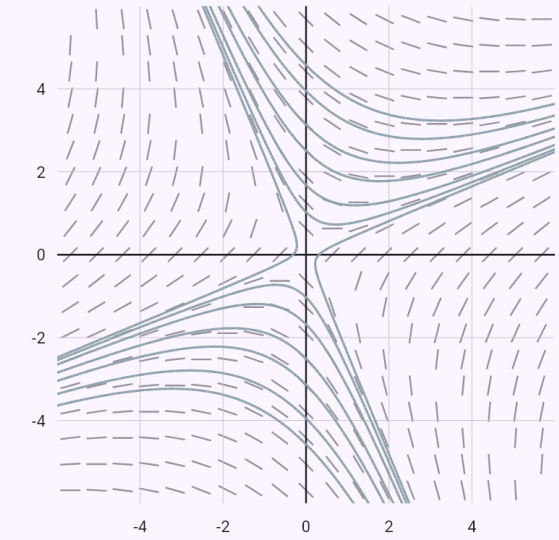
Ergebnis

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine homogene Gleichung – die rechte Seite hängt nur vom Quotienten y/x ab: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
- Die Substitution $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + xu'$ führt die Gleichung über in $xu' = -u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\dfrac{1}{x}\,dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\displaystyle\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\displaystyle\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du$
- Im Zähler steht die Ableitung des Nenners (oder ihr Vielfaches), f(x) = $-u^2 - 2u + 1$, nach der Formel $\displaystyle\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \ln|f(u)| + C$
  $\displaystyle\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1}\,du = -\ln$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\displaystyle\int -\frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $\dfrac{\ln|-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln|x|$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante ±e^C heißt wieder C: $-u^2 - 2u + 1 = \dfrac{C}{x^2}$
- Die konstante Lösung $u = -1 - \sqrt{2}$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für C = 0 enthalten.
- Die konstante Lösung $u = -1 + \sqrt{2}$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für C = 0 enthalten.
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $\dfrac{x^2-2xy-y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Eine Bernoullische Gleichung – die Substitution z = y^(1−n) und die konstante Lösung y = 0.

Eingabe: `xy' - y = -xy^2`

Ergebnis

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Lösungsweg

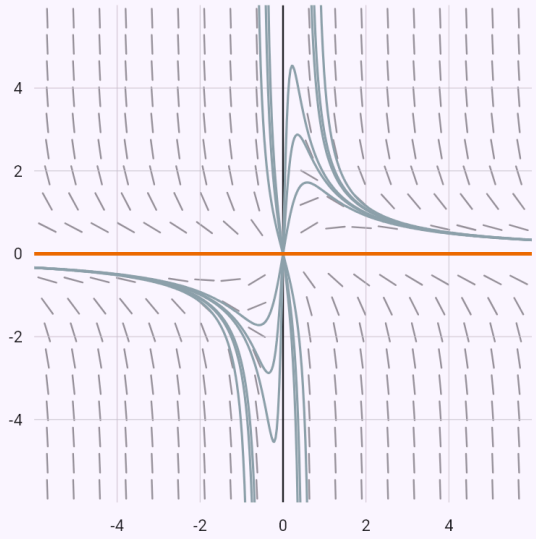
- Eine Bernoullische Gleichung y' + p(x)·y = q(x)·y^n: $y' - \frac{y}{x} = -y^2$
- Die Substitution $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1\,\frac{1}{y^2}y'$ führt die Gleichung über in $z' + \frac{z}{x} = 1$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $z' + \frac{z}{x} = 0$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Lösung der homogenen Gleichung: $z_h = \frac{C}{x}$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; eingesetzt in die Gleichung: $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$
- Daraus $C'(x) = x$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Wir integrieren: $C(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- Die allgemeine Lösung: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$
- Durch das Dividieren haben wir die konstante Lösung $y = 0$ ausgeschlossen – sie ist eine weitere Lösung der Gleichung.
- Wir benennen die Konstante um (ein Vielfaches einer beliebigen Konstante ist wieder eine beliebige Konstante): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab

$$\left(\frac{2x}{x^2 + C}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2 + C - x \cdot 2x}{(x^2 + C)^2} = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$$

- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich

$$x\left(\frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}\right) - \left(\frac{2x}{x^2 + C}\right) = -\frac{4x^3}{x^4 + 2Cx^2 +}$$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = 0$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Eine exakte Gleichung – die Stammfunktion F(x, y) = C.

Eingabe: `(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0`

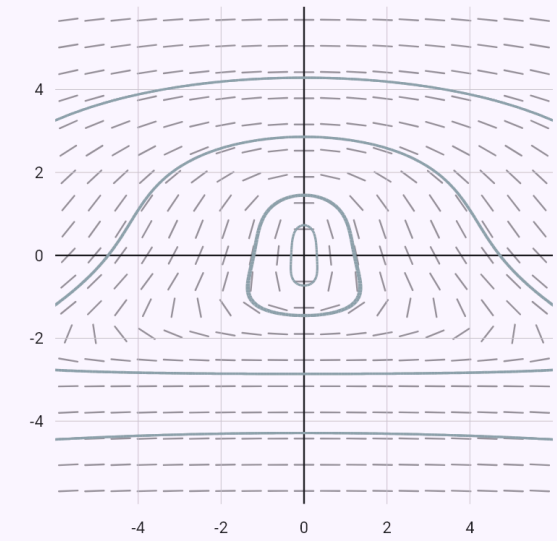
Ergebnis

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine Gleichung M dx + N dy = 0 – wir prüfen, ob sie exakt ist (die linke Seite ein totales Differential): $(2xy + 6x)dx + \left(4y^3 + x^2\right)dy = 0$
- M = $2xy + 6x$, N = $4y^3 + x^2$; die Gleichung ist exakt, denn $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale: $\int (6x + 2yx)\,dx = \int 6x\,dx + \int 2yx\,dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 6x\,dx = 6\int x\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 2yx\,dx = 2y\int x\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
- Die Stammfunktion F durch Integration von M nach x: $F(x, y) = \int (2xy + 6x)\,dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 4y^3\,dy = 4\int y^3\,dy$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}$
- Aus ∂F/∂y = N: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Die Substitution z = x − y; Symja würde hier einen Faktor 2 verlieren, die App prüft das Ergebnis.

Eingabe: `y' = cos(x - y), y(0) = pi/2`

Ergebnis

$$y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Runge–Kutta 4 | Σ Heun | Σ Euler

Lösungsweg

- Die rechte Seite ist eine Funktion von ax + by + c – wir nehmen es als neue Unbekannte: $y' = \cos(x-y)$
- Die Substitution $z = x - y,\ z' = 1 - y'$ führt die Gleichung über in $z' = 1 - \cos z$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $1 - \cos z \neq 0$): $\dfrac{dz}{1-\cos z} = dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\displaystyle\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int dx$
- Keine einfachere Substitution passt – die universelle Substitution $t = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right)$

  $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dz = \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)}$

  $$\int \frac{1}{1-\cos z}\,dz = \int \frac{1}{t^2}$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen: $t = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right)$: $\quad -\cot\left(\dfrac{z}{2}\right)$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\displaystyle\int 1\,dx = x$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $-\cot\left(\dfrac{z}{2}\right) = x + C$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $z = 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- Durch das Dividieren haben wir die konstante Lösung $z = 0$ ausgeschlossen – sie ist eine weitere Lösung der Gleichung.
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $y = x - 2\,\operatorname{arccot}(C - x)$
- Wir benennen die Konstante um (ein Vielfaches einer beliebigen Konstante ist wieder eine beliebige Konstante): $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x + C)$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ein: $\dfrac{\pi}{2} = 2\,\operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $y = x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab

  $$(2\,\operatorname{arccot}(x+1))' = 2\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = -\frac{2}{x^2+2}$$
- Addiert und vereinfacht

  $$y' = 1 - \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+}$$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich

  $$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \cos(x - (x + 2\,\operatorname{arccot}(x+1)))$$

Eine Riccati-Gleichung – die partikuläre Lösung $y_1 = -2/x$ erraten, die Substitution $y = y_1 + 1/z$.

Eingabe: `y' = y^2 - 2/x^2`

Ergebnis

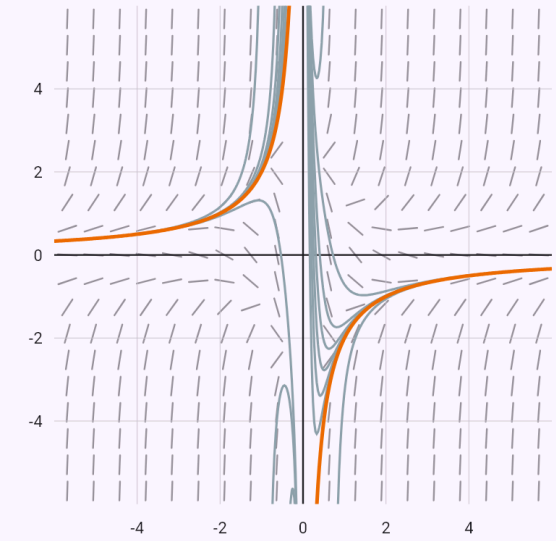
$$y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{2}{x}$$

Lösungsweg

- Eine Riccati-Gleichung y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Ohne partikuläre Lösung lässt sich eine Riccati-Gleichung nicht lösen. Wir versuchen, eine in einfacher Form zu erraten (eine Konstante, ax, a/x, ax², ae^{±x}, x + a) – $y_1 = -\frac{2}{x}$ erfüllt die Gleichung: $y_1' = \frac{2}{x^2}$, und in die rechte Seite eingesetzt ergibt sich dasselbe.
- Die Substitution $y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z}$ führt die Gleichung über in $z' - \frac{4z}{x} = -1$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $z' - \frac{4z}{x} = 0$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -\frac{4}{x}\,dx = -4\int \frac{1}{x}\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Lösung der homogenen Gleichung: $z_h = Cx^4$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $z = C(x)\cdot x^4$; eingesetzt in die Gleichung: $C'(x)\cdot x^4 = -1$
- Daraus $C'(x) = -\frac{1}{x^4}$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -\frac{1}{x^4}\,dx = -\int \frac{1}{x^4}\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$
- Wir integrieren: $C(x) = \int -\frac{1}{x^4}\,dx = C + \frac{1}{3x^3}$
- Die allgemeine Lösung: $z = Cx^4 + \frac{x}{3}$
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $y = \frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}$
- Die Lösung $y = -\frac{2}{x}$ selbst geht bei der Substitution y = y_1 + 1/z verloren (sie entspricht z → ∞) – wir fügen sie dem Ergebnis hinzu.

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab $\left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)' = \frac{(-18Cx^2)\cdot(3Cx^4 + x) - (1 - 6Cx^3}{(3Cx^4 + x)^2}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich $\frac{18C^2x^6 - 24Cx^3 - 1}{9C^2x^8 + 6Cx^5 + x^2} = \left(\frac{1 - 6Cx^3}{3Cx^4 + x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = -\frac{2}{x}$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Dieselbe Gleichung mit der angegebenen partikulären Lösung $y_1 = 1/x$.

Eingabe: `y' = y^2 - 2/x^2`

`y1 = 1/x`

Ergebnis

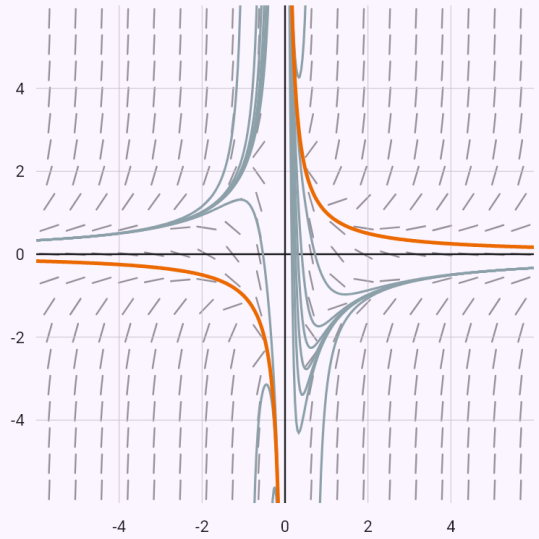
$$y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{1}{x}$$

Lösungsweg

- Eine Riccati-Gleichung y' = P(x)·y² + Q(x)·y + R(x): $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- Die gegebene partikuläre Lösung $y_1 = \frac{1}{x}$ erfüllt die Gleichung: $y_1' = -\frac{1}{x^2}$, und in die rechte Seite eingesetzt ergibt sich dasselbe.
- Die Substitution $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ führt die Gleichung über in $z' + \frac{2z}{x} = -1$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $z' + \frac{2z}{x} = 0$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- Lösung der homogenen Gleichung: $z_h = \frac{C}{x^2}$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $z = C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$; eingesetzt in die Gleichung: $C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = -1$
- Daraus $C'(x) = -x^2$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -x^2\,dx = -\int x^2\,dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
- Wir integrieren: $C(x) = \int -x^2\,dx = C - \frac{x^3}{3}$
- Die allgemeine Lösung: $z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $y = \frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}$
- Die Lösung $y = \frac{1}{x}$ selbst geht bei der Substitution y = y_1 + 1/z verloren (sie entspricht z → ∞) – wir fügen sie dem Ergebnis hinzu.

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab $\left(\frac{-2x^3 - 3C}{x^4 - 3Cx}\right)' = \frac{(-6x^2)\cdot(x^4 - 3Cx) - (-2x^3 - 3C}{(x^4 - 3Cx)^2}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich $\frac{2x^6 + 24Cx^3 - 9C^2}{x^8 - 6Cx^5 + 9C^2x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{(2x^3 + 3C)^2}{(x^4 - 3Cx)^2} = \left(\frac{-2x^3}{x^4 -}\right.$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = \frac{1}{x}$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen – die Lösung durch diesen Punkt wird eingezeichnet.

Eine Clairautsche Gleichung – die Geraden y = Cx + C² und ihre Einhüllende y = −x²/4.

Eingabe: `y = xy' + y'^2`

Ergebnis

$$y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Lösungsweg

- Eine Clairautsche Gleichung y = x·y' + ψ(y'). Wir setzen $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Wir leiten die Gleichung nach x ab (p = y' hängt von x ab, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Ist p' = 0, so ist p konstant, und die allgemeine Lösung bilden Geraden: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Der andere Faktor x + ψ'(p) = 0 ergibt die singuläre Lösung – die Einhüllende aller dieser Geraden. In Parameterdarstellung $x = -2p,\ y = -p^2$, nach Elimination von p: $y = -\frac{x^2}{4}$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = -\frac{x^2}{4}$

Die grauen Geraden sind Lösungen für verschiedene Werte von C; farbig die singuläre Lösung – ihre Einhüllende, die jede Gerade berührt.

Durch den Punkt [2; −1] auf der Einhüllenden geht eine einzige Gerade y = 1 − x – und die Einhüllende selbst.

Eingabe: `y = xy' + y'^2, y(2) = -1`

Ergebnis

$$y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

Lösungsweg

- Eine Clairautsche Gleichung y = x·y' + ψ(y'). Wir setzen $p = y'$: $y = xp + p^2$
- Wir leiten die Gleichung nach x ab (p = y' hängt von x ab, p' = y''): $p = p + (x + 2p)p' \;\Rightarrow\; (x + 2p)p' = 0$
- Ist p' = 0, so ist p konstant, und die allgemeine Lösung bilden Geraden: $p' = 0 \;\Rightarrow\; p = C \;\Rightarrow\; y = Cx + C^2$
- Der andere Faktor x + ψ'(p) = 0 ergibt die singuläre Lösung – die Einhüllende aller dieser Geraden. In Parameterdarstellung $x = -2p,\ y = -p^2$, nach Elimination von p: $y = -\frac{x^2}{4}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(2) = -1$ ein: $-1 = 2C + C^2 \;\Rightarrow\; C = -1$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $y = 1 - x; \quad y = -\frac{x^2}{4}$

Graph



$y = 1 - x$

$y = -\frac{x^2}{4}$

Farbig die Lösungen durch den gegebenen Punkt – Geraden, gegebenenfalls auch die Einhüllende.

Eine Lagrangesche Gleichung – die Lösung in Parameterdarstellung und die Gerade y = 0.

Eingabe: `y = 2xy' + y'^2`

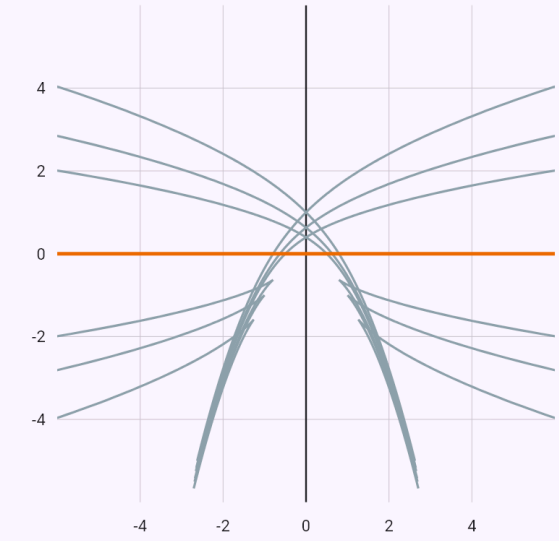
Ergebnis

$$x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine Lagrangesche Gleichung y = x·φ(y') + ψ(y'). Wir setzen $p = y'$: $y = 2xp + p^2$
- Wir leiten die Gleichung nach x ab (p = y' hängt von x ab): $p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$
- Wir suchen x als Funktion von p: aus der Gleichung dx/dp – sie ist linear in der Unbekannten x: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$
- Eine lineare Gleichung 1. Ordnung y' + p(x)·y = q(x): $x' + \frac{2x}{p} = -2$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $x' + \frac{2x}{p} = 0$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \frac{2}{p}\,dp = 2\int \frac{1}{p}\,dp$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p|$
- Lösung der homogenen Gleichung: $x_h = \frac{C}{p^2}$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $x = C(p) \cdot \frac{1}{p^2}$; eingesetzt in die Gleichung: $C'(p) \cdot \frac{1}{p^2} = -2$
- Daraus $C'(p) = -2p^2$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -2p^2\,dp = -2\int p^2\,dp$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int p^2\,dp = \frac{p^3}{3}$
- Wir integrieren: $C(p) = \int -2p^2\,dp = C - \frac{2p^3}{3}$
- Die allgemeine Lösung: $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$
- Wir benennen die Konstante um (ein Vielfaches einer beliebigen Konstante ist wieder eine beliebige Konstante): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2}$
- Durch Einsetzen von x in die gegebene Gleichung erhalten wir die allgemeine Lösung in Parameterdarstellung (Parameter p): $x = \frac{C - 2p^3}{3p^2},\ y = \frac{2C - p^3}{3p}$
- Wir haben durch p − φ(p) geteilt und damit die Werte ausgelassen, für die $p = 2p$. Jeder davon ergibt eine Gerade, die die Gleichung ebenfalls erfüllt: $y = 0$

Graph



Lösungen für verschiedene C

$y = 0$

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Die charakteristische Gleichung mit komplexen Nullstellen −2 ± 3i.

Eingabe: `y'' + 4y' + 13y = 0`

Ergebnis

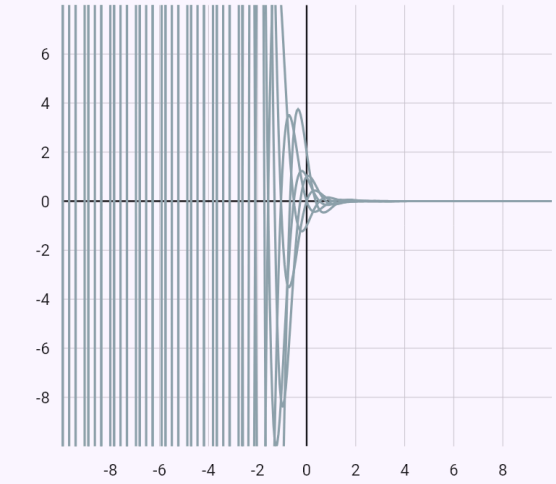
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Die Diskriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ y_2 = e^{-2x}\sin(3x)$
- Die allgemeine Lösung: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graph

Lösungen | Phasenebene



Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C_1 C_2

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Spezielle rechte Seite mit Resonanz – 2 ist Nullstelle der charakteristischen Gleichung.

Eingabe: `y'' - 3y' + 2y = 3e^(2x)` Spezielle rechte Seite

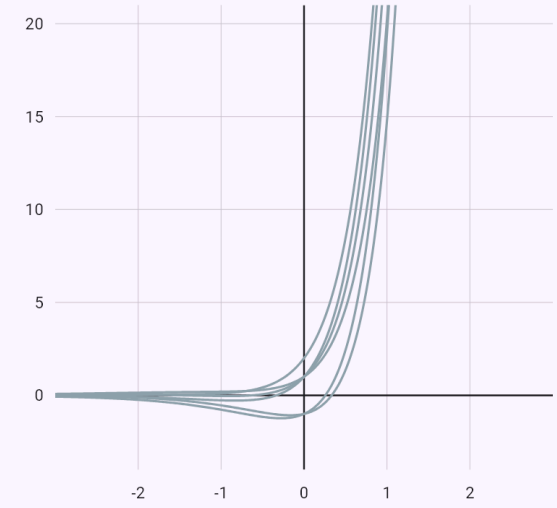
Ergebnis

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
- Die rechte Seite $3e^{2x}$ hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit x multipliziert: $y_p = A x e^{2x}$
- Die Ableitungen: $y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x},\ y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $A = 3$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = 3x e^{2x}$
- Die allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C_1 C_2

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Die rechte Seite tan x ist nicht speziell – Variation der Konstanten und Wronski-Determinante.

Eingabe: `y'' + y = tan x`

Ergebnis

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{}{\text{co}} \right.$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + y = \tan x$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' + y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, die Ableitungen der Funktionen C_k erfüllen das System
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$
- Die Determinante des Systems (Wronski-Determinante) $W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$
- Daraus $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- Daraus $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} = \sin x$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = -\int \sin x \cdot \tan x \, dx$
- Die Funktion ist ungerade im Kosinus – die Substitution $t = \sin x$
$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right)$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{}{2}$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int -1 \, dt = -t$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int -\dfrac{1}{2(t-1)} \, dt = -\dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t-1} \, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \dfrac{1}{t-1} \, dt = \ln |t-1|$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int \dfrac{1}{2(t+1)} \, dt = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{t+1} \, dt$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \dfrac{1}{t+1} \, dt = \ln |t+1|$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen
$$t = \sin x: \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$
- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung): $C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \sin x - \ln \left| \dfrac{1}{\cos x} + \tan x \right|$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \dfrac{1}{\cos x} + \tan x \right|$
- Die allgemeine Lösung
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right.$$

Integrale der Variation der Konstanten, die sich nicht elementar ausdrücken lassen – eine Lösung mit

Integral.

Eingabe: `y'' + y' + y = tan x`

Ergebnis

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + y' + y = \tan x$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' + y' + y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
- Die Diskriminante $D = 1^2 - 4 = -3$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

- Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form die Ableitungen der Funktionen C_k erfüllen das System

$$y = C_1(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} + C_2'(x \end{cases}$$

- Die Determinante des Systems (Wronski-Determinante)

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}{2} & \frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{}}{}\right.\right.}{2} \end{vmatrix}$$

- Daraus

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- Daraus

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}$$

- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung)

$$C_1(x) = \int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$$

- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung)

$$C_2(x) = \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx$$

- Diese Integrale lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken (sie führen auf höhere, nichtelementare Funktionen), die Lösung behält sie daher als Integrale

$$\int -\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \tan x}{3}\,dx,\ \int \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}$$

- Die allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Ein Anfangswertproblem – ein System für die Konstanten C_1, C_2.

Eingabe: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0`

Ergebnis

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

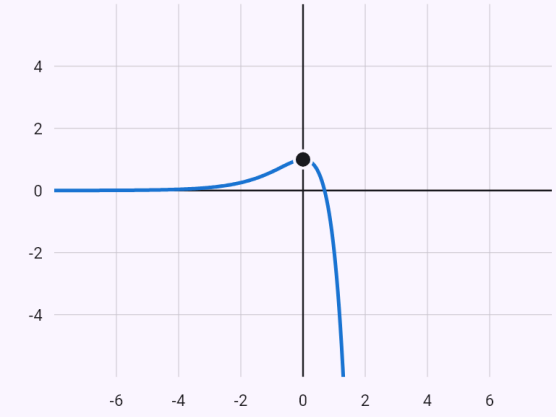
Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{3x}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- Die rechte Seite e^{2x} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $y_p = Ae^{2x}$
- Die Ableitungen: $y_p' = 2Ae^{2x},\ y_p'' = 4Ae^{2x}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $-A = 1$
- Daraus $A = -1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = -e^{2x}$
- Die allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Die Ableitungen der allgemeinen Lösung: $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Die Bedingungen ergeben das System daraus $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $y = 2e^x - e^{2x}$

Graph



$y = 2e^x - e^{2x}$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Eigene Werte der Konstanten

C_1 | C_2

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Dieselbe Aufgabe mit der Laplace-Transformation.

Eingabe: `y'' - 4y' + 3y = e^(2x), y(0) = 1, y'(0) = 0` Laplace-Transformation

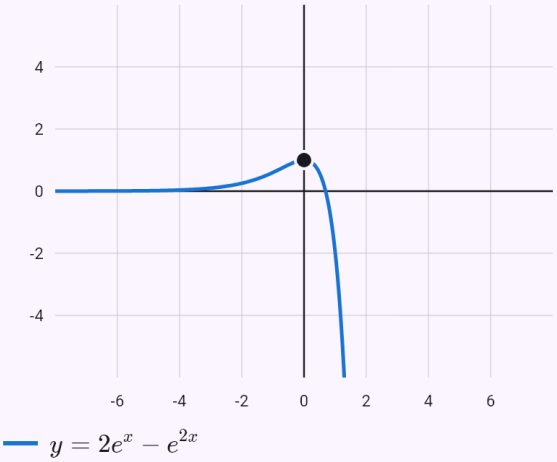
Ergebnis

$$y = 2e^{x} - e^{2x}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Laplace-Transformation beider Seiten: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)$; mit den Anfangsbedingungen: $(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Wir drücken die Bildfunktion Y aus: $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Partialbruchzerlegung: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- Die Rücktransformation (nach der Korrespondenztabelle) ergibt die Lösung: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^{x} - e^{2x}$

Graph



Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Ein Randwertproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Eingabe: `y'' + y = 0, y(0) = 0, y(pi) = 0`

Ergebnis

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$
- Die allgemeine Lösung: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 0$
  $$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$
- Die Konstante C_2 bleibt beliebig – die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen.
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $y = C_2 \sin x$

Eulersche Gleichung – die Substitution x = e^t.

Eingabe: `x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2`

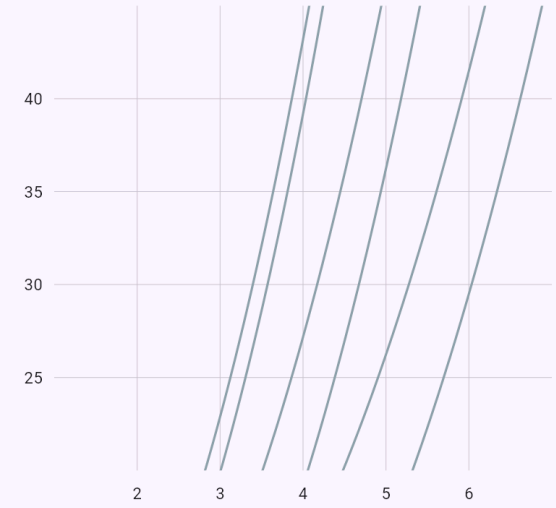
Ergebnis

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C$$

Lösungsweg

- Eulersche Gleichung – bei jeder Ableitung y^(k) steht x^k; die Substitution x = e^t macht daraus eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Die Substitution $x = e^t,\ xy' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ führt die Gleichung über in $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λt); Einsetzen und Teilen durch e^(λt) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^t,\ y_2 = e^{2t}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Wir teilen die rechte Seite in Teile spezieller Form – für jeden eine partikuläre Lösung, die wir addieren: $f_1 = 2,\ f_2 = e^{2t}$
- Die rechte Seite 2 hat eine spezielle Form; die Zahl 0 ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $y_{p_1} = A$
- Die Ableitungen: $y'_{p_1} = 0,\ y''_{p_1} = 0$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $2A = 2$
- Daraus $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_{p_1} = 1$
- Die rechte Seite e^{2t} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit x multipliziert: $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Die Ableitungen: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t},\ y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- Die allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen (t = ln x, für $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C₁ | C₂

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Reduktion y' = p(y), die Konstanten schrittweise aus den Anfangsbedingungen.

Eingabe: `y'' = e^(2y), y(0) = 0, y'(0) = 1`

Ergebnis

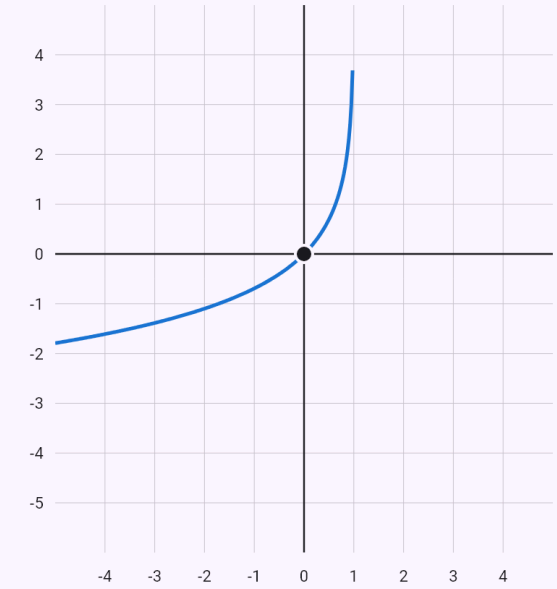
$$y = -\ln(1-x)$$

Lösungsweg

- Die unabhängige Variable fehlt – wir fassen y' als Funktion von y auf: $y'' = e^{2y}$
- Die Substitution $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ führt die Gleichung über in $p\dfrac{dp}{dy} = e^{2y}$; aus den Anfangsbedingungen folgt $p(0) = 1$
- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{e^{2y}}{p}$
- Trennung der Variablen: $p\,dp = e^{2y}\,dy$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int p\,dp = \dfrac{p^2}{2}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int e^{2y}\,dy = \dfrac{e^{2y}}{2}$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $p(0) = 1$ ein: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $p = e^y$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich: $e^y e^y - e^{2y} = 0$
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $y' = e^y$
- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = e^y$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $e^y \neq 0$): $\dfrac{dy}{e^y} = dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \dfrac{dy}{e^y} = \int dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear, das Ergebnis wird daher durch ihren Koeffizienten der Variablen geteilt: $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1\,dx = x$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $-e^{-y} = x + C_2$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ein: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $y = -\ln(1-x)$
- Den Term leiten wir nach den Regeln für verkettete Funktionen, Produkte und Quotienten ab: $(-\ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{1-x}$
- Lösung und Ableitung in die Gleichung eingesetzt – beide Seiten sind gleich: $\dfrac{1}{1-x} = e^{(-\ln(1-x))}$

Graph

Lösungen | Phasenebene



$y = -\ln(1-x)$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Ein gedämpfter Oszillator – drei Fälle nach δ und ω.

Eingabe: `y'' + 2δy' + ω^2y = 0`

Ergebnis

$$\delta > \omega: \quad y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(}$$

$$\delta = \omega: \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega: \quad y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right.\right.$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$
- Für $\delta > \omega$ also

  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} - \delta$

  $y = C_1 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})x} + C_2 e^{(\sqrt{\delta^2-\omega^2}-\delta)x}$
- Für $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, also $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$
- Für $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,i$, also

  $y = e^{-\delta x}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,x\right)\right.$

Resonanz – für ω = 2 hat die Lösung eine andere Form.

Eingabe: `y'' + ω^2y = cos(2t)`

Ergebnis

$$\omega \neq 2: \quad y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: \quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λt); Einsetzen und Teilen durch e^(λt) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos(\omega t),\ y_2 = \sin(\omega t)$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Die rechte Seite $\cos(2t)$ hat eine spezielle Form; die Zahl $2i$ ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$
- Die Ableitungen

  $y_p' = 2B\cos(2t) - 2A\sin(2t),\ y_p'' = -4A\cos(2t) - 4I$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst

  $(A\omega^2 - 4A)\cos(2t) + (B\omega^2 - 4B)\sin(2t) = \cos(2t)$
- Koeffizientenvergleich gleichartiger Terme auf beiden Seiten daraus $A = \frac{1}{\omega^2 - 4},\ B = 0$

  $\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Die allgemeine Lösung

  $y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Für $\omega = 2$ ist die Zahl der rechten Seite eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (Resonanz) – die Lösung hat eine andere Form:

  $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Eine erratene Lösung $y_1 = x$ und Reduktion der Ordnung (d'Alembert).

Eingabe: `(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0`

Ergebnis

$$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten: $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$
- Eine Lösung erraten wir und prüfen sie durch Einsetzen: $y_1 = x$. Die zweite durch Reduktion der Ordnung (d'Alembert, y = y_1·u)

  $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = x \ln|x-1|$$
- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

  $$\int \frac{1}{x^4 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$
- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

  $$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:

  $$\int \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

  $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:

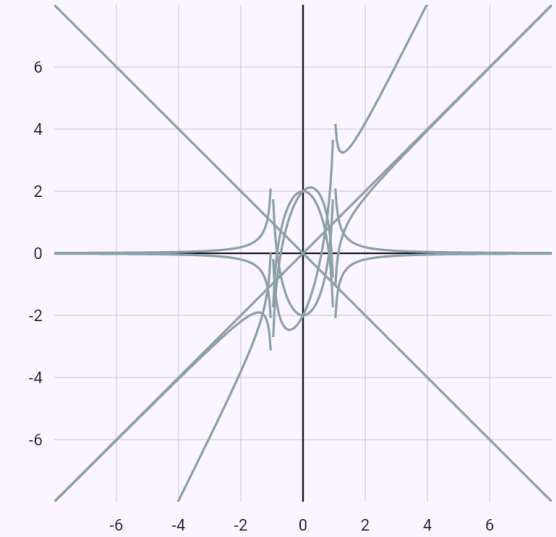
  $$\int -\frac{1}{2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

  $$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:

  $$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- Die allgemeine Lösung:

  $$y = C_1 x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$$

Graph



Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Standardkurven

Eigene Werte der Konstanten

C₁ | C₂

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Ein System – Eigenwerte entgegengesetzter Vorzeichen, ein Sattel.

