Mathtrace – příručka

V. Statistika

Obsah

V. Statistika

41. Statistika

41. Statistika

Data zapíšete jako data(…): hodnoty oddělte středníkem, mezerou nebo novým řádkem, desetinná čárka platí jako jinde (data(1,5 2,5 3)). Tabulku – řádek na jedno pozorování, sloupec na proměnnou – napíšete po řádcích oddělených středníkem, první řádek může nést názvy proměnných. Pohodlněji: klávesa s mřížkou na záložce f(x) otevře tabulku, kam data vyplníte, vložíte ze schránky (buňky z Excelu či Google Tabulek) nebo načtete ze souboru CSV, a tlačítkem „Jako data“ je vložíte pro statistiku – i tabulku větší, než je mřížka.

U jedné proměnné vyberete čipem, co spočítat. Popisná statistika: aritmetický průměr, medián, modus, kvartily (mediány dolní a horní poloviny), variační a mezikvartilové rozpětí, rozptyl a směrodatnou odchylku výběrovou (n − 1) i populační (n), variační koeficient a odlehlé hodnoty (mimo $Q_1 - 1{,}5 \cdot \mathrm{IQR}$ a $Q_3 + 1{,}5 \cdot \mathrm{IQR}$); graf je krabicový. Četnosti a histogram: tabulka absolutních, relativních a kumulativních četností – u celých čísel s málo hodnotami po hodnotách, jinak po třídách (počet tříd Sturgesovým pravidlem). z-skóry: každá hodnota standardizovaná průměrem a směrodatnou odchylkou dat, s T-skórem.

Dvě proměnné (dva sloupce) aplikace spočítá jako korelaci a regresi: součty, kovarianci, Pearsonův korelační koeficient r se slovním hodnocením síly závislosti, regresní přímku metodou nejmenších čtverců a koeficient determinace r^2; graf je bodový s přímkou. U tří a více proměnných vyjde popisná statistika každé z nich vedle sebe s krabicovými grafy.

Statistická indukce z dat: interval spolehlivosti průměru (čip „Interval spolehlivosti průměru“, spolehlivost 90, 95 nebo 99 %) přes t-rozdělení; t-test (čip „t-test“) – jedna proměnná proti testované hodnotě μ_0, dvě proměnné jako nezávislé výběry (Welchův test, nebo se shodnými rozptyly) nebo párové hodnoty (rozdíly dvojic); test χ^2 (čip „Test χ^2“) – jeden sloupec četností jako test dobré shody s rovnoměrným rozdělením, tabulka jako test nezávislosti s Cramérovým V. Pod čipy zadáte hladinu významnosti α, alternativu (oboustranná, levostranná, pravostranná) a μ_0. Postup: hypotézy, testové kritérium, kritická hodnota a kritický obor, p-hodnota a rozhodnutí; graf ukáže rozdělení s vybarveným kritickým oborem. Dva nezávislé výběry různé délky zapište jako pojmenované sloupce – data(A = 23 25 28; B = 20 22 21 25).

Porovnání skupin: čip „Pořadový test (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)“ porovná dvě skupiny Mannovým–Whitneyovým testem (s volbou „Párové“ párové hodnoty Wilcoxonovým testem) a tři a více skupin Kruskalovým–Wallisovým testem – podle pořadí hodnot, bez předpokladu normálního rozdělení; u malých vzorků bez shod je p-hodnota přesná. Čip „ANOVA (analýza rozptylu)“ porovná průměry skupin jednofaktorovou analýzou rozptylu s tabulkou ANOVA, F-testem a velikostí účinku η^2. Skupiny zapište do sloupců, mohou mít různou délku (pojmenované sloupce); graf ukáže krabicové grafy skupin a rozdělení testového kritéria. U testu χ^2 jednoho sloupce četností zadáte do pole „Očekávané podíly“ vlastní očekávané podíly – 1:2:1, 0,25 0,5 0,25 nebo v procentech.

Regrese dvou proměnných má pod čipem volbu modelu: lineární (s testem významnosti korelace), kvadratická (normální rovnice metody nejmenších čtverců), exponenciální y = a·e^(bx), mocninná y = a·x^b a logaritmická y = a + b·ln x (linearizací přes logaritmy) – s koeficientem determinace R^2 a grafem proložené křivky. Ve formuláři „Statistika a psychometrie“ jsou navíc interval spolehlivosti a t-testy ze souhrnných hodnot (rozsah, průměr, směrodatná odchylka) – i z-test při známém σ a t-test dvou výběrů.

Normální rozdělení najdete ve formuláři „Statistika a psychometrie“ (sekce „Aplikace“ na úvodní obrazovce, obor Statistika): pravděpodobnost P(X < x), P(X > x), P(a < X < b) a kvantil – hodnota, pod kterou leží zadaný podíl. Postup vede přes standardizaci z = (x − μ)/σ a distribuční funkci Φ, záporné z jako 1 − Φ(|z|) podle tabulek; graf ukáže křivku hustoty s vybarvenou plochou.

Jak zadat

`data(3; 5; 7; 7; 9)`	Jedna proměnná – hodnoty středníkem, mezerou nebo pod sebou.
`data(x y; 1 52; 2 58; 3 61)`	Tabulka po řádcích, první řádek s názvy proměnných (nepovinný).
`data(x = 1 2 3 4; y = 2 4 5 4)`	Pojmenované sloupce, každý se svými hodnotami.

Ukázky

Popisná statistika osmi hodnot.

Zadání: `data(2; 4; 4; 4; 5; 5; 7; 9)`

Výsledek

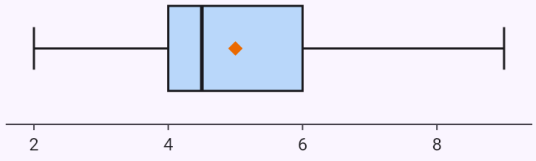
$$\bar{x} = 5$$
$$\tilde{x} = 4{,}5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Postup

- Počet hodnot $n = 8$, seřazená data:
  $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{40}{8} = 5$
- Medián je prostřední hodnota seřazených dat:
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- Modus (nejčastější hodnota, 3×): $\hat{x} = 4$
- Kvartily jsou mediány dolní a horní poloviny dat:
  $Q_1 = 4, \quad Q_2 = \tilde{x} = 4{,}5, \quad Q_3 = 6$
- Variační rozpětí a mezikvartilové rozpětí
  $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 2 = 7$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$
- Součet čtverců odchylek od průměru:
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 32$
- Rozptyl – výběrový s² a populační σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{7} \approx 4{,}571$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{32}{8} = 4$
- Směrodatná odchylka
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}571} \approx 2{,}138$
  $\sigma = \sqrt{4} = 2$
- Variační koeficient: $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}138}{5} \approx 0{,}4276 = 42{,}8\,\%$
- Hradby pro odlehlé hodnoty
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 1, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 9$ – žádná hodnota mimo ně neleží.
- Výběrový rozptyl s² dělí n − 1 a odhaduje rozptyl celé populace z výběru – obvyklá volba. Populační σ² dělí n a použijeme ho, jen když data jsou celá populace.
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Graf

Krabicový graf (medián, kvartily, odlehlé hodnoty; ◆ průměr)



Odlehlá hodnota 31 v krabicovém grafu.

Zadání: `data(12 15 14 13 16 15 14 31)`

Výsledek

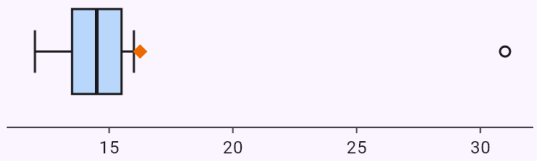
$$\bar{x} = 16{,}25$$
$$\tilde{x} = 14{,}5$$
$$s \approx 6{,}089$$

Postup

- Počet hodnot $n = 8$, seřazená data:
  $12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 15,\ 16,\ 31$
- Aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{8} = 16{,}25$
- Medián je prostřední hodnota seřazených dat:
  $\tilde{x} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$
- Modus (nejčastější hodnota, 2×): $\hat{x} = 14,\ 15$
- Kvartily jsou mediány dolní a horní poloviny dat:
  $Q_1 = 13{,}5, \quad Q_2 = \tilde{x} = 14{,}5, \quad Q_3 = 15{,}5$
- Variační rozpětí a mezikvartilové rozpětí
  $R = x_{max} - x_{min} = 31 - 12 = 19$
  $IQR = Q_3 - Q_1 = 15{,}5 - 13{,}5 = 2$
- Součet čtverců odchylek od průměru:
  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 259{,}5$
- Rozptyl – výběrový s² a populační σ²
  $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{7} \approx 37{,}07$
  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{259{,}5}{8} \approx 32{,}44$
- Směrodatná odchylka
  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{37{,}07} \approx 6{,}089$
  $\sigma = \sqrt{32{,}44} \approx 5{,}695$
- Variační koeficient: $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6{,}089}{16{,}25} \approx 0{,}3747 = 37{,}5\,\%$
- Odlehlé hodnoty leží mimo hradby
  $Q_1 - 1{,}5\,IQR = 10{,}5, \quad Q_3 + 1{,}5\,IQR = 18{,}5$: 31
- Výběrový rozptyl s² dělí n − 1 a odhaduje rozptyl celé populace z výběru – obvyklá volba. Populační σ² dělí n a použijeme ho, jen když data jsou celá populace.
- Pozor: dat je málo, odhady (hlavně rozptylu a kvartilů) jsou nejisté.

Graf

Krabicový graf (medián, kvartily, odlehlé hodnoty; ◆ průměr)



Tabulka četností známek a histogram.

Zadání: `data(1 2 2 3 3 3 3 4 4 5 1 3 2 4 3)` Četnosti a histogram

Výsledek

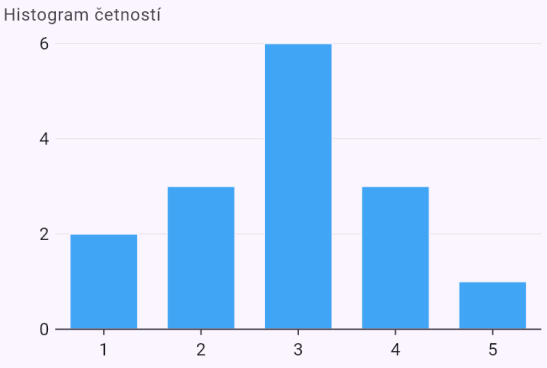
$$n = 15$$
$$\hat{x} = 3$$

Postup

- Počet hodnot $n = 15$, seřazená data:
  $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5$
- Tabulka četností – absolutní n, relativní f, kumulativní N a F

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,133	2	0,133
2	3	0,200	5	0,333
3	6	0,400	11	0,733
4	3	0,200	14	0,933
5	1	0,067	15	1,000
$\sum$	15	1		

Graf



Spojitá data rozdělená do tříd.

Zadání: `data(12.5 14.1 15.8 17.2 18.9 21.3 22.0 23.7 25.1 26.4 28.8 31.2)`

Četnosti a histogram

Výsledek

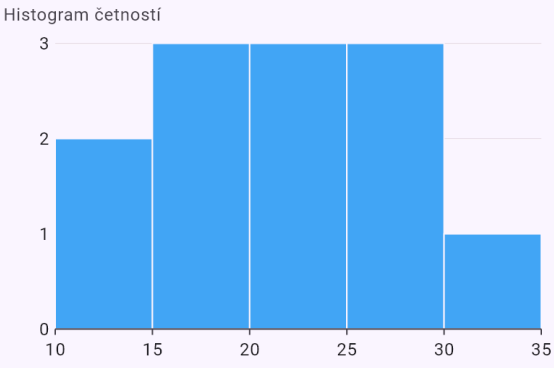
$$n = 12$$
$$k = 5, \quad h = 5$$

Postup

- Počet hodnot $n = 12$, seřazená data
  $12{,}5,\ 14{,}1,\ 15{,}8,\ 17{,}2,\ 18{,}9,\ 21{,}3,\ 22,\ 23{,}7,\ 25{,}1,\ 26,$
- Hodnot je mnoho, rozdělíme je do 5 tříd (Sturgesovo pravidlo)
  $k \approx 1 + \log_2 n = 1 + \log_2 12 \approx 4{,}585 \Rightarrow k = 5$
  $h \approx \frac{R}{k} = \frac{18{,}7}{5} \approx 3{,}74 \Rightarrow h = 5$
- Tabulka četností tříd (x je střed třídy)

I_j	x_j	n_j	f_j	N_j	F_j
$\langle 10;\ 15)$	12,5	2	0,167	2	0,167
$\langle 15;\ 20)$	17,5	3	0,250	5	0,417
$\langle 20;\ 25)$	22,5	3	0,250	8	0,667
$\langle 25;\ 30)$	27,5	3	0,250	11	0,917
$\langle 30;\ 35\rangle$	32,5	1	0,083	12	1,000
$\sum$		12	1		

Graf



z-skóry a T-skóry hodnot.

Zadání: `data(2 4 4 4 5 5 7 9)` z-skóry

Výsledek

$$\bar{x} = 5$$
$$s \approx 2{,}138$$

Postup

- Počet hodnot $n = 8$, seřazená data:
  $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$
- Aritmetický průměr: $\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$
- Směrodatná odchylka
  $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{32}{7}} \approx 2{,}138$$
- Každou hodnotu standardizujeme
  $$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 5}{2{,}138}$$
  $$T_i = 50 + 10 z_i$$
- z-skóry a T-skóry hodnot

x_i	z_i	T_i
2	$-1{,}40$	$36{,}0$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
4	$-0{,}47$	$45{,}3$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
5	$0{,}00$	$50{,}0$
7	$0{,}94$	$59{,}4$
9	$1{,}87$	$68{,}7$

- z-skóry jsou spočítané z průměru a směrodatné odchylky těchto dat. Pro srovnání s populací se použijí průměr a SD normy (model „Převody standardních skórů“).

Korelace a regresní přímka – počet hodin učení a body v testu.