Eingabe: `x' = x + 2y, y' = 3x + 2y`

Ergebnis

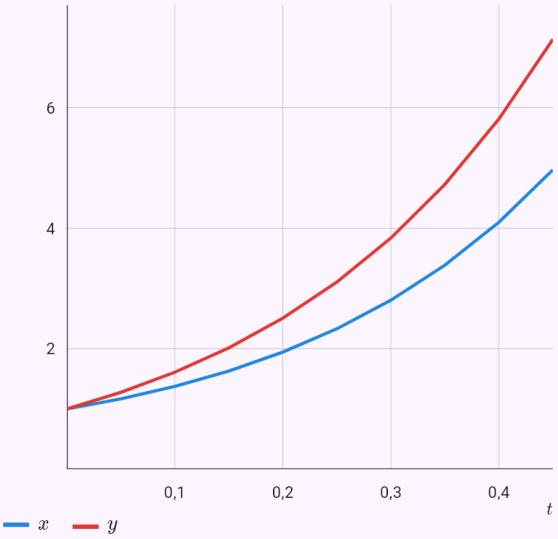
$$x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}, \quad y(t) = 3C_2 e$$

Lösungsweg

- Das System in Matrixform
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Die Eigenwerte der Matrix aus der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$:
  $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ – zwei verschiedene reelle.
- Eigenvektoren, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Die allgemeine Lösung
  $x(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t}$
  $y(t) = 3C_2 e^{4t} - C_1 e^{-t}$
- Der stationäre Punkt $[0;\ 0]$ ist ein Sattel – die Eigenwerte haben entgegengesetzte Vorzeichen, er ist instabil.

Graph

Zeitverlauf | Phasenebene



Die Lösung des Systems in der Zeit für die gegebenen Anfangsbedingungen (ohne sie für x(0) = y(0) = 1).

Komplexe Eigenwerte – ein instabiler Strudel.

Eingabe: `dx/dt = x - y, dy/dt = x + y`

Ergebnis

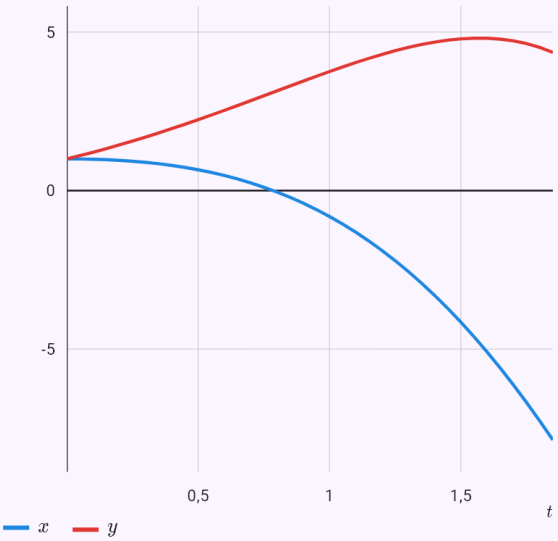
$$x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t), \quad y(t)$$

Lösungsweg

- Das System in Matrixform
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Die Eigenwerte der Matrix aus der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$:
  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ – konjugiert komplex.
- Eigenvektoren, $(A - \lambda E)v = 0$
  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Die allgemeine Lösung
  $x(t) = e^t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$
  $y(t) = e^t(C_2 \cos t - C_1 \sin t)$
- Der stationäre Punkt $[0;\ 0]$ ist ein instabiler Strudel – der Realteil der Eigenwerte ist positiv, die Trajektorien laufen spiralförmig hinaus.

Graph

Zeitverlauf | Phasenebene



Die Lösung des Systems in der Zeit für die gegebenen Anfangsbedingungen (ohne sie für x(0) = y(0) = 1).

Ein System mit Anfangsbedingungen – ein Zentrum.

Eingabe: `x' = y`
`y' = -x`
`x(0) = 1`
`y(0) = 0`

Ergebnis

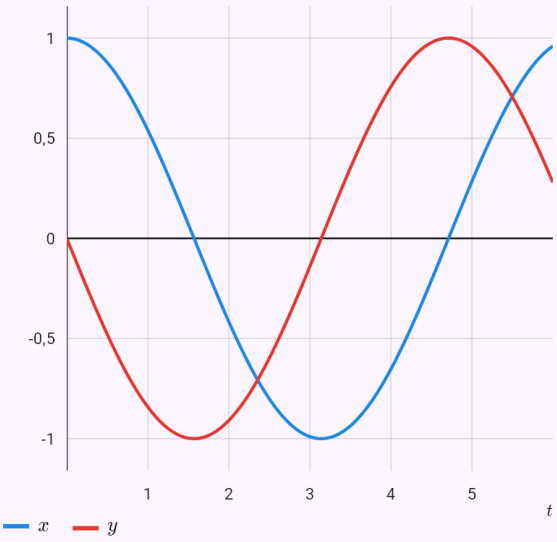
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

Lösungsweg

- Das System in Matrixform
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Die Eigenwerte der Matrix aus der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$ – konjugiert komplex.
- Eigenvektoren, $(A - \lambda E)v = 0$
  $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Die allgemeine Lösung
  $$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
  $$y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$
- Die Konstanten aus den Anfangsbedingungen also $C_1 = 1,\ C_2 = 0$
  $$C_1 = 1$$
  $$C_2 = 0$$
- Der stationäre Punkt $[0;\ 0]$ ist ein Zentrum – die Eigenwerte sind rein imaginär, die Trajektorien sind geschlossene Kurven um ihn.

Graph

Zeitverlauf | Phasenebene



Die Lösung des Systems in der Zeit für die gegebenen Anfangsbedingungen (ohne sie für x(0) = y(0) = 1).

Die Airy-Gleichung – Kriterium von Leighton–Wintner und 12 Nullstellen.

Eingabe: `oscillation(y'' + x y = 0)`

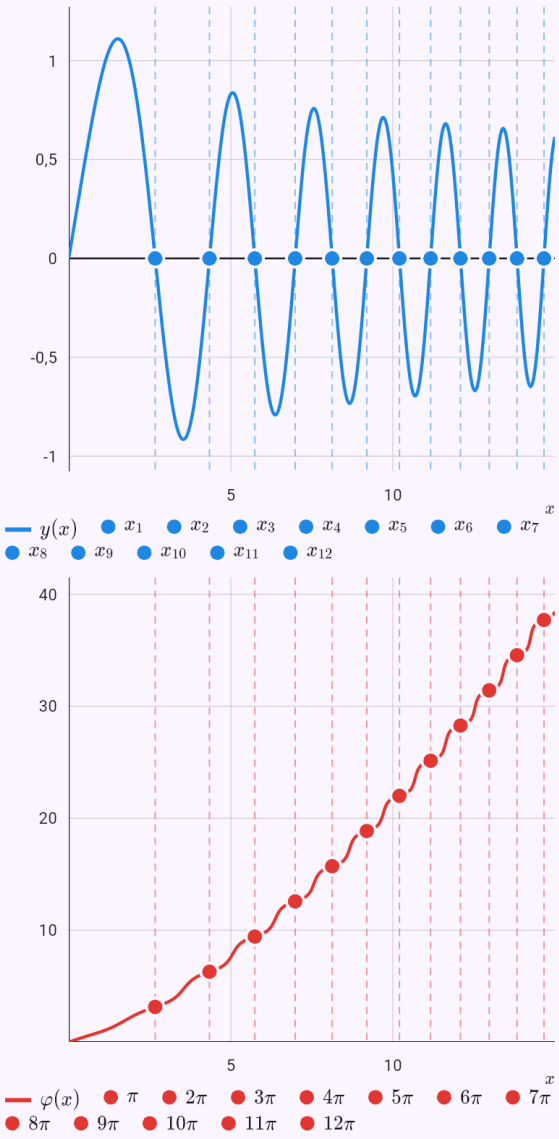
Ergebnis

Die Gleichung ist oszillatorisch.

Lösungsweg

- Wir untersuchen die Gleichung $y'' + xy = 0$ auf dem Intervall $[0;\ \infty)$, also y" + q(x)y = 0 mit q = x
- Die Gleichung heißt oszillatorisch, wenn jede nichttriviale Lösung auf dem Intervall unendlich viele Nullstellen hat. Nach dem Sturmschen Trennungssatz wechseln sich die Nullstellen zweier unabhängiger Lösungen ab, daher genügt eine Lösung: Entweder oszillieren alle Lösungen oder keine.
- Das Kriterium von Leighton und Wintner: Gilt ∫ 1/r = ∞ und ∫ q = ∞, ist die Gleichung oszillatorisch. Hier ist $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$ und $\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$, die Gleichung ist also oszillatorisch.
- Das Kneser-Kriterium mit der kritischen Konstante $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x = \infty$ > 1/4, die Gleichung ist oszillatorisch.
- Die Riccati-Technik: Die Substitution $w = \frac{y'}{y}$ führt die Gleichung in die Riccati-Gleichung $w' + w^2 + x = 0$ über. Die Gleichung ist genau dann nicht oszillatorisch, wenn die Riccati-Gleichung für ein T eine Lösung auf dem ganzen Intervall ⟨T; ∞) hat. Bei einer oszillatorischen Gleichung gibt es keine: w „entweicht“ an jeder Nullstelle von y nach −∞.
- Die Prüfer-Transformation $y = \rho\sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ führt die Gleichung in eine Gleichung für den Winkel φ über: $\varphi' = \cos^2\varphi + x\sin^2\varphi$. In einer Nullstelle von y ist φ ein Vielfaches von π und φ' > 0, φ wächst also über die Vielfachen von π nur. Die Anzahl der Nullstellen auf (a; b⟩ ist daher ⌊φ(b)/π⌋. Wir rechnen numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren (RK4) ab den Anfangswerten $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$
- Auf dem Intervall $(0;\ 15]$ hat die Lösung so viele Nullstellen: 12; $\varphi(15) \doteq 38{,}4387 \doteq 12{,}2354\pi$. Benachbarte Nullstellen liegen $0{,}8322$ bis $1{,}6761$ auseinander. Die Nullstellen $x_1 \doteq 2{,}6664,\ x_2 \doteq 4{,}3425,\ x_3 \doteq 5{,}741,\ x_4 \doteq 6{,}9861,$ …
- Der Sturmsche Vergleichssatz: Auf dem Intervall $[0;\ 15]$ ist $q \in [0;\ 15]$. q ist dort nicht überall positiv, wir erhalten daher nur eine untere Schranke für den Abstand benachbarter Nullstellen: $0{,}8112 \le \Delta$
- Ergebnis: Die Gleichung ist oszillatorisch – jede nichttriviale Lösung hat unendlich viele Nullstellen.

Graph



Die Lösung mit markierten Nullstellen; darunter der Prüfer-Winkel φ, der in den Nullstellen Vielfache von π durchläuft.

Die Eulersche Gleichung an der Grenze k = 1/4 – noch nicht oszillatorisch.

Eingabe: `oscillation(y'' + 1/(4x^2) y = 0)`

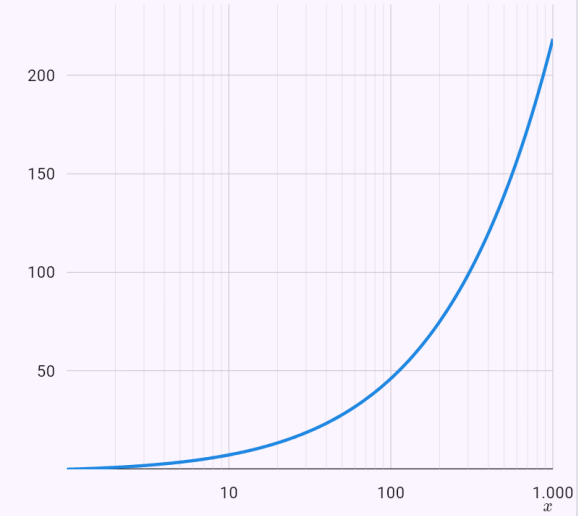
Ergebnis

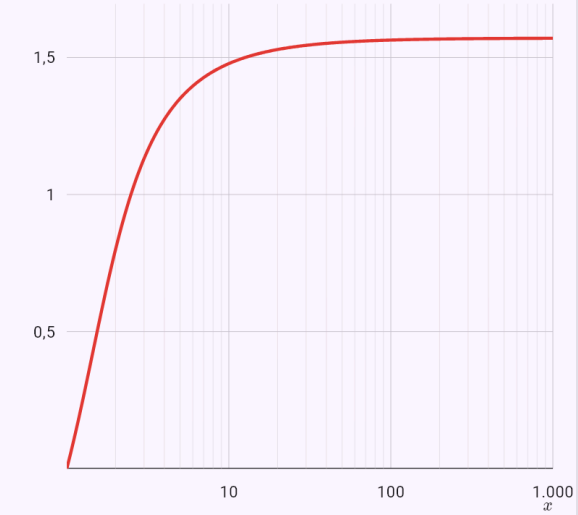
Die Gleichung ist nicht oszillatorisch.

Lösungsweg

- Wir untersuchen die Gleichung $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ auf dem Intervall $[1;\ \infty)$, also y" + q(x)y = 0 mit q = $\frac{1}{4x^2}$
- Die Gleichung heißt oszillatorisch, wenn jede nichttriviale Lösung auf dem Intervall unendlich viele Nullstellen hat. Nach dem Sturmschen Trennungssatz wechseln sich die Nullstellen zweier unabhängiger Lösungen ab, daher genügt eine Lösung: Entweder oszillieren alle Lösungen oder keine.
- Das ist die Eulersche Gleichung y" + (k/x²)y = 0 mit dem Grenzwert k = $\frac{1}{4}$. Die charakteristische Gleichung $\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{4} = 0$ hat die Doppelwurzel $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$, die Lösung $y = \sqrt{x}(C_1 + C_2 \ln x)$ hat höchstens eine Nullstelle. Die Gleichung ist noch nicht oszillatorisch.
- Das Kriterium von Leighton und Wintner: Gilt ∫ 1/r = ∞ und ∫ q = ∞, ist die Gleichung oszillatorisch. Hier ist $\int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, aber $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, das Kriterium entscheidet also nicht.
- Das Kneser-Kriterium: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$ ist gleich der kritischen Konstante $\frac{1}{4}$, das Kriterium allein entscheidet also nicht. Es entscheidet erst der nächste Term.
- Im kritischen Fall vergleichen wir mit der Riemann-Weber-Gleichung y" + (1/(4x²) + μ/(x² ln² x))y = 0, die genau für μ > 1/4 oszilliert: $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4}\right) \ln^2 x = 0 < \frac{1}{4}$, die Gleichung ist nicht oszillatorisch.
- Die Riccati-Technik: Die Substitution $w = \frac{y'}{y}$ führt die Gleichung in die Riccati-Gleichung $w' + w^2 + \frac{1}{4x^2} = 0$ über. Sie hat die Lösung $w = \frac{1}{2x}$ auf dem ganzen Intervall – sie gehört zu einer Lösung y ohne Nullstellen, die Gleichung ist also nicht oszillatorisch.
- Die Prüfer-Transformation $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ führt die Gleichung in eine Gleichung für den Winkel φ über: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{4x^2}\sin^2\varphi$. In einer Nullstelle von y ist φ ein Vielfaches von π und φ' > 0, φ wächst also über die Vielfachen von π nur. Die Anzahl der Nullstellen auf (a; b⟩ ist daher ⌊φ(b)/π⌋. Wir rechnen numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren (RK4) ab den Anfangswerten $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Auf dem Intervall $(1;\ 1000]$ hat die Lösung keine Nullstelle: $\varphi(1000) \doteq 1{,}5702 \doteq 0{,}4998\pi$, der Winkel hat π nicht erreicht.
- Ergebnis: Die Gleichung ist nicht oszillatorisch – jede nichttriviale Lösung hat nur endlich viele Nullstellen.

Graph





Die Lösung hat auf dem gewählten Intervall keine Nullstelle; der Prüfer-Winkel φ darunter erreicht π nicht.

Kneser-Kriterium: x²q → 1 > 1/4, die Nullstellen wachsen geometrisch.

Eingabe: `oscillation(y'' + 1/(x^2 + 1) y = 0)`

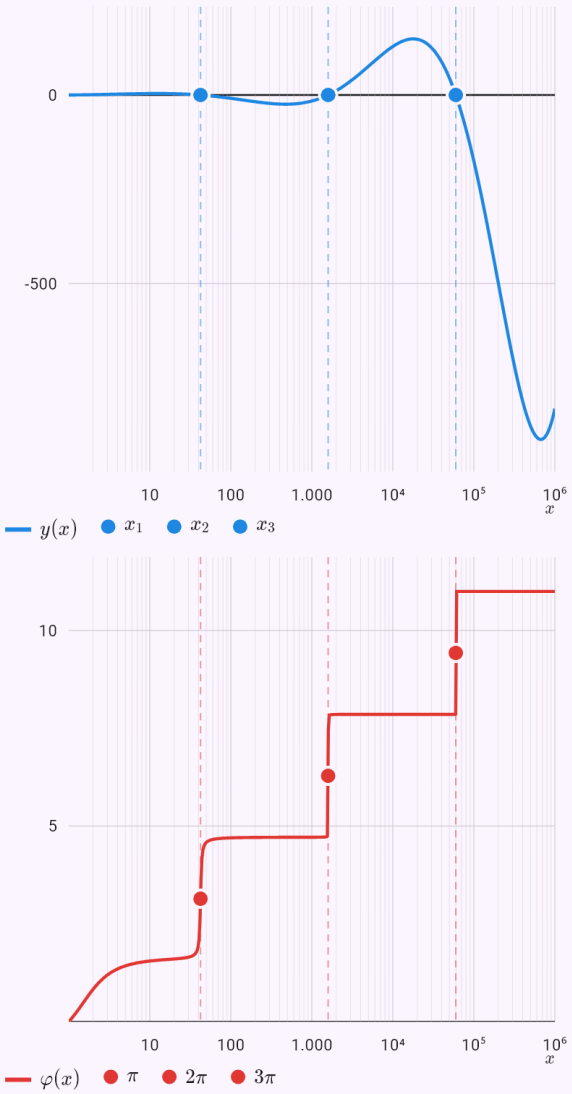
Ergebnis

Die Gleichung ist oszillatorisch.

Lösungsweg

- Wir untersuchen die Gleichung $y'' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ auf dem Intervall $[0;\ \infty)$, also y" + q(x)y = 0 mit q = $\frac{1}{x^2+1}$
- Die Gleichung heißt oszillatorisch, wenn jede nichttriviale Lösung auf dem Intervall unendlich viele Nullstellen hat. Nach dem Sturmschen Trennungssatz wechseln sich die Nullstellen zweier unabhängiger Lösungen ab, daher genügt eine Lösung: Entweder oszillieren alle Lösungen oder keine.
- Das Kriterium von Leighton und Wintner: Gilt ∫ 1/r = ∞ und ∫ q = ∞, ist die Gleichung oszillatorisch. Hier ist $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$, aber $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$, das Kriterium entscheidet also nicht.
- Das Kneser-Kriterium mit der kritischen Konstante $\frac{1}{4}$: $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1 > 1/4$, die Gleichung ist oszillatorisch.
- Die Riccati-Technik: Die Substitution $w = \frac{y'}{y}$ führt die Gleichung in die Riccati-Gleichung $w' + w^2 + \frac{1}{x^2+1} = 0$ über. Die Gleichung ist genau dann nicht oszillatorisch, wenn die Riccati-Gleichung für ein T eine Lösung auf dem ganzen Intervall ⟨T; ∞) hat. Bei einer oszillatorischen Gleichung gibt es keine: w „entweicht" an jeder Nullstelle von y nach −∞.
- Die Prüfer-Transformation $y = \rho \sin\varphi,\ y' = \rho\cos\varphi$ führt die Gleichung in eine Gleichung für den Winkel φ über: $\varphi' = \cos^2\varphi + \frac{1}{x^2+1}\sin^2\varphi$. In einer Nullstelle von y ist φ ein Vielfaches von π und φ' > 0, φ wächst also über die Vielfachen von π nur. Die Anzahl der Nullstellen auf (a; b⟩ ist daher ⌊φ(b)/π⌋. Wir rechnen numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren (RK4) ab den Anfangswerten $y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ \varphi(1) = 0$
- Auf dem Intervall $(1;\ 1\,000\,000]$ hat die Lösung so viele Nullstellen: 3; $\varphi(1\,000\,000) \doteq 10{,}9956 \doteq 3{,}5\pi$. Benachbarte Nullstellen liegen $1548{,}7974$ bis $58269{,}3046$ auseinander. Die Nullstellen: $x_1 \doteq 42{,}2876,\ x_2 \doteq 1591{,}085,\ x_3 \doteq 59860{,}3896$
- Ergebnis: Die Gleichung ist oszillatorisch – jede nichttriviale Lösung hat unendlich viele Nullstellen.

Graph



Die Lösung mit markierten Nullstellen; darunter der Prüfer-Winkel φ, der in den Nullstellen Vielfache von π durchläuft.

Die halblineare Eulersche Gleichung, k = 1 > (2/3)³.

Eingabe: `oscillation((|y'| y')' + 1/x^3 |y| y = 0)`

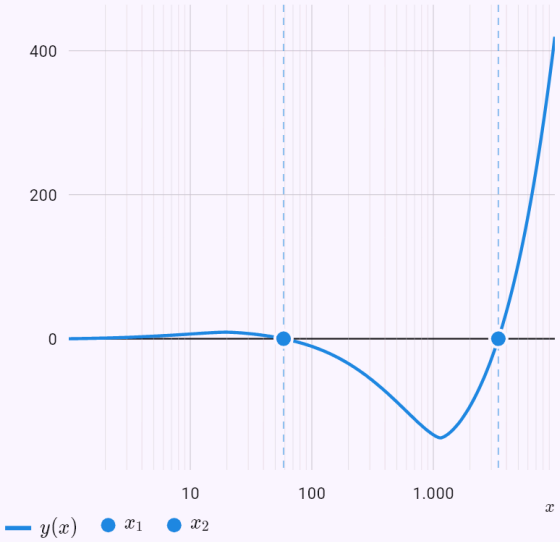
Ergebnis

Die Gleichung ist oszillatorisch.

Lösungsweg

- Wir untersuchen die halblineare Gleichung $(\Phi(y'))' + \frac{1}{x^3}\Phi(y) = 0$ mit p = 3 auf dem Intervall $[1;\, \infty)$, wobei $\Phi(s) = |s|^1 s$. Ein Vielfaches einer Lösung ist wieder eine Lösung, die Summe zweier Lösungen im Allgemeinen nicht. Für p = 2 ist es die lineare Gleichung y" + q(x)y = 0.
- Die Gleichung heißt oszillatorisch, wenn jede nichttriviale Lösung auf dem Intervall unendlich viele Nullstellen hat. Der Sturmsche Trennungssatz gilt auch für halblineare Gleichungen: Entweder oszillieren alle Lösungen oder keine.
- Das ist die halblineare Eulersche Gleichung mit k = 1. Einsetzen von y = x^λ mit 0 < λ < 1 ergibt k = $G(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-1}(1-\lambda)$ für p = 3. Die Funktion G hat ihr Maximum, die kritische Konstante $\gamma_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p = \frac{8}{27} \doteq 0{,}2963$, bei λ = (p − 1)/p. Hier ist k größer, es gibt keine Lösung x^λ und die Gleichung ist oszillatorisch.
- Das Kriterium von Leighton und Wintner (gilt ∫ q = ∞, ist die Gleichung oszillatorisch) entscheidet hier nicht: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- Das Kneser-Kriterium für halblineare Gleichungen mit der kritischen Konstante $\gamma_p = \frac{8}{27}$: $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 1$ ist größer, die Gleichung ist oszillatorisch.
- Die Riccati-Technik für eine halblineare Gleichung: Die Substitution $w = \frac{\Phi(y')}{\Phi(y)}$ führt auf die Riccati-Gleichung $w' + \frac{1}{x^3} + 2|w|^{\frac{3}{2}} = 0$. Die Gleichung ist genau dann nicht oszillatorisch, wenn diese eine Lösung auf einem ganzen Intervall ⟨T; ∞) hat.
- Numerisch (RK4, y(a) = 0, y'(a) = 1) hat die Lösung auf dem Intervall $(1;\, 10\,000]$ so viele Nullstellen: 2, im Abstand $3369{,}2413$. Die Nullstellen: $x_1 \doteq 58{,}5473,\ x_2 \doteq 3427{,}7887$
- Ergebnis: Die Gleichung ist oszillatorisch – jede nichttriviale Lösung hat unendlich viele Nullstellen.

Graph



Die Lösung mit markierten Nullstellen.

Das diskrete Kneser-Kriterium: n²q_n = 1/8 < 1/4.

Eingabe: `oscillation(Δ^2 y_n + 1/(8n^2) y_{n+1} = 0)`

Ergebnis

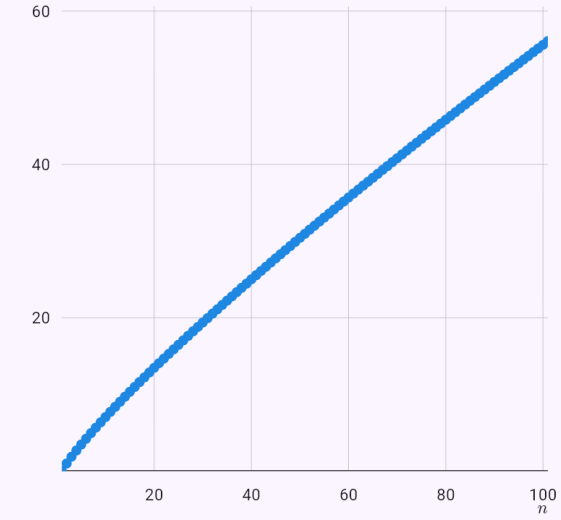
Die Gleichung ist nicht oszillatorisch.

Lösungsweg

- Wir untersuchen das diskrete Gegenstück zu (r y')' + q y = 0, die lineare Rekursion $\Delta^2 y_n + \frac{1}{8n^2} y_{n+1} = 0$ für $n \geq 1$, wobei $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Als Rekursion: $y_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{8n^2}\right) y_{n+1} - y_n$
- Bei einer Folge zählen wir verallgemeinerte Nullstellen: $y_n = 0$ oder einen Vorzeichenwechsel zwischen y_n und y_{n+1}. Die Gleichung heißt oszillatorisch, wenn jede nichttriviale Lösung unendlich viele verallgemeinerte Nullstellen hat. Auch hier gilt der Sturmsche Trennungssatz.
- Das diskrete Kriterium von Leighton und Wintner: Gilt $\Sigma\, 1/r_n = \infty$ und $\Sigma\, q_n = \infty$, ist die Gleichung oszillatorisch. Hier ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^2} < \infty$, das Kriterium entscheidet also nicht.
- Das diskrete Kneser-Kriterium mit der kritischen Konstante $\frac{1}{4}$: $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{8n^2} = \frac{1}{8} < 1/4$, die Gleichung ist nicht oszillatorisch.
- Die diskrete Riccati-Technik: Die Substitution $w_n = \frac{\Delta y_n}{y_n}$ führt auf $\Delta w_n + \frac{1}{8n^2} + \frac{w_n^2}{w_n + 1} = 0$. Die Gleichung ist genau dann nicht oszillatorisch, wenn diese Gleichung schließlich eine Lösung mit $w_n + r_n > 0$ hat.
- Die Lösung mit $y_{n0} = 0$, $y_{n0+1} = 1$ hat für n in $(1;\, 101]$ keine verallgemeinerte Nullstelle.

- Ergebnis: Die Gleichung ist nicht oszillatorisch – jede nichttriviale Lösung hat nur endlich viele Nullstellen.

Graph



Die Lösung hat auf dem gewählten Intervall keine Nullstelle.

Beispiel 4.2 von Došlá und Marini – der Fall C5: regulär wachsende und stark abklingende Lösungen.

Eingabe: `asymptotics((e^(-3x) (y')^3)' = x^(-2) e^(-3x) y^3)`

Ergebnis

$$M^+ = M^+_{\infty,\ell} \neq \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

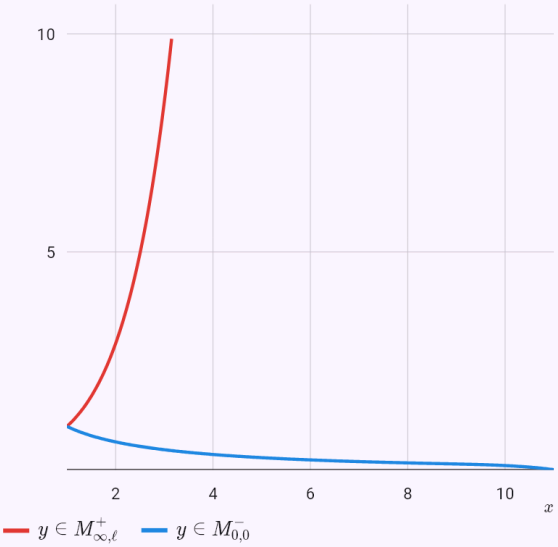
Lösungsweg

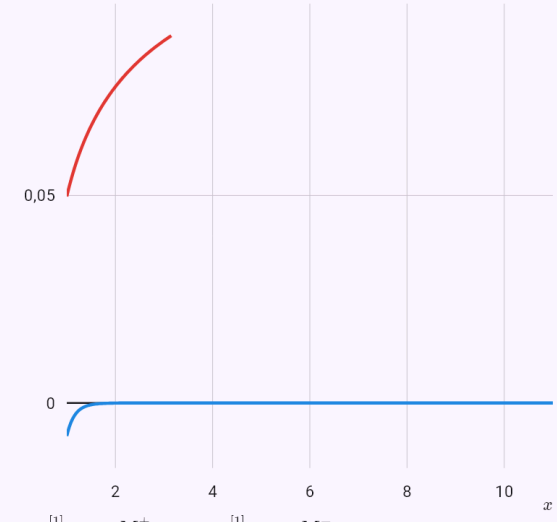
- Wir untersuchen die halblineare Gleichung $\left(e^{-3x}|y'|^2y'\right)' = \frac{e^{-3x}}{x^2}|y|^2y$ auf dem Intervall $[1;\infty)$ mit α = 3, a = e^{-3x} > 0 und b = $\frac{e^{-3x}}{x^2}$ > 0. Das ist eine Gleichung mit p-Laplace-Operator für p = α + 1 und „negativem Potential“ – sie oszilliert nicht. Die allgemeine Form der Gleichung ist $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\alpha \operatorname{sgn} y$
- Das Verhalten einer Lösung beschreibt neben y ihre Quasiableitung $y^{[1]} = e^{-3x}|y'|^3 \operatorname{sgn} y'$. Jede nichttriviale Lösung gehört zu einer von zwei Klassen: M^+ – ab einem x ist y·y' > 0 und |y| wächst – oder M^- – y·y' < 0 auf dem ganzen Intervall und |y| fällt. Die Klassen teilen sich nach den Grenzwerten von |y| und $|y^{[1]}|$ für x → ∞: Index ∞ (unendlich), ℓ (endlich, nicht null) oder 0 (null), zum Beispiel $M^+_{\infty,\ell}$
- Nach Satz 2.1 (Došlá–Marini) ist jede Lösung auf dem ganzen Intervall definiert, und beide Klassen M^+ und M^- sind nicht leer. Zu M^+ gehören zum Beispiel die Lösungen mit $y(x_0) > 0$ und $y'(x_0) \geq 0$.
- Das Integral A: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie e^x (bis auf eine positive Konstante). Die Exponentialfunktion entscheidet, also $\int_1^\infty e^x\,\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral B $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e^3} + 3\,\mathrm{Ei}\,(-3) \doteq 0{,}0106$
- Das Integral J_1: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie e^x (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Die Exponentialfunktion entscheidet, also $\int_1^\infty e^x \left(\int_1^x \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral J_2: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie $x^{-\frac{2}{3}}$ (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_1^\infty e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-3s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral Y_1 divergiert, da schon das innere Integral divergiert $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_x^\infty e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral Y_2: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie x^{-2} (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_1^\infty \frac{e^{-3x}}{x^2}\left(\int_1^x e^s\,\mathrm{d}s\right)^3\mathrm{d}x < \infty$
- Lemma 2.1 (eine Verallgemeinerung des Satzes von Fubini): Für α = 3 ≥ 1 folgt aus $Y_2 = \infty$, dass $J_2 = \infty$, und aus $Y_1 = \infty$, dass $J_1 = \infty$.
- Die Integrale ergaben $J_1 = \infty,\ J_2 = \infty,\ Y_1 = \infty,\ Y_2 < \infty$ – das ist der Fall C_5 der Klassifikation (Satz 3.1).
- Die reziproke Gleichung $\left(\sqrt[3]{x^2}e^x|y'|^{-\frac{2}{3}}y'\right)' = e^x|y|^{-\frac{2}{3}}y$ (a und b tauschen die Rollen, α geht in 1/α über) hat die Quasiableitungen der Lösungen der gegebenen

Gleichung als Lösungen. Ihre Integrale J_1, J_2 lesen sich als Y_2, Y_1, es tritt also der Fall C_8 ein. Die Klassen entsprechen einander mit vertauschten Indizes: $M^+_{\infty,\ell}$ der gegebenen Gleichung entspricht $M^+_{\ell,\infty}$ der reziproken.

- $M^+_{\infty,\ell} \neq \varnothing$: regulär wachsende Lösungen – $|y| \to \infty$, aber die Quasiableitung hat einen endlichen Grenzwert ungleich null; y wächst wie $\int a^{-1/\alpha}\,dx$ (Satz 3.1).
- $M^-_{0,0} \neq \varnothing$: stark abklingende Lösungen – $y \to 0$ und $y^{[1]} \to 0$ (Satz 3.1).
- Die Lösung aus M^- im Graphen ist numerisch durch Schießen gefunden: Wir suchen den Anfangswert der Quasiableitung, für den die Lösung mit $y(1) = 1$ auf einem langen Intervall weder null erreicht noch zu wachsen beginnt – $y^{[1]}(1) \doteq -0{,}008$. Dieser Wert ist eindeutig, da $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Satz 4).

Graph





Oben numerische Lösungen y(x) aus den nicht leeren Klassen (M^+ aus $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^- durch Schießen), unten ihre Quasiableitungen y^[1](x). Eine Kurve endet, wo |y| 10 übersteigt.

Der Fall C4 – beschränkte wachsende Lösungen und ein ganzes Intervall fallender.

Eingabe: `asymptotics((x^4 y')' = y/x^4)`

Ergebnis

$$M^+ = M^+_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,\ell} \neq \emptyset,\ M^-_{\ell,0} \neq \emptyset,$$

Oszillation der Gleichung

Lösungsweg

- Wir untersuchen die lineare Gleichung $\left(x^4 y'\right)' = \frac{1}{x^4} y$ auf dem Intervall $[1;\ \infty)$, also (a(x)y')' = b(x)y mit a = x^4 > 0 und b = $\frac{1}{x^4}$ > 0. In der Form (a y')' + q y = 0 ist q = −b negativ, die Gleichung ist also nicht oszillatorisch – jede Lösung hat höchstens eine Nullstelle.
- Das Verhalten einer Lösung beschreibt neben y ihre Quasiableitung $y^{[1]} = x^4 y'$. Jede nichttriviale Lösung gehört zu einer von zwei Klassen: M^+ – ab einem x ist y·y' > 0 und |y| wächst – oder M^- – y·y' < 0 auf dem ganzen Intervall und |y| fällt. Die Klassen teilen sich nach den Grenzwerten von |y| und $|y^{[1]}|$ für x → ∞: Index ∞ (unendlich), ℓ (endlich, nicht null) oder 0 (null), zum Beispiel $M^+_{\infty,\ell}$
- Nach Satz 2.1 (Došlá–Marini) ist jede Lösung auf dem ganzen Intervall definiert, und beide Klassen M^+ und M^- sind nicht leer. Zu M^+ gehören zum Beispiel die Lösungen mit y(x₀) > 0 und y'(x₀) ≥ 0.
- Das Integral A: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Das Integral B: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- Das Integral J_1: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie x^{-4} (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_1^x \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

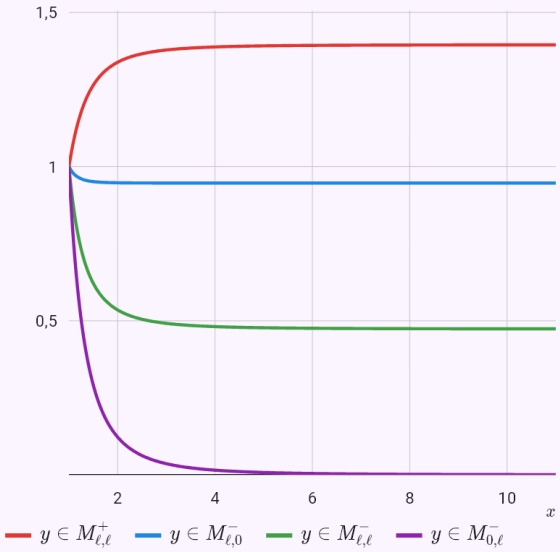
- Das Integral J_2: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie x^{-7} (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist

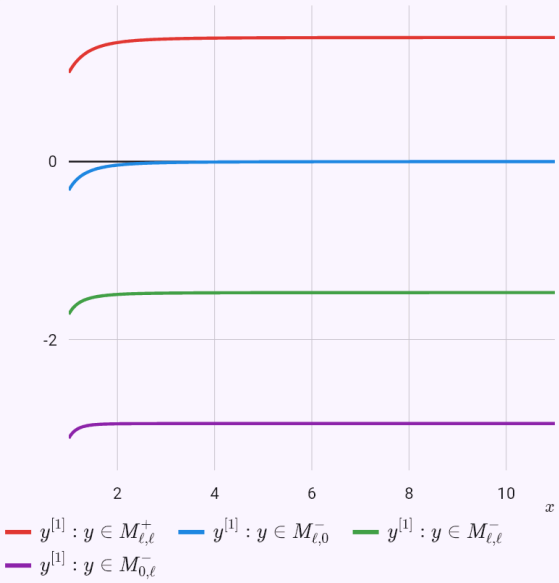
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\left(\int_x^\infty \frac{1}{s^4}\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x < \infty$$

- Die Integrale ergaben $J_1 < \infty,\ J_2 < \infty$ – das ist der Fall C_4 der Klassifikation (Satz 3.1).
- $M^+_{\ell,\ell}$ ≠ ∅: wachsende Lösungen mit endlichen Grenzwerten von y und der Quasiableitung (Satz 3.1).
- $M^-_{\ell,\ell}$ ≠ ∅: fallende Lösungen, bei denen y und die Quasiableitung Grenzwerte ungleich null haben (Satz 3.1).
- $M^-_{\ell,0}$ ≠ ∅: gegen einen Grenzwert ungleich null fallende Lösungen, die Quasiableitung → 0 (Satz 3.1).
- $M^-_{0,\ell}$ ≠ ∅: regulär abklingende Lösungen – y → 0, aber die Quasiableitung hat einen Grenzwert ungleich null; y fällt wie $\int_x^\infty a^{-1/\alpha}\,ds$ (Satz 3.1).
- $M^-_{0,0}$ = ∅ – keine Lösung dieser Art (Satz 3.1).
- Die Lösungen aus M^- im Graphen sind numerisch durch Schießen gefunden: Mit $y(1) = 1$ bleiben sie für ein

ganzes Intervall von Anfangswerten der Quasiableitung $y^{[1]}(1) \in [-3{,}1103;\ -0{,}3215]$ positiv und fallend, da $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx < \infty$ (Satz 4). Die Randpunkte und die Mitte des Intervalls liefern Lösungen verschiedener Klassen.

Graph





Oben numerische Lösungen y(x) aus den nicht leeren Klassen (M^{+} aus $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} durch Schießen), unten ihre Quasiableitungen y^[1](x). Eine Kurve endet, wo |y| 10 übersteigt.

Eine superlineare Gleichung – $M^+ = \emptyset$, $M^- = M^-_{0,0}$ (die Lösung √2/(x + √2)).

Eingabe: `asymptotics(y'' = y^3)`

Ergebnis

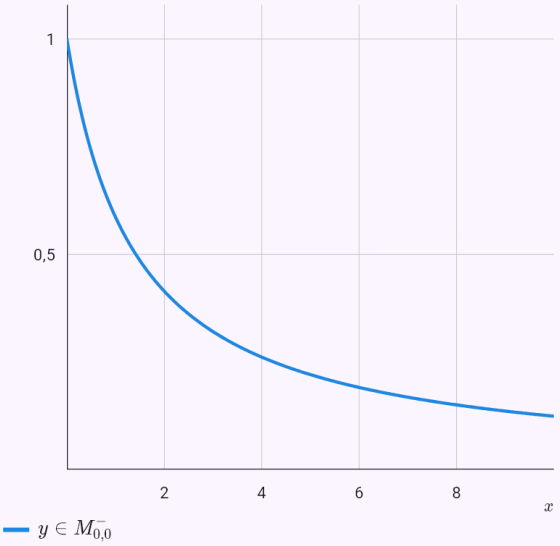
$$M^+ = \emptyset,\ M^- = M^-_{0,0} \neq \emptyset$$

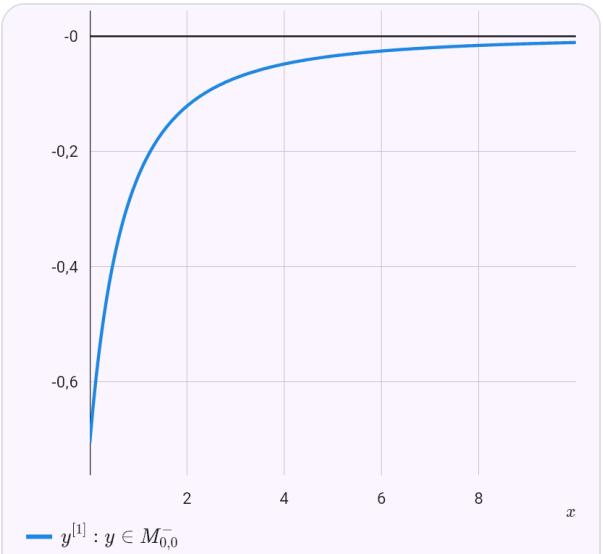
Lösungsweg

- Wir untersuchen die Gleichung vom Emden-Fowler-Typ $y'' = |y|^2 y$ auf dem Intervall $[0;\ \infty)$ mit α = 1, β = 3, a = 1 > 0 und b = 1 > 0. Wegen β > α ist die Gleichung superlinear. Die allgemeine Form der Gleichung ist $(a(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' = b(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y$
- Das Verhalten einer Lösung beschreibt neben y ihre Quasiableitung $y^{[1]} = y'$. Jede nichttriviale, bis unendlich definierte Lösung gehört zu einer von zwei Klassen: M^+ – ab einem x ist y·y' > 0 und |y| wächst – oder M^- – y·y' < 0 und |y| fällt. Die Klassen teilen sich nach den Grenzwerten von |y| und $|y^{[1]}|$ für x → ∞: Index ∞ (unendlich), ℓ (endlich, nicht null) oder 0 (null).
- Nach Satz 1 (Cecchi–Došlá–Marini) ist für β > α die Klasse M^- nicht leer. Manche Lösungen „explodieren“ jedoch: |y| → ∞ schon an einer endlichen Stelle, sie sind also nicht bis unendlich definiert. Die Klasse M^+ kann leer sein.
- Das Integral A: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie 1 (bis auf eine positive Konstante). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral B: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie 1 (bis auf eine positive Konstante). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_0^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral J_1: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie x (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^1 \mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral $Y_2^{(\beta)}$: Der Integrand verhält sich für x → ∞ wie x^3 (bis auf eine positive Konstante, das innere Integral durch sein asymptotisches Verhalten ersetzt). Nach dem Vergleichskriterium mit $\int x^\mu\,dx$, das genau für μ < −1 konvergiert, ist $\int_0^\infty \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- Das Integral $Y_1^{(\beta)}$ divergiert, da schon das innere Integral divergiert: $\int_0^\infty \left(\int_x^\infty 1\,\mathrm{d}s\right)^3 \mathrm{d}x = \infty$
- $M^+ = \emptyset$ – keine Lösung dieser Art (Kiguradze, zitiert in Cecchi–Došlá–Marini).
- $M^-_{\ell,\ell} = \emptyset$ – keine Lösung dieser Art (Lemma 1).
- $M^-_{\ell,0} = \emptyset$ – keine Lösung dieser Art (Lemma 2).
- $M^-_{0,\ell} = \emptyset$ – keine Lösung dieser Art (Lemma 1).
- $M^-_{0,0} \neq \emptyset$: stark abklingende Lösungen – y → 0 und $y^{[1]}$ → 0 (Satz 1).
- Die Lösung aus M^- im Graphen ist numerisch durch

Schießen gefunden: Wir suchen den Anfangswert der Quasiableitung, für den die Lösung mit $y(0) = 1$ auf einem langen Intervall weder null erreicht noch zu wachsen beginnt – $y^{[1]}(0) \doteq -0{,}7071$. Dieser Wert ist eindeutig, da $\int (a^{-1/\alpha} + b)\,dx = \infty$ (Satz 4).

Graph





Oben numerische Lösungen y(x) aus den nicht leeren Klassen (M^{+} aus $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 1$, M^{-} durch Schießen), unten ihre Quasiableitungen y^[1](x). Eine Kurve endet, wo |y| 10 übersteigt.

Bekannte Einschränkungen

- Eine Gleichung, die einen Hinweis aus der Aufgabe braucht (außer z = ln y), wird noch nicht gelöst.
- Bei einer Gleichung mit Parameter (k, λ, ω) zeichnet die App keinen Graphen und nimmt die Parameter als positiv an.
- Wo sich die Lösung nicht explizit ausdrücken lässt, bleibt sie implizit.
- Die Laplace-Transformation kennt die Heaviside-Funktion, Verschiebungen und periodische rechte Seiten noch nicht.
- Lassen sich die Integrale der Variation der Konstanten nicht durch elementare Funktionen ausdrücken (y″ + y′ + y = tan x), enthält die Lösung sie als Integrale; dann gibt es keinen Graphen und Anfangsbedingungen werden nicht eingesetzt.
- Systeme nur von zwei linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten ohne rechte Seite; nichtlineare Systeme nur in den Anwendungen (Modelle).
- Eine Riccati-Gleichung ohne angegebene partikuläre Lösung wird nur gelöst, wenn eine in einfacher Form erraten wird – sonst sagt die App, dass sie nötig ist.
- Die Lagrangesche Gleichung nur ohne Anfangsbedingung; bei der Clairautschen wählt die Bedingung die Geraden (und die Einhüllende) durch den Punkt.
- Oszillation nur für Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten (k muss eine Zahl sein); eine halblineare Gleichung nur mit r = 1. Die Nullstellen werden numerisch auf einem endlichen Intervall gezählt – über

das Unendliche entscheiden nur die Kriterien.

- Die Asymptotik einer Gleichung vom Emden-Fowler-Typ ($\beta \neq \alpha$) wird nur dort entschieden, wo die zitierten Sätze es aussagen – die übrigen Klassen werden als unentschieden markiert. Die Koeffizienten a, b müssen positiv sein; ihr Verhalten im Unendlichen wird bei Produkten von Potenzen, Logarithmen und Exponentialfunktionen erkannt, sonst nur exakte Integrale mit Symja.

37. Variationsrechnung

Die App sucht eine Extremale eines Funktionals J[y] = ∫ F(x, y, y′) dx mit den Randbedingungen y(a), y(b): sie stellt die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y′ = 0 auf (mit den partiellen Ableitungen im Lösungsweg), zeigt bei einem Integranden ohne y das erste Integral und löst die entstehende Differentialgleichung mit dem DGL-Löser samt Randbedingungen und Probe. Die Aufgabe gibt es auch als Formular in den Fachgebieten Analysis und Physik (Anwendungen).

Hat die Gleichung keine geschlossene Lösung und hängt F nicht von x ab, verwendet sie die Beltrami-Identität und erkennt die bekannten Extremalen: die Brachistochrone (eine Zykloide, im Vergleich mit der Geraden, mit der Rutschzeit), die Kettenlinie und die minimale Rotationsfläche (zwei, eine oder keine Kettenlinie – Goldschmidt-Lösung), ein isoperimetrisches Problem mit Lagrange-Multiplikator (ein Kreisbogen gegebener Länge, eine hängende Kette). Die Konstanten werden numerisch bestimmt. Das Prinzip der kleinsten Wirkung macht aus einer Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung, beim Pendel mit sin θ ≈ θ. Eine interaktive Demo – ein Kugelrennen auf der Brachistochrone – finden Sie auf mathtrace.app unter „Probier es aus“.

Eingabe

`functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`	Integrand und Randbedingungen, durch Semikolons getrennt.
`functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`	Die Nebenbedingung ∫ G dx = L als letzter Eintrag.
`functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`	Eine Lagrange-Funktion L = T − V und das Wort action – die Bewegungsgleichung.

Beispiele

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist eine Strecke.

Eingabe: `functional(sqrt(1 + y'^2); y(0) = 0; y(1) = 2)`

Ergebnis

$$y = 2x$$

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_0^1 \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$, Randbedingungen $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)

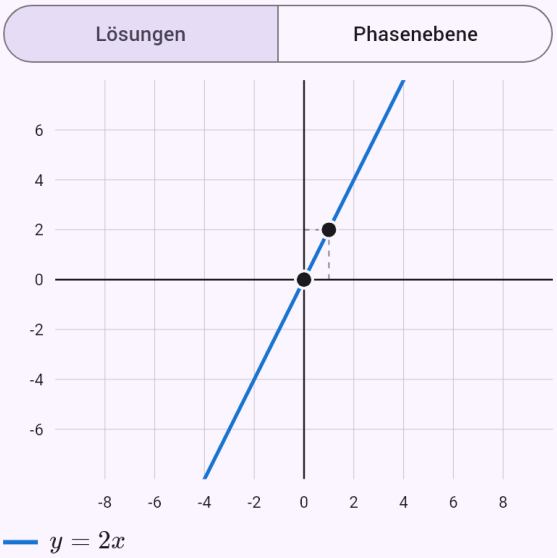
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$

- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-y'' = 0$
- Der Integrand hängt nicht von y ab – die Euler-Lagrange-Gleichung hat ein erstes Integral: $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Wir lösen die Differentialgleichung:
- Die rechte Seite hängt nur von der unabhängigen Variablen ab – wir integrieren die Gleichung schrittweise: $y'' = 0$
- Wir integrieren beide Seiten: $y' = \int 0 \, dx = C_1$
- Wir integrieren beide Seiten: $y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 2, \; C_2 = 0$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $y = 2x$

Graph



$y = 2x$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Eigene Werte der Konstanten

C_1 C_2

+ Kurve hinzufügen

Tippen Sie in den Graphen und stellen Sie die Steigung mit dem Schieberegler ein – die Lösung durch diesen Punkt mit dieser Tangentensteigung wird eingezeichnet.

Die Euler-Lagrange-Gleichung y'' = y mit Randbedingungen.

Eingabe: `functional(y'^2 + y^2; y(0) = 0; y(1) = 1)`

Ergebnis

$$y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$, Randbedingungen $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-2(-y + y'') = 0$
- Wir lösen die Differentialgleichung:
- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $y'' - y = 0$
- Wir suchen Lösungen y = e^(λx); Einsetzen und Teilen durch e^(λx) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-x}, \ y_2 = e^x$
- Die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = -\frac{e}{e^2 - 1}, \ C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$
  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 1 \end{cases}$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $y = \frac{e^{x+1}}{e^2 - 1} - \frac{e^{1-x}}{e^2 - 1}$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$

Die Brachistochrone – eine Zykloide von A [0; 0] nach B [2; 1], Rutschzeit 0,806 s gegenüber 1,010 s auf

der Geraden.

Eingabe: `functional(sqrt(1 + y'^2)/sqrt(2*9.81*y); y(0) = 0; y(2) = 1)`

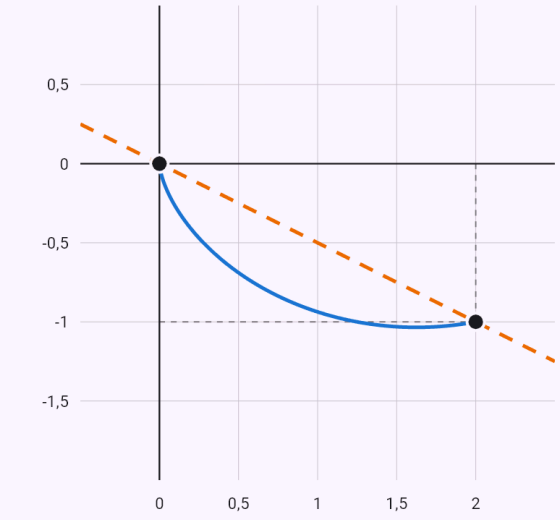
Ergebnis

$$x = 0{,}5172(\theta - \sin\theta),\ y = 0{,}5172(1 -$$

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_0^2 \left(\frac{0{,}225762\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y}} \right) dx$, Randbedingungen $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-0{,}112881\sqrt{y'^2+1}}{\sqrt{y^3}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{0{,}225762y'}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}},$$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-0{,}225762yy'' - 0{,}112881y'^2 - 0{,}112881\right) = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{0{,}225762}{\sqrt{y}\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Aus der Beltrami-Identität folgt y·(1 + y'²) = konst. Die Lösung ist eine Zykloide – die Kurve eines Punktes auf einem abrollenden Kreis (die y-Achse zeigt nach unten, Start in Ruhe in A): $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$
- Die Konstanten aus dem Endpunkt B (θ_B numerisch durch Intervallhalbierung)
$$\frac{\theta_B - \sin\theta_B}{1 - \cos\theta_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta_B \approx 3{,}508, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta_B} \approx$$
- Der Wert des Funktionals: $J_{min} = 0{,}2258 \cdot \theta_B\sqrt{2r} \approx 0{,}8056$; entlang der Geraden $J_{y=0{,}5x} \approx 1{,}01$. Für J = ∫ ds/v mit v = √(2gy) ist J die Rutschzeit: $T = \frac{J}{\sqrt{2g}} \approx 0{,}8056$ s
- θ_B > π – die schnellste Bahn sinkt unter das Niveau von B und steigt dann zu B auf.

Graph



$x(\theta),\ y(\theta)$
$y = 0{,}5x$

Die y-Achse zeigt nach unten – die Bahn verläuft unter dem Punkt A. Durchgezogen die Zykloide (die schnellste Rutschbahn), gestrichelt die Gerade zum Vergleich.

Die minimale Rotationsfläche zwischen zwei Ringen – zwei Kettenlinien, die flachere ist das Minimum.

Eingabe: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2)`

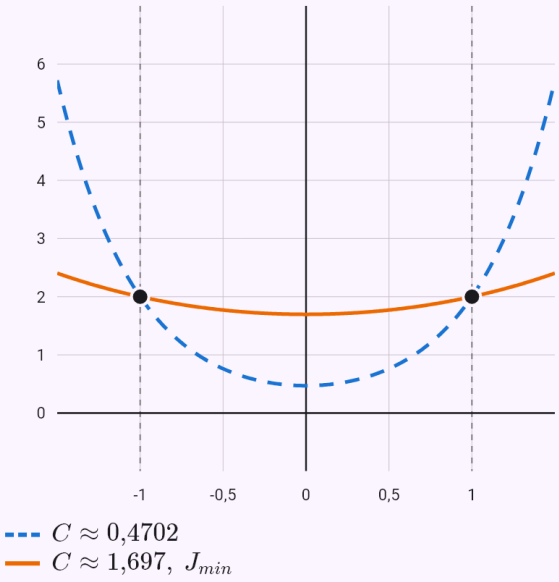
Ergebnis

$$y = 1{,}697\cosh\frac{x}{1{,}697};\quad J_{min} \approx 3{,}814$$

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx,$ Randbedingungen $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C₁: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Aus der Beltrami-Identität folgt eine Kettenlinie (der hyperbolische Kosinus): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Zwei Kettenlinien erfüllen die Randbedingungen (numerisch). Das Minimum liefert die mit dem kleineren J – die flachere; die tiefere ist nur stationär.
  $C \approx 0{,}4702,\ x_0 \approx 0,\ J \approx 4{,}358; \quad C \approx 1{,}697,\ x_0 \approx 0,$

Graph



$C \approx 0{,}4702$
$C \approx 1{,}697,\ J_{min}$

Die Extremale zwischen den gegebenen Punkten; gestrichelt die zweite Lösung oder eine Vergleichskurve.

Weit entfernte Ringe – keine Kettenlinie (Goldschmidt-Lösung).

Eingabe: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-2) = 1; y(2) = 1)`

Ergebnis

Es gibt keine Lösung.

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_{-2}^{2} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, Randbedingungen $y(-2) = 1, \quad y(2) = 1$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
  $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{}{\sqrt{(y}$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $\sqrt{y'^2+1}\left(-yy'' + y'^2 + 1\right) = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Aus der Beltrami-Identität folgt eine Kettenlinie (der hyperbolische Kosinus): $y = C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Keine Kettenlinie geht durch beide Punkte – die Ringe sind für ihren Abstand zu klein. Die Minimalfläche besteht dann nur aus den beiden Kreisscheiben und der Achse dazwischen (Goldschmidt-Lösung); eine glatte Extremale gibt es nicht.

Die größte Fläche unter einer Kurve der Länge π – ein Halbkreis.

Eingabe: `functional(y; y(-1) = 0; y(1) = 0; sqrt(1 + y'^2) = pi)`

Ergebnis

$$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$$

Lösungsweg

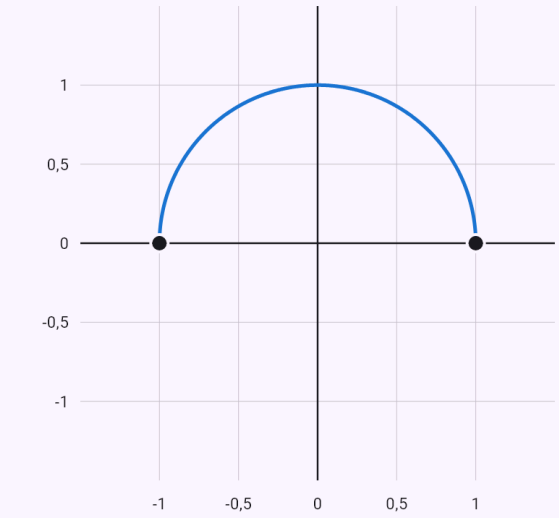
- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx$, Randbedingungen $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
- Ein isoperimetrisches Problem mit der Nebenbedingung $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx = \pi$: wir fügen sie mit einem Lagrange-Multiplikator λ hinzu und suchen ein Extremum des Funktionals mit dem Integranden $F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{y'^2 + 1}$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y''}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}}$$

- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $y'^2\sqrt{y'^2 + 1} - \lambda y'' + \sqrt{y'^2 + 1} = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C_1: $y + \frac{\lambda}{\sqrt{y'^2 + 1}} = C_1$
- Aus der Beltrami-Identität für F + λG folgt ein Kreis – ein Bogen mit dem Radius |λ|: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Die Konstanten aus der Länge des Bogens und der Sehne, Mittelpunktswinkel 2α (numerisch)

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3{,}142} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}571, \quad R = \frac{2}{2\sin\alpha} \approx 1, \quad S$$

Graph



$x^2 + y^2 = 1, \quad R \approx 1$

Die Extremale zwischen den gegebenen Punkten; gestrichelt die zweite Lösung oder eine Vergleichskurve.

Eine hängende Kette der Länge 3 – eine Kettenlinie mit Lagrange-Multiplikator.

Eingabe: `functional(y*sqrt(1 + y'^2); y(-1) = 2; y(1) = 2; sqrt(1 + y'^2) = 3)`

Ergebnis

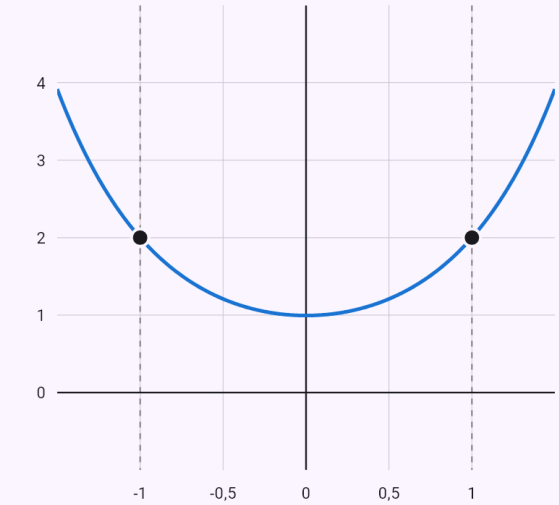
$$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$$

Lösungsweg

- Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional ein Extremum hat: $J[y] = \int_{-1}^{1} \left(y\sqrt{y'^2+1}\right) dx$, Randbedingungen $y(-1) = 2, \quad y(1) = 2$
- Ein isoperimetrisches Problem mit der Nebenbedingung $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{y'^2+1}\right) dx = 3$: wir fügen sie mit einem Lagrange-Multiplikator λ hinzu und suchen ein Extremum des Funktionals mit dem Integranden $F^* = F + \lambda G = y\sqrt{y'^2+1} + \lambda\sqrt{y'^2+1}$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab) $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y'^2+1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{y'^2+1}}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'^4 +}{}$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung ∂F/∂y − d/dx ∂F/∂y' = 0: $-yy'' + y'^2 - \lambda y'' + 1 = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C_1: $\frac{y+\lambda}{\sqrt{y'^2+1}} = C_1$
- Aus der Beltrami-Identität für F + λG folgt eine um λ verschobene Kettenlinie: $y = c + C\cosh\frac{x - x_0}{C}$
- Die Konstanten aus der Länge der Kette und den Randbedingungen (numerisch)

$$2C\sinh\frac{2}{2C} = \sqrt{L^2 - \Delta y^2} \;\Rightarrow\; C \approx 0{,}6165, \quad x_0 \approx 0,$$

Graph



$y = 0{,}3783 + 0{,}6165 \cosh \frac{x}{0{,}6165}$

Die Extremale zwischen den gegebenen Punkten; gestrichelt die zweite Lösung oder eine Vergleichskurve.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung – eine Feder, Bewegungsgleichung m x'' + k x = 0.

Eingabe: `functional(m*x'^2/2 - k*x^2/2; action)`

Ergebnis

$$x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right),$$

Lösungsweg

- Das Prinzip der kleinsten Wirkung: die Bewegung macht die Wirkung stationär: $S[x] = \int \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{mx'^2}{2}\right) dt$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
  $\frac{\partial F}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = mx', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = mx''$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung der Lagrange-Funktion ist die Bewegungsgleichung: $-kx - mx'' = 0$
- Wir lösen die Differentialgleichung:
- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
  $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
- Wir suchen Lösungen x = e^(λt); Einsetzen und Teilen durch e^(λt) ergibt die charakteristische Gleichung:
  $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
  $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem
  $x_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right), \; x_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$
- Die allgemeine Lösung
  $x = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$

Ein Pendel – sin θ ≈ θ für kleine Ausschläge.

Eingabe: `functional(m*l^2*θ'^2/2 + m*g*l*cos(θ); action)`

Ergebnis

$$\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right),$$

Lösungsweg

- Das Prinzip der kleinsten Wirkung: die Bewegung macht die Wirkung stationär:
  $S[\theta] = \int \left(\frac{l^2 m\theta'^2}{2} + glm\cos\theta\right) dt$
- Die partiellen Ableitungen des Integranden nach y und y' und die totale Ableitung nach x (y und y' hängen von x ab)
  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -glm\sin\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = l^2 m\theta''$
- Die Euler-Lagrange-Gleichung der Lagrange-Funktion ist die Bewegungsgleichung: $lm(-l\theta'' - g\sin\theta) = 0$
- Der Integrand hängt nicht von x ab – es gilt die Beltrami-Identität F − y'·∂F/∂y' = C₁: $lm\left(-\frac{l\theta'^2}{2} + g\cos\theta\right) = C_1$
- Die Gleichung mit sin θ hat keine elementare Lösung. Für kleine Ausschläge ergibt sin θ ≈ θ die Gleichung harmonischer Schwingungen: $lm(-g\theta - l\theta'') = 0$
- Wir lösen die Differentialgleichung:
- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
  $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$
- Wir suchen Lösungen \theta = e^(λt); Einsetzen und Teilen durch e^(λt) ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
  $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung e^(λx), eine k-fache außerdem x·e^(λx), …, x^(k−1)·e^(λx), ein Paar α ± βi die Lösungen e^(αx)·cos βx und e^(αx)·sin βx. Das Fundamentalsystem
  $\theta_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right), \; \theta_2 = \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$
- Die allgemeine Lösung
  $\theta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right)$

Bekannte Einschränkungen

- Eine unbekannte Funktion und höchstens ihre erste Ableitung im Integranden; Funktionale mehrerer Funktionen oder mit y″ noch nicht.
- Die bekannten Extremalen (Zykloide, Kettenlinie, Kreisbogen) werden an der Form des Integranden erkannt; andere nichtlineare Gleichungen bleiben als Euler-Lagrange-Gleichung stehen.
- Die Brachistochrone startet in Ruhe – der Anfangspunkt muss y(a) = 0 haben, die y-Achse zeigt nach unten.

38. Partielle Differentialgleichungen

Die Gleichung mit Indizes u_t, u_xx, u_xy schreiben (aus einem Foto liest die App auch ∂u/∂t und ∂²u/∂x²), den Laplace-Operator als Δu; Bedingungen und Gebiet durch Semikolon getrennt. Ohne Bedingungen bestimmt die App den Typ einer linearen Gleichung 2. Ordnung (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch – bei variablen Koeffizienten nach Gebieten), die Charakteristikengleichung, die Normalform und ohne Glieder niedrigerer Ordnung die allgemeine Lösung. Eine Gleichung 1. Ordnung a·u_x + b·u_y + c·u = f wird mit der Charakteristikenmethode mit Probe gelöst.

Mit Rand- und Anfangsbedingungen löst sie durch Trennung der Variablen die Wärmeleitungsgleichung u_t = k·u_xx und die Wellengleichung u_tt = c²·u_xx auf einem Intervall (Enden mit fester Temperatur oder isoliert, Werte ungleich null über den stationären Zustand) und die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck und im Kreis (auch außen). Die Fourier-Koeffizienten kommen als Formel in n; ist die Anfangsfunktion eine Summe von Eigenfunktionen, ergibt sich eine endliche Summe. Auf der ganzen Geraden verwendet sie die d'Alembertsche Formel und die Fourier-Transformation (Wärmeleitungskern), auf der Halbgeraden x > 0 die Laplace-Transformation in der Zeit. Sie bewältigt auch eine Quelle f(x, t) (Duhamel-Prinzip), einen Wärmestrom an einem Ende, zeitabhängige Randwerte und bei der Laplace-Gleichung Ableitungen an den Seiten. Von den nichtlinearen Gleichungen löst sie die Burgers-Gleichung – mit Charakteristiken bis zur Stoßwelle, mit Viskosität über die Cole-Hopf-Transformation; die Wellengleichung auf der Geraden zeigt sie auch mit der Fourier-Transformation. Die Poisson-Gleichung Δu = f auf einem Rechteck löst eine doppelte Fourier-Reihe (die Quelle als Summe von Produkten p(x)·q(y)); sind an allen vier Seiten Ableitungen gegeben, wird die Lösbarkeitsbedingung geprüft und die Lösung bis auf eine Konstante angegeben. Gleichungen mit den variablen Koeffizienten αx²u_xx + βxu_x werden zu einem Sturm-Liouville-Problem mit Gewicht.

Numerisch auf einem Gitter mit dem Verfahren als Kopf wie bei den anderen numerischen Methoden: die Wärmeleitungsgleichung explizit (ftcs), implizit (btcs), mit Crank-Nicolson (cranknicolson) und der θ-Methode (theta) – die impliziten Systeme mit dem Thomas-Algorithmus, mit Von-Neumann-Stabilitätsanalyse; die Transportgleichung mit upwind, laxwendroff und leapfrog mit der CFL-Bedingung, die Wellengleichung mit leapfrog; die Laplace- (Poisson-)Gleichung mit dem Fünf-Punkte-Stern und den Iterationen jacobi, gaussseidel und sor mit Vergleich der Iterationszahlen. Benannte Werte: h Ortsschritt, k Zeitschritt, to Endzeit, theta, omega, tol, max. Die Wärmeleitungsgleichung gibt es auch als Formular unter Numerische Methoden. Die Wärmeleitung in 2D auf einem Rechteck lösen die Verfahren ftcs und adi (alternierende Richtungen), die Laplace-Gleichung auch konjugierte Gradienten (cg), das Mehrgitterverfahren (multigrid) und finite Elemente mit Dreiecken (fem); die Burgers-Gleichung das Godunov-Verfahren (upwind). Transport- und Laplace-Gleichung sind auch Formulare im Bereich Numerische Methoden, die Anwendungen (Stab, Saite, Trommel, Diffusion) Formulare in Physik und Chemie. Für Erhaltungsgleichungen gibt es die Verfahren laxfriedrichs und muscl (mit dem Limiter minmod) – für die Transport- und die Burgers-Gleichung, diese auch mit Viskosität (Vergleich mit der

Cole-Hopf-Transformation). Die Finite-Elemente-Methode (fem) rechnet auch auf einem allgemeinen Polygon, gegeben durch seine Ecken, polygon = (0,0), (2,0), …, mit dem Randwert u = …; das Netz entsteht durch Abschneiden von Ohren und Teilen der Dreiecke. Wärmeleitung in einer Platte ist ein Formular in der Physik.