Zadání: `data(x y; 1 52; 2 58; 3 61; 4 70; 5 74; 6 79)`

Výsledek

$$r \approx 0{,}9937$$

$$\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$$

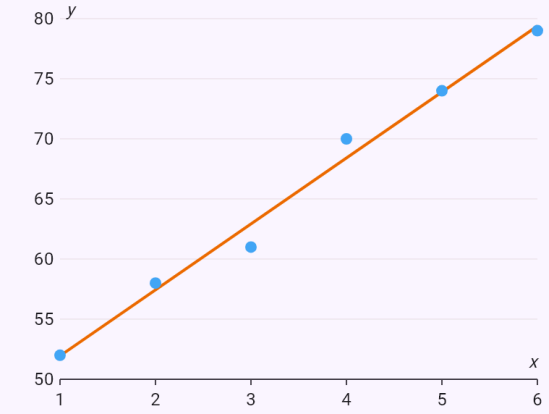
Postup

- Počet hodnot $n = 6$, seřazená data
  $[1;\,52],\ [2;\,58],\ [3;\,61],\ [4;\,70],\ [5;\,74],\ [6;\,79]$
- Součty a průměry
  $\sum x_i = 21$
  $\sum y_i = 394$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum y_i^2 = 26\,410$
  $\sum x_i y_i = 1475$
  $\bar{x} = 3{,}5$
  $\bar{y} = 65{,}67$
- Směrodatná odchylka
  $$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \approx 1{,}871$$
  $$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}} \approx 10{,}33$$
- Kovariance
  $$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{1475 - 6 \cdot 3{,}5 \cdot 65{,}67}{5} = 19{,}2$$
- Pearsonův korelační koeficient:
  $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{19{,}2}{1{,}871 \cdot 10{,}33} \approx 0{,}9937$ – závislost je velmi silná, kladná (s rostoucím x roste y).
- Koeficienty regresní přímky metodou nejmenších čtverců
  $b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{19{,}2}{3{,}5} \approx 5{,}486$
  $a = \bar{y} - b\bar{x} = 65{,}67 - 5{,}486 \cdot 3{,}5 \approx 46{,}47$

- Regresní přímka: $\hat{y} = 46{,}47 + 5{,}486x$
- Koeficient determinace $r^2 = 0{,}9937^2 \approx 0{,}9874$ – přímka vysvětluje $98{,}7\,\%$ rozptylu y.
- Test nulové hypotézy ρ = 0 (t-rozdělení s 4 stupni volnosti) – korelace je statisticky významná.
  $$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}9937\sqrt{4}}{\sqrt{1-0{,}9937^2}} \approx 17{,}73$$
  $p < 0{,}0001 \le \alpha = 0{,}05$
- Korelace popisuje jen lineární souvislost: neříká, co je příčinou, a nemusí zachytit souvislost nelineární. Regresní přímku je rozumné používat jen v rozsahu naměřených x.

Graf

Bodový graf s regresní přímkou



Tři proměnné vedle sebe.

Zadání: `data(A B C; 12 15 9; 14 18 11; 11 16 10; 15 19 12; 13 17 10)`

Výsledek

$$\bar{x}_{\mathrm{A}} = 13$$
$$\bar{x}_{\mathrm{B}} = 17$$
$$\bar{x}_{\mathrm{C}} = 10{,}4$$

Postup

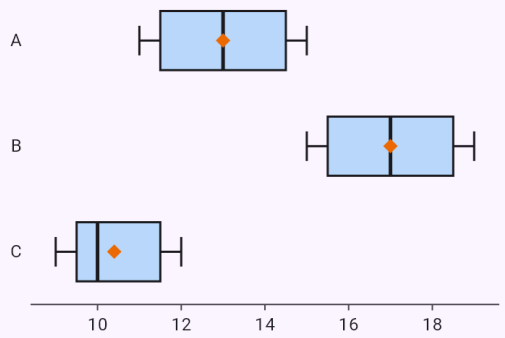
- Popisná statistika jednotlivých proměnných

	A	B	C
n	5	5	5
$\bar{x}$	13	17	10,4
$\tilde{x}$	13	17	10
Q_1	11,5	15,5	9,5
Q_3	14,5	18,5	11,5
s	1,581	1,581	1,14
σ	1,414	1,414	1,02
x_{min}	11	15	9
x_{max}	15	19	12

- Výběrový rozptyl s² dělí n − 1 a odhaduje rozptyl celé populace z výběru – obvyklá volba. Populační σ² dělí n a použijeme ho, jen když data jsou celá populace.

Graf

Krabicový graf (medián, kvartily, odlehlé hodnoty; ◆ průměr)



95% interval spolehlivosti průměru deseti měření.

Zadání: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` Interval spolehlivosti průměru

Výsledek

$$95\,\%: \ \langle 99{,}71;\ 106{,}3 \rangle$$

Postup

- Rozsah, průměr a výběrová směrodatná odchylka: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- Směrodatná chyba: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Kvantil pro zvolenou spolehlivost: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$
- Interval spolehlivosti
  $\bar{x} \pm t \cdot SE = 103 \pm 2{,}262 \cdot 1{,}453 = 103 \pm 3{,}287 \Rightarrow \langle 99$
- Spolehlivost 95 % znamená: kdybychom výběr mnohokrát opakovali, asi 95 % takto spočítaných intervalů by skutečný průměr μ obsahovalo. Neznamená to, že μ leží v tomto konkrétním intervalu s pravděpodobností 95 %.
- Pro malý výběr (n < 30) t-rozdělení předpokládá, že data pocházejí z přibližně normálního rozdělení. U výrazně zešikmených dat nebo odlehlých hodnot je vhodnější neparametrický test.

Liší se průměr od 100? t-test jednoho výběru.

Zadání: `data(102 98 110 105 99 107 101 104 96 108)` t-test

Výsledek

$$t \approx 2{,}065$$

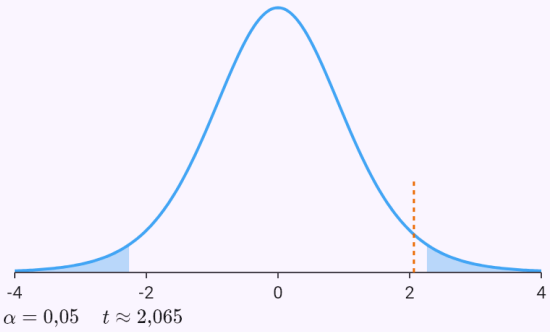
$$p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Rozsah, průměr a výběrová směrodatná odchylka: $n = 10, \quad \bar{x} = 103, \quad s \approx 4{,}595$
- Nulová a alternativní hypotéza: $H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu \neq 100$
- Směrodatná chyba: $SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}595}{\sqrt{10}} \approx 1{,}453$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má t-rozdělení s 9 stupni volnosti: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \frac{103 - 100}{1{,}453} \approx 2{,}065$
- Kritická hodnota na hladině α: $t_{0{,}975}(9) \approx 2{,}262$, kritický obor $|t| \geq 2{,}262$
- p-hodnota: $p = 2\,P(T \geq 2{,}065) \approx 0{,}06895$
- Protože $p \approx 0{,}06895 > \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme – data neposkytují dost důkazů proti ní.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Pro malý výběr (n < 30) t-rozdělení předpokládá, že data pocházejí z přibližně normálního rozdělení. U výrazně zešikmených dat nebo odlehlých hodnot je vhodnější neparametrický test.

Graf

t-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



Dva nezávislé výběry různé velikosti – Welchův t-test.

Zadání: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)` t-test

Výsledek

$$t \approx 3{,}503$$

$$p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$$

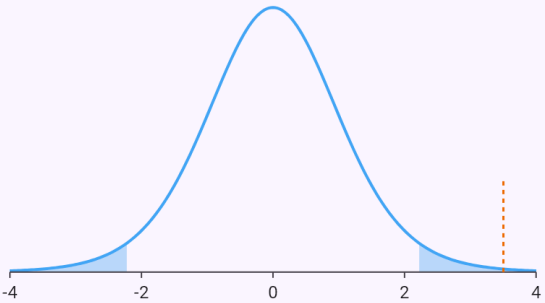
Postup

- Rozsah, průměr a výběrová směrodatná odchylka
  $n_1 = 6,\ \bar{x}_1 = 26{,}5,\ s_1 \approx 2{,}429$
  $n_2 = 7,\ \bar{x}_2 = 22,\ s_2 \approx 2{,}16$
- Nulová a alternativní hypotéza:
  $H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- Směrodatná chyba
  $$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2{,}429^2}{6} + \frac{2{,}16^2}{7}} \approx 1{,}285$$
- Stupně volnosti podle Welche a Satterthwaita
  $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 10{,}18$$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má t-rozdělení s $10{,}18$ stupni volnosti:
  $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \frac{26{,}5 - 22}{1{,}285} \approx 3{,}503$$
- Kritická hodnota na hladině α: $t_{0{,}975}(10{,}18) \approx 2{,}223$, kritický obor $|t| \geq 2{,}223$
- p-hodnota: $p = 2\,P(T \geq 3{,}503) \approx 0{,}005546$
- Protože $p \approx 0{,}005546 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.

- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Welchův test nepředpokládá shodné rozptyly obou skupin; jeho stupně volnosti v nemusí být celé číslo.

Graf

t-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 3{,}503$

Párový t-test – měření před a po.

Zadání: `data(x1 x2; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71)` t-test · Párové

Výsledek

$$t \approx 3{,}081$$

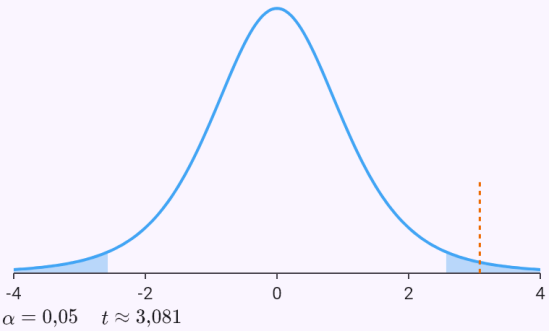
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Rozdíly dvojic d_i (1. sloupec − 2. sloupec): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3;\ n = 6,\quad \bar{d} \approx 2{,}167,\quad s_d \approx 1{,}722$
- Nulová a alternativní hypotéza: $H_0: \mu_d = 0,\quad H_1: \mu_d \neq 0$
- Směrodatná chyba: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}722}{\sqrt{6}} \approx 0{,}7032$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má t-rozdělení s 5 stupni volnosti: $t = \dfrac{\bar{d} - \mu_0}{SE} = \dfrac{2{,}167 - 0}{0{,}7032} \approx 3{,}081$
- Kritická hodnota na hladině α: $t_{0{,}975}(5) \approx 2{,}571$, kritický obor $|t| \geq 2{,}571$
- p-hodnota: $p = 2\,P(T \geq 3{,}081) \approx 0{,}02743$
- Protože $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Pro malý výběr (n < 30) t-rozdělení předpokládá, že data pocházejí z přibližně normálního rozdělení. U výrazně zešikmených dat nebo odlehlých hodnot je vhodnější neparametrický test.
- Párový t-test je t-test jednoho výběru pro rozdíly (1. sloupec − 2. sloupec) – každá dvojice patří ke stejnému subjektu (např. před a po).

Graf

t-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



Je kostka spravedlivá? Test dobré shody χ².

Zadání: `data(8 12 9 11 6 14)` Test χ²

Výsledek

$$\chi^2 = 4{,}2$$
$$p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Nulová hypotéza: všech 6 kategorií je stejně pravděpodobných ($H_0: p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$), alternativní: aspoň jedna se liší.
- Očekávané četnosti při platnosti H_0 $E_i = \frac{N}{k} = \frac{60}{6} = 10$ a příspěvky jednotlivých kategorií

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	0,4
2	12	10	0,4
3	9	10	0,1
4	11	10	0,1
5	6	10	1,6
6	14	10	1,6
$\sum$	60	60	4,2

- Testové kritérium – při platnosti H_0 má rozdělení χ^2 s 5 stupni volnosti

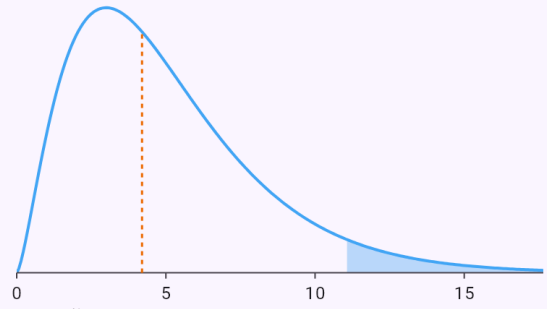
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}6 + 1$$

- Kritická hodnota na hladině α: $\chi^2_{0{,}95}(5) \approx 11{,}07$, kritický obor $\chi^2 \geq 11{,}07$
- p-hodnota: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}2) \approx 0{,}521$
- Protože $p \approx 0{,}521 > \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme – data neposkytují dost důkazů proti ní.

- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Test χ² pracuje s četnostmi (počty případů), ne s procenty nebo průměry.

Graf

Rozdělení χ² – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



Test nezávislosti v tabulce 2×2.

Zadání: `data(20 30; 25 15)` Test χ²

Výsledek

$$\chi^2 = 4{,}5$$
$$p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$V \approx 0{,}2236$$

Postup

- Nulová hypotéza: řádková a sloupcová proměnná jsou nezávislé, alternativní: jsou závislé.
- Očekávané četnosti při nezávislosti $E_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{N}$, v závorce pozorované

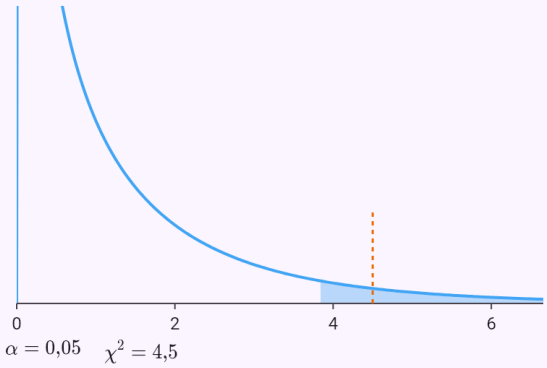
	1	2	∑
1	25 (20)	25 (30)	50
2	20 (25)	20 (15)	40
∑	45	45	90

- Testové kritérium – při platnosti H_0 má rozdělení χ^2 s 1 stupni volnosti:
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 1 + 1 + 1{,}25 + 1{,}25 = 4{,}5$$
- Kritická hodnota na hladině α: $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}841$, kritický obor $\chi^2 \geq 3{,}841$
- p-hodnota: $p = P(\chi^2 \geq 4{,}5) \approx 0{,}03389$
- Protože $p \approx 0{,}03389 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.

- Síla závislosti – Cramérovo V (0 žádná, 1 úplná)
$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(r,c)-1)}} = \sqrt{\frac{4{,}5}{90 \cdot 1}} \approx 0{,}2236$$
- Test χ² pracuje s četnostmi (počty případů), ne s procenty nebo průměry.

Graf

Rozdělení χ² – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



Dvě skupiny Mannovým–Whitneyovým testem – malé vzorky, přesná p-hodnota.

Zadání: `data(A = 23 25 28 30 26 27; B = 20 22 21 25 19 24 23)`

Pořadový test (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Výsledek

$$U = 3$$
$$z \approx -2{,}579$$
$$p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Nulová hypotéza: obě skupiny pocházejí ze stejného rozdělení, alternativní: hodnoty jedné bývají systematicky vyšší

  $H_0: F_A = F_B$
  $H_1: F_A \neq F_B$

- Hodnoty obou skupin dohromady seřadíme a očíslujeme pořadím R (stejným hodnotám průměr jejich pořadí)

x	R	
19	1	B
20	2	B
21	3	B
22	4	B
23	5,5	A
23	5,5	B
24	7	B
25	8,5	A
25	8,5	B
26	10	A
27	11	A
28	12	A
30	13	A

- Rozsahy skupin a součty jejich pořadí:
  $n_1 = 6, \quad n_2 = 7, \quad R_1 = 60, \quad R_2 = 31$

- Mannova–Whitneyho statistika U – počet dvojic, ve kterých má hodnota jedné skupiny vyšší pořadí než druhé; testujeme menší z obou

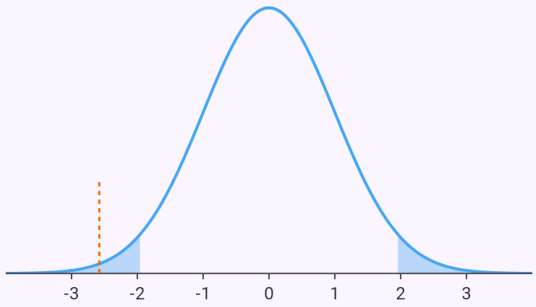
$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 60 - \frac{6 \cdot 7}{2} = 39$$
$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 6 \cdot 7 - 39 = 3$$
$$U = \min(U_1, U_2) = 3$$

- Testové kritérium – při platnosti H_0 má normované normální rozdělení: $z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_U} = \frac{3 - 21}{6{,}981} \approx -2{,}579$

- Kritická hodnota na hladině α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \geq 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}579) \approx 0{,}009922$
- Protože $p \approx 0{,}009922 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Velikost účinku r (orientačně 0,1 malá, 0,3 střední, 0,5 velká): $r = \frac{|z|}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}579}{\sqrt{13}} \approx 0{,}7152$
- Mannův–Whitneyho test je pořadový test: nepředpokládá normální rozdělení, hodí se i pro pořadová data a odlehlé hodnoty. Porovnává celé rozdělení skupin – když mají podobný tvar, je to test rozdílu mediánů.

Graf

Normované normální rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}579$

Párové hodnoty před a po Wilcoxonovým testem.

Zadání: `data(pred po; 72 70; 75 73; 68 69; 80 76; 77 74; 74 71; 79 72)`

Pořadový test (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis) · Párové

Výsledek

$$T = 1$$
$$z \approx -2{,}205$$
$$p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$$

Postup

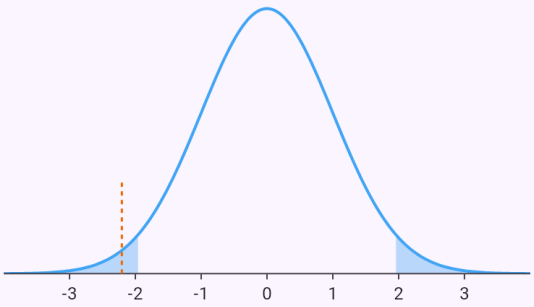
- Nulová hypotéza: medián rozdílů je nulový (žádná změna), alternativní: není: $H_0: \tilde{d} = 0, \quad H_1: \tilde{d} \neq 0$
- Rozdíly dvojic d⃗ (1. sloupec − 2. sloupec): $2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 7$; nulové rozdíly vynecháme: $n = 7$
- Nenulové rozdíly seřadíme podle velikosti (bez znaménka) a očíslujeme pořadím R; znaménko zůstává u pořadí

d_i	R	
-1	1	$-$
2	$2{,}5$	$+$
2	$2{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
3	$4{,}5$	$+$
4	6	$+$
7	7	$+$

- Součet pořadí kladných a záporných rozdílů
  $T^+ = 27$
  $T^- = 1$
  $T = \min\left(T^+, T^-\right) = 1$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má normované normální rozdělení:
  $$z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sigma_T} = \frac{1 - 14}{5{,}895} \approx -2{,}205$$
- Kritická hodnota na hladině α: $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$, kritický obor $|z| \geq 1{,}96$
- p-hodnota: $p = 2\,P(Z \geq 2{,}205) \approx 0{,}02743$
- Protože $p \approx 0{,}02743 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Velikost účinku r (orientačně 0,1 malá, 0,3 střední, 0,5 velká): $r = \frac{|z|}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}205}{\sqrt{7}} \approx 0{,}8335$
- Wilcoxonův test je pořadová obdoba párového t-testu: nepředpokládá normální rozdělení rozdílů, bere v úvahu jejich znaménka a velikost pořadím.

Graf

Normované normální rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad z \approx -2{,}205$

Tři skupiny Kruskalovým–Wallisovým testem.

Zadání: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

Pořadový test (Mann–Whitney, Wilcoxon, Kruskal–Wallis)

Výsledek

$$H \approx 8{,}263$$
$$p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Nulová hypotéza: všechny skupiny pocházejí ze stejného rozdělení, alternativní: aspoň jedna se liší
  $H_0: F_1 = \cdots = F_3$
  $H_1: \exists\, i, j: F_i \neq F_j$

- Hodnoty všech skupin dohromady seřadíme a očíslujeme pořadím R (stejným hodnotám průměr jejich pořadí)

x	R	
11	1	A
12	2,5	A
12	2,5	C
13	4,5	A
13	4,5	C
14	6,5	A
14	6,5	C
15	9	A
15	9	B
15	9	C
16	11,5	B
16	11,5	C
17	13	B
18	14	B
19	15	B

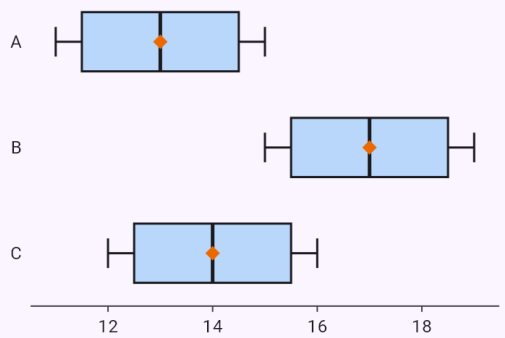
- Součty pořadí jednotlivých skupin
  $R_{\mathrm{A}} = 23{,}5 \ (n = 5)$
  $R_{\mathrm{B}} = 62{,}5 \ (n = 5)$
  $R_{\mathrm{C}} = 34 \ (n = 5)$

- Testové kritérium – při platnosti H_0 má rozdělení χ^2 s 2 stupni volnosti
  $$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{15 \cdot 16}\left(\frac{23{,}5^2}{5}\right.$$
  $$C = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N} = 1 - \frac{48}{3360} \approx 0{,}9857$$
  $$H_c = \frac{H}{C} = \frac{8{,}145}{0{,}9857} \approx 8{,}263$$

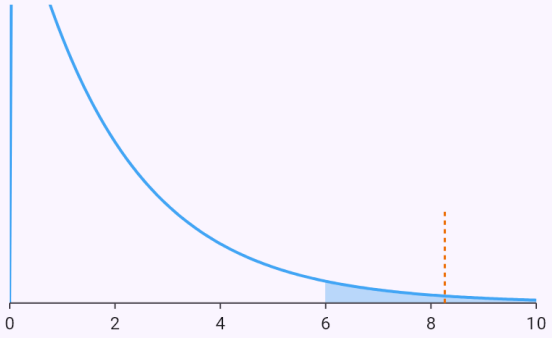
- Kritická hodnota na hladině α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, kritický obor $\chi^2 \geq 5{,}991$
- p-hodnota: $p = P(\chi^2 \geq 8{,}263) \approx 0{,}01606$
- Protože $p \approx 0{,}01606 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Velikost účinku ε^2 – podíl rozptylu pořadí vysvětlený skupinami: $\varepsilon^2 = \frac{H}{N-1} = \frac{8{,}263}{14} \approx 0{,}5902$
- Kruskalův–Wallisův test je pořadová obdoba jednofaktorové ANOVY. Říká jen, že se některé skupiny liší – které, ukáže až porovnání dvojic (Mannovým–Whitneyho testem s Bonferroniho korekcí).