Das Ergebnis ist ein Graph von u(x, t): eine Kurve in der Zeit mit Schieberegler und Abspieltaste und eine drehbare 3D-Fläche; bei numerischer Lösung ist die exakte gestrichelt. Die stationäre Lösung u(x, y) der Laplace-Gleichung ist eine 3D-Fläche.

Eingabe

`u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`	Gleichung, Rand- und Anfangsbedingungen; eine Ableitung in einer Bedingung als u_t(x,0) oder u_x(0,t).
`u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`	Das Gebiet: x ∈ ℝ, x > 0 oder 0 < x < π; ohne Randbedingungen die ganze Gerade.
`Δu = 0; r < 2; u(2,ϕ) = cos ϕ`	Die Laplace-Gleichung im Kreis: Δu, Radius r und Winkel φ (oder θ).
`ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.004; to = 0.1)`	Numerisch: das Verfahren als Kopf, die Schritte h und k und die Endzeit to.
`adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y); T = 0.1)`	Wärmeleitung in 2D: u(x,y,t), Bedingungen wie u(x,y,0) = … und u(0,y,t) = …; Seiten ohne Bedingung haben den Wert 0.
`fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`	Finite Elemente auf einem Polygon: die Ecken nach polygon =, der Randwert u = …, die längste Kante h.

Beispiele

Eine hyperbolische Gleichung – Charakteristiken, Normalform u_ξη = 0 und allgemeine Lösung.

Eingabe: `u_xx + 4u_xy + u_yy = 0`

Ergebnis

$$u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2\right.\right.$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$
- Die Koeffizienten der zweiten Ableitungen in der Form $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 1$
- Die Diskriminante: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3 > 0$
- D > 0, die Gleichung ist hyperbolisch (wie die Wellengleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 3$
- Die Gleichung der Charakteristiken: $1\,(\mathrm{d}y)^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$
- Zwei reelle Scharen von Charakteristiken: $-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y = C_1, \quad \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y = C_2$
- Neue Variablen entlang der Charakteristiken: $\xi = -\left(2+\sqrt{3}\right)x + y, \quad \eta = \left(-2+\sqrt{3}\right)x + y$
- Nach dem Variablenwechsel (Kettenregel) erhalten wir die Normalform: $u_{\xi\eta} = 0$
- Die Gleichung u_ξη = 0 wird zweimal integriert – die allgemeine Lösung mit zwei beliebigen Funktionen $u = \Phi\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)x + y\right) + \Psi\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)x + y\right)$

Die Tricomi-Gleichung – der Typ nach Gebieten.

Eingabe: `y u_xx + u_yy = 0`

Ergebnis

$$D = -y$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Die Koeffizienten der zweiten Ableitungen in der Form $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$: $a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1$
- Die Diskriminante hängt vom Ort ab: $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$
- Der Typ nach Gebieten – hyperbolisch für $y < 0$, parabolisch für $y = 0$, elliptisch für $y > 0$
- Die Gleichung der Charakteristiken: $y\,(\mathrm{d}y)^2 - 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,(\mathrm{d}x)^2 = 0$

Die Transportgleichung mit Charakteristiken – die Welle bewegt sich mit Geschwindigkeit 2.

Eingabe: `u_t + 2u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

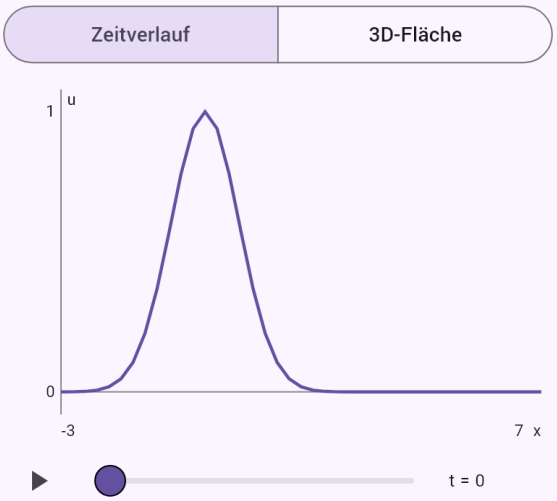
Ergebnis

$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t + 2u_x = 0$
- Bedingungen: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Die Charakteristikenmethode: entlang der Kurven, die das System lösen, wird die Gleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für u.
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$
- Die Charakteristiken sind die Kurven, auf denen $x - 2t = \xi$ konstant ist.
- Entlang einer Charakteristik lösen wir eine gewöhnliche Gleichung, der Anfangswert stammt aus der Bedingung:
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = e^{-\xi^2}$$
- Probe: in die Gleichung eingesetzt ist die linke Seite gleich der rechten.
- Die Lösung: $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Wärmeleitung in einem Stab mit gekühlten Enden – eine Fourier-Reihe.

Eingabe: `u_t = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = x(π - x)`

Ergebnis

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(n$$

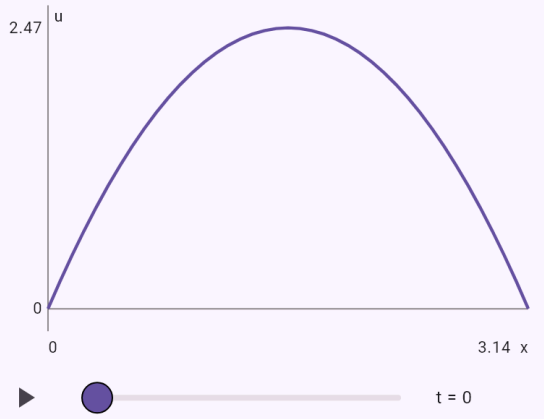
Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = 4u_{xx}$
- Bedingungen:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = x(\pi - x)$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt; eingesetzt und geteilt trennen sich die Variablen – beide Seiten müssen derselben Konstante gleich sein:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab:
  $T_n' = -4n^2 T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-4n^2 t}$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition): $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-4n^2 t} \sin(nx)$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)
  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi}$

- Die Lösung
  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Enden mit verschiedenen Temperaturen – stationärer Zustand und Abweichung davon.

Eingabe: `u_t = 2u_xx; u(0,t) = 1; u(2,t) = 3; u(x,0) = 0`

Ergebnis

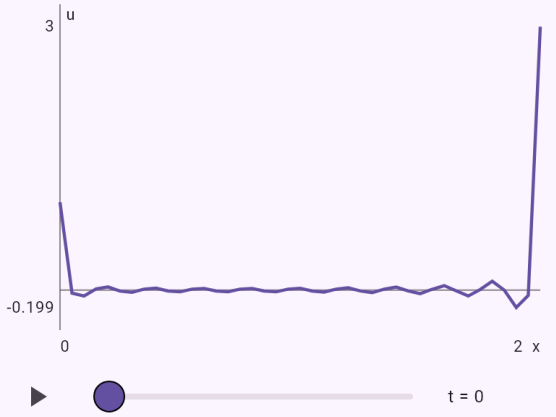
$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = 2u_{xx}$
- Bedingungen: $u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = 3, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Die Enden haben Werte ungleich null. Zuerst der stationäre Zustand $w(x) = x + 1$ (die Gleichung ohne Zeit, w" = 0), dann suchen wir $u = w(x) + v(x,t)$; die Abweichung v ist an den Enden null.
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt; eingesetzt und geteilt trennen sich die Variablen – beide Seiten müssen derselben Konstante gleich sein:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für
  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab:
  $T_n' = -\frac{n^2\pi^2}{2}\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition)
  $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)
  $c_n = \int_0^2 (-x-1)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}$
- Die Lösung
  $u(x,t) = x + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n - 2}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Eine gezupfte Saite – stehende Wellen.

Eingabe: `u_tt = 4u_xx; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = x(1 - x); u_t(x,0) = 0`

Ergebnis

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t) \; s$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$
- Bedingungen:
  $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, die Gleichung ist hyperbolisch (wie die Wellengleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt – stehende Wellen; beide Seiten sind derselben Konstante gleich: $u = X(x)\,T(t)$: $\quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für
  $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – Schwingungen mit eigener Frequenz:
  $T_n'' + 4n^2\pi^2\,T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition)

  $$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)

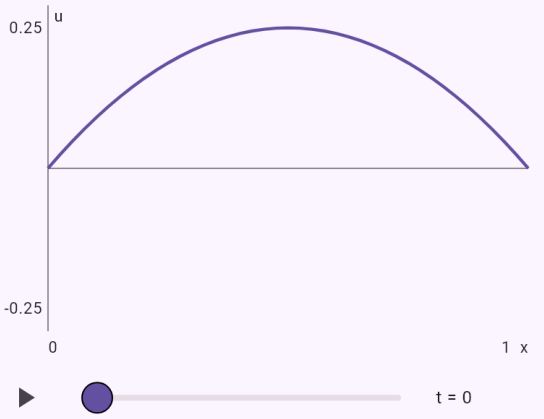
  $$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\, \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

- Die Lösung

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3\pi^3} \cos(2n\pi t)\, \sin(n\pi x)$$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck mit einer erwärmten Seite.

Eingabe: `u_xx + u_yy = 0; 0 < x < π; 0 < y < 1; u(x,1) = sin x`

Ergebnis

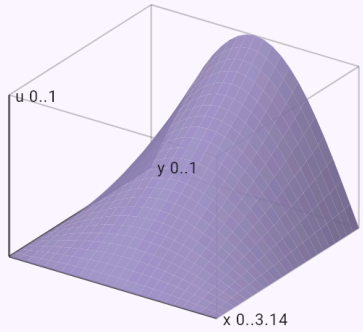
$$u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Bedingungen: $u(x,1) = \sin x$
- D < 0, die Gleichung ist elliptisch (wie die Laplace-Gleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Die Seite mit Werten ungleich null (die übrigen haben u = 0): $u(x,1) = \sin x$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Die andere Gleichung Y" = λY, null auf der gegenüberliegenden Seite, auf der gegebenen auf 1 normiert: $Y_n = \frac{\sinh(ny)}{\sinh n}$
- Die Anfangs- (Rand-)Funktion ist bereits eine Summe von Eigenfunktionen, daher sind nur wenige Koeffizienten $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \, \sin(nx)\,dx$ ungleich null: $c_1 = 1$, die übrigen sind null.

- Die Lösung: $u(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sinh y}{\sinh 1}$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Die Laplace-Gleichung im Kreis – eine endliche Summe von Harmonischen.

Eingabe: `Δu = 0; r < 1; u(1,ϕ) = sin(ϕ)^2`

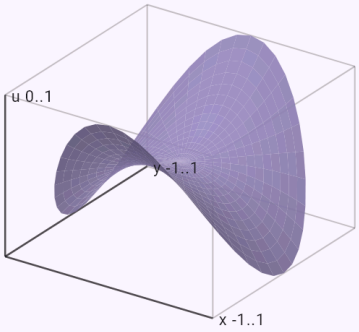
Ergebnis

$$u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung
  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$
- Bedingungen: $u(1,\varphi) = \sin^2\varphi$
- D < 0, die Gleichung ist elliptisch (wie die Laplace-Gleichung): $\Delta u = 0$
- Trennung der Variablen in Polarkoordinaten:
  $u = R(r)\,\Phi(\varphi):\quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$
- Der Winkel kehrt nach einer Umdrehung zurück, Φ muss periodisch sein: $\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ – die Lösungen
  $\lambda_n = n^2,\quad \Phi_n = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi,\quad n = 0,1,2,\ldots$
- Der radiale Anteil ist eine Euler-Gleichung; im Kreis muss die Lösung beschränkt sein (r^{-n} und ln r fallen weg):
  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \;\Rightarrow\; R_n = r^n$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition)
  $$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$
- Die Fourier-Koeffizienten der Randfunktion:
  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$
- Die Anfangs- (Rand-)Funktion ist bereits eine Summe von Eigenfunktionen, daher sind nur wenige Koeffizienten $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ ungleich null: $a_2 = -\frac{1}{2}$, die übrigen sind null.
- Alle Koeffizienten sind null:
  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
- Die Lösung: $u(r,\varphi) = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2}$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Die d’Alembertsche Formel – ein Anfangsimpuls teilt sich in zwei Wellen.

Eingabe: `u_tt = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2); u_t(x,0) = 0`

Ergebnis

$$u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$$

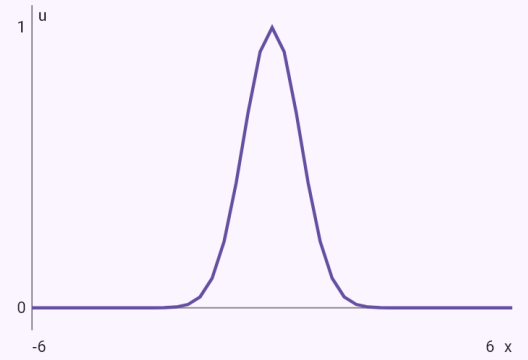
Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = u_{xx}$
- Bedingungen: $u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, die Gleichung ist hyperbolisch (wie die Wellengleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1$
- Die allgemeine Lösung der Wellengleichung sind zwei Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c nach links und rechts bewegen: $u = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$
- Dasselbe mit der Fourier-Transformation in x: Jede Frequenz ω schwingt für sich. Die Multiplikation mit e^(±icωt) bedeutet eine Verschiebung um ∓ct, die Rücktransformation liefert also – die Formel von d’Alembert.

- Die Anfangsbedingungen u = f und u_t = g ergeben die d’Alembertsche Formel:
  $u = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,\mathrm{d}s$
- Probe: in die Gleichung eingesetzt ist die linke Seite gleich der rechten.
- Die Lösung: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}}{2}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Die Fourier-Transformation auf der ganzen Geraden – ein Gauß-Profil wird breiter.

Eingabe: `u_t = u_xx; x ∈ ℝ; u(x,0) = e^(-x^2)`

Ergebnis

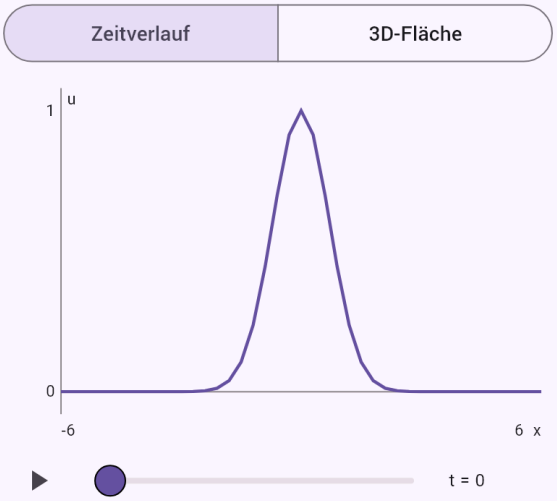
$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = u_{xx}$
- Bedingungen: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Auf der ganzen Geraden verwenden wir die Fourier-Transformation in x – die Ableitung u_xx wird zur Multiplikation mit −ω²: $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x.$
  Für jedes ω bleibt eine gewöhnliche Gleichung in der Zeit
  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u} \;\Rightarrow\; \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$
- Die Rücktransformation eines Produkts ist die Faltung mit dem Wärmeleitungskern (einer Gauß-Funktion, die sich mit der Zeit verbreitert)
  $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, \mathrm{d}s$
- Die Faltung zweier Gauß-Funktionen ist wieder eine Gauß-Funktion, nur breiter und niedriger
  $\hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$
- Probe: in die Gleichung eingesetzt ist die linke Seite gleich der rechten.

- Die Lösung: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Die Laplace-Transformation – Erwärmung eines Halbraums, die Funktion erfc.

Eingabe: `u_t = 4u_xx; x > 0; u(0,t) = 100; u(x,0) = 20`

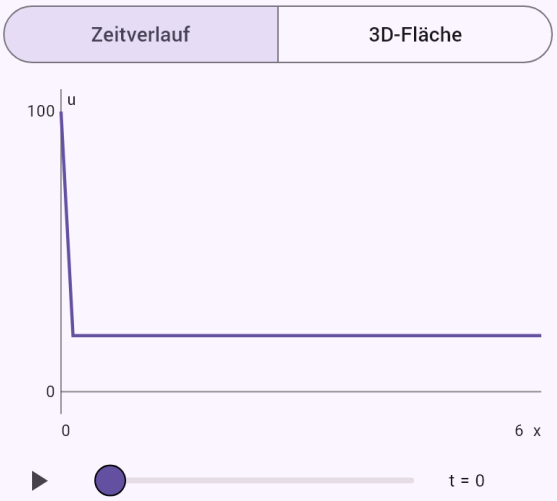
Ergebnis

$$u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = 4u_{xx}$
- Bedingungen: $u(0,t) = 100, \quad u(x,0) = 20$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Auf einer Halbgeraden verwenden wir die Laplace-Transformation in der Zeit $U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$ – die Ableitung u_t wird zu sU − u(x, 0) und es bleibt eine gewöhnliche Gleichung in x: $sU - 20 = 4U_{xx}$
- Für x → ∞ muss U beschränkt bleiben, die wachsende Exponentialfunktion fällt weg: $U = \frac{20}{s} + A(s)\,e^{-x\sqrt{\frac{s}{4}}}$; die Konstante aus der Randbedingung: $U(0,s) = \frac{100}{s} \;\Rightarrow\; A(s) = \frac{80}{s}$
- Die Rücktransformation nach der Tabelle $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
- Die Lösung: $u(x,t) = 20 + 80\ \operatorname{erfc}\frac{x}{4\sqrt{t}}$

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Das explizite Verfahren mit r = 0,7 > 1/2 – instabil nach von Neumann.

Eingabe: `ftcs(u_t = u_xx; u(x,0) = x(1-x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k = 0.007; to =`

1)

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Das Gitter: 11 Knoten in x, 143 Zeitschritte bis t = $1{,}001$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}007, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}7000$ (r ist der Zeitschritt durch das Quadrat des Ortsschritts).
- Das explizite Verfahren (vorwärts in der Zeit, zentral im Ort) – jeder neue Wert direkt aus drei alten: $u_i^{n+1} = u_i^n + r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$
- Von-Neumann-Analyse: der Fehler wird in Wellen e^(iβx) zerlegt, jede wird pro Schritt mit G multipliziert: $G = 1 - 4r\sin^2\dfrac{\beta h}{2}$. Stabilität braucht $r = 0{,}7000 > \dfrac{1}{2}$ – hier nicht, die Fehler wachsen exponentiell.
- Die erste Zeitschicht

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,090000	0,076000
2	0,2	0,160000	0,146000
3	0,3	0,210000	0,196000
4	0,4	0,240000	0,226000
5	0,5	0,250000	0,236000
6	0,6	0,240000	0,226000
7	0,7	0,210000	0,196000
8	0,8	0,160000	0,146000
9	0,9	0,090000	0,076000
10	1	0,000000	0,000000

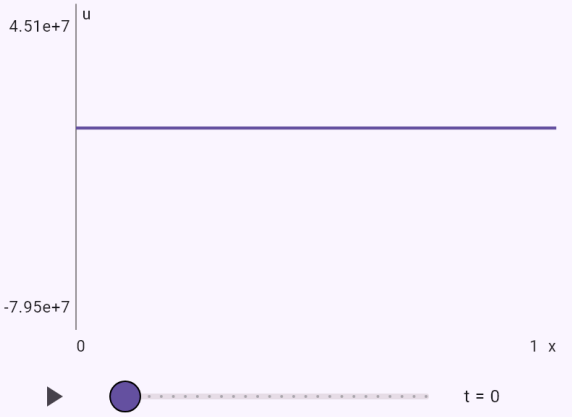
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0000	0,0900	0,1600
8	0,056	0,0000	0,0518	0,0752
16	0,112	0,0000	0,3660	−0,5894
24	0,168	0,0000	26,5321	−50,3647
32	0,224	0,0000	2137,3470	−4065,2082
40	0,28	0,0000	172643,2102	−328385,7013
48	0,336	0,0000	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$-2{,}653 \cdot 10^{7}$
50	0,35	0,0000	$4{,}181 \cdot 10^{7}$	$-7{,}953 \cdot 10^{7}$

- In der Schicht level.50 wuchsen die Werte über alle Grenzen – das Verfahren ist instabil, die Rechnung wurde abgebrochen.
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}35) \approx 1{,}35312 \cdot 10^{8}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Das Crank-Nicolson-Verfahren mit dem Thomas-Algorithmus.

Eingabe: `cranknicolson(u_t = u_xx; u(x,0) = sin(pi x); u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; h = 0.1; k =`

`0.01; to = 0.1)`

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$
- Das Gitter: 11 Knoten in x, 10 Zeitschritte bis t = $0{,}1$; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r = \dfrac{k}{h^2} = 1{,}0000$ (r ist der Zeitschritt durch das Quadrat des Ortsschritts).
- Das Crank-Nicolson-Verfahren – der Mittelwert des expliziten und des impliziten, zweiter Ordnung auch in der Zeit

$$-\tfrac{1}{2}r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \tfrac{1}{2}r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \tfrac{1}{2}r\big(u_{i+1}^n - 2$$

- Von-Neumann-Analyse: der Fehler wird in Wellen e^(iβx) zerlegt, der Verstärkungsfaktor pro Schritt ist $G = \dfrac{1 - 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}{1 + 2r\sin^2\frac{\beta h}{2}}$; immer $|G| \le 1$, das Verfahren ist für jeden Schritt stabil (unbedingt).
- In jeder Zeitschicht ist ein tridiagonales System a□u□₋₁ + b□u□ + c□u□₊₁ = d□ zu lösen (die Randwerte auf der rechten Seite). Die erste Schicht

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1		2,0000	−0,5000	0,293893
2	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
3	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
4	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
5	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,951057
6	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,904508
7	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,769421
8	−0,5000	2,0000	−0,5000	0,559017
9	−0,5000	2,0000		0,293893

- Das System mit dem Thomas-Algorithmus – Vorwärtselimination und Rückwärtseinsetzen

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad u_i^1 = d_i' - c_i' u_{i+}^1$$

i	c_i'	d_i'	u_i^1
1	−0,250000	0,146946	0,280180
2	−0,266667	0,337328	0,532933
3	−0,267857	0,502545	0,733520
4	−0,267943	0,619366	0,862304
5	−0,267949	0,675627	0,906680
6	−0,267949	0,665758	0,862304
7	−0,267949	0,590721	0,733520
8	−0,267949	0,457859	0,532933
9		0,280180	0,280180

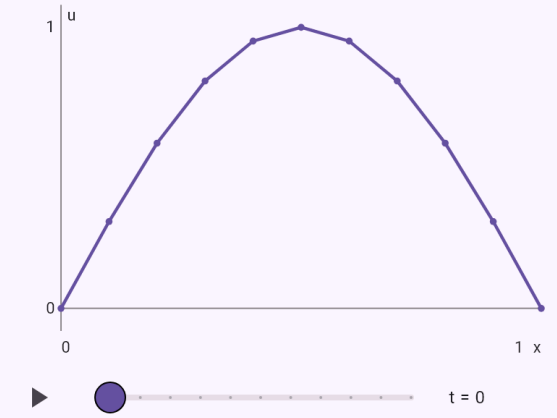
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$	$x = 0{,}3$	$x =$
0	0	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,(
2	0,02	0,0000	0,2540	0,4832	0,6651	0,(
4	0,04	0,0000	0,2088	0,3972	0,5467	0,(
6	0,06	0,0000	0,1717	0,3265	0,4495	0,(
8	0,08	0,0000	0,1411	0,2684	0,3695	0,(
10	0,1	0,0000	0,1160	0,2207	0,3037	0,(

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}1) - u_i^{10}\right| \approx 0{,}00273$ (exakt $0{,}372708$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}375442$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Punkte: die numerische Lösung in den Gitterknoten; gestrichelt: die exakte Lösung. Der Schieberegler wählt die Zeitschicht.

Das Lax-Wendroff-Verfahren für die Transportgleichung, die CFL-Bedingung.

Eingabe: `laxwendroff(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k =`

```
0.016; to = 0.4)
```

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Das Gitter auf $0 \le x \le 1$: 51 Knoten, 25 Zeitschritte bis t = 0,4; $h = 0{,}02, \quad k = 0{,}016, \quad \nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ ist die Courant-Zahl.
- Die exakte Lösung wird entlang der Charakteristiken $x - t = C$ mit der Geschwindigkeit a = 1 transportiert.
- Das Lax-Wendroff-Verfahren – Taylor-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung, u_tt ersetzt durch a²u_xx

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\nu^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

- Die CFL-Bedingung (das numerische Abhängigkeitsgebiet enthält die Charakteristik): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Von-Neumann-Analyse: der Fehler wird in Wellen e^(iβx) zerlegt, jede wird pro Schritt mit dem Verstärkungsfaktor G multipliziert. Das Verfahren ist stabil, wenn |G| ≤ 1 für alle β: $|G|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\dfrac{\beta h}{2}$; das gilt, weil $|\nu| \le 1$
- Die erste Zeitschicht

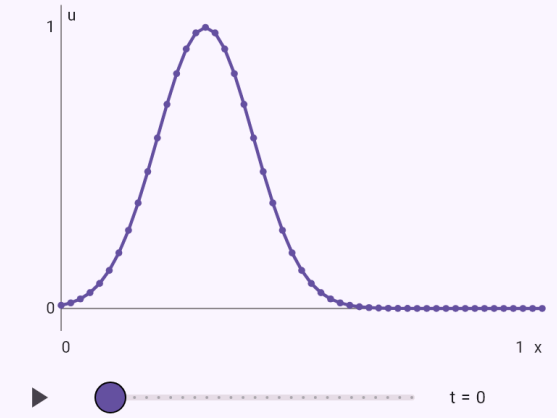
i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012417
2	0,04	0,034047	0,022052
3	0,06	0,056135	0,037609
4	0,08	0,088922	0,061602
5	0,1	0,135335	0,096912
6	0,12	0,197899	0,146442
7	0,14	0,278037	0,212556
8	0,16	0,375311	0,296359
9	0,18	0,486752	0,396932
10	0,2	0,606531	0,510721
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,987327
16	0,32	0,980199	0,999022
17	0,34	0,923116	0,971243
18	0,36	0,835270	0,907249
19	0,38	0,726149	0,814286
20	0,4	0,606531	0,702238
21	0,42	0,486752	0,581908
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0301	0,2611
8	0,128	0,0001	0,0042	0,0733
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,0128
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$2{,}235 \cdot 10^{-5}$	0,0014
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$8{,}568 \cdot 10^{-7}$	$9{,}388 \cdot 10^{-5}$
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$1{,}815 \cdot 10^{-8}$	$3{,}337 \cdot 10^{-6}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$7{,}929 \cdot 10^{-9}$	$1{,}511 \cdot 10^{-6}$

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0129$ (exakt $0{,}135335$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}133866$

Graph



Punkte: die numerische Lösung in den Gitterknoten; gestrichelt: die exakte Lösung. Der Schieberegler wählt die Zeitschicht.

Der Fünf-Punkte-Stern und SOR mit optimalem ω – Vergleich mit Jacobi und Gauß-Seidel.

Eingabe: `sor(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

0.1)

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Ein quadratisches Gitter: $h = 0{,}1$, 121 Knoten, davon 81 innere Unbekannte.
- Der Fünf-Punkte-Stern – u_xx + u_yy durch Differenzen ersetzt, in jedem Knoten eine Gleichung: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Die Überrelaxation (SOR) – der Gauß-Seidel-Schritt wird mit dem Faktor ω „überzogen“: $u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{(k)} + \omega\, \tilde{u}_{i,j}^{GS}$
- Der optimale Relaxationsfaktor aus dem Spektralradius des Jacobi-Verfahrens $\rho_J = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}9511, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1}}$
- Die Iterationen ab einer Null-Schätzung innen (ausgewählte Knoten und die größte Änderung)

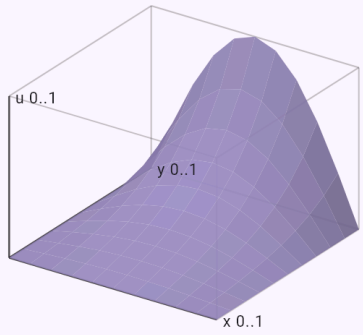
k	$u_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{5,6}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,585
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,349
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,206
4	0,000000	0,000000	0,096188	0,122
5	0,050359	0,035655	0,170299	0,0741
6	0,104395	0,084053	0,213423	0,0541
7	0,140768	0,119960	0,241149	0,0389
8	0,165712	0,145515	0,259286	0,0289
9	0,182811	0,163713	0,265151	0,0219
10	0,187653	0,176637	0,270685	0,0171
11	0,193498	0,181824	0,275244	0,0127
12	0,197266	0,185954	0,277934	0,00885
13	0,199257	0,188778	0,279539	0,00584
14	0,200171	0,190116	0,280249	0,00352
15	0,200753	0,190684	0,280659	0,002
16	0,201149	0,191113	0,280933	0,00109
17	0,201350	0,191408	0,281068	$7{,}75 \cdot 10^{-4}$
18	0,201464	0,191552	0,281137	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$
19	0,201535	0,191649	0,281190	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
20	0,201565	0,191686	0,281214	$7{,}43 \cdot 10^{-5}$

- Die Iteration endete nach 20 Schritten, als die größte Änderung unter 10^{-4} fiel.
- Die Verfahren auf demselben Gitter mit derselben Toleranz: Jacobi 102 Iterationen, Gauß-Seidel 61, SOR mit ω = 1,528 nur 20
- Schnellere Verfahren für dasselbe System (81 Unbekannte): konjugierte Gradienten 10 Iterationen, Mehrgitter 5 V-Zyklen. Die Zahl der V-Zyklen hängt kaum von der Feinheit des Gitters ab.
- Die Werte in den Gitterknoten

$y\backslash x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	0,0000	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0,
0,8	0,0000	0,3136	0,5075	0,5075	0,3136	0,
0,6	0,0000	0,1653	0,2674	0,2675	0,1653	0,
0,4	0,0000	0,0832	0,1347	0,1347	0,0833	0,
0,2	0,0000	0,0346	0,0561	0,0561	0,0347	0,
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}0028$ (exakt $0{,}199268$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}201565$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Eine mit der Zeit abklingende Wärmequelle – Duhamel-Prinzip.

Eingabe: `u_t = u_xx + sin(x)e^(-t); u(0,t) = 0; u(π,t) = 0; u(x,0) = 0`

Ergebnis

$$u(x,t) = te^{-t}\sin x$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x$
- Bedingungen: $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt; eingesetzt und geteilt trennen sich die Variablen – beide Seiten müssen derselben Konstante gleich sein: $u = X(x)\,T(t): \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab: $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition): $u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\sin(nx)$
- Alle Koeffizienten sind null: $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$
- Die Quelle $F(x,t) = e^{-t}\sin x$ entwickeln wir wie die Anfangsbedingung nach den Eigenfunktionen: $F_n(t) = f_n\,e^{-t}$, die Koeffizienten durch ein Integral.
- Die Anfangs- (Rand-)Funktion ist bereits eine Summe von Eigenfunktionen, daher sind nur wenige Koeffizienten $f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ ungleich null: $f_1 = 1$, die übrigen sind null.
- Duhamel-Prinzip: Jeder Koeffizient der Reihe erfüllt eine lineare gewöhnliche Gleichung mit Quelle; die Lösung ist das freie Abklingen plus die Faltung der Quelle mit dem Abklingen

$$T_n' + n^2\,T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = c_n\,e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)}$$

- Die Quelle hat nur endlich viele von null verschiedene Koeffizienten, ihre Beiträge ergeben sich exakt: $T_1^F(t) = te^{-t}$
- Die Lösung: $u(x,t) = te^{-t}\sin x$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Eine konstante Wärmequelle im Stab – der stationäre Zustand ist eine Parabel.

Eingabe: `u_t = u_xx + 1; u(0,t) = 0; u(1,t) = 0; u(x,0) = 0`

Ergebnis

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1}{n^3\pi^3}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + 1$
- Bedingungen: $u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Weder die Quelle noch die Randwerte hängen von der Zeit ab. Zuerst bestimmen wir den stationären Zustand – die Lösung der Gleichung ohne Zeitableitung $w'' + 1 = 0$ mit den Randbedingungen: $w(x) = \frac{x(1-x)}{2}$. Gesucht ist $u = w(x) + v(x,t)$; die Abweichung v hat Null-Randbedingungen und keine Quelle.
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt; eingesetzt und geteilt trennen sich die Variablen – beide Seiten müssen derselben Konstante gleich sein: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab: $T_n' = -n^2\pi^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2\pi^2 t}$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition): $u = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)

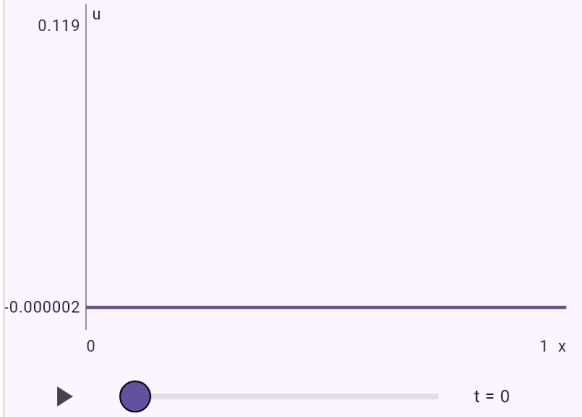
$$c_n = 2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}$$

- Die Lösung

$$u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi$$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Ein isolierter Stab, in den an einem Ende Wärme fließt – die mittlere Temperatur steigt linear.

Eingabe: `u_t = u_xx; u_x(0,t) = 0; u_x(π,t) = 1; u(x,0) = 0`

Ergebnis

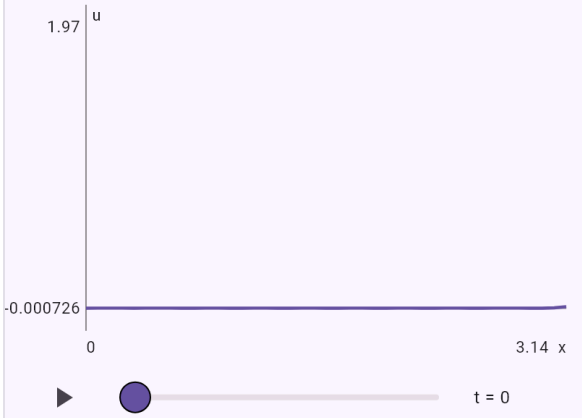
$$u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = u_{xx}$
- Bedingungen:
  $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad u(x,0) = 0$
- D = 0, die Gleichung ist parabolisch (wie die Wärmeleitungsgleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- Beide Enden sind isoliert, aber in den Stab fließt Wärme (ein Strom an den Enden oder eine Quelle). Einen stationären Zustand gibt es nicht – die mittlere Temperatur wächst mit der Rate $R = \frac{1}{\pi}$. Gesucht ist $u = \frac{t}{\pi} + W(x) + v(x,t)$, wobei W die Gleichung ohne Zeitableitung erfüllt: $W(x) = \frac{x^2}{2\pi}$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt; eingesetzt und geteilt trennen sich die Variablen – beide Seiten müssen derselben Konstante gleich sein:
  $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X' = 0 an beiden Enden (isolierte Enden) hat die Lösungen
  $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab:
  $T_n' = -n^2\,T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-n^2 t}$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition):
  $u = w(x,t) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration): $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{6}$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)
  $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{x^2}{2\pi}\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$
- Die Lösung
  $u(x,t) = \frac{x^2+2t}{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\, e^{-n^2 t}\, \cos(nx)$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Eine am Ende mit ihrer Eigenfrequenz angeregte Saite – Resonanz, die Amplitude wächst mit t.