Graf

Krabicový graf (medián, kvartily, odlehlé hodnoty; ◆ průměr)



Rozdělení χ^2 – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 \approx 8{,}263$

Průměry tří skupin jednofaktorovou ANOVOU.

Zadání: `data(A = 12 15 14 11 13; B = 16 18 17 15 19; C = 13 14 12 16 15)`

ANOVA (analýza rozptylu)

Výsledek

$$F \approx 8{,}667$$
$$p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$$
$$\eta^2 \approx 0{,}5909$$

Postup

- Nulová hypotéza: průměry všech skupin jsou stejné, alternativní: aspoň dva se liší

  $H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_3$

  $H_1: \exists\, i, j: \mu_i \neq \mu_j$

- Rozsahy, průměry a směrodatné odchylky skupin a celkový průměr $\bar{x} \approx 14{,}67$

	n_j	$\bar{x}_j$	s_j
A	5	13	1,581
B	5	17	1,581
C	5	14	1,581
$\sum$	15	14,67	

- Analýza rozptylu – součet čtverců mezi skupinami (B) a uvnitř skupin (W), stupně volnosti a průměrné čtverce

  $SS_B = \sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$

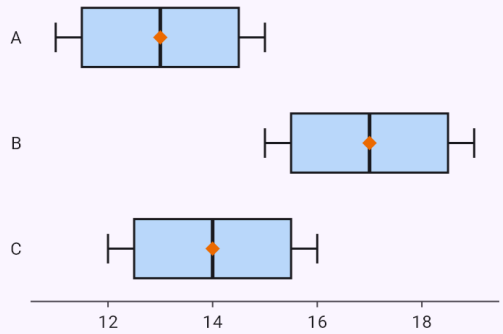
  $SS_W = \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$

	SS	df	MS	F
B	43,33	2	21,67	8,667
W	30	12	2,5	
$\sum$	73,33	14		

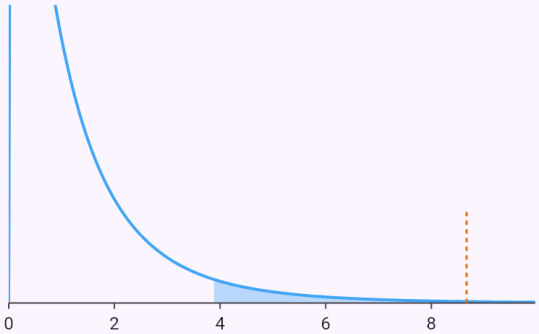
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má F-rozdělení s 2 a 12 stupni volnosti: $F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{21{,}67}{2{,}5} \approx 8{,}667$
- Kritická hodnota na hladině α: $F_{0{,}95}(2;\, 12) \approx 3{,}885$, kritický obor $F \geq 3{,}885$
- p-hodnota: $p = P(F \geq 8{,}667) \approx 0{,}004687$
- Protože $p \approx 0{,}004687 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- Velikost účinku η² – podíl rozptylu vysvětlený rozdíly mezi skupinami (orientačně 0,01 malá, 0,06 střední, 0,14 velká): $\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{43{,}33}{73{,}33} \approx 0{,}5909$
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- ANOVA předpokládá nezávislé skupiny, přibližně normální rozdělení v každé z nich a podobné rozptyly. Když to neplatí (malé skupiny, odlehlé hodnoty, pořadová data), použijte Kruskalův–Wallisův test.
- Zamítnutí H_0 říká jen, že se aspoň dva průměry liší. Které, ukáže až porovnání dvojic (post hoc testy, např. t-testy s Bonferroniho korekcí).

Graf

Krabicový graf (medián, kvartily, odlehlé hodnoty; ◆ průměr)



F-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad F \approx 8{,}667$

Test dobré shody s očekávanými podíly 1 : 2 : 1.

Zadání: `data(30 50 20)` Test χ² · Očekávané podíly 1:2:1

Výsledek

$$\chi^2 = 2$$
$$p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$$

Postup

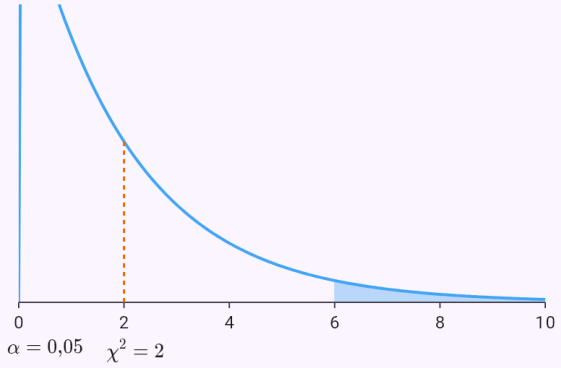
- Nulová hypotéza: kategorie mají zadané podíly, alternativní: aspoň jeden podíl se liší:
  $H_0: p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}5,\ p_3 = 0{,}25$
- Očekávané četnosti podle zadaných podílů
  $E_i = N \cdot p_i, \quad N = 100$ a příspěvky kategorií

i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
1	30	25	1
2	50	50	0
3	20	25	1
$\sum$	100	100	2

- Testové kritérium – při platnosti H_0 má rozdělení χ² s 2 stupni volnosti: $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1 + 0 + 1 = 2$
- Kritická hodnota na hladině α: $\chi^2_{0{,}95}(2) \approx 5{,}991$, kritický obor $\chi^2 \geq 5{,}991$
- p-hodnota: $p = P(\chi^2 \geq 2) \approx 0{,}3679$
- Protože $p \approx 0{,}3679 > \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme – data neposkytují dost důkazů proti ní.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Test χ² pracuje s četnostmi (počty případů), ne s procenty nebo průměry.

Graf

Rozdělení χ² – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



Kvadratická regrese.

Zadání: `data(x y; 1 2.1; 2 3.9; 3 9.2; 4 15.8; 5 25.1; 6 36.2)` Korelace a regrese · Kvadratická

Výsledek

$$\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$$

$$R^2 \approx 0{,}9997$$

Postup

- Počet hodnot $n = 6$, seřazená data
  $[1;\,2{,}1],\ [2;\,3{,}9],\ [3;\,9{,}2],\ [4;\,15{,}8],\ [5;\,25{,}1],\ [6;\,36{,}2]$
- Součty a průměry
  $\sum x_i = 21$
  $\sum x_i^2 = 91$
  $\sum x_i^3 = 441$
  $\sum x_i^4 = 2275$
  $\sum y_i = 92{,}3$
  $\sum x_i y_i = 443{,}4$
  $\sum x_i^2 y_i = 2284$
- Normální rovnice metody nejmenších čtverců pro ŷ = a + bx + cx²

$$\begin{aligned} 6a + 21b + 91c &= 92{,}3 \\ 21a + 91b + 441c &= 443{,}4 \\ 91a + 441b + 2275c &= 2284 \end{aligned}$$

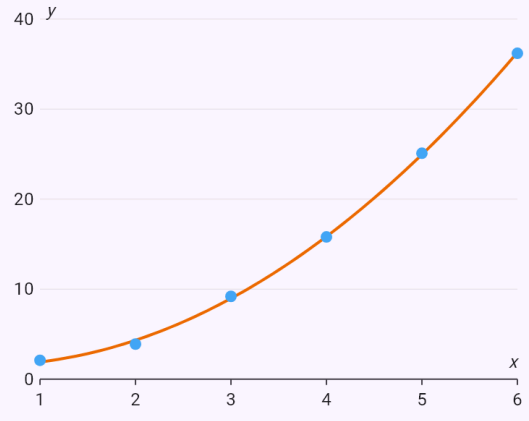
- Regresní křivka: $\hat{y} = 1{,}73 - 0{,}9354x + 1{,}116x^2$
- Koeficient determinace – křivka vysvětluje $99{,}97\,\%$ rozptylu y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}3012}{874{,}5} \approx 0{,}9997$$

- Regresní křivku je rozumné používat jen v rozsahu naměřených x – mimo něj (extrapolace) může být odhad velmi nepřesný.