Eingabe: `u_tt = u_xx; u(0,t) = 0; u(π,t) = sin(t); u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 0`

Ergebnis

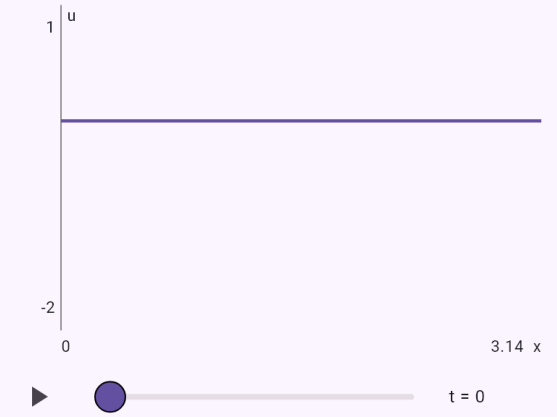
$$u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = u_{xx}$
- Bedingungen:
  $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \sin t, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$
- D > 0, die Gleichung ist hyperbolisch (wie die Wellengleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 1$
- Die Randwerte ändern sich mit der Zeit. Wir wählen eine Funktion $w(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$, die die Randbedingungen erfüllt, und suchen $u = w + v$. Die Abweichung v hat Null-Randbedingungen, ihre Gleichung erhält aber eine Quelle: $v_{tt} = v_{xx} + \frac{x \sin t}{\pi}$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt – stehende Wellen; beide Seiten sind derselben Konstante gleich: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für $\lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Der Zeitanteil für jedes n – Schwingungen mit eigener Frequenz:
  $T_n'' + n^2 T_n = 0 \;\Rightarrow\; T_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$
- Die Gleichung ist linear – eine Summe von Lösungen ist eine Lösung (Superposition):
  $u = w(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \sin(nx)$
- Alle Koeffizienten sind null: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0\, \sin(nx)\, \mathrm{d}x$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)
  $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} -\frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$
- Die Quelle $F(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi}$ entwickeln wir wie die Anfangsbedingung nach den Eigenfunktionen: $F_n(t) = f_n \sin t$, die Koeffizienten durch ein Integral.
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration)
  $f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$
- Duhamel-Prinzip: Jeder Koeffizient der Reihe ist eine erzwungene Schwingung – ein Oszillator mit Eigenfrequenz und äußerer Kraft F_n(t). Die Lösung ist die freie Schwingung plus die Faltung der Kraft mit der Impulsantwort sin(ω_n t)/ω_n
  $T_n'' + n^2 T_n = F_n(t) \;\Rightarrow\; T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(n$
- Das Integral wird allgemein für jedes n berechnet (K_n ist der Kern aus dem vorigen Schritt); wo die allgemeine Formel durch null teilen würde (Resonanz), gesondert
  $\int_0^t K_n(t-s)\, \sin s\, \mathrm{d}s = \frac{n \sin t - \sin(nt)}{n^3 - n}, \quad n = 1: \int$
- Die Lösung
  $u(x,t) = \frac{x \sin t}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi} \sin(nt)\, \sin(nx) + \frac{(\sin}{}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Laplace-Gleichung mit isolierter Unterseite (u_y = 0) – cosh statt sinh.

Eingabe: `Δu = 0; u_y(x,0) = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(0,y) = 0; u(1,y) = 0`

Ergebnis

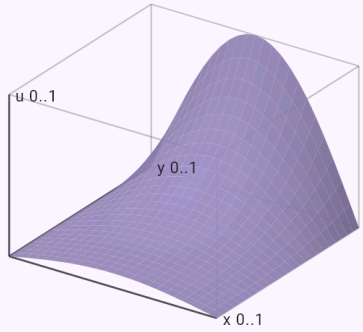
$$u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Bedingungen: $u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- D < 0, die Gleichung ist elliptisch (wie die Laplace-Gleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Die Seite mit Werten ungleich null (die übrigen haben u = 0): $u(x,1) = \sin(\pi x)$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X = 0 an beiden Enden hat Lösungen ungleich null nur für $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Die zweite Gleichung Y" = λY mit verschwindender Ableitung auf der gegenüberliegenden (isolierten) Seite – daher cosh –, auf der gegebenen Seite auf 1 normiert: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{\cosh(n\pi)}$
- Die Anfangs- (Rand-)Funktion ist bereits eine Summe von Eigenfunktionen, daher sind nur wenige Koeffizienten $c_n = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ ungleich null: $c_1 = 1$, die übrigen sind null.

- Die Lösung: $u(x,y) = \frac{\cosh(\pi y)\sin(\pi x)}{\cosh \pi}$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Burgers-Gleichung – die Charakteristiken schneiden sich, eine Stoßwelle entsteht.

Eingabe: `u_t + u u_x = 0; u(x,0) = e^(-x^2)`

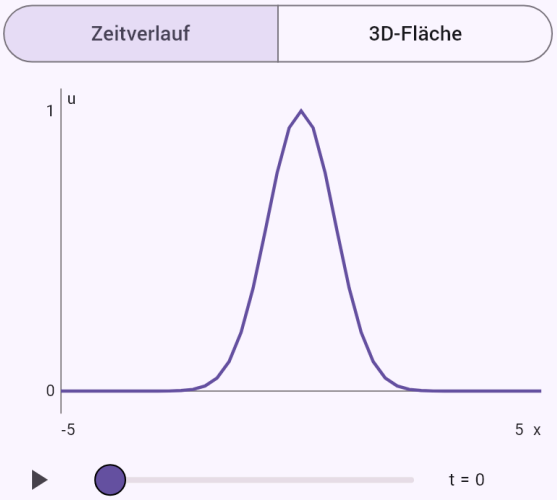
Ergebnis

$$u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t + uu_x = 0$
- Bedingungen: $u(x,0) = e^{-x^2}$
- Die Burgers-Gleichung ist nichtlinear – die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist u selbst. Entlang der Charakteristiken ist u konstant, die Charakteristiken sind also Geraden
  $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x_0), \quad x = x_0 + f(x_0)\,t$$
- Die Lösung ist implizit durch $u = f(x - ut)$ gegeben – für jeden Punkt sucht man das x_0, dessen Charakteristik zu ihm führt.
- Wo f fällt, holt der schnellere Teil der Welle den langsameren ein und die Charakteristiken schneiden sich. Der erste Schnitt tritt zur Zeit $t_b = -\frac{1}{\min f'} = -\frac{1}{-0{,}8577} \approx 1{,}1658$ $(x_0 \approx 0{,}710)$ ein – es entsteht eine Stoßwelle und die glatte Lösung existiert nicht mehr.
- Die Lösung (implizit, bis ein Verdichtungsstoß entsteht): $u = f(x - ut), \quad t < 1{,}1658$

Graph



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Burgers-Gleichung mit Viskosität – Cole-Hopf-Transformation auf die Wärmeleitung.

Eingabe: `u_t + u u_x = 0.1u_xx; u(x,0) = -tanh(x)`

Ergebnis

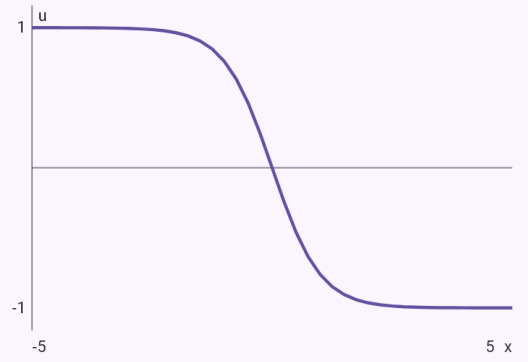
$$u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t + uu_x = 0{,}1u_{xx}$
- Bedingungen: $u(x,0) = -\tanh x$
- Mit Viskosität v > 0 linearisiert die Cole-Hopf-Transformation die Gleichung: $u = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi} \;\Rightarrow\; \varphi_t = 0{,}1\,\varphi_{xx}$ – aus der Burgers-Gleichung wird die Wärmeleitungsgleichung.
- Die Anfangsbedingung für φ $\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{0{,}2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{0{,}2}(-\ln(\cosh x))}$
- Die Wärmeleitungsgleichung löst die Faltung mit dem Wärmeleitungskern; nach dem Einsetzen ist u ein Quotient zweier Integrale, die für den Graphen numerisch berechnet werden $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\,\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{\int \frac{x-y}{t}\,I}{\int K}$
- Das Integral hat keine elementare Form – die Lösung bleibt eine Faltung, der Graph ist numerisch berechnet: $u(x,t) = -0{,}2\,\frac{\varphi_x}{\varphi}$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



t = 0

Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Godunov-Verfahren – die Stoßwelle läuft mit der Geschwindigkeit 1/2.

Eingabe: `upwind(u_t + u u_x = 0; u(x,0) = (1 - tanh(10x))/2; -2 < x < 4; h = 0.1; T = 2)`

Ergebnis

$$u(1,2) \approx 0{,}513583$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh(10x)}{2}$
- Gitter: 61 Knoten, 25 Zeitschritte; $h = 0{,}1, \quad k = 0{,}08$
- Eine Stoßwelle bewältigt das konservative Godunov-Verfahren – der Fluss F zwischen den Zellen aus der exakten Lösung des Riemann-Problems (eines Sprungs)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right), \quad F_{i+1/2} = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} \end{cases}$$

- Die CFL-Bedingung (das numerische Abhängigkeitsgebiet enthält die Charakteristik): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}8000 \le 1$
- Der Abfall von u_L auf u_R < u_L läuft als Stoßwelle mit der Geschwindigkeit aus der Rankine-Hugoniot-Bedingung: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 0{,}0000}{2} = 0{,}5000$
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x=-2$	$x=-1{,}4$	$x=-0{,}8$	$x=-0,$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820
4	0,32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	0,64	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0,96	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	1,92	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(1,2) \approx 0{,}513583$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

Wärmeleitung in einer quadratischen Platte mit ADI – stabil auch bei großem Schritt.

Eingabe: `adi(u_t = u_xx + u_yy; 0 < x < 1; 0 < y < 1; u(x,y,0) = sin(pi x)sin(pi y); h =`

`0.1; k = 0.01; T = 0.1)`

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x, y, 0) = \sin(\pi y)\sin(\pi x)$
- Gitter: 121 Knoten, 10 Zeitschritte (die Verhältnisse des Zeitschritts zu den Quadraten der Ortsschritte).

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad r_x = \frac{\kappa k}{h_x^2} = 1{,}0000, \quad r_y = \frac{\kappa k}{h_y^2} =$$

- Das ADI-Verfahren (alternierende Richtungen) von Peaceman und Rachford: Ein halber Schritt ist implizit in x und explizit in y, die andere Hälfte umgekehrt

$$\left(1 - \frac{r_x}{2}\delta_x^2\right)u^{n+1/2} = \left(1 + \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^n, \quad \left(1 - \frac{r_y}{2}\delta_y^2\right)u^{n+1}$$

- Von-Neumann-Analyse: Beide Halbschritte zusammen haben den Verstärkungsfaktor für jeden Schritt – ADI ist unbedingt stabil.

$$|G| = \left|\frac{1 - 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}{1 + 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}} \cdot \frac{1 - 2r_x \sin^2\frac{\alpha h_x}{2}}{1 + 2r_y \sin^2\frac{\beta h_y}{2}}\right| \le 1$$

- In der ersten Schritthälfte lösen wir 9 tridiagonale Systeme entlang der Gitterzeilen, in der zweiten 9 entlang der Spalten – jedes mit dem Thomas-Algorithmus. Das ist viel billiger als ein großes System für das ganze Gitter.
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

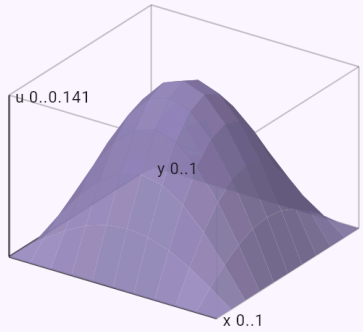
t	$u(0{,}5, 0{,}5)$	$\max\lvert u\rvert$
0	$1{,}000000$	$1{,}000000$
$0{,}01$	$0{,}822069$	$0{,}822069$
$0{,}02$	$0{,}675798$	$0{,}675798$
$0{,}03$	$0{,}555553$	$0{,}555553$
$0{,}04$	$0{,}456703$	$0{,}456703$
$0{,}05$	$0{,}375442$	$0{,}375442$
$0{,}06$	$0{,}308639$	$0{,}308639$
$0{,}07$	$0{,}253723$	$0{,}253723$
$0{,}08$	$0{,}208578$	$0{,}208578$
$0{,}09$	$0{,}171465$	$0{,}171465$
$0{,}1$	$0{,}140956$	$0{,}140956$

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht (exakt $0{,}138911$ in der Mitte).

$$u = \sum_{m,n} c_{mn}\, e^{-\kappa\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)t} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \max$$

- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}5, 0{,}1) \approx 0{,}140956$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Laplace-Gleichung mit konjugierten Gradienten – Vergleich mit SOR und Mehrgitter.

Eingabe: `cg(u_xx + u_yy = 0; u(x,1) = sin(pi x); u(x,0) = 0; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; h =`

```
0.125)
```

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0$
- Ein quadratisches Gitter: $h = 0{,}125$, 81 Knoten, davon 49 innere Unbekannte.
- Der Fünf-Punkte-Stern – u_xx + u_yy durch Differenzen ersetzt, in jedem Knoten eine Gleichung: $u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- Das Verfahren der konjugierten Gradienten – das System $-\Delta_h u = -f$ ist symmetrisch und positiv definit; jeder Schritt verkleinert den Fehler in einer neuen, zu den vorigen konjugierten Richtung p_k $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_l$
- Die Iterationen ab einer Null-Schätzung innen (ausgewählte Knoten und die größte Änderung)

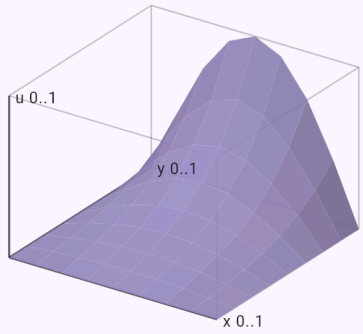
k	$u_{4,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,5}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,465
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,275
3	0,000000	0,000000	0,176522	0,177
4	0,116818	0,107926	0,251421	0,117
5	0,168686	0,155846	0,284676	0,0784
6	0,192179	0,177550	0,299739	0,0529
7	0,202915	0,187469	0,306622	0,0358
8	0,202915	0,187469	0,306622	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$

- Die Iteration endete nach 8 Schritten, als die größte Änderung unter 10^{-4} fiel.
- Die Verfahren auf demselben Gitter mit derselben Toleranz: Jacobi 71 Iterationen, Gauß-Seidel 42, SOR mit ω = $1{,}446$ nur 16
- Schnellere Verfahren für dasselbe System (49 Unbekannte): konjugierte Gradienten 8 Iterationen, Mehrgitter 5 V-Zyklen. Die Zahl der V-Zyklen hängt kaum von der Feinheit des Gitters ab.
- Die Werte in den Gitterknoten

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,3827	0,7071	0,9239	1,0000
0,875	0,0000	0,2591	0,4787	0,6254	0,6770
0,75	0,0000	0,1749	0,3232	0,4222	0,4570
0,625	0,0000	0,1173	0,2168	0,2833	0,3066
0,5	0,0000	0,0777	0,1435	0,1875	0,2029
0,375	0,0000	0,0498	0,0920	0,1202	0,1301
0,25	0,0000	0,0295	0,0545	0,0712	0,0771
0,125	0,0000	0,0137	0,0253	0,0331	0,0358
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 0{,}00432$ (exakt $0{,}199268$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}202915$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Poisson-Gleichung mit Mehrgitter – wenige V-Zyklen auf feinem Gitter.

Eingabe: `multigrid(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.0625)`

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Ein quadratisches Gitter: $h = 0{,}0625$, 289 Knoten, davon 225 innere Unbekannte.
- Der Fünf-Punkte-Stern – u_xx + u_yy durch Differenzen ersetzt, in jedem Knoten eine Gleichung
  $$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right)$$
- Mehrgitterverfahren (V-Zyklus): Die Gauß-Seidel-Iteration dämpft schnell nur den rasch veränderlichen Teil des Fehlers (S² – zwei Sweeps). Der glatte Rest r wird auf das gröbere Gitter 2h übertragen, dort (wieder mehrgitterig) korrigiert und die Korrektur zurückinterpoliert
  $$u \leftarrow S^2 u, \quad r = f - A_h u, \quad r_{2h} = Rr, \quad A_{2h} e_{2h} = r_{2h},$$
- Die Iterationen ab einer Null-Schätzung innen (ausgewählte Knoten und die größte Änderung)

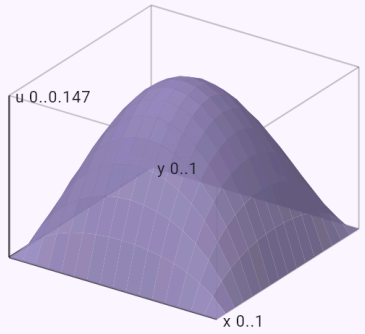
k	$u_{8,8}$	$u_{7,8}$	$u_{8,9}$	$\max \lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,134291	0,132314	0,132794	0,134
2	0,145872	0,143893	0,143981	0,0116
3	0,146813	0,144856	0,144867	$9{,}83 \cdot 10^{-4}$
4	0,146886	0,144932	0,144933	$8{,}06 \cdot 10^{-5}$

- Die Iteration endete nach 4 Schritten, als die größte Änderung unter 10^{-4} fiel.
- Die Verfahren auf demselben Gitter mit derselben Toleranz: Jacobi 179 Iterationen, Gauß-Seidel 108, SOR mit ω = $1{,}674$ nur 25
- Schnellere Verfahren für dasselbe System (225 Unbekannte): konjugierte Gradienten 15 Iterationen, Mehrgitter 4 V-Zyklen. Die Zahl der V-Zyklen hängt kaum von der Feinheit des Gitters ab.
- Die Werte in den Gitterknoten

$y \backslash x$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,875	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0,75	0,0000	0,0561	0,0903	0,1086	0,1143
0,625	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,5	0,0000	0,0697	0,1143	0,1390	0,1469
0,375	0,0000	0,0665	0,1085	0,1317	0,1390
0,25	0,0000	0,0561	0,0902	0,1085	0,1143
0,125	0,0000	0,0362	0,0561	0,0665	0,0697
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_{i,j} \lvert u(x_i, y_j) - u_{i,j}\rvert \approx 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ (exakt $0{,}147342$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}5) \approx 0{,}146886$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Finite-Elemente-Methode mit Dreiecken – Steifigkeitsmatrix und dasselbe System wie der Fünf-

Punkte-Stern.

Eingabe: `fem(u_xx + u_yy = -2; 0 < x < 1; 0 < y < 1; h = 0.25)`

Ergebnis

$$u(0{,}5,\,0{,}5) \approx 0{,}140625$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_{xx} + u_{yy} = -2$,
- Ein quadratisches Gitter: $h = 0{,}25$, 25 Knoten, davon 9 innere Unbekannte.
- Die Finite-Elemente-Methode: Die Gleichung wird mit einer Testfunktion v multipliziert und partiell integriert (schwache Formulierung); die Lösung wird als Kombination von „Hutfunktionen“ φ_j gesucht

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Das Netz: Jede Zelle wird durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt – 32 Dreiecke, 25 Knoten, davon 9 unbekannt.
- Die Steifigkeitsmatrix eines Dreiecks (die Gradienten der linearen Funktionen sind darauf konstant)

$$K^e_{ab} = \iint_T \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b = |T|\,\nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_b, \quad K^e = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -0, \\ -0, \end{pmatrix}$$

- Die Summe der Beiträge der sechs Dreiecke um einen inneren Knoten ergibt seine Gleichung – auf einem regelmäßigen Gitter ist das der Fünf-Punkte-Stern mal h_x·h_y

$$4{,}0000\,u_{i,j} - 1{,}0000(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - 1{,}0000(u_{i,j+1} + u$$

- Das Verfahren der konjugierten Gradienten – das System $-\Delta_h u = -f$ ist symmetrisch und positiv definit; jeder Schritt verkleinert den Fehler in einer neuen, zu den vorigen konjugierten Richtung p_k

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A_i$$

- Die Iterationen ab einer Null-Schätzung innen (ausgewählte Knoten und die größte Änderung)

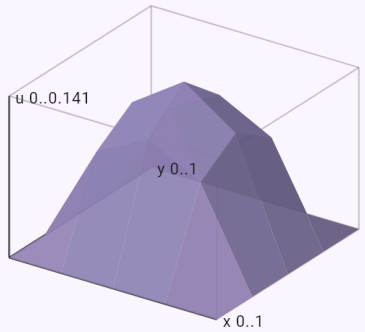
k	$u_{2,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,3}$	$\max\lvert\Delta u\rvert$
0	0,000000	0,000000	0,000000	
1	0,093750	0,093750	0,093750	0,0937
2	0,136364	0,110795	0,110795	0,0426
3	0,140625	0,109375	0,109375	0,00426
4	0,140625	0,109375	0,109375	$1{,}16 \cdot 10^{-17}$

- Die Iteration endete nach 4 Schritten, als die größte Änderung unter 10^{-4} fiel.
- Die Verfahren auf demselben Gitter mit derselben Toleranz: Jacobi 19 Iterationen, Gauß-Seidel 11, SOR mit ω = $1{,}172$ nur 8
- Schnellere Verfahren für dasselbe System (9 Unbekannte): konjugierte Gradienten 4 Iterationen, Mehrgitter 3 V-Zyklen. Die Zahl der V-Zyklen hängt kaum von der Feinheit des Gitters ab.
- Die Werte in den Gitterknoten

$y\backslash x$	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,75	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0,5	0,0000	0,1094	0,1406	0,1094	0,0000
0,25	0,0000	0,0859	0,1094	0,0859	0,0000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \approx 0{,}00672$ (exakt $0{,}147342$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5,\,0{,}5) \approx 0{,}140625$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Poisson-Gleichung auf einem Quadrat – doppelte Fourier-Reihe, Vergleich mit dem Verfahren sor.

Eingabe: `Δu = -2; u(0,y) = 0; u(1,y) = 0; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0`

Ergebnis

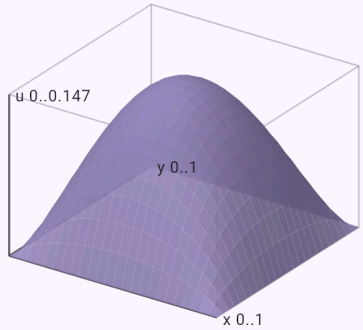
$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 -$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = -2$
- Bedingungen: $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0$
- D < 0, die Gleichung ist elliptisch (wie die Laplace-Gleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- Der Teil mit der Quelle ist eine Doppelreihe aus den Eigenfunktionen beider Richtungen – jedes Produkt X_m·Y_n erfüllt die Bedingungen an den Seiten, und der Laplace-Operator multipliziert es nur mit einer Zahl: $v = \sum_m \sum_n c_{mn}\, X_m(x)\, Y_n(y)$, wobei $X_m = \sin(m\pi x), \quad Y_n = \sin(n\pi y), \quad \Delta(X_m Y_n) = -($
- Die Quelle wird in dieselbe Doppelreihe entwickelt. Einsetzen in Δv = f und Koeffizientenvergleich ergibt $c_{mn} = -\frac{f_{mn}}{m^2\pi^2 + n^2\pi^2}$, also $f_{mn} = 4\int_0^1 \int_0^1 -2\,\sin(m\pi x)\,\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4((-}{}$ $c_{mn} = -\frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)}$
- Die Lösung

$$u(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^m - 1)(2 - 2(-1)^n)}{mn\pi^4\left(m^2 + n^2\right)} \sin(m$$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Ableitungen an allen vier Seiten – Lösbarkeitsbedingung und Lösung bis auf eine Konstante.

Eingabe: `u_xx + u_yy = 0; u_x(0,y) = 0; u_x(1,y) = 1; u_y(x,0) = 0; u_y(x,1) = -1 + cos(πx)`

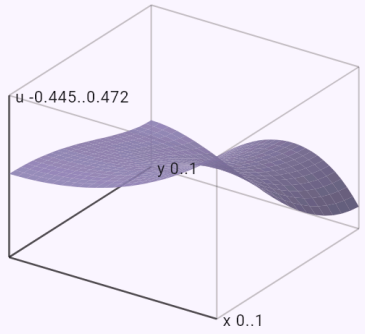
Ergebnis

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Bedingungen $u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1)$
- D < 0, die Gleichung ist elliptisch (wie die Laplace-Gleichung): $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1$
- An allen vier Seiten ist die Ableitung (ein Fluss) vorgegeben. Nach dem Satz von Gauß muss der Gesamtfluss durch den Rand der Quelle im Inneren entsprechen ($\iint_\Omega f \, \mathrm{d}S = 0$) – die Lösbarkeitsbedingung. Sie gilt; eine Lösung existiert, aber nur bis auf eine additive Konstante. Der Fluss durch den Rand $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (u_x(1,y) - u_x(0,y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (u_y(x,1$
- Ein quadratisches Polynom P übernimmt die mittleren Flüsse der Seiten; der Rest v hat an jeder Seite einen Fluss mit Mittelwert null und wird wie bisher Seite für Seite summiert: $u = P + v, \quad P = \frac{x^2 - y^2}{2}$; die mittleren Flüsse $\overline{u_x(0,y)} = 0, \quad \overline{u_x(1,y)} = 1, \quad \overline{u_y(x,0)} = 0, \quad \overline{u_y(x,1)}$
- Die Seite mit Werten ungleich null (die übrigen haben u = 0): $v_y(x,1) = \cos(\pi x)$
- Trennung der Variablen: wir suchen ein Produkt: $u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$
- Das Eigenwertproblem $X'' + \lambda X = 0$ mit X' = 0 an beiden Enden (isolierte Enden) hat die Lösungen $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- Auf der gegebenen Seite ist eine Ableitung vorgegeben und die gegenüberliegende Seite ist isoliert: cosh, so normiert, dass seine Ableitung auf der gegebenen Seite 1 ist: $Y_n = \frac{\cosh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}$
- Die Anfangs- (Rand-)Funktion ist bereits eine Summe von Eigenfunktionen, daher sind nur wenige Koeffizienten $c_n = 2\int_0^1 \cos(\pi x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ ungleich null: $c_1 = 1$, die übrigen sind null.
- Die Lösung (C ist eine beliebige Konstante – mit Ableitungen an allen Seiten ist u nur bis auf eine Verschiebung bestimmt) $u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y)}{\pi \sinh \pi} + C$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Variable Koeffizienten – Sturm-Liouville-Problem mit dem Gewicht 1/x, Eigenfunktionen sin(n ln x).

Eingabe: `u_t = x^2u_xx + x u_x; u(1,t) = 0; u(e^π,t) = 0; u(x,0) = 1`

Ergebnis

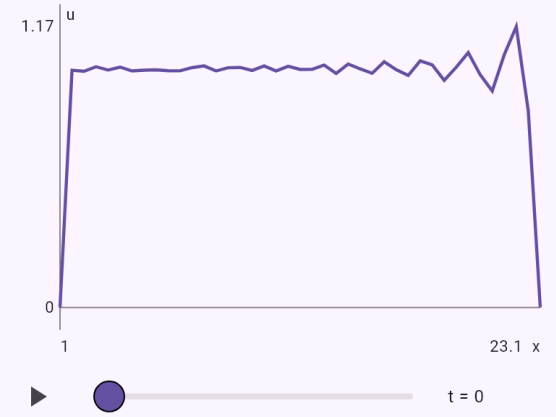
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n$$

Lösungsweg

- Wir lösen die partielle Differentialgleichung $u_t = x^2 u_{xx} + x u_x$
- Bedingungen: $u(1,t) = 0, \quad u(e^\pi, t) = 0, \quad u(x,0) = 1$
- Trennung der Variablen bei einer Gleichung mit variablen Koeffizienten – beide Seiten müssen dieselbe Konstante sein: $u = X(x)\,T(t): \quad \frac{T'}{T} = \frac{x^2 X'' + x X'}{X} = -\lambda$
- Multipliziert man die Gleichung für X mit einer passenden Funktion, entsteht ein Sturm-Liouville-Problem $(xX')' + \lambda \frac{1}{x} X = 0, \quad X(1) = X(e^\pi) = 0$ mit p = x und dem Gewicht w = $\frac{1}{x}$. Seine Eigenfunktionen sind bezüglich des Gewichts w orthogonal.
- Die Gleichung für X ist eine Eulersche, Ansatz X = x^r: $x^2 X'' + x X' + \lambda X = 0, \quad X = x^r: \quad r^2 + \lambda = 0.$ Eine Lösung ungleich null mit X = 0 an beiden Enden gibt es nur für komplexe Wurzeln: $r = \pm i\omega, \quad \lambda = \omega^2$. Die Bedingungen an den Enden ergeben $\omega_n = n, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \sin(n \ln x), \quad n = 1, 2, \ldots$
- Orthogonalität der Eigenfunktionen mit dem Gewicht w: $\int_1^{e^\pi} X_m X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$; ihre Norm $\int_1^{e^\pi} X_n^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- Der Zeitanteil für jedes n – exponentielles Abklingen, höhere Frequenzen klingen schneller ab: $T_n' = -\lambda_n T_n \;\Rightarrow\; T_n = e^{-\lambda_n t}$
- Die Koeffizienten der Anfangsfunktion f sind ihre Projektionen mit dem Gewicht w: $c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_1^{e^\pi} f(x)\, X_n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Nach einer Substitution werden sie zu Koeffizienten einer gewöhnlichen Sinusreihe von $\xi = \ln x$: $\quad 1$
- Die Koeffizienten aus der Anfangs- (Rand-)Funktion dank der Orthogonalität der Eigenfunktionen (partielle Integration) $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
- Die Lösung $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\, e^{-n^2 t}\, \sin(n \ln x)$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Die Lösung u zur mit dem Schieberegler gewählten Zeit t; die Taste spielt den Verlauf ab.

MUSCL-Verfahren mit Limiter – den Fehler mit Lax-Wendroff und Lax-Friedrichs vergleichen.

Eingabe: `muscl(u_t + u_x = 0; u(x,0) = e^(-50(x-0.3)^2); 0 < x < 1; h = 0.02; k = 0.016; to`

= 0.4)

Ergebnis

$$u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t + u_x = 0$, $u(x,0) = e^{-50(x-0{,}3)^2}$
- Das Gitter auf $0 \le x \le 1$: 51 Knoten, 25 Zeitschritte bis t = 0,4; $h = 0{,}02$, $k = 0{,}016$, $\nu = \dfrac{ak}{h} = 0{,}8000$ ist die Courant-Zahl.
- Die exakte Lösung wird entlang der Charakteristiken $x - t = C$ mit der Geschwindigkeit a = 1 transportiert.
- Das MUSCL-Verfahren – in jeder Zelle ein linearer Verlauf mit der Steigung σ_i, begrenzt durch einen Limiter; der Fluss kommt aus der stromaufwärts gelegenen Zelle, um einen halben Schritt verschoben. Wo die Lösung glatt ist, zweite Ordnung, an Sprüngen keine Oszillationen

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu\big(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\big), \quad F_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1-\iota}{2}$$

- Die Steigung in einer Zelle begrenzt minmod – null an einem Extremum, sonst die kleinere der beiden einseitigen Differenzen

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

- Die CFL-Bedingung (das numerische Abhängigkeitsgebiet enthält die Charakteristik): $|\nu| = 0{,}8000 \le 1$
- Ein Verfahren mit Limiter ist nichtlinear; statt der Von-Neumann-Analyse gilt, dass es die Totalvariation nicht vergrößert (TVD – keine neuen Oszillationen):

$$TV(u^{n+1}) \le TV(u^n), \quad TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|,$$

sofern $|\nu| \le 1$

- Die erste Zeitschicht

i	x_i	u_i^0	u_i^1
0	0	0,011109	0,006787
1	0,02	0,019841	0,012157
2	0,04	0,034047	0,022244
3	0,06	0,056135	0,037834
4	0,08	0,088922	0,061836
5	0,1	0,135335	0,097114
6	0,12	0,197899	0,146556
7	0,14	0,278037	0,212520
8	0,16	0,375311	0,296121
9	0,18	0,486752	0,396466
10	0,2	0,606531	0,510054
11	0,22	0,726149	0,631294
12	0,24	0,835270	0,749675
13	0,26	0,923116	0,855301
14	0,28	0,980199	0,937515
15	0,3	1,000000	0,985743
16	0,32	0,980199	0,997624
17	0,34	0,923116	0,971765
18	0,36	0,835270	0,908008
19	0,38	0,726149	0,815148
20	0,4	0,606531	0,703065
21	0,42	0,486752	0,581921
22	0,44	0,375311	0,463331
23	0,46	0,278037	0,354486
24	0,48	0,197899	0,260604
⋮	⋮	⋮	⋮
41	0,82	0,000001	0,000003
42	0,84	$4{,}65572 \cdot 10^{-7}$	0,000001
43	0,86	$1{,}54975 \cdot 10^{-7}$	$3{,}87038 \cdot 10^{-7}$
44	0,88	$4{,}95641 \cdot 10^{-8}$	$1{,}28207 \cdot 10^{-7}$
45	0,9	$1{,}523 \cdot 10^{-8}$	$4{,}08092 \cdot 10^{-8}$
46	0,92	$4{,}49635 \cdot 10^{-9}$	$1{,}24822 \cdot 10^{-8}$
47	0,94	$1{,}27541 \cdot 10^{-9}$	$3{,}66871 \cdot 10^{-9}$
48	0,96	$3{,}47589 \cdot 10^{-10}$	$1{,}03614 \cdot 10^{-9}$
49	0,98	$9{,}10147 \cdot 10^{-11}$	$2{,}81198 \cdot 10^{-10}$
50	1	$2{,}28973 \cdot 10^{-11}$	$7{,}73912 \cdot 10^{-11}$

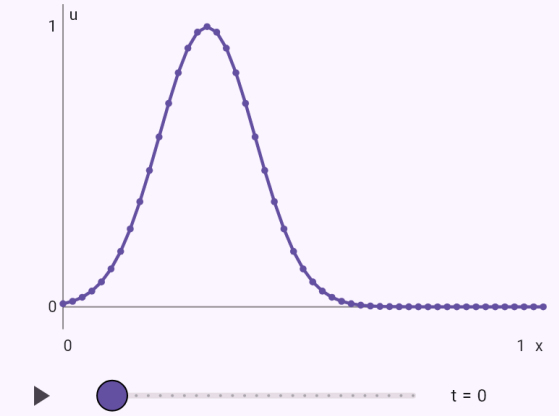
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x = 0$	$x = 0{,}1$	$x = 0{,}2$
0	0	0,0111	0,1353	0,6065
4	0,064	0,0013	0,0311	0,2605
8	0,128	0,0001	0,0046	0,0750
12	0,192	$5{,}542 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0144
16	0,256	$1{,}937 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-5}$	0,0019
20	0,32	$4{,}496 \cdot 10^{-9}$	$1{,}529 \cdot 10^{-6}$	0,0002
24	0,384	$6{,}928 \cdot 10^{-11}$	$4{,}869 \cdot 10^{-8}$	$1{,}032 \cdot 10^{-5}$
25	0,4	$2{,}29 \cdot 10^{-11}$	$1{,}937 \cdot 10^{-8}$	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_i \left|u(x_i, 0{,}4) - u_i^{25}\right| \approx 0{,}0326$ (exakt $0{,}135335$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}5, 0{,}4) \approx 0{,}137131$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Punkte: die numerische Lösung in den Gitterknoten; gestrichelt: die exakte Lösung. Der Schieberegler wählt die Zeitschicht.