Graf

Bodový graf s regresní křivkou



Exponenciální regrese linearizací.

Zadání: `data(x y; 0 2.0; 1 2.7; 2 3.7; 3 5.0; 4 6.8; 5 9.1)` Korelace a regrese · Exponenciální

Výsledek

$$\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$$

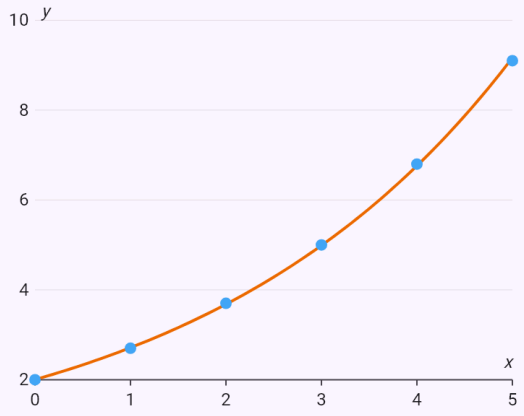
$$R^2 \approx 0{,}9998$$

Postup

- Počet hodnot $n = 6$, seřazená data
  $[0;\,2],\ [1;\,2{,}7],\ [2;\,3{,}7],\ [3;\,5],\ [4;\,6{,}8],\ [5;\,9{,}1]$
- Model převedeme logaritmováním na přímku v proměnných (u, v): $y = a\,e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$; transformované dvojice
  $[0;\,0{,}6931],\ [1;\,0{,}9933],\ [2;\,1{,}308],\ [3;\,1{,}609],\ [4;\,1{,}91$
- Koeficienty regresní přímky metodou nejmenších čtverců
  $$b = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum (u_i - \bar{u})^2} = \frac{5{,}324}{17{,}5} \approx 0{,}3042$$
  $$\ln a = \overline{\ln y} - b\bar{x} = 1{,}455 - 0{,}3042 \cdot 2{,}5 \approx 0{,}6943$$
- Koeficient a dostaneme zpětnou transformací:
  $a = e^{0{,}6943} \approx 2{,}002$
- Regresní křivka: $\hat{y} = 2{,}002\, e^{0{,}3042x}$
- Koeficient determinace – křivka vysvětluje $99{,}98\,\%$ rozptylu y.
  $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}006563}{35{,}95} \approx 0{,}9998$$
- Koeficienty jsou spočítané metodou nejmenších čtverců pro transformovaná data (logaritmy), ne pro původní hodnoty – výsledek se proto může trochu lišit od nelineární regrese ve statistických programech.
- Regresní křivku je rozumné používat jen v rozsahu naměřených x – mimo něj (extrapolace) může být odhad velmi nepřesný.

Graf

Bodový graf s regresní křivkou



Pravostranný t-test ze souhrnných hodnot: n = 25, x̄ = 104, s = 15, μ₀ = 100.

Zadání: `model(ttest; find=test[one]; n=25[one]; mean=104[one]; sd=15[one]; mu0=100[one];`

`alpha=0.05[one]; alternative=greater; sigma=sample)`

Výsledek

$t \approx 1{,}333$

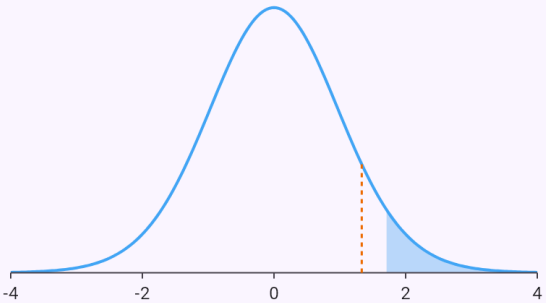
$p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$

Postup

- Hledáme t; zadáno:
  $n = 25, \quad \bar{x} = 104, \quad s = 15, \quad \mu_0 = 100, \quad \alpha = 0{,}05$
- t-test ověřuje, zda se průměr populace liší od zadané hodnoty μ_0. Testové kritérium $t = (\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n})$ má při platnosti nulové hypotézy t-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti; p-hodnota říká, jak pravděpodobný je takový nebo extrémnější výsledek, kdyby H_0 platila. Při známém σ jde o z-test. Rovnice modelu: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- Nulová a alternativní hypotéza:
  $H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu > 100$
- Směrodatná chyba: $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{15}{\sqrt{25}} = 3$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má t-rozdělení s 24 stupni volnosti: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{104 - 100}{3} \approx 1{,}333$
- Kritická hodnota na hladině α: $t_{0{,}95}(24) \approx 1{,}711$, kritický obor $t \geq 1{,}711$
- p-hodnota: $p = P(T \geq 1{,}333) \approx 0{,}09747$
- Protože $p \approx 0{,}09747 > \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme – data neposkytují dost důkazů proti ní.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Pro malý výběr ($n < 30$) t-rozdělení předpokládá, že data pocházejí z přibližně normálního rozdělení. U výrazně zešikmených dat nebo odlehlých hodnot je vhodnější neparametrický test.

Graf

t-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 1{,}333$

Welchův t-test dvou skupin ze souhrnných hodnot.

Zadání: `model(twosample; find=test[one]; n1=30[one]; mean1=52[one]; sd1=8[one]; n2=28[one];`

```
mean2=47[one]; sd2=10[one]; alpha=0.05[one]; variances=welch; alternative=two)
```

Výsledek

$$t \approx 2{,}093$$

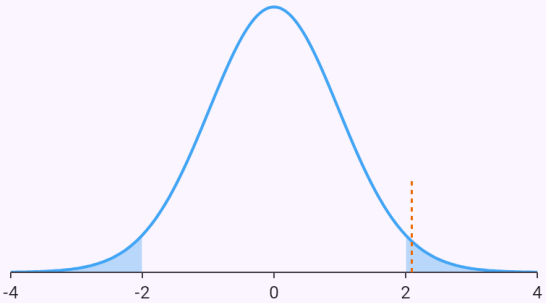
$$p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$$