Burgers-Gleichung mit Viskosität im MUSCL-Verfahren – Vergleich mit der Cole-Hopf-Transformation.

Eingabe: `muscl(u_t + u u_x = 0.05u_xx; u(x,0) = (1 - tanh(x))/2; -5 < x < 5; T = 1)`

Ergebnis

$$u(0,1) \approx 0{,}805836$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_t + uu_x = 0{,}05u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1-\tanh x}{2}$
- Gitter: 41 Knoten, 10 Zeitschritte; $h = 0{,}25, \quad k = 0{,}1$
- Das MUSCL-Verfahren für die Burgers-Gleichung: Aus den begrenzten Steigungen σ_i (Limiter) folgen die Werte an den Zellrändern, der Fluss dazwischen aus Godunovs Lösung des Sprungs, in der Zeit schreitet das Heun-Verfahren (zwei Stufen)

$$u^* = u^n + k\,L(u^n), \quad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^* + k\,L(u^*)),$$

- Die Steigung in einer Zelle begrenzt minmod – null an einem Extremum, sonst die kleinere der beiden einseitigen Differenzen

$$\sigma_i = \operatorname{minmod}(u_i - u_{i-1},\, u_{i+1} - u_i), \quad \operatorname{minmod}(p,q) =$$

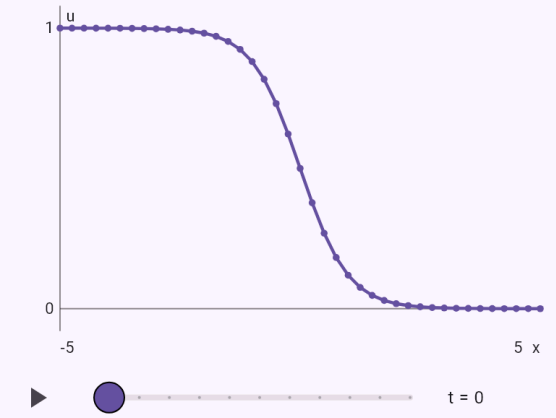
- Die CFL-Bedingung (das numerische Abhängigkeitsgebiet enthält die Charakteristik): $\dfrac{k}{h}\max|u| = 0{,}4000 \le 0{,}5$
- Der viskose Term ν·u_xx wird mit einer zentralen Differenz addiert: $+\dfrac{\nu k}{h^2}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right)$. Der explizite Schritt ist stabil, da $\dfrac{\nu k}{h^2} = 0{,}0800 \le \dfrac{1}{2}$
- Der Abfall von u_L auf u_R < u_L läuft als Stoßwelle mit der Geschwindigkeit aus der Rankine-Hugoniot-Bedingung: $s = \dfrac{u_L + u_R}{2} = \dfrac{1{,}0000 + 4{,}54\cdot 10^{-5}}{2} = 0{,}5000$
- Die Lösung in ausgewählten Zeitschichten

n	t_n	$x=-5$	$x=-4$	$x=-3$	$x=-2$	$x=$
0	0	1,0000	0,9997	0,9975	0,9820	0,8
2	0,2	1,0000	0,9998	0,9982	0,9870	0,9
4	0,4	1,0000	0,9998	0,9987	0,9907	0,9
6	0,6	1,0000	0,9999	0,9991	0,9933	0,9
8	0,8	1,0000	0,9999	0,9993	0,9952	0,9
10	1	1,0000	0,9999	0,9995	0,9965	0,9

- Der größte Fehler gegenüber der exakten Lösung in der letzten Schicht: $\max_i |u(x_i,1) - u_i^{10}| \approx 0{,}0136$ (exakt $0{,}811680$ in der Mitte).
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0,1) \approx 0{,}805836$

Graph

Zeitverlauf | 3D-Fläche



Punkte: die numerische Lösung in den Gitterknoten; gestrichelt: die exakte Lösung. Der Schieberegler wählt die Zeitschicht.

Finite Elemente auf einem L-förmigen Gebiet – Triangulierung durch Abschneiden von Ohren, die 3D-

Fläche nur über dem Gebiet.

Eingabe: `fem(Δu = -4; polygon = (0,0), (2,0), (2,1), (1,1), (1,2), (0,2); u = 0; h = 0.25)`

Ergebnis

$$u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$$

Lösungsweg

- Numerisch auf einem Gitter gelöst: $u_{xx} + u_{yy} = -4$, $u = 0 \quad (\partial\Omega)$
- Das Gebiet ist ein Polygon mit den Ecken $(0,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,2)$, Fläche $|\Omega| = 3{,}0000$
- Die Finite-Elemente-Methode: Die Gleichung wird mit einer Testfunktion v multipliziert und partiell integriert (schwache Formulierung); die Lösung wird als Kombination von „Hutfunktionen“ φ_j gesucht

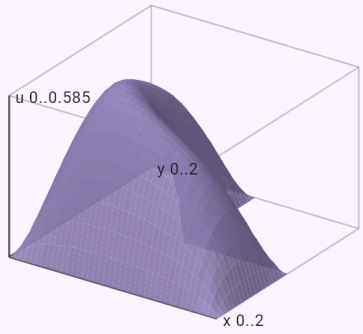
$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad u = \sum_j u_j \varphi_j$$

- Triangulierung: Das Abschneiden von „Ohren“ (eine konvexe Ecke, in deren Dreieck keine andere Ecke liegt) ergibt 4 Dreiecke; 4× wird jedes über die Seitenmitten in vier geteilt – 1024 Dreiecke, 561 Knoten, davon 465 innere (unbekannte), längste Kante $h = 0{,}1398$
- Die Steifigkeitsmatrix eines Dreiecks (die Gradienten der linearen Funktionen sind darauf konstant)

$$K^e_{ab} = \frac{b_a b_b + c_a c_b}{4|T|}, \quad b_a = y_{a+1} - y_{a+2}, \quad c_a = x_{a+2} - \dots$$

- Die Werte in den Randknoten sind gegeben, ihre Beiträge kommen auf die rechte Seite: $u_j = 0 \quad (j \in \partial\Omega)$
- Das dünn besetzte System K·U = F mit 465 Unbekannten löst das Verfahren der konjugierten Gradienten in 128 Iterationen. Größter Wert: $u(0{,}6875, 0{,}625) \approx 0{,}585873$
- Das Ergebnis im mittleren Knoten: $u(0{,}8125, 0{,}8125) \approx 0{,}506527$

Graph



Die Lösung u als Fläche über dem Gebiet. Mit dem Finger ziehen zum Drehen.

Bekannte Einschränkungen

- Analytisch nur lineare Gleichungen mit einer unbekannten Funktion u zweier Variablen sowie die Burgers-Gleichung; andere nichtlineare Gleichungen und Systeme nicht.
- Mit Trennung der Variablen die Wärmeleitungs- und die Wellengleichung auf einem Intervall; eine Quelle nur als Summe von Produkten p(x)·q(t), bei der Poisson-Gleichung höchstens drei Produkte p(x)·q(y). Variable Koeffizienten nur vom Eulerschen Typ αx²u_xx + βxu_x mit Nullwerten an den Enden.
- Die Fourier-Transformation in geschlossener Form für eine Gaußfunktion, ein Polynom und Funktionen mit f″ = λf; sonst bleibt die Faltung und der Graph wird numerisch berechnet.
- Numerisch in 2D die Wärmeleitungs- und die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck mit regelmäßigem Gitter; auf einem Polygon nur die Finite-Elemente-Methode mit linearen Dreiecken und einem Randwert (keiner Ableitung), ohne Löcher und mit höchstens 40 Ecken.

39. Rekursionen und erzeugende Funktionen

Die App löst lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten beliebiger Ordnung über die charakteristische Gleichung – auch mehrfache und komplexe Wurzeln (die komplexe Form der Lösung und ihre Umwandlung in die reelle nach dem Satz von Moivre) – und mit einer rechten Seite der Form $P(n)\cdot q^n$ (auch cos nφ, sin nφ, Resonanz und eine Summe rechter Seiten). Die Anfangsbedingungen bestimmen die Konstanten; zur Probe berechnet die App weitere Glieder aus der Rekursion und vergleicht sie mit der Formel.

Mit dem Chip „Methode“ lassen sich auch die erzeugende Funktion ($A(x) = \Sigma\, a_n x^n$, Partialbrüche, geometrische Reihen), Matrixpotenzen (Diagonalisierung) oder bei 1. Ordnung das Aufsummieren wählen. Eine Rekursion 1. Ordnung mit variablem Koeffizienten ($a_{n+1} = (n + 1)a_n$) wird über ein Produkt gelöst (Fakultäten), umformbare nichtlineare Rekursionen über die Substitution $b_n = 1/a_n$ oder $b_n = \ln a_n$. Ein System zweier Rekursionen löst sie durch Elimination einer Folge oder mit der Matrix, eine Teile-und-herrsche-Rekursion $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ über $n = b^k$ – mit der Abschätzung nach dem Master-Theorem.

Mit der Operation „Erzeugende Funktion“ findet die App die erzeugende Funktion einer Folge, gegeben durch eine Formel ($n^2 + 2^n$) oder ihre ersten Glieder (1, 0, 1, 0, …), und umgekehrt die Formel für a_n aus einer Funktion A(x). Die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen von $x_1 + x_2 + \ldots = N$ (auch mit Schranken oder Koeffizienten – Bezahlen mit Münzen) ist ein Koeffizient einer erzeugenden Funktion.

Der Graph zeigt die Glieder der Folge als Punkte (bei einem System beide Folgen).

Eine Differenz Δf(n) = f(n + 1) − f(n) („Δ(n^3)“) und die Differenzengleichung Δy_n = n als Rekursion y_{n+1} − y_n = n. Eine arithmetische oder geometrische Folge aus zwei gegebenen Werten („a_3 = 7, a_7 = 19“, „geometrische Folge a_2 = 6, a_5 = 162“) – a_1, d oder q, das n-te Glied und die gesuchten Glieder und Summen (s_{10}, a_{20} = ?).

Eine Folge, gegeben durch ihr n-tes Glied (a_n = (n+1)/n), wird untersucht: die ersten fünf Glieder, Monotonie aus der Differenz benachbarter Glieder, Beschränktheit und Grenzwert.

Eingabe

`a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4`	Mit Klammern, die Bedingungen nach einem Komma.
`a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n`	Mit Indizes (auch vom Foto). Ohne Bedingungen: die allgemeine Lösung mit Konstanten C_1, C_2.

`F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1`	Der Index darf sinken (a_{n-1}, a_{n-2}); ein Wert kann mehreren Gliedern gegeben werden.

`a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`
`a_0 = 1, b_0 = 0`
	Ein System – die Gleichungen in Zeilen, die Bedingungen in der letzten.

`T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`	Teile und herrsche – ein Glied bei n/b.
`n^2 + 2^n`	Die Formel einer Folge mit der Operation „Erzeugende Funktion“ (auch a_n = …).
`1, 0, 1, 0, ...`	Die ersten Glieder, durch Kommas getrennt.
`1/(1 - x - x^2)`	Eine erzeugende Funktion in x (auch A(x) = …) – die Formel für a_n.
`Anzahl der Lösungen x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`	Die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen mit Schranken.
`Δ(n^3), \Delta y_n = n`	Eine Differenz und eine Differenzengleichung.
`a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`	Eine Folge aus gegebenen Gliedern – ohne Wort arithmetisch, mit „geometrische“ geometrisch.

Beispiele

Zwei verschiedene reelle Wurzeln, die Probe mit weiteren Gliedern.

Eingabe: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4`

Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

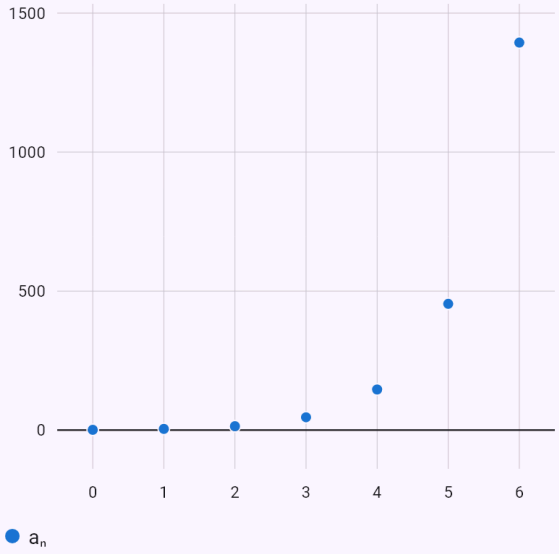
Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Die allgemeine Lösung: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$2C_1 + 3C_2 = 4$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Die Fibonacci-Folge – die Formel von Binet.

Eingabe: `F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1`

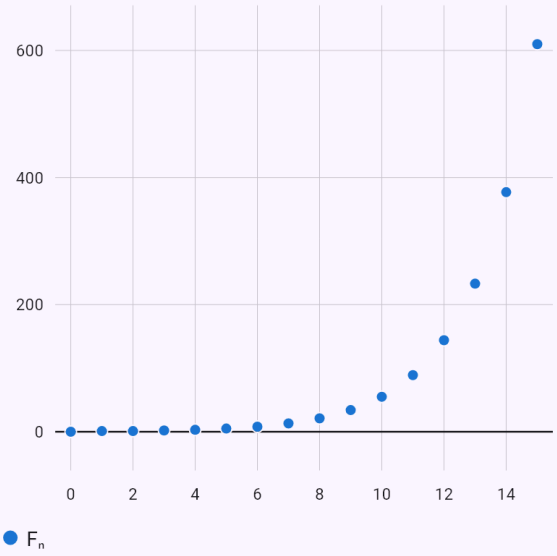
Ergebnis

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Wir suchen Lösungen $F_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^{n-2} geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; die Nullstellen: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Die allgemeine Lösung
  $$F_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$
  $$C_1 + C_2 = 0$$
  $$\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2 = 1$$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt
  $$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
- Probe: Die Rekursion liefert $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Komplexe Wurzeln 1 ± i – die komplexe Form und der Satz von Moivre.

Eingabe: `a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 1, a_1 = 2`

Ergebnis

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

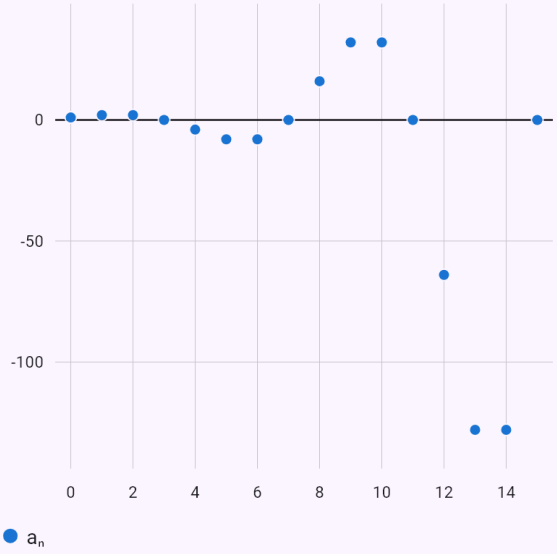
Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Die komplexen Wurzeln $1 \pm i$ schreiben wir in Polarform: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, also $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Nach dem Satz von Moivre ist $\lambda^n =$ $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Die allgemeine Lösung in komplexer Form (komplexe Konstanten): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Die konjugierten Glieder addiert, mit neuen reellen Konstanten, ergibt sich die reelle Form $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1,\ C_2 = 1$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_1 + C_2 &= 2 \end{aligned}$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Die rechte Seite n, eine doppelte Wurzel 2.

Eingabe: `a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n, a_0 = 0, a_1 = 0`

Ergebnis

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 2$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion: $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Die rechte Seite n hat eine spezielle Form; die Zahl 1 ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $a_n^{(p)} = An + B$
- In die Rekursion eingesetzt und zusammengefasst: $An + B - 2A = n$
- Koeffizientenvergleich gleichartiger Terme auf beiden Seiten daraus $A = 1,\ B = 2$

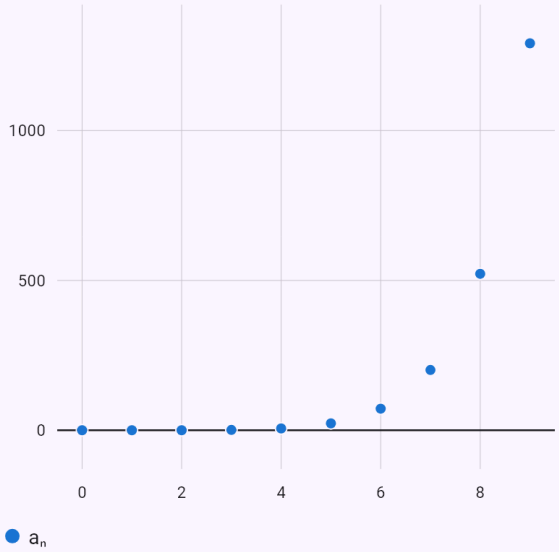
$$A = 1$$
$$B - 2A = 0$$

- Eine partikuläre Lösung: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Die allgemeine Lösung: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = -2,\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + 2 = 0$$
$$2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 6$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Dieselbe Rekursion mit der erzeugenden Funktion.

Eingabe: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Erzeugende Funktion

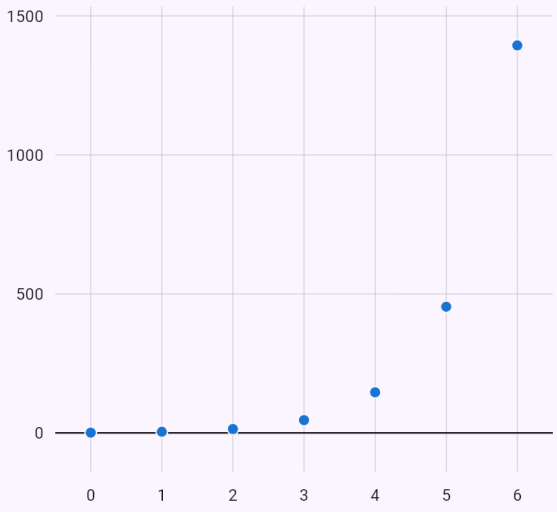
Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Wir führen die erzeugende Funktion ein:
  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Die Rekursion mit x^{n+2} multipliziert und über alle n ≥ 0 summiert
  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$
- Die Summen durch die erzeugende Funktion und die Anfangswerte ausgedrückt:
  $A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$
- Die erzeugende Funktion ausgedrückt, der Nenner zerlegt: $A(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$
- Partialbruchzerlegung: $A(x) = -\frac{1}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x}$
- Die Brüche als geometrische Reihen
  $$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$
- Der Koeffizient von x^n ist das gesuchte Glied:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Dieselbe Rekursion mit Matrixpotenzen.

Eingabe: `a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4` Matrixpotenzen

Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Die Rekursion in Matrixform also $v_{n+1} = M \cdot v_n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Durch wiederholtes Einsetzen $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenwerte der Matrix:
  $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, also $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
- Die Eigenvektoren – Lösungen von $(M - \lambda E)u = 0$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Matrix diagonalisiert, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

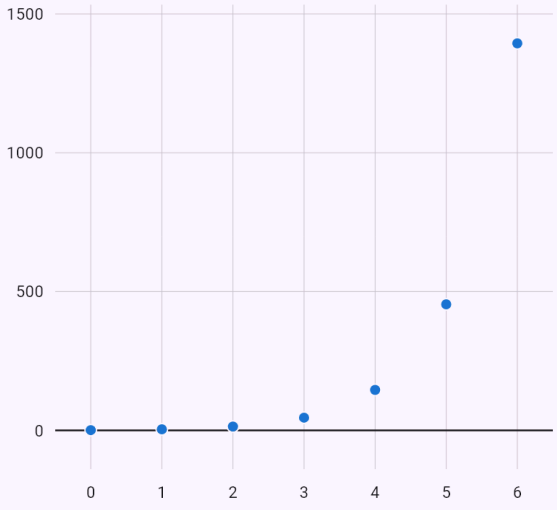
- Die Matrixpotenz die Koeffizienten also $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1} v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
  $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 14,\ a_3 = 46,\ a_4 = 146$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Eine Rekursion 1. Ordnung durch Aufsummieren.

Eingabe: `a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0` Aufsummieren

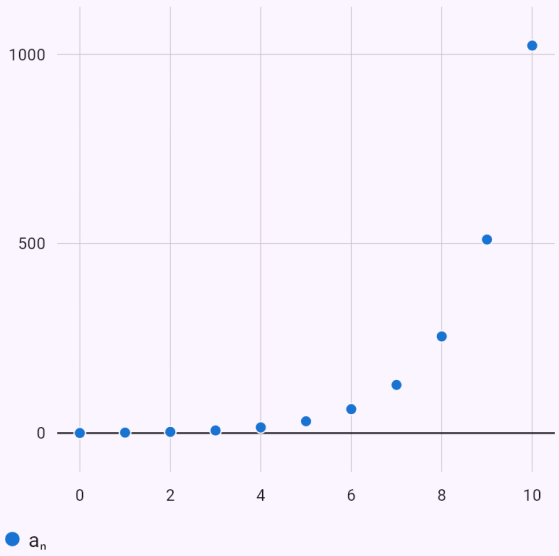
Ergebnis

$$a_n = 2^n - 1$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Wir setzen die Rekursion wiederholt in sich selbst ein: $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \ldots$, allgemein $a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$
- Die Summe ausgewertet: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $a_n = 2^n - 1$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Ein variabler Koeffizient – das Produkt ergibt eine Fakultät.

Eingabe: `a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1`

Ergebnis

$$a_n = n!$$

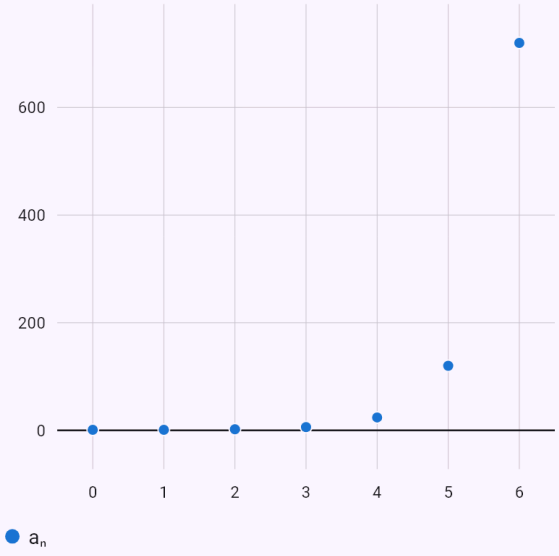
Lösungsweg

- Lineare Rekursion 1. Ordnung mit variablem Koeffizienten: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Wir setzen die Rekursion wiederholt in sich selbst ein – das Glied ist ein Produkt

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$

- Das Produkt vereinfacht (die Fakultäten kürzen sich): $\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $a_n = n!$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Eine nichtlineare Rekursion – die Substitution $b_n = 1/a_n$.

Eingabe: `a_{n+1} = a_n/(1 + a_n), a_0 = 1`

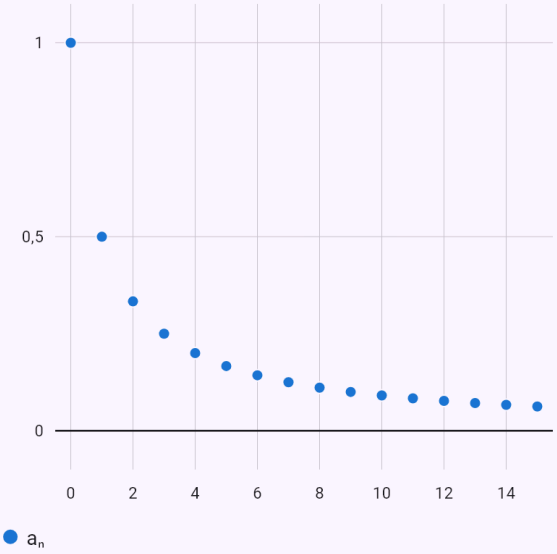
Ergebnis

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Lösungsweg

- Eine nichtlineare Rekursion – die Kehrwerte der Glieder machen sie linear: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Beide Seiten als Kehrwert: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; die Substitution $b_n = \frac{1}{a_n}$ macht die Rekursion so linear: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Die Anfangsbedingungen der neuen Folge: $b_0 = 1$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Wir suchen Lösungen $b_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda - 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 1$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion: $b_n^{(h)} = C_1$
- Die rechte Seite 1 hat eine spezielle Form; die Zahl 1 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit n multipliziert: $b_n^{(p)} = An$
- In die Rekursion eingesetzt und zusammengefasst: $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $b_n^{(p)} = n$
- Die allgemeine Lösung: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $b_n = 1 + n$
- Probe: Die Rekursion liefert $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ – genauso wie die Formel.
- Zurück zur ursprünglichen Folge: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Ein System zweier Rekursionen durch Elimination der Folge b_n.

Eingabe: `a_{n+1} = a_n + 2b_n`
`b_{n+1} = 3a_n + b_n`

`a_0 = 1, b_0 = 0`

Ergebnis

$$a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$$

Lösungsweg

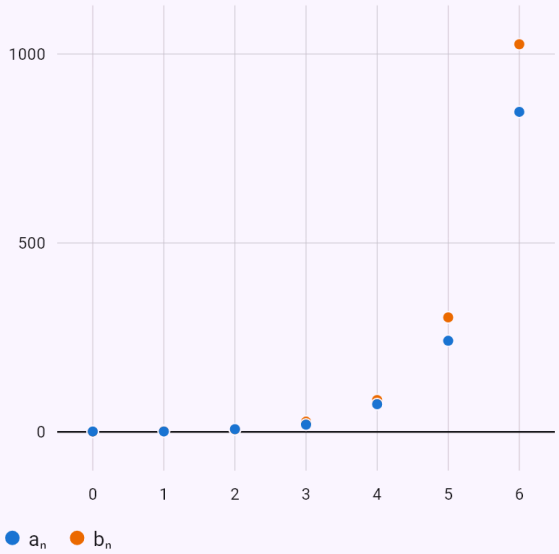
- Ein System zweier linearer Rekursionen
  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$
  $b_{n+1} = 3a_n + b_n$
- Aus der ersten Gleichung $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, also $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; in die zweite eingesetzt ergibt sich eine Rekursion für eine einzige Folge:
  $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$
- Die zweite Anfangsbedingung aus der ersten Gleichung:
  $a_1 = 1 + 0 = 1$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6},\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$
- Die allgemeine Lösung:
  $a_n = C_1\left(1-\sqrt{6}\right)^n + C_2\left(1+\sqrt{6}\right)^n$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$\left(1-\sqrt{6}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{6}\right)C_2 = 1$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
  $a_n = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^n}{2} + \frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^n}{2}$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 7,\ a_3 = 19,\ a_4 = 73$ – genauso wie die Formel.
- Die andere Folge aus dem Ausdruck
  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1+\sqrt{6}\right)^n - \frac{\sqrt{6}}{4}\left(1-\sqrt{6}\right)^n$

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Teile und herrsche (Mergesort) – n = 2ᵏ und das Master-Theorem.

Eingabe: `T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1`

Ergebnis

$$T(n) = n + n\log_2 n$$

Bedingungen: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

Lösungsweg

- Eine Teile-und-herrsche-Rekursion: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Für n eine Potenz der Basis: die Substitution $n = 2^k,\ S_k = T\left(2^k\right)$ ergibt eine lineare Rekursion 1. Ordnung: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Die Anfangsbedingungen der neuen Folge: $S_0 = 1$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Wir suchen Lösungen $S_k = \lambda^k$; eingesetzt und durch λ^k geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda - 2 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 2$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Die rechte Seite 2^{k+1} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit k multipliziert: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- In die Rekursion eingesetzt, durch 2^k geteilt und zusammengefasst: $2A = 2$
- Daraus $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- Die allgemeine Lösung: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1$
  $C_1 = 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Probe: Die Rekursion liefert $S_1 = 4,\ S_2 = 12,\ S_3 = 32$ – genauso wie die Formel.
- Zurück zu n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n\log_2 n$
- Das Master-Theorem (a = 2, b = 2, f(n) = Θ(n)): $2 = 2^1$, also T(n) = $\Theta(n \log n)$

Die erzeugende Funktion der Folge $n^2 + 2^n$.

Eingabe: `n^2 + 2^n` Erzeugende Funktion

Ergebnis

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Lösungsweg

- Wir führen die erzeugende Funktion ein:
  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$
- Die Reihe nach Linearität zerlegt:
  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- Eine bekannte Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
- Eine bekannte Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- Die Glieder mit n multiplizieren heißt ableiten und mit x multiplizieren
  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Die Glieder mit n multiplizieren heißt ableiten und mit x multiplizieren
  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$
- Die erzeugende Funktion: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Probe – die Entwicklung beginnt mit den Gliedern der Folge: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

Die Formel für a_n aus einer erzeugenden Funktion – Partialbrüche über irrationale Wurzeln.

Eingabe: `1/(1 - x - x^2)` Erzeugende Funktion

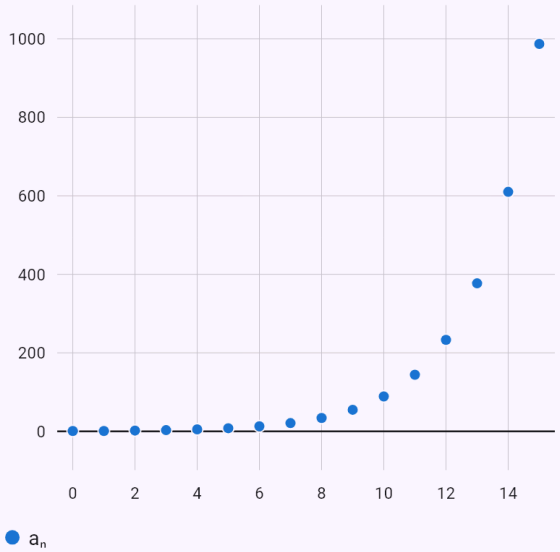
Ergebnis

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left($$

Lösungsweg

- Die erzeugende Funktion ausgedrückt, der Nenner zerlegt
  $A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$
- Partialbruchzerlegung
  $A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$
- Die Brüche als geometrische Reihen
  $\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=}^{\circ}$
- Der Koeffizient von x^n ist das gesuchte Glied
  $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Probe – die Entwicklung beginnt mit den Gliedern der Folge: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Die Anzahl der Lösungen von $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit $x_1 \leq 3$.

Eingabe: `Anzahl der Lösungen x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 <= 3`

Ergebnis

$$38$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte x_1 $(0 \leq x_1 \leq 3)$ liefert die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$
- Die Unbekannte x_2 $(x_2 \geq 0)$ liefert die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$
- Die Unbekannte x_3 $(x_3 \geq 0)$ liefert die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$
- Die erzeugende Funktion ist ihr Produkt – der Koeffizient von x^N zählt die Lösungen: $G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$
- Die Anzahl der Lösungen ist der Koeffizient von x^{10}: 38

Die Differenz einer Funktion.

Eingabe: `Δ(n^3)`

Ergebnis

$$\Delta f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Lösungsweg

- Die Differenz – der Zuwachs der Funktion, wenn n um 1 wächst $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n$

Eine Differenzengleichung als Rekursion.

Eingabe: `\Delta y_n = n`

Ergebnis

$$y_n = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y_{n+1} - y_n = n$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $y_{n+1} - y_n = 0$
- Wir suchen Lösungen $y_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda - 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 1$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion: $y_n^{(h)} = C_1$
- Die rechte Seite n hat eine spezielle Form; die Zahl 1 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit n multipliziert: $y_n^{(p)} = n(An + B)$
- In die Rekursion eingesetzt und zusammengefasst: $2An + A + B = n$
- Koeffizientenvergleich gleichartiger Terme auf beiden Seiten daraus $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$

  $$2A = 1$$
  $$A + B = 0$$

- Eine partikuläre Lösung: $y_n^{(p)} = \frac{n^2 - n}{2}$
- Die allgemeine Lösung: $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 + \frac{n^2 - n}{2}$

Eine arithmetische Folge aus zwei Gliedern und die Summe von zehn Gliedern.

Eingabe: `a_3 = 7, a_7 = 19, s_{10}`

Ergebnis

$$a_1 = 1,\ d = 3,\ s_{10} = 145$$

Lösungsweg

- Eine arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Die gegebenen Werte ergeben ein System

  $$a_3 = a_1 + 2d = 7$$
  $$a_7 = a_1 + 6d = 19$$

- Die Lösung des Systems: $a_1 = 1,\ d = 3$
- Das n-te Glied: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2$
- Die gesuchten Werte: $s_{10} = 145$

Eine geometrische Folge aus zwei Gliedern.

Eingabe: `geometrische Folge a_2 = 6, a_5 = 162`

Ergebnis

$$a_1 = 2,\ q = 3$$

Lösungsweg

- Eine geometrische Folge: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
  Die gegebenen Werte ergeben ein System
  $a_2 = a_1 q^1 = 6$
  $a_5 = a_1 q^4 = 162$
- Die Lösung des Systems: $a_1 = 2,\ q = 3$
- Das n-te Glied: $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

Die Eigenschaften einer durch eine Formel gegebenen Folge.

Eingabe: `a_n = (n+1)/n`

Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ 1 < a_n \leq 2$$

Lösungsweg

- Die ersten fünf Glieder
  $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{6}{5},\ \ldots$
- Die Differenz benachbarter Glieder
  $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2 + n}$ ist für alle $n \geq 1$ negativ – die Folge ist fallend.
- Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ – die Folge konvergiert.
- Die Folge ist beschränkt: $1 < a_n \leq 2$

Bekannte Einschränkungen

- Noch nicht: lineare Rekursionen höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten, Systeme aus drei oder mehr Rekursionen, Teile und herrsche mit mehreren Gliedern (T(n/2) und T(n/3)) und nichtlineare Rekursionen, die diese Substitutionen nicht linear machen.
- Eine Folge aus gegebenen Gliedern braucht genau zwei Werte (Glieder, Summen, d oder q).

40. Numerische Verfahren

Numerische Verfahren finden Sie auf dem Startbildschirm im Bereich „Anwendungen“, Fachgebiet Numerische Verfahren: Nullstellen von Gleichungen (Bisektion, Newton-, Sekantenverfahren, Regula falsi, Fixpunktiteration), numerische Integrale (Trapez-, Simpson- und Romberg-Verfahren), numerische Ableitungen mit Differenzenquotienten, Differentialgleichungen (Euler-, Heun- und Runge-Kutta-Verfahren), lineare Gleichungssysteme (Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren, LU-Zerlegung), Interpolation (Lagrange- und Newton-Polynom, kubischer Spline) und die Methode der kleinsten Quadrate. Integral und Ableitung lassen sich auch aus einer Tabelle gemessener Werte berechnen.

Differentialgleichungen außerdem mit Mehrschrittverfahren – Adams-Bashforth und dem Prädiktor-Korrektor Adams-Bashforth-Moulton (Start mit Runge-Kutta) –, dem adaptiven RK45-Verfahren (Dormand-Prince, eine Tabelle der nach der Fehlerschätzung angenommenen und verworfenen Schritte, Schreibweise tol=…) und impliziten Verfahren für steife Gleichungen: dem impliziten Euler-Verfahren und der Trapezregel (Crank-Nicolson) mit dem Newton-Verfahren in jedem Schritt. Bei einer Gleichung mit $\partial f/\partial y < 0$ zeigt der Lösungsweg die Stabilität des Verfahrens: $h\lambda$ und den Verstärkungsfaktor $|R(h\lambda)|$; ist er größer als 1, divergiert ein explizites Verfahren, und die Rechnung meldet es.

Randwertprobleme $y'' = f(x, y, y')$ mit den Bedingungen $y(a)$, $y(b)$: mit dem Schießverfahren (die Anfangssteigung über das Sekantenverfahren, jeder Schuss mit Runge-Kutta) und mit dem Differenzenverfahren (eine lineare Gleichung als tridiagonales System, gelöst mit dem Thomas-Algorithmus samt Tabellen für Vorwärtsschritt und Rückwärtseinsetzen); findet der DGL-Löser die exakte Lösung, wird sie in den Knoten verglichen. Die Bewegungsgleichung $x'' = a(x)$ löst das symplektische Verlet-Verfahren neben RK4 und zeigt, wie sich bei beiden der Fehler der Gesamtenergie entwickelt.

Der Lösungsweg zeigt die Formel des Verfahrens, die Tabelle der Iterationen oder der Werte an den Stützstellen, die Abbruchbedingung (Standardgenauigkeit $\varepsilon = 10^{-4}$, höchstens 50 Iterationen) und die Fehlerabschätzung; ist der exakte Wert bekannt, wird das Ergebnis damit verglichen. Die Konvergenzbedingungen werden geprüft: Vorzeichenwechsel auf dem Intervall, die Fourier-Bedingung für den Start des Newton-Verfahrens, $|g'(x)| < 1$ bei der Fixpunktiteration, Diagonaldominanz und Spektralradius bei Systemen. Der Graph zeigt Tangenten oder Sekanten, Trapeze oder Parabeln, die numerische Lösung einer Differentialgleichung gegenüber der exakten und das Polynom mit den Punkten.

Bei einer gewöhnlichen Aufgabe – einer Gleichung mit einer Unbekannten, einem bestimmten Integral, einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingung – bietet die App unter dem Ergebnis die Chips „Mit einem numerischen Verfahren lösen“ an; das Formular wird mit der Aufgabe vorausgefüllt. Wo es exakt nicht geht oder unnötig kompliziert wird ($x = \cos x$, Cardanische Formeln), ist das Angebot hervorgehoben, und eine algebraisch nicht lösbare Gleichung wird gleich mit dem Newton-Verfahren gelöst. Anwendungen, die eine Zahl stillschweigend berechnen (interner Zinsfuß, effektiver Jahreszins,

Rendite einer Anleihe, pH einer mehrprotonigen Säure, Runge-Kutta in den Modellen), haben unter dem Ergebnis eine zugeklappte Zeile „Das Verfahren“ mit einer kurzen Iterationstabelle.

Eingabe

`newton(x = cos x; x0=0.7; tol=1e-4)`	Das Verfahren – sein englischer Name – und nach Semikolons die Gleichung, der Startwert x0, die Genauigkeit tol, wahlweise max (Iterationen) und stop=fx.
`bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`	Eine Funktion f(x) (gelöst wird f(x) = 0) und das Intervall a, b. Ohne Intervall und Startwert werden die Nullstellen automatisch eingeschlossen.
`simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`	Das Integral einer Funktion zwischen a und b mit n Teilintervallen; auch trapezoid und romberg (tol).
`trapezoid(x=0 1 2 3; y=0 2 3 5)`	Das Integral gemessener Werte – x und y durch Leerzeichen getrennt.
`finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`	Die Ableitung an der Stelle at mit der Schrittweite h; aus einer Tabelle x=…; y=… (at optional).
`rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`	Eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung, Schrittweite h und Intervallende to; auch euler und heun.
`gaussseidel(10x + y + z = 12; x + 10y + z = 12; x + y + 10z = 12)`	Ein System – die Gleichungen nach Semikolons oder in Zeilen; auch jacobi und lu.
`lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`	Die Punkte x, y und die Stelle at; auch newtonpoly und spline.
`leastsquares(x=0 1 2 3 4; y=1 1.8 3.3 4.5 6.3; degree=2)`	Ein Ausgleichspolynom vom Grad degree.

Beispiele

Eine algebraisch nicht lösbare Gleichung – die App löst sie mit dem Newton-Verfahren und bietet die anderen an.

Eingabe: `x = cos x`

Ergebnis

$x \approx 0{,}7391$

Mit einem numerischen Verfahren lösen:

Σ Bisektion | Σ Sekanten | Σ Regula falsi | Σ Fixpunkt

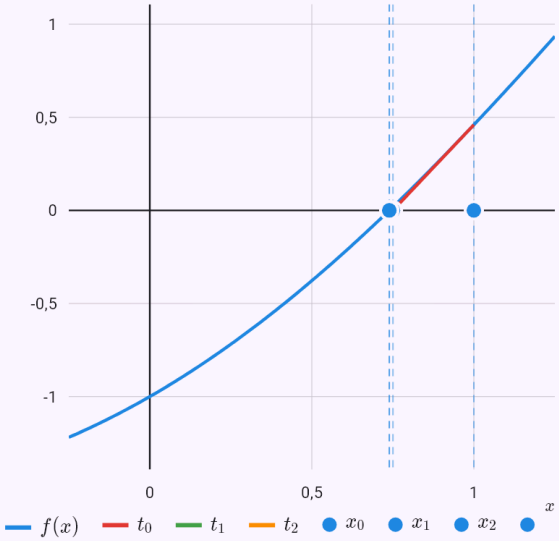
Lösungsweg

- Wir suchen eine Lösung der Gleichung $x = \cos x$, also eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x - \cos x$
- Die Nullstellen schließen wir mit einer Wertetabelle ein: die Funktion wechselt das Vorzeichen in den Intervallen $[0;\ 1]$ ($f(0) \approx -1,\ f(1) \approx 0{,}4597$). Eine stetige Funktion hat in jedem solchen Intervall eine Nullstelle.
- Das Newton-Verfahren braucht die Ableitung: $f'(x) = \sin x + 1$
- Den Startwert $x_0 = 1$ wählen wir nach der Fourier-Bedingung – am Intervallende, wo $f(1) \cdot f''(1) \approx 0{,}2484 > 0$ ($f''(x) = \cos x$); von dort konvergieren die Tangenten monoton.
- Newton-Verfahren: vom Punkt x_n entlang der Tangente bis zur x-Achse, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-} $
0	1,000000	0,459698	1,841471	
1	0,750364	0,018923	1,681905	0,24963
2	0,739113	0,000046	1,673633	0,01125
3	0,739085	$2{,}84721 \cdot 10^{-10}$	1,673612	0,00002

- Die Abbruchbedingung $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert < 10^{-4}$ ist nach 3 Iterationen erfüllt.
- Fehlerabschätzung nach dem Mittelwertsatz, $m_1 = \min \lvert f'(x) \rvert \approx 1$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$: $\lvert \xi - x_n \rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-10}$
- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 0{,}7391$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Newton-Verfahren mit automatisch eingeschlossener Nullstelle und Startwert nach der Fourier-

Bedingung.

Eingabe: `newton(x^3 - x - 2)`

Ergebnis

$$x \approx 1{,}5214$$

Lösungsweg

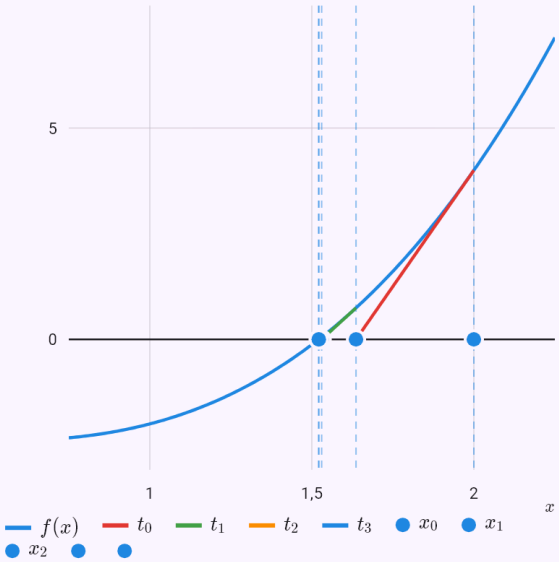
- Wir suchen eine Lösung der Gleichung $x^3 - x - 2 = 0$, also eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x - 2$
- Die Nullstellen schließen wir mit einer Wertetabelle ein: die Funktion wechselt das Vorzeichen in den Intervallen $[1;\,2]$ ($f(1) \approx -2,\ f(2) \approx 4$). Eine stetige Funktion hat in jedem solchen Intervall eine Nullstelle.
- Das Newton-Verfahren braucht die Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Den Startwert $x_0 = 2$ wählen wir nach der Fourier-Bedingung – am Intervallende, wo $f(2) \cdot f''(2) \approx 48 > 0$ ($f''(x) = 6x$); von dort konvergieren die Tangenten monoton.
- Newton-Verfahren: vom Punkt x_n entlang der Tangente bis zur x-Achse, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	4,000000	11,000000	
1	1,636364	0,745304	7,033058	0,36363
2	1,530392	0,053939	6,026299	0,10597
3	1,521441	0,000367	5,944352	0,00895
4	1,521380	$1{,}74069 \cdot 10^{-8}$	5,943789	0,00006

- Die Abbruchbedingung $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < 10^{-4}$ ist nach 4 Iterationen erfüllt.
- Fehlerabschätzung nach dem Mittelwertsatz, $m_1 = \min \lvert f'(x)\rvert \approx 2$ auf dem Intervall $[1;\,2]$: $\lvert \xi - x_n\rvert \le \dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-9}$

- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 1{,}5214$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Bisektion auf einem gegebenen Intervall mit Fehlerabschätzung.

Eingabe: `bisection(x^3 - x - 2; a=1; b=2)`

Ergebnis

$$x \approx 1{,}5214$$

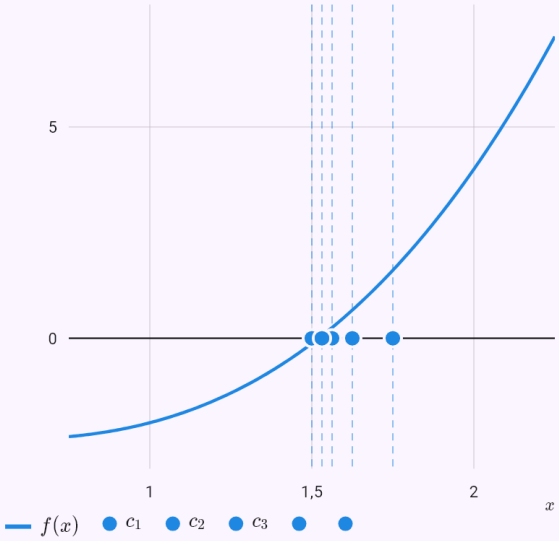
Lösungsweg

- Wir suchen eine Lösung der Gleichung $x^3 - x - 2 = 0$, also eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x - 2$
- Im Intervall $[1;\ 2]$ ist $f(1) = -2{,}000000, \quad f(2) = 4{,}000000$ – entgegengesetzte Vorzeichen, die stetige Funktion hat dort eine Nullstelle.
- Bisektion: die Mitte des Intervalls $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, wir behalten die Hälfte, auf der f das Vorzeichen wechselt.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
1	1,000000	2,000000	1,500000	−0,125000	0
2	1,500000	2,000000	1,750000	1,609375	0
3	1,500000	1,750000	1,625000	0,666016	0
4	1,500000	1,625000	1,562500	0,252197	0
5	1,500000	1,562500	1,531250	0,059113	0
6	1,500000	1,531250	1,515625	−0,034054	0
7	1,515625	1,531250	1,523438	0,012250	0
8	1,515625	1,523438	1,519531	−0,010971	0
9	1,519531	1,523438	1,521484	0,000622	0
10	1,519531	1,521484	1,520508	−0,005179	0
11	1,520508	1,521484	1,520996	−0,002279	0
12	1,520996	1,521484	1,521240	−0,000829	0
13	1,521240	1,521484	1,521362	−0,000103	0
14	1,521362	1,521484	1,521423	0,000259	0

- Die Abbruchbedingung $\dfrac{b_n - a_n}{2} < 10^{-4}$ ist nach 14 Iterationen erfüllt.
- Fehlerabschätzung: die Nullstelle ξ liegt im letzten Intervall, $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-5}$
- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 1{,}5214$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Sekantenverfahren aus zwei Startwerten.

Eingabe: `secant(x^3 - 2x - 5; x0=2; x1=3)`

Ergebnis

$$x \approx 2{,}0946$$

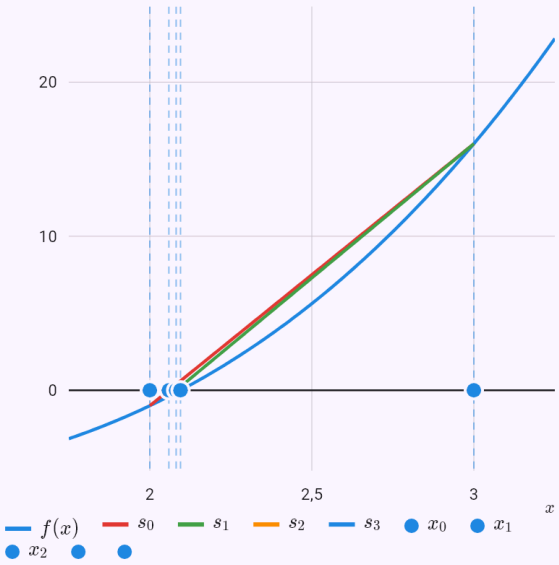
Lösungsweg

- Wir suchen eine Lösung der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, also eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2x - 5$
- Sekantenverfahren: die Sekante der letzten zwei Punkte ersetzt die Tangente,
  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	2,000000	$-1{,}000000$	
1	3,000000	16,000000	1,000000
2	2,058824	$-0{,}390800$	0,941176
3	2,081264	$-0{,}147204$	0,022440
4	2,094824	0,003044	0,013560
5	2,094549	$-0{,}000023$	0,000275
6	2,094551	$-3{,}51281 \cdot 10^{-9}$	0,000002

- Die Abbruchbedingung $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ ist nach 6 Iterationen erfüllt.
- Fehlerabschätzung nach dem Mittelwertsatz, $m_1 = \min |f'(x)| \approx 10$ auf dem Intervall $[2;\,3]$:
  $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1} \approx 3{,}51 \cdot 10^{-10}$
- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 2{,}0946$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Fixpunktiteration mit geprüfter Konvergenzbedingung |g'(x)| < 1.

Eingabe: `fixedpoint(x = cos x; x0=0.7)`

Ergebnis

$$x \approx 0{,}7391$$

Lösungsweg

- Die Gleichung $x = \cos x$ in der Form x = g(x): $g(x) = \cos x$
- Konvergenzbedingung: $g'(x) = -\sin x$, auf dem Intervall $[0;\ 1]$ ist $q = \max|g'(x)| \approx 0{,}8415$ < 1 – g ist eine Kontraktion, die Iteration konvergiert.
- Fixpunktiteration: $x_{n+1} = g(x_n)$.

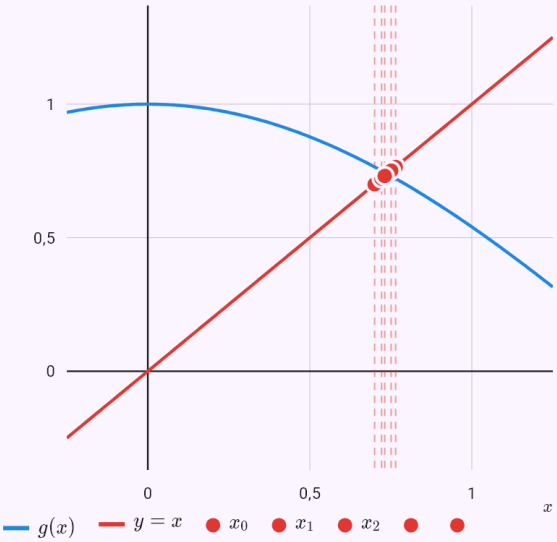
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,700000	
1	0,764842	0,064842
2	0,721492	0,043351
3	0,750821	0,029330
4	0,731129	0,019693
5	0,744421	0,013292
6	0,735480	0,008941
7	0,741509	0,006028
8	0,737450	0,004058
9	0,740185	0,002735
10	0,738344	0,001842
11	0,739584	0,001241
12	0,738749	0,000836
13	0,739312	0,000563
14	0,738932	0,000379
15	0,739188	0,000255
16	0,739016	0,000172
17	0,739132	0,000116
18	0,739054	0,000078

- Die Abbruchbedingung $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ ist nach 18 Iterationen erfüllt.
- Fehlerabschätzung der Fixpunktiteration

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \approx 4{,}14 \cdot 10^{-4}$$

- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 0{,}7391$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Simpsonregel, Fehlerschätzung nach Runge und Vergleich mit dem exakten Wert.

Eingabe: `simpson(e^(-x^2); a=0; b=1; n=10)`

Ergebnis

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$$

Lösungsweg

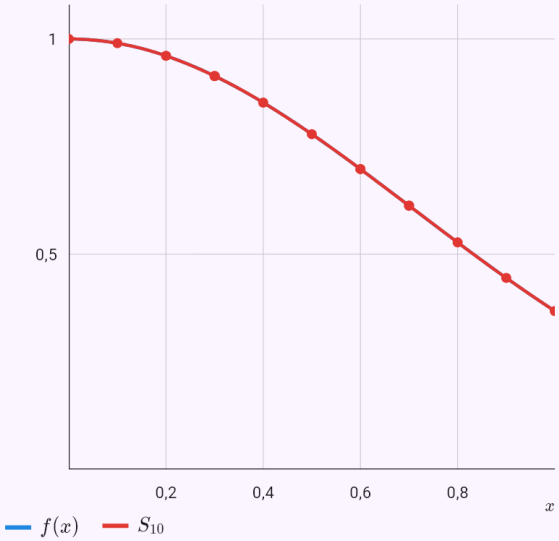
- Das Integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen wir numerisch.
- Schrittweite: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$
- Die Werte an den Stützstellen und ihre Gewichte

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,000000	1	1,000000
1	0,1	0,990050	4	3,960199
2	0,2	0,960789	2	1,921579
3	0,3	0,913931	4	3,655725
4	0,4	0,852144	2	1,704288
5	0,5	0,778801	4	3,115203
6	0,6	0,697676	2	1,395353
7	0,7	0,612626	4	2,450506
8	0,8	0,527292	2	1,054585
9	0,9	0,444858	4	1,779432
10	1	0,367879	1	0,367879
Σ				22,404748

- Simpsonregel
  $S_n = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n)$:
  $S_{10} = \frac{0{,}1}{3} \cdot 22{,}404748 \approx 0{,}746825$
- Zum Vergleich der exakte Wert
  $I = \frac{\operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}74682413$, der Fehler des Verfahrens $|I - S_{10}| \approx 8{,}15 \cdot 10^{-7}$

- Ergebnis des Verfahrens: $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746825$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Romberg-Tabelle für ein Integral ohne elementare Stammfunktion.

Eingabe: `romberg(sin x / x; a=1; b=2)`

Ergebnis

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$$

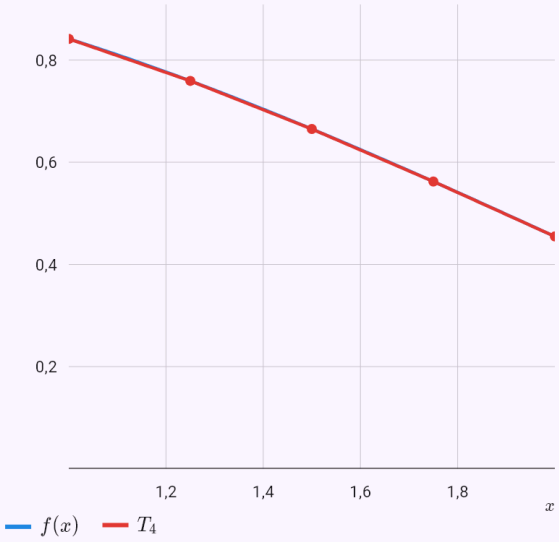
Lösungsweg

- Das Integral $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ berechnen wir numerisch.
- Romberg-Verfahren: die erste Spalte sind die Trapezsummen mit h, h/2, h/4, …, die weiteren Spalten verbessern sie durch Richardson-Extrapolation,
  $R_{k,0} = T_{2^k}, \quad R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1}.$

k	n	$R_{k,0}$	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$
0	1	0,648060		
1	2	0,656528	0,659351	
2	4	0,658630	0,659331	0,659330

- Die Abbruchbedingung $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < 10^{-4}$ ist nach 2 Iterationen erfüllt.
- Zum Vergleich der exakte Wert der Fehler des Verfahrens
  $|I - R_{2,2}| \approx 1{,}84 \cdot 10^{-8}$
  $I = -\operatorname{Si}(1) + \operatorname{Si}(2) \approx 0{,}65932991$
- Ergebnis des Verfahrens: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}659330$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der Weg aus einer gemessenen Geschwindigkeit mit der Trapezregel.

Eingabe: `trapezoid(x=0 10 20 30 40 50 60; y=0 4.2 7.5 9.8 11.1 11.6 11.8)`

Ergebnis

$$\int_{0}^{60} y \,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$$

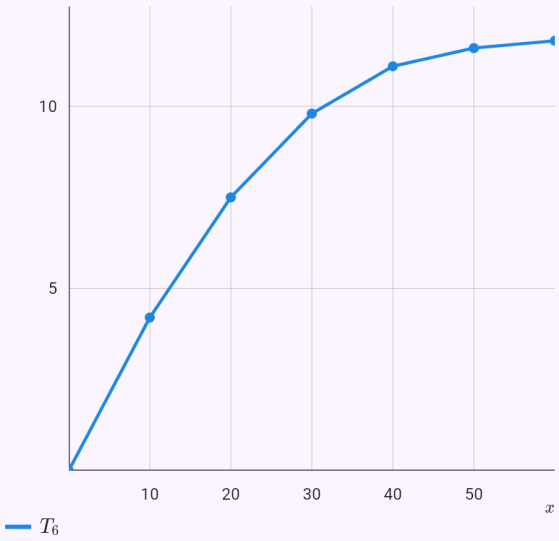
Lösungsweg

- Wir integrieren eine Tabelle mit 6 Teilintervallen auf $[0;\,60]$
- Schrittweite: $h = 10$
- Die Werte an den Stützstellen und ihre Gewichte

i	x_i	y_i	c_i	$c_i \cdot y_i$
0	0	0	1	0,000000
1	10	4,2	2	8,400000
2	20	7,5	2	15,000000
3	30	9,8	2	19,600000
4	40	11,1	2	22,200000
5	50	11,6	2	23,200000
6	60	11,8	1	11,800000
Σ				100,200000

- Trapezregel $T_n = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$:
  $T_6 = \frac{10}{2} \cdot 100{,}200000 \approx 501{,}000000$
- Fehlerschätzung nach der Runge-Regel (Rechnung mit doppelter Schrittweite):
  $T_3 \approx 490{,}000000, \quad E \approx \frac{T_6 - T_3}{3} \approx 3{,}67$
- Ergebnis des Verfahrens: $\int_{0}^{60} y \,\mathrm{d}x \approx 501{,}000000$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Vorwärts-, Rückwärts- und zentraler Differenzenquotient für drei Schrittweiten.

Eingabe: `finitediff(sin x; at=1; h=0.1)`

Ergebnis

$$f'(1) \approx 0{,}539402$$
$$f''(1) \approx -0{,}840770$$

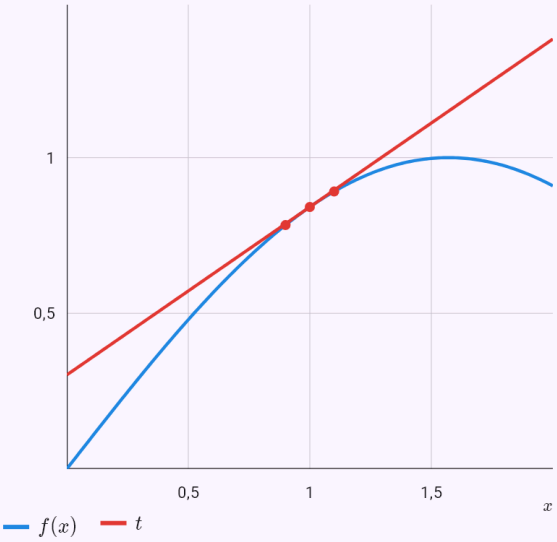
Lösungsweg

- Die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 1$ schätzen wir mit Differenzenquotienten.
- Der Vorwärtsquotient $f'(x_0) \approx D_h^+ = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ hat einen Fehler proportional zu h, der Rückwärtsquotient $f'(x_0) \approx D_h^- = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ ebenso; der zentrale $f'(x_0) \approx D_h^0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ nur zu h². Zweite Ableitung: $f''(x_0) \approx D_h^2 = \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$
-

h	D_h^+	D_h^-	D_h^0	D_h^2
$0{,}1$	$0{,}497364$	$0{,}581441$	$0{,}539402$	$-0{,}840770$
$0{,}05$	$0{,}519045$	$0{,}561110$	$0{,}540077$	$-0{,}841296$
$0{,}025$	$0{,}529728$	$0{,}550764$	$0{,}540246$	$-0{,}841427$

- Exakt: $f'(x) = \cos x, \quad f'(1) \approx 0{,}54030231$. Der Fehler des Vorwärtsquotienten mit der ersten Schrittweite ist $0{,}0429$, der des zentralen nur $9 \cdot 10^{-4}$
- Ergebnis des Verfahrens: $f'(1) \approx 0{,}539402, \quad f''(1) \approx -0{,}840770$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit der Tabelle der Steigungen und Vergleich mit der exakten

Lösung.

Eingabe: `rk4(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Ergebnis

$$y(1) \approx 3{,}436559$$

Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$, Schrittweite $h = 0{,}1$ (10 Schritte).
- Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung – ein gewichtetes Mittel von vier Steigungen

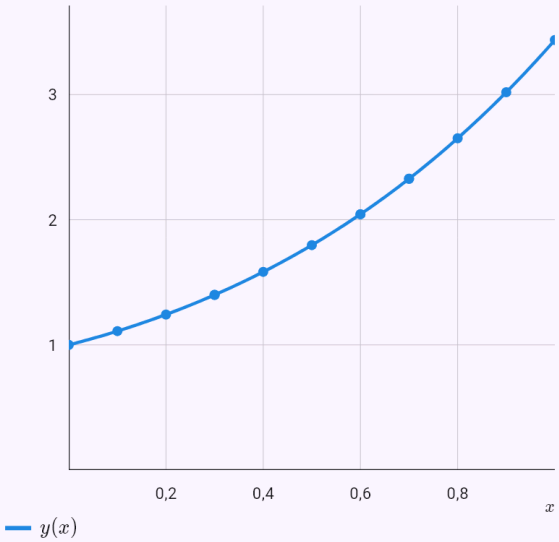
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -x + 2e^x - 1$
- Schritt für Schritt

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3
0	0	1,000000	1,000000	1,100000	1,105000
1	0,1	1,110342	1,210342	1,320859	1,326385
2	0,2	1,242805	1,442805	1,564945	1,571052
3	0,3	1,399717	1,699717	1,834703	1,841452
4	0,4	1,583648	1,983648	2,132831	2,140290
5	0,5	1,797441	2,297441	2,462313	2,470557
6	0,6	2,044236	2,644236	2,826448	2,835558
7	0,7	2,327503	3,027503	3,228878	3,238947
8	0,8	2,651079	3,451079	3,673633	3,684761
9	0,9	3,019203	3,919203	4,165163	4,177461
10	1	3,436559			

- Am Ende des Intervalls exakt $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 4{,}17 \cdot 10^{-6}$
- Ergebnis des Verfahrens: $y(1) \approx 3{,}436559$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Euler-Verfahren für eine Gleichung ohne elementare Lösung.

Eingabe: `euler(y' = x^2 + y^2; y(0)=0; h=0.1; to=1)`

Ergebnis

$$y(1) \approx 0{,}292542$$

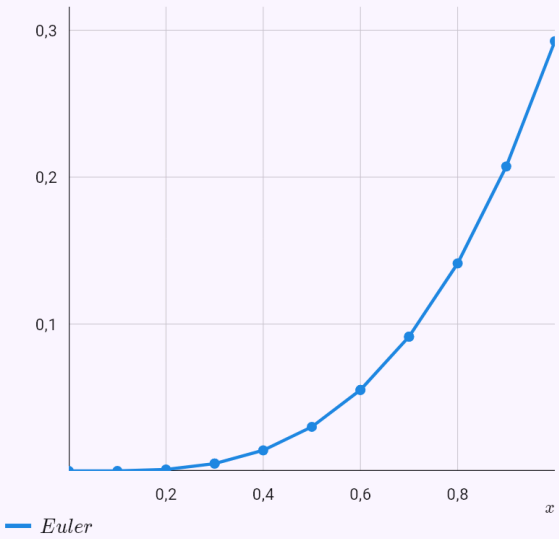
Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$, Schrittweite $h = 0{,}1$ (10 Schritte).
- Euler-Verfahren – ein Schritt entlang der Tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Schritt für Schritt

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	0,000000	0,000000
1	0,1	0,000000	0,010000
2	0,2	0,001000	0,040001
3	0,3	0,005000	0,090025
4	0,4	0,014003	0,160196
5	0,5	0,030022	0,250901
6	0,6	0,055112	0,363037
7	0,7	0,091416	0,498357
8	0,8	0,141252	0,659952
9	0,9	0,207247	0,852951
10	1	0,292542	

- Ergebnis des Verfahrens: $y(1) \approx 0{,}292542$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Der ABM-Prädiktor-Korrektor – genauer als Adams-Bashforth allein.

Eingabe: `abm(y' = x + y; y(0)=1; h=0.1; to=1)`

Ergebnis

$$y(1) \approx 3{,}436567$$

Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$, Schrittweite $h = 0{,}1$ (10 Schritte).
- Ein Prädiktor-Korrektor: Adams-Bashforth schätzt den neuen Punkt, Adams-Moulton korrigiert ihn mit der Steigung im geschätzten Punkt. Start mit dem Runge-Kutta-Verfahren

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

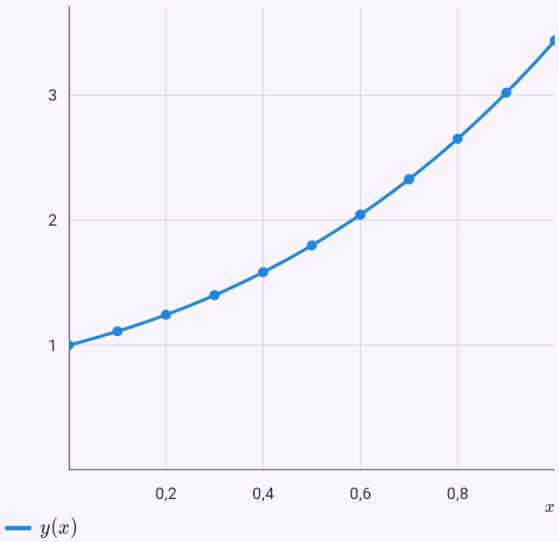
- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -x + 2e^x - 1$
- Schritt für Schritt

n	x_n	y_n	f_n	$\tilde{y}_{n+1}$	
0	0	1,000000	1,000000		$RK4$
1	0,1	1,110342	1,210342		$RK4$
2	0,2	1,242805	1,442805		$RK4$
3	0,3	1,399717	1,699717	1,583640	$AB4 + A$
4	0,4	1,583649	1,983649	1,797433	$AB4 + A$
5	0,5	1,797443	2,297443	2,044227	$AB4 + A$
6	0,6	2,044238	2,644238	2,327495	$AB4 + A$
7	0,7	2,327507	3,027507	2,651070	$AB4 + A$
8	0,8	2,651084	3,451084	3,019194	$AB4 + A$
9	0,9	3,019209	3,919209	3,436551	$AB4 + A$
10	1	3,436567	4,436567		

- Am Ende des Intervalls exakt $y(1) = 3{,}43656366, \quad |y(1) - y_{10}| \approx 3{,}58 \cdot 10^{-6}$

- Ergebnis des Verfahrens: $y(1) \approx 3{,}436567$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das adaptive RK45 – der erste Schritt wird verworfen und verkürzt, danach steuert das Verfahren die

Schrittweite selbst.