Postup

- Hledáme t; zadáno $n_1 = 30, \quad \bar{x}_1 = 52, \quad s_1 = 8, \quad n_2 = 28, \quad \bar{x}_2 = 47,$
- Porovnání průměrů dvou nezávislých skupin. Welchův test nepředpokládá shodné rozptyly a je dnes doporučovanou volbou; klasický t-test se společným (váženým) rozptylem předpokládá, že obě skupiny mají rozptyl stejný. Stačí počty, průměry a směrodatné odchylky obou skupin. Rovnice modelu: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- Nulová a alternativní hypotéza: $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 \colon \mu_1 \neq \mu_2$
- Směrodatná chyba $SE = \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{8^2}{30} + \dfrac{10^2}{28}} \approx 2{,}388$
- Stupně volnosti podle Welche a Satterthwaita $\nu = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \approx 51{,}71$
- Testové kritérium – při platnosti H_0 má t-rozdělení s $51{,}71$ stupni volnosti: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} = \dfrac{52 - 47}{2{,}388} \approx 2{,}093$
- Kritická hodnota na hladině α: $t_{0{,}975}(51{,}71) \approx 2{,}007$, kritický obor $|t| \geq 2{,}007$
- p-hodnota: $p = 2\,P(T \geq 2{,}093) \approx 0{,}04124$
- Protože $p \approx 0{,}04124 \leq \alpha = 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme – výsledek je statisticky významný.
- p-hodnota je pravděpodobnost výsledku aspoň tak extrémního jako pozorovaný, pokud H_0 platí – není to pravděpodobnost, že H_0 platí. Nezamítnutí H_0 neznamená, že H_0 je pravdivá; statistická významnost neříká nic o velikosti ani praktickém významu rozdílu.
- Welchův test nepředpokládá shodné rozptyly obou skupin; jeho stupně volnosti v nemusí být celé číslo.

Graf

t-rozdělení – vybarvený je kritický obor, čárkovaně hodnota testového kritéria



$\alpha = 0{,}05 \quad t \approx 2{,}093$

Normální rozdělení: P(X < 85) pro N(100; 15²).

Zadání: `model(normal; find=below[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; x=85[one])`

Výsledek

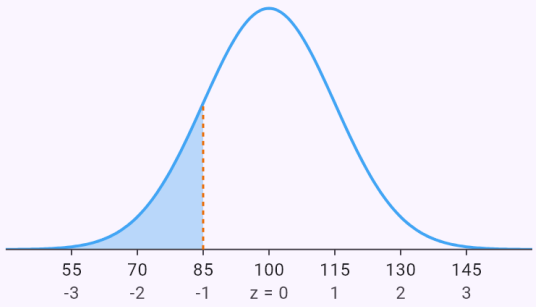
$$P(X < 85) \approx 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$$

Postup

- Hledáme P; zadáno: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad x = 85$
- Mnoho veličin (výška, výkon v testu, chyba měření) kolísá kolem průměru μ souměrně a čím dál od něj, tím vzácněji – tak to popisuje normální (Gaussovo) rozdělení N(μ; σ²) se směrodatnou odchylkou σ. Pravděpodobnosti se počítají přes standardizaci z = (x − μ)/σ a distribuční funkci Φ normovaného rozdělení N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kvantil je hodnota, pod kterou leží zadaný podíl p.
  Rovnice modelu
  $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
- Dosadíme: $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$
- Dosadíme
  $P(X < 85) = \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) \approx (1 - 0{,}8413) \approx 0$

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$P \approx 0{,}1587 \quad x = 85$

Podíl lidí s výškou mezi 160 a 185 cm při μ = 170, σ = 8.

Zadání: `model(normal; find=between[one]; mu=170[one]; sigma=8[one]; a=160[one]; b=185[one])`

Výsledek

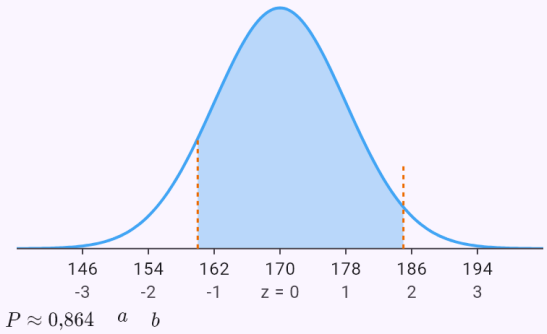
$$P(160 < X < 185) \approx 0{,}864 = 86{,}4\,\%$$

Postup

- Hledáme P; zadáno:
  $\mu = 170, \quad \sigma = 8, \quad a = 160, \quad b = 185$
- Mnoho veličin (výška, výkon v testu, chyba měření) kolísá kolem průměru μ souměrně a čím dál od něj, tím vzácněji – tak to popisuje normální (Gaussovo) rozdělení N(μ; σ²) se směrodatnou odchylkou σ. Pravděpodobnosti se počítají přes standardizaci z = (x − μ)/σ a distribuční funkci Φ normovaného rozdělení N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kvantil je hodnota, pod kterou leží zadaný podíl p.
  Rovnice modelu
  $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$
  $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$
- Vyjádříme hledanou veličinu: $z_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
- Dosadíme:
  $z_a = \dfrac{160 - 170}{8} = -1{,}25, \quad z_b = \dfrac{185 - 170}{8} = 1{,}875$
- Dosadíme
  $P(160 < X < 185) = \Phi(1{,}875) - \Phi(-1{,}25) \approx 0{,}9696$

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



Kvantil: skór, pod kterým leží 95 % populace.

Zadání: `model(normal; find=quantile[one]; mu=100[one]; sigma=15[one]; p=95[pct])`

Výsledek

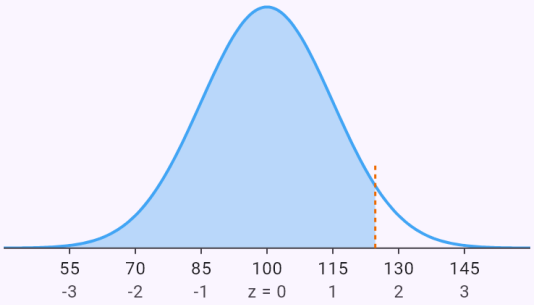
$$x \approx 124{,}7$$

Postup

- Hledáme x; zadáno: $\mu = 100, \quad \sigma = 15, \quad p = 95\,\%$
- Převedeme jednotky: $p = 95\,\% = 0{,}95$
- Mnoho veličin (výška, výkon v testu, chyba měření) kolísá kolem průměru μ souměrně a čím dál od něj, tím vzácněji – tak to popisuje normální (Gaussovo) rozdělení N(μ; σ²) se směrodatnou odchylkou σ. Pravděpodobnosti se počítají přes standardizaci z = (x − μ)/σ a distribuční funkci Φ normovaného rozdělení N(0; 1): P(X < x) = Φ(z). Kvantil je hodnota, pod kterou leží zadaný podíl p.
  Rovnice modelu
  $$X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$$
  $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;\, 1)$$
- Vyjádříme hledanou veličinu
  $$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow x = \mu + z_p\sigma, \quad z_p = $$
- Dosadíme
  $$z_{0{,}95} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645, \quad x = 100 + 1{,}645 \cdot 15 \approx 1$$

Graf

Hustota normálního rozdělení, vybarvená plocha je hledaná pravděpodobnost



$p = 0{,}95 \quad x \approx 124{,}7$

Známá omezení

- Kvartily se počítají jako mediány polovin (školní postup); statistické programy (Excel, SPSS) používají jiné vzorce a u malých souborů jim mohou vyjít trochu jinak.
- Porovnání dvojic skupin po ANOVĚ nebo Kruskalově–Wallisově testu (post hoc) a vícefaktorová ANOVA zatím nejsou – porovnejte dvojice t-testem nebo Mannovým–Whitneyovým testem s Bonferroniho korekcí; nelineární regrese se počítá linearizací.
- Data se zadávají jen ručně, mřížkou nebo souborem CSV – z fotky tabulky je aplikace zatím nerozpozná.

Vygenerováno z aplikace Mathtrace