Eingabe: `rk45(y' = x + y; y(0)=1; h=0.5; to=2; tol=1e-6)`

Ergebnis

$$y(2) \approx 11{,}778114$$

Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ auf dem Intervall $[0;\ 2]$, Schrittweite $h = 0{,}5$ (4 Schritte).
- Eine adaptive Schrittweite: in jedem Schritt zwei Verfahren (5. und 4. Ordnung) aus denselben Steigungen – ihr Unterschied schätzt den Fehler. Ein Schritt wird angenommen, wenn der Fehler unter der Toleranz liegt, und der nächste danach vergrößert oder verkleinert

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_i b_i k_i, \quad \varepsilon = |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|, \quad h_{new} = 0$$

- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -x + 2e^x - 1$
- Die Schritte mit der Toleranz $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$: ✓ angenommener Schritt, × verworfener (der Schritt wurde verkleinert und wiederholt). Angenommen 12, verworfen 1.

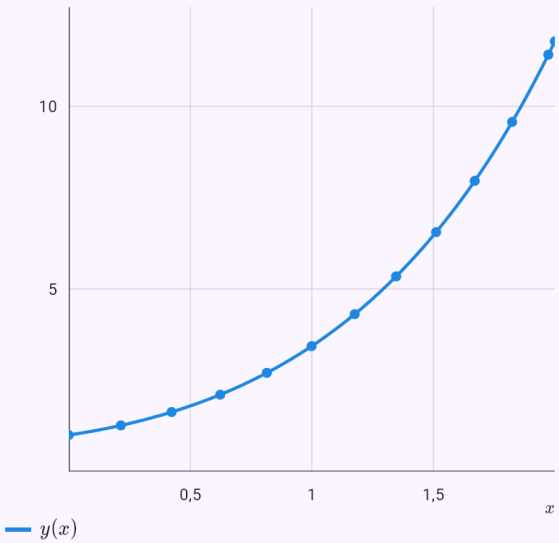
k	x_k	h	y_{k+1}	ε	
1	0,0000	0,50000	1,797448	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	×
2	0,0000	0,21410	1,263397	$6{,}7 \cdot 10^{-7}$	✓
3	0,2141	0,20898	1,630247	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
4	0,4231	0,20014	2,106643	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	✓
5	0,6232	0,19181	2,703462	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
6	0,8150	0,18415	3,432946	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	✓
7	0,9992	0,17711	4,308380	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
8	1,1763	0,17061	5,344079	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	✓
9	1,3469	0,16458	6,555405	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
10	1,5115	0,15898	7,958790	$7 \cdot 10^{-7}$	✓
11	1,6705	0,15376	9,571752	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
12	1,8242	0,14889	11,412926	$6{,}9 \cdot 10^{-7}$	✓
13	1,9731	0,02689	11,778114	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	✓

- Am Ende des Intervalls exakt

$$y(2) = 11{,}77811220, \quad |y(2) - y_{12}| \approx 1{,}3 \cdot 10^{-6}$$

- Ergebnis des Verfahrens: $y(2) \approx 11{,}778114$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Eine steife Gleichung – das explizite Euler-Verfahren mit der Schrittweite 0,05 ist instabil (|1 + hλ| =

1,5) und divergiert.

Eingabe: `euler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Ergebnis

Die numerische Lösung divergiert mit dieser Schrittweite (siehe Lösungsweg).

Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$, Schrittweite $h = 0{,}05$ (20 Schritte).
- Euler-Verfahren – ein Schritt entlang der Tangente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$
- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilität: die Gleichung verhält sich wie y' = λy mit $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Das Verfahren vergrößert einen Fehler in jedem Schritt: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad |1 + h\lambda| \approx 1{,}5 > 1$ – mit dieser Schrittweite ist es instabil, die Werte schwingen und wachsen. Hilfreich ist eine kleinere Schrittweite oder ein implizites Verfahren.
- Schritt für Schritt

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
0	0	0,000000	50,000000	0,000000
1	0,05	2,500000	−75,062487	0,917298
2	0,1	−1,253124	112,406426	0,989867
3	0,15	4,367197	−168,921293	0,990810
4	0,2	−4,078868	252,946714	0,983601
5	0,25	8,568468	−379,977779	0,973467
6	0,3	−10,430421	569,287872	0,960862
7	0,35	18,033973	−854,729998	0,945852
8	0,4	−24,702527	1281,179410	0,928478
9	0,45	39,356443	−1922,799810	0,908783
10	0,5	−56,783547	2883,056488	0,886816
11	0,55	87,369277	−4325,837634	0,862633
12	0,6	−128,922605		0,836294

- Die Werte wachsen über alle Grenzen (bei $x \approx 0{,}6000$) – das Verfahren ist mit dieser Schrittweite instabil. Versuchen Sie eine kleinere Schrittweite oder ein implizites Verfahren.

Dieselbe Gleichung mit dem impliziten Euler-Verfahren – stabil auch bei großer Schrittweite.

Eingabe: `beuler(y' = -50(y - cos x); y(0)=0; h=0.05; to=1)`

Ergebnis

$$y(1) \approx 0{,}556616$$

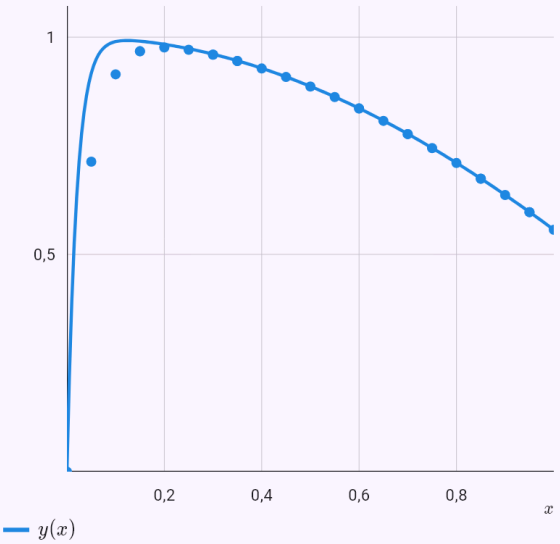
Lösungsweg

- Anfangswertproblem $y' = -50(y - \cos x), \quad y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0;\ 1]$, Schrittweite $h = 0{,}05$ (20 Schritte).
- Das implizite Euler-Verfahren – die Steigung am Ende des Schritts, y_{n+1} steht daher auf beiden Seiten einer Gleichung. Sie wird in jedem Schritt mit dem Newton-Verfahren gelöst: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$
- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -\dfrac{2500e^{-50x}}{2501} + \dfrac{2500\cos x}{2501} + \dfrac{50\sin x}{2501}$
- Stabilität: die Gleichung verhält sich wie y' = λy mit $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y} \approx -50$. Das Verfahren verkleinert einen Fehler in jedem Schritt: $h\lambda \approx -2{,}5, \quad \left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \approx 0{,}2857 \le 1$ – die Rechnung ist stabil.
- Schritt für Schritt

n	x_n	y_n	f_n	Newton	$y(x_n$
0	0	0,000000	50,000000	3	0,0000
1	0,05	0,713393	14,267861	3	0,9172
2	0,1	0,914544	4,023016	3	0,9898
3	0,15	0,967563	1,060389	3	0,9908
4	0,2	0,976494	0,178618	2	0,9836
5	0,25	0,971079	−0,108311	2	0,9734
6	0,3	0,959834	−0,224888	2	0,9608
7	0,35	0,945219	−0,292308	2	0,9458
8	0,4	0,927963	−0,345112	2	0,9284
9	0,45	0,908309	−0,393088	2	0,9087
10	0,5	0,886362	−0,438947	2	0,8868
11	0,55	0,862192	−0,483385	2	0,8626
12	0,6	0,835866	−0,526523	2	0,8362
13	0,65	0,807450	−0,568318	2	0,8078
14	0,7	0,777016	−0,608685	2	0,7774
15	0,75	0,744639	−0,647529	2	0,7450
16	0,8	0,710402	−0,684753	2	0,7107
17	0,85	0,674388	−0,720266	2	0,6747
18	0,9	0,636690	−0,753979	2	0,6370
19	0,95	0,597399	−0,785806	2	0,5977
20	1	0,556616	−0,815670		0,5569

- Am Ende des Intervalls exakt $y(1) = 0{,}55690896, \quad |y(1) - y_{20}| \approx 2{,}93 \cdot 10^{-4}$
- Ergebnis des Verfahrens: $y(1) \approx 0{,}556616$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Ein nichtlineares Randwertproblem mit dem Schießverfahren – fünf Sekantenschritte korrigieren die

Steigung.

Eingabe: `shooting(y'' = -y^2; y(0)=1; y(1)=1)`

Ergebnis

$$y(0{,}5) \approx 1{,}160614$$

Lösungsweg

- Das Randwertproblem $y'' = -y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$, Schrittweite $h = 0{,}05$ (20 Teilintervalle).
- Das Schießverfahren: wir wählen eine Anfangssteigung s = y'(a), lösen das Problem als Anfangswertproblem (Runge-Kutta) und sehen, wie weit es das rechte Ende verfehlt. Die Steigung korrigiert das Sekantenverfahren

$$F(s) = y(1;\, s) - 1, \quad s_{k+1} = s_k - F(s_k)\,\frac{s_k - s_{k-1}}{F(s_k) - F(s_k}$$

- Die Schüsse – jeder ist ein Anfangswertproblem; wir korrigieren, bis F(s) unter der Toleranz liegt.

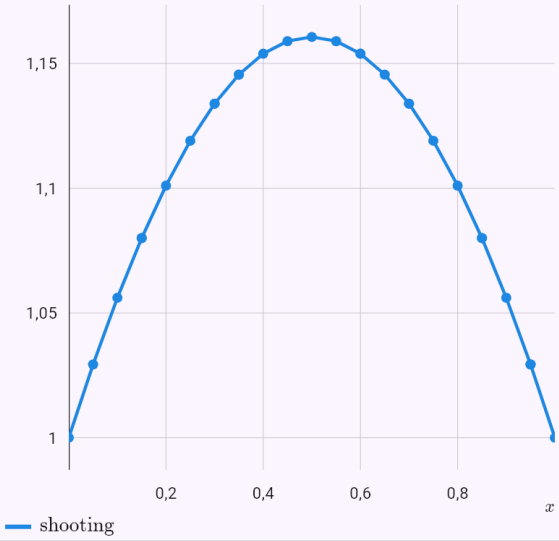
k	s_k	$y(1;\, s_k)$	$F(s_k)$
0	0,000000	0,571186	−0,429
1	1,000000	1,248638	0,249
2	0,632981	1,013343	0,0133
3	0,612168	0,999549	$-4{,}51 \cdot 10^{-4}$
4	0,612849	1,000001	$7{,}79 \cdot 10^{-7}$

- Die Anfangssteigung, mit der die Lösung die Randbedingung trifft: $y'(0) \approx 0{,}612849$
- Die Lösung in den Knoten

i	x_i	y_i
0	0	1,000000
1	0,05	1,029367
2	0,1	1,056086
3	0,15	1,080018
4	0,2	1,101035
5	0,25	1,119022
6	0,3	1,133880
7	0,35	1,145525
8	0,4	1,153892
9	0,45	1,158931
10	0,5	1,160614
11	0,55	1,158931
12	0,6	1,153892
13	0,65	1,145526
14	0,7	1,133880
15	0,75	1,119022
16	0,8	1,101035
17	0,85	1,080019
18	0,9	1,056087
19	0,95	1,029368
20	1	1,000001

- Ergebnis des Verfahrens: $y(0{,}5) \approx 1{,}160614$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Differenzenverfahren und der Thomas-Algorithmus – für y = x³ exakt in den Knoten.

Eingabe: `fdm(y'' = 6x; y(0)=0; y(1)=1; n=4)`

Ergebnis

$$y(0{,}5) \approx 0{,}125000$$

Lösungsweg

- Das Randwertproblem $y'' = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$ Schrittweite $h = 0{,}25$ (4 Teilintervalle).
- Das Differenzenverfahren: in den Knoten x_i werden y'' und y' durch zentrale Differenzen ersetzt

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\, y_i + r_i$$

- Das tridiagonale System a_i y_{i−1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i; die Randwerte stehen auf der rechten Seite

i	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,25		−32,0000	16,0000	1,5000
2	0,5	16,0000	−32,0000	16,0000	3,0000
3	0,75	16,0000	−32,0000		−11,5000

- Der Thomas-Algorithmus – Gauß-Elimination für eine tridiagonale Matrix: Vorwärtsschritt, dann Rückwärtseinsetzen vom Ende

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad y_i = d'_i - c'_i\, y_{i+1}$$

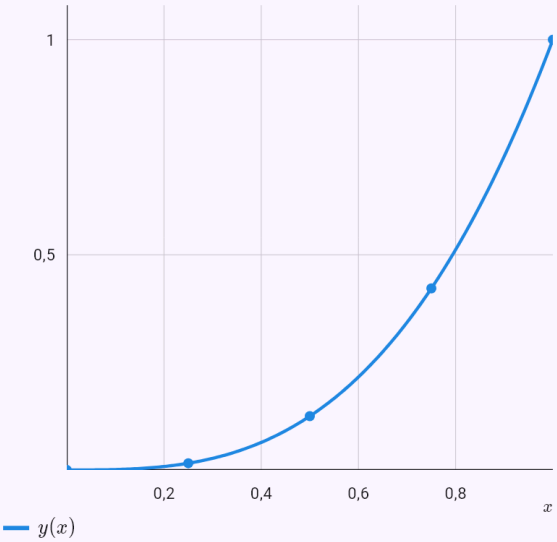
i	c'_i	d'_i
1	−0,500000	−0,046875
2	−0,666667	−0,156250
3		0,421875

- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = x^3$
- Die Lösung in den Knoten

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,015625	0,015625	$2{,}78 \cdot 10^{-17}$
2	0,5	0,125000	0,125000	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,421875	0,421875	$5{,}55 \cdot 10^{-17}$
4	1	1,000000	1,000000	0

- Der größte Fehler in den Knoten gegenüber der exakten Lösung: $\max_i \lvert y(x_i) - y_i \rvert \approx 5{,}55 \cdot 10^{-17}$
- Ergebnis des Verfahrens: $y(0{,}5) \approx 0{,}125000$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Randwertaufgabe mit finiten Elementen – exakt in den Knoten.

Eingabe: `fem(y'' = -x; y(0) = 0; y(1) = 0; n = 4)`

Ergebnis

$$y(0{,}5) \approx 0{,}062500$$

Lösungsweg

- Das Randwertproblem $y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$, Schrittweite $h = 0{,}25$ (4 Teilintervalle).
- Die Finite-Elemente-Methode: Die Gleichung wird mit einer „Hutfunktion“ φ_i multipliziert (stückweise linear, im Knoten i gleich 1, in den anderen 0) und partiell integriert. Die Lösung wird als Kombination der Hutfunktionen gesucht, die Integrale über die Elemente mit der Gauß-Regel

$$\int_0^1 (y'\varphi_i' + p\,y'\varphi_i + q\,y\varphi_i)\mathrm{d}x = -\int_0^1 r\,\varphi_i\,\mathrm{d}x, \quad y = \sum_j$$

- Das assemblierte System – eine Zeile je innerem Knoten (die Steifigkeitsmatrix K ist tridiagonal, die Randwerte auf die rechte Seite gebracht)

i	x_i	$K_{i,i-1}$	$K_{i,i}$	$K_{i,i+1}$	F_i
1	0,25		8,0000	−4,0000	0,0625
2	0,5	−4,0000	8,0000	−4,0000	0,1250
3	0,75	−4,0000	8,0000		0,1875

- Der Thomas-Algorithmus – Gauß-Elimination für eine tridiagonale Matrix: Vorwärtsschritt, dann Rückwärtseinsetzen vom Ende

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad y_i = d_i' - c_i' y_{i+}$$

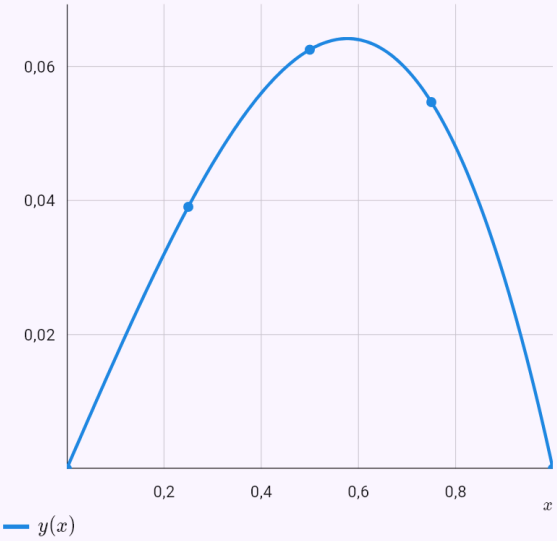
i	c_i'	d_i'
1	−0,500000	0,007812
2	−0,666667	0,026042
3		0,054687

- Zum Vergleich die exakte Lösung: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$
- Die Lösung in den Knoten

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	0,000000	0,000000	0
1	0,25	0,039062	0,039063	$6{,}94 \cdot 10^{-18}$
2	0,5	0,062500	0,062500	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
3	0,75	0,054687	0,054688	$1{,}39 \cdot 10^{-17}$
4	1	0,000000	0,000000	0

- Der größte Fehler in den Knoten gegenüber der exakten Lösung: $\max_i |y(x_i) - y_i| \approx 1{,}39 \cdot 10^{-17}$
- Ergebnis des Verfahrens: $y(0{,}5) \approx 0{,}062500$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Ein Pendel mit dem Verlet-Verfahren – sein Energiefehler bleibt, der von RK4 wächst zehnfach.

Eingabe: `verlet(x'' = -sin(x); x(0)=1; x'(0)=0; h=0.5; to=500)`

Ergebnis

$$x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx$$

Lösungsweg

- Die Bewegungsgleichung $x'' = -\sin x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$, Schrittweite $h = 0{,}5$ (1000 Schritte).
- Das Geschwindigkeits-Verlet-Verfahren – die neue Lage aus Geschwindigkeit und Beschleunigung, die Geschwindigkeit aus der mittleren Beschleunigung am Anfang und Ende des Schritts. Die Gesamtenergie $E = \frac{v^2}{2} + V(x), \quad V(x) = -\cos x$ wird für beide Verfahren berechnet

$$x_{n+1} = x_n + h\,v_n + \tfrac{h^2}{2}a(x_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + \tfrac{h}{2}(a(x_n) + a(x_{n+1}))$$

- Verlet gegen RK4 mit gleicher Schrittweite (ausgewählte Zeilen)

t	x_n	v_n	$E_n - E_0$	x_n^{RK4}	E_n^F
0	1,0000	0,0000	0	1,0000	
20	0,9969	−0,0714	$-8{,}7 \cdot 10^{-5}$	0,9924	–
40	0,9875	−0,1424	$-3{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,9774	–
60	0,9719	−0,2128	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,9574	–
80	0,9501	−0,2822	−0,0014	0,9340	-
100	0,9223	−0,3504	−0,0023	0,9091	-
120	0,8885	−0,4168	−0,0034	0,8839	-
140	0,8489	−0,4812	−0,0047	0,8597	-
160	0,8037	−0,5430	−0,0063	0,8375	-
180	0,7531	−0,6019	−0,0081	0,8181	-
200	0,6973	−0,6575	−0,01	0,8020	-
220	0,6366	−0,7091	−0,012	0,7897	
240	0,5715	−0,7564	−0,015	0,7815	-
260	0,5022	−0,7989	−0,017	0,7775	-
280	0,4293	−0,8361	−0,019	0,7776	-
300	0,3532	−0,8676	−0,022	0,7818	
320	0,2744	−0,8930	−0,024	0,7897	-
340	0,1936	−0,9121	−0,025	0,8009	-
360	0,1113	−0,9246	−0,026	0,8150	-
380	0,0281	−0,9303	−0,027	0,8311	
400	−0,0553	−0,9292	−0,026	0,8486	-
420	−0,1382	−0,9213	−0,026	0,8663	-
440	−0,2201	−0,9066	−0,025	0,8834	-
460	−0,3003	−0,8854	−0,023	0,8985	
480	−0,3783	−0,8580	−0,021	0,9102	-
500	−0,4534	−0,8245	−0,019	0,9171	-

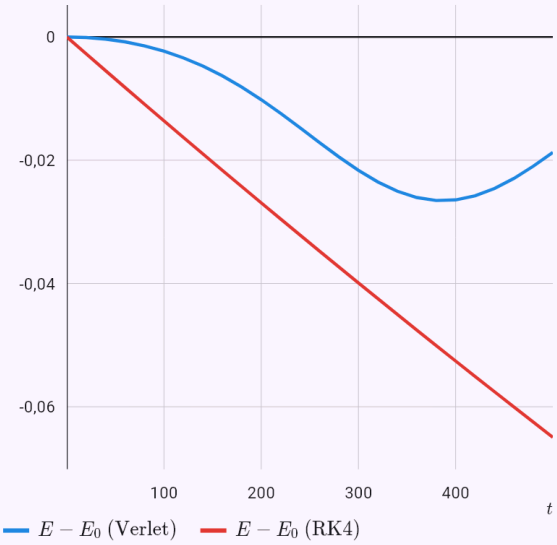
- Der Energiefehler des Verlet-Verfahrens bleibt gleich, der von RK4 wächst mit der Zeit – bei langer Rechnung ist Verlet treuer. Der größte Fehler am Anfang und am Ende, oben Verlet, unten RK4

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}027$$

$$\max_{t \le t_{1/10}} |E - E_0| \approx 0{,}0069, \quad \max_{t \ge t_{9/10}} |E - E_0| \approx 0{,}065$$

- Ergebnis des Verfahrens: $x(500) \approx -0{,}453415, \quad \max|\Delta E| \approx 0{,}027$

Graph



Die Abweichung der Gesamtenergie vom Anfangswert: Verlet schwankt um null, RK4 entfernt sich langsam.

Gauß-Seidel-Verfahren – Gleichungen für die Diagonaldominanz vertauscht.

Eingabe: `gaussseidel(x + 3y = 7; 4x + y = 6)`

Ergebnis

$$x \approx 1{,}0000$$
$$y \approx 2{,}0000$$

Lösungsweg

- Das System in Matrixform
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Wir vertauschen die Gleichungen, damit die Matrix diagonaldominant wird ($|4| > |1|, \quad |3| > |1|$)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$
- Iterationsmatrix ihr Spektralradius $\rho(T_{GS}) \approx 0{,}08333 < 1$ – das Verfahren konvergiert.
$$T_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}08333 \end{pmatrix}$$
- Gauß-Seidel-Verfahren – die neuen Werte werden sofort eingesetzt

$$x^{(k+1)} = \frac{6 - y^{(k)}}{4}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)}}{3}$$

- Die Iterationen

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0,000000	0,000000	
1	1,500000	1,833333	1,833333
2	1,041667	1,986111	0,458333
3	1,003472	1,998843	0,038194
4	1,000289	1,999904	0,003183
5	1,000024	1,999992	0,000265
6	1,000002	1,999999	0,000022

- Die Abbruchbedingung $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-4}$ ist nach 6 Iterationen erfüllt.
- Ergebnis des Verfahrens: $x \approx 1{,}0000, \quad y \approx 2{,}0000$

LU-Zerlegung in exakten Brüchen, Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Eingabe: `lu(2x + y + z = 5; 4x + 3y + 3z = 13; 2x + 3y + 4z = 13)`

Ergebnis

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

Lösungsweg

- Das System in Matrixform
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$
- Gauß-Elimination – die Faktoren der Zeilen bilden die Matrix L: $l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2$
- LU-Zerlegung A = LU
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vorwärtseinsetzen Ly = b
$$y_1 = 5$$
$$y_2 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$$
$$y_3 = 13 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2$$
- Rückwärtseinsetzen Ux = y
$$x = \frac{5 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$y = \frac{3 - 1 \cdot 2}{1} = 1$$
$$z = \frac{2}{1} = 2$$
- Ergebnis des Verfahrens: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2$

Das Lagrange-Interpolationspolynom und sein Wert an einer Stelle.

Eingabe: `lagrange(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5; at=1.5)`

Ergebnis

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

Lösungsweg

- Die gegebenen Punkte (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Lagrange-Basispolynome $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$$l_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

- Das Lagrange-Interpolationspolynom

$$L(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) + 5 \cdot l_3(x) = \frac{7}{6}x^3$$

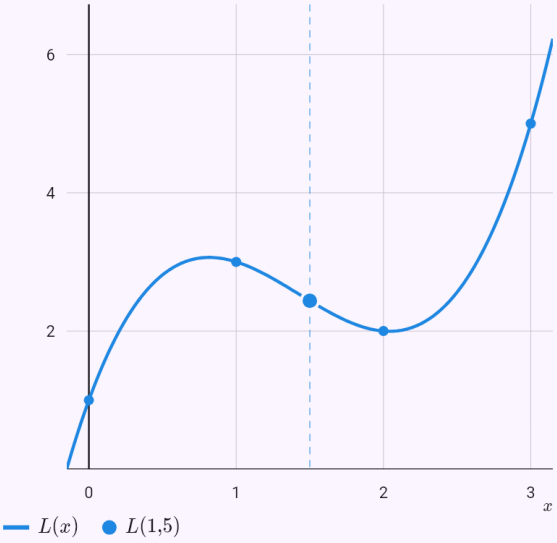
- Der Wert an der gegebenen Stelle:

$$L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437500$$

- Ergebnis des Verfahrens

$$L(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1, \quad L(1{,}5) = \frac{39}{16} \approx 2{,}437$$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Das Newton-Polynom aus der Tabelle der dividierten Differenzen.

Eingabe: `newtonpoly(x=0 1 2 3; y=1 3 2 5)`

Ergebnis

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Lösungsweg

- Die gegebenen Punkte (4)

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2
3	3	5

- Tabelle der dividierten Differenzen

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot]_1$	$f[\cdot]_2$	$f[\cdot]_3$
0	0	1	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
1	1	3	-1	2	
2	2	2	3		
3	3	5			

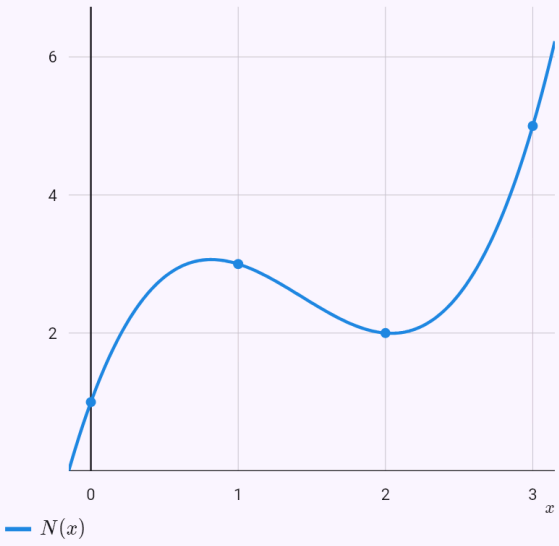
- Das Newton-Interpolationspolynom (Koeffizienten aus der oberen Diagonale der Tabelle)

$$N(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{7}{6}$$

- Ergebnis des Verfahrens:

$$N(x) = \frac{7}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{35}{6}x + 1$$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Natürlicher kubischer Spline – das System für die Momente und die Teilpolynome.

Eingabe: `spline(x=0 1 2 3; y=0 1 0 1; at=1.5)`

Ergebnis

$$S(1{,}5) \approx 0{,}500000$$

Lösungsweg

- Die gegebenen Punkte (4)

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	0
3	3	1

- Natürlicher kubischer Spline: die zweiten Ableitungen M an den Stützstellen erfüllen dabei $M_0 = M_3 = 0$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} -$$

$$4M_1 + 1M_2 = -12$$
$$1M_1 + 4M_2 = 12$$

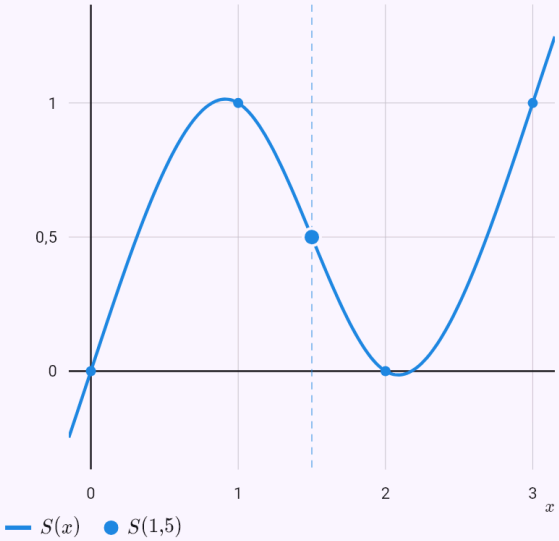
- Lösung des Systems:
  $M_0 \approx 0, \quad M_1 \approx -4, \quad M_2 \approx 4, \quad M_3 \approx 0$
- Auf jedem Teilintervall

$$S_i(x) = y_i + b_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x$$

$$S_0(x) = -0{,}666667x^3 + 1{,}66667x,$$
$$S_1(x) = 1{,}33333(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 0{,}333333(x -$$
$$S_2(x) = -0{,}666667(x-2)^3 + 2(x-2)^2 - 0{,}333333(x$$

- Der Wert an der gegebenen Stelle: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$
- Ergebnis des Verfahrens: $S(1{,}5) \approx 0{,}500000$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Quadratische Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingabe: `leastsquares(x=0 1 2 3 4 5; y=1.1 1.9 3.2 5.1 7.4 10.2; degree=2)`

Ergebnis

$$p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$$

Lösungsweg

- Die gegebenen Punkte (6)

i	x_i	y_i
0	0	$\frac{11}{10}$
1	1	$\frac{19}{10}$
2	2	$\frac{16}{5}$
3	3	$\frac{51}{10}$
4	4	$\frac{37}{5}$
5	5	$\frac{51}{5}$

- Gesucht ist das Polynom mit $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \to \min$. Die nötigen Summen

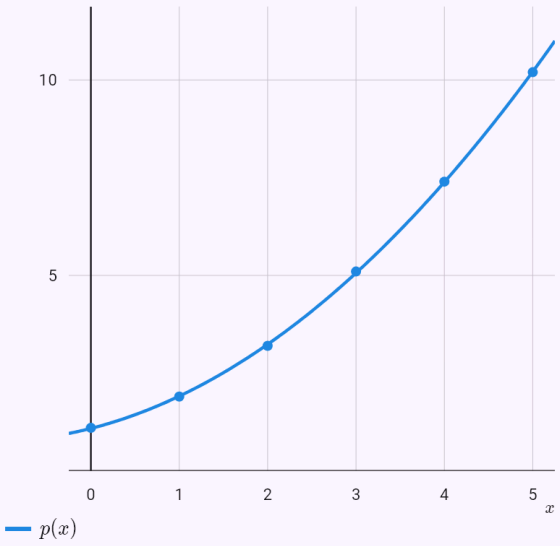
$$n = 6, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i^3 = 225,$$

- Normalgleichungen für die Koeffizienten $a_0 \dots a_m$

$$\begin{aligned} 6a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 28{,}9 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 104{,}2 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 434 \end{aligned}$$

- Lösung: $a_0 \approx 1{,}08571, \quad a_1 \approx 0{,}575714, \quad a_2 \approx 0{,}25$
- Summe der Abweichungsquadrate: $S = \sum_i (y_i - p(x_i))^2 \approx 0{,}003429$
- Ergebnis des Verfahrens: $p(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}575714x + 1{,}08571$

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Interner Zinsfuß – unter dem Ergebnis die zugeklappten Schritte der Bisektion.

Eingabe: `model(npv; find=irr[one]; CF=-1000 300 400 500 200[one]; r=10[pct]; cur=CZK)`

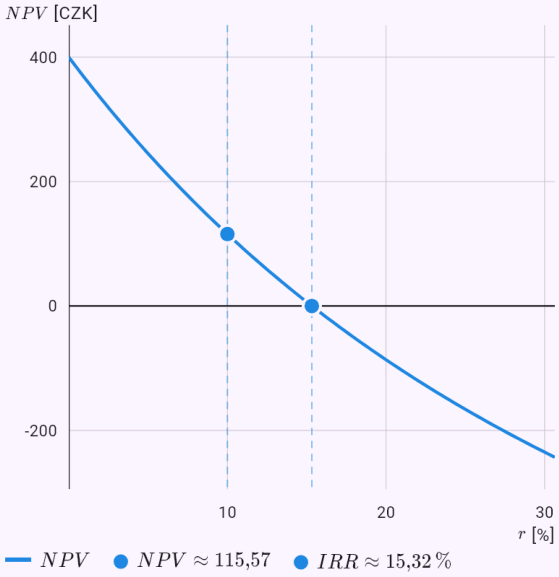
Ergebnis

$$IRR \approx 15{,}32\,\%$$

Lösungsweg

- Gegeben:
  $CF_t = (-1.000;\ 300;\ 400;\ 500;\ 200), \quad r = 10\,\%$
- Einheiten umrechnen: $r = 10\,\% = 0{,}1$
- Der Kapitalwert NPV summiert die Zahlungsströme CF_0, CF_1, … eines Projekts, abgezinst mit der geforderten Rendite r: NPV = Σ CF_t/(1 + r)^t. Ein Projekt mit NPV > 0 verdient mehr als die geforderte Rendite. Der interne Zinsfuß IRR ist der Satz, bei dem NPV = 0 – die Nullstelle eines Polynoms, numerisch bestimmt. Die Amortisationsdauer ist der Zeitpunkt, ab dem die (einfache oder abgezinste) kumulierte Summe nicht mehr negativ ist. Gleichung des Modells:
  $$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$
- Kapitalwert
  $$NPV = -1.000 + \frac{300}{1{,}1^1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{500}{1{,}1^3} + \frac{200}{1{,}1^4} \approx 115{,}5$$
- NPV ≥ 0 – das Projekt erzielt mindestens die geforderte Rendite.
- Die Gleichung wird numerisch gelöst (Bisektion):
  $NPV(IRR) = 0 \Rightarrow IRR \approx 15{,}32\,\%$
- › Das Verfahren: Bisektion, 14 Iterationen

Graph



Das Diagramm aus der Lösung des Modells; die Punkte sind die gegebenen Werte oder die Antwort.

Bekannte Einschränkungen

- Nullstellen: eine Gleichung mit einer Unbekannten, reelle Nullstellen; automatisch werden höchstens drei Nullstellen in ⟨−50; 50⟩ eingeschlossen.
- Differentialgleichungen: nur eine Gleichung 1. Ordnung y′ = f(x, y), höchstens 2 000 Schritte; Systeme und höhere Ordnungen noch nicht.
- Systeme: 2 bis 6 Gleichungen; Interpolation höchstens 12 Punkte, Ausgleichspolynom höchstens 5. Grades.
- Simpson- und Romberg-Verfahren aus einer Tabelle brauchen gleiche Schritte (Romberg 2, 4, 8, … Teilintervalle).
- Randwertprobleme nur 2. Ordnung mit den Werten y(a), y(b) (keine Ableitung am Rand); das Differenzenverfahren nur für eine in y und y′ lineare Gleichung. Das Verlet-Verfahren nur für Bewegung x″ = a(x) in einer Koordinate – eine Planetenbahn in der Ebene noch nicht.